

# Đề 1

### Cửa ài 1: Tuyển chọn Đồng Đội (Nguyên lý đếm cơ bản có ràng buộc)

Trước khi tiến vào Vạn Độc Cốc, Lệnh Hồ Xung cần tuyển chọn một tổ đội 4 người (bao gồm chính mình) từ 3 môn phái lớn đang có mặt tại đó để hỗ trợ nhau.

- Phái Thiếu Lâm có 6 cao tăng.
- Phái Võ Đang có 5 đạo sĩ.
- Phái Nga Mi có 4 nữ hiệp.

Lệnh Hồ Xung cần chọn thêm 3 người nữa sao cho trong tổ đội 4 người có đủ mặt cả 3 môn phái trên. Tuy nhiên, do ân oán giang hồ từ trước, vị cao tăng trụ trì của nhóm Thiếu Lâm nhất quyết không chịu đi cùng nếu trong đội có mặt nữ hiệp đệ tử chân truyền của Chưởng môn Nga Mi.

Hỏi Lệnh Hồ Xung có bao nhiêu cách để lập tổ đội thỏa mãn tất cả các điều kiện trên?

### Cửa ài 2: Bát Quái Thạch Trận (Bài toán sắp xếp vị trí có điều kiện)

Vượt qua Vạn Độc Cốc, Lệnh Hồ Xung bị kẹt trong Bát Quái Thạch Trận. Trước mặt chàng là một hàng gồm 15 cột đá. Để phá trận, chàng phải đặt 4 lá cờ "Phá Trận Kỳ" lên 4 cột đá khác nhau.

Theo quy luật của trận pháp, để tránh kích hoạt cơ quan ngầm, **không được có 2 lá cờ nào được đặt ở 2 cột đá liền kề nhau**.

Hỏi Lệnh Hồ Xung có bao nhiêu cách đặt 4 lá cờ lên 15 cột đá để phá giải trận pháp này?

### Cửa ài 3: Hắc Bạch Song Sát (Nguyên lý Bù Trừ trên tập số học)

Tại cửa ài thứ ba, Lệnh Hồ Xung đối đầu với một nhóm sát thủ gồm 200 tên, được đánh số thứ tự từ 1 đến 200 dựa trên mức độ nguy hiểm của chúng.

- Những tên có số thứ tự chia hết cho 3 thuộc nhóm "Hắc Sát", sử dụng độc dược.
- Những tên có số thứ tự chia hết cho 5 thuộc nhóm "Bạch Sát", sử dụng ám khí.
- (Lưu ý: Có những tên vừa thuộc Hắc Sát vừa thuộc Bạch Sát).

Với võ công hiện tại, Lệnh Hồ Xung tự tin có thể đánh bại những kẻ địch thuộc nhóm Hắc Sát HOẶC thuộc nhóm Bạch Sát. Hỏi có bao nhiêu tên sát thủ trong 200 tên này mà Lệnh Hồ Xung **chưa đủ khả năng đánh bại**?

#### Cửa ài 4: Lăng Ba Ví Bộ trên Vách Núi (Hệ thức Truy hồi có điều kiện chặn)

Để đến được đỉnh núi nơi cất giấu bí kíp, Lệnh Hồ Xung phải vận dụng khinh công "Lăng Ba Ví Bộ" để leo lên một cầu thang đá dựng đứng gồm  $n$  bậc.

Mỗi lần nhún người, chàng có thể nhảy lên 1 bậc hoặc 2 bậc. Tuy nhiên, để giữ gìn chân khí không bị rối loạn, **Lệnh Hồ Xung không được phép thực hiện 2 lần nhảy 2 bậc liên tiếp nhau**.

Gọi  $a_n$  là số cách để Lệnh Hồ Xung leo lên hết  $n$  bậc thang theo quy tắc trên. Hãy thiết lập hệ thức truy hồi cho  $a_n$  (với  $n \geq 3$ ) và tính số cách leo hết 5 bậc thang ( $a_5$ ).

#### Cửa ài 5: Kho Tàng Linh Đan (Hàm Sinh cho bài toán chia phần có ràng buộc phức tạp)

Cuối cùng, Lệnh Hồ Xung đã vào được kho tàng. Trước khi lấy bí kíp, chàng cần bồi bổ công lực bằng các loại Linh Đan có sẵn trong kho. Trong kho có 4 loại linh đan với số lượng vô hạn:

- Thanh Long Đan:** Loại này tính nóng, bắt buộc phải uống số lượng chẵn (0, 2, 4,... viên).
- Bạch Hổ Đan:** Loại này tính hàn, bắt buộc phải uống số lượng là bội của 3 (0, 3, 6,... viên).
- Chu Tước Đan:** Loại này rất mạnh, chỉ được uống tối đa 2 viên.
- Huyền Vũ Đan:** Loại này để trung hòa, phải uống ít nhất 1 viên.

