ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

GV: Lê Mậu Long

Nội dung

✓Thuật toán DIJKSTRA.

✓ Thuật toán FLOYD.

I. Thuật toán DIJKSTRA

Bài toán

- Xét đồ thị có hướng có trọng số liên thông G = (V, E). Bài toán đặt ra là tìm đường đi ngắn nhất (tổng trọng số nhỏ nhất) giữa 2 đỉnh bất kỳ cho trước.
- Trọng số cạnh $e = \overrightarrow{uv}$ ký hiệu là $c(e)$
- Ma trận trọng số C được xác định như sau:

$$C(u,v) = \begin{cases} c(e) & \text{nếu } e \in E \\ \infty & \text{nếu } e \notin E \end{cases}$$

Thuật toán DIJKSTRA

Bài toán đặt ra là tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh gốc v_0 đến đỉnh v bất kỳ.

Xây dựng hai hàm:

- Hàm độ dài đường đi

$$\delta: V \rightarrow N$$

$$v \mapsto \delta(v): \text{độ dài đường đi từ } v_0 \text{ đến } v$$

- Hàm xác định đường đi

$$\pi: V \rightarrow V$$

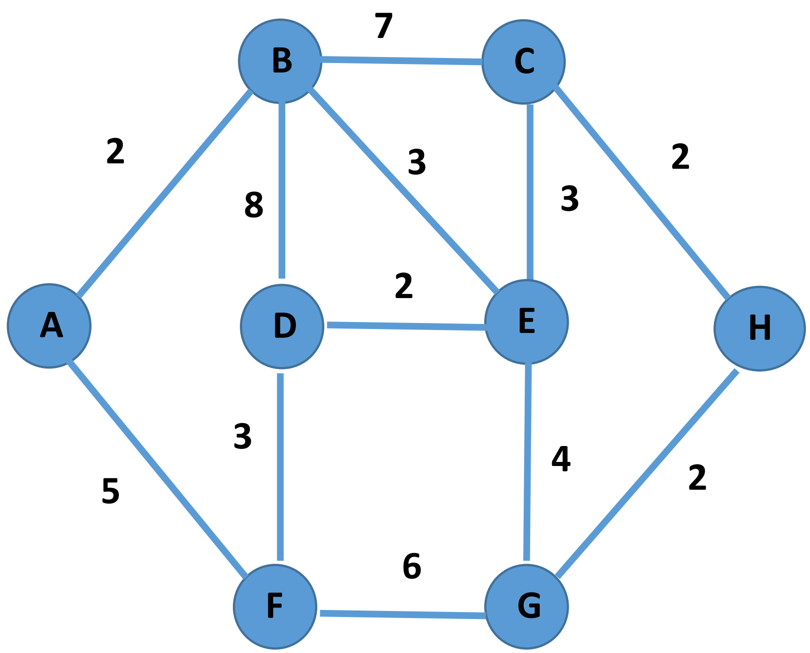
$$v \mapsto \pi(v): \text{đỉnh ngay trước } v \text{ trên đường đi đến } v$$

Thuật toán DIJKSTRA

- B1: Khởi tạo:
  - $L = \{v_0\}$
  - $\forall v \in V\backslash\mathrm{L}$: $\begin{cases} \delta(v) = C(v_0, v) \\ \pi(v) = v_0 \end{cases}$
- B2: Nếu $V = L$ $\rightarrow$ Dừng thuật toán
- B3: Tìm $v \in V\backslash\mathrm{L}$ sao cho $\delta(v)$ nhỏ nhất. Đặt $v^* = v$ vào L, cập nhật lại hàm δ và π:

$\forall v \in V\backslash\mathrm{L}$: nếu $\delta(v) > \delta(v^*) + C(v^*, v)$: $\begin{cases} \delta(v) = \delta(v^*) + C(v^*, v) \\ \pi(v) = v^* \end{cases}$

