ÔN THI GIỮA KỲ MÔN TOÁN TỔ HỢP 21/11

Tổng quan.

- Tự luận, SV **không** được dùng tài liệu.
- Thời gian 60 phút, 5 câu, mỗi câu 2 điểm, tổng 10 điểm.
- SV làm bài trực tiếp lên đề thi, nộp lại đề (đề thi có chừa chỗ trống).
- Nội dung thi xoay quanh phần phép đếm:

+ Cơ bản: quy tắc cộng/nhân, chỉnh hợp, tổ hợp, hoán vị → nhận dạng bài toán, viết công thức và tính ra kết quả.

+ Đếm nâng cao hơn: phối hợp nhiều quy tắc lại với nhau, có thể chia trường hợp.

+ Nguyên lý bù trừ: |A hợp B| = |A|+|B| - |A giao B| hoặc

|A hợp B hợp C| = |A|+|B|+|C| - |A giao B| - |B giao C| - |C giao A| + |A giao B giao C|.

+ Đếm bằng truy hồi: từ mô tả đề bài, ta lập công thức truy hồi sau đó dùng phương pháp sai phân tuyến tính cấp 2,3,… (thuần nhất/không thuần nhất) để tìm CTTQ.

+ Hàm sinh: giải quyết cho BT đếm có nhiều ràng buộc, mô hình hoá đại số cho BT tổ hợp để dùng kỹ thuật đại số, đếm thuận lợi hơn.

Các bài toán ôn tập.

Câu 1.

1) Có 5 mã đề phát cho 5 SV, đếm số cách phát → hoán vị của 5 phần tử phân biệt, công thức là 5! = 120.

2) Hỏi có mấy tập con có 3 phần tử của tập 10 phần tử? → bài toán tổ hợp chập 3 của 10 vì chọn 3 phần tử không tính thứ tự, công thức tổ hợp nCk = n!/(k!(n-k)!) = 10!/(3!7!) = …

3) Chọn 3 SV trong 80 SV để giải 3 BTVN 1,2,3 → chỉnh hợp chập 3 của 80 vì chọn 3 phần tử có tính thứ tự, công thức chỉnh hợp nAk = n!/(n-k)! = 80! / 77!

4) Có 10 người bạn, trong tuần, mỗi ngày sẽ đến thăm nhà 1 bạn (có thể thăm 1 người nhiều lần) → chỉnh hợp lặp chập 7 của 10, công thức là 10^7.

Ta cũng có thể giải thích theo nguyên lý nhân: mỗi ngày có 10 cách nên 7 ngày (độc lập nhau) nên số cách = 10.10…10 = 10^7.

//Lưu ý: bài toán mô tả có tính thứ tự hay không để lựa chọn giữa chỉnh hợp, tổ hợp cho hợp lý; còn việc phân biệt giữa bài toán sắp xếp và bài toán lựa chọn là cơ bản.

Câu 2.

1) **An Khang** là một tân sinh viên của KHTN với mã số sinh viên là **21567890**. Bạn ấy muốn đặt mật khẩu có độ dài đúng 7 ký tự cho trang web học tập **moodle** bằng cách sử dụng các chữ cái trong tên (*viết in hoa*) cũng như các số trong MSSV. Hãy giúp An Khang tính xem có bao nhiêu cách đặt mật khẩu trong mỗi trường hợp sau:

a) Mật khẩu là hoán vị các chữ cái trong tên của bạn ấy? VD: KHAANNG.

* Sắp xếp ⇔ hoán vị, nhưng hoán vị này có lặp, vì có 2 chữ A và 2 chữ N nên kq = 7!/(2!2!)

b) Mật khẩu chỉ dùng các chữ số lẻ (*không nhất thiết phân biệt*) trong MSSV? VD: 7979797.

* Trong MSSV có 4 chữ số lẻ, mỗi vị trí có 4 cách chọn nên kq = 4^7.

c) Mật khẩu gồm 6 số *phân biệt* trong MSSV và một chữ bất kỳ trong tên? VD: 012A789.

