Bài số 1

MỘT SỐ MẶT CONG TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU R^3. HỆ TỌA ĐỘ TRỤ, HỆ TỌA ĐỘ CẦU

I. Mặt trụ, mặt tròn xoay, mặt bậc hai

1.1 Phương trình một số đường và mặt đã biết trong mặt phẳng Oxy.

+ Đường thẳng: $Ax + By + C = 0$ hay $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$

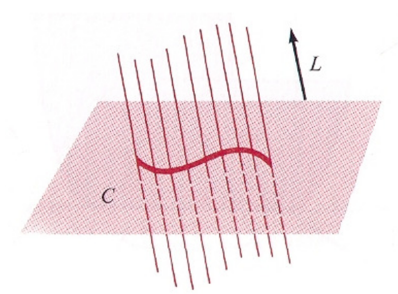
+ Đường tròn: $x^2 + y^2 = R^2$ hoặc $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

+ (E) – Elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

+ (H) – Hypecbol: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$

+ (P) – Parabol: $x^2 = \pm 2py;\quad y^2 = \pm 2px$

1.2. MẶT TRỤ

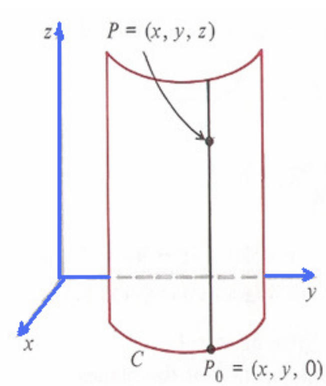


a. Định nghĩa: Xét một đường cong phẳng C và một đường thẳng L không song song với mặt phẳng của C. **Mặt trụ** là hình trong không gian được sinh ra bởi một đường thẳng dịch chuyển song song với L và đi qua C.

Đường thẳng chuyển động đó được gọi là ***đường sinh*** của mặt trụ. Đường cong (C) gọi là đường chuẩn.

Mặt trụ tròn xoay có đường chuẩn C là đường tròn và L là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn.

Khi (C) là đường thẳng, mặt trụ thu được là một mặt phẳng.



b. Phương trình của mặt trụ: Giả sử đường cong cho trước (C) có phương trình (trong Oxy): $F(x,y) = 0$ và có đường sinh song song với trục z.

*Khi đó phương trình $F(x,y) = 0$ trong $Oxyz$ cũng **là phương trình của mặt trụ** trong không gian ba chiều.*

◆ **Cách gọi tên:** **Mặt trụ + tên đường chuẩn+ ic**

***Chú ý.* Bất cứ một phương trình trong hệ toạ độ Oxy khuyết một biến đều biểu diễn một mặt trụ với các đường sinh song song với trục toạ độ tương ứng với biến bị khuyết.**

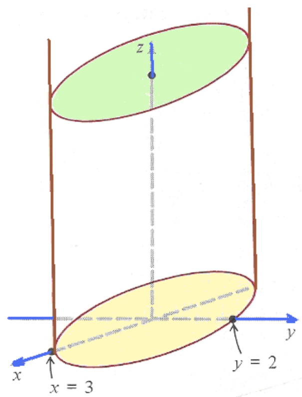
Ví dụ 1. Vẽ mặt trụ **Elliptic**: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

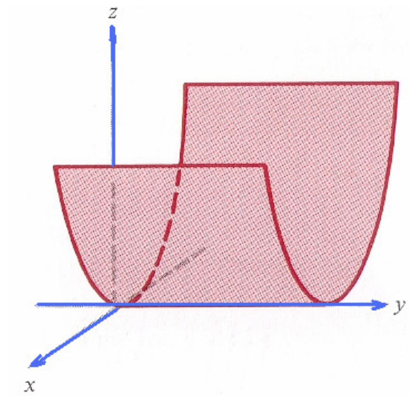
Giải + Phương trình của mặt trụ khuyết z nên các đường sinh song song với trục z.

Cách vẽ: Đầu tiên vẽ đường Ellip trong mặt phẳng xy.

+ Vẽ hai đường sinh thẳng đứng song song với trục z.

+ Vẽ một Ellip nằm trên mặt phẳng song song với mặt phẳng xy.





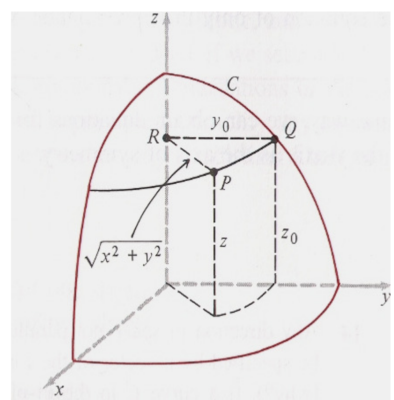
Ví dụ 2. Vẽ mặt trụ **Parabolic** $z=x^2$

Giải. Phương trình của trụ khuyết y nên các đường sinh của trụ song song với trục y.

1.3. Mặt tròn xoay

a. Định nghĩa: Một mặt cong thu được do xoay đường cong phẳng (C) quanh một đường thẳng L cùng thuộc mặt phẳng chứa (C) được gọi là ***mặt tròn xoay*** với trục L.

Đường cong (C) lúc này gọi là ***đường sinh*** của mặt tròn xoay.



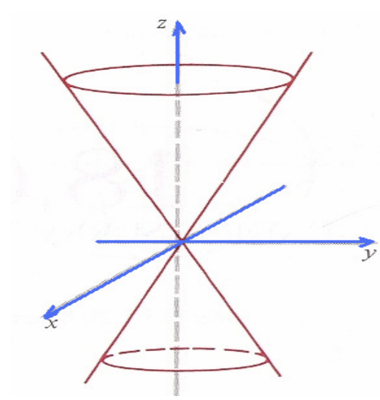
b. Phương trình mặt tròn xoay:

Giả sử đường cong C nằm trong mặt phẳng yz có phương trình $f(y,z)=0$

Khi đường cong này xoay quanh trục *z*, thì phương trình mặt tròn xoay là:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

Do điểm $P(x,y,z)$ nằm trên mặt cong xuất phát từ điểm $Q(0,y_0,z_0)$ trên C quay quanh trục z nên



$y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, $z_0 = z$ (1). Mặt khác Q thỏa mãn phương trình $f(y_0, z_0) = 0$ nên thay vào (1) ta có phương trình của mặt tròn xoay.

Ví dụ 3. Viết phương trình mặt tròn xoay tạo thành khi cho đường thẳng *z = 3y* quay quanh trục *z.*

Giải:

ĐS: $z^2 = 9(x^2 + y^2)$.

Ví dụ 4. Viết phương trình mặt tròn xoay tạo thành khi cho đường $y = e^{x^2}$ trong mặt phẳng xy quay quanh (a) trục x, (b) trục y.

Giải:

(a)

ĐS: $y^2 + z^2 = e^{2x^2}$.

(b)

ĐS: $y = e^{x^2+z^2}$

Quy tắc tạo nên pt mặt tròn xoay: Giữ nguyên biến của trục quay, biến còn lại thay thế bằng cộng trừ căn bậc hai của bình phương biến đó cộng bình phương biến khuyết.

1.4. Mặt bậc hai

a. Phương trình tổng quát của mặt bậc hai

Trong không gian ba chiều, dạng tổng quát của phương trình bậc hai có dạng:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

giả thiết rằng tất cả các hệ số A,B,…,F ***không đồng thời bằng không***. Đồ thị của các phương trình này được gọi là mặt bậc hai.

b. Các dạng mặt bậc hai thường gặp

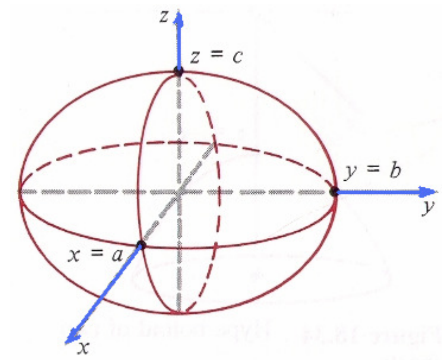
Có chính xác sáu loại mặt bậc hai không suy biến:

1. Ellipsoid.
2. Hyperboloid một tầng.
3. Hyperboloid hai tầng.
4. Mặt nón elliptic.
5. Paraboloid Elliptic
6. Paraboloid Hyperbolic.

Chú ý: Khi vẽ mặt cong:

c. Một số ví dụ:

Ví dụ 5: Vẽ mặt *ellipsoid:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



+ Bậc của x,y,z chẵn nên mặt cong đối xứng qua mỗi mặt phẳng toạ độ.
+ Giao với các mặt phẳng xz và yz là các ellip:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

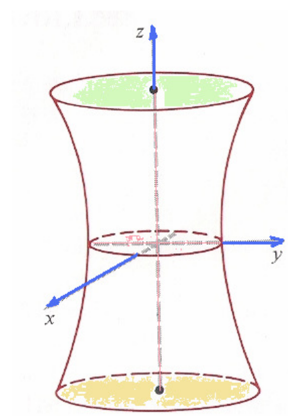
+ Giao với mặt phẳng nằm ngang $z=k$ là elip:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

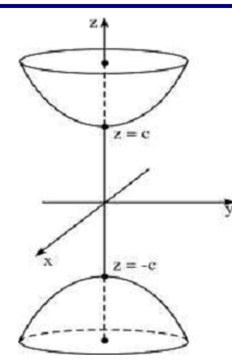
Elip này giảm dần kích thước khi k biến thiên từ 0 tới c hoặc – c.

Khi $a=b=c$ thì Ellipsoid là một hình cầu.

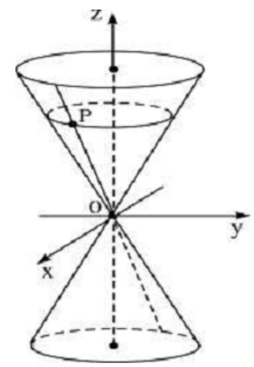
Ví dụ 6. Vẽ mặt ***hyperboloid một tầng*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



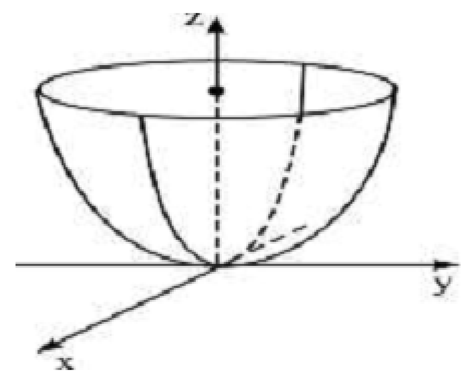
Ví dụ 7 : Mặt ***hyperboloid hai tầng:*** $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Ví dụ 8. Vẽ ***mặt nón Elliptic*** : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$.

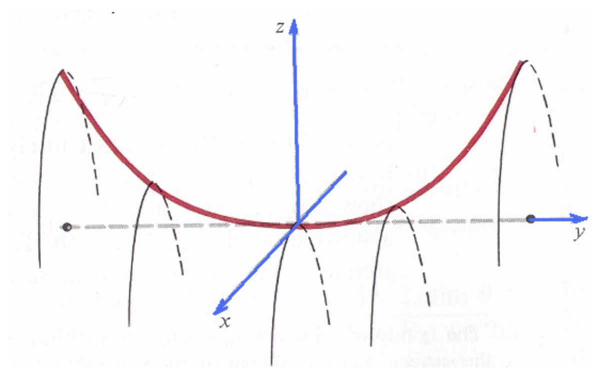


Ví dụ 9: Mặt ***paraboloid elliptic***: $z=ax^2+by^2$



Ví dụ 10. Mặt ***paraboloid hyperbolic***: $z=by^2-ax^2$

+ Càng gần gốc toạ độ, mặt cong tăng theo y và giảm theo x nên nó có hình dạng của yên ngựa hoăc khe núi, vì vậy, mặt cong này thường được gọi là **mặt yên ngựa** với gốc toạ độ là tâm yên ngựa.

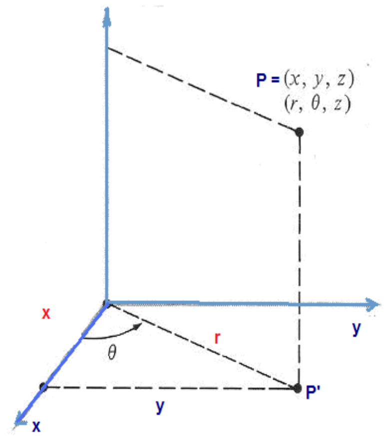


II. Hệ tọa độ trụ:

a. Định nghĩa: Điểm $P(x,y,z)$ trong không gian $Oxyz$.

- Góc θ tạo bởi tia OP' và chiều dương trục Ox.
- r là độ dài đại số của tia OP'.
- z là cao độ của P.

Khi đó bộ ba (r, θ , z) cũng xác định vị trí của điểm P và ta nói rằng P có **tọa độ trụ** là (r,θ,z) .



b. Mối liên hệ giữa tọa độ vuông góc và tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Nhận xét : + đồ thị của phương trình $r = a$ là một **mặt trụ tròn xoay** với trục là trục z,
+ đồ thị của $\theta = a$ không đổi là một **mặt phẳng** chứa trục z
+ đồ thị của $z = a$ không đổi là một **mặt phẳng nằm ngang**.

Ví dụ 11. Tìm toạ độ trụ của điểm P_1 và P_2 có các toạ độ vuông góc là (2, 2, -1) và $(-\sqrt{3}, 1, 4)$.

Giải: + P_1: $r^2 = 4$, $\tan\theta = 1$, $z = -1$ nên toạ độ trụ là $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -1)$.

+ P_2 : $r^2 = 4$, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = 4$ nên toạ độ trụ là $(2, \frac{5\pi}{6}, 4)$.

Ví dụ 12: Tìm phương trình trong hệ toạ độ trụ của :

a, Mặt trụ $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

b, Parabolid : $z = x^2 + y^2$.

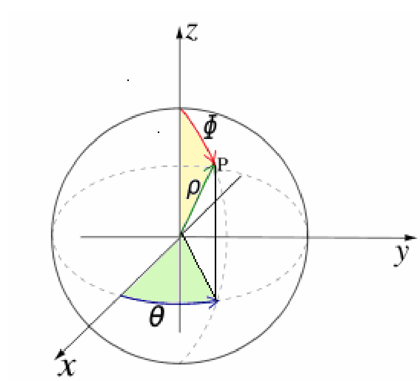
Đáp số: a, $r = 2\cos\theta$,

b, $z = r^2$

III. Hệ tọa độ cầu:

+ Xét một điểm P trong không gian có toạ độ vuông góc (x,y,z).

+ Gọi : ρ là khoảng cách từ gốc toạ độ O tới P



ϕ là góc hợp bởi trục dương z với bán kính *OP*

θ là góc hợp bởi trục dương x với đường *OP'* trong đó *P'* là hình chiếu của *P* trên mặt phẳng xy.

Khi đó ***tọa độ cầu của điểm*** *P* là bộ (ρ,ϕ,θ).

+ Mối quan hệ:

$$\boxed{\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta\ , \quad \rho\ge 0, \quad 0\le\phi\le\pi, \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}}$$

Và
$$\boxed{\rho^2=x^2+y^2+z^2,\ \tan\phi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\ \tan\theta=\frac{y}{x}}$$

Nhận xét: + Đồ thị của phương trình $\rho=a$ không đổi là hình cầu tâm tại gốc toạ độ.

+ Đồ thị của p/t $\phi=a$ không đổi α là tầng trên của mặt nón với tâm tại gốc toạ độ và góc đỉnh α nếu $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

+ Đồ thị của $\theta=a$ không đổi là một mặt phẳng chứa trục z như trong toạ độ trụ.

Ví dụ 13: Tìm toạ độ cầu của các điểm có toạ độ vuông góc là: P$(1,-1,\ \sqrt{2})$ và Q$(2,\ 2\sqrt{3},-4)$.

Đáp số:

P$(2,\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4})$,

Q$(4\sqrt{2},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{3})$

Ví dụ 14. Tìm phương trình trong hệ toạ độ cầu của:

a, Hình cầu $x^2+y^2+z^2-2az=0,\quad a>0$.

b, Hình nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$

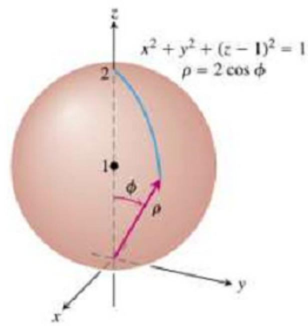
Giải:

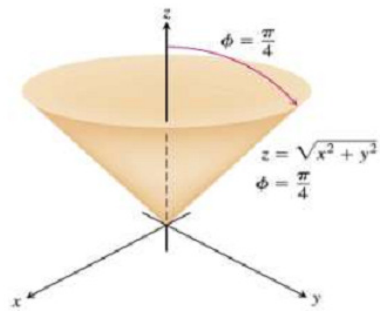
a,

ĐS: $\rho=2a\cos\phi$

b,

ĐS: $\phi=\frac{\pi}{4}$





Về nhà: **Bài tập:** Tr. **44, 50, 55.**

Đọc trước các Mục 19.1, 19.2, 19.3 , 19.4 chuẩn bị cho **Bài số 2:**

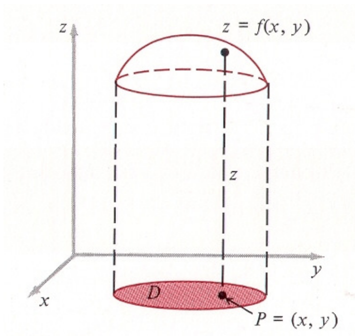
Hàm nhiều biến. Đạo hàm riêng. Vi phân.

Bài số 2

HÀM NHIỀU BIẾN. ĐẠO HÀM RIÊNG. VI PHÂN MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CONG.

I. Hàm số nhiều biến.

1. Định nghĩa: Cho $(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, quy tắc cho tương ứng mỗi cặp (x,y) một phần tử duy nhất $z\in\mathbb{R}$ được gọi là một ***hàm số của hai biến*** x và y, ký hiệu : $z=f(x,y)$.



Tương tự ta cũng có khái niệm của hàm số n biến với $n\geq 3$.

Ví dụ 1:

+ Trong hình học giải tích không gian: phương trình $z=x^2-y^2$ (p/t của mặt yên ngựa) là hàm số hai biến x,y, lúc này mặt yên ngựa là ***đồ thị*** của hàm số này.

+ Nếu chúng ta cho nhiệt độ tại điểm P biến thiên theo thời gian t, thì $T=f(x,y,z,t)$.

2. Miền xác định

Xét hàm số hai biến $z=f(x,y)$, ***miền xác định*** của nó là tập hợp tất cả các điểm P=(x,y) trong mặt phẳng *Oxy* sao cho tồn tại một giá trị z tương ứng.

Nếu hàm số cho bởi các công thức, ***miền xác định*** là tập hợp tất cả các điểm để công thức có nghĩa.

Ví dụ 2: Tìm và biểu diễn miền xác định của các hàm số sau:

a, $z=f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ b, $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ c, $z=\sqrt{y-x^2}-\sqrt{x-y}$.

Giải: a, MXĐ: $D=\{(x,y)\mid x\neq y\}$

MXĐ gồm tất cả các điểm nằm trên mặt phẳng xy, nhưng không nằm trên đường thẳng $y=x$.

b,

c,

Tương tự mở rộng với hàm số n biến với $n \geq 3$.

Ví dụ 3: Tìm và biểu diễn miền xác định của các hàm số sau:

a, $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ b, $w = \dfrac{1}{xyz}$

Giải:

a,

b,

3. Tính liên tục

◆ Hàm số f(x,y) được nói là ***liên tục*** tại một điểm (x_o, y_o) trong miền xác định của nó nếu giá trị f(x,y) tiến gần tới $f(x_o, y_o)$ khi (x,y) đủ gần với (x_o, y_o), nghĩa là $|f(x,y) - f(x_o, y_o)|$ bé tuỳ ý khi $|x - x_o|$ và $|y - y_o|$ đủ bé.

Ví dụ 4: • Hàm số $f(x,y) = xy$ liên tục tại điểm (x_o, y_o) bất kì, vì

$$\begin{aligned} |xy - x_0 y_o| &= |xy - xy_o + xy_o - x_0 y_o| \\ &= |x(y - y_o) + (x - x_0) y_o| \\ &\leq |x||y - y_o| + |y_o||x - x_o| \end{aligned}$$

nên khi $|x - x_o|$ và $|y - y_o|$ dần tới 0 thì $|f(x,y) - f(x_o, y_o)| \to 0$.

Ví dụ 5: Chứng minh hàm số : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

không liên tục tại gốc toạ độ (0,0).

Giải: Nếu cho (x,y) tiến đến (0,0) dọc theo đường thẳng y = mx với $m \neq 0$ thì

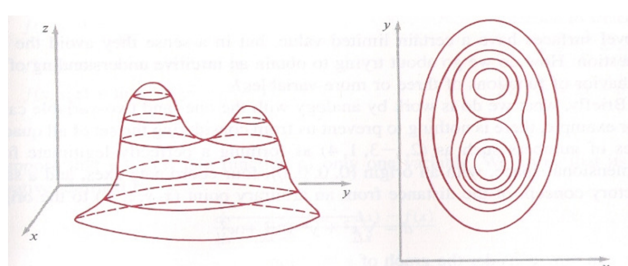
$f(x,y) = \dfrac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \dfrac{m}{1 + m^2} \neq 0$ nên không thể dần tới $f(0,0) = 0$ khi (x,y) đủ gần (0,0).

Các hàm số sơ cấp thì liên tục tại điểm bất kì thuộc miền xác định của nó. Tương tự tính liên tục được định nghĩa đối với hàm số của ba hay nhiều hơn biến .

4. Đường mức

◆ ***Định nghĩa:*** Xét hàm số $z = f(x,y)$.

Đường cong $f(x,y) = z_0 = c$ với c không đổi gọi là đường mức.



◆ ***Ứng dụng:*** + Mô tả bản chất hình học của một hàm số nhiều biến (khi khó vẽ đồ thị của nó).

+ Trong vẽ bản đồ địa hình với thung lũng, đồi và núi: nhận được một hình ảnh rõ ràng về các sự thể trên mặt đất trong không gian ba chiều từ sự mô tả trong không gian hai chiều.

Tập hợp các đường mức được gọi là ***bản đồ trắc địa***.

5. Mặt mức

Chúng ta không thể vẽ đồ thị đối với hàm ba biến vì khi đó cần một không gian hữu hình bốn chiều để chứa đồ thị. Tư tưởng của đường mức sẽ dẫn tới khái niệm *mặt mức.*

◆ ***Định nghĩa.*** Xét hàm số ba biến $w = f(x,y,z)$. Mặt cong $f(x,y,z) = w_0 = c$ với c không đổi được gọi là một ***mặt mức*** .

◆ ***Ứng dụng*** : **Mặt mức** có thể khó vẽ, nhưng kiến thức về chúng có thể giúp chúng ta định dạng ý tưởng trực giác có ích về bản chất của các hàm số này.

Ví dụ 6: + Xét hàm số $w = x + 2y - 3z$, có *mặt mức* là các mặt phẳng $x + 2y - 3z = c$

+ Hàm số $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, có *mặt mức* là khối cầu đồng tâm $x^2 + y^2 + z^2 = c$.

II. ĐẠO HÀM RIÊNG

1. Đạo hàm riêng cấp 1

a. Định nghĩa: Xét hàm hai biến z= f(x,y), trước hết chúng ta giữ y **cố định** và cho x ***biến thiên***. Tốc độ biến thiên của z theo x được kí hiệu là $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và định nghĩa bởi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Giới hạn này (nếu tồn tại) được gọi là ***đạo hàm riêng (cấp một)*** của z theo x .

