



西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute  
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

# 整数规划 Integer Programming

电信学院·自动化科学与技术系  
系统工程研究所  
吴江

# Outline

- ▶ 基本概念
- ▶ 求解整数规划问题的困难
- ▶ 经典例子
- ▶ 一般方法

# 整数规划问题

混合整数  
线性规划  
(MILP)

$$\min \quad z = f(x)$$

$$s.t \quad x \in D, D \subset R^n$$

$$x_i \in I, i \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

混合整数  
规划  
(MIP)

纯整数  
规划  
(IP)

0-1  
规划  
(BIP)

## 例：解如下整数线性规划问题

min

$$z = x_1 - x_2$$

s.t.

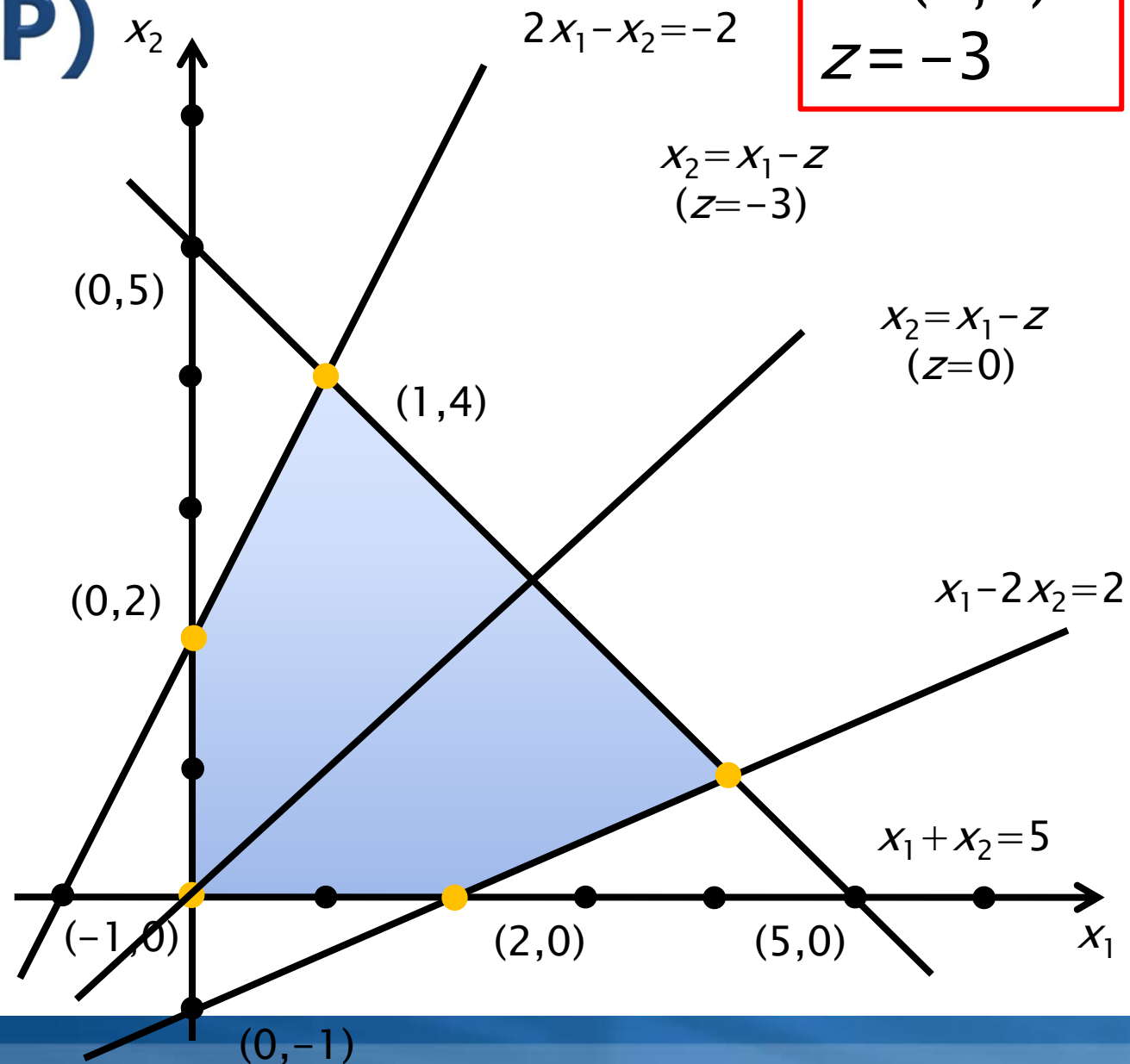
$$2x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

