



西安交通大学

网络教育资源建设工程



# 信号与系统

SIGNALS AND SYSTEMS

## 第10章 Z-变换

## The Z-Transform

## 本章主要内容

1. 双边 $Z$ 变换及其收敛域ROC;
2. ROC的特征, 各类信号的ROC, 零极点图;
3.  $Z$ 反变换, 利用部分分式展开进行反变换;
4. 由零极点图分析系统的特性;
5. 常用信号的 $Z$ 变换,  $Z$ 变换的性质;
6. 用 $Z$ 变换表征LTI系统, 系统函数, LTI系统的 $Z$ 变换分析法, 系统的级联与并联型结构;
7. 单边 $Z$ 变换, 增量线性系统的分析;

## 10.0 引言 (Introduction)

$Z$  变换与拉氏变换相对应，是离散时间傅立叶变换的推广。 $Z$  变换的基本思想、许多性质及其分析方法都与拉氏变换有相似之处。当然， $Z$  变换与拉氏变换也存在着一些重要的差异。

## 10.1 双边 Z 变换

### The z-Transform

#### 一. 双边Z变换的定义:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{其中 } z = re^{j\omega} \text{ 是一个复数。}$$

当  $r = 1$  时,  $z = e^{j\omega}$  即为离散时间傅立叶变换。

这表明: **DTFT**就是在单位圆上进行的**Z**变换。

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} = \mathbb{F}[x(n)r^{-n}]$$

可见: 对  $x(n)$  做 **Z** 变换就等于对  $x(n)r^{-n}$  做**DTFT**。

因此, **Z** 变换是对**DTFT**的推广。

## 二. Z变换的ROC:

Z变换与DTFT一样存在着收敛的问题。

1. 并非任何信号的Z变换都存在。
2. 并非Z平面上的任何复数都能使  $X(z)$  收敛。

Z平面上那些能使  $X(z)$  收敛的点的集合，就构成了  $X(z)$  的ROC。

例1.  $x(n) = a^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

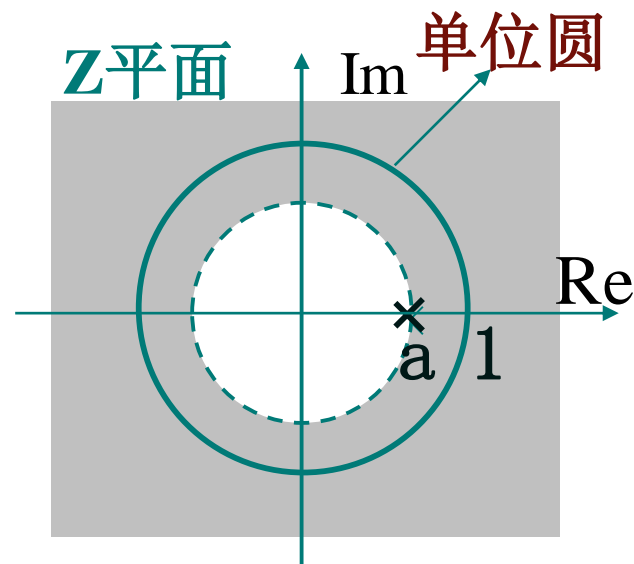
$|z| > |a|$  时收敛

当  $|a| < 1$  时,

$x(n)$  的DTFT存在

此时, ROC包括了单位圆。

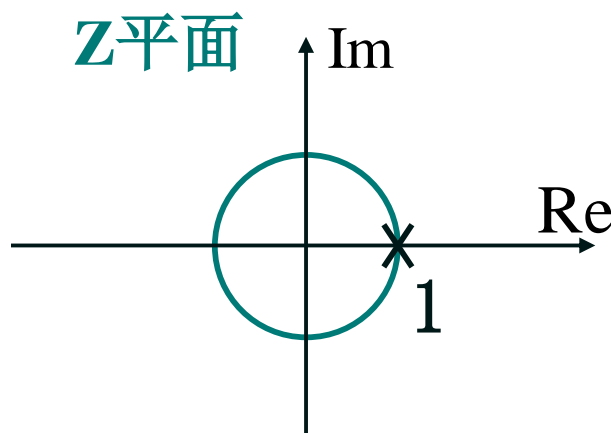
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad |z| > |a|$$



例2.  $x(n) = u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

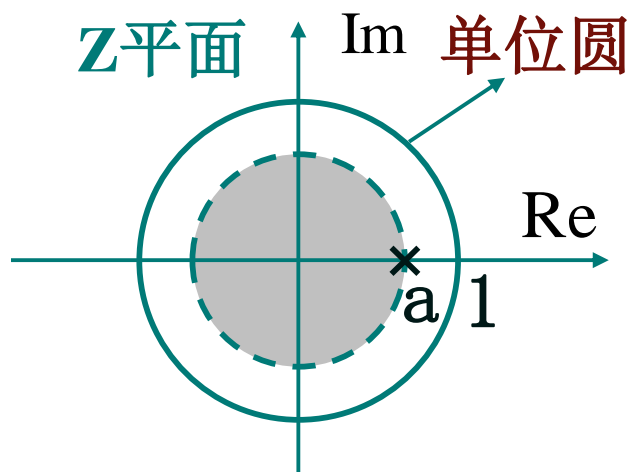
此时，**ROC**不包括单位圆，所以不能从  $X(z)$  简单通过将  $z \rightarrow e^{j\omega}$  得到  $X(e^{j\omega})$ 。



(例2的**ROC**)

例3.  $x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n \\ &= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| < |a| \end{aligned}$$



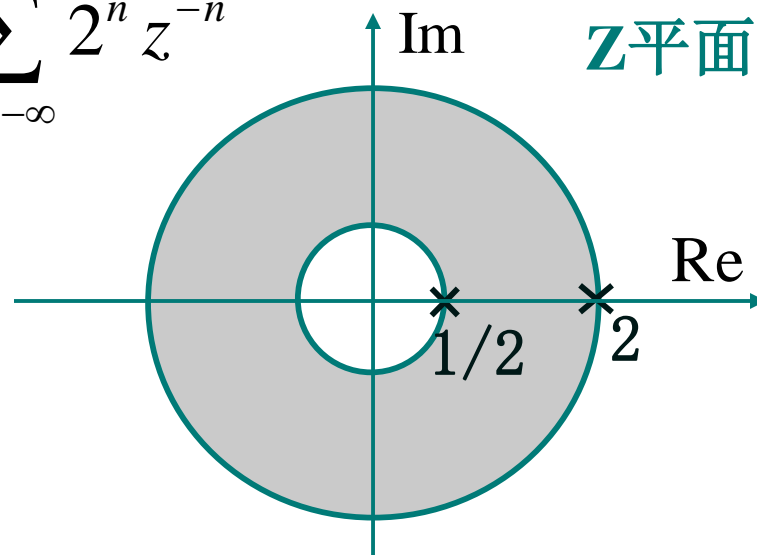


例4.  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2^n u(-n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$\text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 2$$



一般情况下,  $X(z)$ 的ROC是Z平面上一个以原点为中心的圆环。

## 结 论:

- 1) Z变换存在着收敛的问题, 不是任何信号都存在Z变换, 也不是任何复数Z都能使 $X(z)$ 收敛。
- 2) 仅仅由 $X(z)$ 的表达式不能唯一地确定一个信号, 只有 $X(z)$ 连同相应的ROC一道, 才能与信号 $x(n)$ 建立一一对应的关系。
- 3) Z变换的ROC, 一般是Z平面上以原点为中心的环形区域。

4) 如果  $x(n) = \sum_i x_i(n)$ , 则其**ROC**是各个  $x_i(n)$  的**ROC**的公共区域。若没有公共区域则表明  $x(n)$  的**Z**变换不存在。

5) 当  $X(z)$  是有理函数时, 其**ROC**的边界总是由  $X(z)$  的极点所在的圆周界定的。

6) 若  $X(z)$  的**ROC**包括单位圆, 则有

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

### 三. $X(z)$ 的几何表示—零极点图:

如果  $X(z)$  是有理函数, 将其分子多项式与分母多项式分别因式分解可以得到:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = M \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_p (z - z_p)}$$

由其全部的零、极点即可确定出  $X(z)$ , 最多相差一个常数因子  $M$ 。

因此，若在  $z$  平面上表示出  $X(z)$  全部的零极点，即构成  $X(z)$  的几何表示——零极点图。

如果在零极点图上同时标出ROC，则由该零极点图可以唯一地确定一个信号。

零极点图对描述LTI系统和分析LTI系统的特性，具有重要的用途。

## 10.2 Z 变换的ROC

### The Region of Convergence for the z-Transform

**ROC的特征:**

1.  $X(z)$ 的ROC是Z平面上以原点为中心的环形区域。
2. 在ROC内  $X(z)$  无极点。
3. 有限长序列的ROC是整个有限Z平面（可能不包括  $z=0$ ，或  $|z|=\infty$ ）。

由 
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n}$$

- 当  $N_2 > N_1 \geq 0$  时，在  $X(z)$  的展开式中，只有  $z$  的负幂项，故  $z$  不能为  $0$ ，但可以取  $\infty$ 。
- 当  $0 \geq N_2 > N_1$  时，在  $X(z)$  的展开式中，只有  $z$  的正幂项，故  $z$  不能为  $\infty$ ，但可以取  $0$ 。
- 当  $N_2 > 0, N_1 < 0$  时，在  $X(z)$  的展开式中，既有  $z$  的正幂项，也有负幂项，故  $z$  既不能为  $\infty$  也不能取  $0$ 。

4. 右边序列的**ROC**是某个圆的外部，但可能不包括 $|z| = \infty$ 。

设  $x(n)$  是右边序列，

由  $x(n)$ ， $N_1 < n < \infty$  有  $X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$

若  $|z| = r_0 \in \text{ROC}$  则， $\sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)r_0^{-n}| < \infty$

如果  $r_1 > r_0$ ，则

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)r_1^{-n}| = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)r_0^{-n}| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$



$$\leq \sum_{n=N_1}^{\infty} \left| x(n)r_0^{-n} \right| \cdot \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{N_1} < \infty \quad \therefore |z| = r_1 \in \text{ROC}$$