◆ Ký hiệu thường sử dụng

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f_x,\ f_x(x,y)$$

◆ Tương tự, nếu x ***cố định*** và y ***thay đổi*** thì ***đạo hàm riêng*** của z theo y là :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

kí hiệu trong trường hợp này là :

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f_y,\ f_y(x,y)$$

Tương tự ta cũng có định nghĩa đạo hàm riêng cho hàm nhiều hơn hai biến.

◆ **Quy tắc:** **Tính đạo hàm riêng là lấy đạo hàm đối với một biến chúng ta quan tâm và coi tất cả các biến độc lập khác là hằng số.**

• **Ví dụ 7**. Tính đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ của hàm số:

$$f(x,y) = 2x^2y^3 - 3xy^2 + 2x - 1 \quad \text{tại } P(1,\ 0).$$

Giải. $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 - 3y^2 + 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 - 6xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,\ 0) = 0$

• **Ví dụ 8**. Tính đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ của hàm số:

$$f(x,y) = xe^{xy^2}$$

Giải.

• **Ví dụ 9**. Tính đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ của hàm số: $f(x,y) = x\sin yz$

Giải:

Ví dụ 10. Cho $z = y\sin\frac{y}{x}$. Chứng minh rằng $z_x + \frac{y}{x}z_y = \frac{z}{x}$

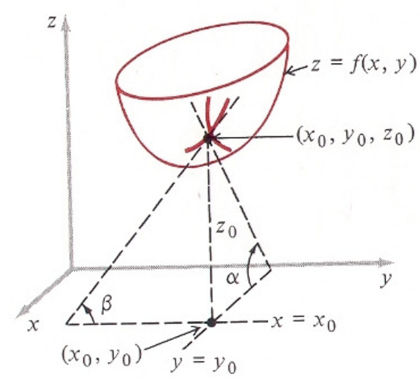
Giải:

b. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng cấp một

◆ Xét mặt cong có phương trình $z = f(x,y)$

Cho điểm (x_0, y_0) trong mặt phẳng xy tương ứng với điểm (x_0, y_0, z_0) trên mặt cong.

Giao của mặt cong với mặt phẳng $y = y_0$ là đường cong $z = f(x, y_0)$



Đạo hàm riêng $\tan\alpha = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)$ là độ nghiêng của tiếp tuyến đối với đường cong tại $x = x_0$. Trong mặt phẳng $y = y_0$.

Tương tự, $\tan\beta = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0, y_0)$ là độ nghiêng của tiếp tuyến đối với đường cong tại $y = y_0$ trong mặt phẳng $x = x_0$. .

2. Đạo hàm riêng cấp cao

Đối với hàm hai biến $z = f(x, y)$, các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ và $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ cũng là các hàm số hai biến, và có thể chúng cũng có các đạo hàm riêng.

• Khi đó ***các đạo hàm riêng cấp hai theo*** x là:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} \quad \text{và} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx}$$

• ***Các đạo hàm riêng theo*** y là:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy} \quad \text{và} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy}.$$

◆ **Định lý Schwarz : Nếu** trong lân cận điểm (x_0, y_0) hàm số $z = f(x, y)$ có f_{xy} và f_{yx} tồn tại và liên tục tại (x_0, y_0) thì $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

• **Ví dụ 11.** Xét $f(x, y) = x^2 e^{-y} + y\cos(x - y)$. Tính f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{yx}

Giải:

$$f_x(x, y) = 3x^2 e^{2y} - 3\sin(x - y), \quad f_y = 2x^3 e^{2y} + 3\sin(x - y)$$

$$f_{xx} = 6xe^{2y} - 3\cos(x - y), \quad f_{xy} = 6x^2 e^{2y} + 3\cos(x - y)$$

$$f_{yy} = 4x^3 e^{2y} - 3\cos(x - y), \quad f_{yx} = 6x^2 e^{2y} + 3\cos(x - y)$$

Dễ thấy $f_{xy} = f_{yx}$, tức là thứ tự lấy đạo hàm riêng trong trường hợp này không quan trọng.

◆ Các đạo hàm riêng cấp lớn hơn hai, cũng như các đạo hàm cấp cao của các hàm số nhiều hơn hai biến, được định nghĩa tương tự.

Ví dụ với $w = f(x,y,z)$ thì :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \left(f_{zy}\right)_x = f_{zyx},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right) = \left(f_{xxy}\right)_z = f_{xxyz}, \ \dots$$

III. SỐ GIA VÀ VI PHÂN. BỔ ĐỀ CƠ BẢN

Vi phân của hàm hai biến

◆ Xét hàm số $z = f(x,y)$ và cho (x_0,y_0) là một điểm tại đó các đạo hàm riêng $f_x(x_0,y_0)$ và $f_y(x_0,y_0)$ đều tồn tại.

+ Số gia của z là : $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

◆ **Bổ đề cơ bản.** Giả thiết hàm số z = f(x,y) và các đạo hàm riêng của nó f_x và f_y **xác định tại điểm** (x_0,y_0) và **tại lân cận của điểm này**. Giả thiết thêm là f_x và f_y ***liên tục tại*** (x_0,y_0). Khi đó số gia Δz có thể biểu thị dạng $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$ trong đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$.

Khi đó **vi phân toàn phần** của hàm $z = f(x,y)$ là :

$$dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy \ ; \ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \text{hoặc} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

◆ **Chú ý.** + Hàm số $z = f(x,y)$ ***khả vi*** tại một điểm thì **liên tục** tại đó (vì khi Δx và $\Delta y \to 0$ thì $\Delta z \to 0$.)

+ Sự tồn tại của các đạo hàm riêng f_x và f_y ***tại một điểm*** không kéo theo sự liên tục của $f(x,y)$ tại điểm này.

Ví dụ 12: Cho $z = \ln x.(\sin 3x + 2\cos y)$. Tính dz(1,0).

Giải : $z_x = \frac{1}{x}(\sin 3x + 2\cos y) + 3\ln x.\cos 3x$, $z_y = -2\sin y.\ln x$

Nên $z_x(1,0) = (\sin 3 + 2)$, $z_y(1,0) = 0$.

Vậy $dz(1,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)dy = (2+\sin 3)dx$

Ví dụ 13: Cho $z = \ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$. Tính dz.

Giải:

Về nhà:

Bài tập: Tr. **61, 68, 73**.

Đọc trước các Mục: **19.6** và **19.10** để chuẩn bị cho ***Bài số 3***

Đạo hàm hàm hợp. Đạo hàm hàm ẩn

Bài số 3

ĐẠO HÀM HÀM HỢP. ĐẠO HÀM HÀM ẨN

3.1. Đạo hàm hàm hợp.

❖ ***Nhắc lại trường hợp hàm một biến***: Chúng ta đã biết đạo hàm hàm hợp của một biến độc lập thông qua một biến trung gian.

Nếu $y = f(x)$ và $x = g(t)$, khi đó: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ (1).

Chúng ta sẽ mở rộng cho hàm hợp của nhiều biến độc lập qua nhiều biến trung gian.

a. **Đạo hàm hàm hợp của một biến độc lập qua nhiều biến trung gian.**

Cho hàm hai biến $w = f(x,y)$ trong đó: $x = g(t)$ và $y = h(t)$ là các hàm khả vi. Khi đó hàm hợp $w = f\left[g(t),h(t)\right] = F(t)$ là hàm một biến khả vi và có đạo hàm:

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}}. \qquad (2)$$

Trường hợp riêng với $x = t$: $w = f\left[t,h(t)\right] = F(t)$ nên $\boxed{\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}}$. (3)

Mở rộng đối với nhiều biến trung gian, chẳng hạn nếu $w = f(x,y,z)$ trong đó x, y, z là các hàm của t, thì $\boxed{\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}}$. (4)

• Ví dụ 1: Cho $w = 3x^2 + 2xy - y^2$ ở đó $x = \cos t$ và $y = \sin t$, tìm $\dfrac{dw}{dt}$.

Giải + Ta có :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (6x + 2y); \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \left(2x - 2y\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

+ Từ công thức (2) ta có : $\dfrac{dw}{dt} = (6x + 2y)(-\sin t) + \left(2x - 2y\right)\cos t$

+ Đổi biến $x = \cos t$ và $y = \sin t$, ta có thể viết biểu thức này chỉ theo biến *t*,

$$\frac{dw}{dt} = \left(6\cos t + 2\sin t\right)\left(-\sin t\right) + \left(2\cos t - 2\sin t\right)\left(\cos t\right) = 2\cos 2t - 4\sin 2t.$$

• *Cách khác:* Thay ngay từ đầu theo biến *t* rồi lấy đạo hàm, dẫn đến

$$w = 3\cos^2 t + 2\sin t\cos t - \sin^2 t$$

và $\dfrac{dw}{dt} = 6\cos t(-\sin t) + 2\sin(-\sin t) + 2\cos^2 t - 2\sin t\cos t = 2\cos 2t - 4\sin 2t$.

b) Đạo hàm hàm hợp của nhiều biến độc lập qua nhiều biến trung gian.

Nếu $w = f(x,y)$, trong đó $\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \end{cases}$. Khi đó $w = f\left[x(t,u), y(t,u)\right]$ là hàm phụ thuộc vào hai biến mới t, u và các đạo hàm riêng của chúng được xác định bởi:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}} \quad \text{và} \quad \boxed{\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.}$$

• **Ví dụ 2**: Cho $w = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $x = t\cos u$, $y = t\sin u$. Hãy tìm $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial u}$.

Giải:

Cách 1. Sử dụng quy tắc dây chuyền

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cos u + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\sin u$$

$$= -\frac{\sin 2u}{t^2}\cos u + \frac{\cos 2u}{t^2}\sin u = -\frac{\sin u}{t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}t\sin u + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}t\cos u$$

$$= \frac{\sin 2u}{t^2}t\sin u + \frac{\cos 2u}{t^2}t\cos u = \frac{\cos u}{t}$$

Cách 2. Ta có $w = \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{\sin u}{t}$ nên $\dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\sin u}{t^2}$, $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\cos u}{t}$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $z = y.f(x^2 - y^2)$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2},$$ biết f(u) là hàm khả vi.

Giải.

◆ ***Tổng quát:*** Nếu $w = f(x,y,z)$, trong đó $\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases}$. Khi đó w là hàm phụ thuộc hai biến mới t và u và các đạo hàm riêng của chúng được xác định bởi

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}} \qquad \boxed{\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}}.$$

Ví dụ 4. Nếu $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$. Chứng minh rằng $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Giải:

3.2. Hàm ẩn và đạo hàm hàm ẩn

a. Hàm ẩn của hàm một biến số.

Nhắc lại: • **Định nghĩa:** Hàm $y = f(x)$ với tính chất : $F[x, f(x)] = c$ (với mọi $x \in D_f$) được gọi là ***hàm ẩn*** xác định bởi phương trình $F(x,y) = c$.

Vấn đề: Làm thế nào để tính được $\dfrac{dy}{dx}$?

Cách 1: Từ $F(x,y) = c$ rút ra $y = f(x)$ (nếu có thể).

Cách 2: Đạo hàm 2 vế $F(x,y) = c$ theo x, với y là hàm của x.

Cách 3. Xét phương trình dạng $F(x,y) = c$ (1) có đồ thị là đường mức của hàm số $z = F(x,y)$. Do hàm số $z = F(x,y)$ nhận giá trị là hằng số c dọc theo đồ thị của mỗi một hàm số $y = f(x)$ nên $z = F(x, f(x)) = c$.

Giả sử $F(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục, nên $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx} = 0$ hay

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \text{ với } F_y(x,y) \neq 0.$$

Định lý hàm ẩn: Xét phương trình $F(x,y) = c$ trong đó hàm $z = F(x,y)$ có ***đạo hàm riêng liên tục trên lân cận của điểm*** (x_0, y_0) và giả sử rằng $F(x_0, y_0) = c$ và

$F_y(x_0,y_0) \neq 0$. Khi đó tồn tại khoảng I chứa x_0 và ***tồn tại đúng một hàm khả vi*** $y = f(x)$ xác định trên I thỏa mãn: $y_0 = f(x_0)$ và $F[x,f(x)] = c$.

Hơn nữa, đạo hàm của hàm số (ẩn) này xác định từ công thức: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}}$.

Ví dụ 5: Tính $\dfrac{dy}{dx}$ của hàm ẩn: $x^2y^5 - 2xy + 1 = 0$,

Cách 1. Đạo hàm hai vế theo biến x (coi y là hàm của x) ta nhận được

$$x^2.5y^4\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

do vậy: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - 2xy^5}{5x^2y^4 - 2x}$, với đk mẫu số khác không.

Cách 2. Đặt $F(x,y) = x^2y^5 - 2xy + 1 = 0$

+ Dễ thấy rằng điểm (1,1) nằm trên đồ thị, do vậy đồ thị của nó là không rỗng.

+ $F_x = 2xy^5 - 2y,\ F_y = 5x^2y^4 - 2x$

Nên $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{2y - 2xy^5}{5x^2y^4 - 2x}$, với $F_y = 5x^2y^4 - 2x \neq 0$.

b. Hàm ẩn $z = f(x,y)$ xác định từ phương trình $F(x,y,z) = c$.

Phương trình $w = F(x,y,z)$ với $z = f(x,y)$ dẫn đến w là một hàm hợp của x và y. Do đó $w = F(x,y,f(x,y)) = c$. Lấy đạo hàm theo biến x theo quy tắc dây chuyền:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ nên } \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}} \text{ với } F_z \neq 0.$$

Tương tự: $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}}$.

• **Ví dụ 6:** Tính đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ tại điểm $P(1,2,-1)$ của hàm ẩn $z = f(x,y)$ xác định từ phương trình $x^2z + yz^5 + 2xy^3 = 13$ (6).

Giải: Điểm $P(1,2,-1)$ thỏa mãn phương trình (6) nên P nằm trên đồ thị.

Cách 1: + Chúng ta đạo hàm hai vế (6) theo biến x (coi y là hằng số), dẫn đến

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2xz + y.5x^4\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 = 0,$$

do đó: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2xz + 2y^3}{x^2 + 5yz^4}$

+ Đạo hàm riêng 2 vế theo biến y:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial y}+z^5+5yz^4\frac{\partial z}{\partial y}+6xy^2=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z^5+6xy^2}{x^2+5yz^4}$$

Cách 2: Xét hàm số: $F(x,y,z)=x^2z+yz^5+2xy^3$,

+ Ta có $\frac{\partial F}{\partial x}=2xz+2y^3$, $\frac{\partial F}{\partial y}=z^5+6xy^2$, $\frac{\partial F}{\partial z}=x^2+5yz^4$.

+ Dễ dàng thấy rằng $\frac{\partial F}{\partial z}=11\neq 0$ tại $(1,2,-1)$,

+ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{2xz+2y^3}{x^2+5yz^4}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{z^5+6xy^2}{x^2+5yz^4}$

Nên $\frac{\partial z}{\partial x}(P)=-\frac{-2+16}{1+10}=-\frac{14}{11}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(P)=-\frac{47}{11}$.

• **Ví dụ 7:** Cho hàm số $z=f(x,y)$ xác định từ phương trình $f\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$. Chứng minh rằng: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

Giải:

Bài tập về nhà: Tr. **88, 115**
Đọc trước Mục: **19.5** chuẩn bị cho **Bài số 4**: ***Đạo hàm theo hướng.Gradient***

Bài số 4

MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CONG
ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG VÀ GRADIENT

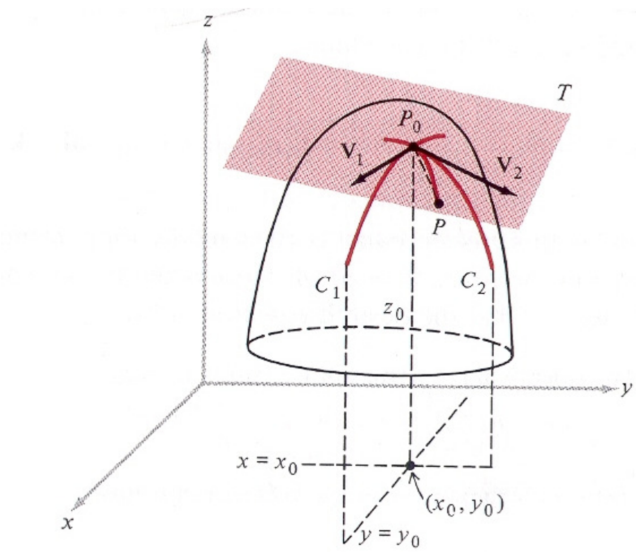
4.1 MẶT PHẲNG TIẾP XÚC ĐỐI VỚI MẶT CONG

Xét mặt cong $z = f(x,y)$, mặt phẳng $y = y_0$ giao với mặt cong này theo đường cong (C_1) có phương trình là $z = f(x, y_0)$, mặt phẳng $x = x_0$ giao với mặt cong này theo đường cong (C_2) có phương trình là:

$$z = f(x_0, y).$$

Độ dốc của các đường thẳng tiếp xúc đối với các đường cong này tại điểm $P = (x_0, y_0, z_0)$ là các đạo hàm riêng

$$f_x(x_0, y_0) \text{ và } f_y(x_0, y_0).$$



Hai đường thẳng tiếp xúc này xác định một mặt phẳng, nếu mặt cong đủ trơn gần P_0 thì mặt phẳng này sẽ ***tiếp xúc đối với mặt cong tại*** P_0.

a. Định nghĩa: Cho P_0 là một điểm trên mặt cong có p/t $z=f(x,y)$, T là mặt phẳng qua P_0 và cho P là một điểm bất kì khác trên mặt cong. Nếu, khi P tiến tới P_0 dọc theo mặt cong, góc giữa đoạn thẳng $P_0 P$ và mặt phẳng T tiến tới không, thì T được gọi là mặt phẳng tiếp xúc đối với mặt cong tại P_0 .

b. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc:

Xét mặt cong có p/t $z = f(x,y)$.

- Giả sử ***tồn tại mặt phẳng tiếp xúc*** tại điểm $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Các véc tơ $\mathbf{V_1}$ và $\mathbf{V_2}$ tiếp xúc với đường cong (C_1) và (C_2) tại P_0:

$$V_1 = i + 0j + f_x(x_0, y_0)k \quad \text{tiếp xúc với } (C_1) \text{ tại } P_0$$

$$V_2 = 0i + j + f_i(x_0, y_0)k \quad \text{tiếp xúc với } (C_2) \text{ tại } P_0.$$

- Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc:

$$\boxed{N = V_2 \times V_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f_x(x_0,y_0)i + f_y(x_0,y_0)j - k}$$

- Phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0}$$

hay là : $\boxed{z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$.

Nếu z là hàm ẩn của x và y thì tìm các đạo hàm riêng bằng đạo hàm hàm ẩn:

$$\boxed{z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_o}(x-x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0)}$$

Ví dụ 1. Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong $z = f(x,y) = 2xy^3 - 5x^2$ tại điểm $(3,2,3)$.

Giải: + Kiểm tra xem điểm $(3,2,3)$ nằm trên mặt cong đã cho.

+ Ta có $f_x = 2y^3 - 10x$ và $f_y = 6xy^2$ nên $f_x(3,2) = -14$ và $f_y(3,2) = 72$.

+ Vậy phương trình của mặt phẳng tiếp xúc là :

$$z - 3 = -14(x-3) + 72(y-2) \Leftrightarrow 14x - 72y + z + 99 = 0$$

Ví dụ 2. Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 = 14$ tại điểm $(1,2,3)$.

Giải:

Đs: $x + 2y + 3z = 14$.

Ví dụ 3 Viết phương trình tiếp xúc với mặt cong $z^2 + e^{xz}\sin y = 0$ tại điểm $P_o\left(0, \frac{3\pi}{2}, 1\right)$.

Giải:

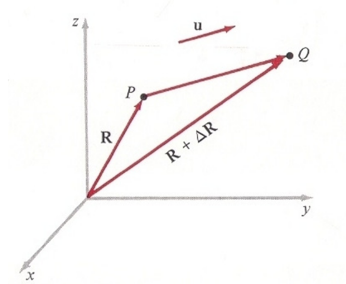
ĐS: PT mặt phẳng tiếp xúc: $x - 2z + 2 = 0$.

4.2. Đạo hàm theo hướng và Gradient

1. Trường vô hướng

Cho hàm số $w = f(x, y, z)$ xác định trong một miền D, khi đó ta nói rằng ta đã xác định một trường vô hướng trên miền D đó.

2. Đạo hàm theo hướng. Gradient



a. Gradient của một hàm số ***Gradient*** của hàm số $w = f(x, y, z)$ là ***một vec tơ***, ký hiệu là grad f, được xác định bởi : $\boxed{grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{k}}$. (1)

Ví dụ 4: Xét hàm số $f(x, y, z) = 2x + 3xy - z^2$, ta có

$$grad f = (2 + 3y).\mathrm{i} + 3x.\mathrm{j}\ -\ 2z.\mathrm{k} \Leftrightarrow grad\, f = ((2 + 3y), 3x, -2z).$$

b. Đạo hàm theo hướng

❖ **Khái niệm :** Xét điểm $P = (x, y, z)$ và $\mathrm{R} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ là véc tơ chỉ vị trí của P, một hướng xác định bởi **véc tơ đơn vị** **u**. Di chuyển P theo hướng **u** đến một điểm rất gần $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, hàm f sẽ thay đổi một lượng là Δf.

Khoảng cách giữa P và Q là $\Delta s = |\Delta \mathrm{R}| = PQ$, phân số $\frac{\Delta f}{\Delta s}$ là tốc độ biến thiên trung bình của f (về mặt khoảng cách) khi di chuyển từ P đến Q.

◆ **Định nghĩa**: Giá trị giới hạn của $\frac{\Delta f}{\Delta s}$ khi Q tiến đến P là : $\frac{df}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$ (2) được gọi là ***đạo hàm của f tại điểm P theo hướng u***, hay đơn giản ***đạo hàm theo hướng*** của f.

Chẳng hạn, nếu f là hàm nhiệt độ, $\frac{df}{ds}$ biểu diễn tốc độ biến thiên tức thời của nhiệt độ theo khoảng cách- ***theo cách nào nhanh nhất để nhiệt độ trở lên nóng hơn*** - tại P khi chúng ta di chuyển điểm P theo hướng xác định **u**.

c. *Cách tính:* Giả sử hàm *f(x,y,z)* có ***các đạo hàm riêng liên tục*** theo các biến *x*, *y* và *z*. Theo bổ đề cơ bản : $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$.

ở đó $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \to 0$ khi $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \to 0$ hay khi $\Delta s \to 0$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

Cho $\Delta s \to 0$, thu được $\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$

Viết dưới dạng tích vô hướng của hai véc tơ:

$$\boxed{\frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{k}\right).\left(\frac{dx}{ds}\mathrm{i} + \frac{dy}{ds}\mathrm{j} + \frac{dz}{ds}\mathrm{k}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{k}\right).\frac{d\mathrm{R}}{ds}}$$

Chú ý : $\frac{d\mathrm{R}}{ds}$ là véc tơ đơn vị, có cùng hướng với **u** và do đó bằng **u**. Nên có thể viết:

$$\frac{df}{ds} = (grad\, f).\frac{d\mathrm{R}}{ds} = (grad\ f).\mathrm{u}$$

+ Nếu θ là góc giữa *grad* f và **u** thì $\frac{df}{ds} = |grad\ f|\cos\theta$

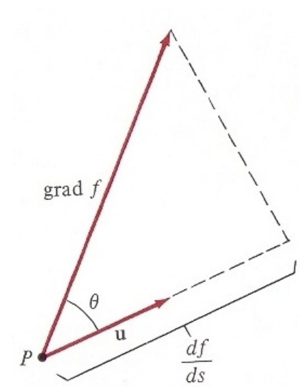
Chú ý: + Đạo hàm theo hướng $\frac{df}{ds}$ của một hàm nhiều biến là ***đại lượng vô hướng***

+ Giá trị $\frac{df}{ds}$ phụ thuộc vào ***hướng*** cần tính đạo hàm và ***tọa độ điểm*** *P*.

d. Một số tính chất:

+ Từ công thức $\frac{df}{ds} = |grad\ f|\cos\theta$, f tăng nhanh nhất khi $\cos\theta = 1$ hay $\theta = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất là | grad *f* |.

f giảm nhanh nhất khi $\cos\theta = -1$ hay $\theta = \pi$. Khi đó giá trị nhỏ nhất là − | grad *f* |.