* Ta thấy điều kiện ràng buộc khó hơn nên chia thành 2 bước: chọn "nguyên liệu" + "sắp xếp".

Có 8C6 cách chọn số, còn 5 cách chọn chữ → chọn nguyên liệu: 5.8C6.

Sắp xếp: 7! nên kq = 5.8C6.7!

d) Mật khẩu dùng các ký tự *phân biệt* trong tên và MSSV của bạn ấy, đồng thời phải bắt đầu bởi số, kết thúc bằng chữ? VD: 56789AN.

* Nguyên liệu gồm 8 chữ số phân biệt và 5 chữ cái phân biệt.

Mật khẩu có dạng a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7, ta ưu tiên đếm các vị trí có ràng buộc trước:

Chọn a1 có 8 cách; chọn a7 có 5 cách.

Chọn a2, a3, a4, a5, a6: lấy 5 ký tự trong 13-2 = 11 ký tự còn lại, có sắp xếp, chính là chỉnh hợp chập 5 của 11 là 11A5.

Cách khác cho ý sau: dùng nguyên lý nhân trực tiếp, chọn lần lượt cho các vị trí 2,3,4,5,6 có số cách là: 11.10.9.8.7.

2) Bạn NGOCVU là một tân sinh viên của KHTN với mã số sinh viên là **21567890**. Bạn ấy muốn đặt mật khẩu có độ dài đúng 6 ký tự cho trang web học tập **moodle** bằng cách sử dụng các chữ cái trong tên (*viết in hoa*) cũng như các số trong MSSV. Hãy giúp A tính xem có bao nhiêu cách đặt mật khẩu dùng các ký tự *phân biệt* trong tên và MSSV, đồng thời có chữ và số xen kẽ?

Có 2 trường hợp để xen kẽ: (X = chữ, Y = số)

Ta có tổng cộng 6 chữ cái và 8 chữ số.

* Chữ trước, rồi đến số: XYXYXY → chọn giá trị cụ thể cho các vị trí. Ta có 2 cách giải thích:

Dùng nguyên lý nhân trực tiếp → 6.8.5.7.4.6.

Dùng chỉnh hợp 2 lần: chọn 3 chữ cái trong 6 chữ cái (có thứ tự) → 6A3, tương tự chọn 3 chữ số trong 8 chữ số (có thứ tự) → 8A3, sau đó nhân lại là được.

* Số trước, rồi đến chữ: YXYXYX.

Vì đang chia trường hợp nên ta cộng lại hai kq lại với nhau.

3) Bạn **A** là một tân SV của KHTN với mã số sinh viên là **X**, trong đó **A** là chữ lót + tên (SV tự thay chuỗi **A, X** đúng thông tin cá nhân, *VD: Nguyễn Hoàng Tuấn* → **A** là *HOANGTUAN*, **X** là *21094601)*. Bạn ấy muốn đặt mật khẩu cho trang web **moodle** bằng cách sử dụng ký tự có trong **A** và **X**. Tính số cách đặt mật khẩu trong mỗi trường hợp sau:

a) Mật khẩu có 6 ký tự, gồm 3 chữ cái *phân biệt* lấy từ **A** và 3 chữ số *phân biệt* lấy từ **X**, đồng thời các chữ cái được sắp xếp đứng cạnh nhau? *VD: 90THU6*

Tổng cộng có 7 chữ cái phân biệt, 6 chữ số phân biệt.

Ta chọn nguyên liệu: 7C3 * 6C3 cách lấy ra 3 chữ và 3 số phân biệt.

Vì các chữ được xếp cạnh nhau nên coi như ký tự đặc biệt, tổng cộng có 1+3=4 ký tự. Sắp xếp chúng có 4! cách, riêng các chữ trong ký tự đặc biệt trên thì cũng có 3! cách xếp nữa, nên nhân lại → 3! 4!. Vì thế kq = 7C3 * 6C3 * 3! * 4!.

b) Mật khẩu gồm 5 ký tự *phân biệt* có trong **A** và **X** sao cho có đủ cả chữ số lẫn chữ cái? *VD: NAT01*

→ SV tự giải.