当  $N_1 < 0$  时, 由于  $X(z)$  展开式中有若干个  $z$  的正幂项, 此时  $|z|$  不能为  $\infty$ 。

5. 左边序列的 ROC 是某个圆的内部, 但可能不包括  $z = 0$ 。

若  $r_0 \in \text{ROC}$ ,  $r_1 < r_0$ , 则

$$\sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n)r_1^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n)r_0^{-n} \right| \cdot \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{N_1} < \infty \quad \therefore r_1 \in \text{ROC}$$

当 $N_1 > 0$ 时，由于 $X(z)$ 的展开式中包括有 $z$ 的负幂项，所以 $z$ 不能为零。

6. 双边序列的 $z$ 变换如果存在，则ROC必是一个环形区域。

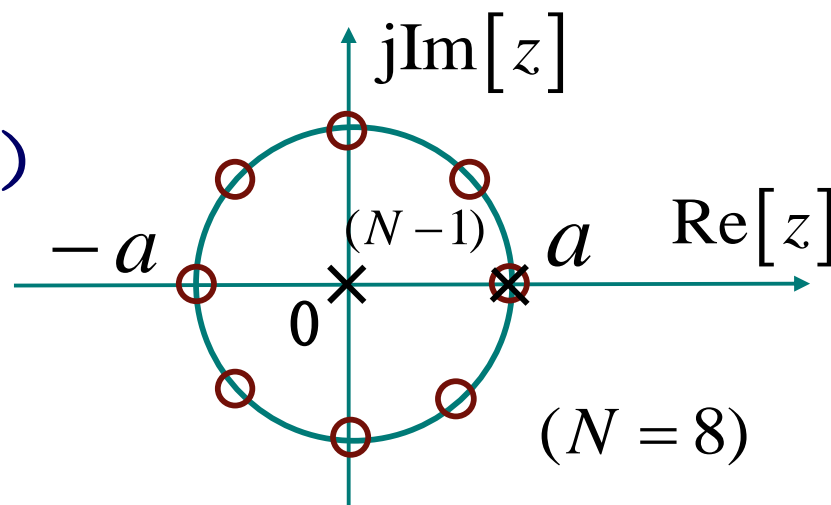
例1.  $x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad a > 0$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z - a)}$$

极点:  $z = a$  (一阶)

$z = 0$  (N-1阶)

零点:  $z = a e^{j\frac{2\pi}{N}k}$   
( $k = 0, 1 \dots N-1$ )



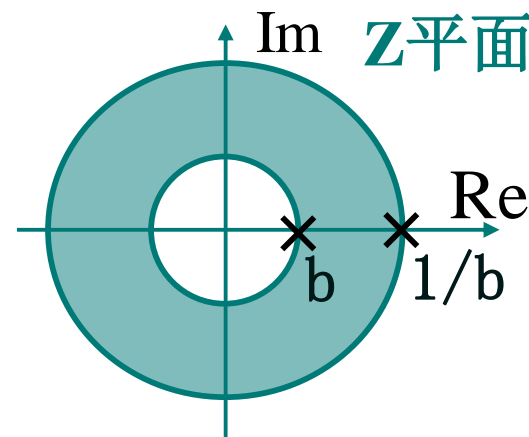
在  $z = a$  处, 零极点抵消, 使有限  $z$  平面内  
无极点。ROC:  $|z| > 0$

例2.  $x(n) = b^{|n|}$ ,  $b > 0$

$$x(n) = b^n u(n) + b^{-n} u(-n-1)$$

$$b^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

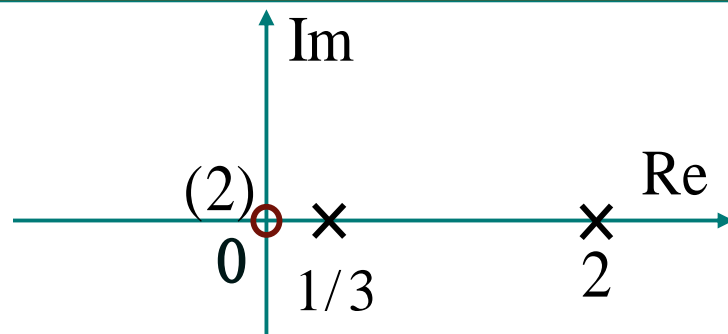
$$b^{-n} u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < b^{-1}$$



在  $b > 1$  时，两个子收敛域无公共部分，表明此时  $X(z)$  不存在。

$0 < b < 1$  时，**ROC** 为  $b < |z| < 1/b$

例3.  $X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$



极点:  $z_1 = \frac{1}{3}, \quad z_2 = 2$   
零点:  $z = 0$  (二阶) } 在有限Z平面上极点  
总数与零点总数相同

若其ROC为:

- ①  $|z| > 2$  则  $x(n)$  为右边序列, 且是因果的,  
但其傅立叶变换不存在。

②  $|z| < \frac{1}{3}$  时  $x(n)$  是左边序列，且是反因果的，其傅立叶变换不存在。

③  $\frac{1}{3} < |z| < 2$  时  $x(n)$  是双边序列，其傅立叶变换存在。

ROC是否包括 $|z| = \infty$ ，是 $x(n)$ 是否因果的标志。

ROC是否包括 $z = 0$ ，是 $x(n)$ 是否反因果的标志。

## 10.3 Z-反变换

### The Inverse Z-Transform

#### 一. Z-反变换:

$$\text{Q } X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$\therefore x(n)r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega})r^n e^{j\omega n} d\omega$$

$$\text{令 } z = re^{j\omega} \quad dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega$$

当  $\omega$  从  $0 \rightarrow 2\pi$  时,  $z$  沿着 ROC 内半径为  $r$  的圆变化一周。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

其中  $C$  是 ROC 中逆时针方向的圆周。

二. 反变换的求取:

1. 部分分式展开法:

当  $X(z)$  是有理函数时, 可将其展开为部分分式

$$X(z) = \sum_i \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}$$



- 步骤：
1. 求出 $X(z)$ 的所有极点 $a_i$ ；
  2. 将 $X(z)$ 展开为部分分式；
  3. 根据总的ROC，确定每一项的ROC；
  4. 利用常用变换对和Z变换性质求出每一项的反变换。

例： 
$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

将 $X(z)$ 展开为部分分式有：

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad \begin{array}{l} \text{ROC}_1 : |z| > 1/4 \\ \text{ROC}_2 : |z| < 1/3 \end{array}$$

$\text{ROC}_1 \quad \text{ROC}_2$

$$\therefore x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

## 2. 幂级数展开法：（长除法）

由 $X(z)$ 的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z) = \cdots + x(-n)z^n + \cdots + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(n)z^{-n} + \cdots$$

展开式中  $z^{-n}$  项的系数即为  $x(n)$ 。当  $X(z)$  是有理函数时，可以通过长除的方法将其展开为幂级数。

- ❖ 由于右边序列的展开式中应包含无数多个  $z$  的负幂项，所以要按降幂长除。
- ❖ 由于左边序列的展开式中应包含无数多个  $z$  的正幂项，所以要按升幂长除。
- ❖ 双边序列要先将其分成分别对应信号的右边和左边的两部分，再分别按上述原则长除。

例:  $X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$   $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$\text{ROC}_1$        $\text{ROC}_2$

$\text{ROC}_1 : |z| > 1/4$   
 $\text{ROC}_2 : |z| < 1/3$

所以前式按降幂长除，后式按升幂长除。

幂级数展开法的缺点是当  $X(z)$  较复杂（含多个极点时）难以得出  $x(n)$  的闭式。

幂级数展开法适合用来求解非有理函数形式  $X(z)$  的反变换。

**3. 留数法：** 对有理函数的  $X(z)$  由留数定理有：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_i \text{Res}[X(z) z^{n-1}, z_i]$$

$z_i$  是  $C$  内的极点。

$$n \geq 0 \text{ 时, } x(n) = \sum_i \text{Res}[X(z) z^{n-1}, z_i]$$

$z_i$  是  $C$  内的极点。

$$n < 0 \text{ 时, } x(n) = - \sum_i \text{Res}[X(z) z^{n-1}, z_i]$$

$z_i$  是  $C$  外的极点。

## 10.4. 由零极点图对离散时间傅立叶变换 几何求值

### Geometric Evaluation of the Fourier Transform from the Pole-Zero Plot

当ROC包括 $|z|=1$ 时，Z变换在单位圆上的情况就是  $X(e^{j\omega})$ ，因此也可以利用零极点图对其进行几何求值。

其方法与拉氏变换时完全类似：

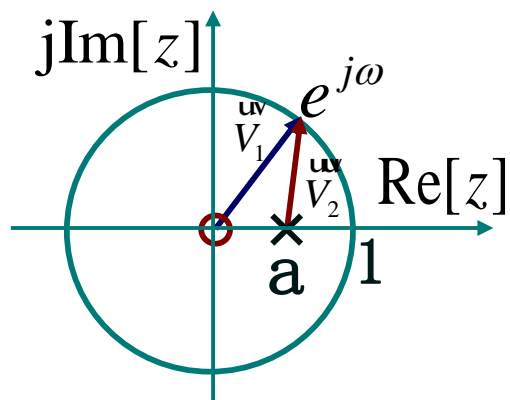
考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角变化的情况，即可反映系统的频率特性。

### 例1. 一阶系统

$$y(n) - ay(n-1] = x(n)$$

$$h(n) = a^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a$$



当 $|a| < 1$ 时，**ROC**包括单位圆。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\mathbf{u}}{V_1} \right| / \left| \frac{\mathbf{u}}{V_2} \right|$$



显然,  $\left| \frac{\mathbf{u}}{V_1} \right| = 1$ ,  $|H(e^{j\omega})|$  取决于  $\left| \frac{\mathbf{u}}{V_2} \right|$  的变化。

