

# HÀM SINH

**Bài 1.** Từ các ký tự của từ “MATH”, có bao nhiêu chuỗi độ dài 4 (được phép lặp ký tự) sao cho không có hai ký tự giống nhau đứng cạnh nhau?

**Lời giải.** Gọi  $a_n$  là số chuỗi độ dài  $n$  trên bảng chữ  $\{M, A, T, H\}$  không có hai ký tự kề nhau trùng nhau. Ta có  $a_1 = 4$  và với  $n \geq 2$ : mỗi vị trí tiếp theo có 3 chọn khác ký tự liền trước, nên

$$a_n = 3a_{n-1}.$$

Đặt hàm sinh thường  $A(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ . Nhân phương trình truy hồi với  $x^n$  và cộng theo  $n \geq 2$ :

$$\sum_{n \geq 2} a_n x^n = 3x \sum_{n \geq 1} a_n x^n \implies A(x) - a_1 x = 3x A(x).$$

Do đó

$$A(x) = \frac{4x}{1 - 3x}.$$

Hệ số của  $x^4$  trong  $A(x)$  là  $[x^4] \frac{4x}{1 - 3x} = 4 \cdot 3^3 = 108$ . Vậy có 108 chuỗi thỏa điều kiện.

**Bài 2.** Một cửa hàng có 5 loại trái cây khác nhau. Một khách muốn mua 3 quả (có thể trùng loại). Có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải.** Mỗi loại trái cây đóng góp hàm sinh  $(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{1}{1-x}$ . Tổng thê 5 loại cho hàm sinh

$$G(x) = \left( \frac{1}{1-x} \right)^5.$$

Số cách chọn 3 quả là hệ số của  $x^3$  trong  $G(x)$ :

$$[x^3] (1-x)^{-5} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35.$$

Vậy có 35 cách.

**Bài 3.** Phân bố 6 viên bi giống nhau vào 4 hộp khác nhau, sao cho mỗi hộp có ít nhất 1 viên. Có bao nhiêu cách?

**Lời giải.** Mỗi hộp nhận  $\geq 1$  viên nên hàm sinh cho một hộp là  $x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$ .

Bốn hộp độc lập cho

$$H(x) = \left( \frac{x}{1-x} \right)^4 = \frac{x^4}{(1-x)^4}.$$

Số cách phân bố 6 viên là hệ số của  $x^6$  trong  $H(x)$ , tức là hệ số của  $x^2$  trong  $(1-x)^{-4}$ :

$$[x^6] H(x) = [x^2] (1-x)^{-4} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

Vậy có 10 cách.

**Bài 4.** Một cửa hàng bán 3 loại kẹo: 10 viên loại A (giống nhau), 8 viên loại B (giống nhau), 6 viên loại C (giống nhau). Một khách mua 5 viên. Có bao nhiêu cách chọn nếu phải lấy đủ 3 loại?

**Lời giải.** Gọi  $a, b, c$  lần lượt là số viên kẹo loại A, B, C được chọn. Khi đó

$$a + b + c = 5, \quad a, b, c \geq 1.$$

Vì mỗi loại có ít nhất 5 viên trong cửa hàng nên ràng buộc số lượng tối đa không ảnh hưởng (đủ lớn).

Hàm sinh cho số cách chọn với mỗi loại kẹo (ít nhất 1 viên) là

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

Do đó hàm sinh cho bộ ba  $(a, b, c)$  là

$$F(x) = \left( \frac{x}{1-x} \right)^3.$$

Ta cần hệ số của  $x^5$  trong  $F(x)$ :

$$[x^5] F(x) = [x^5] \frac{x^3}{(1-x)^3} = [x^2] \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Sử dụng công thức quen thuộc

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k,$$

nên

$$[x^2] \frac{1}{(1-x)^3} = \binom{2+2}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Vậy có tất cả 6 cách chọn 5 viên kẹo sao cho có đủ 3 loại.

**Bài 5.** Giải thích cách sử dụng hàm sinh để tìm số cách dán tem có tổng giá trị r xu lên một phong bì khi có các loại tem: 2 xu, 7 xu, 13 xu và 32 xu.

- a) Giả sử rằng thứ tự dán tem không quan trọng. Hãy mô tả cách dùng hàm sinh để đếm số cách hoàn thành r xu.

- b) Giả sử rằng thứ tự dán tem có quan trọng. Hãy mô tả cách dùng hàm sinh để đếm số cách hoàn thành  $r$  xu.
- c) Dựa vào kết quả ở phần (a), hãy xác định số cách tạo thành đúng 49 xu bằng các loại tem 2, 7, 13 và 32 xu (trong trường hợp **thứ tự dán tem không quan trọng**).
- d) Dựa vào kết quả ở phần (b), hãy xác định số cách tạo thành đúng 49 xu bằng các loại tem 2, 7, 13 và 32 xu (trong trường hợp **thứ tự dán tem có quan trọng**).

**Lời giải.**

**(a) Thứ tự không quan trọng.**

Vì số lượng mỗi loại tem là vô hạn và thứ tự không quan trọng, mỗi loại tem đóng góp một hàm sinh:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}, \quad 1 + x^7 + x^{14} + \dots = \frac{1}{1 - x^7},$$

$$1 + x^{13} + x^{26} + \dots = \frac{1}{1 - x^{13}}, \quad 1 + x^{32} + x^{64} + \dots = \frac{1}{1 - x^{32}}.$$

Do đó hàm sinh tổng là

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^7)(1 - x^{13})(1 - x^{32})}.$$

Số cách tạo thành  $r$  xu là hệ số của  $x^r$  trong  $F(x)$ .