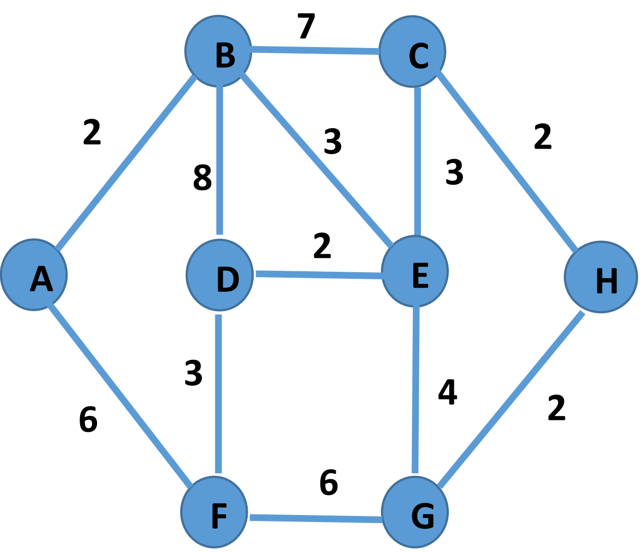
Ví dụ



Ma trận trọng số

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \begin{bmatrix} - & 2 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty \\ 2 & - & 7 & 8 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & - & \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 8 & \infty & - & 2 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 3 & 2 & - & \infty & 4 & \infty \\ 6 & \infty & \infty & 3 & \infty & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 6 & - & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & - \end{bmatrix}$$

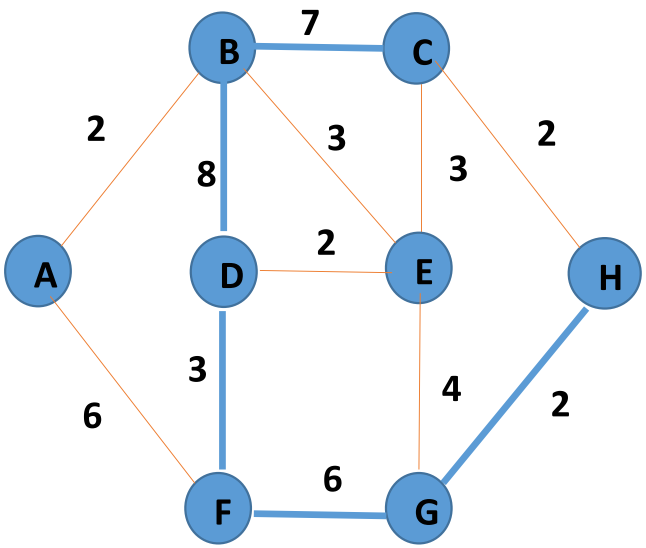
Ví dụ



	B	C	D	E	F	G	H	Chọn
$[\delta, \pi]$	[2, A]	[-, A]	[-, A]	[-, A]	[6, A]	[-, A]	[-, A]	B
		[9, B]	[10, B]	[5, B]	[6, A]	[-, A]	[-, A]	E
		[8, E]	[7, E]		[6, A]	[9, E]	[-, A]	F
		[8, E]	[7, E]			[9, E]	[-, A]	D
		[8, E]				[9, E]	[-, A]	C
						[9, E]	[10, C]	G
							[10, C]	H

Ví dụ

Cây thể hiện đường đi ngắn nhất từ A



	B	C	D	E	F	G	H	Chọn
$[\delta, \pi]$	[2, A]	[-, A]	[-, A]	[-, A]	[6, A]	[-, A]	[-, A]	B
		[9, B]	[10, B]	[5, B]	[6, A]	[-, A]	[-, A]	E
		[8, E]	[7, E]		[6, A]	[9, E]	[-, A]	F
		[8, E]	[7, E]			[9, E]	[-, A]	D
		[8, E]				[9, E]	[-, A]	C
						[9, E]	[10, C]	G
							[10, C]	H

II. Thuật toán FLOYD

Thuật toán FLOYD

- Bài toán: Tìm đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh bất kỳ
- Xây dựng 2 ma trận:

$$W = [w_{ij}]; \quad i,j = 1,\dots,n: \textit{Thể hiện độ dài đường đi}$$

$$P = [p_{ij}]; \quad i,j = 1,\dots,n: \textit{Thể hiện đỉnh kế trên đường đi}$$

- Thuật toán Floyd:
  - B1: Khởi tạo W^0 và P^0:
    - Với $i,j = 1,\dots n$: $\begin{cases} w_{ij}^0 = c(vi,vj) \\ p_{ij}^0 = j \end{cases}$

