[illegible] 课时: 50 考试时间: 2017 年 11 月 5日

$\frac{n!(2n-1)!!}{(2n)!}$

一、填空:

1、1/3  2、~~[illegible]~~ $\frac{2}{5}$  3、$\frac{1}{2^{?}}$  4、$\lambda=2\sqrt{3}$

5、$2\left(1-\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx\right)f(z)$  6、$\frac{5}{9}$  7、0.7  8、$N(-5,13)$  9、$\frac{2}{3}$  10、$1-q$

二、设 $A$: 任取 2 只都是民用口罩,

$B_k$: 丢失的一只为 $k$, $k=1,2,3$ 分别表示民用口罩, 医用口罩, 消毒棉花. 2分

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A|B_k)=\frac{1}{2}\frac{C_4^2}{C_9^2}+\frac{3}{10}\frac{C_5^2}{C_9^2}+\frac{1}{5}\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{8}{36}\quad 6分$$

$$P(B_1|A)=P(B_1)P(A|B_1)/P(A)=\frac{1}{2}\frac{C_4^2}{C_9^2}/P(A)=\frac{3}{36}\div\frac{8}{36}=\frac{3}{8}\quad 10分$$

三、$A=1/2,\ B=1/\pi$, $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $F(2)-F(\sqrt{3})=\frac{1}{\pi}\left(\arctan 2-\arctan\sqrt{3}\right)$

4  4  2

四、$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X-1\le y)=P(X\le \ln(y+1))=\int_{-\infty}^{\ln(y+1)} f(x)\,dx$ (共5分)

1  4

$$=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{16}\ln^2(y+1), & 0\le y\le e^4-1\\ 1 & e^4-1\le y\end{cases}\ 8分\quad 则\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\ln(y+1)}{8(y+1)}, & 0\le y\le e^4-1\\ 0 & e^4-1\le y,\ or,\ y<0\end{cases}\quad 10分$$

五、解: (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(x+2y)}\,dxdy$

$=A\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy=\frac{1}{2}A$ 所以 $A=2$  4

(2) X 的边缘密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ 2

Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ 2

因 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X、Y 是独立的  2

(3) $P\{0\le X\le 1,\ 0\le Y\le 1\}=\int_0^1\int_0^1 2e^{-(x+2y)}\,dxdy=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 2e^{-2y}dy$

$=(-e^{-x}|_0^1)(-e^{-2y}|_0^1)=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$.  3

六、$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其\ 他\end{cases}$  $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

2  2

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(2x-z)\,dx$$ 2

$$\begin{cases}0<x<1\\ 2x-z>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1\\ x>z/2\end{cases} \Rightarrow \text{[illegible]}\ z/2$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^1 e^{-(2x-z)}dx=e^{z}(1-e^{-2})/2 & z\le 0\\ \int_{z/2}^1 e^{-(2x-z)}dx=(1-e^{z-2})/2 & 0<z<2\\ 0 & z\ge 2\end{cases}$$ 6

4. $F(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$ 2

(1) $P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=F(1)=1-e^{-1}$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=P\{\Phi\}=0$ 6

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=F(2)-F(1)=e^{-1}-e^{-2}$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=1-F(2)=e^{-2}$

(2)

| $p_j$ \ $X_2$ / $X_1$ | 0 | 1 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $1-e^{-1}$ | 0 | $1-e^{-1}$ |
| 1 | $e^{-1}-e^{-2}$ | $e^{-2}$ | $e^{-1}$ |
| $p_{\cdot j}$ | $1-e^{-2}$ | $e^{-2}$ | 1 |

10

(3)

$P\{X_1=0,X_2=0\}\ne P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}$ 所以 X, Y 不独立 12

(4) $P\{X_1=0 \mid X_2=0\}=\dfrac{P\{X_1=0,X_2=0\}}{P\{X_2=0\}}=\dfrac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}}$

$P\{X_1=1 \mid X_2=0\}=\dfrac{P\{X_1=1,X_2=0\}}{P\{X_2=0\}}=\dfrac{e^{-1}-e^{-2}}{1-e^{-2}}$ 15