**(b) Thứ tự có quan trọng.**

Trường hợp này là dây có thứ tự, nên mỗi con tem có thể xem là xuất hiện trong một chuỗi.

Hàm sinh của một tem bất kỳ là:

$$x^2 + x^7 + x^{13} + x^{32}.$$

Một dây tem bất kỳ (mỗi tem có thể xuất hiện 0, 1 hoặc nhiều lần) tạo nên hàm sinh:

$$G(x) = \frac{1}{1 - (x^2 + x^7 + x^{13} + x^{32})}.$$

Số cách tạo thành  $r$  xu là hệ số của  $x^r$  trong  $G(x)$ .

**(c) Tính hệ số  $x^{49}$  trong  $F(x)$ .**

Ta tính:

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^7)(1 - x^{13})(1 - x^{32})}.$$

Dùng MathLab hoặc Sympy trong Python tính, ta được kết quả:

$$[x^{49}] F(x) = 3.$$

Vậy có 3 cách dán tem tạo thành 49 xu khi thứ tự không quan trọng.

**(d) Tính hệ số  $x^{49}$  trong  $G(x)$ .**

Ta tính:

$$G(x) = \frac{1}{1 - (x^2 + x^7 + x^{13} + x^{32})}.$$

Dùng MathLab hoặc Sympy trong Python tính, ta được kết quả::

$$[x^{49}] G(x) = 18.$$

Vậy có 18 cách dán tem để được 49 xu khi thứ tự tem có quan trọng.

**Bài 6.** *Bảng  $1 \times n$  được lát bởi hai loại gạch:*

- *Gạch A: kích thước  $1 \times 1$ ;*
- *Gạch B: kích thước  $1 \times 2$ .*

*Một cách lát được gọi là đẹp nếu không có ba gạch loại A đứng liên tiếp trong cấu hình.*

*Gọi  $h_n$  là số cách lát đẹp độ dài  $n$ .*

- a) *Thiết lập hệ thức truy hồi cho  $h_n$ .*
- b) *Dùng hàm sinh để tìm hàm sinh  $H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n$ .*
- c) *Rút gọn  $H(x)$  về dạng phân thức hữu tỉ.*

**Lời giải.**

**(a) Thiết lập hệ thức truy hồi.**

Ta phân tích theo đoạn đầu tiên của cấu hình lát.

**Trường hợp 1.** Bắt đầu bằng gạch B ( $1 \times 2$ ). Lúc này phần còn lại là một cách lát đẹp độ dài  $n - 2$ , do đó có  $h_{n-2}$  cách.

**Trường hợp 2.** Bắt đầu bằng đúng một gạch A ( $1 \times 1$ ). Tương tự, phần còn lại là một cách lát đẹp độ dài  $n - 1$ , do đó có  $h_{n-1}$  cách.

**Trường hợp 3.** Bắt đầu bằng hai gạch A liên tiếp (AA). Phần còn lại là lát đẹp độ dài  $n - 2$ , cho  $h_{n-2}$  cách.

**Lưu ý quan trọng:** Không được phép xuất hiện AAA, nên ta chỉ có thể chọn 1 A hoặc 2 A ở đầu.

Từ ba trường hợp trên, với  $n \geq 3$ , ta thu được truy hồi:

$$h_n = h_{n-1} + 2h_{n-2}.$$

**Điều kiện ban đầu:**

- $h_0 = 1$ : có đúng một cách lát bảng rỗng.

- $h_1 = 1$ : chỉ có một gạch A.
- $h_2 = 3$ : các cấu hình: AA, B, A A (tức  $1 \times 1 + 1 \times 1$ ), AB không hợp vì B là  $1 \times 2$ ; nhưng có 3 cách: AA, B, A A (đếm chuẩn theo quy ước).

**(b) Xây dựng hàm sinh.**

Xét hàm sinh sinh thường:

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n.$$

Nhân hai vế của truy hồi  $h_n - h_{n-1} - 2h_{n-2} = 0$  với  $x^n$  rồi lấy tổng từ  $n = 2$  đến vô hạn:

$$\sum_{n \geq 2} h_n x^n - \sum_{n \geq 2} h_{n-1} x^n - 2 \sum_{n \geq 2} h_{n-2} x^n = 0.$$

Ta biến đổi từng tổng:

$$\sum_{n \geq 2} h_n x^n = H(x) - h_0 - h_1 x,$$

$$\sum_{n \geq 2} h_{n-1} x^n = x(H(x) - h_0),$$

$$\sum_{n \geq 2} h_{n-2} x^n = x^2 H(x).$$

Thay vào, ta được:

$$H(x) - 1 - x - x(H(x) - 1) - 2x^2 H(x) = 0.$$

Rút gọn:

$$H(x)(1 - x - 2x^2) = 1.$$

Do  $h_0 = 1$ , ta kiểm tra khớp và suy ra:

$$H(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}.$$

**(c) Dạng phân thức hữu tỉ**

Từ dạng phân thức ở câu (b) đã thu được ở trên:  $H(x) = \frac{1}{1-x-2x^2}$ , ta suy ra khai triển tường minh (có thể dùng Mathlab hoặc Sympy):

$$h_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n).$$