



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

单纯形表与初始解 Simple Tableau and Initial Solution

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
翟桥柱 吴江

Outline

- ▶ 单纯形表及算法
- ▶ 初始可行解
- ▶ 单纯形法总结

标准LP问题的等价问题

$$\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T$$

$$\min \quad z = z_0 - \zeta^T x$$

$$s.t. \quad x_B + B^{-1} N x_N = \bar{b}$$

$$x \geq 0$$

典式

最优性准则?

检验数

更新基本可行解?

基变换

基变换

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min & z = c_B^T \bar{b} - \zeta_N^T x_N \\ \text{s.t.} & x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{cases}$$

几何意义 $\frac{\partial z}{\partial x_{N_j}} = -\zeta_{N_j}$

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 - x_{N_k} \bar{a}_{1,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_i - x_{N_k} \bar{a}_{i,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_m - x_{N_k} \bar{a}_{m,N_k} \end{pmatrix}$$

若有多个 $\zeta_{N_k} > 0$ 时，选哪一个？

若有多个 $\bar{a}_{i,N_k} > 0$ 时，选哪一个？

$$x_{N_k} \rightarrow \theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,N_k}} \mid \bar{a}_{i,N_k} > 0 \right\}$$

设最小比在 $i = r$ 处取得，
则 $x_{B_r} \rightarrow 0, x_{N_k} \rightarrow \theta$

单纯形法步骤

- ▶ 获取初始可行基
- ▶ 计算检验数向量 $\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T$
- ▶ 求 $\zeta_k = \max \{\zeta_j \mid 1 \leq j \leq n\}$
- ▶ 若 $\zeta_k \leq 0$, 停止, 已找到最优解
- ▶ 若 $\bar{A}_k \leq 0$, 停止, 原问题无界
- ▶ 求 $\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0, i = 1, \dots, m \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
- ▶ 以 A_k 代替 A_{Br} 得到新基, 转第2步

线性规划标准形式的变换

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{ll} \min & z = C_B^T x_B + C_N^T x_N \\ \text{s.t.} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{ll} \min & z = C_B^T x_B + C_N^T x_N \\ \text{s.t.} & \boxed{\begin{array}{l} z - C_B^T x_B - C_N^T x_N = 0 \\ 0 \cdot z + Bx_B + Nx_N = b \end{array}} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

单纯形表 $z - C_B^T x_B - C_N^T x_N = 0$

$$0 \cdot z + Bx_B + Nx_N = b$$

基变量	系数			右端项
	z	x		
z	1	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
x_B	0	B	N	b

单纯形表

基变量	系数		右端项	
	Z	X		
Z	1	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
X_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

单纯形表

$$\zeta_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$z_0 = c_B^T B^{-1} b$$

基变量	系数			右端项
	z	x		
z	1	0	$c_B^T B^{-1} N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	/	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

$$B \rightarrow I; -C_B^T \rightarrow 0$$

基变换

正检验数中最大者
对应的列

基变量	系数			右端项
	z	x		
z	1	0	$C_B^T B^{-1} N - C_N^T$	$C_B^T B^{-1} b$
x_B	0	1	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

比值最小的值对应的行($a' > 0$)

例:

$$\begin{array}{ll}\min & z = -x_2 + 2x_3 \\s.t. & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\& x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\& x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\& x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5\end{array}$$

例:

$$\begin{array}{ll}\min & z = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\s.t. & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\& x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\& x_j \geq 0, j = 1, 2, 3\end{array}$$