Thuật toán FLOYD

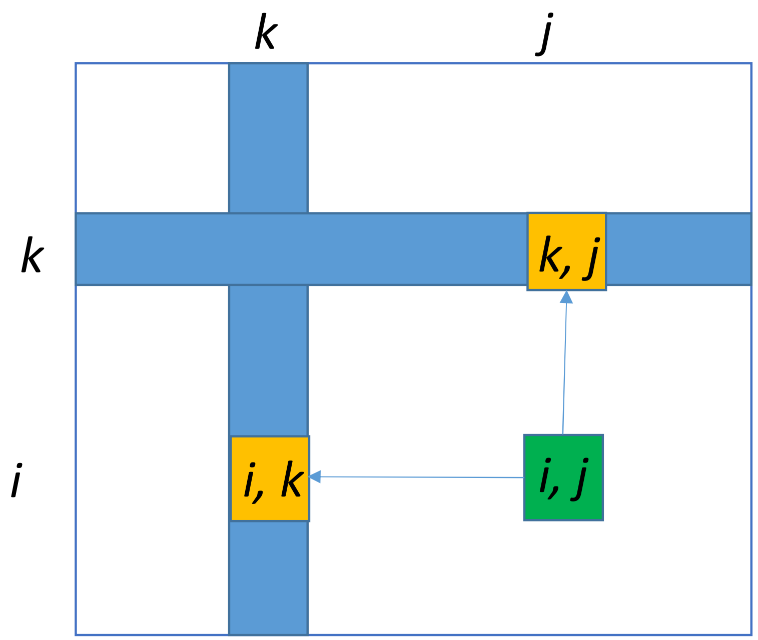
- B2: Tính toán W^k $và$ P^k dựa trên W^{k-1} $và$ P^{k-1}. Với $k = 1, \dots n$
  - Với $i, j = 1, \dots n$:

    Nếu $w_{ij}^{k-1} > w_{ik}^{k-1} + w_{kj}^{k-1}$

    $$\begin{cases} w_{ij}^{k} = w_{ik}^{k-1} + w_{kj}^{k-1} \\ p_{ij}^{k} = p_{ik}^{k-1} \end{cases}$$

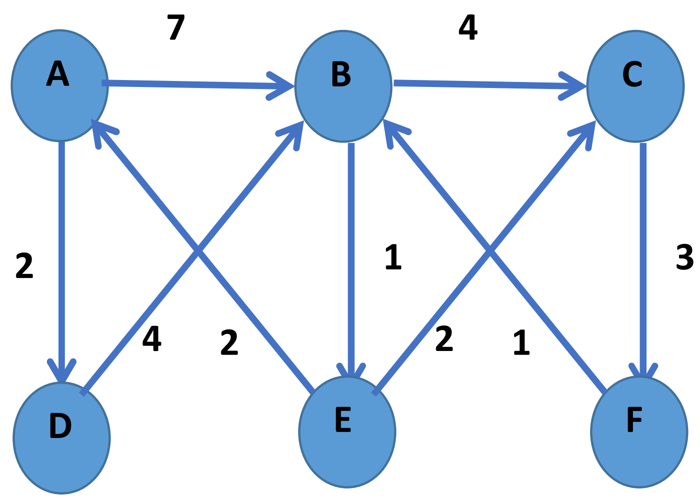
    Ngược lại

    $$\begin{cases} w_{ij}^{k} = w_{ij}^{k-1} \\ p_{ij}^{k} = p_{ij}^{k-1} \end{cases}$$