❖ 当  $0 < a < 1$  时,

在  $\omega = 0$  处,  $|H(e^{j\omega})|$  有最大值。

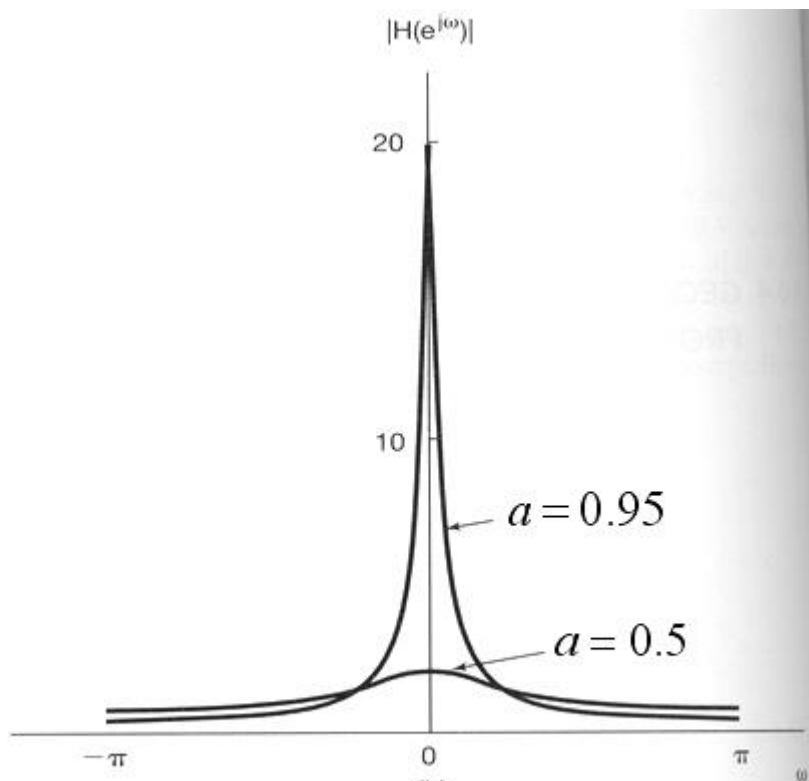
当  $\omega = \pi$  时,  $|H(e^{j\omega})|$  有最小值。



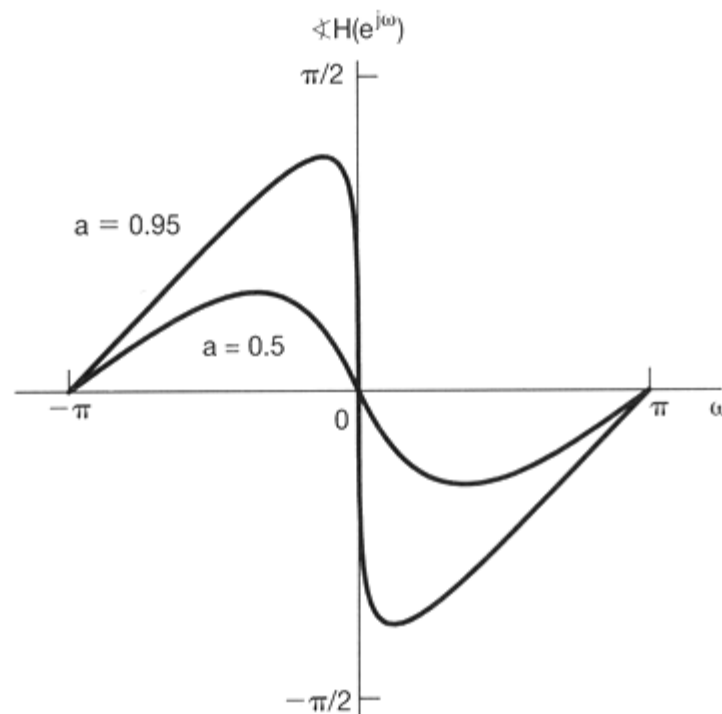
$|H(e^{j\omega})|$  随  $\omega$  呈单调变化。



一阶系统的频率特性:  $0 < a < 1$

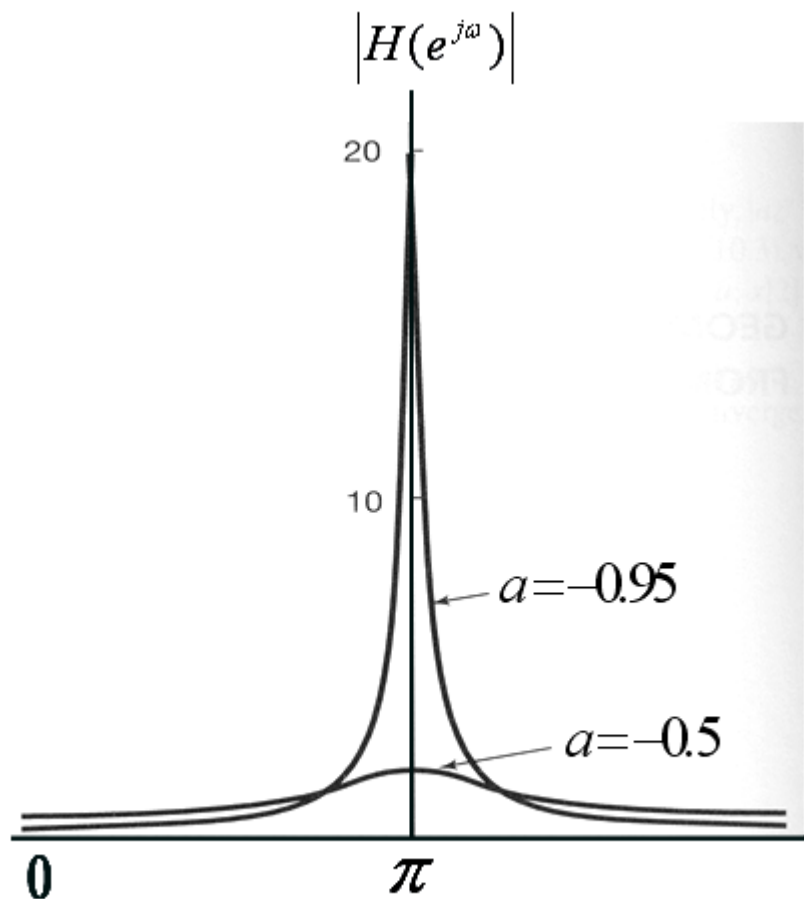


幅频特性

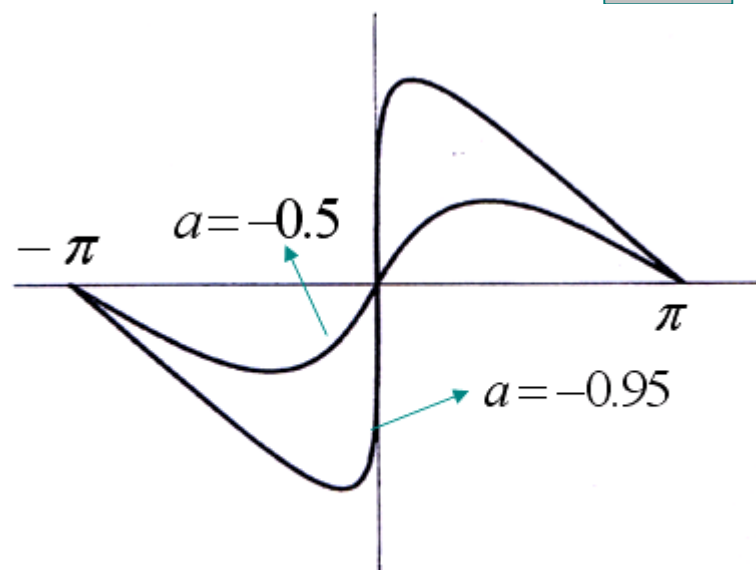
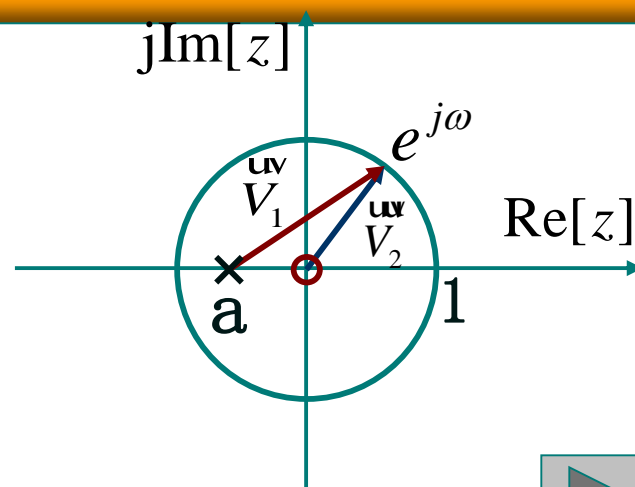


相频特性

❖ 当  $-1 < a < 0$  时,



幅频特性



相频特性

可以看出：

- $|a|$  越小，极点靠原点越近，系统的频率响应越平缓，系统的带宽越宽；此时  $h(n)$  衰减越快， $s(n)$  上升越快。
- $|a|$  越大，极点靠单位圆越近，系统频响越尖锐，频响的极大值越大，系统带宽越窄，相位的非线性程度越厉害。

**例2. 二阶系统:**

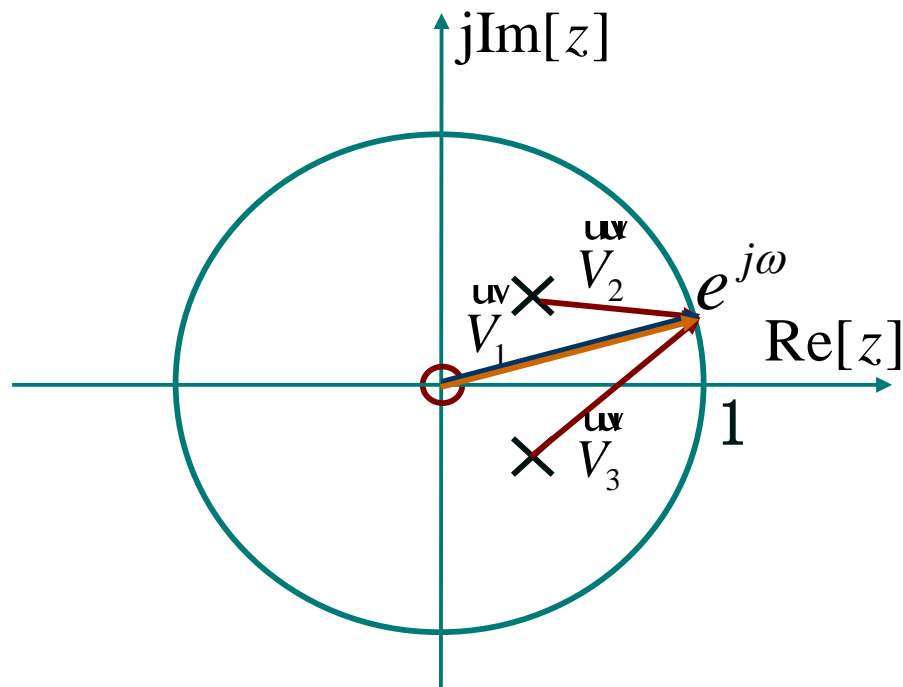
$$y(n) - 2r \cos \theta y(n-1) + r^2 y(n-2) = x(n)$$

$$0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{系统欠阻尼})$$

$$h(n) = r^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$\text{极点: } z_{1,2} = r e^{\pm j\theta} \quad \text{零点: } z = 0 \quad (\text{二阶})$$



