概率密度函数在光线追踪中的应用

罗祺皓

1 引言

蒙特卡洛法是光线追踪的常用方法, 本质上是通过多次随机采样来估计一个定积分的值. 随着采样次数的增加, 估计值会逐渐收敛于准确值, 估计的准确度会因此提高, 但算法的运行耗时也随之上升. 通过引入概率密度函数对蒙特卡洛法进行优化, 在采样次数较少的情况下能让估计值更快地收敛.

2 定义

一个连续型随机变量的概率密度函数(Probability Distribution Function, PDF)描述了该随机变量的取值落在某个点附近的概率. 具体而言, 随机变量的取值落在某个区域之内的概率为其概率密度函数在这个区域上的积分. 对于一维实随机变量 X, 设它的PDF为 $p(x)$, 则它的积分 $P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t$ 称为 X 的累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF).

3 基本性质定理

3.1 $\mathbf{P(x)=Pr\{X\leq x\}}$.

证明: 根据上述定义容易证明.

3.2 生成已知概率分布的随机变量值

已知某一维实随机变量 X 满足其CDF为 $P(x)$, 则 $P^{-1}(X')$ 和 X 服从同一概率分布, 其中 $X'\sim U(0,1)$. 利用这个性质, 我们可以通过生成在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机值来生成已知概率分布的随机变量值.

证明:

$$P(x)=Pr\{X'\leq P(x)\}=Pr\{P^{-1}(X')\leq x\},$$

即 $P^{-1}(X')$ 和 X 的CDF相同, 因此服从同一概率分布.

4 基本原理

为了简化讨论, 首先考虑一维情况. 考虑求区间 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 上的非负积分

$$F=\int_{\Omega}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

朴素的蒙特卡洛法取N个均匀分布的随机变量值 $x_i\sim U(\Omega)\quad(i=1..N)$, 取函数值的平均值, 再乘以区间 Ω 的长度, 即 F 的估计值为

$$F_N=\frac{|\Omega|}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i).$$

由于单次采样的期望值与准确值相等, 因此 (根据期望线性性) 采样平均值的期望 $\mathrm{E}[F_N] = \mathrm{E}[|\Omega| f] = F$, 且当 N 增大时方差 $\mathrm{D}[F_N]$ 趋于 0. 但当 N 较小时, f 值较大的点 (这些点权重大, 对最终答案有更重要的影响) 可能被采样到的次数可能显著偏多或偏少, 导致 F_N 与 F 的偏差较大.

一种解决问题的思路是改为对非均匀分布的随机变量进行采样, 提高权重较大的点被采样的概率, 即"重要性采样法"(Importance Sampling). 但直接改变随机变量的分布会改变估计值的期望值, 为了保证期望值不变, 我们引入PDF.

假设随机变量 $X \in \Omega$ 服从我们指定的随机分布D, 其PDF为 $p(x)$. 对 X 采样 N 次, 得到 $x_i \quad (i = 1..N)$, 则 F 的估计值为

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{p(x_i)}.$$

(事实上，当 D 为均匀分布时, $p(x) \equiv \frac{1}{\Omega}$, 我们便得到前面均匀采样的结果.)

首先证明 F_N 的期望为 F. 注意到

$$E[\frac{f}{p}] = \int_\Omega \frac{f(x)}{p(x)} p(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x = F,$$

我们同样可以得到 $\mathrm{E}[F_N] = \mathrm{E}[\frac{f}{p}] = F$.

既然保证了期望值正确，我们希望尽可能减小方差. 当 $p = \frac{f}{F}$ 时有 $\mathrm{D}(F_N) = 0$, 于是我们可以合理推测 p 越接近$\frac{f}{F}$, 方差越小. 因此, 我们的任务就是找到一个尽可能符合实际权重的概率分布.

5 简单应用

Ray Tracing: The Rest of Your Life 一书中介绍了基于 PDF 的 importance sampling 在光线追踪中的简单应用: 对被物体表面散射的光线进行蒙特卡洛采样.

为了简化问题, 我们假定散射光方向与入射光无关. 计算物体表面的颜色便可以通过以下公式:

$$Color = \int_\Omega Albedo \cdot s(direction) \cdot color(direction) \, \mathrm{d}\omega.$$

转化后, 我们得到蒙特卡洛采样的核心公式:

$$Color = \frac{Albedo \cdot s(direction) \cdot color(direction)}{p(direction)},$$

其中, 我们先指定一个概率分布, p 是这个概率分布的PDF, $direction$ 是根据从概率分布采样得到的光源方向, $Albedo$ 是物体表面材料的漫反射系数, $color$ 是光源的颜色, s 是物体表面散射光线的PDF (Scatter PDF). 由于 $color$ 是递归计算的, 为了避免光路分支导致光线数量呈指数级增长, 我们仅对 1 条光线进行采样.

取 $direction$ 为单位向量, 则它由参量 θ 和 ϕ 确定, 其中 θ 是采样光线与法向量的夹角, ϕ 是光线绕法向量的转角, 于是我们可以把对方向向量采样转化为对 θ 和 ϕ 采样. 我们采用关于法向量旋转对称的概率分布, 即 $p = f(\theta)$ 与 ϕ 无关. 由于 $direction$ 是单位向量, 我们实际上是在单位球表面做第一类曲面积分, 因此 $\mathrm{d}\omega = \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ (其中 $\mathrm{d}\omega$ 为面积微元), 于是根据等式

$$\int_\Omega p\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{2\pi} a(\phi)\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} a(\theta)\mathrm{d}\theta = 1,$$

可得 θ 和 ϕ 的PDF分别为

$$a(\phi) = \frac{1}{2\pi},$$
$$b(\theta) = 2\pi f(\theta)\sin(\theta).$$

例如, 我们如果在法向量所指向的半球均匀采样, 即 $p = \frac{1}{2\pi}$ $(\theta \le \frac{\pi}{2})$, 则根据定理2.2, 对于服从 $U(0,1)$ 的随机变量 $r1, r2$, 可令

$$r_1 = \int_0^{\phi} \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{\phi}{2\pi},$$
$$r_2 = \int_0^{\theta} 2\pi f(t)\sin(t)dt = \frac{1-\cos(\theta)}{2},$$

反解得到 ϕ 和 θ, 再计算出直角坐标 x, y, z.

在实际应用中, 为了在采样较少的情况下达到较好的效果, 常常会给其中一些物体 (特别是发光物体) 赋予更高权重. 具体而言，我们可以先设计仅对单个物体均匀采样 (即将光线全部朝该物体均匀散射) 的PDF, 再把它们和向全场均匀散射的PDF进行加权平均得到新的PDF, 而相应的采样方法则是将各个PDF的权重作为概率, 随机选择一个PDF并调用这个PDF的采样方法.