LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

(GRAPH THEORY)

GV: Lê Mậu Long

Mục tiêu

- ✓ Học phần nhằm cung cấp cho người học:
- ✓ Những kiến thức về lý thuyết đồ thị,
- ✓ Mô hình hóa các bài toán thực tế, vận dụng các thuật toán của lý thuyết đồ thị và tối ưu hóa lời giải,
- ✓ Đánh giá được tính đúng đắn của thuật toán,
- ✓ Áp dụng được kiến thức cơ bản về đồ thị làm nền tảng cho kiến thức chuyên ngành công nghệ thông tin,
- ✓ Vận dụng lý thuyết đồ thị để thiết kế mạng máy tính, mạng ảo trong các hệ thống tính toán.

Nội dung môn học

- ✓ Đồ thị
- ✓ Các bài toán về chu trình
- ✓ Đồ thị phẳng
- ✓ Cây - Cây bao trùm
- ✓ Cây bao trùm nhỏ nhất
- ✓ Đường đi ngắn nhất
- ✓ Một số bài toán ứng dụng

Tài liệu tham khảo

Tài liệu/giáo trình chính, bắt buộc:

- *[1] Kenneth H. Rosen. 2012, DISCRETE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, SEVENTH EDITION, The McGraw-Hill Companies, Inc.,*

Tài liệu tham khảo khác:

- *[2] Jean Gallier, 2019, DISCRETE MATHEMATICS, SECOND EDITION IN PROGRESS, Spinger*

Đồ thị

Môn học: Lý thuyết đồ thị

GV : Lê Mậu Long

Nội dung

- ✓ Định nghĩa đồ thị.
- ✓ Biểu đồ.
- ✓ Bậc của đỉnh
- ✓ Ma trận kề.
- ✓ Đường và chu trình
- ✓ Sự liên thông
- ✓ Đồ thị có hướng

Định nghĩa

- Đồ thị G (Graph) là một bộ gồm 2 tập hợp V và E, trong đó:
  - V là tập hợp các *đỉnh* (Vertices),
  - $E \subseteq V \times V$ là tập hợp các *cạnh* (Edges) nối 2 đỉnh.

Khi đó ta ký hiệu $G = (V, E)$ và được gọi là *đồ thị vô hướng*.

Ví dụ: Mạng máy tính, mạng xã hội, website, mạng lưới giao thông.

Định nghĩa

- Cạnh e nối 2 đỉnh v và w
  - v và w là 2 *đỉnh kề nhau*
  - e là *cạnh tới* v và w, ký hiệu là $e = \overline{vw}$ hay $v \overset{e}{-} w$
- Cạnh $e = \overline{vv}$ tương ứng 2 đỉnh trùng nhau được gọi là *cạnh vòng* tại v.
- Hai cạnh phân biệt nối cùng 1 cặp đỉnh được gọi là *song song*.

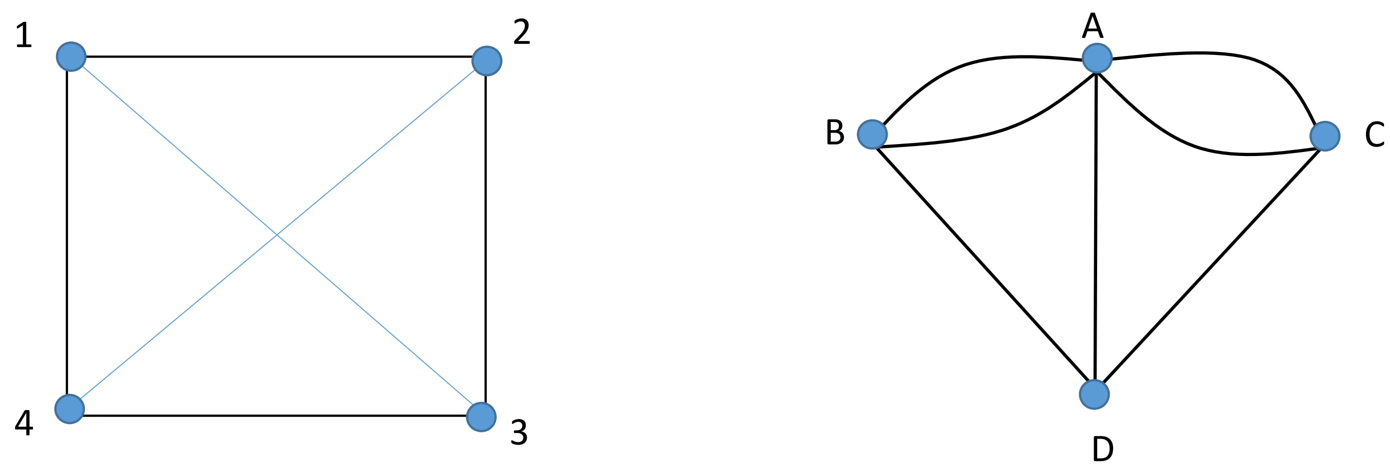
Định nghĩa

- Đồ thị không có cạnh vòng và cạnh song song được gọi là *đơn đồ thị* (simple graph), ngược lại gọi là *đa đồ thị* (multigraph).
- Đơn đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau được gọi là *đồ thị đầy đủ* (complete graph), ký hiệu là K_n.
- Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là *đồ thị con* (subgraph) của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$.

