



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

TP2

72.25 - Simulación de Sistemas

Grupo 2

Autores:

Martone, Gonzalo Alfredo¹ - 62141
Ballerini, Santiago² - 61746
Bosetti, Franco³ - 61654

Docentes:

Daniel Parisi
Germán Agustín Patterson
Lucas Wiebke

Fecha de entrega: 30 de Agosto de 2024

¹gmartone@itba.edu.ar

²sballerini@itba.edu.ar

³fbosetti@itba.edu.ar

Índice

1. Introducción	2
2. Modelo	3
2.1. Sistema Real	3
2.2. Modelo Matemático	3
3. Implementación	4
3.1. Modelo Computacional	4
4. Simulaciones	5
4.1. Parámetros	6
4.2. Estado inicial	6
4.3. Output	6
4.4. Observable	6
5. Resultados	7
5.1. Animaciones	7
5.2. Análisis del observable	10
5.2.1. Evolución temporal de la polaridad	10
5.2.2. Análisis de la polaridad media	10
6. Conclusiones	13

1. Introducción

Este trabajo práctico presenta un modelo de autómatas celulares basado en un sistema *Off-Lattice*, donde las partículas se desplazan de manera continua en un plano bidimensional con condiciones periódicas de contorno [1]. El objetivo del modelo es investigar la aparición espontánea de comportamiento cooperativo como resultado de la interacción entre partículas vecinas.

En este informe se detallarán las reglas que gobiernan el modelo, junto con su implementación. Asimismo, se analizará el comportamiento emergente del sistema al variar distintos parámetros clave.

2. Modelo

2.1. Sistema Real

En la naturaleza, los sistemas biológicos que exhiben comportamiento cooperativo y coordinado suelen estar compuestos por grandes grupos de individuos que interactúan entre sí. Ejemplos de este fenómeno incluyen las bandadas de aves, los cardúmenes de peces o los enjambres de insectos.

Las bandadas de aves, muestran patrones de vuelo coordinados. Cada ave en la bandada ajusta su comportamiento en función de las aves a su alrededor, manteniendo una distancia determinada y alineando su dirección de vuelo con la de sus vecinos. Este fenómeno, conocido como *flocking*, ilustra cómo el comportamiento colectivo del grupo puede surgir a partir de reglas de interacción seguidas por un gran número de individuos autopropulsados.

El modelo presentado en este trabajo práctico modela estos comportamientos mediante el uso de reglas sencillas. A continuación, se especifican dichas reglas.

2.2. Modelo Matemático

El modelo matemático se especifica de la siguiente manera. Las partículas se representan como puntos que se mueven de manera continua en una región bidimensional de lado L con condiciones periódicas de contorno. El intervalo de tiempo entre cada actualización de posición es $\Delta t = 1$.

En $t = 0$, se generan N partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio y con una dirección inicial θ .

La posición de la partícula i en $t + 1$ se actualiza de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t)\Delta t \quad (1)$$

Donde la velocidad de la partícula $v_i(t)$ tiene un módulo constante y varía únicamente en dirección. El ángulo de esta dirección se calcula como sigue:

$$\theta(t + 1) = \langle \theta(t) \rangle_r + \Delta \theta \quad (2)$$

$$\langle \theta(t) \rangle_r = \text{atan2}(\langle \sin(\theta(t)) \rangle_r, \langle \cos(\theta(t)) \rangle_r) \quad (3)$$

$$\Delta \theta \sim \mathcal{U}\left[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right] \quad (4)$$

Donde $\langle \theta(t) \rangle_r$ representa el promedio de los ángulos vecinos a la partícula, considerados dentro de un radio r alrededor de la partícula, y se obtiene mediante la Ec. (3). Esta componente modela la interacción entre agentes. $\Delta \theta$ sigue una distribución uniforme en el intervalo $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$, por lo que esta componente representa el ruido del sistema.