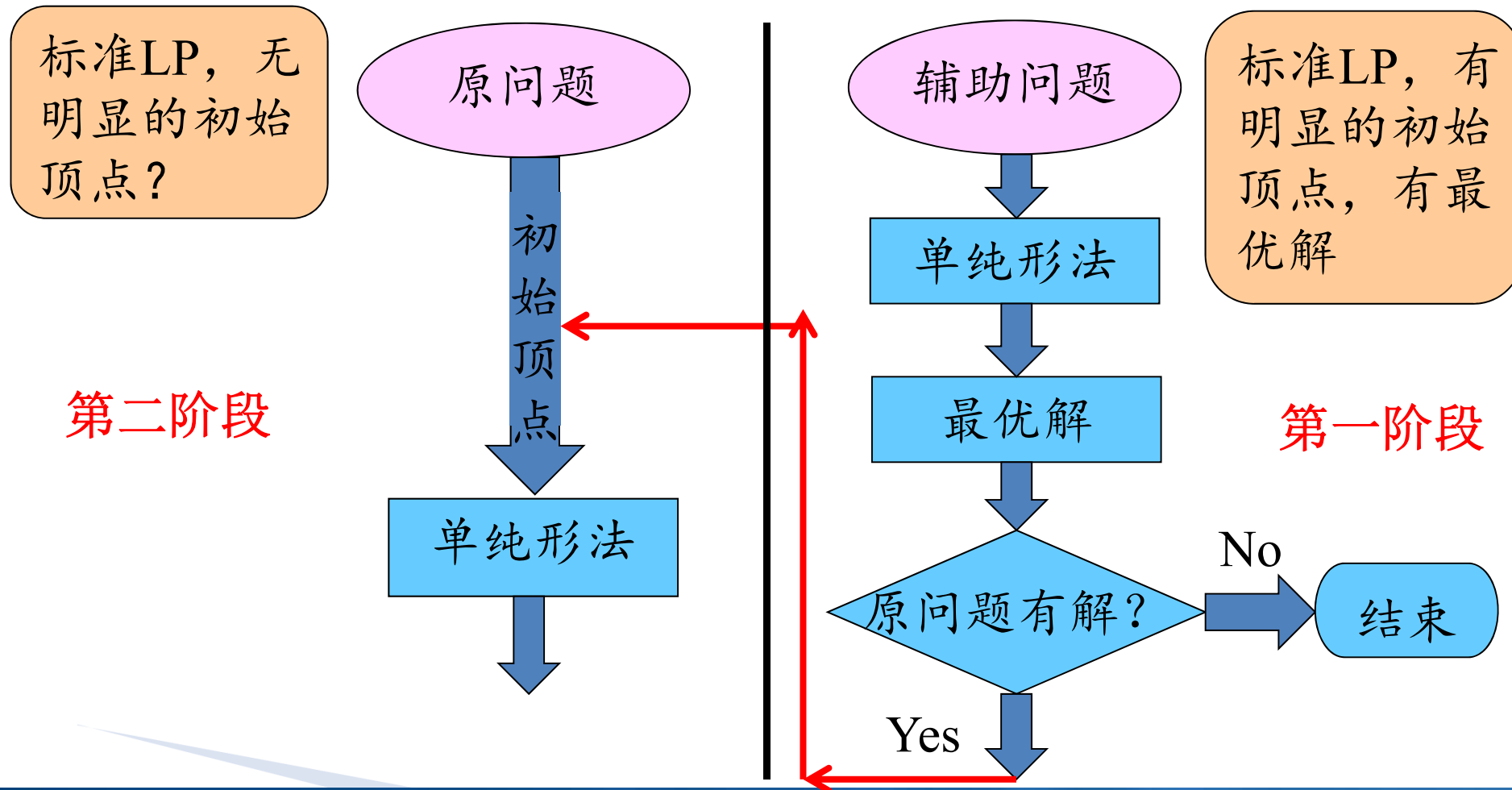
$$z^* = -230/3$$

Outline


- ▶ 单纯形表及算法
- ▶ 初始可行解
- ▶ 单纯形法总结

初始解：两阶段法的核心思想

单纯形法步骤中为什么没有出现问题无解的情况？



两阶段法

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b (b \geq 0) \\ & x \geq 0 \end{array} \quad x_a = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$$


$$\begin{array}{ll} \min & g = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} \\ \text{s.t.} & Ax + x_a = b (b \geq 0) \\ & x \geq 0, x_a \geq 0 \end{array}$$

两阶段法的基本原理

原问题

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

?

辅助问题

$$\begin{cases} \min & g = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\ \text{s.t.} & Ax + x^a = b \\ & x \geq 0, x^a \geq 0 \end{cases}$$

定理1. 原问题有可行解(有顶点)的充分必要条件是辅助问题最优目标函数值为0.

辅助问题
可能情况

无可行解

无下界

有最优解(最优顶点)

×

×

✓

由辅助问题最优顶点如何获得原问题一个顶点?