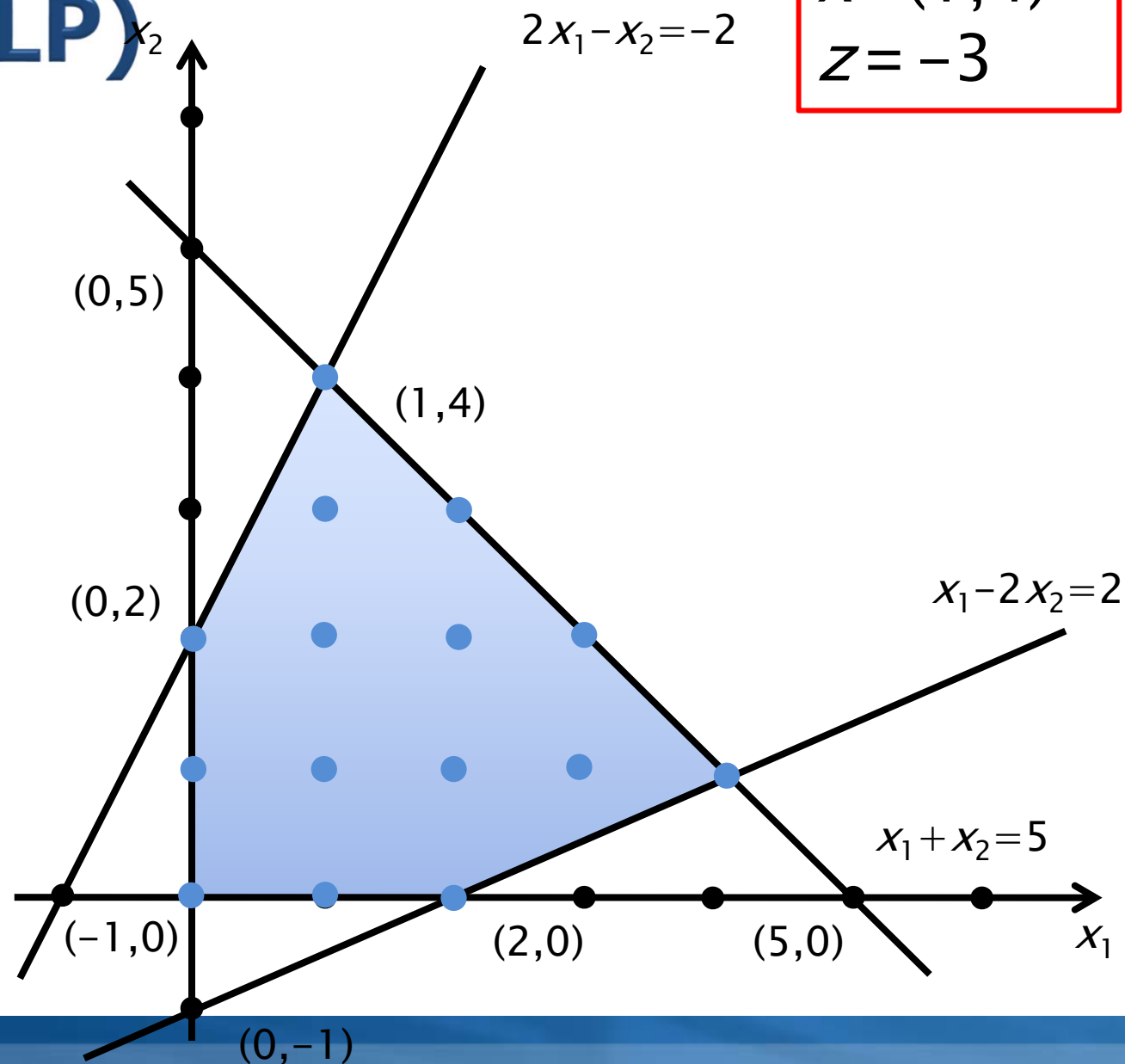
$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_j \geq 0 \cap x_j \in I, j = 1, 2$$