3. Implementación

3.1. Modelo Computacional

Mediante distintos objetos se modelaron los componentes básicos del sistema. Entre ellos se encuentran los siguientes:

1. Particle: encargada de sostener la información pertinente un agente del sistema.
2. ParticleGenerator: encargado de generar un conjunto de N partículas distribuidas aleatoriamente en un área de $L \times L$.
3. BoardState: encargado de mantener las partículas en una matriz de $M+1 \times M+1$ la cual luego es referenciada a la hora de calcular los vecinos mediante el uso del Cell Index Method.
4. Simulation: Se encarga de llamar a updateBoard lo cual avanza en 1 el timestep de la simulacion y de guardar el historial de estados de las particulas en un vector.

El ciclo de ejecución del programa es el siguiente:

Inicio

```
Generar las N particulas iniciales
Iniciar tablero de estado
Para t = 0 hasta tiempo_total hacer
    Guardar el tablero de estado actual en una lista
    Para n = 0 hasta N hacer
        Calcular vecinos de la particula
        Calcular promedio de direccion
        Actualizar direccion
        Mover particula
    Fin Para
Fin Para
Guardar la lista de estados en archivo
```

Fin

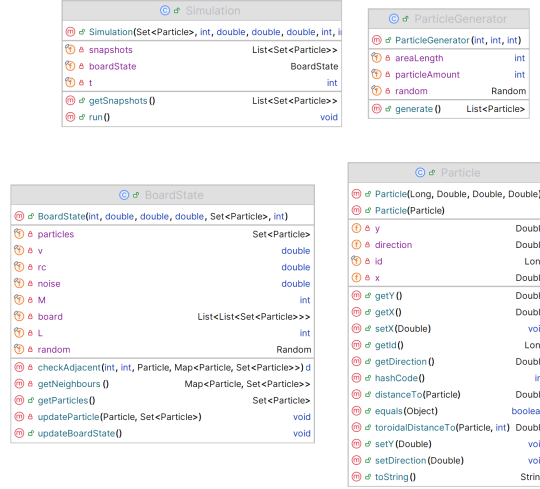


Figura 1: Diagrama UML, clases utilizadas

4. Simulaciones

El sistema se simula en un plano bidimensional continuo de lado L con condiciones periódicas de contorno. Los parámetros del modelo incluyen una velocidad (v), un radio de interacción (r), el ruido (η), el tamaño del espacio (L) y el número de partículas (N). A partir de estos dos últimos parámetros, se deriva un valor relevante, la densidad (ρ). En la Fig. 2 se muestra de forma ilustrativa el dominio de simulación. Donde (r) indica el radio de interacción de una partícula con sus vecinas.

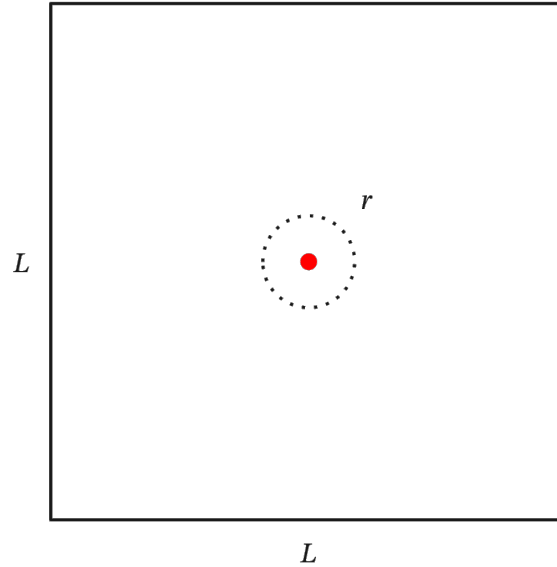


Figura 2: Dominio de simulación

4.1. Parámetros

Los parámetros que se mantuvieron fijos durante las simulaciones fueron $N = 400$, $r = 1$ y $v = 0,03$, similares a los utilizados por Vicsek et al. [1]

Para realizar las animaciones de la evolución del sistema, seleccionamos cuatro conjuntos de parámetros que varían en densidad y ruido con el fin de ilustrar distintos comportamientos del modelo. El primer conjunto de parámetros tiene $L = 25$ y $\eta = 0,1$, el segundo tiene $L = 5$ y $\eta = 0,1$, el tercer conjunto presenta $L = 5$ y $\eta = 2$, mientras que el ultimo tiene $L = 25$ y $\eta = 2$

Para realizar el análisis posterior, se variaron tanto el ruido como el tamaño del espacio L . El ruido η se ajustó en un rango que va desde 0.1 hasta 5, con un primer salto de 0.1 a 0.5 y luego incrementos discretos de 0.5. El tamaño del espacio L varia desde 1 hasta 10. De esta variación se obtiene un amplio rango de condiciones de ruido y densidad para explorar el comportamiento del sistema.