Tính chất 1: **Hướng** của véc tơ *grad* f trùng với hướng mà theo ***hướng đó hàm f tăng nhanh nhất.*** Hướng của véc tơ (- *grad*) f trùng với hướng mà hàm f giảm nhanh nhất.

Tính chất 2 : **Độ dài** của véc tơ *grad f* là ***tốc độ tăng lớn nhất*** của *f*.

Ví dụ 5: Nếu $f(x,y,z)=x^2-y+z^2$, tìm đạo hàm theo hướng $\frac{df}{ds}$ tại điểm $P(1,2,1)$ theo hướng của véc tơ $\mathbf{v} = 4\mathrm{i}-2\mathrm{j}+4\mathrm{k}$.

Giải :

Ví dụ 6: Nhiệt độ của không khí tại các điểm trong không gian được xác định bởi hàm $f(x,y,z)=x^2-y+z^2$. Một con muỗi đậu tại P (1,2,1) với mong muốn được mát nhanh nhất. Nó nên bay theo hướng nào?

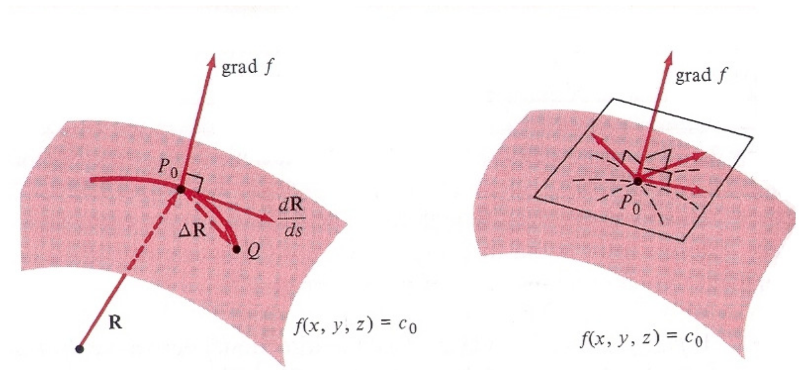
Giải :

ĐS: hướng $-2\mathrm{i}+\mathrm{j}-2\mathrm{k}$.

Ví dụ 7. Với hướng này thì tốc độ biến thiên của hàm $f(x,y,z)=\arctan\frac{x}{yz}$ tại điểm $M(2,1,-1)$ tăng nhanh nhất và tính giá trị đó.

Giải:

ĐS: $gradf = -\frac{1}{5}\mathrm{i} + \frac{2}{5}\mathrm{j} - \frac{2}{5}\mathrm{k}$; $|gradf| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.



◆ Xét $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định, và ta cho c_0 là giá trị của hàm f tại điểm P_0. ***Mặt mức*** chứa điểm P_0 có phương trình $f(x,y,z) = c_0$. Chúng ta thấy rằng véc tơ grad$f$ là ***pháp tuyến*** (vuông góc) của mặt đó tại P_0 . Nếu ta di chuyển đến điểm gần Q trên đường này với độ dịch chuyển s dọc theo đường đó, thì $\Delta f = 0$ bởi vì f có giá trị không đổi tại mọi điểm trên mặt, và từ đó $\frac{df}{ds} = 0$ tại P_0 theo hướng tiếp tuyến của đường cong. Nên $(gradf).\frac{d\mathrm{R}}{ds} = 0$, ở đó $\frac{d\mathrm{R}}{ds}$ ***là véc tơ tiếp tuyến đơn vị của đường tại*** P_0. Như vậy, grad f vuông góc với mọi véc tơ tiếp tuyến.

Tính chất 3: Gradient của hàm $f(x,y,z)$ tại điểm P_0 là ***pháp tuyến của mặt mức*** $f(x,y,z) = c_0$ tại điểm P_0.

$$\mathrm{N} = gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\mathrm{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\mathrm{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0}\mathrm{k}$$

Phương trình tiếp diện là:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0;$$

Và phương trình pháp tuyến của mặt cong tại P_0 là:

$$\frac{(x - x_0)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{(y - y_0)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}} = \frac{(z - z_0)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0}}.$$

Ví dụ 8: Tìm phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt $xy^2z^3=12$ tại điểm $P(3,-2,1)$

Giải:

ĐS: + Pt tiếp diện: $x-3y+9z=18$.

+ Pt pháp tuyến là: $\dfrac{(x-3)}{1}=\dfrac{(y+2)}{-3}=\dfrac{(z-1)}{9}$.

Bài tập về nhà: Tr. **82**
Đọc trước Mục: **19.7** chuẩn bị cho **Bài số 5**
Bài toán cực trị tự do của hàm hai biến.

Bài số 5

CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

1. Bài toán giá trị cực đại và cực tiểu

◆ **Định nghĩa 1:** Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận của $P_0(x_0,y_0)$.

a) Nếu $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)$ trong lân cận của P_0 trừ đi điểm đó, đồng thời $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ thì hàm số $z = f(x,y)$ ***đạt cực đại*** tại $P_0(x_0,y_0)$ và (x_0,y_0) gọi là điểm cực đại của hàm số, $z_0 = f(x_0,y_0)$ gọi là giá trị cực đại của hàm số đó.

b) Nếu $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)$ trong lân cận của $P_0(x_0,y_0)$ trừ đi điểm đó, đồng thời $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ thì hàm số $z = f(x,y)$ ***đạt cực tiểu*** tại $P_0(x_0,y_0)$.

Nếu hàm số đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại (x_0,y_0) thì ta gọi chung đó là ***điểm cực trị*** của hàm số và giá trị của hàm số lúc này gọi là **cực trị** của hàm số đó.

◆ **Định nghĩa 2:** Cho hàm số $z = f(x,y)$ có MXĐ là D.

+ Hàm số $z = f(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất tại (x_0,y_0) nếu:

$$f(x,y) \le M \text{ và } \exists (x_0,y_0) \in D \text{ sao cho } M = f(x_0,y_0).$$

+ Hàm số $z = f(x,y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại (x_0,y_0) nếu:

$$f(x,y) \ge M \text{ và } \exists (x_0,y_0) \in D \text{ sao cho } M = f(x_0,y_0).$$

Nhận xét:

• Nếu MXĐ là **miền đóng**, hàm số $z = f(x,y)$ liên tục trên MXĐ đó và đạt cực trị trên MXĐ. Ta so sánh các giá trị cực trị đó với các giá trị của hàm số trên biên, khi đó:
  + Giá trị lớn nhất trong các giá trị đó cũng là GTLN của hàm số trên MXĐ đó.
  + Giá trị nhỏ nhất trong các giá trị đó cũng là GTNN của hàm số trên MXĐ đó.

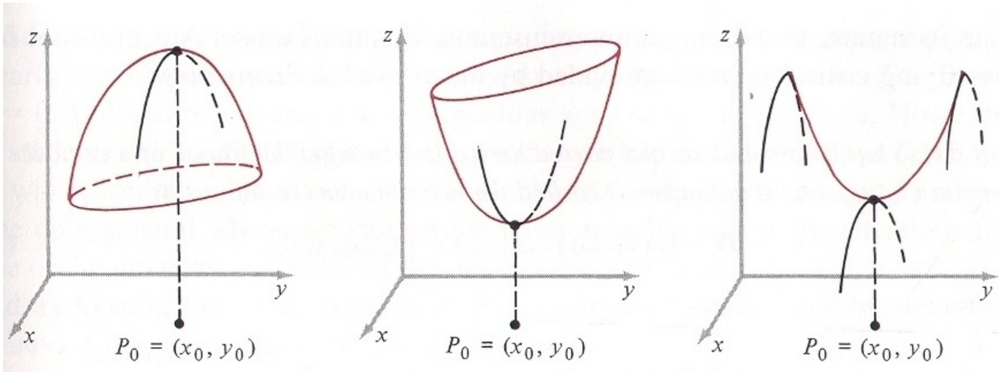
• Nếu MXĐ là **miền mở**, hàm số $z = f(x,y)$ liên tục trên MXĐ và ***đạt duy nhất*** một cực trị, khi đó:
  + Nếu cực trị đó là cực đại thì giá trị cực đại đó cũng là GTLN của hàm số trên MXĐ.
  + Nếu cực trị đó là cực tiểu thì giá trị cực tiểu đó cũng là GTNN của hàm số.

2. Điều kiện cần cực trị của hàm hai biến.

Định lý: Nếu hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại điểm (x_0,y_0), và tại đó hàm số có đạo hàm cấp một thì $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$.

◆ **Định nghĩa:** Điểm (x_0,y_0) mà tại đó cả hai đạo hàm riêng cấp một bằng không được gọi là ***điểm tới hạn*** của hàm số *f(x,y).*

Như vậy, (x_0,y_0) là ***điểm cực trị của hàm số thì nó phải là điểm tới hạn***.



Định nghĩa điểm yên ngựa: Điểm tới hạn $M_0(x_0, y_0)$ là điểm yên ngựa nếu trong lận cận của điểm M_0 có các điểm (x, y) mà $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ và cũng có các điểm (x, y) mà $f(x,y) > f(x_0,y_0)$.

3. Điều kiện đủ cực trị của hàm hai biến.

◆ **Định lý:** *Nếu $f(x,y)$ có đạo hàm đến cấp hai* ***liên tục trong một lân cận của điểm tới hạn*** (x_0, y_0) *và nếu số D (gọi là biệt số) xác định bởi:*

$$D = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - \left[f_{xy}(x_0,y_0)\right]^2$$

thì (x_0, y_0) là

i) ***Điểm cực đại*** *nếu D > 0 và $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$;*

ii) ***Điểm cực tiểu*** *nếu D > 0 và $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$;*

iii) ***Điểm yên ngựa*** *nếu D < 0.*

Hơn nữa, nếu D = 0 thì chưa thể đưa ra kết luận, và phải dùng định nghĩa cực trị.

Cách tìm cực trị của hàm 2 biến:

B1. Giải hệ $\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$ tìm các điểm tới hạn $M_0(x_0,y_0)$.

B2. Tìm $A = f_{xx}(x_0,y_0), B = f_{xy}(x_0,y_0), C = f_{yy}(x_0,y_0)$.

B3. Khi đó ta có bảng tổng kết sau:

$D = AC - B^2$	A	**Kết luận về** (x_0,y_0)
> 0	< 0	***Cực đại***
> 0	> 0	**Cực tiểu**
< 0		***Điểm yên ngựa***
= 0		**Chưa có kết luận**

• **Ví dụ 1.** Tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$.

Giải: + MXĐ: $\mathbb{R}^2$.

+ Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$, điểm tới hạn : $M_1(0,0)$, $M_2(1,-1)$

+ Tính đạo hàm riêng cấp 2 : $z_{xx} = 6x, z_{yy} = -6y, z_{xy} = 3$

+ Tại $M_1(0,0)$ ta có : $A = 0; B = 3; C = 0$, do đó $D = -9 < 0$, nên điểm này là điểm yên ngựa.

+ Tại $M_2(1,-1)$ ta có $A = 6; B = 3; C = 6$, do đó $D = 27 > 0$, hơn nữa $A = 6 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $M_2(1,-1)$ và GTCT đó là: -1.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$.

Giải:

+ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm M(5, 2). GTCT bằng 30.

◆ **Chú ý:** Khi D = 0 có thể phải sử dụng định nghĩa để xác định điểm cực trị.

Xét $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$

1. Nếu $\Delta z \geq 0, \forall \Delta x, \Delta y$ và dấu bằng chỉ đạt được tại $M_0(x_0, y_0)$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $M_0(x_0, y_0)$.

2. Nếu $\Delta z \leq 0, \forall \Delta x, \Delta y$ và dấu bằng chỉ đạt được tại $M_0(x_0, y_0)$ thì hàm số đạt cực đại tại $M_0(x_0, y_0)$

3. Nếu $\Delta z < 0\ (> 0), \forall \Delta x, \Delta y$ hoặc Δz có sự đổi dấu trong lân cận này thì $M_0(x_0, y_0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

• **Ví dụ 3.** Tìm cực trị của hàm số: $f(x,y) = x^3 y^3$

Giải:

4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm hai biến

• **Ví dụ 4.** Tìm các kích thước của hình hộp chữ nhật bỏ mặt trên, có thể tích không đổi $4\ m^3$ và diện tích mặt nhỏ nhất.

Giải:

+ Gọi *x*, *y* là các cạnh đáy, và *z* là chiều cao (*x,y,z >0*), khi đó diện tích các mặt (không tính mặt trên) là

$$A = xy + 2xz + 2yz.$$

+ Theo giả thiết: $xyz = 4$, nên $z = \dfrac{4}{xy}$, và diện tích được biểu biễn như một hàm hai biến *x* và *y*,

$$A = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}, \quad 0 < x, y < +\infty.$$

♣ **Cách 1 :**

+ Kết luận: hình hộp cần tìm có các kích thước là: $x = y = 2, z = 1$.

♣ **Cách 2 :**

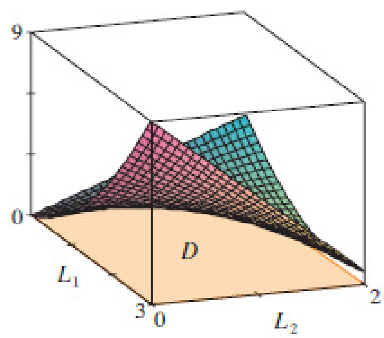
5. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

◆ **Định lý.** Cho hàm số $z = f(x,y)$ liên tục trong một miền đóng, bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó ta luôn tìm được GTLN và GTNN của hàm số đó trên *D.*

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên miền đóng sẽ xảy ra tại điểm nằm trong D (là điểm tới hạn) hoặc điểm nằm trên biên. Do đó, cách tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là:

B1. Tìm điểm tới hạn trong D và tính các giá trị đó.
B2. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên
B3. So sánh các giá trị đó.

• **Ví dụ 5.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trong miền hình chữ nhật đóng $D = \{(x,y) \mid \quad 0 \le x \le 3; 0 \le y \le 2\}$.



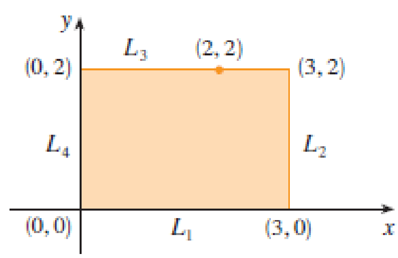
Giải: + Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên *D.*

• ***Bước 1***: + Tìm điểm tới hạn: Xét $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases},$

Như vậy h/số có một điểm tới hạn $(1,1)$.

+ Giái trị hàm số tại điểm tới hạn: $f(1,1) = 0$.

• ***Bước 2***: Tìm giá trị của hàm số trên biên của miền đóng *D.*



+ ***Trên biên*** $L_1 := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3; y = 0\}$: ta có $f(x,0) = x^2, 0 \le x \le 3$, lúc này GTLN là $f(3,0) = 9$, GTNN là $f(0,0) = 0$.

+ ***Trên biên*** $L_2 := \{(x,y) \mid x = 3; 0 \le y \le 2\}$: ta có $f(3,y) = 9 - 4y, 0 \le y \le 2$, lúc này GTLN là $f(3,0) = 9$, GTNN là $f(3,2) = 1$.

+ ***Trên biên*** $L_3 := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3; y = 2\}$: ta có $f(x,0) = x^2 - 4x + 4, 0 \le x \le 3$, lúc này GTLN là $f(0,2) = 4$, GTNN là $f(0,0) = 0$.

+ ***Trên biên*** $L_4 := \{(x,y) \mid x = 0; 0 \le y \le 2\}$: ta có $f(0,y) = 2y, 0 \le y \le 2$, lúc này GTLN là $f(0,2) = 4$, GTNN là $f(0,0) = 0$.

- ***Bước 3***: So sánh giá trị hàm số tại điểm tới hạn với giá trị hàm số trên biên suy ra:
  + GTLN của hàm số trên miền D là : 9 tại (3, 0).
  + GTNN của hàm số trên miền D là : 0 tại (0, 0).

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $z = x^2 - y^2$ trên miền hình tròn $x^2 + y^2 \le 4$.

Giải:

+ Ta có $z_{\max} = z(\pm 2,0) = 4,\ z_{\min} = z(0,\pm 2) = -4$.

Bài tập về nhà: Tr. **94**
Đọc trước Mục 19.8 chuẩn bị cho Bài số 6: ***Cực trị có điều kiện. Nhân tử Largrange***

Bài số 6

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN.

Trong trường hợp ***hàm nhiều biến số*** có một phương pháp rất hữu hiệu trong các bài toán cực trị ***với một hay nhiều ràng buộc:* đó là phương pháp nhân tử Largrange*.*** Nó là công cụ quan trọng trong kinh tế, hình học vi phân và lí thuyết cơ học nâng cao.

1. Xét với hàm hai biến và một ràng buộc.

❖ **Bài toán:** Tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ thỏa mãn $g(x,y) = 0$. (1)

❖**Phương pháp giải**

Cách 1: Rút *y* theo *x* (hoặc *x* theo *y*) từ (1) rồi thay vào hàm số ta nhận được hàm số một biến.

• **Ví dụ 1** Tìm các kích thước của một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà nội tiếp trong một nửa đường tròn bán kính *a*.

Giải :+ Dễ dàng thấy rằng ta cần giải quyết bài toán tìm GTLN của hàm số

$$A = 2xy \qquad (2)$$

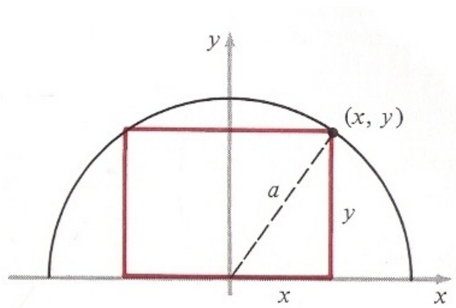
với ràng buộc $x^2 + y^2 = a^2$ (3)

+ Sử dụng điều kiện (3) để biểu diễn *A* như là hàm số của chỉ một biến *x*:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \text{hay là} \qquad A = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$$

+ Tính $\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{2(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} > 0$,

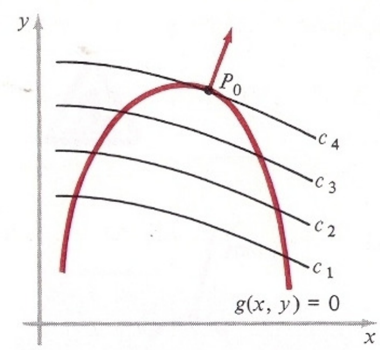
+ Lập BBT suy ra A đạt GLTN tại $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Cách 2: ***Phương pháp nhân tử Largange***

Mô tả phương pháp nhân tử Largrange

Bài toán: Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ với *ràng buộc* $g(x,y) = 0$.



❖ ***Phương pháp nhân tử Lagrange***

+ Lập hàm $L(x,y,\lambda)$ ba biến x,y và λ xác định bởi :

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y) \qquad (6)$$

+ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \end{cases}$ để tìm các điểm tới hạn $M_0(x_0,y_0)$

+ Tại những điểm (x_0,y_0) xét xem grad $g\neq 0$, hay không.

+ Xét : $d^2L(x_0,y_0)=L_{xx}(x_0,y_0)(dx)^2+2L_{xy}(x_0,y_0)(dxdy)+L_{yy}(x_0,y_0)(dy)^2$

trong đó $\begin{cases} dx^2+dy^2\neq 0 \\ g_x(x_0,y_0)dx+g_y(x_0,y_0)dy=0 \end{cases}$

Khi đó : + Nếu $d^2L(x_0,y_0)\geq 0, \forall dx,dy$ thì $z=f(x,y)$ đạt cực tiểu với điều kiện $g(x,y)=0$ tại (x_0,y_0).

+ Nếu $d^2L(x_0,y_0)\leq 0, \forall dx,dy$ thì $z=f(x,y)$ đạt cực đại tại (x_0,y_0).

+ Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ đổi dấu thì hàm số **không đạt** cực trị tại M_0.

+ Hơn nữa: Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực đại (hoặc cực tiểu) thì đó cũng là GTLN (hoặc GTNN) của $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$.

• Biến λ gọi là ***nhân tử Lagrange***.

• **Ví dụ 1(tiếp)** Tìm các kích thước của một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất, nội tiếp trong một nửa đường tròn bán kính *a*.

Giải: Gọi một đỉnh của hình chữ nhật là (x, y) với $0<x,y<a$.

+ Bài toán trở thành : Tìm GTLN của diện tích $A=f(x,y)=2xy$ với ràng buộc $x^2+y^2-a^2=0$

+ Thiết lập : $L = f - \lambda g = 2xy - \lambda\left(x^2 + y^2 - a^2\right)$.

+ Giải hệ

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2y - 2\lambda x = 0$ (8) ; $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2x - 2\lambda y = 0$ (9); $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + y^2 - a^2\right) = 0$ (10)

Phương trình (8) và (9) dẫn đến $y = \lambda x$ và $x = \lambda y$, thay vào (10) có: $\lambda^2\left(x^2 + y^2\right) = a^2$. Từ đó: $\lambda = \pm 1$. Giá trị $\lambda = -1$ kéo theo $y = -x$ (không thể bởi vì cả x và y đều dương) do vậy $\lambda = 1$ và $y = x$.

+ Cụ thể : $y = x$ vào $x^2 + y^2 = a^2$ sẽ tìm được $x_0 = y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

+ Ta có: $L_{xx}(x_0, y_0) = -2, L_{xy}(x_0, y_0) = 2, L_{yy}(x_0, y_0) = 2$, nên

$$d^2L(x_0, y_0) = -2dx^2 + 2dxdy - 2dy^2 = -2(dx^2 - dxdy + dy^2) < 0$$

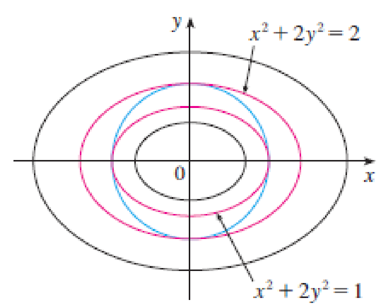
với mọi dx, dy sao cho $\begin{cases} dx^2 + dy^2 \neq 0 \\ g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0 \end{cases}$

+ Do đó hàm số $A = f(x, y) = 2xy$ đạt cực đại với điều kiện $g(x, y) = 0$ tại $x_0 = y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. Cực trị đó là duy nhất, miền ta đang xét là miền mở nên

$$A = f(x_0, y_0) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{2}a \text{ là GTLN với điều kiện đã cho.}$$

• **Ví dụ 2.** Tìm GTLN và GTNN của hàm số : $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Bài toán trở thành: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$ với điều kiện $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.



+ Từ đó: GTLN là: 2. GTNN là: 1.

❖ ***Chú ý***. Xét bài toán: Tìm GTLN, GTNN của hàm $z = f(x,y)$ với *ràng buộc* $g(x,y) \le 0$.

+ Trước hết ta tìm các điểm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ trong miền mở được giới hạn bởi đường cong $g(x,y) = 0$.

+ So sánh giá trị của hàm số tại những điểm tới hạn đó và giá trị của hàm số trên biên: Giá trị nào lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) thì đó là GTLN (hoặc GTNN) cần tìm.

