Tuần 3.

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Bài 1.

a) Trong lớp, số sinh viên giỏi ở cả C++ lẫn Python bằng với số sinh viên không giỏi môn nào. Biết rằng có 20 sinh viên giỏi C++ và 15 sinh viên giỏi Python. Hỏi lớp này có mấy học sinh?

b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 2025 mà $\gcd(n,35)>1$?

Lời giải.

a) Gọi T là tập hợp sinh viên của lớp và A,B lần lượt là tập hợp sinh viên giỏi C++, Python. Theo giả thiết, ta có

$$|A\cap B|=|T|-|A\cup B|\Leftrightarrow |A\cap B|=|T|-\left(|A|+|B|-|A\cap B|\right)\Leftrightarrow |T|=|A|+|B|=20+15=35.$$

Vậy lớp này có 35 sinh viên.

b) Ta có $35=5\cdot 7$ nên ta cần đếm các số n chia hết cho một trong các số 5, 7.

Gọi A,B lần lượt là tập hợp các số nguyên dương không quá 2025 và chia hết cho 5, chia hết cho 7. Ta có $|A|=\left\lfloor \frac{2025}{5}\right\rfloor=405, |B|=\left\lfloor \frac{2025}{7}\right\rfloor=289$ và $|A\cap B|=\left\lfloor \frac{2025}{35}\right\rfloor=57$. Do đó, theo nguyên lý bù trừ, ta có

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=405+289-57=637.$$

Bài 2.

a) Trong lớp 23CTT, có hơn $\frac{1}{3}$ là sinh viên nữ và hơn $\frac{1}{2}$ là Đoàn viên. Ngoài ra, có hơn $\frac{1}{6}$ sinh viên nam không phải là Đoàn viên. Chứng minh có ít nhất một sinh viên nữ là Đoàn viên.

b) Có 30 sinh viên trong ký túc xá, 15 sinh viên học hội họa, 8 sinh viên sinh viên học, 6 sinh viên học hóa học. Biết rằng có 3 sinh viên tham gia cả 3 khóa học. Chứng minh có ít nhất 7 sinh viên không tham gia khóa học nào.

Lời giải.

a) Gọi T là tập hợp sinh viên của lớp và A,B lần lượt là tập hợp sinh viên nữ, tập hợp sinh viên là Đoàn viên. Dễ thấy rằng tập hợp sinh viên nam và không là Đoàn viên chính là $T\setminus(A\cup B)$.

Đặt $|T|=a$ thì theo giả thiết, ta có $\begin{cases}|A|>\frac{a}{3}, |B|>\frac{a}{2}\\ |T\setminus(A\cup B)|>\frac{a}{6}\end{cases}$. Chú ý rằng

$$\left|T\setminus(A\cup B)\right|>\frac{a}{6}\Leftrightarrow|T|-|A\cup B|>\frac{a}{6}\Leftrightarrow|A\cup B|<a-\frac{a}{6}=\frac{5a}{6}.$$

Do đó $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|>\frac{a}{3}+\frac{a}{2}-\frac{5a}{6}=0$.

Vậy $|A\cap B|\ge 1$ hay có ít nhất một sinh viên nữ là Đoàn viên.

b) Gọi A,B,C lần lượt là tập hợp các sinh viên học hội họa, sinh học, hóa học. Theo đề bài, ta cần chứng minh rằng $|A\cup B\cup C|\le 30-7=23.$

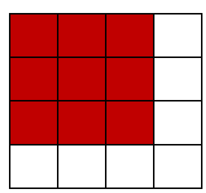
Ta có $|A|=15,|B|=8,|C|=6$ và $|A\cap B\cap C|=3.$ Theo công thức bù trừ thì

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A|+|B|+|C|-\left(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|\right)+|A\cap B\cap C|\\&\le|A|+|B|+|C|-\left(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap C|\right)+|A\cap B\cap C|\\&=|A|+|B|+|C|-2|A\cap B\cap C|=23.\end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

Bài 3. Hỏi có bao nhiêu cách tô bảng ô vuông 4×4 bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh sao cho không có hình vuông 3×3 nào trong đó được tô cùng màu đỏ?

Lời giải. Xét 4 hình vuông 3×3 ở góc trên bên trái, góc trên bên phải, góc dưới bên trái và góc dưới bên phải; đánh số chúng theo thứ tự là $1,2,3,4$.



Gọi S là tập hợp các cách tô bảng đã cho bằng hai màu và A_i là tập hợp các cách tô màu mà hình vuông thứ i được tô toàn màu đỏ. Ta cần tính

$$|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|.$$

Ta có $|A_1|=2^7$ (vì 9 ô đã được tô màu cố định, còn lại 7 ô có thể tô tùy ý). Tương tự thì:

$$|A_1\cap A_2|=|A_2\cap A_3|=|A_3\cap A_4|=|A_4\cap A_1|=2^4.$$

$$|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_4|=2^2.$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_3\cap A_4\cap A_1|=|A_4\cap A_1\cap A_2|=2^1.$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=2^0.$$

Do đó $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=4\cdot 2^7-\left(4\cdot 2^4+2\cdot 2^2\right)+4\cdot 2^1-2^0=447$.

Vậy số cách tô màu cần tìm là $2^{16}-447=65089.$