4.2. Estado inicial

Una vez definido el input, se debe establecer un estado inicial. Este se genera distribuyendo N partículas de manera uniforme dentro del área LxL , con posiciones (x, y) dentro de esta región y direcciones θ generadas uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4.3. Output

Para el output del sistema, se registra la posición y dirección de cada partícula en cada instante de tiempo t . Así obteniendo la evolución del sistema durante la simulación.

4.4. Observable

En base al output mencionado, se define un único observable utilizado para medir el orden en el sistema, representado como la polarización (v_a) y definido de la siguiente forma:

$$v_a = \frac{1}{Nv} \left| \sum_{i=1}^N v_i \right| \quad (5)$$

En la Ec. (5), primero se suman los vectores de velocidad v_i de las N partículas y se calcula el módulo del vector resultante. Luego, el valor se normaliza dividiendo por N y por la rapidez constante v , de manera tal que el valor de v_a siempre se encuentra en el rango de 0 a 1. Este observable permite cuantificar el grado de orden en el sistema. Cuando v_a tiende a cero, el sistema se encuentra en desorden completo, mientras que valores cercanos a uno indican un alto grado de orden, donde todas las partículas se encuentran alineadas.

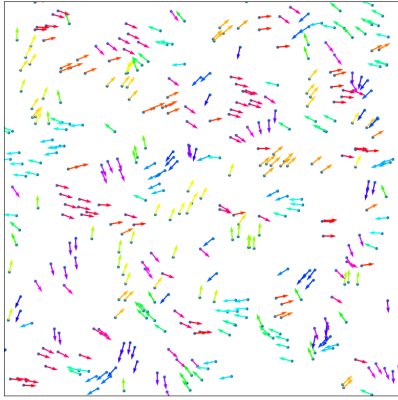
El valor de v_a se calcula en cada instante t de la simulación. Para determinar la respuesta permanente del sistema, se calcula el promedio de v_a durante su estado estacionario, cuando sus variaciones en el tiempo se estabilizan.

5. Resultados

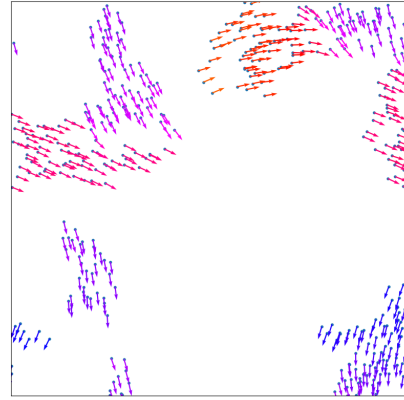
5.1. Animaciones

Como se mencionó anteriormente, para las animaciones utilizamos tres conjuntos de parámetros. A continuación, se presentan dos capturas de cada animación: una correspondiente a $t = 10$ y otra a $t = 500$. En cada imagen, los puntos representan la posición de las partículas, mientras que los vectores indican su dirección de movimiento. Además, cada figura incluye un enlace a la animación completa, donde se puede apreciar la evolución del sistema en su totalidad.

En la Fig. 3, con un tamaño del espacio de $L = 25$ y un ruido $\eta = 0,1$ (lo que implica baja densidad y bajo ruido), se puede observar cómo a medida que avanza la simulación, las partículas comienzan a agruparse en distintos grupos. Cada grupo se desplaza de manera coherente en una misma dirección, lo que refleja un comportamiento ordenado pero con discrepancias entre grupos.



