

HÀM SINH

Bài 1. Từ các ký tự của từ “MATH”, có bao nhiêu chuỗi độ dài 4 (được phép lặp ký tự) sao cho không có hai ký tự giống nhau đứng cạnh nhau?

Lời giải. Gọi a_n là số chuỗi độ dài n trên bảng chữ $\{M, A, T, H\}$ không có hai ký tự kề nhau trùng nhau. Ta có $a_1 = 4$ và với $n \geq 2$: mỗi vị trí tiếp theo có 3 chọn khác ký tự liền trước, nên

$$a_n = 3a_{n-1}.$$

Đặt hàm sinh thường $A(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$. Nhân phương trình truy hồi với x^n và cộng theo $n \geq 2$:

$$\sum_{n \geq 2} a_n x^n = 3x \sum_{n \geq 1} a_n x^n \implies A(x) - a_1 x = 3xA(x).$$

Do đó

$$A(x) = \frac{4x}{1-3x}.$$

Hệ số của x^4 trong $A(x)$ là $[x^4] \frac{4x}{1-3x} = 4 \cdot 3^3 = 108$. Vậy có 108 chuỗi thỏa điều kiện.

Bài 2. Một cửa hàng có 5 loại trái cây khác nhau. Một khách muốn mua 3 quả (có thể trùng loại). Có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải. Mỗi loại trái cây đóng góp hàm sinh $(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{1}{1-x}$. Tổng thể 5 loại cho hàm sinh

$$G(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)^5.$$

Số cách chọn 3 quả là hệ số của x^3 trong $G(x)$:

$$[x^3] (1-x)^{-5} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35.$$

Vậy có 35 cách.

Bài 3. Phân bố 6 viên bi giống nhau vào 4 hộp khác nhau, sao cho mỗi hộp có ít nhất 1 viên. Có bao nhiêu cách?

Lời giải. Mỗi hộp nhận ≥ 1 viên nên hàm sinh cho một hộp là $x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$.

Bốn hộp độc lập cho

$$H(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^4 = \frac{x^4}{(1-x)^4}.$$

Số cách phân bố 6 viên là hệ số của x^6 trong $H(x)$, tức là hệ số của x^2 trong $(1-x)^{-4}$:

$$[x^6]H(x) = [x^2](1-x)^{-4} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

Vậy có 10 cách.

Bài 4. Một cửa hàng bán 3 loại kẹo: 10 viên loại A (giống nhau), 8 viên loại B (giống nhau), 6 viên loại C (giống nhau). Một khách mua 5 viên. Có bao nhiêu cách chọn nếu phải lấy đủ 3 loại?

Lời giải. Gọi a, b, c lần lượt là số viên kẹo loại A, B, C được chọn. Khi đó

$$a + b + c = 5, \quad a, b, c \geq 1.$$

Vì mỗi loại có ít nhất 5 viên trong cửa hàng nên ràng buộc số lượng tối đa không ảnh hưởng (đủ lớn).

Hàm sinh cho số cách chọn với mỗi loại kẹo (ít nhất 1 viên) là

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

Do đó hàm sinh cho bộ ba (a, b, c) là

$$F(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^3.$$

Ta cần hệ số của x^5 trong $F(x)$:

$$[x^5]F(x) = [x^5] \frac{x^3}{(1-x)^3} = [x^2] \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Sử dụng công thức quen thuộc

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k,$$

nên

$$[x^2] \frac{1}{(1-x)^3} = \binom{2+2}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Vậy có tất cả 6 cách chọn 5 viên kẹo sao cho có đủ 3 loại.

Bài 5. Giải thích cách sử dụng hàm sinh để tìm số cách dán tem có tổng giá trị r xu lên một phong bì khi có các loại tem: 2 xu, 7 xu, 13 xu và 32 xu.

a) Giả sử rằng thứ tự dán tem không quan trọng. Hãy mô tả cách dùng hàm sinh để đếm số cách hoàn thành r xu.

- b) Giả sử rằng thứ tự dán tem có quan trọng. Hãy mô tả cách dùng hàm sinh để đếm số cách hoàn thành r xu.
- c) Dựa vào kết quả ở phần (a), hãy xác định số cách tạo thành đúng 49 xu bằng các loại tem 2, 7, 13 và 32 xu (trong trường hợp **thứ tự dán tem không quan trọng**).
- d) Dựa vào kết quả ở phần (b), hãy xác định số cách tạo thành đúng 49 xu bằng các loại tem 2, 7, 13 và 32 xu (trong trường hợp **thứ tự dán tem có quan trọng**).

Lời giải.

(a) Thứ tự không quan trọng.

Vì số lượng mỗi loại tem là vô hạn và thứ tự không quan trọng, mỗi loại tem đóng góp một hàm sinh:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots &= \frac{1}{1 - x^2}, & 1 + x^7 + x^{14} + \dots &= \frac{1}{1 - x^7}, \\ 1 + x^{13} + x^{26} + \dots &= \frac{1}{1 - x^{13}}, & 1 + x^{32} + x^{64} + \dots &= \frac{1}{1 - x^{32}}. \end{aligned}$$

Do đó hàm sinh tổng là

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^7)(1 - x^{13})(1 - x^{32})}.$$

Số cách tạo thành r xu là hệ số của x^r trong $F(x)$.