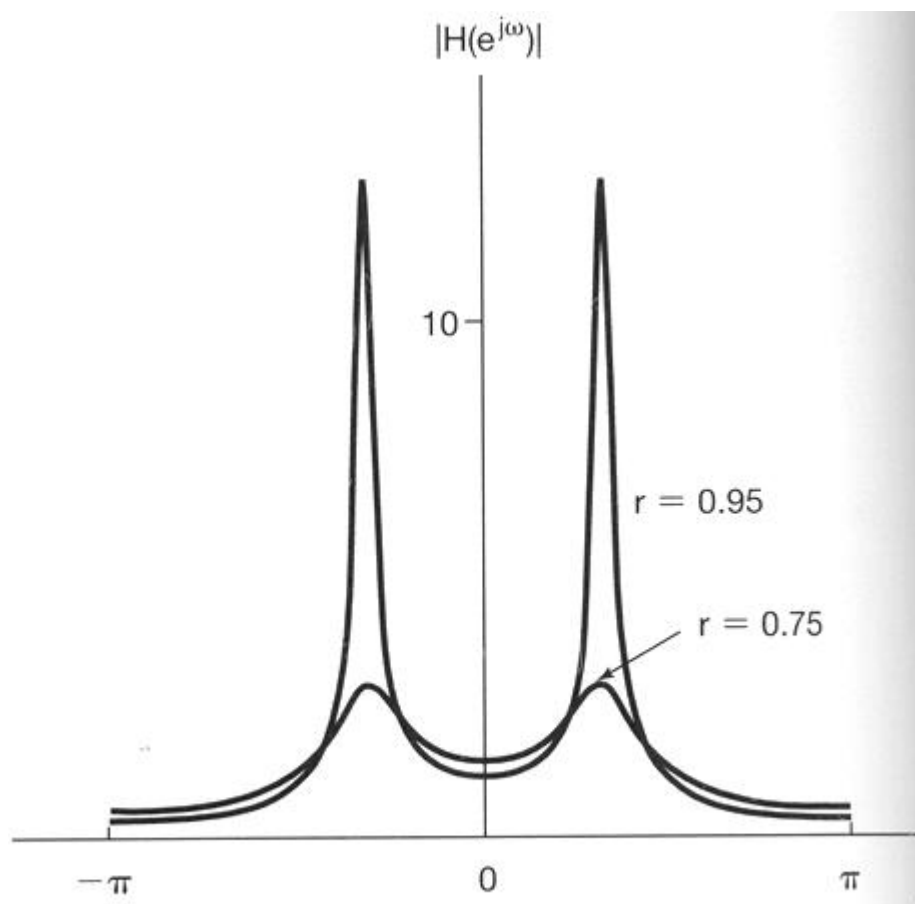
考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角的变化情况，即可得到二阶系统的频率特性。

当 $\omega$ 从 $0 \rightarrow \pi$ 时, 在靠近 $\omega = \pm\theta$ 处频率响应会出现极大值。

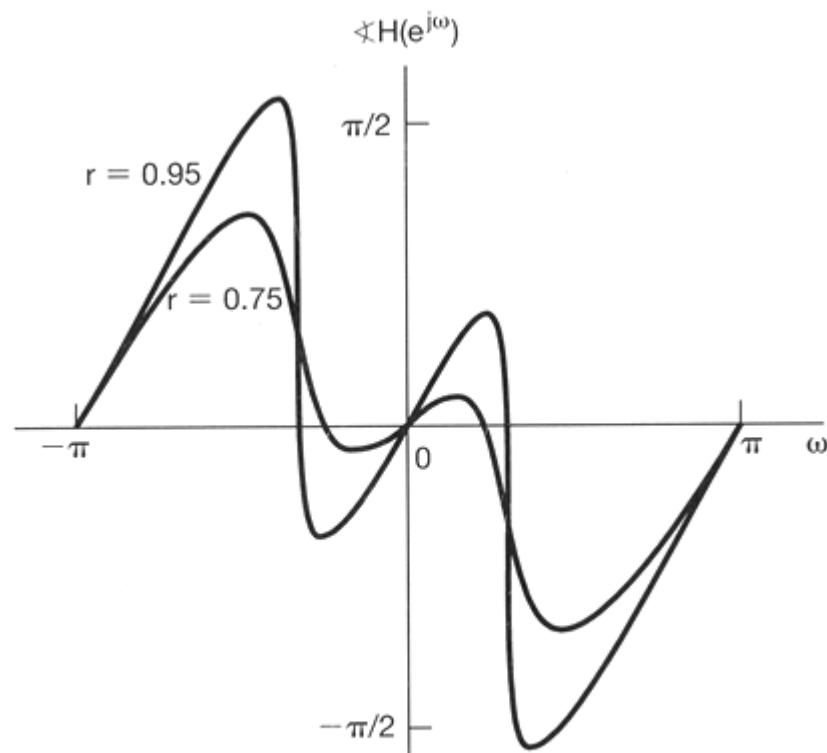
若 $r$ 越接近于1,  $|H(e^{j\omega})|$ 的峰值越尖锐。由于极点远离原点,  $h(n)$ 和 $s(n)$ 的变化速率越慢。

随着 $r$ 减小, 极点逐步靠近原点, 频率响应趋于平坦, 而 $h(n)$ 和 $s(n)$ 的变化速率会加快。

二阶系统的频率特性:  $0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq \pi$

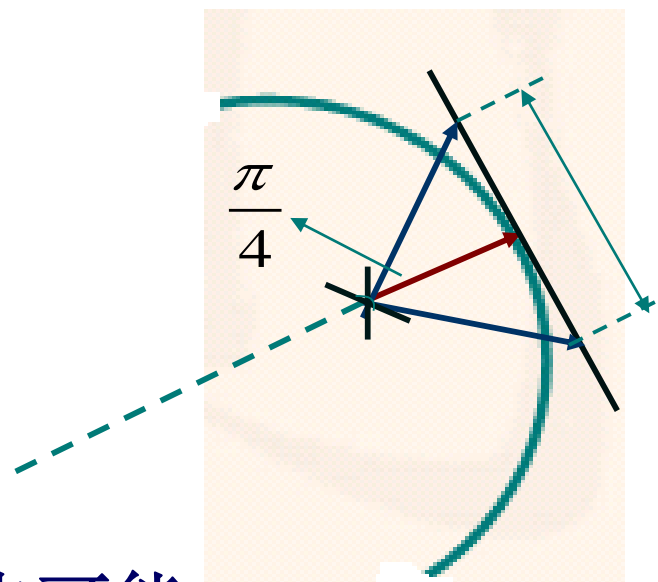


幅频特性



相频特性

当极点很靠近单位圆时，  
也可以从零极点图粗略确  
定系统的带宽。



更一般的情况，二阶系统也可能  
有两个实数极点，此时系统处于过阻尼状态。  
其特性相当于两个一阶系统级联的结果。

（二阶系统具有重阶实数极点的情况）





## 10.5 Z变换的性质

### Properties of the Z-transform

Z变换的许多性质与DTFT的性质相似，其推论方法也相同。这里主要讨论其ROC的变化。

#### 1. 线性:

$$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \quad \text{ROC: } R_1$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \quad \text{ROC: } R_2$$

则  $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$

ROC: 包括  $R_1 \cap R_2$

❖ 如果在线性组合过程中出现零极点相抵消，  
则**ROC**可能会扩大。

## 2. 时移：

若  $x(n) \leftrightarrow X(z)$       ROC:  $R$

则  $x(n - n_0) \leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

ROC:  $R$  但在  $z = 0$  和  $|z| = \infty$  可能会有增删。

❖ 由于信号时移可能会改变其因果性，故会使**ROC** 在  $z = 0$ ， $|z| = \infty$  有可能改变。

### 3. Z域尺度变换:

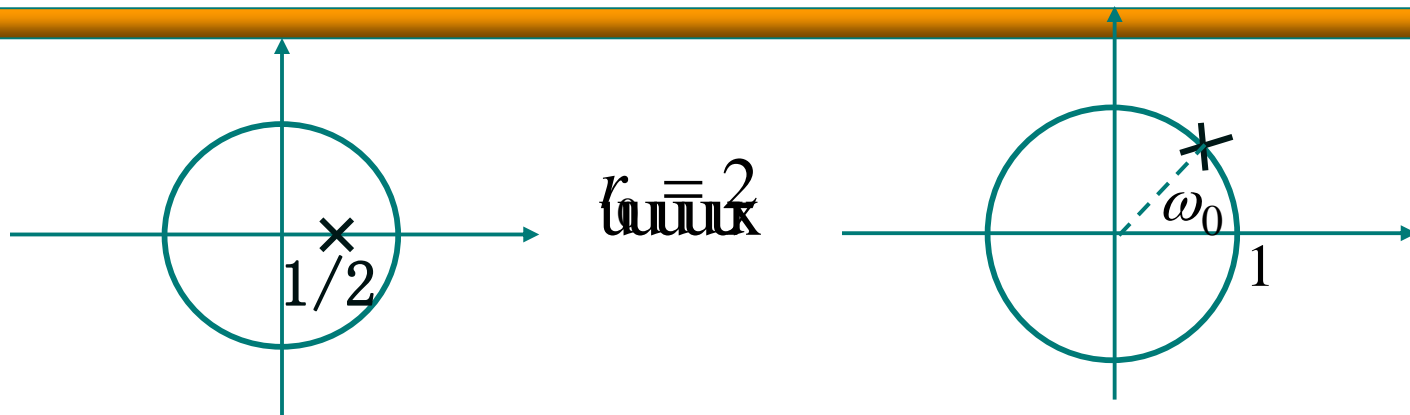
若  $x(n) \leftrightarrow X(z)$       ROC:  $R$