# 图解法(LP)

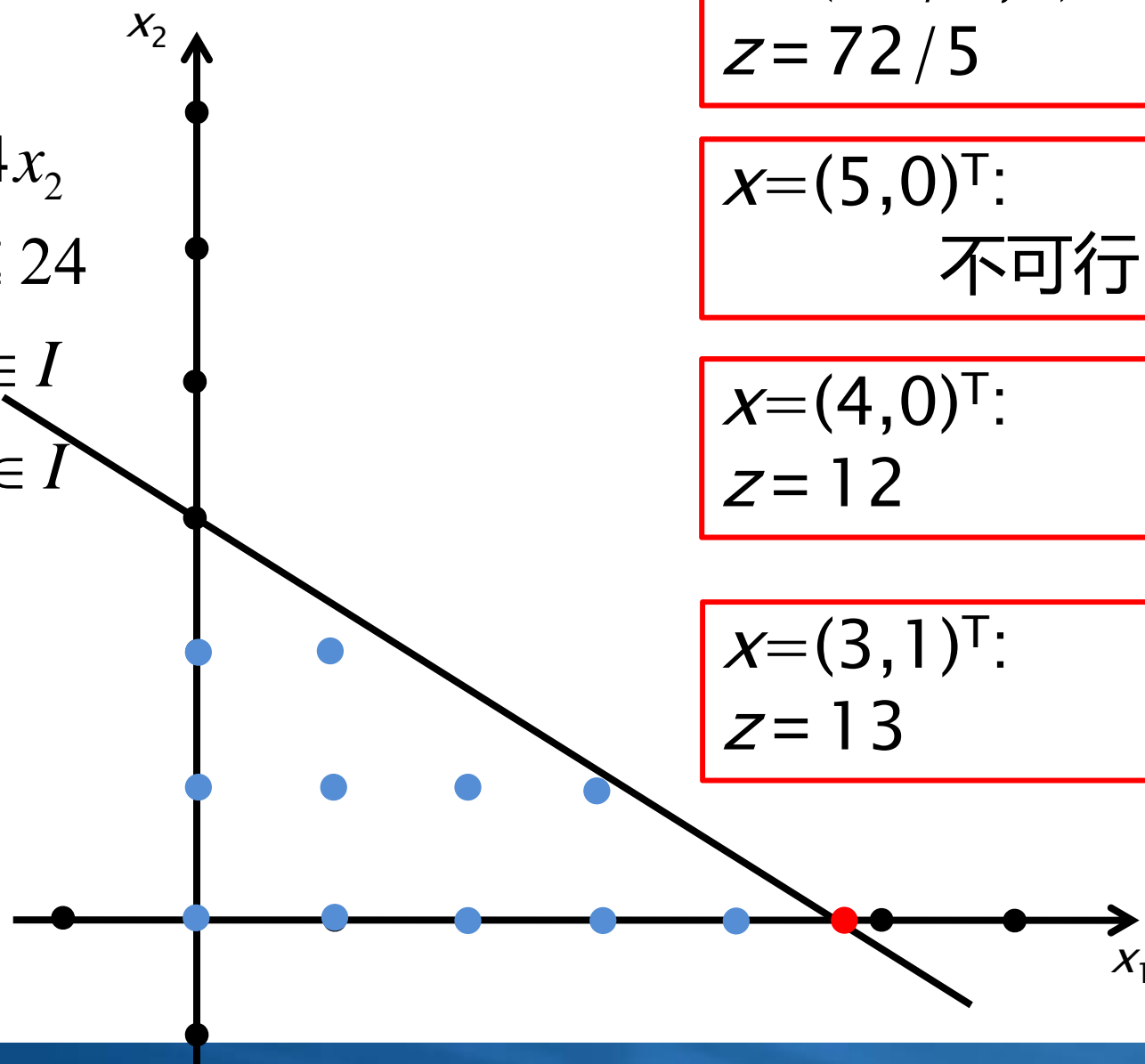


# 图解法(ILP)



例:

$$\begin{array}{ll}\max & z = 3x_1 + 4x_2 \\s.t. & 5x_1 + 8x_2 \leq 24 \\& x_1 \geq 0, x_1 \in I \\& x_2 \geq 0, x_2 \in I\end{array}$$