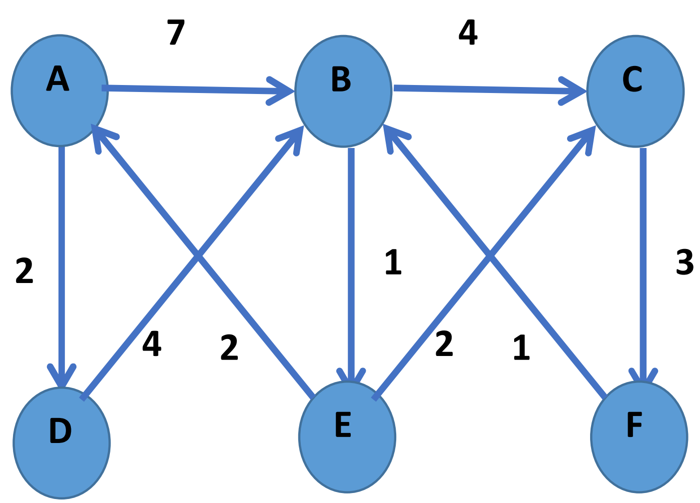
Ví dụ

- Ma trận $[W, P]^0$



$$
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}
\begin{bmatrix}
- & [7, \boldsymbol{B}] & [-, \boldsymbol{C}] & [2, \boldsymbol{D}] & [-, \boldsymbol{E}] & [-, \boldsymbol{F}] \\
[-, \boldsymbol{A}] & - & [4, \boldsymbol{C}] & [-, \boldsymbol{D}] & [1, \boldsymbol{E}] & [-, \boldsymbol{F}] \\
[-, \boldsymbol{A}] & [-, \boldsymbol{B}] & - & [-, \boldsymbol{D}] & [-, \boldsymbol{E}] & [3, \boldsymbol{F}] \\
[-, \boldsymbol{A}] & [4, \boldsymbol{B}] & [-, \boldsymbol{C}] & - & [-, \boldsymbol{E}] & [-, \boldsymbol{F}] \\
[2, \boldsymbol{A}] & [-, \boldsymbol{B}] & [2, \boldsymbol{C}] & [-, \boldsymbol{D}] & - & [-, \boldsymbol{F}] \\
[-, \boldsymbol{A}] & [1, \boldsymbol{B}] & [-, \boldsymbol{C}] & [-, \boldsymbol{D}] & [-, \boldsymbol{E}] & -
\end{bmatrix}
$$

Ví dụ

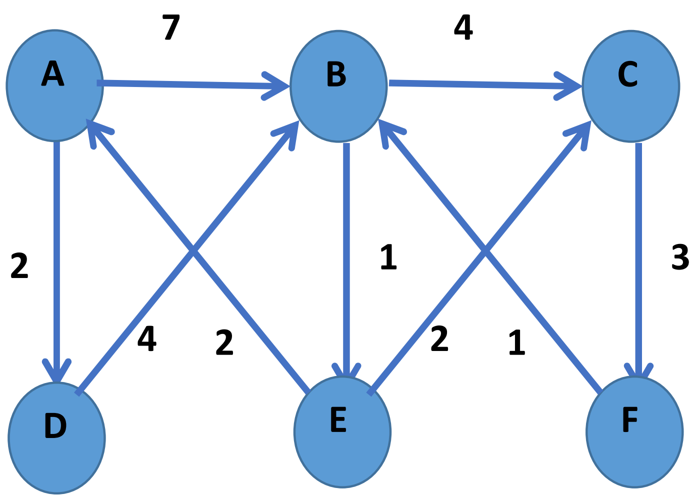


- Ma trận $[W, P]^1$

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
- & [7,B] & [-,C] & [2,D] & [-,E] & [-,F] \\
[-,A] & - & [4,C] & [-,D] & [1,E] & [-,F] \\
[-,A] & [-,B] & - & [-,D] & [-,E] & [3,F] \\
[-,A] & [4,B] & [-,C] & - & [-,E] & [-,F] \\
[2,A] & [9,A] & [2,C] & [4,A] & - & [-,F] \\
[-,A] & [1,B] & [-,C] & [-,D] & [-,E] & -
\end{bmatrix}
$$