Lệnh Hồ Xung cần chọn uống tổng cộng đúng **10 viên** linh đan từ 4 loại trên để đạt trạng thái tốt nhất. Sử dụng phương pháp Hàm Sinh, hãy xây dựng hàm sinh cho bài toán và tìm số cách chọn linh đan của Lệnh Hồ Xung.

## Đề 2

**Cửa ài 1: Bàn Tròn "Chính Tà Lưỡng Lập" (Sắp xếp vòng tròn có ràng buộc phức tạp)** Thiên Cơ Lão Nhân mời 8 vị cao thủ đến dự yến tiệc, gồm 4 vị thuộc Chính phái và 4 vị thuộc Tà phái. Họ ngồi quanh một bàn tròn có 8 ghế. Để tránh xung đột nổ ra ngay tại tiệc, việc sắp xếp chỗ ngồi phải tuân thủ nguyên tắc:

1. Không có hai vị Tà phái nào được ngồi cạnh nhau.
2. Trong số họ có Minh Chủ Chính Phái và Ma Đầu Tà Phái là kẻ thù không đội trời chung, nên hai người này không được ngồi đối diện nhau qua tâm bàn tròn. Hỏi Phong Lăng Độ có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 8 vị cao thủ này thỏa mãn cả hai điều kiện trên? (Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể xoay bàn để chúng trùng nhau).

**Cửa ài 2: "Tam Tài Trận" (Hệ phương trình truy hồi)** Phong Lăng Độ lọt vào một trận pháp được bố trí trên 3 gò đất cao, gọi là Thiên(A), Địa(B), Nhân(C), xếp thành một hình tam giác đều. Chàng bắt đầu đứng tại gò Thiên (A). Mỗi lần di chuyển, chàng bắt buộc phải nhảy sang một trong hai gò đất liền kề (ví dụ từ A chỉ được nhảy sang B hoặc C). Để phá trận, chàng phải thực hiện đúng  $n$  lần nhảy và kết thúc tại đúng vị trí ban đầu (gò Thiên A). Gọi  $a_n$  là số cách thực hiện hành trình này. Hãy thiết lập một hệ thống các hệ thức truy hồi liên quan đến  $a_n$  và từ đó rút ra một hệ thức truy hồi duy nhất chỉ chứa  $a_n$  (với  $n \geq 2$ ).

**Cửa ài 3: Túi Ám Khí "Ngũ Độc" (Bài toán chia kẹo có ràng buộc chặn trên tập con)** Để chuẩn bị cho các trận chiến sắp tới, Phong Lăng Độ cần chuẩn bị một túi ám khí gồm đúng 18 món từ 3 loại: Kim Châm, Bi Sắt, Phi Đao (số lượng vô hạn). Yêu cầu khi chọn:

1. Phải có ít nhất 3 Kim Châm, ít nhất 2 Bi Sắt và ít nhất 1 Phi Đao.
  2. Do túi đựng có hạn, tổng số lượng Kim Châm và Bi Sắt không được vượt quá 12 chiếc.
- Hỏi có bao nhiêu cách để Phong Lăng Độ chuẩn bị túi ám khí này?

**Cửa ài 4: Tầng Thư Các "Thất Tinh Lạc Vị" (Kết hợp Tổ hợp và Xáo trộn Derangement)** Thiên Cơ Lão Nhân yêu cầu Phong Lăng Độ nhặt 7 cuốn sách bị rơi và đặt ngẫu nhiên vào 7 cái hộp ngọc tương ứng (mỗi cuốn chỉ thuộc về đúng 1 hộp). Thủ thách được tính là hoàn thành nếu sau khi đặt xong, có đúng 3 cuốn sách được đặt vào đúng hộp của nó, còn 4 cuốn còn lại thì không có cuốn nào nằm đúng hộp của mình. Hỏi có bao nhiêu cách đặt sách thỏa mãn yêu cầu này?