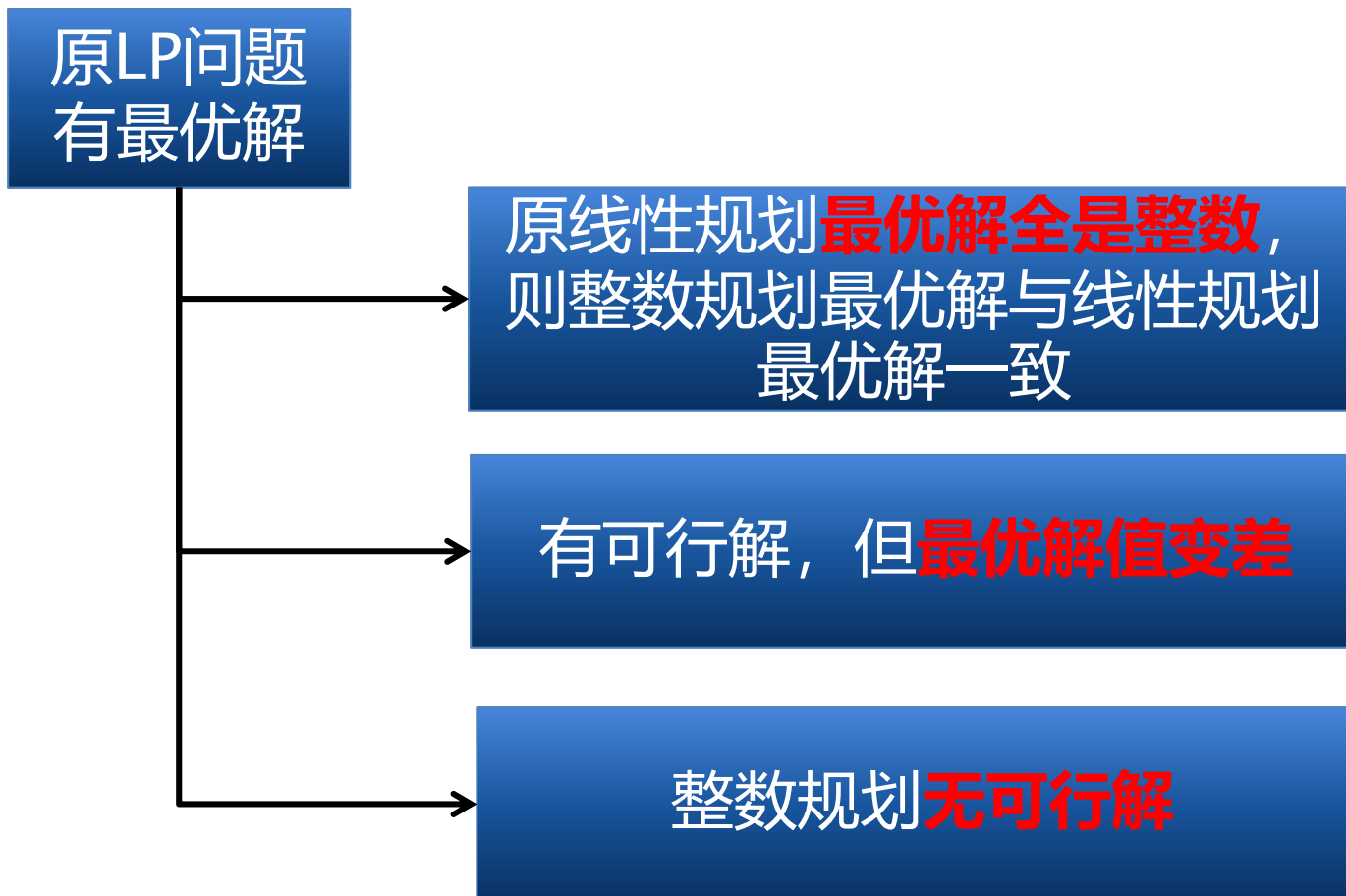
$$x = (24/5, 0)^T \\ z = 72/5$$

$$x = (5, 0)^T: \\ \text{不可行}$$

$$x = (4, 0)^T: \\ z = 12$$

$$x = (3, 1)^T: \\ z = 13$$

# 整数线性规划 vs. 线性规划





# Outline

- ▶ 基本概念
- ▶ 求解整数规划问题的困难
- ▶ 经典例子
- ▶ 一般方法

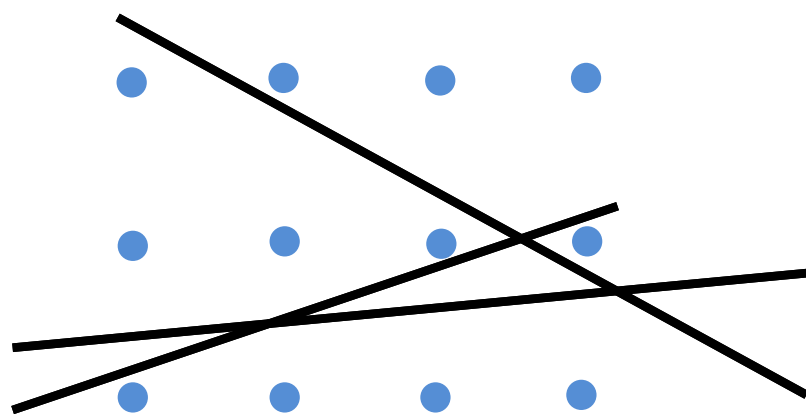
# 可行域复杂

- ▶ 整数约束本质上是一种非线性约束. 导致可行域结构异常复杂. 传统非线性规划的最优性条件失去意义

$$x \in \{0, 1\} \quad \longrightarrow \quad x(x-1) = 0$$