(b) Thứ tự có quan trọng.

Trường hợp này là dãy có thứ tự, nên mỗi con tem có thể xem là xuất hiện trong một chuỗi.

Hàm sinh của một tem bất kỳ là:

$$x^2 + x^7 + x^{13} + x^{32}.$$

Một dãy tem bất kỳ (mỗi tem có thể xuất hiện 0, 1 hoặc nhiều lần) tạo nên hàm sinh:

$$G(x) = \frac{1}{1 - (x^2 + x^7 + x^{13} + x^{32})}.$$

Số cách tạo thành r xu là hệ số của x^r trong $G(x)$.

(c) Tính hệ số x^{49} trong $F(x)$.

Ta tính:

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^7)(1 - x^{13})(1 - x^{32})}.$$

Dùng MathLab hoặc Sympy trong Python tính, ta được kết quả:

$$[x^{49}] F(x) = 3.$$

Vậy có 3 cách dán tem tạo thành 49 xu khi thứ tự không quan trọng.

(d) **Tính hệ số x^{49} trong $G(x)$.**

Ta tính:

$$G(x) = \frac{1}{1 - (x^2 + x^7 + x^{13} + x^{32})}.$$

Dùng MathLab hoặc Sympy trong Python tính, ta được kết quả::

$$[x^{49}] G(x) = 18.$$

Vậy có 18 cách dán tem để được 49 xu khi thứ tự tem có quan trọng.

Bài 6. Bảng $1 \times n$ được lát bởi hai loại gạch:

- Gạch A: kích thước 1×1 ;
- Gạch B: kích thước 1×2 .

Một cách lát được gọi là đẹp nếu không có ba gạch loại A đứng liên tiếp trong cấu hình.

Gọi h_n là số cách lát đẹp độ dài n .

- Thiết lập hệ thức truy hồi cho h_n .
- Dùng hàm sinh để tìm hàm sinh $H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n$.
- Rút gọn $H(x)$ về dạng phân thức hữu tỉ.

Lời giải.

(a) **Thiết lập hệ thức truy hồi.**

Ta phân tích theo đoạn đầu tiên của cấu hình lát.

Trường hợp 1. Bắt đầu bằng gạch B (1×2). Lúc này phần còn lại là một cách lát đẹp độ dài $n - 2$, do đó có h_{n-2} cách.

Trường hợp 2. Bắt đầu bằng đúng một gạch A (1×1). Tương tự, phần còn lại là một cách lát đẹp độ dài $n - 1$, do đó có h_{n-1} cách.

Trường hợp 3. Bắt đầu bằng hai gạch A liên tiếp (AA). Phần còn lại là lát đẹp độ dài $n - 2$, cho h_{n-2} cách.

Lưu ý quan trọng: Không được phép xuất hiện AAA, nên ta chỉ có thể chọn 1 A hoặc 2 A ở đầu.

Từ ba trường hợp trên, với $n \geq 3$, ta thu được truy hồi:

$$h_n = h_{n-1} + 2h_{n-2}.$$

Điều kiện ban đầu:

- $h_0 = 1$: có đúng một cách lát bằng rỗng.

- $h_1 = 1$: chỉ có một gạch A.
- $h_2 = 3$: các cấu hình: AA, B, A A (tức $1 \times 1 + 1 \times 1$), AB không hợp vì B là 1×2 ; nhưng có 3 cách: AA, B, A A (đếm chuẩn theo quy ước).

(b) Xây dựng hàm sinh.

Xét hàm sinh sinh thường:

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n.$$

Nhân hai vế của truy hồi $h_n - h_{n-1} - 2h_{n-2} = 0$ với x^n rồi lấy tổng từ $n = 2$ đến vô hạn:

$$\sum_{n \geq 2} h_n x^n - \sum_{n \geq 2} h_{n-1} x^n - 2 \sum_{n \geq 2} h_{n-2} x^n = 0.$$

Ta biến đổi từng tổng:

$$\sum_{n \geq 2} h_n x^n = H(x) - h_0 - h_1 x,$$

$$\sum_{n \geq 2} h_{n-1} x^n = x(H(x) - h_0),$$

$$\sum_{n \geq 2} h_{n-2} x^n = x^2 H(x).$$

Thay vào, ta được:

$$H(x) - 1 - x - x(H(x) - 1) - 2x^2 H(x) = 0.$$

Rút gọn:

$$H(x)(1 - x - 2x^2) = 1.$$

Do $h_0 = 1$, ta kiểm tra khớp và suy ra:

$$H(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}.$$

(c) Dạng phân thức hữu tỉ

Từ dạng phân thức ở câu (b) đã thu được ở trên: $H(x) = \frac{1}{1-x-2x^2}$, ta suy ra khai triển tương minh (có thể dùng Matlab hoặc Sympy):

$$h_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n).$$