**Cửa ải 5: Tâm Pháp "Vô Vิ Chi Cảnh" (Hàm sinh cho bài toán Phân hoạch - Partition)** Cửa ải cuối cùng là một bài toán về sự cân bằng nội lực. Tổng lượng chân khí phải đạt đúng **60 chu thiên**, được tổng hợp từ các luồng khí nhỏ tuân theo quy tắc:

1. Các luồng khí phải có độ lớn khác nhau từng đôi một (Phân hoạch thành các phần tử phân biệt).
2. Chỉ được hấp thụ các luồng khí có độ lớn **không chia hết cho 3** (ví dụ: được dùng 1, 2, 4, 5...; không được dùng 3, 6, 9...). Hãy viết biểu thức Hàm sinh  $P(x)$  mô tả số cách hấp thụ chân khí thỏa mãn các điều kiện trên. Số cách để đạt cảnh giới "Vô Vิ" chính là hệ số của  $x^{60}$  trong khai triển của hàm này.

## Đề 3

**Cửa ài 1: "La Hán Quyền" (Chỉnh hợp lặp & Số học)** Giang Nam Phong phải đổi mặt với 5 vị La Hán đầu tiên. Mỗi vị La Hán sử dụng một thế võ khác nhau, được đánh số từ 1 đến 9. Giang Nam Phong cần ghi nhớ thứ tự các thế võ này để phá giải. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 thế võ (có thể lặp lại) sao cho thế võ đầu tiên là số lẻ và thế võ cuối cùng là số chẵn?

**Cửa ài 2: "Đồng Nhân Trận Pháp" (Tổ hợp lặp / Bài toán chia kẹo)** Sau khi đánh bại 5 vị La Hán, Giang Nam Phong tiến vào một căn phòng có 4 bức tượng Đồng Nhân lớn. Chàng tìm thấy 10 viên "Xá Lợi Tử" phát sáng. Để mở cửa đi tiếp, chàng phải đặt tất cả 10 viên Xá Lợi Tử này vào 4 bức tượng. Hỏi có bao nhiêu cách đặt sao cho mỗi bức tượng đều nhận được ít nhất 1 viên Xá Lợi Tử?

**Cửa ài 3: "Bát Nhã Mật Đa Tâm Kinh" (Định lý Khai triển Nhị thức)** Trên vách tường Tàng Kinh Các có khắc một đoạn kinh văn kỳ lạ, thực chất là một bài toán về khai triển nhị thức Newton. Giang Nam Phong cần tìm ra "hệ số bí ẩn" để mở khóa cơ quan. Cho biểu thức  $(2x - \frac{3}{x^2})^9$ . Hãy tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển của biểu thức này.

**Cửa ài 4: "Kim Cang Bất Hoại Thể" (Đếm số nghiệm nguyên không âm có điều kiện đơn giản)** Để luyện thành tầng thứ nhất của Kim Cang Bất Hoại Thể, Giang Nam Phong cần vận khí qua 3 huyệt đạo chính: Đan Điền ( $x_1$ ), Khí Hải ( $x_2$ ), và Mệnh Môn ( $x_3$ ). Tổng số chu thiên vận khí qua 3 huyệt này phải bằng 20. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối số chu thiên vận khí ( $x_1, x_2, x_3$ ) sao cho  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 0$ ?

**Cửa ài 5: "Thập Bát La Hán Trận Cuối Cùng" (Bài toán bước đi ngẫu nhiên trên lưới)** Giang Nam Phong đang đứng ở góc Tây Nam (tọa độ (0,0)) của một sân tập võ hình chữ nhật kích thước  $5 \times 7$  (5 ô theo chiều dọc, 7 ô theo chiều ngang). Chàng cần di chuyển đến góc Đông Bắc (tọa độ (7,5)) để thoát khỏi trận pháp. Mỗi bước đi chỉ được phép di chuyển sang phải 1 ô hoặc đi lên trên 1 ô. Hỏi Giang Nam Phong có bao nhiêu cách di chuyển khác nhau để đến được đích?

## Đề 4

**Cửa ài 1: "Tổng Quyết Thức" (Nguyên lý cộng và nhân cơ bản)** Độc Cô Cầu Bai để lại 3 bộ kiếm pháp sơ cấp, 4 bộ trung cấp và 2 bộ cao cấp. Một đệ tử muốn chọn ra 2 bộ kiếm pháp để luyện tập. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu: a) Hai bộ kiếm pháp đó thuộc cùng một cấp độ? b) Hai bộ kiếm pháp đó thuộc hai cấp độ khác nhau?

**Cửa ài 2: "Phá Đao Thức" (Tổ hợp cơ bản & Hình học)** Trên vách đá kiếm mộ có khắc 12 điểm phân biệt, trong đó có 5 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào khác thẳng hàng. Hỏi có thể tạo thành bao nhiêu tam giác từ 12 điểm đã cho làm đỉnh?