3) Bạn **A** là một tân sinh viên của KHTN với mã số SV là **X**, trong đó **A** là chữ lót + tên (SV tự thay chuỗi **A, X** đúng thông tin cá nhân, *VD: Huỳnh Anh Thắng* → **A** là *ANHTHANG*, **X** là *21086121)*. Bạn ấy muốn đặt mật khẩu cho trang web **moodle** bằng cách sử dụng các ký tự có trong **A** và **X**. Tính số cách đặt mật khẩu trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Mật khẩu gồm 8 ký tự là các phụ âm *không nhất thiết phân biệt* trong **A**? *VD: TTTTHHHH*

→ SV tự giải.

b) Mật khẩu gồm 6 ký tự *phân biệt* có trong **A** và **X** sao cho số lượng chữ cái và số lượng chữ số được sử dụng đều là lẻ? *VD: NAT086*

→ SV tự giải.

<u>Câu 3.</u>

Ta có một BĐT cần lưu ý:

- |A giao B| <= |A| và |A giao B| <= |B|.
- A, B là tập con của C thì |A hợp B| <= |C|.
- |A giao B giao C| <= |A giao B|, |B giao C|, |C giao A|.

Để c/m các kq này, ta chỉ cần dựa vào mệnh đề: A con B thì |A| <= |B|.

1) Trong lớp 40 SV, có 30 bạn đạt điểm giỏi môn Toán tổ hợp và 25 bạn đạt điểm giỏi môn OOP. Hỏi có ít nhất mấy bạn đạt điểm giỏi cả hai môn?

Gọi A, B lần lượt là tập hợp SV giỏi Toán/OOP. Ta có |A| = 30, |B| = 25.

Áp dụng công thức bù trừ, ta có |A giao B| = |A|+|B| - |A hợp B|

= 30 + 25 - |A hợp B| = 55 - |A hợp B|.

Rõ ràng |A hợp B| <= 40 → |A giao B| >= 55 – 40 = 15. Do đó có >= 15 SV giỏi cả 2 môn, dấu = xảy ra khi mỗi SV trong lớp giỏi ít nhất 1 trong 2 môn.

//Như thế nhiều nhất mấy bạn giỏi cả 2 môn? → nhiều nhất là 25, mỗi SV giỏi OOP cũng giỏi môn Toán.

2) Cho 3 tập hợp A, B, C là tập con của [80] trong đó A, B, C có số phần tử lần lượt là 30, 35, 40, đồng thời |A giao B giao C| = 20. Hỏi có ít nhất mấy phần tử không thuộc cả A, B, C?

Ta có công thức

|A hợp B hợp C| = |A|+|B|+|C| - |A giao B| - |B giao C| - |C giao A| + |A giao B giao C|.

= 30+35+40 – (|A giao B| + |B giao C| + |C giao A|) + 20

= 125 - (|A giao B| + |B giao C| + |C giao A|).

Ta thấy |A giao B|, |B giao C| và |C giao A| >= |A giao B giao C| = 20, vì

A giao B giao C là con của (A giao B), (B giao C), (C giao A).

Khi đó |A hợp B hợp C| <= 125 – 3.20 = 65.

Vì thế có >= 80 – 65 = 15 số không thuộc cả A, B, C.

3) Câu hỏi tương tự trên, nhưng thay vì cho |A giao B giao C| = 20, đổi lại thành

|A giao B| = 20, |B giao C| = 15, |C giao A| = 25.

Hỏi có nhiều nhất và ít nhất mấy phần tử không thuộc cả A, B, C?

Ta có |A hợp B hợp C| = 30+35+40 – (20+15+25) + |A giao B giao C| = 45+ |A giao B giao C|

chú ý 0 <= |A giao B giao C| <= min{|A giao B|, |B giao C|, |C giao A|} = 15.

Vì thế |A hợp B hợp C| >= 45 và <= 45+15 = 60.

Do đó có >= 80-60=20 phần tử không thuộc và <= 80-45=35 phần tử không thuộc A,B,C.