则  $z_0^n x(n) \leftrightarrow X(z/z_0)$       ROC:  $|z_0|R$

Q  $|z| \in R$  时  $X(z)$  收敛, 故  $|z/z_0| \in R$  时,  $X(z/z_0)$  收敛。

$\therefore |z| \in |z_0|R$       当  $z_0 = e^{j\omega_0}$  时, 即为移频特性。

若  $z_0$  是一般复数  $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$ , 则  $X(z/z_0)$  的零极点不仅要将在  $X(z)$  的零极点逆时针旋转一个角度  $\omega_0$ , 而且在径向有  $r_0$  倍的尺度变化。



#### 4. 时域反转:

若  $x(n) \leftrightarrow X(z)$       ROC:  $R$

则  $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$       ROC:  $1/R$  (收敛域边界倒置)

❖ 信号在时域反转, 会引起  $X(z)$  的零、极点分布按倒量对称发生改变。

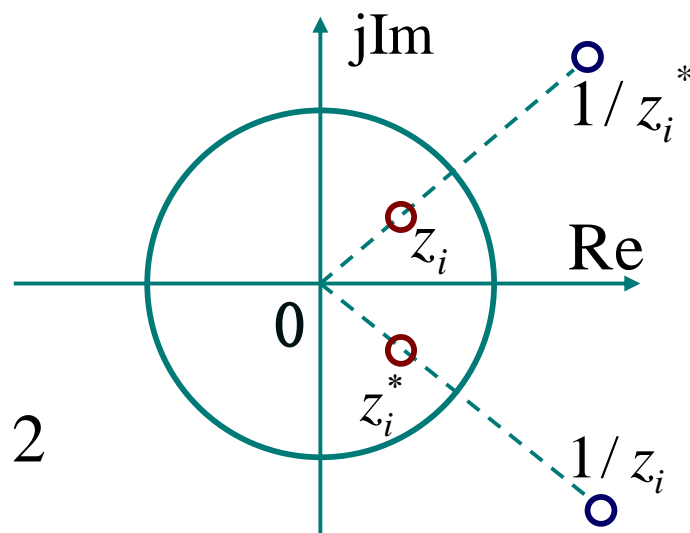
❖ 如果  $z_i$  是  $X(z)$  的零/极点, 则  $1/z_i$  就是  $X(z^{-1})$  的零/极点。由于  $z_i^*$  也是  $X(z)$  的零/极点, 因此  $1/z_i^*$  也是  $X(z^{-1})$  的零/极点。

即:  $X(z)$  与  $X(z^{-1})$  的零极点呈共轭倒量对称。

例: 若  $X(z)$  的ROC为

$$\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$$

则  $X(z^{-1})$  的ROC为  $\frac{3}{2} < |z| < 2$



## 5. 时域内插:

若  $x(n) \leftrightarrow X(z)$     ROC:  $R$

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n/k) & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其他 } n \end{cases}$$

则  $x_k(n) \leftrightarrow X(z^k)$     ROC:  $R^{1/k}$

证明:

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) z^{-rk} = X(z^k)$$

## 6. 共轭对称性:

$$\text{若 } x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \quad \text{ROC: } R$$

❖ 当  $x(n)$  是实信号时,  $x^*(n) = x(n)$  于是有

$$X(z) = X^*(z^*)$$

表明如果  $X(z)$  有复数零极点, 必共轭成对出现。

## 7. 卷积性质:

$$\text{若 } x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \quad \text{ROC: } R_1$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \quad \text{ROC: } R_2$$

则  $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$  ROC **包括**  $R_1 \cap R_2$

如果在相乘时出现零极点抵消的情况则**ROC**可能会扩大。

$$\begin{aligned} x_1(n) * x_2(n) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)X_2(z)z^{-m} = X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

该性质是LTI系统Z变换分析法的理论基础。



## 8. Z域微分:

$$\text{若 } x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC: } R$$

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数  $X(z)$  的反变换, 或具有高阶极点的  $X(z)$  的反变换。

$$\text{例1. } X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Q} \frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \leftrightarrow a(-a)^{n-1}u(n-1) = nx(n)$$

$$\therefore x(n) = \frac{a}{n} (-a)^{n-1} u(n-1) = -\frac{1}{n} (-a)^n u(n-1)$$

**例2:**  $X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$

$$\mathcal{Q} a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-az^{-1}} \right) = -\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad \therefore x(n) = na^n u(n)$$

## 9. 初值定理:

若  $x(n)$  是因果信号, 且  $x(n) \leftrightarrow X(z)$

则  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

证明: 将  $X(z)$  按定义式展开有:

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(n)z^{-n} + \cdots$$

显然当  $z \rightarrow \infty$  时有  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$

## 10. 终值定理：

若  $x(n)$  是因果信号，且  $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ， $X(z)$  除了在  $z=1$  可以有一阶极点外，其它极点均在单位圆内，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

证明：

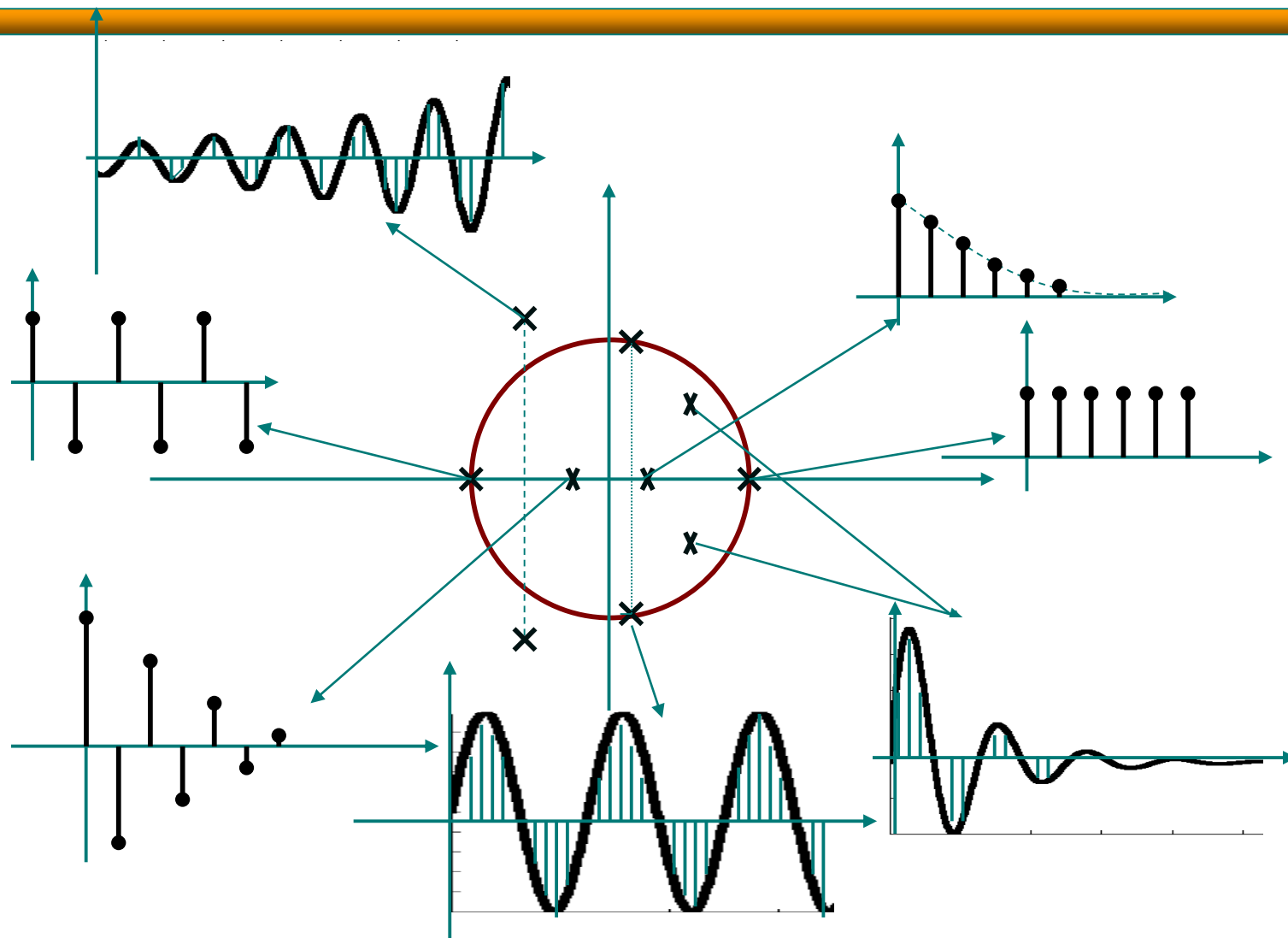
Q  $x(n) = 0, n < 0$ ,  $x(z)$  除了在  $z=1$  可以有单阶极点外，其它极点均在单位圆内，

$\therefore (z-1)X(z)$  在单位圆上无极点

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=-1}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-1}^m [x(n+1) - x(n)] \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} [x(0) - x(-1) + x(1) - x(0) + \cdots + x(m+1) - x(m)] \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} x(m+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)\end{aligned}$$

这其实表明：如果  $x(n)$  有终值存在，则其终值等于  $X(z)$  在  $z=1$  处的留数。

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \text{Res}[X(z), 1]$$



**$z$ 平面上极点位置与信号模式的关系示意图**

## 10.6 常用信号的Z变换对 (自学)

### Some Common Z-Transform Pairs

## 10.7 利用Z变换分析与表征LTI系统

### Analysis and Characterization of LTI Systems Using Z-Transforms

#### 一. 系统特性与 $H(z)$ 的关系:

LTI系统的特性可以由 $h(n)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 描述, 因而也可以由 $H(z)$ 连同ROC来表征。