• **Ví dụ 3.** Tìm GTLN và GTNN của hàm số $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$ trên miền hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$.

Giải.

+ GTLN cần tìm là 2 và GTNN cần tìm là 0.

◆ Một trong những ưu điểm của phương pháp nhân tử Lagrange là mở rộng một cách dễ dàng trong tình huống với nhiều biến hơn và nhiều ràng buộc hơn.

2. Trường hợp đối với hàm nhiều biến và nhiều ràng buộc.

Bài toán 1: Xác định cực trị của $f\left(x,y,z\right)$ với điều kiện $g(x,y,z) = 0$.

Lập luận tương tự như trường hợp trên, lúc này véc tơ gradient

$$grad f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

là pháp tuyến của mặt $g(x,y,z) = 0$, do vậy $\mathrm{grad}\ f$ cùng phương với $\mathrm{grad}\ g$, nên

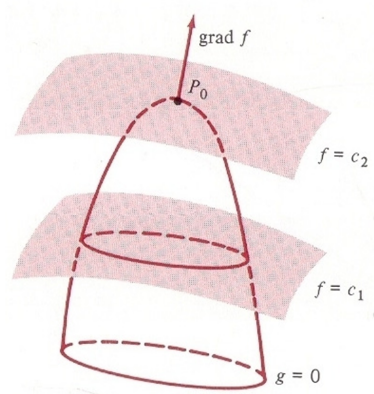
$$\mathrm{grad}\ f = \lambda \mathrm{grad}\ g.$$

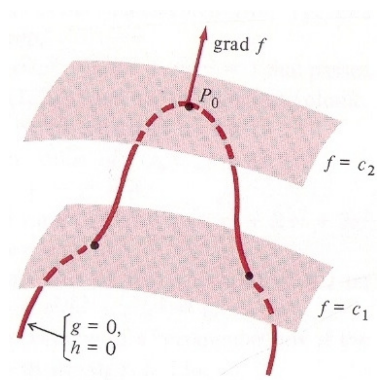
Bốn phương trình: $\dfrac{\delta f}{\delta x} = \lambda \dfrac{\delta g}{\delta x}$, $\dfrac{\delta f}{\delta y} = \lambda \dfrac{\delta g}{\delta y}$, $\dfrac{\delta f}{\delta z} = \lambda \dfrac{\delta g}{\delta z}$, $g(x,y,z) = 0$,

với bốn biến x, y, z, λ tương đương với những phương trình sau:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

ở đó $L = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ là hàm Largrange





Bài toán 2: Tìm cực trị của hàm số $f(x,y,z)$ với *hai* ràng buộc $g(x,y,z)=0$ và $h(x,y,z)$=0.

Lập luận như trên ta nhận được năm phương trình năm ẩn dưới đây:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial \mu}=0,$$

ở đó $L=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)-\mu h(x,y,z)$ là hàm Largrange, rồi tiến hành tương tự như trên.

• **Ví dụ 4.** Tìm điểm nằm trên mặt phẳng $x-2y+2z=9$ gần gốc tọa độ nhất.

Giải: + Ta có khoảng cách từ một điểm tới gốc là $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

+ Khoảng cách nhỏ nhất khi và chỉ khi bình phương của nó nhỏ nhất.

+ Bài toán trở thành:

Tìm GTNN của $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ với ràng buộc $x-2y+2z=9$.

+ Đặt: $L=x^2+y^2+z^2-\lambda(x-2y+2z-9)$.

+ Giải hệ phương trình : $\frac{\partial L}{\partial x}=2x-\lambda=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda=0$

$\frac{\partial L}{\partial z}=2z-2\lambda=0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x-2y+2z-9)=0$. (*)

Suy ra $x=\lambda/2,\ y=-\lambda,\ \ z=\lambda$ thay vào (*) có $\lambda=2\ \Rightarrow x=1,\ y=-2,\ z=2$. Do đó điểm $(1,-2,2,2)$ là điểm tới hạn của hàm Largrange.

+ Ktra tại $(1,-2,2,2)$ hàm *L* sẽ đạt cực tiểu: Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(1+\Delta x,-2+\Delta y,2+\Delta z,2)-L(1,-2,2,2)\\ &=(1+\Delta x)^2+(-2+\Delta y)^2+(2+\Delta z)^2-2\left[(1+\Delta x)-2(-2+\Delta y)+2(2+\Delta z)-9\right]\\ &\quad -(1+4+4)+2(1+4+4-9)\\ &=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2\ge 0,\quad \forall\ \Delta x,\Delta y,\Delta z\end{aligned}$$

+ Dấu " = " chỉ đạt được khi và chỉ khi $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

+ Hàm số đạt duy nhất một cực tiểu tại $(1,-2,2)$ với điều kiện đã cho, nên tại đó hàm số cũng đạt GTNN với điều kiện ấy.

+ Như vậy $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ đạt GTNN tại $(1,-2,2)$, và GTNN đó là 9 (đvdài), từ đó ta có điểm cần tìm là: $P_0(1,-2,2)$.

• **Ví dụ 5:** Tìm điểm trên đường giao tuyến của những mặt phẳng $x+y+z=1$ và $3x+2y+z=6$ mà gần gốc tọa độ nhất.

Bài toán trở thành: tìm GTNN của $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ với hai ràng buộc $x+y+z-1=0$ và $3x+2y+z-6=0$.

+ Đặt: $L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x+y+z-1) - \mu(3x+2y+z-6)$

+ Giải hệ hương trình

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda - 3\mu = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda - 2\mu = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda - 2\mu = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x+y+z-1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -(3x+2y+z-6) = 0,$$

+ Ba phương trình đầu tiên dẫn đến

$$x = \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu), \qquad y = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu), \qquad z = \frac{1}{2}(\lambda + \mu).$$

Thay những biểu thức này vào các phương trình thứ tư và thứ năm và đơn giản hoá, chúng ta dẫn đến

$$3\lambda + 6\mu = 2, \qquad 3\lambda + 7\mu = 6,$$

do vậy $\mu = 4$ và $\lambda = -\frac{22}{3}$. Những giá trị này dẫn đến $x = \frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{5}{3}$.

+ (Tự kiểm tra tương tự VD4) Điểm cần tìm là $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

◆ ***Chú ý*** : Trong kinh tế, phương pháp nhân tử Lagrange được sử dụng để giải quyết bài toán tối ưu hoá tổng sản lượng của một công ty phụ thuộc vào ràng buộc của tài nguyên sẵn có.

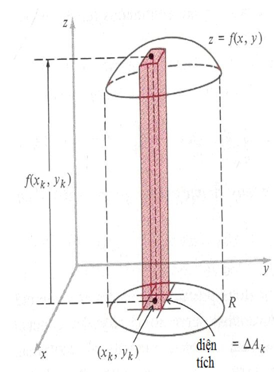
Về nhà:
Bài tập: Tr **102**
Đọc trước các Mục : **20.1, 20.2** chuẩn bị cho ***Bài số 7***
Tích bội hai. Tích phân lặp của hàm hai biến

Bài số 7

TÍCH PHÂN BỘI HAI VÀ TÍCH PHÂN LẶP.

1. TÍNH THỂ TÍCH BẰNG TÍCH PHÂN LẶP

a. Mô tả phương pháp: Xét hình trụ như hình vẽ.



+ Cắt mặt trụ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, độ dày của lát cắt là dx và diện tích tiết diện là A(x).

+ Vi phân thể tích của lát cắt mỏng là: $dV = A(x)dx$.

+ Với $x: a \to b$, ta có công thức tính thể tích: $V = \int_a^b A(x)dx$ (1)

◆ Với x là bất kì cố định giữa a và b, biến y thay đổi từ $y_1(x)$ đến $y_2(x)$, thì diện tích của tiết diện này là:

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (2)$$

◆ Thế (2) vào (1) và nhận được ***tích phân lặp***:

$$\boxed{V = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx} \qquad (3)$$

Đây chính là công thức tính thể tích V của vật thể.

◆ Chú ý: Miền lấy tích phân D trên mặt phẳng Oxy:

$$D = \{a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

◆ ***Nếu cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Oy***, khi đó :

$$(x,y) \in D = \{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

Khi đó dạng của tích phân lặp:

$$V = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy. \qquad (4)$$

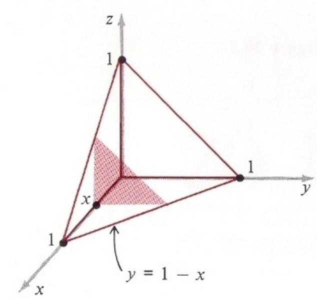
Các tích phân lặp (3) và (4) thường được viết không có dấu ngoặc như sau:

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx \quad \text{và} \quad \int_c^d \int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x,y)dxdy.$$

◆ ***Thứ tự lấy tích phân trong tích phân lặp:*** **từ bên trong ra ngoài**

b. Một số ví dụ.

• **Ví dụ 1** Sử dụng tích phân lặp để tìm thể tích của tứ diện bị chặn bởi những mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x+y+z=1$.



Giải: Cắt tứ diện bởi mặt phẳng vuông góc với trục x.

+ Khi đó: $V=\int_0^1 A(x)dx$

+ Thiết diện là tam giác vuông với đáy chạy từ $y=0$ đến $y=1-x$ và đường cao là z.

+ Diện tích thiết diện: $A(x)=\int_0^{1-x} zdy=\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$.

+ $V=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx=\int_0^1\left[y-xy-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{1}{6}$ (đvtt).

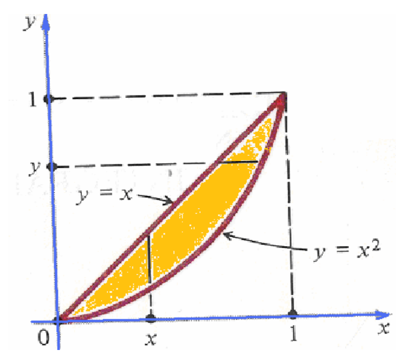
Kết quả: thể tích của một tứ diện bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao.

◆ **Chú ý:** Miền lấy tích phân: $D=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$

• **Ví dụ 2.** Tích phân lặp : $\int_0^1\int_{x^2}^{x} 2ydydx$

a. Vẽ miền lấy tích phân.
b. Viết tích phân lặp tương đương khi đổi thứ tự lấy tích phân và tính cả hai tích phân đó.

Giải : + Miền lấy tích phân $R=\{0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$.



+ Trong miền đang xét, hàm số dưới dấu tích phân không âm nên cả hai tích phân lặp dẫn đến thể tích của cùng một vật thể.

2. TÍCH PHÂN BỘI HAI

a. Tích phân bội hai.

◆ Khi miền D là miền hình chữ nhật.

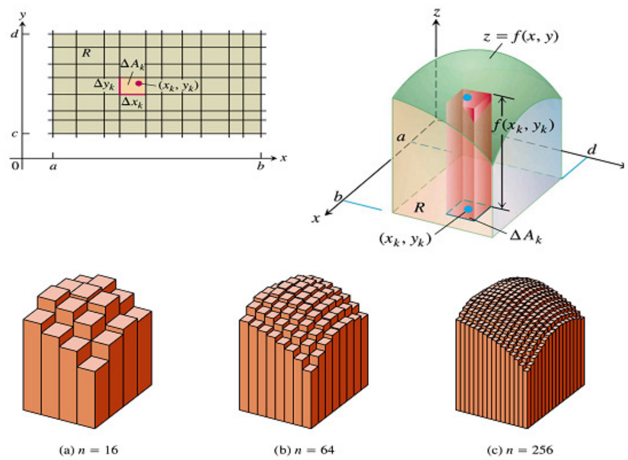
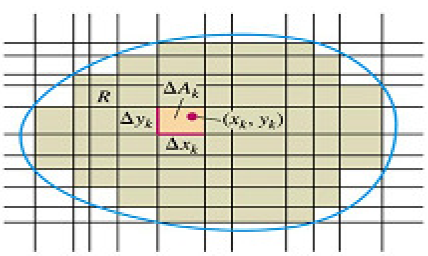
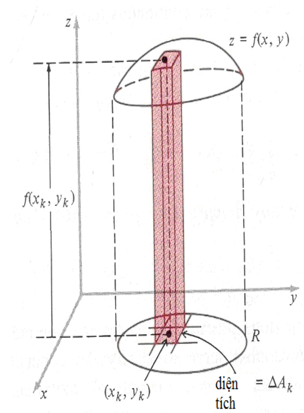


FIGURE 15.3 As n increases, the Riemann sum approximations approach the total volume of the solid shown in Figure 15.2.

◆ Khi miền D là miền bị chặn.





+ Chia D thành n hình chữ nhật nhỏ. Mỗi cách chia đó gọi là một phân hoạch của D.
+ Kí hiệu ΔA_k là diện tích của hình chữ nhật thứ *k*.
+ Chọn (x_k, y_k) trong hình chữ nhật thứ *k*
+ Lập tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$
+ Nếu ***tổng đó tiến đến một giới hạn duy nhất*** khi *n* **tiến đến vô vùng** (không phụ thuộc vào việc chia miền D và cách chọn điểm (x_k, y_k)) thì giá trị giới hạn đó được gọi là ***tích phân bội hai*** của hàm $f(x, y)$ trên miền R:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k \qquad (3)$$

◆ Ý nghĩa hình học:
1. Thể tích hình trụ: mặt trên $z = f(x, y) \geq 0$, mặt đáy $z = 0$, miền giới hạn D trên mặt phẳng Oxy) là:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dA$$

2. Khi $f(x,y)=1$ ta có: $\iint\limits_D dA = A$ là diện tích miền D.

◆ Chú ý: Tích phân bội hai cũng có **các tính chất cơ bản tương tự như tích phân đơn.**

b. Cách tính tích phân bội hai:

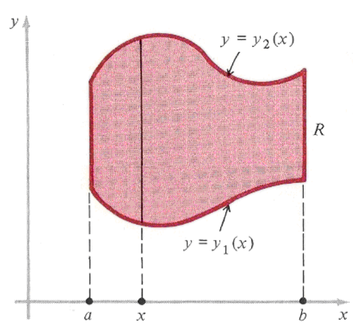
• Định lý Fubini: Cho $f(x,y)$ là hàm liên tục trên miền R.

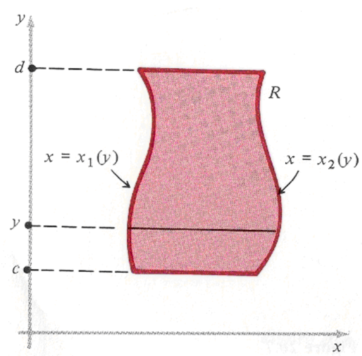
Nếu $R:\{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ (miền thẳng đứng đơn giản) thì:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Nếu $R:\{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ (miền nằm ngang đơn giản) thì:

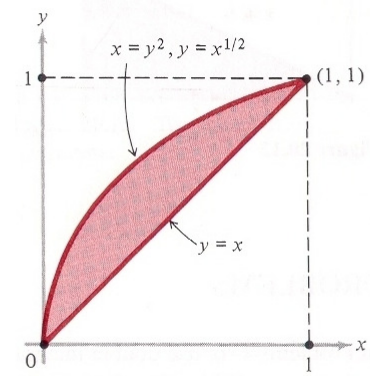
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



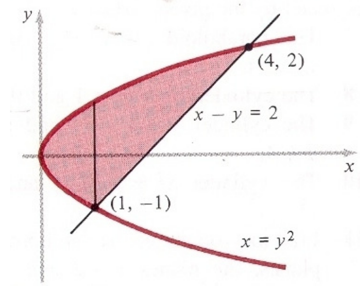


• **Ví dụ 3.** Tính tích phân bội hai $I=\iint\limits_R 2xy\,dA$ theo hai cách khác nhau, ở đó R là miền bị chặn bởi parabola $x=y^2$ và đường thẳng $y=x$.

***Giải* :**



• **Ví dụ 4**. Tính $I = \iint_R (1+2x)\,dA$ ở đó R là miền bị chặn bởi $x = y^2$ và $x - y = 2$.



• **Ví dụ 5** . Dùng tích phân bội hai tính diện tích của miền bị chặn giới hạn bởi các parabol $y = x^2$ và $y = 4x - x^2$.

Giải:

Ví dụ 6: Tính thể tích của vật thể bị chắn bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$, mặt phẳng $x + y = 1$ và ba mặt phẳng toạ độ.

Giải:

Ví dụ 7: Tính thể tích của vật thể nằm phía trên mặt phẳng Oxy giới hạn bởi trụ $y = 4 - x^2$ và các mặt phẳng $y = 3x$, $z = x + 4$.

Về nhà Bài tập: tr. 119, 127
Đọc trước các Mục 20.9, Mục 20.4 chuẩn bị cho **Bài số 8:**

Tích phân bội hai trong tọa độ cực.
Đổi biến trong tích phân bội hai.

CẤU TRÚC ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ MÔN TOÁN II

Hình thức thi: Tự luận - Thời gian: 50 phút

Câu 1 (3,5 điểm) Không gian 2, 3 chiều

+ Xác định và vẽ MXĐ của hàm số hai biến: Biểu diễn miền xác định của hàm hai biến dưới dạng bất đẳng thức: $a < x < b, \quad y_1(x) < y < y_2(x)$ hoặc $c < y < d, \quad x_1(y) < x < x_2(y)$. Vẽ miền xác định đó.

+ Các mặt cong trong không gian 3 chiều: vẽ, gọi tên (nếu có).

+ Hệ toạ độ trụ, toạ độ cầu: chuyển tọa độ điểm, chuyển phương trình của đường, mặt giữa các loại tọa độ.

Câu 2 (3,5 điểm) Hàm nhiều biến

+ Tính các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai của hàm hai hoặc ba biến

+ Tính vi phân toàn phần cấp một, vi phân cấp hai của hàm hai biến hoặc ba biến

+ Tính đạo hàm hàm ẩn, hàm hợp

+ Tính đạo hàm theo hướng, gradient của hàm hai biến hoặc ba biến.

+ Bài toán viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, phương trình pháp tuyến với mặt cong.

Câu 3 (3,0 điểm) Cực trị

+ Tìm Cực trị tự do của hàm hai biến

+ Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền bị chặn.

+ Bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm hai biến.

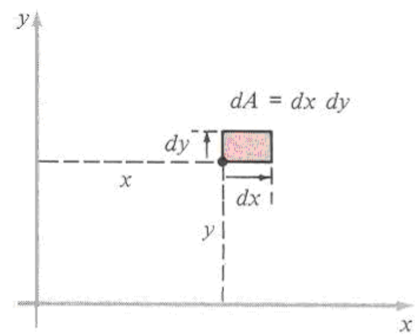
Bài số 8

TÍCH PHÂN BỘI HAI TRONG TỌA ĐỘ CỰC
ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI HAI

1. TÍCH PHÂN BỘI HAI TRONG TOẠ ĐỘ CỰC.

a. Yếu tố diện tích. Xác định miền trong tọa độ cực .

Nhắc lại: $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$

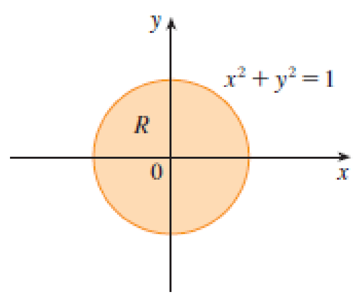


Tích phân bội hai còn có thể viết:

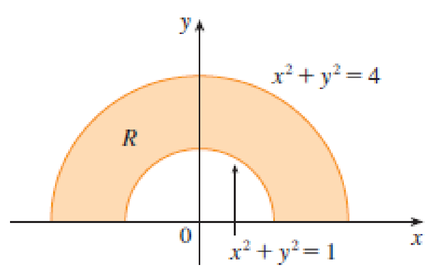
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_R f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

❖ Trong nhiều trường hợp, do đặc thù của miền R nên sử dụng tọa độ cực mô tả miền sẽ tiện lợi hơn.

Ví dụ 1: + Miền được giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.



+ Miền thuộc góc phần tư thứ nhất và hai và được giới hạn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.



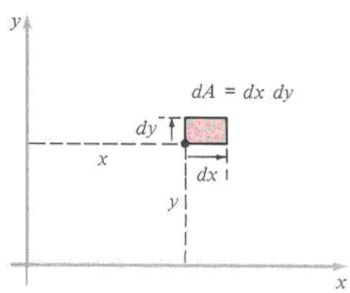
❖ Ta sẽ xét khái niệm tích phân bội hai trong toa độ cực: $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$.

- Từ công thức $x = r\cos\theta,\ y = r\cos\theta$, nên hàm dưới dấu tích phân:

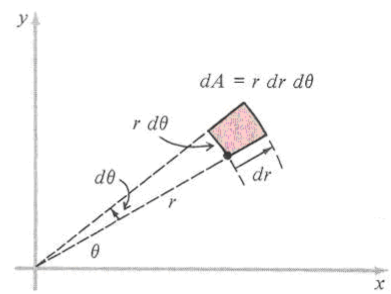
$$f(x,y) = f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right).$$

- Yếu tố diện tích dA trong tọa độ cực

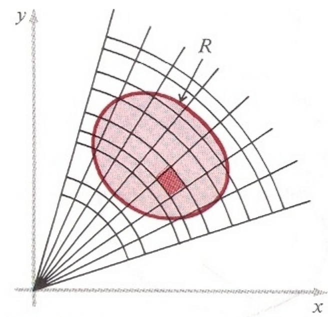
+ Phân hoạch mặt phẳng theo cách sau: Thông qua các **cung tròn** tâm O và các ***tia bán kính*** xuất phát từ O tạo hành những ô nhỏ giống như các hình chữ nhật gọi là: ***"hình chữ nhật cực"***.



(a)



(b)



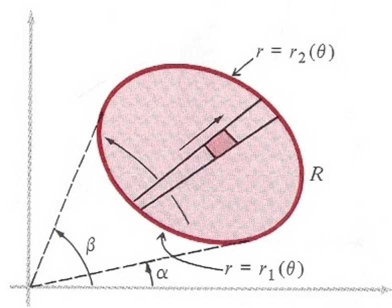
+ Nếu r tăng đến $r+dr$ và θ tăng đến $\theta+d\theta$ ta nhận được hình chữ nhật cực và diện tích của hình chữ nhật cực nhỏ xấp xỉ với:

$$\boxed{dA=(dr)(rd\theta)=rdrd\theta.}$$

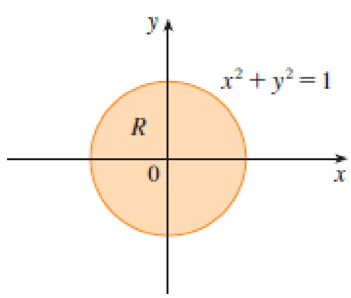
• **Miền trong tọa độ cực:**

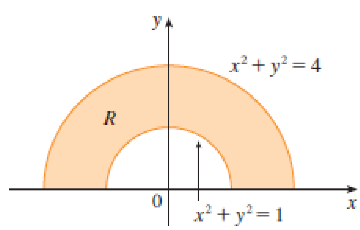
+ Miền R có ***dạng tròn đơn giản*** nếu có thể miêu tả bởi các bất đẳng thức dạng

$$\boxed{r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta.}$$



Ví dụ 2.





$$R=\{0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$R=\{1\le r\le 2,0\le\theta\le\pi\}$$

+ Những miền phức tạp trong tọa độ cực có thể chia thành những miền dạng tròn đơn giản.

b. Tính tích phân bội hai trong tọa độ cực

❖ **Cách tính:** Khi miền R có dạng

$$\boxed{r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta}$$

thì:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Ví dụ 3: Tìm diện tích của miền R bị chặn bởi đường cardioid $r = a(1+\cos\theta)$.

