无约束优化方法
Unconstrained Optimization Method

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

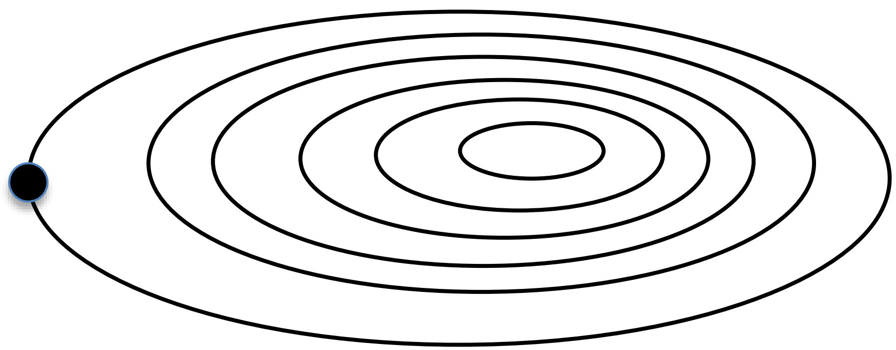
- 无约束优化问题概览
- 无约束优化问题的最优性条件

无约束优化问题

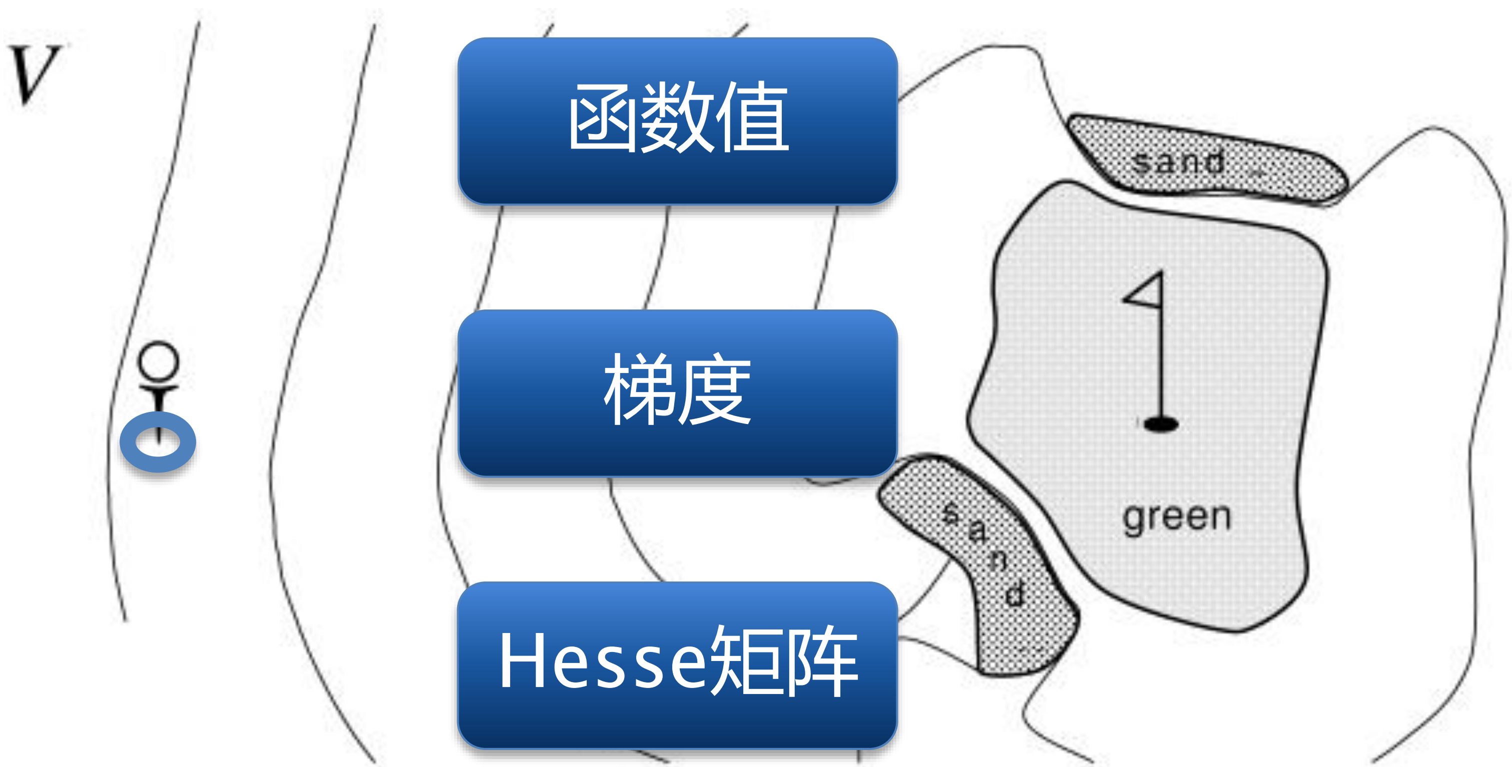
- n元函数的无约束非线性规划问题：

$$\min \quad f(x)$$

其中$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$, $f: R^n \to R^1$



无约束优化方法



函数值

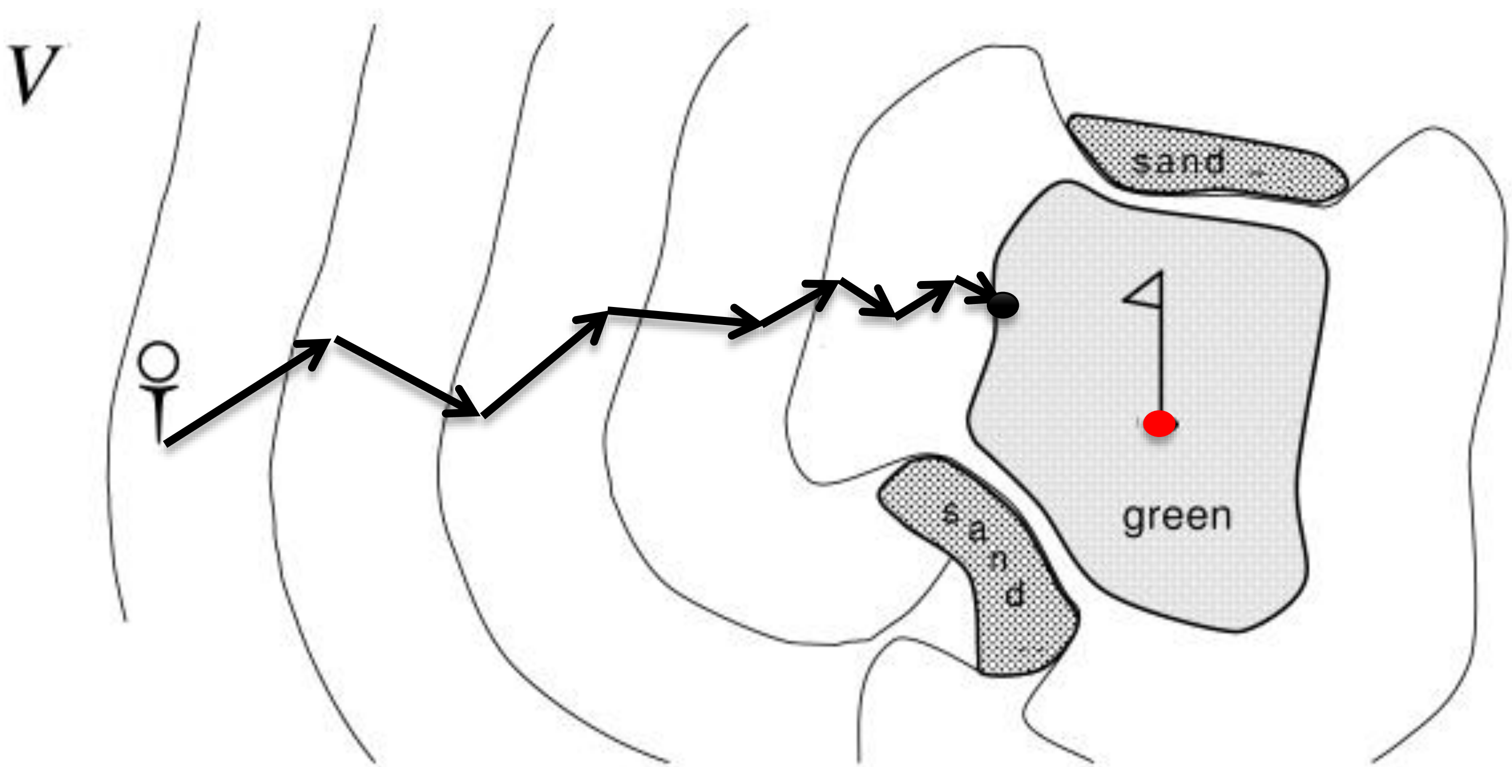
梯度

Hesse矩阵

无约束优化方法概述

逼近阶数	方法名称	内存需求	迭代次数	收敛速度	结构复杂性	总体效果
0阶	直接法	小	多	慢	简单	差
1阶	最速下降法	小	较多	慢	简单	差
[1, 2)	共轭梯度法	小	较多	较快	简单	中
	拟Newton法	较大	少	较快	较简单	较优
2阶	Newton法	较大	很少	很快	较简单	差
	信赖域法	较大	很少	快	复杂	优

无约束优化方法



最优性条件 - 1

- 设 $f: R^n \to R^1$在点 $\bar{x} \in R^n$ 处可微。若存在$p \in R^n$, 使
$$\nabla f(\bar{x})^T p < 0$$
则向量 p 是 f 在点 $\bar{x}$ 处的**下降方向**

定义3: $f: R^n \to R, \bar{x} \in R^n, p \in R^n, p \neq 0$. 若存在 $\delta > 0$ 使 $\forall t \in (0, \delta)$ 有 $f(\bar{x} + tp) < f(\bar{x})$, 则向量$p$是$f(x)$在 $\bar{x}$的**下降方向**.

