MTH00050: Toán học tổ hợp

Tuần 4: Đệ quy

Bài 1. Một người cần leo lên một cầu thang có n bậc. Mỗi bước, người đó có thể bước lên 1 bậc hoặc 2 bậc. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để người đó leo hết cầu thang?

Lời giải. Gọi C_n là số cách để leo lên cầu thang có n bậc. Để leo đến bậc thứ n, bước cuối của người leo phải xuất phát từ bậc thứ $n-1$ hoặc bậc thứ $n-2$.

- Trường hợp 1: Nếu bước cuối cùng là một bước 1, người đó cần đến bậc thứ $n-1$. Số cách để leo đến bậc $n-1$ là C_{n-1}.
- Trường hợp 2: Nếu bước cuối cùng là một bước 2, trước bước cuối người cần đến bậc thứ $n-2$. Số cách để leo đến bậc $n-2$ là C_{n-2}.

Hai trường hợp rời nhau nên ta có hệ thức đệ quy:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Điều kiện đầu:

- Với $n = 1$: Chỉ có 1 cách bước 1 bậc. Vậy $C_1 = 1$.
- Với $n = 2$: Có 2 cách: (1 bậc, 1 bậc) hoặc (2 bậc). Vậy $C_2 = 2$.

Đến đây ta nhận thấy đây chính là định nghĩa của dãy số Fibonacci. Do đó:

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Bài 2. Có bao nhiêu cách để lát một sàn nhà hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ bằng các viên gạch kích thước 1×2 và 2×2?

Lời giải. Gọi T_n là số cách lát sàn nhà $2 \times n$. Xét cách 2 viên gạch ở cột cuối cùng được lát.

- Trường hợp 1: Cột cuối cùng được lát bằng một viên gạch 1×2 đặt dọc. Phần còn lại là sàn $2 \times (n-1)$, có T_{n-1} cách lát.
- Trường hợp 2: Hai cột cuối cùng được lát bằng hai viên gạch 1×2 đặt ngang. Phần còn lại là sàn $2 \times (n-2)$, có T_{n-2} cách lát.

- Trường hợp 3: Hai cột cuối cùng được lát bằng một viên gạch 2×2. Phần còn lại là sàn $2 \times (n-2)$, có T_{n-2} cách lát.

Cộng các trường hợp, ta có hệ thức đệ quy:

$$T_n = T_{n-1} + 2T_{n-2}.$$

Điều kiện đầu:

- Với $n = 1$ (sàn 2×1): Chỉ có 1 cách (1 viên 1×2 dọc). Vậy $T_1 = 1$.
- Với $n = 2$ (sàn 2×2): Có 3 cách (2 viên dọc, 2 viên ngang, 1 viên 2×2). Vậy $T_2 = 3$.

Hệ thức $T_n - T_{n-1} - 2T_{n-2} = 0$ có phương trình đặc trưng:

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm: $r_1 = 2$ và $r_2 = -1$. Công thức tổng quát của T_n có dạng:

$$T_n = A \cdot (2)^n + B \cdot (-1)^n$$

Từ các giá trị đầu, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} T_1 = 2A - B = 1 \\ T_2 = 4A + B = 3 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là $A = \frac{2}{3}$ và $B = \frac{1}{3}$.
Do đó:

$$T_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n.$$

Bài 3. Giải phương trình sai phân sau:

a) $a_n - 2a_{n-1} = 6n$ với $n \geq 1$ và điều kiện đầu $a_0 = 2$.

b) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ và $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với $n \geq 2$.

Lời giải.

a) Đây là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp một.

Bước 1. Tìm nghiệm của phương trình thuần nhất

Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$b_n - 2b_{n-1} = 0.$$

Phương trình đặc trưng là $r - 2 = 0$, suy ra $r = 2$. Vậy nghiệm thuần nhất nhất có dạng:

$$b_n = A \cdot 2^n$$

trong đó A là một hằng số.

Bước 2. Tìm một nghiệm riêng

Do vế phải là một đa thức bậc nhất $f(n) = 6n$ và hệ số $2 \neq 1$, nghiệm riêng có dạng một đa thức cùng bậc 1:

$$b_n^* = Bn + C$$

Thay vào phương trình ban đầu:

$$\begin{aligned} (Bn + C) - 2(B(n-1) + C) &= 6n \\ -Bn + (2B - C) &= 6n + 0 \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của n và hệ số tự do ở hai vế, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -B = 6 \\ 2B - C = 0 \end{cases}$$

Từ đây ta được $B = -6$ và $C = 2B = -12$. Vậy nghiệm riêng là:

$$b_n^* = -6n - 12$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$a_n = b_n + b_n^* = A \cdot 2^n - 6n - 12$$

Điều kiện đầu $a_0 = 2$:

$$\begin{aligned} a_0 = A \cdot 2^0 - 6(0) - 12 &= 2 \\ A - 12 &= 2 \\ A &= 14 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình sai phân là:

$$a_n = 14 \cdot 2^n - 6n - 12$$

b) Đây là một phương trình sai phân có bậc 2 và nghiệm kép.

Phương trình đặc trưng tương ứng là:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2 = 0$$

Phương trình có một nghiệm kép: $r_1 = r_2 = 3$ nên công thức tổng quát có dạng:

$$a_n = (A + Bn) \cdot 3^n.$$

Điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 4$:

$$\begin{cases} a_0 = (A + B \cdot 0) \cdot 3^0 = A = 1 \\ a_1 = (A + B \cdot 1) \cdot 3^1 = 3(A + B) = 4 \end{cases}$$

Từ đây ta tính được $A = 1$ và $B = \frac{1}{3}$.

Do đó, công thức tổng quát của dãy số là:

$$a_n = 3^n + n \cdot 3^{n-1}.$$