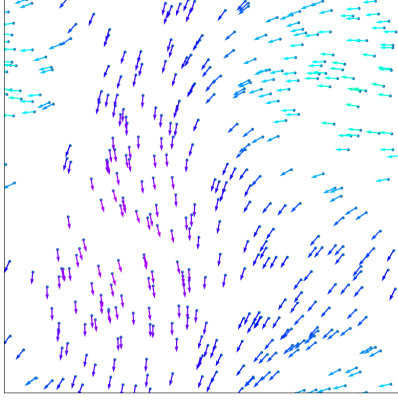
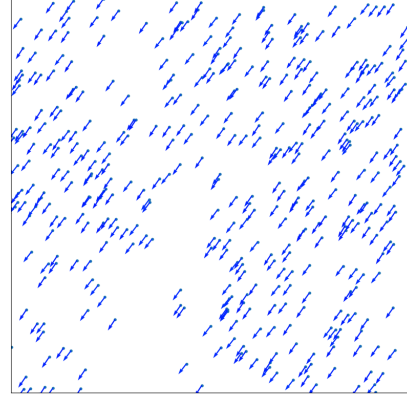
(a) Animación en $t = 10$



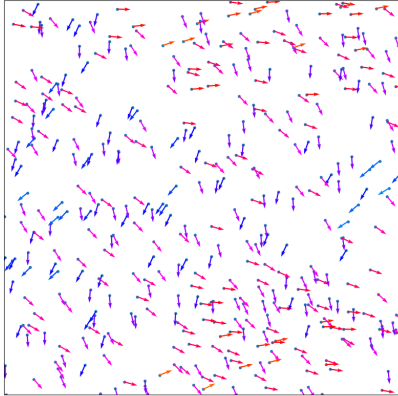
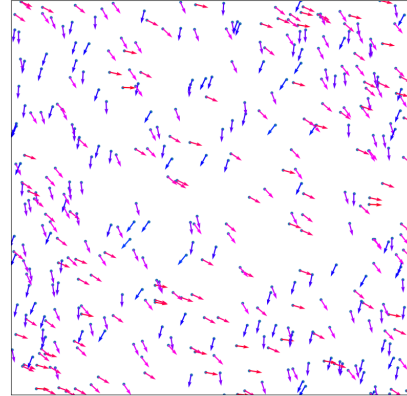
(b) Animación en $t = 500$

Figura 3: Capturas de la animación con $L = 25$ y $\eta = 0,1$. [Ver la animación completa](#)

En la Fig. 4, con un tamaño del espacio de $L = 5$ y un nivel de ruido $\eta = 0,1$ (lo que corresponde a alta densidad y bajo ruido), se observa que todas las partículas alinean sus direcciones, manifestando un comportamiento totalmente ordenado.

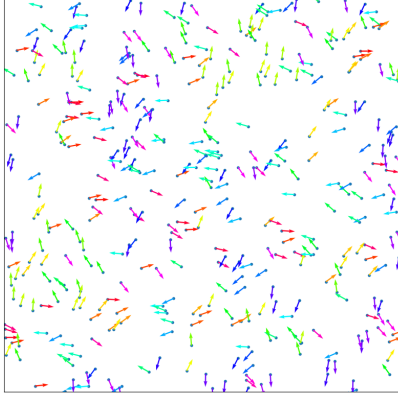
(a) Animación en $t = 10$ (b) Animación en $t = 500$ Figura 4: Capturas de la animación con $L = 5$ y $\eta = 0,1$. [Ver la animación completa](#)

En la Fig. 5, con un espacio de simulación de tamaño $L = 5$ y un nivel de ruido elevado de $\eta = 2$, se puede observar que las partículas exhiben cambios frecuentes y aleatorios en su dirección. No obstante, si se analiza un intervalo de tiempo prolongado, la mayoría de las partículas tienden a seguir trayectorias similares, a pesar de la alta variabilidad en sus direcciones a corto plazo.

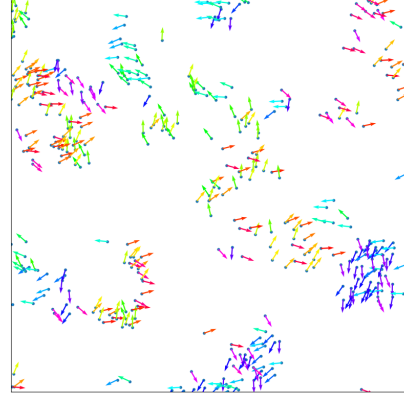
(a) Animación en $t = 10$ (b) Animación en $t = 500$ Figura 5: Capturas de la animación con $L = 5$ y $\eta = 2$. [Ver la animación completa](#)

en la Fig. 6, con un tamaño del espacio de $L = 25$ y un nivel de ruido $\eta = 2$ (baja densidad y alto ruido), no solo se observa una variabilidad significativa en la dirección de

cada partícula a corto plazo, sino que también se detectan comportamientos erráticos en intervalos de tiempo más prolongados.