# 解的存在性

- ▶ 目标有界时未必有最优解存在



# 穷举法

- ▶ 即使格点有限,也无法使用穷举法

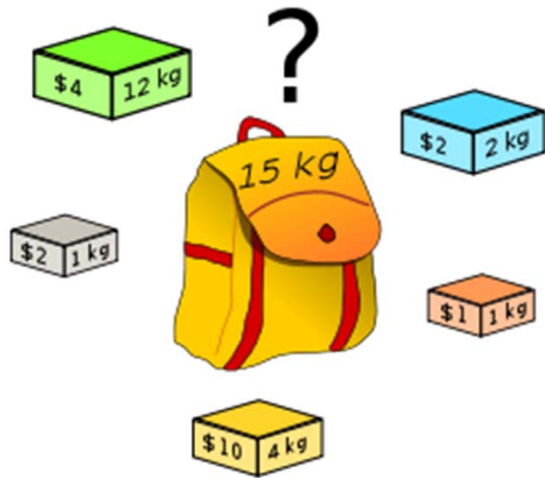
$n$ 个0-1变量:  $2^n$

# 舍入法

- ▶ 对于ILP, 先求LP,再四舍五入
  - 舍 or 入? 组合爆炸:  $2^n$
  - 原约束不可行: 寻找可行解

# 0-1背包问题(Knapsack problem)

- 给定  $n$  种物品，物品  $j$  的重量为  $w_j$ ，价格为  $c_j$ ，在限定的总重量  $W$  内，我们如何选择，才能使得物品的总价格最高。



$$\max \quad z = \sum_j^n c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq W$$