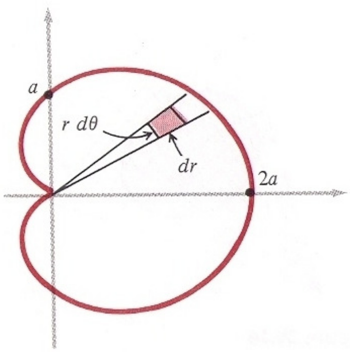
Giải:

+ Công thức:

$$A = \iint_R dA = \iint_R rdrd\theta.$$

+ Với miền

$$R = \{(r,\theta)\,|\,0 \le r \le a(+\cos\theta), 0 \le \theta \le 2\pi\}$$



Nếu sử dụng tính đối xứng xét một nửa miền R thì $0 \le \theta \le \pi$

$$A = 2\iint_{R_1} dA = 2\int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos\theta)} rdrd\theta = 2\int_0^\pi \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 2\int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^\pi \left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= a^2\int_0^\pi \left(1+2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$= a^2\left[\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 4: Tính thể tích của vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $z = x^2 + y^2$ và trụ $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Giải:

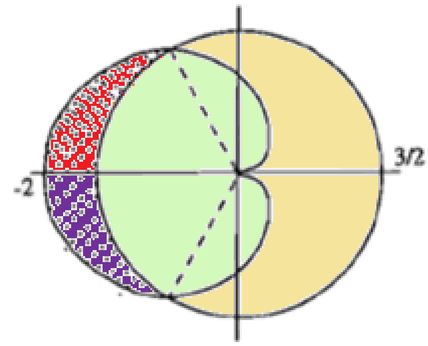
+ Vật thể bị chặn dưới bởi mặt z = 0, chặn trên bởi $z = x^2 + y^2$.

+ Miền R trong mặt phẳng xy là nửa đường tròn $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $y \ge 0$.

+ Đổi sang hệ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\cos\theta$ thì R:

+ Nên V =

Ví dụ 5: Tính diện tích của miền R nằm bên trong đường Cardoid $r = 1-\cos\theta$ và nằm ngoài đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính 3/2.



Ví dụ 6 : Tích phân suy rộng $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Giải:

+ Giá trị tích phân không phụ thuộc và tên biến khi lấy tích phân, nên ta có:

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy\right).$$

+ Do tính chất tách biến biểu thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$I^2 = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right) e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\right) dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.$$

+ Miền lấy tích phân là toàn bộ góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng *Oxy*, trong tọa độ cực miền đó có dạng

$$R := \{0 \le r \le +\infty, 0 \le \theta \le \pi/2\}$$

+ Do đó: $I^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$

+ Suy ra $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ hay $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Vậy: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Hai công thức trên thường gặp trong nhiều bài toán Kinh tế và Kỹ thuật.

2. ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI HAI.

a. Đổi biến từ tọa độ vuông góc sang tọa độ cực

◆ Trước hết ta xét đổi tích phân bội hai từ toạ độ vuông góc sang toạ độ cực.

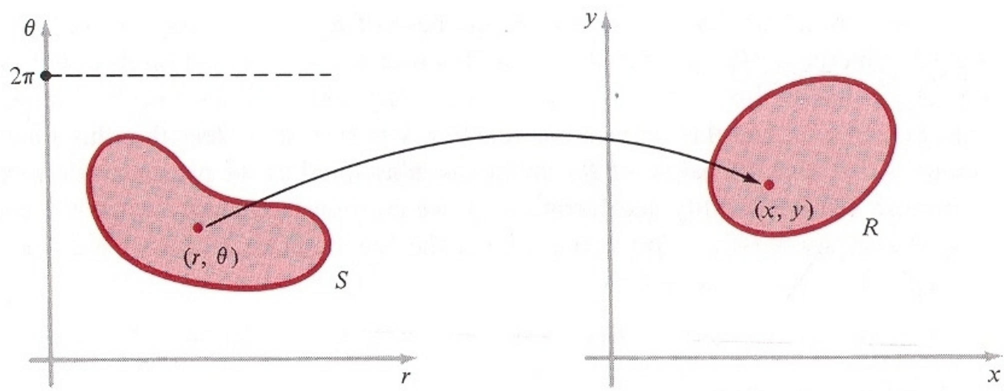
+ Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases}$ (*)

cho ta một ***phép biến đổi*** biến điểm (r,θ) trong tọa độ cực thành điểm (x,y) trong mặt phẳng *xy*, khi đó miền *R* trong mặt phẳng *xy* được biến thành miền *S* trong tọa độ cực.

+ Yêu cầu: ***tương ứng này phải là một-một***, thông thường $0 \le r$, $0 \le \theta < 2\pi$.

+ Khi đó:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta \qquad (**)$$



b. Đổi biến trong tích phân bội hai

Ta trở lại vấn đề ở đầu mục đã đặt ra đối với tích phân bội hai $I = \iint_R f(x,y)\,dA$.

❖ **Định thức Jacobi (Jacobian):**

Xét một cặp hàm số hai biến: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ***có các đạo hàm riêng liên tục***. *Jacobian* của những hàm số này là định thức xác định bởi:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

+ Ta cũng có:

$$J^{-1} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Cụ thể: Jacobian của phép đổi biến trong toạ độ cực là:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

❖ Đổi biến của tích phân bội hai :

+ Xét tích phân : $\iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_R f(x,y)dxdy$

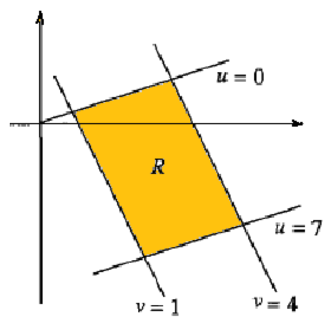
+ Phép đổi biến : $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

+ Khi đó :

$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,|J|\,dudv \qquad (***)}$$

Ví dụ 7: Tính $I = \iint\limits_R \frac{x-3y}{2x+y}dxdy$, trong đó R là hình bình hành được giới hạn bởi các đường $y=-2x+1,\ y=-2x+4,\ y=x/3,\ y=(x-7)/3$.

Giải



+ Xét phép đổi biến $\begin{cases} u = x-3y \\ v = 2x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}u + \frac{3}{7}v \\ y = -\frac{2}{y}u + \frac{1}{7}v \end{cases}$,

+ Khi đó miền S (ảnh của miền R qua phép biến đổi) là $S := \{0 \le u \le 7, 1 \le v \le 4\}$

+ Jacobian: $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{7}.\frac{1}{7} + \frac{3}{7}.\frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

+ Thay vào công thức ta có:

$$I = \iint\limits_R \frac{x-3y}{2x+y}dxdy = \iint\limits_S \frac{u}{v}|J|\,dudv = \frac{1}{7}\int_0^7\int_1^4 \frac{u}{v}dudv = 7.\ln 2.$$

Bài tập về nhà: Tr. **137**
Chuẩn bị đọc trước: Mục **20.3, 20.8, 20.5** cho **Bài số 9:**
Ứng dụng tích phân phân bội hai.
Tích phân bội ba.

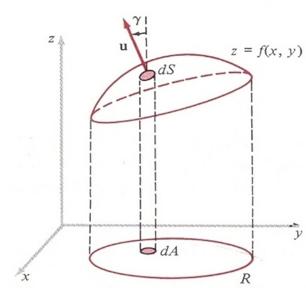
Bài số 9

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI HAI - TÍCH PHÂN BỘI BA

I. Ứng dụng của tích phân bội hai.

1. Diện tích mặt cong.

❖ **Tìm diện tích mặt cong S:** $z = f(x,y)$, có $f_x(x,y)$ và $f_y(x,y)$ là các **hàm số liên tục**.



+ R là miền ***đóng và giới nội*** trong mặt phẳng xy và là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng xy.

+ Gọi ***dA là hình chiếu vi phân diện tích dS của mặt cong*** S trên mặt phẳng *xy*, khi đó:

$$dA = dS\cos\gamma \quad \text{hay là} \quad dS = \frac{dA}{\cos\gamma},$$

trong đó γ là góc tạo bởi *dA* và *dS.*

• **Tính** $\cos\gamma$: + Véc tơ $f_x\mathrm{i} + f_y\mathrm{j} - \mathrm{k}$ là VTPT của mặt S, VTPT này hướng xuống dưới.

Do đó $\mathrm{u} = \dfrac{-f_x\mathrm{i} - f_y\mathrm{j} + \mathrm{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$ là VTPT đơn vị hướng lên trên và **k** là véc tơ đơn vị thẳng đứng

nên: $\boxed{\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}}$

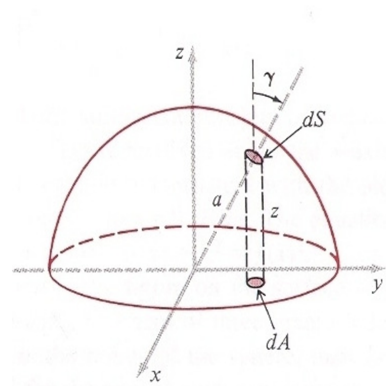
Do vậy công thức tính diện tích mặt cong *S* là:

$$S = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}.dA \ .$$

(Trong đó R là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng xy)

Ví dụ 1: Tìm diện tích của nửa trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$.

Giải: + Nửa mặt cầu phía trên có phương trình $z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$



+ Ta có: $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{a - x^2 - y^2}}$.

$$+ \quad \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \left[\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1\right]^{1/2}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

+ Diện tích của nửa mặt cầu là:

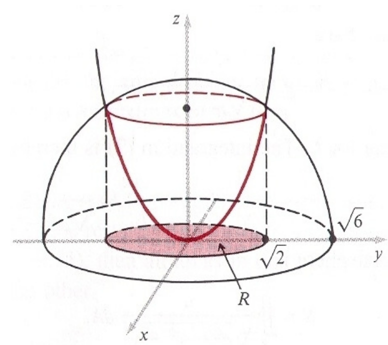
$$S = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA, \quad \text{Với } R = \left\{(x,y) \middle| \quad x^2 + y^2 \le a^2\right\}.$$

+ Đổi biến sang hệ toạ độ cực:

$$S = a\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} = a\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a}d\theta \;= a^2\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi a^2 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2: Tìm diện tích của phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm phía trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Giải :



$$S = \frac{13}{3}\pi \text{ (đvdt).}$$

2. Ứng dụng Vật lý của tích phân bội hai.

a. Khối lượng.

Nếu $\delta = \delta(x,y)$ là tỉ trọng của bản mỏng (khối lượng đối với một đơn vị diện tích), thì $\delta(x,y)dA$ là khối lượng của yếu tố diện tích dA, và khối lượng của bản mỏng R là:

$$M = \iint_R \delta(x,y)dA$$

b. Mômen (Mô men khối lượng).

+ ***Mômen*** toàn phần khối lượng của bản phẳng R đối với trục Ox là

$$M_x = \iint_R y\delta(x,y)dA$$

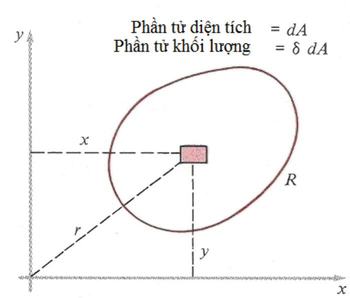
+ Mômen toàn phần khối lượng đối với trục Oy của bản phẳng R là

$$M_y = \iint_R x\delta(x,y)dA.$$

c. Trọng tâm (Tâm khối lượng)

+ **Trọng tâm** là điểm mà tại đó toàn bộ khối lượng của bản phẳng có thể tập trung mà không thay đổi moment của nó theo các trục.

+ ***Công thức:*** Toạ độ trọng tâm $(\overline{x},\overline{y})$ được xác định bởi:



$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA},\quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA}$$

+ Khi tỉ trọng δ là hằng số, thì dẫn đến khối lượng của bản phẳng được phân bố đồng đều, tâm khối lượng của bản phẳng R trở thành trọng tâm hình học của miền R, và công thức tính trọng tâm hình học:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{dt(R)} \iint_R x dA, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{dt(R)} \iint_R y dA$$

d. Mô men quán tính (Mô men quán tính khối lượng)

+ Mômen quán tính của một hệ thống đối với một trục là đại lượng đo khả năng chống lại gia tốc quay đối với trục đó.

+ Mômen quán tính của bản phẳng R đối với trục x và trục y được xác định bởi:

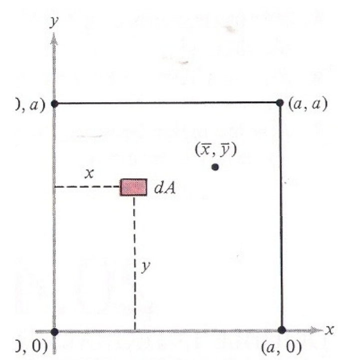
$$\boxed{I_x = \iint_R y^2 \delta(x,y) dA, \quad I_y = \iint_R x^2 \delta(x,y) dA}$$

+ Mô men quán tính của bản phẳng đối với trục z (mô men quán tính đối với gốc) được xác định bởi:

$$I_z = \iint_R r^2 \delta(x,y) dA \qquad \text{ở đó } r^2 = x^2 + y^2.$$

Ví dụ 3. Một bản vật chất hình vuông R có các đỉnh là $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a), $(0,a)$ với tỉ trọng biến thiên: tỷ trọng tại điểm $P = (x,y)$ là tích của các khoảng cách từ P đến các trục tức là $\delta = xy$. Tìm khối lượng của bản phẳng, tâm khối lượng của bản phẳng, và mô men quán tính của nó đối với trục x

Giải: **+** $R = \{(x,y) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$



+ Ta có khối lượng của bản mỏng:

$$M = \iint_R \delta dA =$$

$$= \frac{a^4}{4}$$

+ Tâm khối lượng của bản phẳng có hoành độ là:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} =$$

$$= \frac{2}{3} a,$$

do tính đối xứng chúng ta có $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{3} a$.

+ Mô men quán tính đối với trục x cần tìm:

$$I_x = \iint_R y^2 \delta dA =$$

$$= \frac{1}{8} a^6.$$

Ví dụ 4. Tìm tọa độ tâm khối lượng của miền nằm phía trên trục hoành và được giới hạn bởi đường hình tim $r = a(1+\cos\theta)$, trục hoành.

Giải:

+ Tọa độ trong tâm là: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{5\pi a}{6}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{16a}{9}$

II. Tích phân bội ba

a. Định nghĩa: Xét hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên R là ***miền bị chặn*** trong $\mathbb{R}^3$.

+ Chia R thành những ***hình hộp chữ nhật*** (và một phần của các hình hộp chữ nhật) bởi các ***mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ***;

+ Ký hiệu thể tích của hình hộp thứ k nằm trong R là ΔV_k. Lấy điểm (x_k, y_k, z_k) trong hình hộp thứ k và lập tích $f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$.

+ Lập tổng của những tích này đối với tất cả các hình hộp chứa trong R,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k .$$

+ Lấy giới hạn của tổng này khi n tiến đến vô cùng. Nếu giới hạn tồn tại, ta gọi đó là tích phân bội ba của $f(x,y,z)$ trên R:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$$

b. Điều kiện tồn tại tích phân bội ba: $I = \iiint_R f(x,y,z)dV$ sẽ tồn tại nếu hàm *f(x,y,z)* ***liên tục và bị chặn trên*** R (R là miền giới nội trong $\mathbb{R}^3$).

c. Tính chất:

1. Tuyến tính: $\iiint_R [\alpha f + \beta g]dV = \alpha \iiint_R f dV + \beta \iiint_R g dV$

2. Cộng tính: $\iiint_R f dV = \iiint_{R_1} f dV + \iiint_{R_2} f dV, \quad R = R_1 \cup R_2$

d. Cách tính tích phân bội ba : Đưa về tích phân lặp

♦ **Nếu miền lấy tích phân R có dạng**

$$R=\{a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

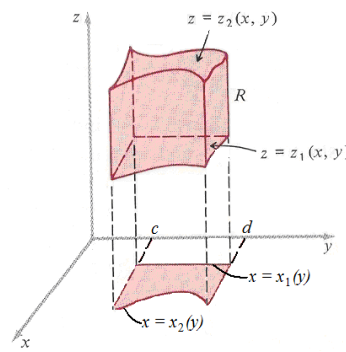
Chú ý: Chiếu miền R lên xOy ta được miền D, trong trường hợp này ta nhận thấy:

$$\boxed{D=\{a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}}.$$

Khi đó:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx\ .$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I=\int_0^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} xdzdydx$

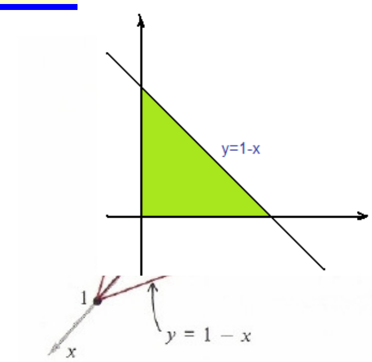


Giải:

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} xdzdydx=\int_0^1\int_{x^2}^1 (xz)\Big|_0^{1-y} dydx=\int_0^1\int_{x^2}^1 x(1-y)dydx$$

$$=\int_0^1 x\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^1 dx=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{12}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I=\iiint\limits_R (2x+1)dV$, trong đó R là tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x+y+z=1$.



Giải: + Hình chiếu D của R lên mặt Oxy là tam giác vuông.

Nên $D=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$

+ Khi đó :

$$R=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y\}.$$

+ Do đó:

$$I=\iiint\limits_R (2x+1)dV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(2x+1)dzdydx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(2x+1)(1-x-y)dydx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)(1-x)^2dx=\frac{1}{4}$$

Nhận xét: Khi chiếu miền R lên mặt phẳng xy, có thể thu được D có dạng $D=\{x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$. Khi đó miền lấy tích phân R có dạng:

$$R=\{x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}.$$ Khi đó:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx \right] dy = \int\limits_c^d \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy .$$

Tương tự, chúng ta cũng có những khả năng khác nữa khi ***chiếu miền R lên các mặt phẳng tọa độ Oyz hoặc Oxz.***

III. Ứng dụng của tích phân bội ba.

1. Tính thể tích. Khi $f(x,y,z)=1$, ta có $\iiint\limits_R dV$ chính là thể tích của vật thể R.

Do đó $V_R = \iiint\limits_R dV$

Ví dụ 7: Tính thể tích vật thể R nằm trong góc phần tám thứ nhất được giới hạn bởi các mặt: $z=4-x^2-y^2$, $y=x$, $y=0$, $z=0$.

Giải:

+ ĐS: $V=2\pi$

Ví dụ 8: Tính thể tích của vật thể bị giới hạn bởi các mặt $z=4-x^2-y^2$ và $z=3\sqrt{x^2+y^2}$.

Giải:

2. Ứng dụng Vật lý.

a. Tính khối lượng vật thể: **Vật thể *R*** trong $\mathbb{R}^3$ với tỉ khối (khối lượng riêng) $\delta = \delta(x, y, z)$ phụ thuộc vào từng điểm và δdV là khối lượng của yếu tố thể tích. Khi đó ***khối lượng của vật thể R*** là: $M = \iiint\limits_R \delta dV$

b. Mô men đối với các mặt tọa độ:

+ Đối với mặt *Oyz*: $M_{yz} = \iiint\limits_R x\delta dV$

+ Đối với mặt *Oxz*: $M_{xz} = \iiint\limits_R y\delta dV$

+ Đối với mặt *Oxy*: $M_{xy} = \iiint\limits_R z\delta dV$

c. Mô men quán tính đối với các trục tọa độ:

+ Đối với trục *Ox*: $I_x = \iiint\limits_R (y^2 + z^2)\delta dV$

+ Đối với trục *Oy*: $I_y = \iiint\limits_R (z^2 + x^2)\delta dV$

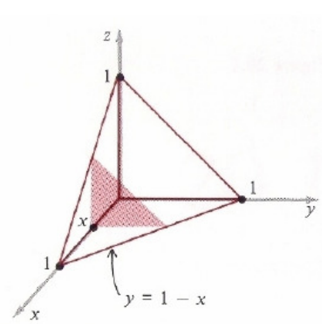
+ Đối với trục *Oz*: $I_z = \iiint\limits_R (x^2 + y^2)\delta dV$

d. Tọa độ khối tâm của *R*: còn gọi là tọa độ trọng tâm khối lượng vật thể *R*

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M},\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Ví dụ 9: Tìm trọng tâm của tứ diện đồng chất bị chặn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

Giải: + Vật đồng chất và đối xứng nên ta coi tứ diện như một vật thể với tỉ trọng $\delta = 1$, do đó khối lượng bằng thể tích.



+ Thể tích của hình tứ diện đó là V=$\frac{1}{6}$, và $\bar{z}$ xác định bởi:

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_R z dV = \frac{1}{V}\iiint\limits_R zdzdydx$$

+ Do vậy

$$\bar{z} = \frac{1}{1/6}\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} zdzdydx = 6\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-x-y} dydx$$

$$= 3\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2 dydx = 3\int_0^1\left[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^3\, dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

+ Do tính đối xứng của miền nên trọng tâm là điểm $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Bài tập về nhà: Tr. **162, 132, 145**,
Đọc trước: Mục **20.9**(Phần cuối), **20.6** và **20.7** chuẩn bị cho **Bài số 10**:
Đổi biến trong tích phân bội ba. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ, tọa độ cầu

Bài số 10

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI BA
TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG TỌA ĐỘ TRỤ, TỌA ĐỘ CẦU.

1. Đổi biến trong tích phân bội ba.

+ Xét tích phân bội ba: $\iiint\limits_R f(x,y,z)dV$

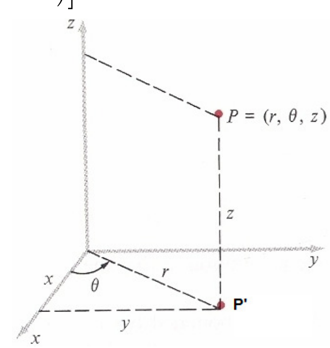
+ Phép biến đổi : $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ trong đó các hàm $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ xác định và có các ***đạo hàm riêng lên tục*** trên **miền đóng, giới nội** $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Phép biến đổi này biến miền S (trong uvw) thành miền R (trong xyz).

+ Định thức Jacobi: $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$

+ Công thức: $$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_S F(u,v,w)|J|dudvdw$$

ở đó $F(u,v,w) = f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]$.

◆ **Mục đích của phép đổi biến:** Biến đổi miền lấy tích phân ban đầu thành miền lấy tích phân mới đơn giản hơn.



2. Tích phân bội ba trong tọa độ trụ:

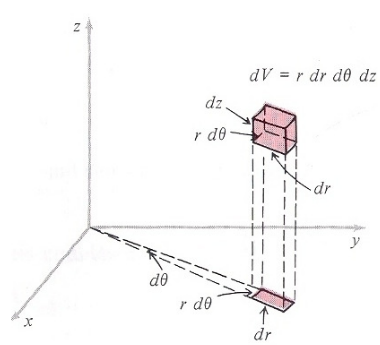
Nếu một vật thể có trục đối xứng (chẳng hạn trục đối xứng nằm trên trục z) tích phân bội ba tính trong tọa độ trụ sẽ có nhiều thuận lợi hơn.

+ Trong tọa độ vuông góc ta có:

$$I = \iint\limits_R f(x,y,z)dV$$

+ Thay thế (x, y, z) bằng tọa độ trụ r, θ, z.

+ Thay vi phân thể tích trong toạ độ vuông góc $dV = dxdydz$ bằng vi phân thể tích trong hệ tọa độ trụ $dV = rdrd\theta dz$ để tính toán tích phân bội ba.