//ở đây, ta cần chỉ ra dấu =, còn trong trường hợp đề bài không yêu cầu tìm GTLN, GTNN mà chỉ cần c/m thì không phải xây dựng.

Câu 4.

1) Hỏi có mấy cách lát nền nhà kích thước 2 x n bởi các viên gạch domino kích thước 1 x 2 (xoay ngang/dọc)?

Gọi s(n) là số cách lát nền nhà kích thước 2xn. Ta xét viên gạch đầu tiên:

- Nếu viên đầu tiên nằm dọc thì nền nhà còn lại kích thước 2x(n-1) → số cách s(n-1).
- Nếu viên đầu tiên nằm ngang thì nền nhà còn lại kích thước 2x(n-2) → số cách s(n-2).

Do hai trường hợp rời nhau nên s(n) = s(n-1)+s(n-2) khi n >= 3.

Ta có s(1) = 1, s(2) = 2 (kiểm tra trực tiếp được). //Đây là dãy kiểu Fibonacci, công thức xấu.

2) Có 1 cầu thang có n bậc, mỗi bước có thể bước 1 hoặc 2 bước. Hỏi có mấy cách bước?

Gọi s(n) là số cách bước. Vẫn xét theo bước đầu tiên, tương tự trên ta cũng có

s(n) = s(n-1)+s(n-2) với n>=3,

Trong đó s(1)=1, s(2)=2.

3) Có 1 bầy ếch gồm m con nhảy trên nền nhà kích thước m x n, xuất phát từ cạnh bên trái và mỗi lần mỗi con nhảy về phía sang phải 1 hoặc 2 bước. Hỏi để bầy ếch này đến được cạnh bên phải thì có mấy cách nhảy, cho biết ếch chỉ nhảy ngang?

ếch 1	1	2	3					n
ếch 2								
ếch 3								
...								
ếch m								

Vì các cách nhảy giống nhau và độc lập giữa các con ếch nên ta gọi s(n) là số cách nhảy của ếch ở hàng 1 → kq = s(n)^m.

4) Sau khi tham gia một kỳ thi Hackathon và được thưởng 900 nghìn đồng, bạn Luna dự kiến sẽ chiêu đãi lớp một bữa hết số tiền này (ai đến trước thì được quà trước, Luna trao hết quỹ thưởng thì thôi). Mỗi bạn theo thứ tự sẽ bắt đầu lựa chọn trong menu:

- Uống sinh tố 30 nghìn với 2 loại: bơ, dâu.
- Ăn mỳ cay 60 nghìn với 3 loại: bò, hải sản, thập cẩm.

Hỏi có tất cả bao nhiêu thứ tự gọi món khác nhau của lớp này?

Chuẩn hoá lại các giá trị trong đề bài. Ta coi 30 nghìn ⇔ 1 đơn vị, 60 nghìn ⇔ 2 đơn vị, còn 900 nghìn ⇔ 30 đơn vị.

Ta thấy mỗi lần, một HS có mua 1 hoặc 2 đơn vị, điều này tương tự với việc bước lên cầu tháng mà mỗi lần bước 1 hoặc 2 bước, cầu thang có 30 bước (tương ứng với quỹ thưởng).

Gọi s(n) là số cách để mua đồ ăn của lớp với quỹ thưởng là n.

+ Nếu SV đầu tiên mua 1 đơn vị, còn quỹ thưởng là n-1 → số cách là 2.s(n-1), trong đó 2 ứng với 2 loại sinh tố: bơ/dâu.

+ Nếu SV đầu tiên mua 2 đơn vị, quỹ thưởng còn n-2 → số cách là 3.s(n-2), trong đó s(n-2) là số cách để mua ứng với quỹ thưởng còn lại và 3 là hai món bò/hải sản/thập cẩm.

Từ đó s(n) = 2.s(n-1) + 3.s(n-2) → PT đặc trưng có nghiệm đẹp hơn.

Chú ý s(1) = 2 và s(2) = 2 x 2 + 3 = 7 (với 2 bạn ăn sinh tố hoặc 1 bạn ăn mỳ cay).