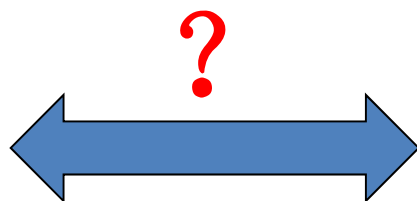
两阶段法的基本原理

原问题

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

辅助问题

$$\begin{cases} \min & g = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\ \text{s.t.} & Ax + x^a = b \\ & x \geq 0, x^a \geq 0 \end{cases}$$



辅助问题最优解的可能情况：

1. 最优值 $g^* > 0$ ：原问题无可行解
2. 最优值 $g^* = 0$ ，且最优顶点(基本可行解)中人工变量全部为非基变量：

已得原问题一个顶点，进入第二阶段

3. 最优值 $g^* = 0$ ，但最优顶点(基本可行解)中有些人工变量为基变量：

构造(旋转变换)出原问题一个顶点，进入第二阶段

构造原问题顶点的旋转变换方法

辅助问题的最优单纯形表：设第 r 个基变量为人工变量 x_{n+k}


g	ζ_1	ζ_2	\cdots	ζ_n	ζ_{n+1}	\cdots	ζ_{n+k-1}	0	ζ_{n+k+1}	\cdots	ζ_{n+m}	g^*
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_{B_r}	$\bar{a}_{r,1}$	$\bar{a}_{r,2}$	\cdots	$\bar{a}_{r,n}$	$\bar{a}_{r,n+1}$	\cdots	$\bar{a}_{r,n+k-1}$	1	$\bar{a}_{r,n+k+1}$	\cdots	$\bar{a}_{r,n+m}$	\bar{b}_r
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots

- ①. $\bar{b}_r = ?$ **0** 重复执行直至人工变量全部出基
- ②. 若 $\bar{a}_{r,1} = \bar{a}_{r,2} = \cdots = \bar{a}_{r,n} = 0$? 冗余约束, 秩数问题
- ③. 若存在 $j (1 \leq j \leq n)$ 使得 $\bar{a}_{r,j} \neq 0$? x_{n+k} 出基, x_j 入基

两阶段法的几点技巧

1. 视问题需要，引入尽可能少的人工变量，且第一阶段目标函数中只有人工变量
2. 一个人工变量一旦出基，立即删除其所在的列不要保留，更不要后续迭代中将其再次入基
3. 第一阶段结束后，只需修改单纯形表第一行，即可继续迭代

g	ζ_1	\cdots	ζ_n	g^*
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_{B_r}	$\bar{a}_{r,1}$	\cdots	$\bar{a}_{r,n}$	\bar{b}_r
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots



z	$-c_1$	\cdots	$-c_n$	0
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_{B_r}	$\bar{a}_{r,1}$	\cdots	$\bar{a}_{r,n}$	\bar{b}_r
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots

例：

求解：

$$\min \quad z = 5x_1 + 21x_3$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

例:

解: 增加人工变量 x_6 , x_7 得到辅助LP问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & g = x_6 + x_7 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & g = x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-5	0	-21	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_6	1	-1	6	-1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	-1	0	1	1

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
s.t. \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & g = x_6 + x_7 \\
s.t. \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-5	0	-21	0	0	0	0	0
g	2	0	8	-1	-1	0	0	3
x_6	1	-1	6*	-1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	-1	0	1	1

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & g = x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	$-3/2$	$-7/2$	0	$-7/2$	0	$7/2$	0	7
g	$2/3$	$4/3$	0	$1/3$	-1	$-4/3$	0	$1/3$
x_3	$1/6$	$-1/6$	1	$-1/6$	0	$1/6$	0	$1/3$
x_7	$2/3$	$4/3$	0	$1/3$	-1	$-1/3$	1	$1/3$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & g = x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	$-3/2$	$-7/2$	0	$-7/2$	0	$7/2$	0	7
g	$2/3$	$4/3$	0	$1/3$	-1	$-4/3$	0	$1/3$
x_3	$1/6$	$-1/6$	1	$-1/6$	0	$1/6$	0	$1/3$
x_2	$2/3$	$4/3$	0	$1/3$	-1	$-1/3$	1	$1/3$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & g = x_6 + x_7 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1/4	0	0	-21/8	-21/8	21/8	21/8	63/8
g	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_3	1/4	0	1	-1/8	-1/8	1/8	1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	-3/4	-1/4	3/4	1/4