$H(z)$ 称为系统函数。系统的特性应该在系统函数中有所表现。

1. 因果性：如果LTI系统是因果的，则  $n < 0$  时  $h(n) = 0$ ，所以， $H(z)$ 的ROC是最外部极点的外部，并且包括  $|z| = \infty$ 。
2. 稳定性：若LTI系统稳定，则  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ ， $h(n)$ 的DTFT存在。表明单位圆在  $H(z)$  的ROC内。即 $H(z)$ 的ROC必包括单位圆。



因此，因果稳定的LTI系统其  $H(z)$  的全部极点必须位于单位圆内，反之亦然。

当  $H(z)$  是关于  $z$  的有理函数时，因果性要求  $H(z)$  的分子阶数不能高于分母阶数。

## 二. LTI系统的Z变换分析法:

- 1) 由  $x(n)$  求得  $X(z)$  及其 ROC:  $R_1$
- 2) 由系统的描述求得  $H(z)$  及其 ROC:  $R_2$

- 3) 由  $Y(z) = X(z)H(z)$  得出  $Y(z)$  并确定它的ROC包括  $R_1 \cap R_2$ 。
- 4) 对  $Y(z)$  做反变换得到  $y(n)$ 。

### 三. 由LCCDE描述的LTI系统的 $H(z)$ :

由差分方程描述的LTI系统，其方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

对方程两边做Z变换可得:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad \text{是一个有理函数。}$$

$H(z)$ 的**ROC**需要通过其它条件确定，如：

- 1.系统的因果性或稳定性。
- 2.系统是否具有零初始条件等。

**例：**由下列差分方程做出网络结构，并求其系统函数  $H(z)$  和单位脉冲响应  $h(n)$ 。

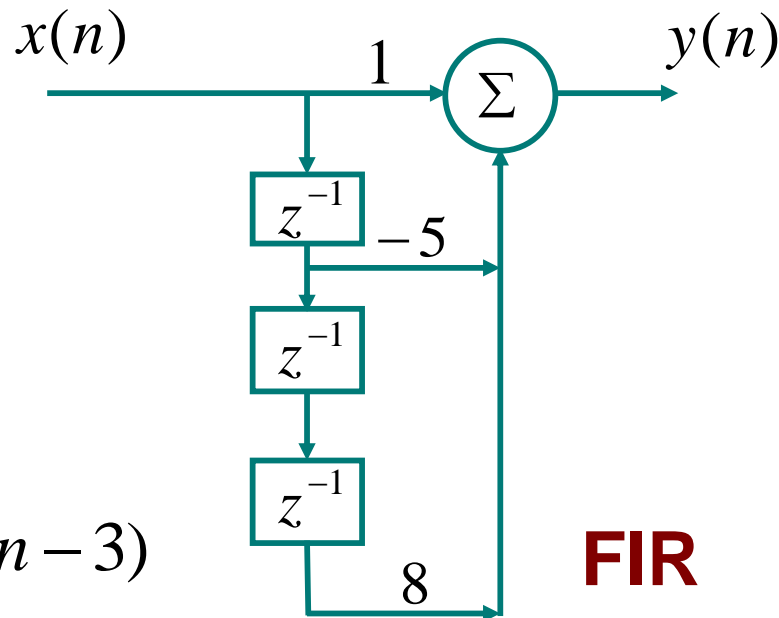
$$(1) \quad y(n] = x(n] - 5x(n-1] + 8x(n-3]$$

**解：**由方程可得

$$Y(z) = (1 - 5z^{-1} + 8z^{-3})X(z)$$

$$H(z) = 1 - 5z^{-1} + 8z^{-3}$$

$$h(n] = \delta(n] - 5\delta(n-1] + 8\delta(n-3]$$



$$(2) \quad y(n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = x[n]$$

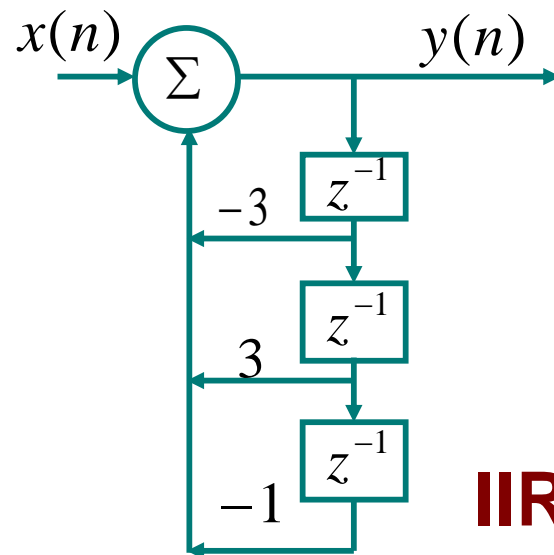
解：由方程可得

$$(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3})Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^3}$$

利用Z变换的性质可得

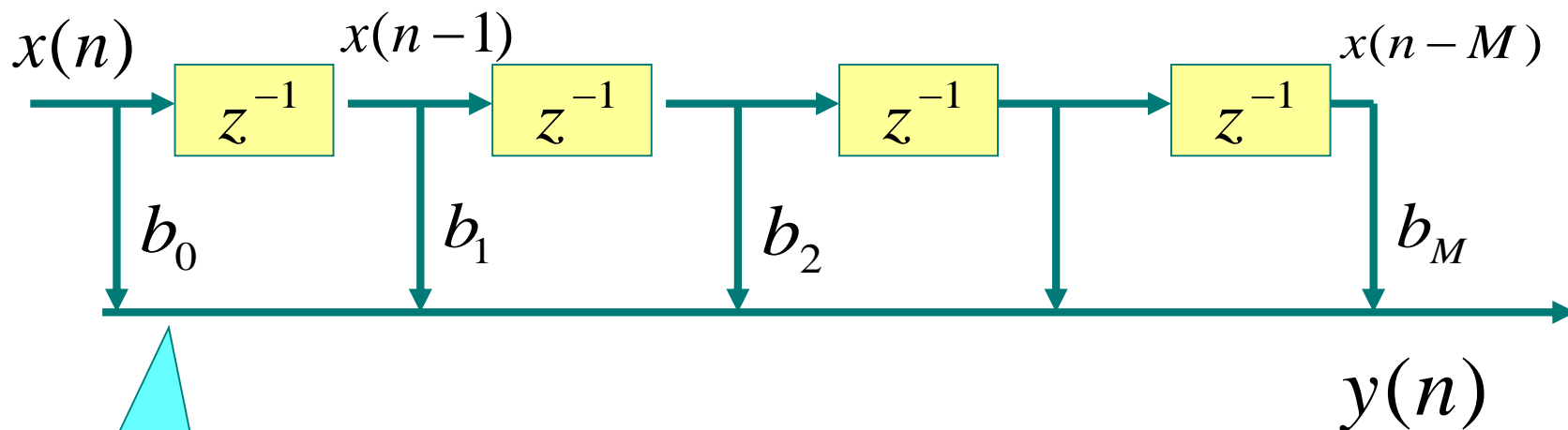
$$h[n] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u[n]$$



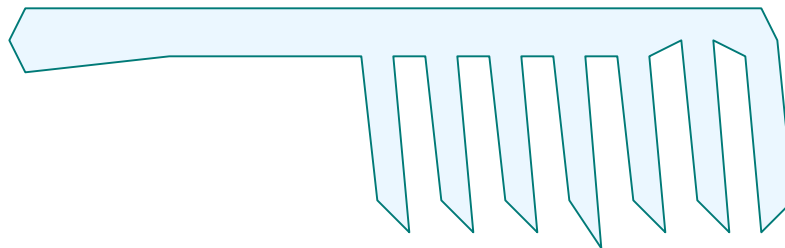
## 非递归数字滤波器(FIR)

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$H(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$



梳形滤波器

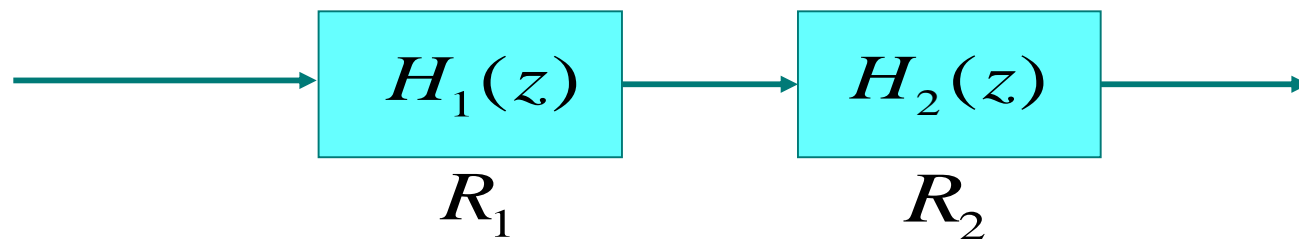


## 10.8 系统函数的代数属性与系统的级联、并联结构

### System Function Algebra and Block Diagram Representations

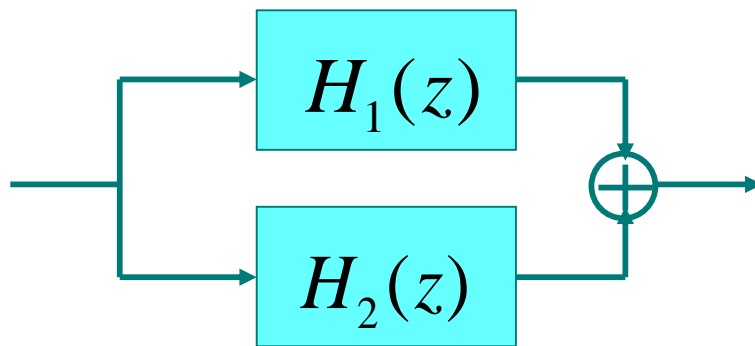
一. 系统互联的系统函数:

1. 级联:



$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad \text{ROC 包括 } R_1 \cap R_2$$