(a) Animación en $t = 10$



(b) Animación en $t = 500$

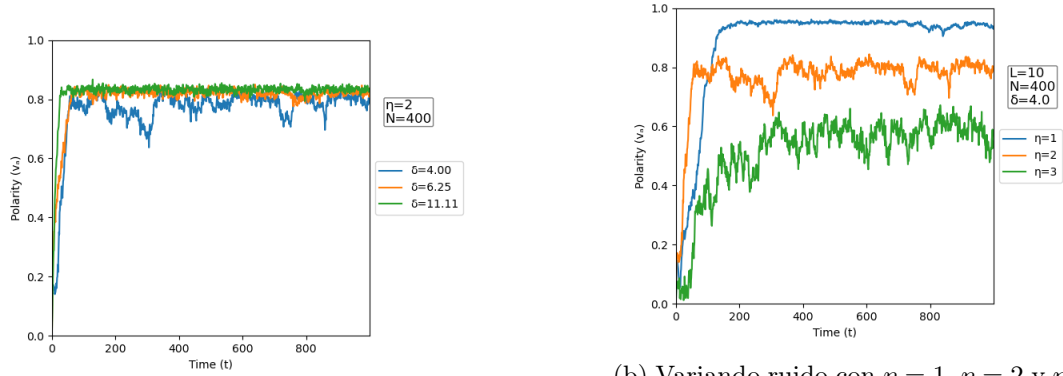
Figura 6: Capturas de la animación con $L = 25$ y $\eta = 2$. [Ver la animación completa](#)

Con base en estas observaciones, se pueden formular las siguientes hipótesis: a medida que η aumenta, también lo hace el desorden en el sistema. Por el contrario, a medida que la densidad aumenta, se observa un mayor orden. Para cuantificar este nivel de orden, se utiliza el observable v_a , definido previamente. A continuación, se procederá a un análisis más detallado de este observable.

5.2. Análisis del observable

5.2.1. Evolución temporal de la polaridad

El objetivo de los siguientes gráficos, que muestran el valor de la polaridad (v_a) a lo largo del tiempo, es analizar su evolución temporal para diferentes densidades y niveles de ruido. Esto permite identificar el período estacionario del sistema y, a partir de ahí, calcular su promedio para obtener la respuesta final del mismo.



(a) Variando densidad con $\delta = 4,00$, $\delta = 6,25$ y $\delta = 11,11$. $\eta = 2$ y $N = 400$ fijos