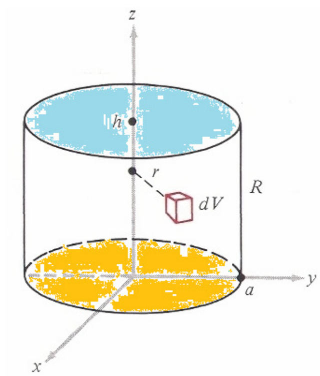


+ Tích phân bội ba trở thành dạng sau:

$$\iint\limits_{R(x,y,z)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{R(r,\theta,z)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta dz \quad .$$

Ví dụ 1: Sử dụng tích phân bội ba trong toạ độ trụ để tìm mômen quán tính của một vật thể trụ đồng chất chiều cao *h*, đáy bán kính *a* đối với trục của nó.

Giải : + Đặt trục hình trụ nằm trên trục z.
+ Từ "đồng chất" nghĩa là tỉ trọng δ là hằng số.
+ Do đó mômen quán tính toàn phần của trụ đối với trục *z* của nó là :



$$I_z = \iiint\limits_R r^2 \delta dV = \iiint\limits_R r^2 \delta r dr d\theta dz =$$

$$= \delta . \frac{1}{2} \pi a^4 h .$$

Ví dụ 2: Tìm khối lượng của vật thể bị chặn phía trên bởi paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và phía dưới bởi mặt phẳng xy, có tỉ trọng tỉ lệ với khoảng cách đến trục z, $\delta = cr$.

Giải:

+ Khối lượng: $M = \iiint\limits_R \delta dV$.

+ $M = \dfrac{4\pi c}{15}$

Ví dụ 3 Tìm thể tích của miền bị chặn phía trên bởi mặt phẳng z = 2x và phía dưới bởi paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Giải:

ĐS: $V = \dfrac{\pi}{2}$.

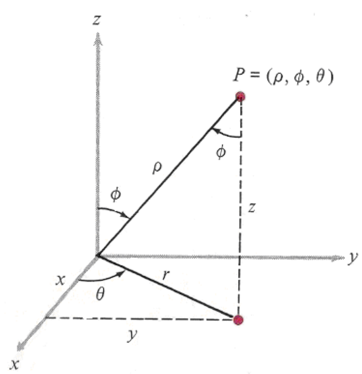
Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z dxdydz$, trong đó V nằm trong góc phần tám thứ nhất, được giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và các mặt phẳng $z = 0$, $z = x$.

Giải:

+ Vậy $I = \dfrac{1}{3}$.

3. Tích phân bội ba trong tọa độ cầu.

Tọa độ cầu giải quyết hiệu quả các bài toán có chứa tính chất đối xứng qua một điểm, như trong trường hợp của một hình cầu, có tỉ khối tỉ lệ với khoảng cách đến tâm của nó.



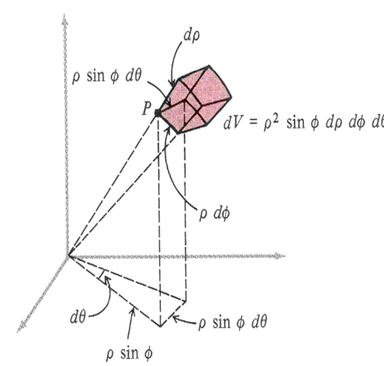
◆ ***Yếu tố thể tích trong tọa độ cầu:***

+ Tại điểm $P = (\rho, \phi, \theta)$ xét các số gia $d\rho, d\phi, d\theta$

+ Dịch chuyển của P theo hướng ρ một khoảng $d\rho$, rồi sau đó theo hướng ϕ một khoảng $\rho d\phi$, và cuối cùng theo hướng θ một khoảng $\rho \sin\phi d\theta$.

+ Khi đó ta nhận được một ***"hộp cầu"*** và thể tích của hộp đó là $(d\rho)(\rho d\phi)(\rho \sin\theta d\theta)$ và ta có:

$$dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta .$$



◆ **Đổi biến sang tọa độ cầu:**

+ Công thức biến đổi:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}, \quad \rho \ge 0, \quad 0 \le \phi \le \pi$$

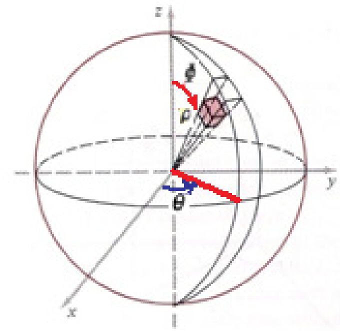
+ Jacobian: $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$

$$= \rho^2 \sin\phi \Rightarrow \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} \right| = \left| \rho^2 \sin\phi \right| = \rho^2 \sin\phi .$$

+ Tích phân bội ba trong toạ độ cầu:

$$I = \iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_R f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad .$$

Ví dụ 5: Sử dụng tích phân bội ba trong toạ độ cầu để tìm thể tích của miền R giới hạn bởi mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2=a^2$.



Giải: + Phương trình của mặt cầu (S) trong toạ độ cầu là $\rho = a$.

+ Miền $R: \{0 \le \rho \le a, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

+ Vậy thể tích:

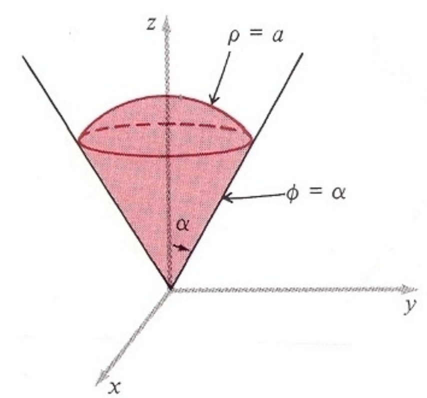
$$V = \iiint_R dV = \iiint_R \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$V = \left[\int_0^a \rho^2 d\theta\right]\left[\int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] = \frac{1}{3}a^3.2.2\pi = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 6: Tìm trọng tâm của miền đồng chất (S) bị chặn bởi hình cầu $\rho = a$ và nón $\phi = \alpha$.

Giải: + Miền (S) đồng chất nên δ là hằng số. Không mất tính tổng quát giả sử $\delta = 1$.

+ Miền (S) đang xét trong tọa độ cầu



+ Khối lượng (chính bằng thể tích vì $\delta = 1$) là

$$M = \iiint_S dV =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha).$$

+ Miền đã cho nhận Oz là trục đối xứng nên $\overline{x} = \overline{y} = 0$.

+ Để tìm $\overline{z}$, chúng ta nên tìm mô men của miền đối với mặt phẳng xy trước,

$$M_{xy} = \iiint\limits_R z dV =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha .$$

+ Từ đó ta có: $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} =$

$$= \frac{3}{8} a(1 + \cos\alpha).$$

Ví dụ 7: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt sau: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ với $z \geq 0$, $0 < a < b$.

Giải:

+ Chuyển sang hệ tọa độ cầu, ta có miền R trong hệ cầu giới hạn vởi các mặt sau:

2 mặt cầu $\rho = a$, $\rho = b$, và mặt nón $\phi = \frac{\pi}{4}$, $z \geq 0$.

+ Nên R:

+ Do đó thể tích cần tính là:

$$V = \iiint\limits_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_a^b \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

Bài tập về nhà: Tr. **149, 157**.
Đọc trước: Mục **21.1** chuẩn bị cho **Bài số 11**:
Trường véc tơ. Tích phân đường

Bài số 11

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG TRONG MẶT PHẲNG.
SỰ KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN, TRƯỜNG BẢO TOÀN

I. Tích phân đường trong mặt phẳng

1. Trường véc tơ

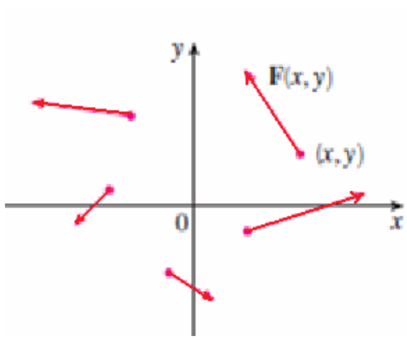
a. Khái niệm trường véc tơ:

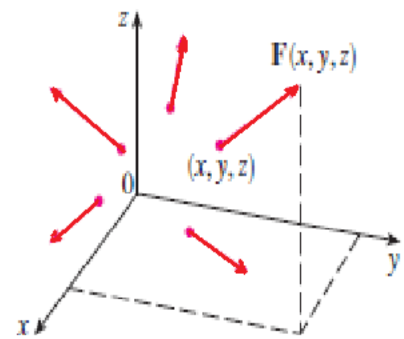
◆ Nếu tại mỗi điểm $(x,y)\in V\subseteq\mathbb{R}^2$ có một quy tắc xác định véc tơ **F***(x,y)* nào đó thì ta nói rằng trên miền V xác định một ***trường véc tơ*** (trong không gian hai chiều).
Khi đó ta có thể viết:

$$F(x,y)=M(x,y)\vec{i}+N(x,y)\vec{j}.$$

◆ Tương tự: tại mỗi điểm $(x,y,z)\in V\subseteq\mathbb{R}^3$ có một quy tắc xác định véc tơ $F(x,y,z)$ ta nói rằng trên miền V xác định một ***trường véc tơ*** (trong không gian ba chiều) và ta có:

$$F(x,y,z)=K(x,y,z)\vec{i}+M(x,y,z)\vec{j}+L(x,y,z)\vec{k}$$

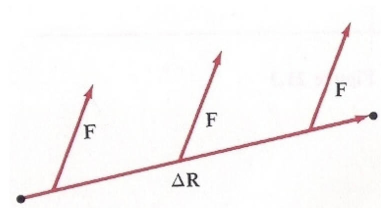




Ví dụ: Trường trọng lực, Từ trường, Trường vận tốc, Trường gia tốc, Trường gradient của một trường vô hướng (hai hoặc 3 biến). . .

b. Công của lực biến đổi.

◆ Nếu đặt vào một phần tử dọc theo một đường thẳng trên mặt phẳng một lực không đổi **F** (không đổi theo cả hướng và độ lớn), thì công của lực này là tích của lực **F** theo hướng di chuyển và khoảng cách mà phần tử di chuyển:



$$W=\mathbf{F}.\Delta\mathbf{R},$$

trong đó ΔR là véc tơ từ vị trị ban đầu của phần tử đến vị trí cuối của nó.

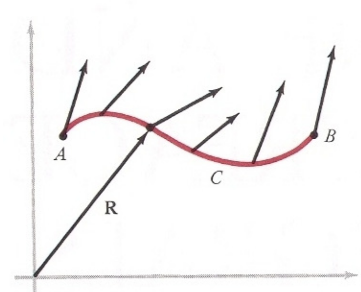
+ Giả sử $\mathbf{F}=M(x,y)i+N(x,y)j$, $\Delta\mathbf{R}=(dx,dy)$

+ Khi đó $W=\mathbf{F}.\Delta\mathbf{R}=M(x,y)dx+N(x,y)dy.$

Chú ý: + Xét chất điểm chuyển động theo một trục dưới sự tác động của lực không đổi **F**, chẳng hạn chuyển động theo trục Ox, khi đó $\Delta\mathbf{R}=(dx,0)$ và công của lực đó là

$$W=\mathbf{F}.\Delta\mathbf{R}=M(x,y)dx.$$

+ Khi $\mathbf{F}\perp\Delta\mathbf{R}$ thì công của lực sẽ bằng 0.



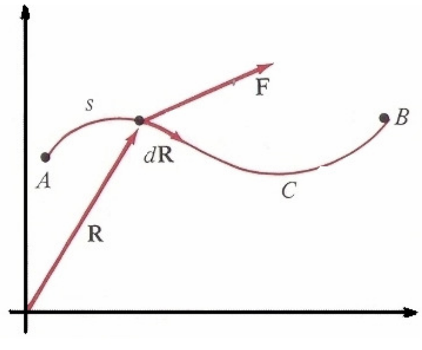
? ***Vấn đề đặt ra:*** Bây giờ giả sử rằng lực **F** biến đổi

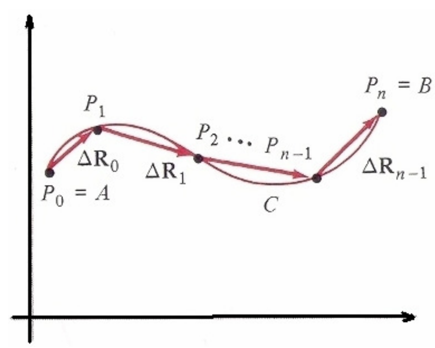
$$\mathrm{F} = \mathrm{F}(x,y) = M(x,y)\mathrm{i} + N(x,y)\mathrm{j} \quad (*)$$

tác động vào một chất điểm tạo ra một chuyển động trên một đường cong phẳng (C) từ điểm A đến điểm B. Khi đó công của lực **F** bằng bao nhiêu ?

2. Tích phân đường trên mặt phẳng.

a. Định nghĩa: Trên một miền phẳng D xét một hàm véc tơ hai biến xác định trên đường cong (C) đã được định hướng từ A tới B (ta nói rằng khi đó đã xác định một trường lực trên (C)): $\mathrm{F} = M(x,y)\mathrm{i} + N(x,y)\mathrm{j}$.





+ Phân hoạch đường cong (C) bởi $P_0 = A$, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, $P_n = B$.

+ Đặt $\mathrm{R}_k = \overrightarrow{OP_k}$, $\Delta\mathrm{R}_k = \mathrm{R}_{k+1} - \mathrm{R}_k$: véc tơ nối điểm đầu và điểm cuối của cung thứ *k,* với $k = 0,1,...,n-1$.

+ Kí hiệu F_k là giá trị của hàm véc tơ **F** tại P_k, tức là $F_k = \mathrm{F}(P_k)$

+ Lập tổng: $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k.\Delta\mathrm{R}_k$: đây chính là công thức cho xấp xỉ công cần tìm.

+ Lấy giới hạn của tổng này khi $n \to +\infty$, nếu giới hạn đó tồn tại thì giá trị đó được gọi là tích phân đường của hàm véc tơ $\mathrm{F} = M(x,y)\mathrm{i} + N(x,y)\mathrm{j}$ trên đường cong (C):

$$\int_C \mathrm{F}.d\mathrm{R} = \lim \sum_{k=0}^{n-1} F_k.\Delta R_k$$

$$\text{hay : } \int_C \mathrm{F}.d\mathrm{R} = \lim \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k.\Delta\mathrm{R}_k = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy .$$

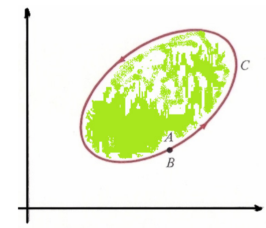
Và khi đó ta đã có kết quả cho bài toán tính công của trường lực **F** trên đường cong phẳng (C) .

Chú ý: **1.** Nếu đường cong (C) nằm dọc theo trục x giữa $x = a$ và $x = b$, và nếu $\mathrm{F} = f(x)\mathrm{i}$, thì

$$\int_C \mathrm{F}.d\mathrm{R} = \int_a^b f(x)dx .$$

3. Nếu (C) là ***đường cong kín và định hướng*** ngược chiều kim đồng hồ thì tích phân của **F** trên C viết dưới dạng:

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = \oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$



b. Điều kiện tồn tại: Nếu (C) là đường cong ***trơn hoặc trơn từng khúc***, các hàm $M(x,y), N(x,y)$ ***liên tục*** trên (C) thì tồn tại $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

c. Một số tính chất:

i. *Tuyến tính*: $\int_C [\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G}].d\mathbf{R} = \alpha\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R}+\beta\int_C \mathbf{G}.d\mathbf{R}$, với các hằng số α,β.

ii. *Cộng tính:* Nếu $((C),(C_1),(C_2)$ là những đường cong ***không có điểm trong chung, có cùng định hướng***: $C = C_1 \cup C_2$ khi đó:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = \int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{R} + \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{R}$$

iii. Nếu gọi (C^*) là đường cong tạo bởi (C) nhưng ngược hướng với (C), khi đó:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = -\int_{C^*} \mathbf{F}.d\mathbf{R}.$$

d. Cách tính tích phân đường.

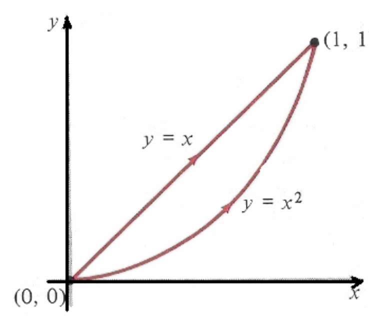
$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

❖ ***Trường hợp 1:*** Đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$, với x biến thiên từ a đến b thì: $\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_a^b \left[M(x,y(x)) + N(x,y(x))\frac{dy}{dx}\right]dx$

Ví dụ 1: Tính tích phân đường: $I = \int_C x^2ydx + (x-2y)dy$, từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ với C là:

(a) đường thẳng $y = x$		(b) đường parabol $y = x^2$

Giải : (a) + Ta có $y = f(x) = x$, x biến thiên từ 0 đến 1
+ Khi đó:



$$I=\int_0^1 x^2.xdx+(x-2x)dx=\int_0^1\left[x^3-x\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}$$

(b) + Ta có $y=f(x)=x^2$, x biến thiên: , dy =

$I=$

$=-\dfrac{2}{15}$

❖ ***Trường hợp 2:*** Đường cong C có phương trình $x=g(y)$, với y biến thiên từ c đến d thì: $\displaystyle\int_C M(x,y)dx+N(x,y)dy=\int_c^d\left[M(x(y),y)\frac{dx}{dy}+N(x(y),y)\right]dy$

❖ ***Trường hợp 3:*** Đường cong C được xác định bởi $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, với t biến thiên từ t_1 đến t_2, khi đó ta có:

$$\int_C M(x,y)dx+N(x,y)dy=\int_{t_1}^{t_2}\left[M(x(t),y(t))x'(t)+N(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$

Ví dụ 3: Tính tích phân đường: $I=\int_C ydx+(x+2y)dy$ từ điểm $(1,0)$ đến $(0,1)$, ở đó C là:

(a) đường gấp khúc từ $(1,0)$ đến $(1,1)$ đến $(0,1)$;
(b) cung của đường tròn $x=\cos t$, $y=\sin t$;
(c) đoạn thẳng $y=1-x$.

Giải: **(a)** Ta có: $I=\int_C ydx+(x+2y)dy=\int_{(1,0)}^{(1,1)} ydx+(x+2y)dy+\int_{(1,1)}^{(0,1)} ydx+(x+2y)dy$

+ Dọc theo đoạn thẳng từ $(1,0)$ đến $(1,1)$ ta có:

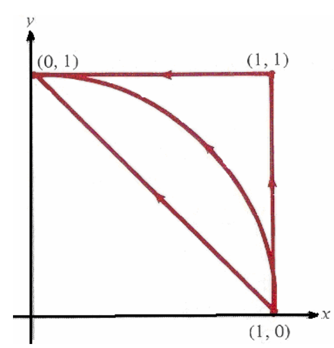
$x=1$, y biến thiên từ 0 đến 1 và $dx=0$.

+ Dọc theo đoạn thẳng từ $(1,1)$ đến $(0,1)$ ta có:

$y=1$, x biến thiên từ 1 về 0 và $dy=0$.

+ Tích phân đường cần tìm là:

$$I=\int_C ydx+(x+2y)dy=\int_0^1(1+2y)dy+\int_1^0 dx=\left[y+y^2\right]_0^1+x\big|_1^0=1$$



(b) Ở đây $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, t biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$,

+ $dx = -\sin t dt$ và $dy = \cos t dt$,

+ Do vậy

$$I = \int_C y dx + (x+2y)dy = \int_0^{\pi/2} -\sin^2 t dt + (\cos t + 2\sin t)\cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t \cos t\right)dt = \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + 2\sin t \cos t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2t + \sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

(c) Ta có: $y = 1 - x$, x biến thiên từ 1 đến 0 dọc theo đoạn thẳng này.

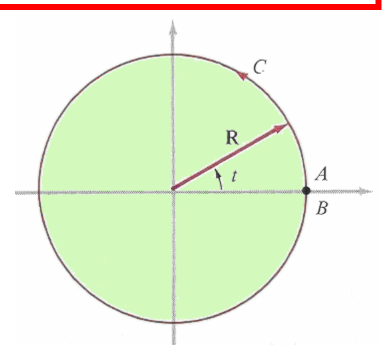
+ Suy ra : $dy = -dx$.

+ Tích phân cần tìm là

$$I = \int_C y dx + (x+2y)dy = \int_1^0 (1-x)dx + [x + 2(1-x)](-dx) = \int_1^0 (-1)dx = 1.$$

Ví dụ 4: Tính $\oint_C \mathrm{F}.d\mathrm{R}$, ở đó $\mathrm{F} = y.\mathrm{i} + 2x.\mathrm{j}$ và (C) là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ từ $A = (1,0)$ quay trở lại chính điểm đó .

Giải:



+ $\oint_C \mathrm{F}.d\mathrm{R} = \pi$

Ví dụ 5: Tính tích phân đường $I = \oint_C (x+1)dy - (y+1)dx$ trong đó C là chu tuyến dương của miền xác định bởi các đường cong $y = x^2$, $8x = y^2$.

Giải:

+ Giao điểm của 2 parabol là 0(0, 0) và A(2, 4).

+ Vậy $I=\int_{C_1} FdR+\int_{C_2} FdR$.

Trong đó: C_1 là

C_2 là

+ Vậy $I=\int_{C_1} FdR+\int_{C_2} FdR=\dfrac{16}{3}$

II. Sự không phụ thuộc đường lấy tích phân. Trường bảo toàn

1. Sự không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

a. Một số khái niệm:

◆ Trường véc tơ **F** được gọi là ***gradient của trường vô hướng*** f (*gọi tắt là trường gradient*), nếu: $\mathbf{F}=\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$.

Ví dụ 6: Trường véc tơ $\mathrm{F}=\mathrm{F}(x,y)=y\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}$ là trường gradient của trường vô hướng $f(x,y)=xy+y^2$ vì : $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}=y\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}=\mathbf{F}$.

◆ Ta đã biết ***Định lí cơ bản của phép tính vi phân (một biến)***: Nếu $f(x)$ là hàm khả vi trên $[a,b]$ thì ta có

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a) \quad \text{(Công thức Newton-Leibniz)} .$$

? ***Liệu có kết quả tương tự đối với hàm nhiều biến hay không?***

b. Định lý cơ bản của phép tính vi phân đối với tích phân đường

Nếu một trường véc tơ **F** *là* ***gradient của trường vô hướng*** f *trong một miền R, tức là* $\mathrm{F}=\nabla f$ *trong R, và nếu (C) là một* ***đường cong trơn (từng phần), định hướng*** *trong R với điểm đầu và điểm cuối A và B, khi đó:*

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R}=\int_C \nabla f.d\mathbf{R}=f(B)-f(A) \quad (*).$$

Ví dụ 7 : Tính tích phân đường

$$\mathrm{I}=\int_C ydx+(x+2y)dy$$

từ điểm $(1,0)$ đến $(0,1)$.

Giải: Ta có $\mathrm{F} = \mathrm{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$ là trường gradient của trường vô hướng $f(x, y) = xy + y^2$ tức là $\mathrm{F} = \nabla f$, theo Định lý cơ bản:

$$I = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = \int_C \nabla f.d\mathbf{R} = f(0,1) - f(1,0) = 1 - 0 = 1.$$

❖ ***Chú ý:***

+ Nếu F là trường Gradient thì tích phân đường không phụ thuộc vào quỹ đạo lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào hai điểm đầu và cuối của quỹ đạo đó. Hay ***tích phân đường của một trường gradient là độc lập với quỹ đạo lấy tích phân.***

+ Nếu **(C)** là ***quỹ đạo đóng*** thì *f*(B) – *f*(A) = 0. Do đó *nếu* ***F*** ***là trường gradient thì***

$$\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{R} = 0$$ *với mọi quỹ đạo đóng* **(C)** trong MXĐ của *f*.

