西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

灵敏度分析
Sensitivity Analysis

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
翟桥柱 吴江

引言

勤俭节约：对任何类型的一个问题，当某些因素发生微小改变时，原有解决方案是否仍可用？怎样适当调整以应对新情况？

变化中的规律： 不满足于解决一个给定问题，更希望了解(最优)解决方案随各因素变化的规律。

一个 LP 问题，当数据或结构发生变动时，原最优解信息能否有效利用而无需从头开始求解新问题？

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

可能的变化

1. 维数不变，改变A，b，c
2. 增加变量，增加约束
3. 删除变量，删除约束

重点讨论

核心思想-单纯形表

z	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
x_B	B	N	b

$$\Downarrow$$

z	0	ζ_N^T	$C_B^T\overline{b}$
x_B	I	N	b

最优单纯形表中，某些数据只对表格的一部分有影响！
c只影响第一行，**b**只影响最后一列

改变价值系数

$$\zeta_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$z_0 = c_B^T B^{-1} b$$

z	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	b

c 发生改变：$c \longrightarrow c'$

z	0	ζ_N^T	$c_B^T \bar{b}$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

z	0	$\zeta_N'^T$	$c_B'^T \bar{b}$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

①. $\bar{b} = B^{-1}b$ 不受影响，仍≥0

②. 计算 $\zeta_N'^T = c_B'^T B^{-1} N - c_N'^T$ ，若仍≤0 ，已得最优解

③. 否则，用单纯形法继续迭代

当仅有 c_N 发生改变时更简单

改变右端向量

$$\zeta_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$z_0 = c_B^T B^{-1} b$$

z	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	b

b 发生改变：$\mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}'$

z	0	ζ_N^T	$c_B^T \bar{b}$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

z	0	ζ_N^T	$c_B^T \bar{b}'$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}'$

①. 检验数不受影响，仍≤0

②. 计算 $\bar{b}' = B^{-1} b'$，若仍非负，已得最优解　解方程组 $By = b'$

③. 否则，用对偶单纯形法继续迭代

增加不等式约束

z	0	ζ_N^T	$C_B^T\overline{b}$
x_B	I	N	b

z	0	ζ_N^T	0	$C_B^T\overline{b}$
x_B	I	N	0	b
x_{m+1}	$x\ldots$	$x\ldots$	1	b_{m+1}

例子

例：线性规划问题

$$\min \quad z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

最优单纯形表：

z	-3	0	-3	0	-8
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14

最优解：

$x^*=(0, 4, 0, 14)^T$

新增约束：

$$x_1+3x_2+2x_3 \leqslant 10$$

解：最优解不满足新约束，先化为等式

$$x_1+3x_2+2x_3 \quad +x_5 = 10$$

单纯形表增加一行一列：

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	1	3	2	0	1	10

化为标准单纯形表：

最小比列

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-2^*	0	-1	0	1	-2

负最大元

例子

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_1	-2	0	-1	0	1	-2

化为标准单纯形表

x_1入基，x_5出基

z	0	0	$-3/2$	0	$-3/2$	-5
x_2	0	1	$1/2$	0	$1/2$	3
x_4	0	0	$-1/2$	1	$5/2$	9
x_1	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1

已得最优解！

最小比列

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-2^*	0	-1	0	1	-2

负最大元

大多数情况下，个别数据发生变动时，用灵敏度分析方法要简便一些。