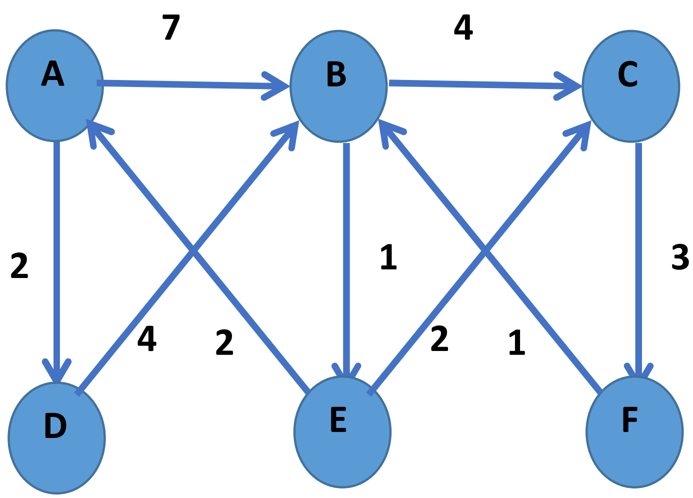
Ví dụ

- Ma trận $P]^2$



$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
- & [7,B] & [11,B] & [2,D] & [8,B] & [-,F] \\
[-,A] & - & [4,C] & [-,D] & [1,E] & [-,F] \\
[-,A] & [-,B] & - & [-,D] & [-,E] & [3,F] \\
[-,A] & [4,B] & [8,B] & - & [5,B] & [-,F] \\
[2,A] & [9,A] & [2,C] & [4,A] & - & [-,F] \\
[-,A] & [1,B] & [5,B] & [-,D] & [2,B] & -
\end{bmatrix}
$$

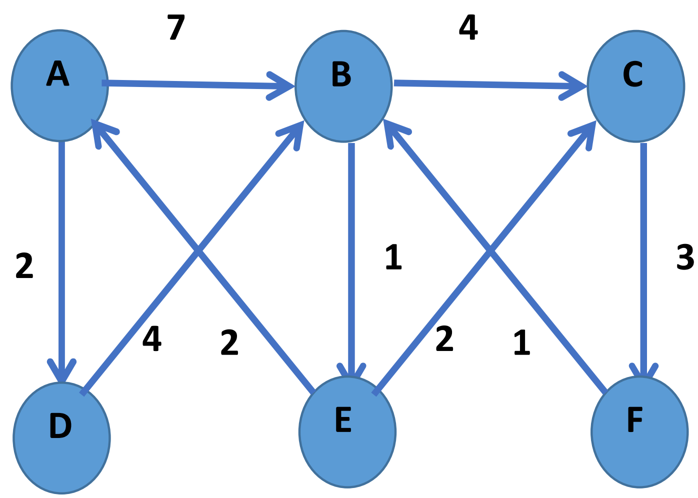
Ví dụ



- Ma trận $[W,P]^3$

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
- & [7,B] & [11,B] & [2,D] & [8,B] & [14,B] \\
[-,A] & - & [4,C] & [-,D] & [1,E] & [7,C] \\
[-,A] & [-,B] & - & [-,D] & [-,E] & [3,F] \\
[-,A] & [4,B] & [8,B] & - & [5,B] & [11,B] \\
[2,A] & [9,A] & [2,C] & [4,A] & - & [5,C] \\
[-,A] & [1,B] & [5,B] & [-,D] & [2,B] & -
\end{bmatrix}
$$