Biểu đồ

Một đồ thị thường được biểu diễn bằng một biểu đồ như sau:

- Một đỉnh được biểu diễn bằng một điểm,
- Một cạnh được biểu diễn bằng một đoạn nối hai đỉnh tương ứng.



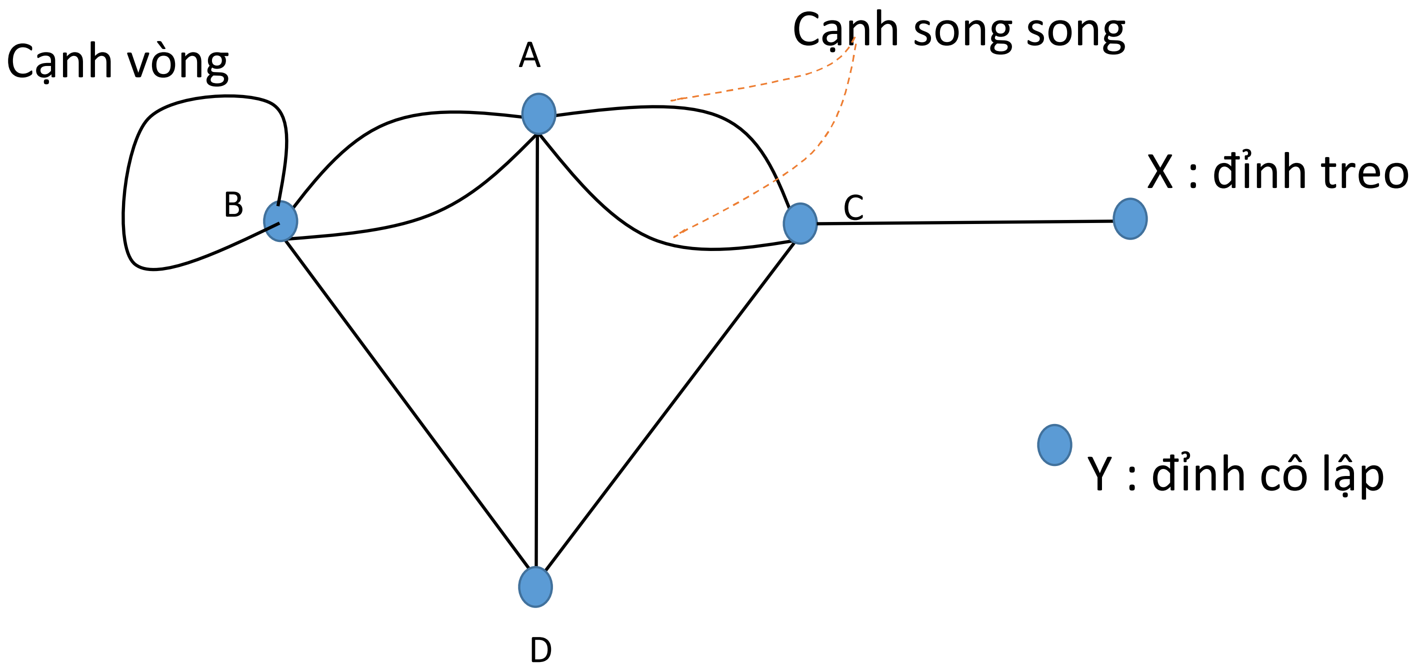
Bậc của đỉnh

Xét đỉnh v của đồ thị G, bậc của đỉnh v là số cạnh tới v, trong đó cạnh vòng được tính là 2, ký hiệu là $d(v)$.

- Đỉnh có bậc bằng 0 gọi là *đỉnh cô lập*,
- Đỉnh có bậc bằng 1 gọi là *đỉnh treo*, cạnh tương ứng gọi là *cạnh treo*.
- Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập được gọi là *đồ thị rỗng* (Null graph).