Ta giải PT đặc trưng, tìm nghiệm tổng quát → kq = s(30).

SV tự tính toán ra kq cụ thể.

//Phát triển thêm: nếu Luna không chỉ học 1 lớp mà học 5 lớp, mỗi lớp thưởng 900 ngàn thì ta lấy kết quả ở trên rồi luỹ thừa 5 lên, có được điều này là do cách mua ở 5 lớp là độc lập nhau.

Câu 5.

1) Hỏi có mấy số tự nhiên có 10 chữ số, mỗi chữ số từ 1,2,...,9, thoả mãn:

(i) Ba chữ số đầu tiên chia hết cho 3.

(ii) Hai chữ số tiếp theo thì >= 3.

(iii) Năm chữ số cuối đều chẵn.

(iv) Tổng các chữ số là số chẵn.

Để dùng hàm sinh mô tả được bài toán, ta xét các đa thức thành phần:

Chữ số chia hết cho 3 → chữ số thuộc {3;6;9} → xét x^3+x^6+x^9. Vì có 3 chữ số như thế nên đa thức để mô tả các khả năng ứng với 3 chữ số đầu là (x^3+x^6+x^9)^3.

Chữ số thứ 4 và thứ 5 thuộc {3,4,...,9} → xét x^3+x^4+...+x^9, vì có 2 chữ số nên

(x^3+x^4+...+x^9)^2.

Các chữ số cuối đều chẵn, tức là thuộc {2,4,6,8} → xét (x^2+x^4+x^6+x^8)^5.

Với 3 điều kiện đầu, ta thấy hàm sinh mô tả các khả năng là

P(x) = (x^3+x^6+x^9)^3 * (x^3+x^4+...+x^9)^2 * (x^2+x^4+x^6+x^8)^5.

Khi khai triển đa thức này ra, các luỹ thừa ở các dấu ngoặc sẽ được ghép lại với nhau, tạo thành các x^k. Hệ số của x^k chính là số các số thoả mãn (i), (ii), (iii) mà tổng các chữ số là k.

Ta quy về tính tổng hệ số của luỹ thừa bậc chẵn trong P(x).

Chú ý nếu dạng tổng quát của P(x) = an.x^n + ... + a1.x + a0 thì

P(1) = tổng hệ số = an+a(n-1)+...+a0 = tổng hệ số mũ chẵn cộng lẻ.

còn P(-1) = tổng hệ số của x mũ chẵn trừ tổng hệ số của x mũ lẻ.

Tóm tắt lại P(1) = chẵn+lẻ, P(-1) = chẵn-lẻ nên để tính tổng hệ số của x mũ chẵn thì ta giải hệ này thu được (P(1)+P(-1))/2.

Trở lại BT, ta có P(1) = 3^3.7^2.4^5 còn P(-1) = (-1)^3.(-1)^2.4^5 = -4^5.

Suy ra tổng mũ chẵn = (P(1)+P(-1))/2 = (3^3.7^2.4^5 – 4^5)/2.

//chú ý: ta cũng có thể tính được tổng các hệ số của số mũ chia hết cho 3, 5, 7, ... → cần dùng số phức (định lý root of unity filter), đây là nội dung khó, SV tự tìm hiểu thêm (không có thi).

2) Trong cửa hàng có 5 món ăn A, B, C, D, E. Một người cần mua một số món cho buổi tiệc (mỗi món có thể dùng nhiều lần) sao cho:

(i) Mỗi món được chọn ít nhất 3 lần và không quá 20 lần.

(ii) Các món A, C, E có số lượng mỗi loại thì chia hết cho 5.

(iii) Số lượng món B thì chia hết cho 4.

(iv) Tổng số món được gọi là lẻ.

- Hàm sinh là:

  P(x) = (x^5+x^10+x^15+x^20)^3 * (x^4+x^8+x^12+x^16+x^20)*(x^3+x^4+...+x^20).

- Ta chỉ cần tính tổng hệ số x^(lẻ) trong P(x). Chú ý P(-1) = 0, tổng chẵn = tổng lẻ (BT dễ).