Ví dụ

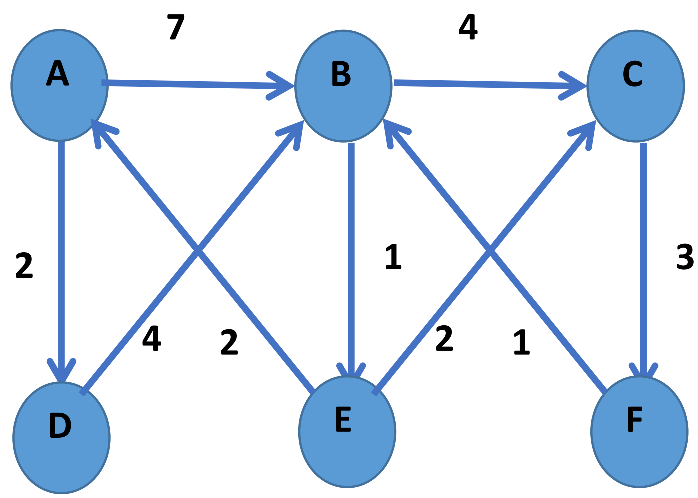


- Ma trận $[W,P]^4$

	A	B	C	D	E	F
A	$-$	$[6,D]$	$[10,D]$	$[2,D]$	$[7,D]$	$[13,D]$
B	$[-,A]$	$-$	$[4,C]$	$[-,D]$	$[1,E]$	$[7,C]$
C	$[-,A]$	$[-,B]$	$-$	$[-,D]$	$[-,E]$	$[3,F]$
D	$[-,A]$	$[4,B]$	$[8,B]$	$-$	$[5,B]$	$[11,B]$
E	$[2,A]$	$[8,A]$	$[2,C]$	$[4,A]$	$-$	$[5,C]$
F	$[-,A]$	$[1,B]$	$[5,B]$	$[-,D]$	$[2,B]$	$-$

Ví dụ

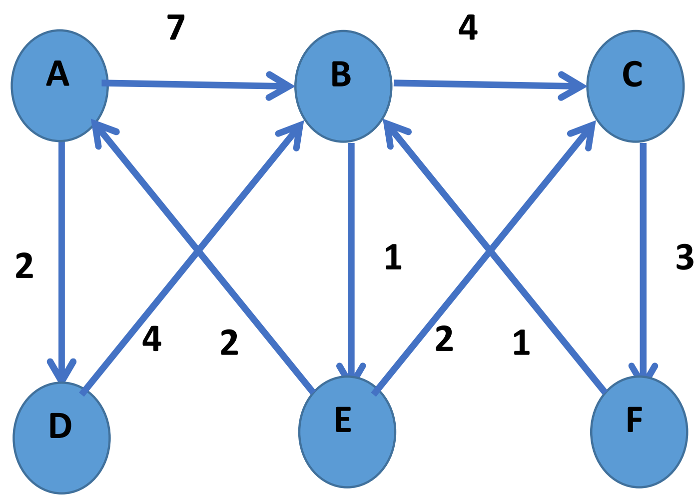
- Ma trận $[W,P]^5$



$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
- & [6,D] & [9,D] & [2,D] & [7,D] & [12,D] \\
[3,E] & - & [3,E] & [5,E] & [1,E] & [6,E] \\
[-,A] & [-,B] & - & [-,D] & [-,E] & [3,F] \\
[7,B] & [4,B] & [7,B] & - & [5,B] & [10,B] \\
[2,A] & [8,A] & [2,C] & [4,A] & - & [5,C] \\
[4,B] & [1,B] & [4,B] & [6,B] & [2,B] & -
\end{bmatrix}
$$

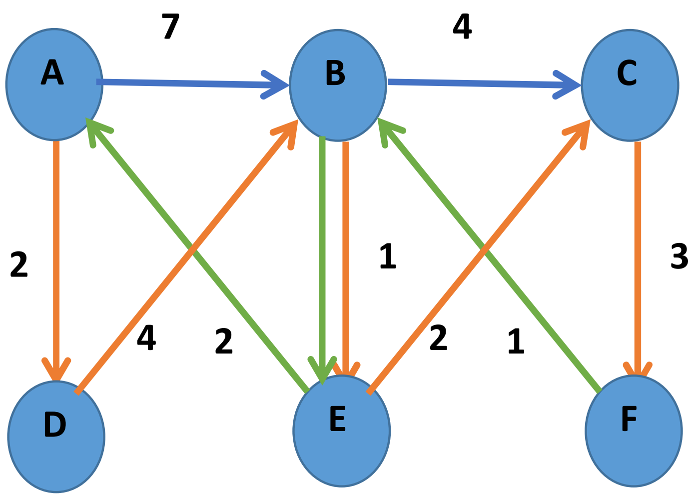
Ví dụ

- Ma trận $[W, P]^6$



$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{bmatrix} - & [6, D] & [9, D] & [2, D] & [7, D] & [12, D] \\ [3, E] & - & [3, E] & [5, E] & [1, E] & [6, E] \\ [7, F] & [4, F] & - & [9, F] & [5, F] & [3, F] \\ [7, B] & [4, B] & [7, B] & - & [5, B] & [10, B] \\ [2, A] & [6, C] & [2, C] & [4, A] & - & [5, C] \\ [4, B] & [1, B] & [4, B] & [6, B] & [2, B] & - \end{bmatrix}$$