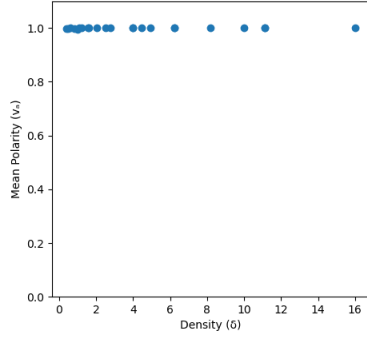
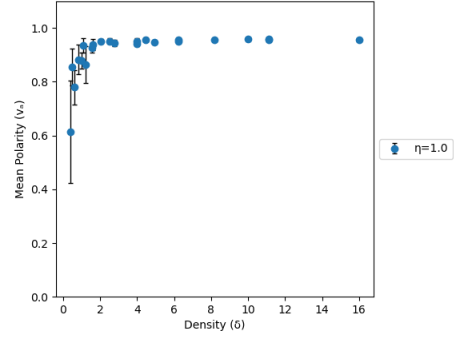
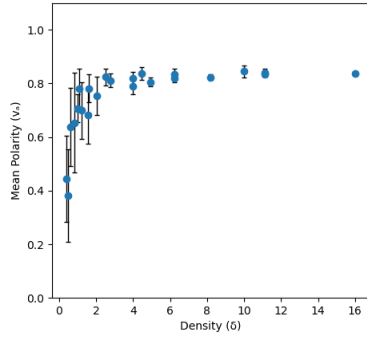
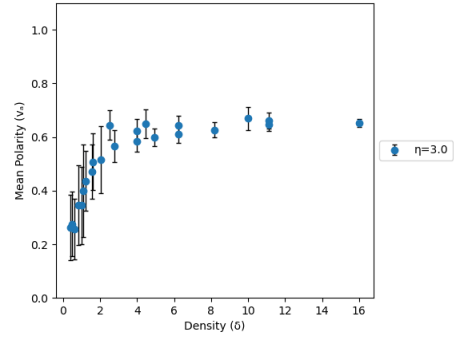
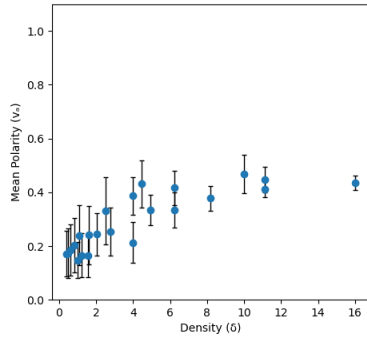
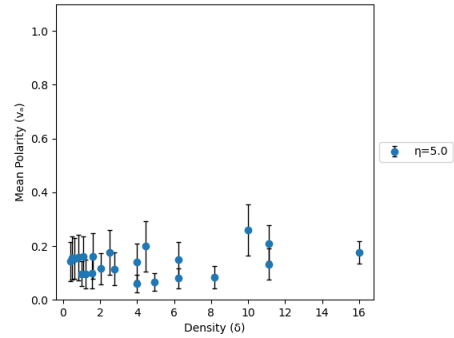
(b) Variando ruido con $\eta = 1$, $\eta = 2$ y $\eta = 3$. $N = 400$ y $L = 10$ fijos, resultando en un $\delta = 4,0$

Figura 7: Polaridad a lo largo del tiempo

Como se muestra en la Fig. 7, el sistema alcanza un período estacionario rápidamente. Por lo tanto, para asegurar un margen de seguridad, se tomarán los valores de v_a entre $t = 700$ y $t = 1000$ para calcular el promedio de este observable.

5.2.2. Análisis de la polaridad media

Para analizar la respuesta del sistema a las variaciones en el ruido (η) y la densidad (δ), se presentan a continuación dos conjuntos de gráficos. El primero, la Fig. 8, muestra cómo varía el observable v_a en función de la densidad para diferentes niveles de ruido. El segundo conjunto de gráficos, Fig. 9, muestra la variación de v_a en función del ruido para distintos niveles de densidad.

(a) Polaridad promedio vs densidad, $\eta = 0,1$ (b) Polaridad promedio vs densidad, $\eta = 1$ (c) Polaridad promedio vs densidad, $\eta = 2$ (d) Polaridad promedio vs densidad, $\eta = 3$ (e) Polaridad promedio vs densidad, $\eta = 4$ (f) Polaridad promedio vs densidad, $\eta = 5$ Figura 8: Polaridad promedio vs densidad, para distintos η .

En la sección 5.1, se pudo ver que a medida que δ aumentaba se podía observar un mayor orden de las partículas a lo largo del dominio de la simulación. Esto también se ve reflejado en el conjunto de gráficos de la Fig. 8 ya que se puede ver que a medida que se aumenta la densidad, la polarización promedio de los agentes tiende a aumentar. Si se toma por ejemplo a la Fig. 8c, se distingue claramente que la polarización media durante

el período estacionario crece a medida que se toman valores de δ más altos. Este patrón es común a todos los gráficos, excepto para la Fig. 8f donde el η es tan alto que el sistema comienza a tener un comportamiento más impredecible. Por el contrario, en la Fig. 8a el orden es tan elevado (bajo η) que no se logra apreciar el fenómeno mencionado. A su vez, se puede apreciar que el desvío estándar tiende a reducirse a medida que aumenta la densidad del sistema.