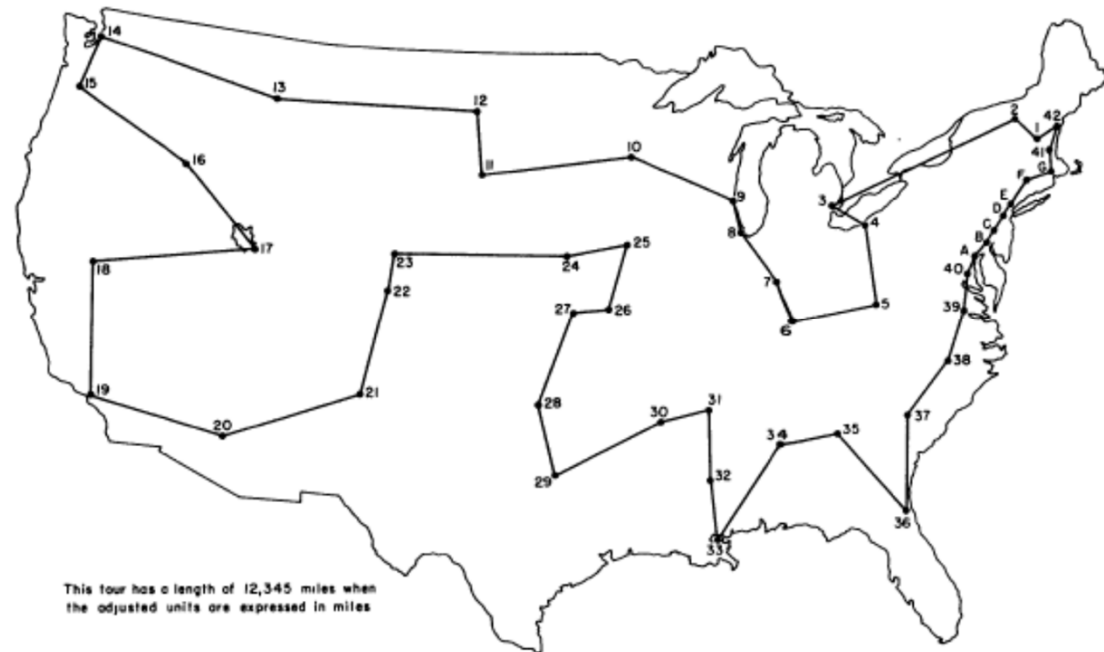
$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n$$