Bậc của đỉnh

- Ví dụ



$$d(A) = 5$$
$$d(B) = 5$$
$$d(C) = 4$$
$$d(D) = 3$$
$$d(X) = 1$$
$$d(Y) = 0$$

Bậc của đỉnh

Định lý

Cho đồ thị $G = (V, E)$, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng 2 lần số cạnh

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

CM:

Mỗi cạnh tham gia đồ thị làm tăng tổng bậc là 2

Bậc của đỉnh

Hệ quả

Cho đồ thị $G = (V, E)$, ta có:

a) Tổng bậc của tất cả các đỉnh bậc lẻ của G là một số chẵn,

b) Số đỉnh bậc lẻ của G là một số chẵn,

c) Nếu G là đơn đồ thị đầy đủ có n đỉnh thì có $n(n-1)/2$ cạnh

CM:

a) Phân hoạch $V = V_{chẵn} \cup V_{lẻ}$, ta có:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_{chẵn}} d(v) + \sum_{v \in V_{lẻ}} d(v)$$

b) Suy ra từ a)

c) Ta có $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} (n-1) = n(n-1)$

Bậc của đỉnh

Ví dụ

Cho đồ thi $G = (V, E)$ có 24 cạnh, mọi đỉnh đều có bậc là 4, tìm số đỉnh?

Ta có

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = 4|V|$$

$$\Rightarrow |V| = \frac{|E|}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

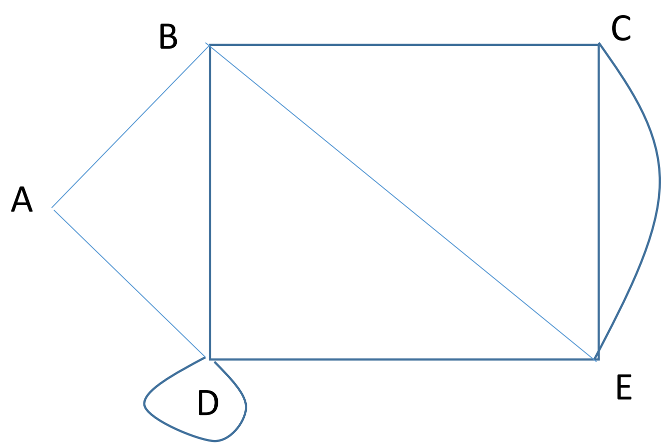
Ma trận kề

- Cho đồ thị $G = (V, E)$ có *n* đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ma trận kề (adjacency matrix) của G ứng với thứ tự các đỉnh là ma trận

$$M = [m_{ij}]; \quad với\ i, j = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó m_{ij} = số cạnh nối đỉnh v_i với v_j, cạnh vòng được tính là *2*

Ví dụ



$$M = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận kề

Định lý

Đồ thị $G = (V, E)$ với $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ có ma trận kề M.
Tổng các phần tử trên dòng (hay cột) thứ *i* của ma trận liên kết M bằng bậc của đỉnh v_i

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} = d(v_i); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

CM: theo định nghĩa ma trận liên kết

Đường và chu trình

- Đường (path)

Cho đồ thị G, một đường P trong G là 1 dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_k$ *đôi một khác nhau*, trong đó

$$e_i = \overline{v_{i-1}v_i}; \qquad i = 1, \dots, k$$

Ký hiệu $P = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \dots\dots \xrightarrow{e_k} v_k$

hay $P = v_0 v_1 \dots \dots v_k$

Khi đó k được gọi là độ dài của đường P, ký hiệu $l(P) = k$.

Một đỉnh được xem là một đường có độ dài bằng *0.*

Đường và chu trình

- Chu trình (cycle, circuit)

Cho đồ thị G, một chu trình trong G là một đường trong G có dạng

$$C = v_0 v_1 \dots \dots v_k v_0$$

Đối với 1 chu trình, có thể xuất phát từ một đỉnh bất kỳ:

$$C = v_0 v_1 \dots \dots v_k v_0 = v_1 v_2 \dots \dots v_k v_0 v_1 = v_i v_{i+1} \dots \dots v_k v_0 \dots v_{i-1}\, v_i$$

- Một chu trình (đường) được gọi là *đơn giản* (simple) nếu nó đi qua một đỉnh không quá một lần.

Sự liên thông

- Một đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *liên thông* (connected) nếu giữa hai đỉnh bất kỳ trong G luôn tồn tại một đường nối chúng.
- Trên tập V ta xét một quan hệ ~

$$\forall v, w \in V, \qquad v \sim w \Leftrightarrow \exists P = v \ldots \ldots w \subset G$$

Có thể kiểm chứng được ~ là một quan hệ tương đương.

- Mỗi lớp tương đương là một đồ thị con liên thông của G được gọi là thành phần liên thông (connected component) của G.
- G liên thông $\Leftrightarrow$ G chỉ có đúng một thành phần liên thông.