## 2. 并联:

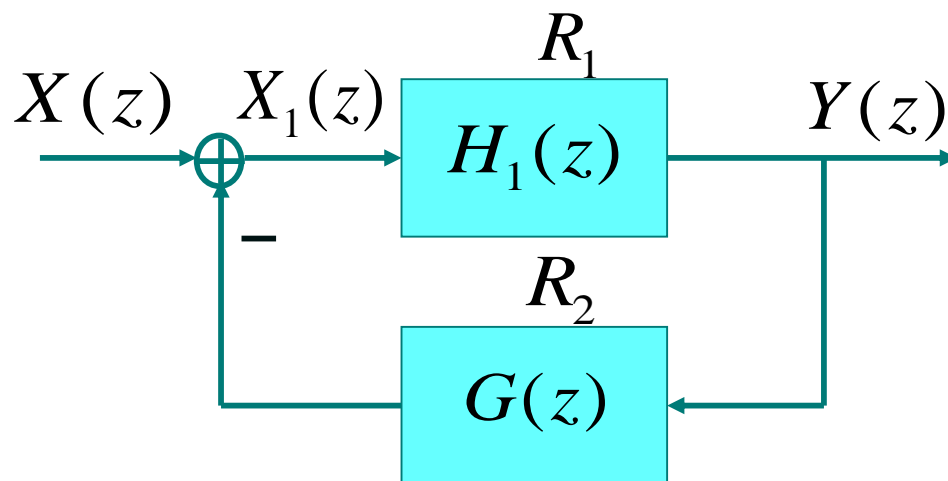


$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

**ROC**包括  $R_1 \cap R_2$

## 3. 反馈联接:

由系统框图可  
列出如下方程:





$$X_1(z) = X(z) - Y(z)G(z)$$

$$Y(z) = X_1(z)H_1(z)$$

$$= X(z)H_1(z) - Y(z)H_1(z)G(z)$$

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)G(z)} \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$

## 二. LTI系统的级联与并联结构:

由LCCDE描述的LTI系统，其系统函数为有理函数，可以将其因式分解或展开为部分分式。

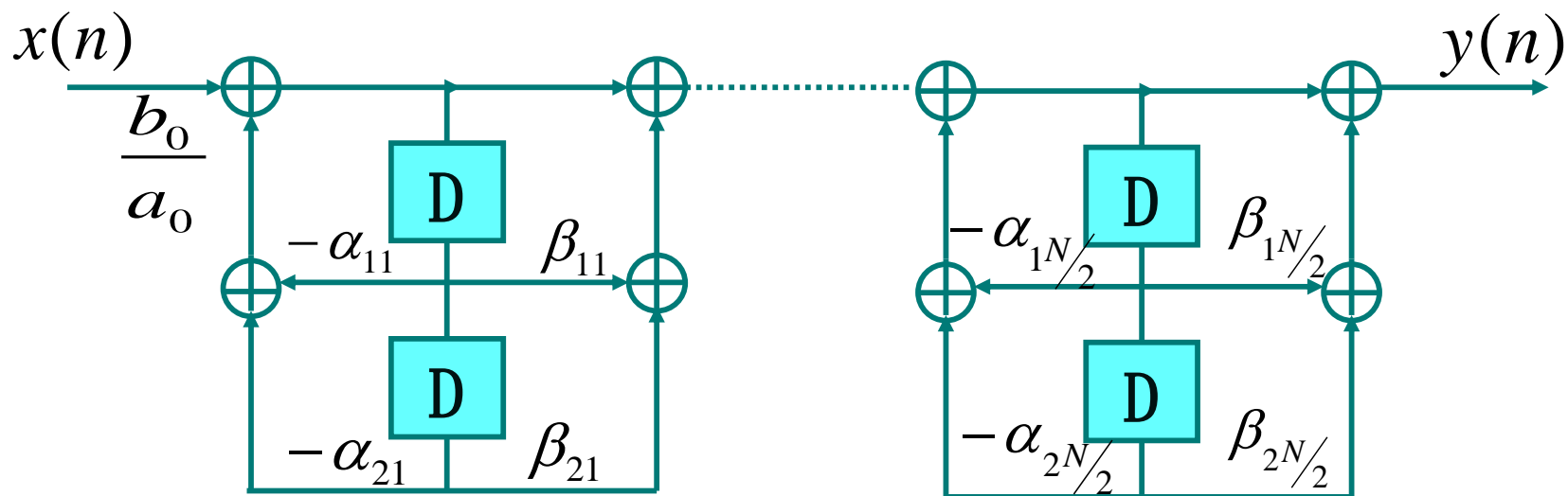
## 1. 级联型:

将 $H(z)$ 因式分解, 在无重阶零极点时可得:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^N \frac{1 + \mu_k z^{-k}}{1 + \eta_k z^{-k}} \quad \mathbf{N \text{ 为偶数时}}$$
$$= \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} = \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^{N/2} H_k(z)$$

其中 $H_k(z)$ 是二阶（或一阶）系统函数。

由此即可得系统的级联结构:



**LTI系统的级联型结构**

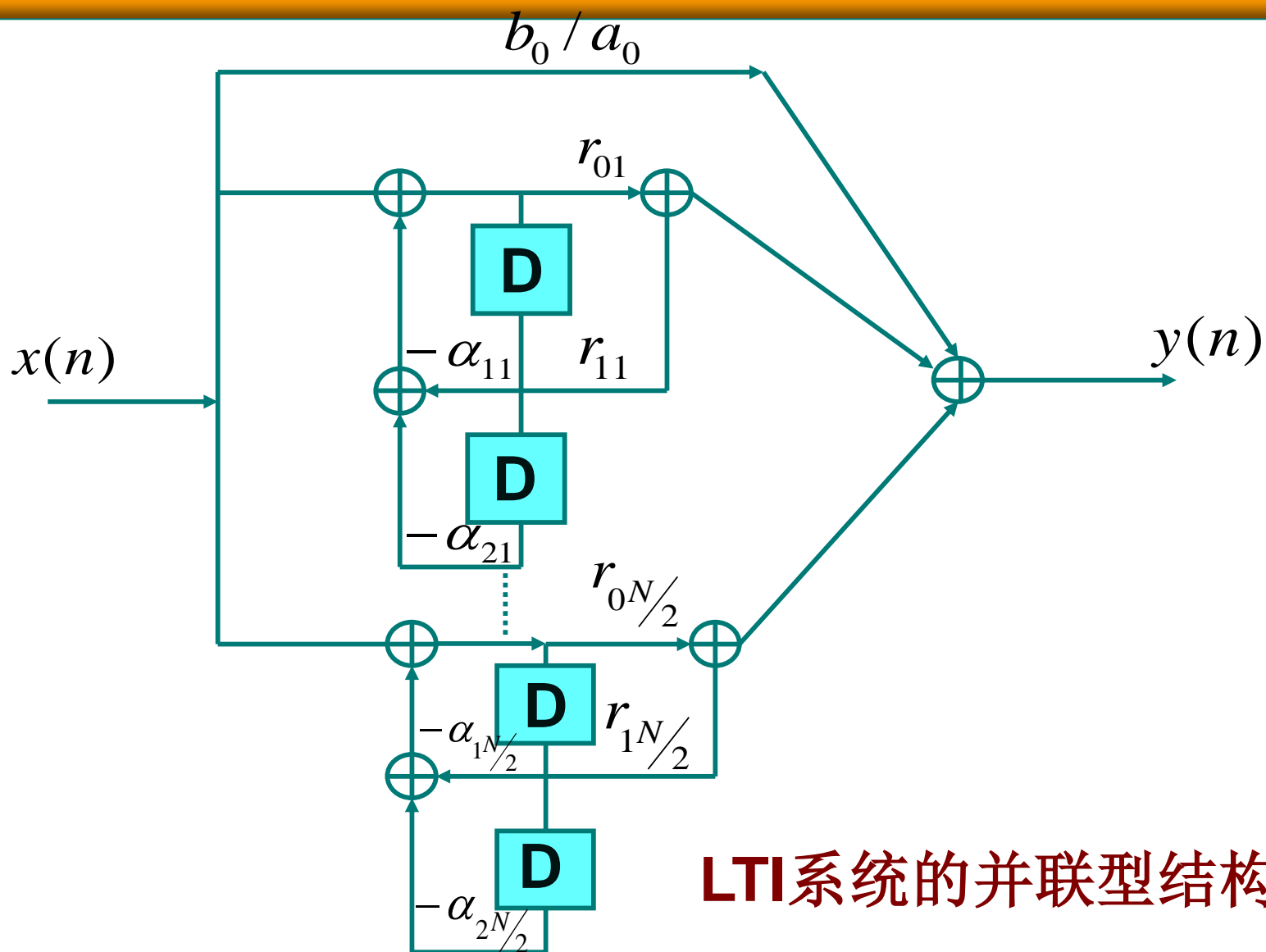
## 2. 并联型:

将 $H(z)$ 展开为部分分式, 在无重阶极点时有

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 + \eta_k z^{-1}} \quad \mathbf{N \text{ 为偶数时}}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{N/2} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{N/2} H_k(z)$$

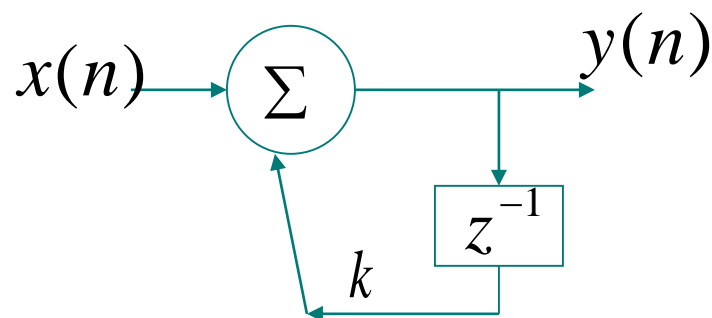


**LTI系统的并联型结构**

例：已知系统函数为  $H(z) = \frac{z}{z-k}$

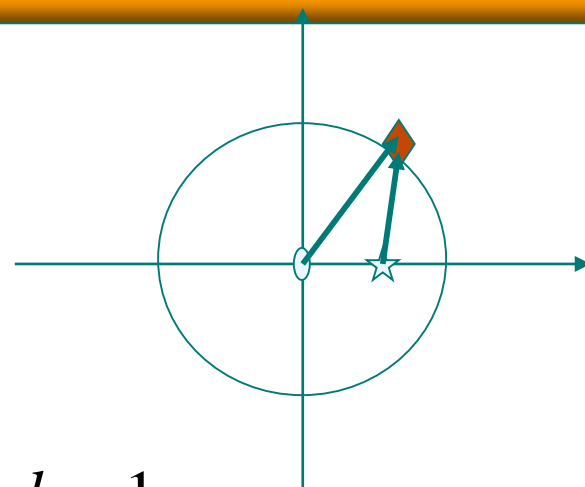
- 求：（1）写出对应的差分方程；  
（2）画出系统结构图  
（3）求系统的频率响应，并画出  $k=0, 0.5, 1$  三种情况下系统的幅度响应和相位响应