Ví dụ 8: Tính tích phân đường của trường véc tơ $\mathrm{F} = y\cos xy\mathrm{i} + x\cos xy\mathrm{j}$ dọc theo phần của đường parabol $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$.

Giải :• ***Cách 1:***

• ***Cách 2:***

2. Trường bảo toàn

a.Ý nghĩa Vật lý của Trường bảo toàn (tự đọc)

Ví dụ 9: Giả sử rằng **F** là trường lực và vật *m* chuyển động dưới tác dụng của lực dọc theo quỹ đạo cong *(C)* từ điểm A đến điểm B. Giả sử quỹ đạo được tham số hoá bởi thời gian *t* bởi *x = x(t), y = y(t)* , *t* biến thiên từ t_1 đến t_2 .

+ Khi đó công của lực **F** dọc quỹ đạo này là :

$$W = \int_C \mathbf{F}d\mathbf{R} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{F}\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right]dt \qquad (**)$$

+ Theo Định luật II Newton ta có: $\mathrm{F} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$

trong đó $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ là vận tốc.

+ Tốc độ $v = |\mathbf{v}|$, ta có thể viết hàm dưới dấu tích phân trong (**) như sau

$$\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2).$$

+ Do đó (**) trở thành

$$W = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(v)^2dt = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 \qquad (***)$$

trong đó v_A, v_B tốc độ đầu và tốc độ cuối, tức là tốc độ tại A và tại B.

+ Vì $\frac{1}{2}mv^2$ là động năng của vật, đẳng thức (***) nói rằng: ***công của lực chính bằng sự thay đổi động năng***.

+ Do **F** thỏa mãn: **F** = $-\nabla V$, nên V tăng nhanh theo hướng đối của **F**. Hàm V(x,y) được gọi là *thế năng* và $V(x,y) = -f(x,y)$.

+ Nó tồn tại nếu và chỉ nếu **F** là trường gradient, theo Định lý cơ bản

$$W = \int_C \mathbf{F}d\mathbf{R} = -\int_C \nabla V d\mathrm{R} = -[V(B) - V(A)] = V(A) - V(B)\ , \qquad (****)$$

trong đó A và B là điểm đầu và điểm cuối của quỹ đạo (C) tùy ý. Nếu ta cân bằng (***) và (****), ta có

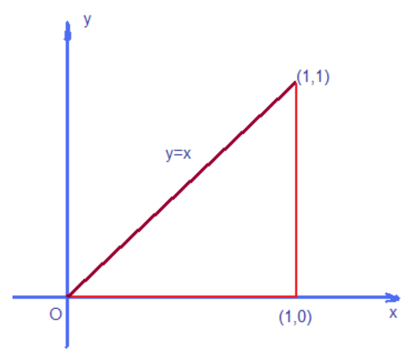
$$V(A) - V(B) = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2$$

hoặc

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 + V(A) = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + V(B)$$

+ Như vậy: **tổng động năng và thế năng là bằng nhau tại thời điểm ban đầu và thời điểm kết thúc**. Vì hai điểm này tuỳ ý nên ***tổng năng lượng là hằng số***. Đây chính là ***Định luật bảo toàn năng lượng***, một trong những nguyên lý cơ bản của Vật lý cổ điển.

Do vậy việc xác định một trường lực (hay một trường véc tơ) cho trước là bảo toàn hay không là công việc rất quan trọng.



b. Định nghĩa Trường lực **F** được gọi là **trường bảo toàn** nếu nó là gradient của trường vô hướng f. Khi đó, hàm vô hướng *f* gọi là **Hàm thế vị** (hàm thế).

Vậy $\mathrm{F} = M(x,y)\mathrm{i} + N(x,y)\mathrm{j}$ là trường bảo toàn

$$\Leftrightarrow \mathbf{F} = \nabla f \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Ví dụ 10: Chứng minh rằng trường véc tơ **F** = xy**i** + xy^2**j** là không bảo toàn.

Giải: ▪ *Cách 1*: **chỉ ra rằng $\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{R}$ *phụ thuộc vào quỹ đạo*.**

Chọn hai điểm (0,0) và (1,1), và lấy tích phân từ điểm thứ nhất tới điểm thứ hai theo hai quỹ đạo khác nhau.

+ Đầu tiên, lấy tích phân dọc theo đường thẳng y = x ta có:

$$\int_C \mathbf{F}d\mathbf{R} = \int_C xydx + xy^2dy = \int_0^1 \left(x^2 + x^3\right)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

+ Mặt khác, dọc theo đường gấp khúc từ (0,0) tới (1,0) tới (1,1) ta có:

$$\int_C \mathbf{F}d\mathbf{R} = \int_0^1 0dx + \int_0^1 y^2dy = \frac{1}{3}.$$

Vì giá trị tích phân là không bằng nhau, nên trường **F** là không bảo toàn.

- ***Cách 2***: Phương pháp phản chứng: giả sử trường **F** là bảo toàn, nên **F** = ∇f với *f(x,y)* nào đó, và suy ra mâu thuẫn.

+ Giả sử tồn tại hàm *f* sao cho $\partial f/\partial x = M(x,y) = xy$ và $\partial f/\partial y = N(x,y) = xy^2$.

+ Tuy nhiên khi lấy đạo hàm hỗn hợp thì:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x = M_y \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y^2 = N_x,$$

không bằng nhau mặc dù chúng liên tục. Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng không tồn tại *f*. Vậy nên **F** là không bảo toàn.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng tích phân đường sau độc lập với quỹ đạo lấy tích phân và tính: $I = \int_{(0,0)}^{(4,5)} y^2e^xdx + 2ye^xdy$

Giải:

Bài tập về nhà: Tr. **177**.

Chuẩn bị đọc trước: Mục **21.2, 21.3** chuẩn bị cho **Bài số 12:**

Định lý Green.

Bài số 12

SỰ KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN. TRƯỜNG BẢO TOÀN. ĐỊNH LÝ GREEN.

I. Định lý Green.

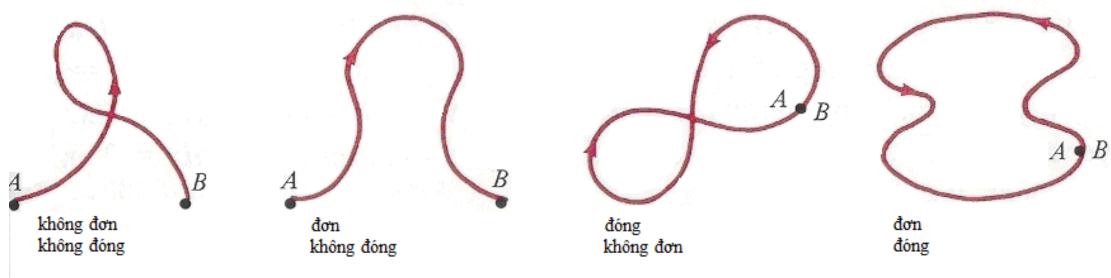
◆ **Mục đích** : 1. Xét mối liên hệ giữa tích phân đường và tích phân bội hai trong $\mathbb{R}^2$.
2. Điều kiện

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

có đủ đảm bảo **F** = *M*(x,y)**i** +*N*(x,y)**j** là trường bảo toàn hay không ?

1.Các khái niệm: Trong $\mathbb{R}^2$.

+ **Đường cong đóng** là một đường cong mà điểm cuối B là trùng với điểm đầu A.
+ Một đường cong phẳng được gọi là ***đơn*** nếu nó không tự cắt.
+ Một đường **cong đơn**, **đóng** là ***định hướng tuyệt đối*** nếu ta đi trên biên thì miền bên trong luôn nằm ở bên tay trái.



2. Định lý Green:

*Nếu (C) là **đường cong đóng, đơn, trơn (từng khúc)**, bao quanh miền R trong $\mathbb{R}^2$, và nếu M(x,y), N(x,y) là **liên tục và có đạo hàm riêng liên tục** dọc theo (C) và trên R thì:*

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA \,.$$

Hệ quả: Nếu *R* là miền bất kỳ áp dụng được Định lý Green, thì ***diện tích*** *A* của *R* được xác định bởi công thức $A = \frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy\,.$ (2)

Ví dụ 1: Tính giá trị của tích phân đường

$$I = \oint_C (3x - y)dx + (x + 5y)\,dy$$

trên đường tròn đơn vị *(C) :* $x = \cos t,\ \ y = \sin t$ với $t \in [0,\ 2\pi]$.

Giải ▪ ***Cách 1***: Tính trực tiếp tích phân ta có

$$I = \int_0^{2\pi} [(3\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + 5\sin t)(\cos t)]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [2\sin t\cos t + 1]\,dt = \left(\sin^2 t + t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

▪ ***Cách 2***: Áp dụng Định lý Green: Để ý rằng (C) là đường cong kín thỏa mãn Định lý Green bao quanh một hình tròn đơn vị *R.*

\+ $M = 3x - y$ và $N = x + 5y$, ta có $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -1$ và $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$

\+ Từ đó : $I = \oint_C (3x - y)dx + (x + 5y)\,dy = \iint_R [1 - (-1)]dA$

$$= 2\iint_R dA = 2\pi$$ (2 lần diện tích hình tròn đơn vị).

Ví dụ 2: Tính tích phân đường

$$I = \oint_C \left(2y + \sqrt{1 + x^5}\right)dx + \left(5x - e^{y^2}\right)dy$$

trên đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$.

Giải

ĐS: $I = 12\pi$

Ví dụ 3. Tính tích phân đường $I = \oint_C (x+1)dy - (xy+1)dx$, trong đó C là chu tuyến dương của miền D xác định bởi các đường cong $y = x^2,\ x = y^2$.

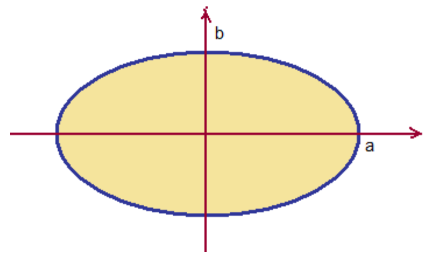
Giải:

$$I = \frac{29}{60}.$$

Ví dụ 4: Sử dụng tích phân đường để tính diện tích miền phẳng được giới hạn bởi đường ellip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Giải

+ Tham số hoá elip bằng $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ t biến thiên từ 0 đến 2π.



+ Áp dụng công thức (2) ta có:

$$A=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(-b\sin t)(-a\sin t+\cos t.b\cos t)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt=\pi ab\,(\text{đvdt}).$$

Ví dụ 5. Có thể áp dụng định lý Green để tính tích phân đường

$$I=\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

a, trong đó C là đường tròn $x^2+y^2=1$?

b, trong đó C là tam giác với các đỉnh (1, 0), (1, 2), (2, 2).

Giải:

a,

b,

3. Điều kiện đủ cho trường bảo toàn:

Điều kiện cần và đủ:

*Nếu miền xác định của trường véc tơ **F** = M(x,y)**i** + N(x,y)**j** là **đơn liên** thì **F** là bảo toàn khi và chỉ khi* $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

II. Định lý bốn mệnh đề tương đương

Giả sử C là đường cong đóng, đơn, trơn từng mảng, bao quanh miền R, và nếu M(x, y), N(x, y) là liên tục, có đạo hàm riêng liên tục dọc theo C và trên R. Khi đó 4 mệnh đề sau tương đương:

1. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ với mọi $(x,y)\in R$.
2. Trường véc tơ **F** = M(x,y)**i** + N(x,y)**j** là trường véc tơ bảo toàn.

3. $\int_{\widehat{AB}} Mdx + Ndy = \int_{\widehat{AB}} \nabla f.d\mathbf{R} = f(B) - f(A)$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung bất kỳ trong R, chỉ phụ thuộc vào hai điểm đầu mút A, B mà không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B.
4. $\oint_C Mdx + Ndy = 0$, với mọi đường cong kín C trong R.

Phương pháp tìm hàm thế vị f.

Nếu $\mathrm{F} = M(x,y)\mathrm{i} + N(x,y)\mathrm{j}$ bảo toàn, tức là $\mathrm{F} = \Delta f$ với hàm *f(x,y)* nào đó - hay nói cách khác: tồn tại hàm số $f(x,y)$ sao cho: $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ (3), $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ (4).

Khi đó ta sẽ tìm hàm thế vị $f(x,y)$ bằng cách nào? .

Bước 1: Ta tích phân hai vế một trong hai phương trình (3) hoặc (4), chẳng hạn tích phân hai vế của (3) suy ra $f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$. (5)

Bước 2: Sau đó lấy đại hàm hai vế hàm số (5) vừa tìm theo biến y ta nhận được:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ? \qquad (6)$$

Bước 3: Từ (4) và (6) sẽ tìm được $g(y) = ?$.

Bước 4: Thay ngược lại (5) ta thu được $f(x,y)$.

Ví dụ 6: Tìm thế vị f của trường véc tơ **F** = (y^2+1)**i** + 2xy**j** .

Giải + Chúng ta có *M(x,y)* = y^2+1, *N(x,y)* = 2*xy*, MXĐ của **F** là $\mathbb{R}^2$

+ Dễ thấy $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ và là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$, suy ra **F** là trường bảo toàn và do đó tồn tại hàm thế vị f sao cho :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = y^2 + 1 & (7) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2xy & (8) \end{cases}.$$

+ Lấy tích 2 vế phân theo biến *x* (trong khi cố định *y*) của (7) , ta thu được:

$f(x,y) = xy^2 + x + g(y)$, với *g(y)* là hàm của biến *y*. (9)

+ Lấy vi phân theo biến y hàm số (9) vừa tìm ta nhận được: $\partial f/\partial y = 2xy + g'(y)$ (10)

+ So sánh (8) với (10) suy ra : $g'(y) = 0$, nên hàm *g(y)* = *C*, hằng số *C* chọn tuỳ ý.

+ Vậy thế vị cần tìm là : $f(x,y) = xy^2 + x + C$.

Bài tập về nhà: Tr. **185, 193.**

Chuẩn bị đọc trước: Mục **A22, A23** cho **Bài số 13: *Tích phân mặt.***

Bài số 13

TÍCH PHÂN MẶT

1. Gradient. Toán tử div. Thông lượng

a. Định nghĩa

- **Gradient** của một trường vô hướng $f(x,y,z)$ trong không gian 3 chiều là một véc tơ biểu diễn tốc độ biến thiên của f tại một điểm bất kỳ và được xác định bởi:

$$grad f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

trong đó kí hiệu ∇ (“del”) là biểu diễn của toán tử vi phân

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

- Nếu $F = L(x,y,z).\mathbf{i} + M(x,y,z).\mathbf{j} + N(x,y,z).\mathbf{k}$ là một trường vectơ trong đó tồn tại $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial z}$, khi đó ***divergence*** của **F** là một hàm số đại lượng vô hướng, được xác định bởi:

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

- ***Thông lượng*** của một dòng (chẳng hạn chất lỏng, chất khí…) chảy qua một bề mặt là đại lượng chỉ lượng (chất lỏng, chất khí …) chảy qua bề mặt vuông góc với hướng chảy trong một đơn vị thời gian.

Ví dụ: + Đối với các ***hạt ánh sáng*** thông lượng của chùm sáng gọi là **quang thông.**
+ Đối với các ***hạt điện tích*** thông lượng còn gọi là **cường độ dòng điện**.

◆ ***Chú ý:*** $divF=\nabla.\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}) = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}$

đại lượng vô hướng này được gọi là ***độ phân nhánh*** của **F.**

Ví dụ 1: Tính div của các trường vectơ sau:

a, $\mathbf{F} = xz\mathrm{i} + yz\mathrm{j} - y^2\mathrm{k}$ b, $\mathbf{F} = 2x^2y.\mathrm{i} - xz.\mathrm{j} + z^3\sin y.\mathrm{k}$

Giải :

a, $divF=\nabla.\mathbf{F} = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} = 2z$

b, $div\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3\sin y) = 4xy + 3z^2\sin y$.

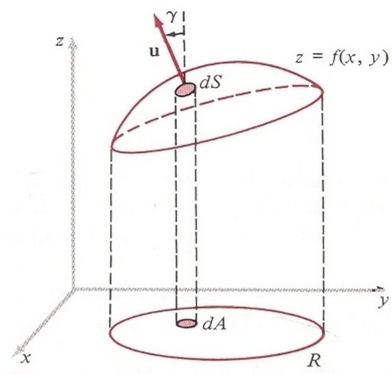
b. Ý nghĩa Vật lý.

- *div***F** đo độ tán xạ hoặc nén vào của một trường véc tơ tại một điểm cho trước.

Nếu $div\mathrm{F}=0$ thì thông lượng qua mọi mặt kín đều bằng 0, hay nói rằng trường véc tơ F có ***thông lượng bảo toàn***.

2. Tích phân mặt loại 1.

a. Định nghĩa: Cho mặt cong trơn (S) có phương trình $z=z(x,y)$ và hàm $f(x,y,z)$ xác định, liên tục trên (S).



+ Chia mặt ra thành n mảnh nhỏ có diện tích là ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

+ Chọn điểm (x_i,y_i,z_i) trên mảnh thứ i, tìm giá trị của $f(x_i,y_i,z_i)$ của hàm số tại điểm này, khi đó ta xác định được tích $f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$.

+ Lập tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$.

+ Cho n tiến tới vô cùng (khi đó bán kính lớn nhất trong các mảnh tiến dần tới 0). Nếu những tổng này tiến tới một giá trị xác định, không phụ thuộc vào cách chia mặt và cách chọn điểm (x_i,y_i,z_i), thì giới hạn này được định nghĩa là ***Tích phân mặt (loại 1)*** của hàm $f(x,y,z)$ trên mặt (S):

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

Do $dS=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dA$ nên $\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_R f(x,y,z)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}dxdy$.

(Với R là hình chiếu của S lên mặt phẳng xy).

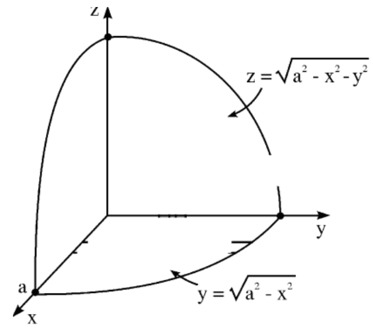
b. Tính chất:

1) Tuyến tính: $\iint_S [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dS=\alpha\iint_S fdS+\beta\iint_S gdS; \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2) Cộng tính: $\iint_S fdS=\iint_{S_1} fdS+\iint_{S_2} fdS, \quad S=S_1\cup S_2$.

Ví dụ 2. Tính $I=\iint_S z^2(x^2+y^2)dS$, trong đó (S) là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$ trong góc phần tám thứ nhất.

Giải: + Ta có $(S): z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,



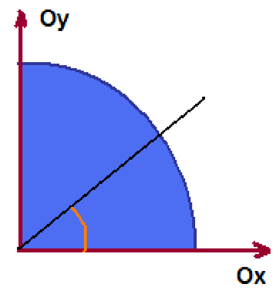
+ $z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}$; $z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}$

do đó $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

+ Hình chiếu của (S) lên mặt tọa độ Oxy là miền D : là $\dfrac{1}{4}$ hình tròn tâm O, bán kính a.

+ Áp dụng công thức:

$$I = \iint_S z^2(x^2 + y^2)dS = a\iint_D \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}(x^2 + y^2)dA.$$



+ Chuyển sang tọa độ cực ta có : $D: \left\{0 \leq r \leq a; 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

+ $I = a\int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r^3 dr d\theta = \dfrac{\pi a^6}{15}$.

Ví dụ 3. Tính $J = \iint_S (x+1)\, dS$, trong đó S là phần của mặt phẳng $z = x$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải:

+ Đổi sang hệ toạ độ cực:

$J = \pi\sqrt{2}.$

Chú ý : **1)** Nếu mặt cong (S) có khối lượng riêng tại $A(x,y,z)$ là $\delta(x,y,z)$ thì ***khối lượng của mặt cong*** (S) là : $M = \iint_S \delta(x,y,z)dS$.

2) Tọa độ **trọng tâm của mặt cong** (giới nội) S là $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ trong đó :

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\delta dS,\ \overline{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\delta dS,\ \overline{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\delta dS.$$

3) Khi $f(x,y,z) \equiv 1$, ta có ***diện tích mặt cong*** $S: dt(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dA$.

3. Tích phân mặt loại II

a. Mặt cong định hướng.

- Xét (S) là mặt cong trơn hoặc trơn từng mảnh.

  + Nếu (S) là **mặt không kín**: có phía trên và phía dưới (so với chiều dương trục Oz)

  + Nếu (S) là ***mặt kín***: có phía trong và phía ngoài.

Nếu trên (S) đã xác định một phía bằng cách chỉ rõ pháp tuyến tương ứng thì ta nói rằng mặt cong (S) là mặt định hướng (bởi VTPT tương ứng).

- ***Chú ý:* *Nếu không có quy định trước đó*** thì thông thường:

  + Đối với mặt cong không kín: hướng dương là hướng dương trục Oz.

  + Đối với mặt cong kín: hướng dương là hướng ra phía ngoài.

  + Nếu mặt cong (S) là mặt mức của hàm số $f(x,y,z)$ thì véc tơ pháp tuyến của mặt tại mỗi điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(S)$ chính là véc tơ gradient tại điểm đó:

$$\mathrm{n}=gradf\big|_{M_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right).$$

- **Xác định hướng dương cho mặt không kín:** Giả sử hướng dương là hướng dương trục Oz.

  ***Bước 1*:** Trước hết ta xác định một véc tơ pháp tuyến của mặt (S) : $\mathrm{n}=(A,B,C)$.

  ***Bước 2*:** Xét tích vô hướng $\mathrm{n.k}=C$, trong đó **k** là véc tơ đơn vị của Oz. Khi đó :

  + Nếu $C>0$: hướng của VTPT **n** xác định hướng dương của mặt (S).

  + Nếu $C<0$: hướng dương của (S) là $\text{-n}=(-A,-B,-C)$.

- **Xác định hướng dương cho mặt kín:** Giả sử hướng dương là hướng ra phía ngoài.

  ***Bước 1*:** Xác định VTPT của mặt (S) : $\mathrm{n}=(A,B,C)$.

  ***Bước 2*:** Lấy một điểm $M(x,y,z)\in S$ và điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nằm phía trong mặt cong kín (S), suy ra $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. Sau đó tính đại lượng :

$$D=\mathrm{n}.\overrightarrow{M_0M}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0).$$

  ***Bước 3*:** Khi đó :

  + Nếu $D>0$ thì $\mathrm{n}=(A,B,C)$ là VTPT ngoài , và nó định hướng dương của (S).

  + Nếu $D<0$ thì $\mathrm{n}=(A,B,C)$ là VTPT trong, và hướng dương của (S) là

$$\text{-n}=(-A,-B,-C).$$

Ví dụ 4 : Xét mặt S: $2x+5y-6z+1=0$ là mặt phẳng (mặt không kín).

+ VTPT : $n=(2,5,-6)$, $k=(0,0,1)$, dễ thấy $C=-6<0$

+ Véc tơ định hướng dương của S là -$n=(-2,-5,6)$.

Ví dụ 5 : Xét mặt ellipsoid S: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=1$ (mặt cong kín).