**Cửa ài 3: "Phá Kiếm Thức" (Đếm số có ràng buộc chữ số)** Thanh Huyền Thiết Trọng Kiếm nặng 81 cân. Độc Cô Cầu Bai yêu cầu người đến lấy phải tìm ra số lượng các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  sao cho số đó phải là số chẵn.

**Cửa ài 4: "Phá Thương Thức" (Khai triển đa thức & Hệ số)** Để lĩnh ngộ chiêu thức này, cần tính toán lực đạo dựa trên đa thức  $P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}$ . Hãy tìm hệ số của  $x^2$  trong khai triển của đa thức  $P(x)$ .

**Cửa ài 5: "Khí Kiếm Hợp Nhất" (Bài toán chia nhóm/phân hoạch tập hợp)** Độc Cô Cầu Bai có 9 thanh kiếm quý. Ông muốn chia 9 thanh kiếm này cho 3 đệ tử chân truyền của mình (gọi là A, B, C), sao cho mỗi đệ tử nhận được đúng 3 thanh kiếm. Hỏi có bao nhiêu cách chia kiếm khác nhau?

## Đề 5

**Cửa ài 1: "Đào Hoa Trận" (Hoán vị lặp)** Lối vào rừng đào được trấn giữ bởi 8 cây đào tiên. Để mở lối đi, cần phải sắp xếp các chữ cái trong từ "ĐÀOHOAĐÀO" (gồm 9 chữ cái) thành một hàng dọc trên các thân cây. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái này?

**Cửa ài 2: "Bích Hải Triều Sinh Khúc" (Chỉnh hợp không lặp)** Hoàng Dược Sư muốn chọn 4 đệ tử từ 10 đệ tử của mình để cùng hòa tấu bản "Bích Hải Triều Sinh Khúc". Bốn người này sẽ đảm nhận 4 vị trí nhạc cụ khác nhau: Tiêu, Cầm, Sắt, Trống. Hỏi Hoàng Dược Sư có bao nhiêu cách chọn và phân công nhiệm vụ cho 4 đệ tử này?

**Cửa ài 3: "Cửu Cung Phi Tinh" (Số Stirling loại 2 - Chia tập hợp thành các nhóm không phân biệt)** Hoàng Dược Sư có 6 viên dạ minh châu giống hệt nhau và 3 chiếc hộp ngọc giống hệt nhau. Ông muốn cất 6 viên dạ minh châu vào 3 chiếc hộp sao cho không có hộp nào bị trống. Hỏi có bao nhiêu cách cất? (Gợi ý: Đây là bài toán chia số nguyên  $n = 6$  thành  $k = 3$  phần dương  $p_k(n)$  hoặc số Stirling loại 2  $S(6, 3)$  nếu vật khác nhau, nhưng ở đây vật giống nhau, hộp giống nhau). *Chỉnh sửa để phù hợp độ khó vừa phải:* Hoàng Dược Sư có **6 viên linh đan khác nhau hoàn toàn**, muốn chia vào **3 chiếc hộp giống hệt nhau** sao cho không hộp nào trống. Hỏi có bao nhiêu cách? (Đây chính là số Stirling loại 2  $S(6, 3)$ ).

**Cửa ài 4: "Kỳ Môn Độn Giáp" (Hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 đơn giản)** Để thoát khỏi một mê cung, người chơi cần bước đi trên các viên gạch lát nền. Số cách bước đi  $a_n$  để đến viên gạch thứ  $n$  tuân theo quy luật:  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  với  $n \geq 2$ . Biết rằng để đến viên thứ 0 có 1 cách ( $a_0 = 1$ ) và viên thứ 1 có 2 cách ( $a_1 = 2$ ). Hãy tìm công thức tổng quát cho  $a_n$ .

**Cửa ài 5: "Ngũ Hành Bát Quái" (Tổ hợp & Xác suất cơ bản)** Trong một cái túi bát quái có chứa 5 viên đá ngũ sắc: 2 viên màu Đỏ (Hỏa), 2 viên màu Xanh (Mộc), và 1 viên màu Vàng (Thổ). Hoàng Dung lấy ngẫu nhiên ra 3 viên đá từ túi. a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên đá? b) (Mở rộng nhẹ) Tính xác suất để 3 viên đá lấy ra có đủ cả 3 màu Đỏ, Xanh, Vàng?