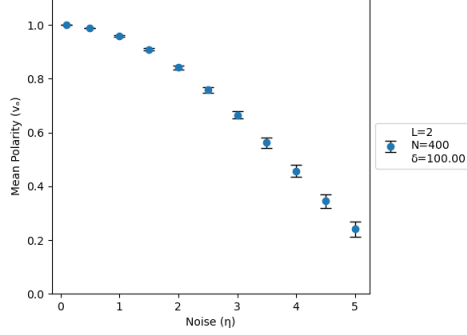
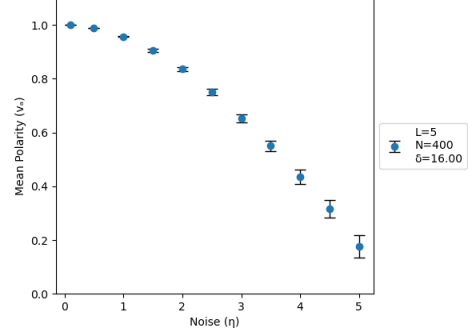
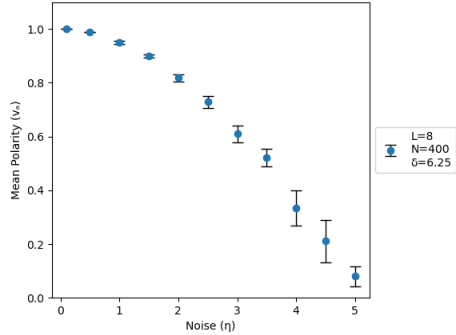
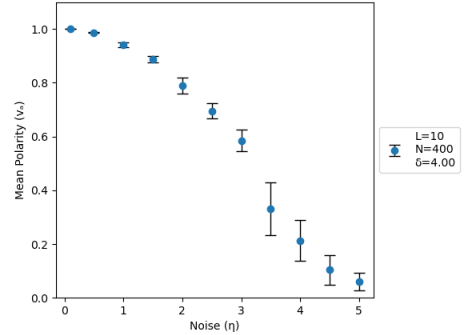
(a) Polaridad promedio vs ruido, $\delta = 100$ (b) Polaridad promedio vs ruido, $\delta = 16$ (c) Polaridad promedio vs ruido, $\delta = 6.25$ (d) Polaridad promedio vs ruido, $\delta = 4$

Figura 9: Polaridad promedio vs η , para distintas densidades.

Agregando a lo observado, y partiendo de la hipótesis de que un mayor η induce un mayor desorden y, en consecuencia, un menor valor de v_a , se observa en la Fig. 9 que esta tendencia ocurre para todas las densidades analizadas. Se puede notar en las Fig. 9d y 9c que, a densidades mas bajas, el desvío estándar de la media de la polaridad en su estado estacionario es mayor que para mayores densidades, pese a esto la tendencia sigue siendo clara.

6. Conclusiones

En este trabajo se implementó el autómata Off-Lattice, propuesto por Vicsek et al. [1]. A partir de esto, se realizaron diversas simulaciones para investigar la relación entre los parámetros, como la densidad (δ) y la amplitud de ruido (η), con el observable v_a .

El análisis desarrollado sobre el modelo revela como diversos parámetros afectan el comportamiento colectivo de las partículas. En particular, se observa que un aumento en el nivel de ruido (η) conlleva a un menor grado de orden, reflejado en una reducción del observable v_a , y a un incremento en el desorden general del sistema. También se notó que una mayor densidad de partículas se asocia con un aumento en v_a , indicando un mayor orden y estabilidad en el sistema. Sin embargo, se nota que a menores densidades, la estabilidad del observable v_a disminuye, lo que sugiere que el sistema es menos predecible y más variable en su comportamiento.

Vinculando todo este desarrollo con el modelo real que se busca representar, podemos interpretar el parámetro de ruido (η) como un indicador del nivel de desobediencia de los agentes, análogo a un ave que trata de desviarse del comportamiento colectivo de la bandada. Asimismo, la densidad puede relacionarse con el tamaño y cohesión de la bandada: en un grupo más grande y denso, las interacciones entre los agentes son más frecuentes, lo que reduce la probabilidad de que un individuo rompa la corriente y se desvíe de la dirección común. No obstante, dada la simplicidad del modelo, es importante ser cautelosos al establecer estas comparaciones entre la simulación y los fenómenos observados en la naturaleza.

Referencias

- [1] T. Vicsek et al. “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles”.
En: *Physical Review Letters* 75.6 (1995), pág. 1226.