与负梯度方向夹角为锐角的方向是下降方向

最优性条件 - 2

- 设 $f: R^n \to R^1$在点$x^* \in R^n$ 处可微。若x^*是无约束优化问题的局部最优解，则：

$$\nabla f(x^*) = 0$$

- 无约束非线性规划问题的**必要条件**
- x^*一定是其目标函数 f 的**驻点**

最优性条件 - 3

- 设 f: $R^n \to R^1$在点$x^* \in R^n$ 处的Hesse矩阵存在。若：
  $\nabla f(x^*)=0$, 且$\nabla^2 f(x^*)$**正定**,
  则x^*是无约束优化问题的严格**局部**最优解.

- $S \subset R^n$ 是非空开凸集, $f: S \to R^1$二阶连续可导, 则 f 是S上的严格凸函数的充要条件是$\nabla^2 f(x)$ 在S正定

最优性条件 - 4

- 设 $f: R^n \rightarrow R^1$在点$x^* \in R^n$ 上的可微凸函数。若有：

$$\nabla f(x^*)=0$$

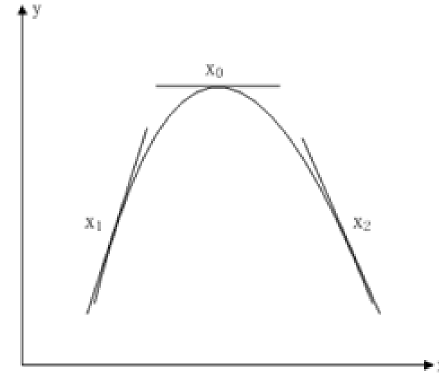
则x^*是无约束优化问题的严格**整体**最优解.

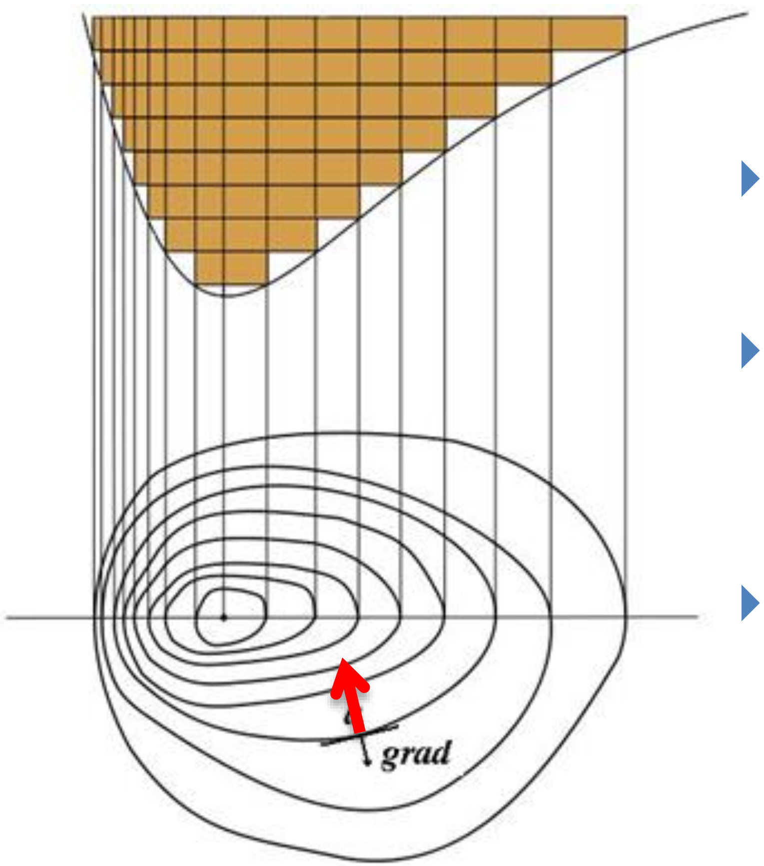
- 例:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax+b^T x+c$$

$$\boxed{\nabla f(x^*)=0} \Longleftrightarrow \boxed{Ax^*+b=0}$$

几点说明





- 同梯度方向夹角大于90度的方向为下降方向
- 负梯度方向是一个最容易获得的下降方向，同时也是函数值下降最快的方向
- 可以用当前搜索点x^k的梯度$\nabla f(x^k)$是否接近于0作为搜索的终止准则之一

作业

- P154 13