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
s.t. \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	$1/4$	0	0	$-21/8$	$-21/8$	$63/8$
x_3	$1/4$	0	1	$-1/8$	$-1/8$	$3/8$
x_2	$1/2^*$	1	0	$1/4$	$-3/4$	$1/4$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

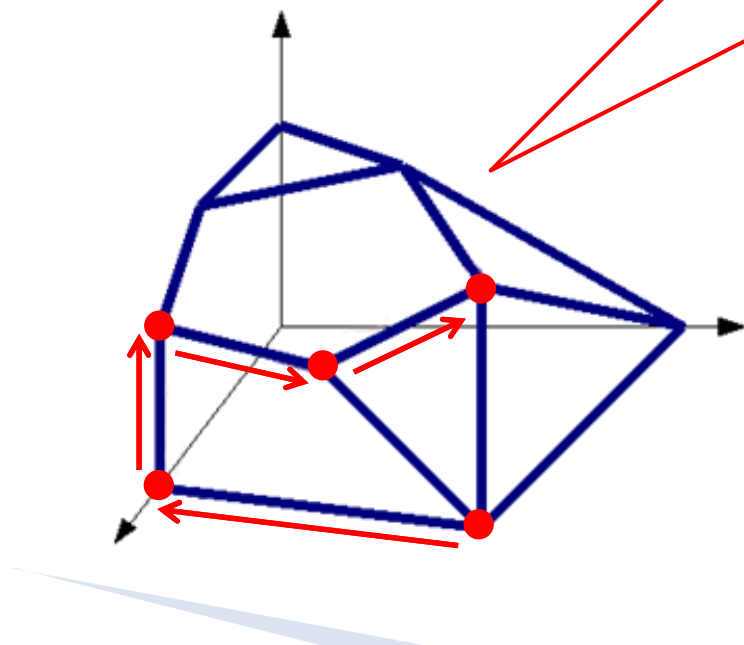
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	$-1/2$	0	$-11/4$	$-9/4$	$31/4$
x_3	0	$-1/2$	1	$-1/4$	$1/4$	$1/4$
x_1	1	2	0	$1/2$	$-3/2$	$1/2$

Outline

- ▶ 单纯形表及算法
- ▶ 初始可行解
- ▶ 单纯形法总结

几何原理

获取相邻顶点信息比其他顶点快
沿 Z 的增长率(max)最大的边寻找顶点
所有边 Z 的增长率为负，则为最优解



基本概念

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \longrightarrow A = [B, M] \quad x = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$Ax = b \longleftrightarrow x_B = \bar{b} - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x \longleftrightarrow z = c_B^T \bar{b} - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N$$

$$\begin{array}{ll} \min & z = z_0 - \zeta^T x \\ \text{s.t.} & x_B + B^{-1}Nx_N = \bar{b} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

最优性准则

- ▶ 若可行基 B 对应的检验数向量 $\zeta \leq 0$ ，则此可行基对应的基本可行解为**最优解**。且最优值为 $c_B^T \bar{b}$
- ▶ 若向量 ζ 的第 k 个分量 $\zeta_k > 0$ ，而向量 $\bar{A}_k = B^{-1} A_k \leq 0$ 则原问题**无界**。
- ▶ 对于非退化的基本可行解 \bar{x} ，若向量 ζ 中 $\zeta_k > 0$ ，而其相应的向量 \bar{A}_k **至少有一个正分量**，则有一个**新的基本可行解** \hat{x} 使得 $c^T \hat{x} < c^T \bar{x}$

单纯形表

$$\zeta_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$z_0 = c_B^T B^{-1} b$$

基变量	系数			右端项
	z	x		
z	1	0	$c_B^T B^{-1} N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	/	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

$$B^{-1} b_j > 0; -c_N^T B^{-1} a_j > 0; \zeta_j < 0; \min(b/a)$$

两阶段法

目标函数 $\min g = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$

约束条件
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} & \geq 0 \end{cases}$$

作业

- ▶ P74 14
- ▶ P75 16(1)
- ▶ P76 17(1) (3)