Đồ thị có hướng

- Đồ thị $G = (V, E)$, nếu mỗi cạnh $e \in E$ là một cặp thứ tự (v, w) *với* $v, w \in V$ *thì ta nói* e là *cạnh có hướng*, *ký hiệu* $e = \overrightarrow{vw}$ và *G* được gọi là *đồ thị có hướng*.
- Xét cạnh $e = \overrightarrow{vw}$,
  - Đỉnh v được gọi *đỉnh đầu* của e và cạnh e *tới ngoài* v,
  - Đỉnh w được gọi *đỉnh cuối* của e và cạnh e *tới trong* w.
- Xét $v \in V$
  - *Bậc ngoài của* v *:* $d_{out}(v) = \text{Số cạnh tới ngoài } v$
  - *Bậc trong của* v *:* $d_{in}(v) = \text{Số cạnh tới trong } v$

  Đỉnh v được gọi là *cân bằng* nếu $d_{in}(v) = d_{out}(v)$

Đồ thị có hướng

- Định lý

Cho G là đồ thị có hướng, tổng bậc trong và tổng bậc ngoài của tất cả các đỉnh thì bằng nhau và bằng số cạnh.

$$\sum_{v \in V} d_{in}(v) = \sum_{v \in V} d_{out}(v) = |E|$$

CM: Mỗi cạnh tới trong một đỉnh và tới ngoài một đỉnh.

- Đồ thị có hướng G được gọi là *cân bằng nếu và chỉ nếu mọi đỉnh đều cân bằng*.

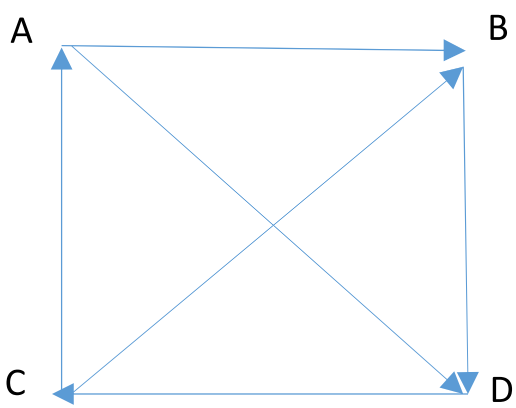
Đồ thị có hướng

- Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có n đỉnh $v_1,\ v_2, \dots v_n$. Ma trận kề (adjacency matrix) của G ứng với thứ tự các đỉnh là ma trận

$$M = \left[m_{ij}\right]; \quad với\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Trong đó $m_{ij}\ =$ số cạnh có đỉnh đầu là v_i và đỉnh cuối là v_j

Ví dụ:



$$d_{out}(A) = 2, \quad d_{in}(A) = 1$$
$$d_{out}(B) = 1, \quad d_{in}(B) = 2$$
$$d_{out}(C) = 2, \quad d_{in}(C) = 1$$
$$d_{out}(D) = 1, \quad d_{in}(D) = 2$$

$$M = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ \\ \end{array}$$

Đồ thị có hướng

- Định lý

Cho đồ thị có hướng G với ma trận kề $M = [m_{ij}];\ \text{với}\ i, j = 1, 2, \dots, n$. Tổng các phần tử trên dòng (cột) thứ i bằng bậc ngoài (trong) của đỉnh $v_i\ \text{với}\ i = 1, 2, \dots, n$.

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = d_{out}(v_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ji} = d_{in}(v_i)$$

CM: từ định nghĩa

Đồ thị có hướng

- Xét đồ thị có hướng *G*
  - Một đường có hướng trong *G* là một dãy các đỉnh $v_0 v_1 \dots \dots v_k$ sao cho các cạnh có hướng đôi một khác nhau.
  - Một chu trình trong *G* là một đường có hướng có dạng

$$C = v_0 v_1 \dots \dots v_k v_0$$

- Một đồ thị có hướng được gọi là *liên thông mạnh* (strongly connected) nếu giữa 2 đỉnh bất kỳ luôn tồn tại đường nối chúng.

Đồ thị có hướng

- Xét đồ thị có hướng *G*
  - Một đồ thị có hướng được gọi là *liên thông* nếu đồ thị vô hướng tương ứng liên thông.
  - Một đồ thị có hướng được gọi là *đầy đủ* nếu đồ thị vô hướng tương ứng đầy đủ.

Tóm tắt

- ✓ Định nghĩa đồ thị.
- ✓ Biểu đồ.
- ✓ Bậc của đỉnh
- ✓ Ma trận kề.
- ✓ Đường và chu trình
- ✓ Sự liên thông
- ✓ Đồ thị có hướng