解：  $H(z) = \frac{z}{z-k} = \frac{1}{1-kz^{-1}}$   $y(n) - ky(n-1) = x(n)$



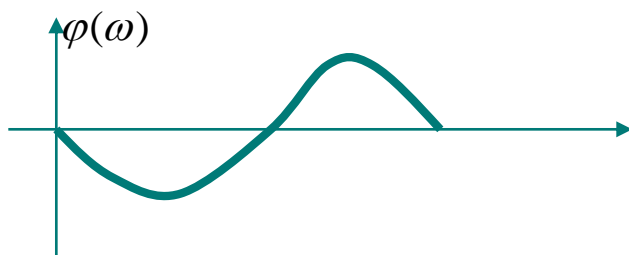
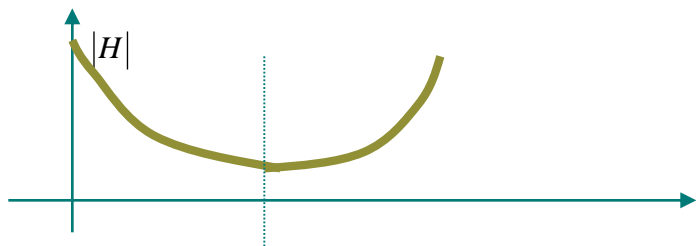
(1)  $k = 0 \quad H(z) = 1$

$$H(e^{j\omega}) = 1$$



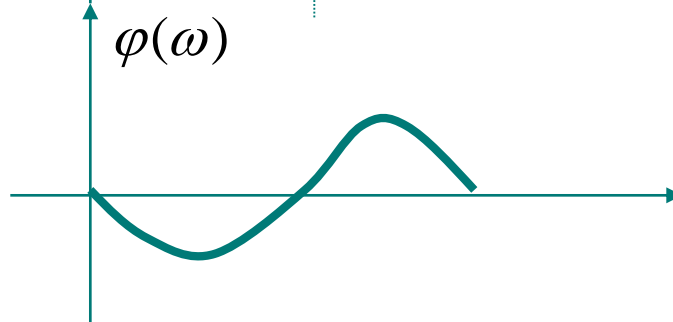
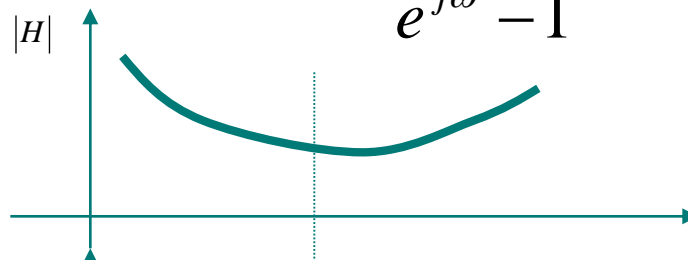
(2)  $k = 0.5$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0.5}$$



(3)  $k = 1$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1}$$



## 10.9 单边Z变换:

### The Unilateral Z-Transform

#### 一. 单边Z变换:

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

单边Z变换是双边Z变换的特例，也就是因果信号的双边Z变换。因此单边Z变换 $\chi(z)$ 的ROC一定是最外部极点的外部，并且包括 $|z| = \infty$ 。



所以在讨论单边Z变换时，不再强调其ROC。  
它的反变换也一定与双边Z变换的反变换一致。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \chi(z) z^{n-1} dz$$

如果信号  $x(n)$  不是因果序列，则其双边Z变换  $X(z)$  与单边Z变换  $\chi(z)$  不同。

**例1:**  $x(n) = a^n u(n)$

对其做双边Z变换有：

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

对其做单边Z变换有：

$$\chi(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad \text{显然} \quad \chi(z) = X(z)$$

**例2.**  $x(n) = a^{n+1}u(n+1)$

对其做双边Z变换有：  $X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$

对其做单边Z变换有：

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

显然  $\chi(z) \neq X(z)$

这是因为  $x(n)$  在  $n < 0$  的部分对双边Z变换起作用，而对单边Z变换不起作用所致。

## 二. 单边Z变换的性质：

只要所涉及的信号是因果信号，单边Z变换除了时移特性与双边Z变换略显不同外，其它性质与双边Z变换的情况是一致的。

时移特性:

若  $x(n) \leftrightarrow \chi(z)$

则  $x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}\chi(z) + x(-1)$

$x(n+1) \leftrightarrow z\chi(z) - zx(0)$

**Proof:**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} &= \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)z^{-(m+1)} \\ &= x(-1) + z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} \\ &= z^{-1}\chi(z) + x(-1)\end{aligned}$$

同理可得:

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}\chi(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

**Proof:**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} &= \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)} - x(0)z = z\chi(z) - zx(0)\end{aligned}$$

同理可得:

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2\chi(z) - z^2x(0) - zx(1)$$

单边Z变换在将LCCDE变换为代数方程时，  
可以自动将方程的初始条件引入，因而在解决  
增量线性系统问题时特别有用。

### 三. 利用单边Z变换分析增量线性系统：

$$y(n) + 3y(n-1) = x(n),$$

$$x(n) = u(n), \quad y(-1) = 1$$

$$\text{则 } \gamma(z) + 3[z^{-1}\gamma(z) + y(-1)] = \chi(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}}$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}}[\chi(z) - 3]$$

$$= \frac{\chi(z)}{1+3z^{-1}} + \frac{-3}{1+3z^{-1}} = H(z)\chi(z) + \frac{-3}{1+3z^{-1}}$$

零状态响应
零输入响应
零输入响应

$$= \frac{1/4}{1-z^{-1}} - \frac{9/4}{1+3z^{-1}}$$

$$\therefore y(n) = \left[ \frac{1}{4} - \frac{9}{4}(-3)^n \right] u(n) = \frac{1}{4} [1 - 9(-3)^n] u(n)$$

$$= \frac{1}{4} [1 - (-3)^{n+2}] u(n)$$

强迫响应

自然响应

## 10.10 小结: Summary

1. 讨论了对离散时间信号和LTI系统进行Z变换分析的方法，整个讨论方法及大部分结论与第九章相对应。
2. 与拉氏变换的情况对照，可以发现S平面与Z平面之间存在着一种影射关系， $z = e^{sT}$  就是这种联系。

将连续时间信号 $x_c(t)$ 采样，可以得到：



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

对其做拉氏变换有： $X_p(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-snT}$

对采样所得到的样本序列  $x(n) = x_c(nT)$  做Z变换有：

$$x(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)z^{-n}$$

比较两式，可以得出S平面与Z平面之间有：

$$z = e^{sT}$$

$$Q \ z = re^{j\omega}, s = \sigma + j\Omega \quad \therefore r = e^{\sigma T}, \omega = \Omega T$$

映射过程:

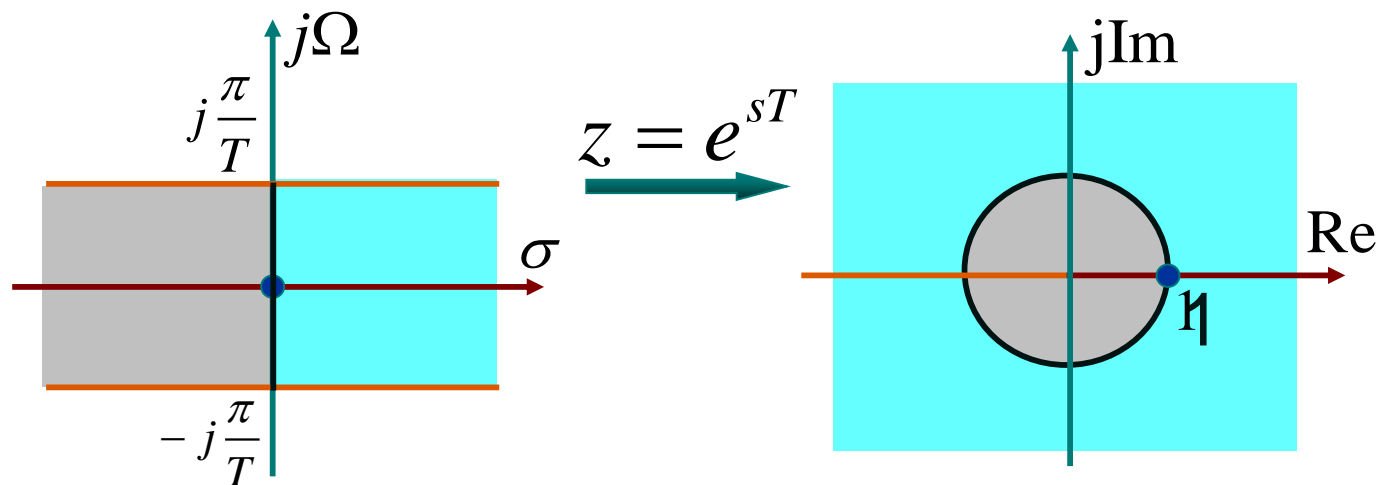
$$\sigma < 0, \quad r < 1$$

$$\sigma > 0, \quad r > 1$$

$$\sigma = 0, \quad r = 1$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$\omega = 0, \quad \Omega = 0$$



这种映射关系在数字信号处理，特别是数字系统设计中是非常重要的。明确了这种关系就很容易对 $Z$ 变换与拉氏变换的关系及差异之处有更清楚的认识。

3. 利用 $Z$ 变换分析LTI系统，较之DTFT具有更方便、更广泛适用的优点。

4. 单边 $Z$ 变换是分析增量线性系统的有力工具。

## 作业

# 10.6	10.8	10.12	10.15	
# 10.17	10.22	10.27	10.29	10.31
# 10.20	10.34	10.46	10.48	

本章习题内容校对

题 46(a)中, “ $H_1(z) = X(z) / s(z)$ ” 应为  $H_1(z) = X(z) / S(z)$ 。