Ví dụ



- Ma trận $[W, P]^6$

$$
\begin{array}{c}
A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
- & [6,D] & [9,D] & [2,D] & [7,D] & [12,D] \\
[3,E] & - & [3,E] & [5,E] & [1,E] & [6,E] \\
[7,F] & [4,F] & - & [9,F] & [5,F] & [3,F] \\
[7,B] & [4,B] & [7,B] & - & [5,B] & [10,B] \\
[2,A] & [6,C] & [2,C] & [4,A] & - & [5,C] \\
[4,B] & [1,B] & [4,B] & [6,B] & [2,B] & -
\end{bmatrix}
$$

- Từ A đến F: 12

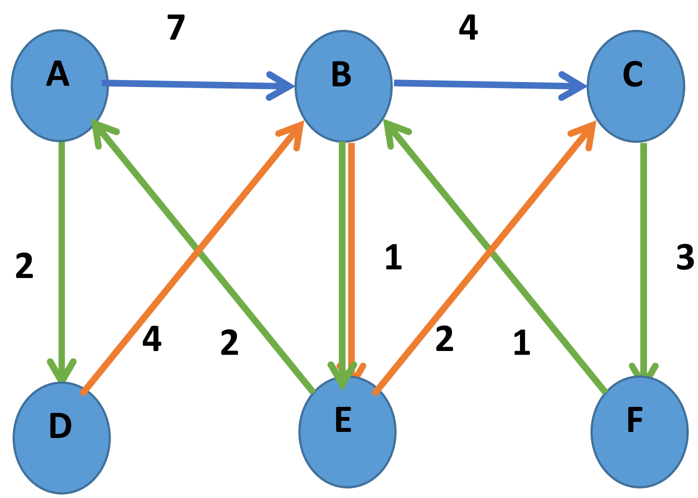
A----D----B----E----C----F

- Từ F đến A: 4

F----B----E----A

Ví dụ

- Ma trận $[W,P]^6$



$$
\begin{array}{c}
A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
- & [6,\boldsymbol{D}] & [9,\boldsymbol{D}] & [2,\boldsymbol{D}] & [7,\boldsymbol{D}] & [12,\boldsymbol{D}] \\
[3,\boldsymbol{E}] & - & [3,\boldsymbol{E}] & [5,\boldsymbol{E}] & [1,\boldsymbol{E}] & [6,\boldsymbol{E}] \\
[7,\boldsymbol{F}] & [4,\boldsymbol{F}] & - & [9,\boldsymbol{F}] & [5,\boldsymbol{F}] & [3,\boldsymbol{F}] \\
[7,\boldsymbol{B}] & [4,\boldsymbol{B}] & [7,\boldsymbol{B}] & - & [5,\boldsymbol{B}] & [10,\boldsymbol{B}] \\
[2,\boldsymbol{A}] & [6,\boldsymbol{C}] & [2,\boldsymbol{C}] & [4,\boldsymbol{A}] & - & [5,\boldsymbol{C}] \\
[4,\boldsymbol{B}] & [1,\boldsymbol{B}] & [4,\boldsymbol{B}] & [6,\boldsymbol{B}] & [2,\boldsymbol{B}] & -
\end{bmatrix}
$$

- Từ D đến C: 7

D----B----E----C

- Từ C đến D: 9

C----F----B----E----A----D

Tóm tắt

✓Thuật toán DIJKSTRA:

Đường đi ngắn nhất từ 1 đỉnh cố định đến đỉnh bất kỳ

✓ Thuật toán FLOYD :

Đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh bất kỳ