+ Tại mỗi điểm $M(x,y,z)\in S$, VTPT chính là $gradf$ trong đó $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}$:

$$n = gradf = \left(x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{3}z\right).$$

+ Xét $M_0=O=(0,0,0)$ nằm phía trong $S \to \overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$, khi đó :

$$n.\overrightarrow{MM_o} = x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}z^2>0,\ \forall M\in S.$$

Do đó tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ véc tơ $n=gradf$ định hướng dương (hướng ra phía ngoài) của mặt cong kín (S).

b. Bài toán tính thông lượng :

Xét $V\subseteq\mathbb{R}^3$ và trong V có mặt định hướng S với véc tơ pháp tuyến n. Nếu F là trường véc tơ không đổi thì thông lượng Φ của trường véc tơ F qua mặt S là : (F.n).S

• Giả sử rằng một dòng chất lỏng (hoặc ga hoặc khí lỏng…) đang chảy qua một miền của không gian. Tại một điểm cho trước (x,y,z), giả sử mật độ của nó là hàm vô hướng $\delta(x,y,z)$ và vận tốc của nó là hàm vectơ $v=v(x,y,z)$. Khi đó xác định một trường vectơ $\mathbf{F}=\delta.\mathbf{v}$ và **F**.**n**. ΔS chính là ***thông lượng*** của trường vectơ **F** đi qua miền phẳng có diện tích là ΔS.

• ***Vấn đề:*** Bây giờ nếu $F=L(x,y,z)i+M(x,y,z)j+N(x,y,z)k$ là trường véc tơ thay đổi và (S) là mặt cong trong $V\subseteq\mathbb{R}^3$, khi đó ta sẽ tính thông lượng của F qua mặt S như thế nào?

• ***Giải quyết vấn đề*** Xét mặt cong (S) ***được định hướng bởi VTPT đơn vị*** n.

+ Chia (S) thành n mảnh nhỏ có diện tích tương tứng là $\Delta S_1,\Delta S_2,...,\Delta S_n$.

+ Nếu mỗi mảnh ΔS_i có đường kính khá nhỏ thì trên đó có thể coi **F** không đổi trên mảnh đó và bằng $\mathbf{F}(M_i)$ với M_i là một điểm nào đó trong mảnh ΔS_i. Khi đó thông lượng của **F** qua ΔS_i xấp xỉ bằng:

$$\mathrm{F.n}.\Delta S_i = \left[L(M_i).\cos\alpha_i + M(M_i)\cos\beta_i + N(M_i)\cos\gamma_i\right].\Delta S_i,\ \ i = 1,2,...,n,$$

trong đó $\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i$ là các consine chỉ hướng.

+ Lập tổng : $\sum_{i=1}^{n}\left[L(M_i)\cos\alpha_i + M(M_i)\cos\beta_i + N(M_i)\cos\gamma_i\right]\Delta S_i$.

+ Cho $n \to +\infty$, nếu tổng trên tiến tới một giá trị xác định thì đó là ***giá trị thông lượng của trường véc tơ*** F qua mặt cong (S), giá trị giới hạn đó được ký hiệu là :

$$I = \iint_S \mathrm{F.n}dS = \iint_S \left[L(x,y,z)\cos\alpha + M(x,y,z)\cos\beta + N(x,y,z)\cos\gamma\right]dS.$$

+ Chú ý rằng : Nếu gọi $(\Delta A_i)_{xy}$ là hình chiếu của ΔS_i lên Oxy thì $(\Delta A_i)_{xy} = \Delta S_i.\cos\gamma_i$, tương tự ta có: $(\Delta A_i)_{yz} = \Delta S_i.\cos\alpha_i; (\Delta A_i)_{zx} = \Delta S_i.\cos\beta_i$. Do đó :

$$I = \iint_S \mathrm{F.n}dS = \iint_S L(x,y,z)dydz + M(x,y,z)dzdx + N(x,y,z)dxdy \qquad (*).$$

Và tích phân (*) còn được gọi là ***Tích phân mặt (loại II)***.

◆ **Chú ý:** 1) Nếu ta đổi hướng mặt S thì giá trị tích phân mặt (*) sẽ đổi dấu.

2) Tích phân (*) cũng có các tính chất: tuyến tính, cộng tính…. tương tự như trong tích phân bội.

c) Cách tính.

Nếu mặt S có phương trình $z = z(x,y)$ có hình chiếu D trên mặt xy thì

$$\iint_S N(x,y,z)dxdy = \iint_D N(x,y,z(x,y))dxdy \quad \text{nếu n tạo với Oz góc nhọn.}$$

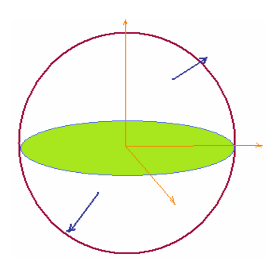
$$\iint_S N(x,y,z)dxdy = -\iint_D N(x,y,z(x,y))dxdy \quad \text{nếu n tạo với Oz góc tù.}$$

Tương tự tính các số hạng khác trong tích phân mặt loại II.

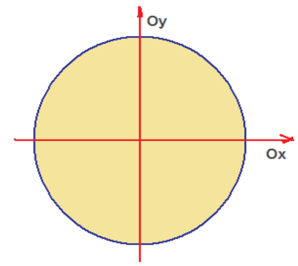
Ví dụ 6: Tính $I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, trong đó S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ hướng ra ngoài.

Giải: + Nhận xét: trong miền lấy tích phân và trong biểu thức dưới dấu tích phân vai trò của x, y, z như nhau nên ta có:

$$\iint_S xdydz = \iint_S ydxdx = \iint_S zdxdy.$$



+ Do đó: $I = 3\iint\limits_S zdxdy = 3\left[\iint\limits_{S_1} zdxdy + \iint\limits_{S_2} zdxdy\right]$, trong đó (S_1) là nửa mặt cầu phía trên và (S_2) là nửa mặt cầu phía dưới mặt phẳng Oxy và :



$$S_1 : z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \quad S_2 : z = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

+ H/chiếu của (S_1) và (S_2) lên Oxy cùng là h/tròn D tâm O b/kính R.

+ VTPT của (S_1) tạo với Oz góc nhọn nên: $\iint\limits_{S_1} zdxdy = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}dxdy$.

+ VTPT của S_2 tạo với Oz góc tù nên: $\iint\limits_{S_2} zdxdy = -\iint\limits_D \left(-\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right)dxdy$.

+ Ta nhận được: $I = 6\iint\limits_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}dxdy$.

+ Chuyển sang tọa độ cực suy ra: $I = 6\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, rdrd\theta = 4\pi R^3$.

Cách 2. $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_S (F.n)dS$

Trong đó $F = x.\mathrm{i} + y.\mathrm{j} + z.\mathrm{k}$, còn $n = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$ nên $F.n = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R}$

Nên $I = \iint\limits_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} dS = \iint\limits_S RdS = R.\mathrm{dt}(S)$. Với S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Vậy $I = R.4\pi R^2 = 4\pi R^3$

Bài tập về nhà: Tr. **254**
Đọc trước Mục **A23** chuẩn bị cho **Bài số 14**: ***Định lý Gauss và định lý Stokes***

Bài số 14.

ĐỊNH LÝ GAUSS VÀ ĐỊNH LÝ STOKES

1. Định lý phân nhánh (Định lý Gauss)

a. Mặt cong đóng. Một mặt (S) trong $\mathbb{R}^3$ được gọi là ***đóng*** nếu nó là biên của một miền trong $\mathbb{R}^3$, ví dụ như mặt cầu, hình lập phương, hình trụ...

Như vậy, mỗi mặt cong đóng S luôn liên quan tới một miền giới nội R trong R^3.

◈ ***Vấn đề đặt ra là***: Có mối liên hệ nào giữa tích phân trên một mặt đóng (S) và tích phân bội ba trên miền R trong R^3.

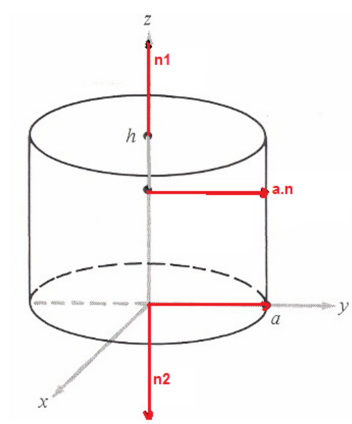
Định lý phân nhánh (*Định lý Gauss*). *Thông lượng của một trường vectơ* **F** *xuyên* ***qua mặt đóng*** (S) *bằng tích phân của div***F** *trên miền (giới nội) R có biên là* (S):

$$\iint_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dA = \iiint_R div\mathbf{F}\,dV$$

trong đó n *là VTPT đơn vị định hướng của mặt* (S).

Ví dụ 1: Tính toán trực tiếp thông lượng của trường vectơ $\mathrm{F} = x.\mathrm{i} + y.\mathrm{j} + z.\mathrm{k}$ qua mặt ngoài của hình trụ có mặt bên là $x^2 + y^2 = a^2$ và hai đáy là $z = 0$ và $z = b$. Sau đó tính thông lượng bằng cách áp dụng Định lý phân nhánh.

Giải : ◆ ***Cách 1:*** Tính trực tiếp: Mặt đã cho trơn từng mảnh



+ Trên mặt bên L ta có VTPT đơn vị: $\mathrm{n} = \dfrac{x\mathrm{i} + y\mathrm{j}}{a}$, từ đó:

$$\mathrm{F.n} = \frac{x^2 + y^2}{a}.$$

+ Thông lượng qua L là :

$$\iint_L \mathbf{F}\mathbf{n}\,dA = \iint_L \frac{x^2 + y^2}{a}\,dA = \iint_L a\,dA = a(2\pi ab) = 2\pi a^2 b.$$

+ Trên mặt đỉnh (T) ta có $\mathrm{n}_1 = \mathrm{k}$ nên trên T ta có: $\mathrm{F.n}_1 = z = b$ và thông lượng là :

$$\iint_T \mathbf{F}\mathbf{n}_1\,dA = \iint_T b\,dA = b(\pi a^2) = \pi a^2 b.$$

+ Trên mặt đáy (B) ta có $\mathrm{n}_2 = -\mathrm{k}$ nên trên B ta có : $\mathrm{F.n}_2 = -z = 0$, do đó thông lượng là

$$\iint_B \mathbf{F}\mathbf{n}_2\,dA = \iint_B 0\,dA = 0.$$

+ Do đó, thông lượng qua toàn bộ mặt trụ là $2\pi a^2 b + \pi a^2 b + 0 = 3\pi a^2 b$.

- ***Cách 2***: Áp dụng Định lý phân nhánh

+ Chú ý rằng : $div\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z) = 3$

+ Do đó, theo Định lý phân nhánh ta có:

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}dA = \iiint_R div\mathbf{F}.dV = \iiint_R 3.dV = 3\pi a^2 b.$$

Ví dụ 2. Tính thông lượng của trường véc tơ $F = x^3\mathrm{i} + y^3\mathrm{j} + z^3\mathrm{k}$ qua phía ngoài mặt S là biên của hình nón giới hạn bởi các mặt $z^2 = x^2 + y^2,\ \ z = 1$.

Giải.

+ $\mathrm{div}F = 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

+ Theo Định lý phân nhánh ta có thông lượng của F qua mặt S là:

$$I = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}dA = \iiint_R div\mathbf{F}.dV = \iiint_R 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).dV.$$

+ Đổi qua hệ toạ độ trụ: ta có miền R$\{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r \le z \le 1\}$ nên

$$I = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 \left(r^2 + z^2\right)dzdrd\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 \left(r^2 + z^2\right)rdzdrd\theta = \frac{9\pi}{10}$$

2. Một số khái niệm.

a. Gradient. Gradient của một trường vô hướng $w = f(x,y,z)$ trong $\mathbb{R}^3$ là :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

b. Toán tử div Nếu $\mathrm{F}(x,y,z) = L(x,y,z)\mathrm{i} + M(x,y,z)\mathrm{j} + N(x,y,z)\mathrm{k}$ là trường vectơ, trong đó các thành phần $L(x,y,y), M(x,y,z), N(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng. Khi đó ***độ phân nhánh*** của **F** là

$$div\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

c. Curl: • Tích có hướng của ∇ và **F** là :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

đại lượng vectơ này gọi là ***vectơ xoáy*** của **F** và ký hiệu là *curl***F**, nên ta có :

$$curl\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Ví dụ 3: Tính dive và vectơ xoáy của trường vectơ $\mathbf{F} = 2x^2y\mathbf{i} + 3xz^3\mathbf{j} + xy^2z^2\mathbf{k}$.

Giải : + $div\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3xz^3\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(xy^2z^2\right) = 4xy + 2xy^2z$

+

$$curl\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & 3xz^3 & xy^2z^2 \end{vmatrix} = (2xyz^2 + 9xz^2)\mathbf{i} + (-y^2z^2)\mathbf{j} + (3z^3 - 2x^2)\mathbf{k}.$$

◆ ***Ý nghĩa Vật lý.*** + Nếu trường véc tơ:

$$\mathrm{F}(x,y,z) = L(x,y,z)\mathrm{i} + M(x,y,z)\mathrm{j} + N(x,y,z)\mathrm{k}.$$

mô tả trường vận tốc của một dòng chảy trong $\mathbb{R}^3$, thì những chất điểm của dòng chảy đó gần điểm (x,y,z) sẽ xoáy theo một trục có hướng là hướng của $Curl\mathrm{F}$.

+ Nếu $Curl\mathrm{F} = 0$ ta có dòng không xoáy.

◆ **Một số tính chất:**

i) Nếu $f(x,y,z)$ là hàm số 3 biến có các đạo hàm riêng lên tục đến cấp 2 thì ta có:

$$Curl(\nabla f) = 0.$$

ii) Xét trường véc tơ $\mathrm{F}(x,y,z) = L(x,y,z)\mathrm{i} + M(x,y,z)\mathrm{j} + N(x,y,z)\mathrm{k}$ trong $\mathbb{R}^3$, có các thành phần là các hàm số $L(x,y,y), M(x,y,z), N(x,y,z)$ có ĐHR liên tục. Khi đó $\mathrm{F}(x,y,z)$ được gọi là ***trường bảo toàn*** nếu $Curl\mathrm{F} = 0$.

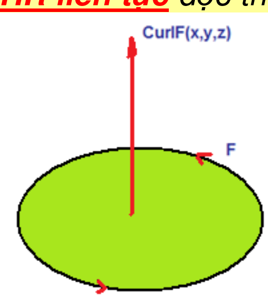
iii) Ta luôn có $div(curl\mathrm{F}) = 0$.

3. Định lý Stokes

a. Đặt vấn đề: Định lý Stoke là một mở rộng của Định lý Green trong không gian ba chiều. Nhớ lại rằng:

◆ **Định lý Green:** *Nếu (C) là **đường cong đóng, đơn, trơn từng mảnh**, **bao quanh miền** R trong $\mathbb{R}^2$, và nếu M(x,y), N(x,y) là **liên tục và có ĐHR liên tục** dọc theo (C) và trên R thì*

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA.$$



◆ **Vấn đề** : Nếu (C) là đường cong ghềnh kín và là biên của một mặt cong S trong R^3 thì ta có nhận được kết quả tương tự hay không?

b. Tích phân đường trong R^3:

• Cho trường véc tơ $\mathrm{F}(x,y,z)=L(x,y,z)\mathrm{i}+M(x,y,z)\mathrm{j}+N(x,y,z)\mathrm{k}$ xác định trên một miền của R^3. Giả sử rằng (C) là đường cong nằm trên miền đang xét và được xác định bởi phương trình tham số hoá $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ (*). Khi đó tích phân đường của **F** dọc (C) được định nghĩa bởi :

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R} = \int_C L.dx+Mdy+Ndz.$$

• ***Cách tính:*** Tương tự như tích phân đường trong R^2: Giả sử đường cong (C) trong R^3 được tham số hóa như trong (*) với t biến thiên từ $t_1 \to t_2$, khi đó:

$$\int_C \mathrm{F}.d\mathrm{R} = \int_C Ldx+Mdy+Ndz=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[L(x(t),y(t)z(t)).x'(t)+M(x(t),y(t),z(t))y'(t)+N(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt$$

• Nếu C là đường cong kín thì tích phân đường được viết là:

$$\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{R} = \oint_C Ldx+Mdy+Ndz.$$

Tích phân này đo được lượng của chất lỏng chuyển qua xung quanh (C) và nó được gọi là ***thông lượng*** của **F** quanh (C).

c. Định lý Stokes: *Nếu S là một mặt trong R^3 với biên là đường cong (C) kín , khi đó thông lượng của trường véc tơ **F** dọc theo (C) bằng tích phân trên S của tích vô hướng véc tơ pháp tuyến đơn vị và curl**F** :*

$$\oint_C \mathbf{F}dR = \iint_S (curl\mathbf{F}).\mathbf{n}dA$$

◆ ***Chú ý***: + Ở đây cần giả thiết rằng S là **mặt định hướng** với VTPT đơn vị tương ứng **n** định hướng của (C) theo quy tắc ngón tay cái.

+ VTPT đơn vị **n** cần phải liên tục.

+ Trường véc tơ **F** cũng cần liên tục; L, M, và N cần phải có các ĐHR liên tục, v.v...

+ Nếu mặt S là một miền R phẳng trong mặt phẳng xy, thì $\mathrm{n}=\mathrm{k}$ và do đó:

$$(\mathrm{curl}\mathbf{F}).\mathbf{n} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Áp dụng Định lý Stoke: $\displaystyle \oint_C Ldx+Mdy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)dA.$

Đây chính là Định lí Green. Như vậy, Định lý Green là trường hợp đặc biệt của Định lý Stokes.

Ví dụ 4: Tính tích phân đường: $I = \oint_C y^3z^2dx + 3xy^2z^2dy + 2xy^3zdz$ dọc theo đường đóng (C) với phương trình véc tơ của nó là $\mathbf{R} = a\sin t.\mathbf{i} + b\cos t.\mathbf{j} + c\cos t.\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, ở đó $abc \ne 0$.

Giải ◆ **Cách 1**: ***Tính I bằng cách áp dụng Stokes:***

+ Tích phân này là thông lượng xung quanh đường cong kín (C) của trường véc tơ:

$$\mathbf{F} = y^3z^2\mathbf{i} + 3xy^2z^2\mathbf{j} + 2xy^3z\mathbf{k}.$$

+ Tính toán dễ dàng thấy rằng: $\text{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

+ Nếu S là mặt nào đó bị chặn bởi (C), từ Định lý Stokes cho chúng ta $I = 0$.

◆ **Cách 2**: ***Tính I trực tiếp:***

+ P/trình tham số của đường cong (C) là: $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t, \quad t: 0 \to 2\pi. \\ z = c\cos t \end{cases}$

+ Do đó: $I = \int_0^{2\pi} \Big[(b^3\cos^3 t)(c^2\cos^2 t)(a\cos t) + 3(a\sin t)(b^2\cos^2 t)(c^2\cos^2 t)(-b\sin t) +$

$$+2(a\sin t)(b^3\cos^3 t)(c\cos t)(-c\sin t)\Big]dt$$

$$= ab^3c^2\int_0^{2\pi}\left[\cos^6 t - 5\cos^4 t\sin^2 t\right]dt = ab^3c^2\sin t\cos^5 t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Ví dụ 5. Tính thông lượng của trường véc tơ $\mathbf{F} = y(x-z)\mathbf{i} + (2x^2 + z^2)\mathbf{j} + y^3\cos xz\mathbf{k}$ xung quanh đường cong kín C là biên của hình vuông $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 2$.

Giải.

+ $curl\mathbf{F} = (3y^2\cos xz - 2z)\mathbf{i} + (-y + zy^3\sin xz)\mathbf{j} + (3x + z)\mathbf{k}$, $\mathbf{n}$ = k

+ CurlF.n = 3x + z.

+ Vậy $\oint_C \mathbf{F}dR = \iint_S (curl\mathbf{F}).\mathbf{n}dA = \iint_S (3x+z)dA = \int_0^1\int_0^1 (3x+2)dxdy = \frac{7}{2}$

***Bài tập* Về nhà** : Tr. **259**

Chuẩn bị đề cương Ôn tập học kỳ II và những câu hỏi thắc mắc sẽ được giải đáp trong Bài sô 15

Bài số 15

TỔNG KẾT MÔN TOÁN 2

CẤU TRÚC ĐỀ THI KẾT THÚC MÔN TOÁN II
Hình thức thi: Tự luận - Thời gian: 90 phút

Câu 1 (2 điểm)
+ Đạo hàm riêng, vi phân toàn phần cấp một và cấp hai của hàm số hai biến.
+ Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn (cấp một).
+ Đạo hàm theo hướng. Gradient hàm hai biến. Tiếp diện và pháp tuyến với mặt cong

Câu 2 (2 điểm)
+ Cực trị tự do hàm số hai biến.
+ Cực trị có điều kiện hàm số hai biến.
+ Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền đóng của hàm hai biến.

Câu 3 (2 điểm)
+ Tính tích phân bội hai trong tọa độ vuông góc, tọa độ cực.
+ Ứng dụng của tích phân bội hai.

Câu 4 (2 điểm)
+ Tính tích phân đường trong R^2.
+ Tính tích phân đường qua Định lý Green.

Câu 5 (2 điểm)
+ Tính tích phân mặt.
+ Tích phân bội ba và ứng dụng.
+ Định lý Stokes.

ĐỀ TỰ LUYỆN TẬP SỐ 1

Câu 1. Tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm ẩn y = y(x) xác định từ phương trình:

$$y = 3x + \ln y - 12$$

Câu 2. Tìm cực trị tự do của hàm hai biến: $z(x;\ y) = (x^2 - y)e^y$.

Câu 3. Tính diện tích phần mặt trụ: $z = 1 - y^3$, giới hạn bởi ba mặt phẳng:

$$z = 0;\ x = y^3;\ x = -y^3.$$

Câu 4. Tính tích phân đường $\int_C \cos 2y dx - 2x \sin 2y dy$ trên đường cong trơn (C) đi

từ $A(1;\pi/6)$ đến $B(2;\pi/4)$.

Câu 5. Sử dụng tích phân bội ba tính thể tích vật thể nằm trong mặt trụ: $x^2 + y^2 = 2x$, bị giới hạn phía dưới bởi mặt phẳng $z = 0$, phía trên bởi mặt cong: $z = x^2 + y^2$.

ĐỀ TỰ LUYỆN TẬP SỐ 2

Câu 1. Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ thỏa mãn hệ thức: $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$. Tính

các đạo hàm riêng cấp một của z theo x và theo y.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm 2 biến: $z = \dfrac{4 - x + y}{\sqrt{2}}$ với điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$.

Câu 3. Tính khối lượng và mô men đối với trục x của một tấm có khối lượng riêng bằng 1, giới hạn bởi các đường: $x + y = 4; y^2 = 2x$.

Câu 4. Tính tích phân đường: $\oint_C \sqrt{x^2 + y^2}dx + \left[xy^2 + y\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right]dy$ trên đường tròn (C) đi theo chiều dương: $x^2 + y^2 = 1$.

Câu5. Tính thông lượng của trường véc tơ $\mathrm{F} = x^3.\mathbf{i} + y^3.\mathbf{j} + z^3.\mathbf{k}$ ra phía ngoài các mặt tứ diện Ω: $x = 0;\ y = 0; z = 0;\ x + y + z = 1$.

ĐỀ TỰ LUYỆN TẬP SỐ 3

Câu 1. Cho z = f(x,y) , trong đó x = u cos v, y = u sin v. Hãy chứng minh rằng :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Câu 2. Tìm cực trị của hàm số $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},\ \ x>0,\ y>0$

Câu 3. Tính tích phân bội hai: $I=\iint\limits_D xydxdy$ trong đó miền D là nửa đường tròn $(x-1)^2+y^2=1,\ y\geq 0$.

Câu 4. Tính tích phân đường: $I=\oint\limits_C ydx-xdy$ trong đó C là đường tròn: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ lấy theo chiều dương

Câu 5. Dùng tích phân bội ba tính thể tích của miền R trong $\mathbb{R}^3$ được giới hạn bởi mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và Paraboloid tròn xoay $z=6-x^2-y^2$.

CHÚC CÁC EM THI ĐẠT KẾT QUẢ CAO!