

# MTH00050: Toán học tổ hợp

## Tuần 1: Tập hợp và các nguyên tắc đếm

**Bài 1.** Một năm không nhuận có 365 ngày. Giả sử ngày 1/1 là thứ hai.

- a) Có bao nhiêu ngày chủ nhật trong năm này?
- b) Có bao nhiêu ngày thứ hai trong năm này?

**Lời giải.** Để ý rằng mỗi tuần có đúng 1 ngày thứ hai nên ta sẽ chia năm thành các tuần rời nhau để áp dụng quy tắc cộng. Do năm bắt đầu từ thứ 2 và  $365 = 52 \times 7 + 1$ , năm đang xét có đúng 52 tuần đầy đủ và thêm 1 ngày thứ hai.

- a) Theo quy tắc cộng, số ngày chủ nhật trong năm là  $52 + 0 = \boxed{52}$ .
- b) Theo quy tắc cộng, số ngày thứ hai trong năm là  $52 + 1 = \boxed{53}$ .

**Bài 2.** Một tàu lửa gồm 5 toa dừng ở một nhà ga để 3 hành khách lên tàu. Hỏi có bao nhiêu cách lên tàu của 3 hành khách này nếu:

- a) Ai lên toa nào cũng được?
- b) Mỗi người lên một toa tàu khác nhau?

**Lời giải.** Để ý rằng quá trình lên tàu của 3 hành khách có thể được chia thành 3 công đoạn, ta có thể áp dụng quy tắc nhân như sau:

- a) Ai lên toa nào cũng được:
  - Hành khách thứ nhất: Có 5 sự lựa chọn toa tàu.
  - Hành khách thứ hai: có 5 sự lựa chọn toa tàu.
  - Hành khách thứ ba: Có 5 sự lựa chọn toa tàu.

Theo quy tắc nhân, số cách để 3 hành khách lên tàu là:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = \boxed{125}.$$

- b) Mỗi người lên một toa tàu khác nhau:
  - Hành khách thứ nhất: Có 5 sự lựa chọn toa tàu.
  - Hành khách thứ hai: Phải chọn một toa khác với người thứ nhất, nên còn lại 4 sự lựa chọn.

- Hành khách thứ ba: Phải chọn một toa khác với hai người đầu, nên còn lại 3 sự lựa chọn.

Theo quy tắc nhân, số cách để 3 hành khách lên 3 toa khác nhau là:

$$5 \times 4 \times 3 = \boxed{60}.$$

**Bài 3.** Giả sử  $S$  là một tập hữu hạn và  $x \in S$  là một phần tử của  $S$ . Chứng minh rằng số tập con của  $S$  có chứa  $x$  bằng số tập con của  $S$  không chứa  $x$ .

**Lời giải.** Gọi  $A$  là tập hợp các tập con của  $S$  có chứa  $x$  và  $B$  là tập hợp các tập con của  $S$  không chứa  $x$ . Ta xét ánh xạ  $f : A \rightarrow B$  xác định bởi  $f(X) = S \setminus X, \forall X \in A$ .

- $f$  là đơn ánh: Giả sử  $f(X_1) = f(X_2)$  hay  $S \setminus X_1 = S \setminus X_2$ . Từ đây suy ra  $X_1 = X_2$ .
- $f$  là toàn ánh: Với mọi  $Y \in B$ , do  $x \notin Y$  nên  $x \in S \setminus Y$ , nói cách khác,  $S \setminus Y \in A$ . Ta có  $f(S \setminus Y) = Y$ .

Do  $f$  là song ánh,  $|A| = |B|$ .