

MTH00050: Toán học tổ hợp

Tuần 1: Tập hợp và các nguyên tắc đếm

Bài 1. Một năm không nhuận có 365 ngày. Giả sử ngày 1/1 là thứ hai.

- a) Có bao nhiêu ngày chủ nhật trong năm này?
- b) Có bao nhiêu ngày thứ hai trong năm này?

Lời giải. Để ý rằng mỗi tuần có đúng 1 ngày thứ hai nên ta sẽ chia năm thành các tuần rời nhau để áp dụng quy tắc cộng. Do năm bắt đầu từ thứ 2 và $365 = 52 \times 7 + 1$, năm đang xét có đúng 52 tuần đầy đủ và thêm 1 ngày thứ hai.

- a) Theo quy tắc cộng, số ngày chủ nhật trong năm là $52 + 0 = \boxed{52}$.
- b) Theo quy tắc cộng, số ngày thứ hai trong năm là $52 + 1 = \boxed{53}$.

Bài 2. Một tàu lửa gồm 5 toa dừng ở một nhà ga để 3 hành khách lên tàu. Hỏi có bao nhiêu cách lên tàu của 3 hành khách này nếu:

- a) Ai lên toa nào cũng được?
- b) Mỗi người lên một toa tàu khác nhau?

Lời giải. Để ý rằng quá trình lên tàu của 3 hành khách có thể được chia thành 3 công đoạn, ta có thể áp dụng quy tắc nhân như sau:

- a) Ai lên toa nào cũng được:
 - Hành khách thứ nhất: Có 5 sự lựa chọn toa tàu.
 - Hành khách thứ hai: có 5 sự lựa chọn toa tàu.
 - Hành khách thứ ba: Có 5 sự lựa chọn toa tàu.

Theo quy tắc nhân, số cách để 3 hành khách lên tàu là:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = \boxed{125}.$$

- b) Mỗi người lên một toa tàu khác nhau:
 - Hành khách thứ nhất: Có 5 sự lựa chọn toa tàu.
 - Hành khách thứ hai: Phải chọn một toa khác với người thứ nhất, nên còn lại 4 sự lựa chọn.

- Hành khách thứ ba: Phải chọn một toa khác với hai người đầu, nên còn lại 3 sự lựa chọn.

Theo quy tắc nhân, số cách để 3 hành khách lên 3 toa khác nhau là:

$$5 \times 4 \times 3 = \boxed{60}.$$

Bài 3. Giả sử S là một tập hữu hạn và $x \in S$ là một phần tử của S . Chứng minh rằng số tập con của S có chứa x bằng số tập con của S không chứa x .

Lời giải. Gọi A là tập hợp các tập con của S có chứa x và B là tập hợp các tập con của S không chứa x . Ta xét ánh xạ $f : A \rightarrow B$ xác định bởi $f(X) = S \setminus X, \forall X \in A$.

- f là đơn ánh: Giả sử $f(X_1) = f(X_2)$ hay $S \setminus X_1 = S \setminus X_2$. Từ đây suy ra $X_1 = X_2$.
- f là toàn ánh: Với mọi $Y \in B$, do $x \notin Y$ nên $x \in S \setminus Y$, nói cách khác, $S \setminus Y \in A$. Ta có $f(S \setminus Y) = Y$.

Do f là song ánh, $|A| = |B|$.