# 旅行商问题(TSP)

- ▶ 有 $n$ 个城市，一个推销员要从其中某一个城市出发，唯一走遍所有的城市，再回到他出发的城市，求最短的路线



Merrill M. Flood  
1908–1991

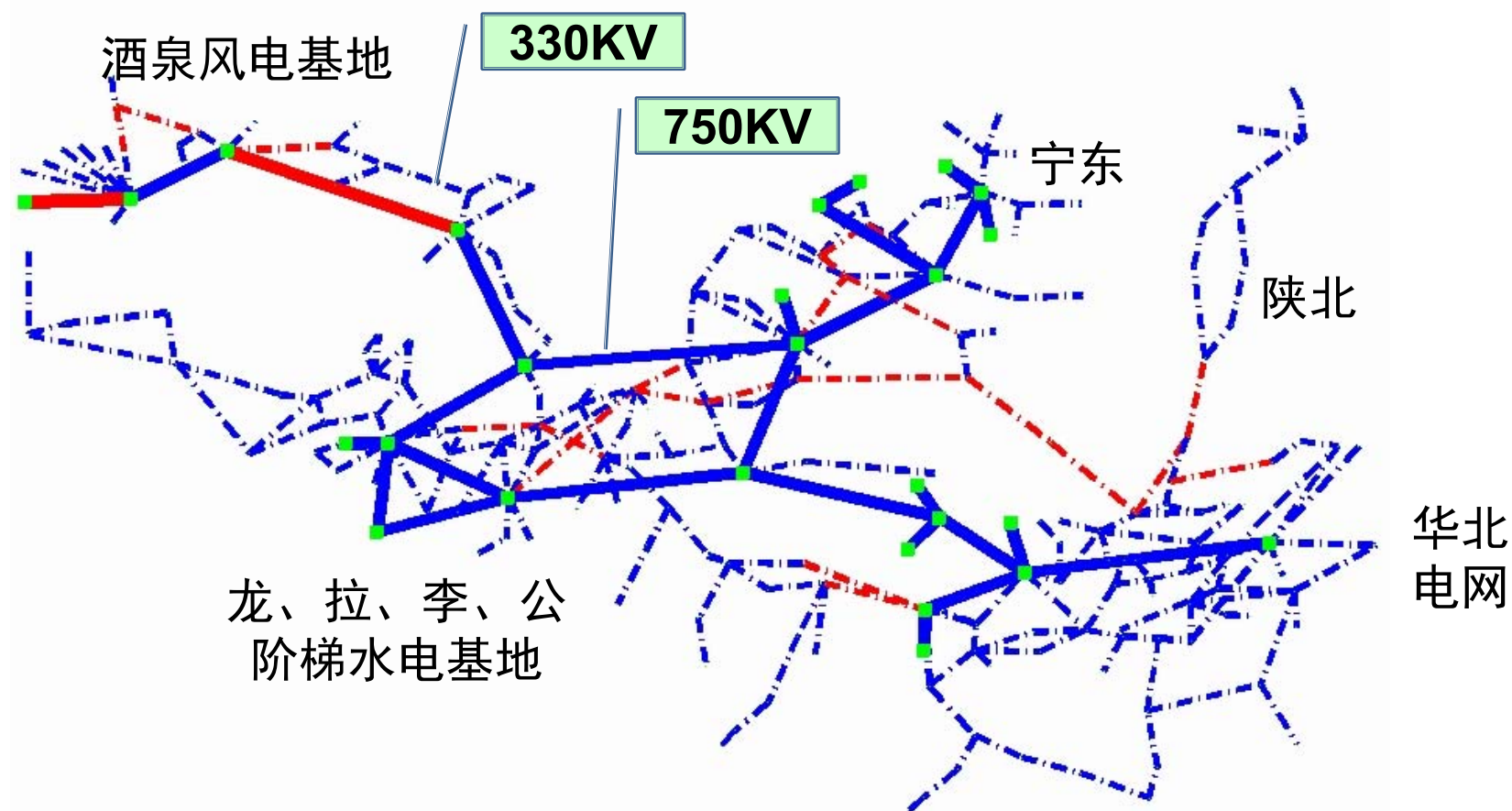


This tour has a length of 12,345 miles when the adjusted units are expressed in miles

FIG. 16 The optimal tour of 40 cities

“Solution of a largescale traveling-salesman problem,” G. Dantzig, R. Fulkerson, S. Johnson, *Journal of the Operations Research Society of America*, 2, 4, 1954, 393–410

# 电力系统优化调度





# 0-1变量在模型构建中的应用

- ▶ “或” 约束

$$A_1x \leq b_1 \quad \text{或} \quad A_2x \leq b_2$$

- ▶ 选择约束

$$f(x) = d_1 \quad \text{或} \quad d_2 \quad \text{或} \quad d_3$$

- ▶ 判断约束

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{if } x_j > 0 \\ 0 & \text{if } x_j = 0 \end{cases}$$

# 整数规划问题求解的一般方法

- ▶ 全局最优化方法
- ▶ 近似最优化方法