



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

线性规划导论 Introduction to Linear Programming (LP)

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- ▶ LP问题的基本概念
- ▶ 可行域与基本可行解

举例 (1)



列奥尼德·康托罗维奇（《生产组织与计划的数学方法》，1939）

（生产计划问题）在金属制品零件加工中，设有三个铣床、三个六角车床和一个自动机床共同生产由两个零件组成的某产品。机床的生产率见下表。问：如何安排每日生产计划以获得当天成品的最大产量？

机床组	机床数	每个机床的生产率 (/天)	
		零件I	零件II
铣床	3	10	20
六角车床	3	20	30
自动车床	1	30	80

举例 (2)



George Dantzig
(1947)

(运输问题) 现要从两个仓库运送原料到三个工厂。具体情况如下表。求最优 (运费最小) 的运输方案?

运费 (元/吨)		工厂			库存 (吨)
		1	2	3	
仓库	1	2	1	3	50
	2	2	2	4	30
需求 (吨)		40	15	25	

线性规划的一般形式

$D = \emptyset$: 不可行

$D \neq \emptyset$: 无界
或有最优解

$$\max(\min) \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, p$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = p+1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, q$$

$$x_j \geq 0, \quad j = q+1, \dots, n$$

自由变量

价值系数 c_j 、价值向量 c

约束矩阵 (系数矩阵) A 、右端向量 b

可行解 x 、可行域 D

LP问题的标准型

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

一般形式 \rightarrow 标准形式?

将一般形式转化为标准形式

$$\text{Max} \rightarrow \text{Min}$$

$$\leq \rightarrow =$$

$$\geq \rightarrow =$$

$$\cong \rightarrow ?$$

例：化以下问题为标准型

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 + 5x_2 \\s.t. & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0\end{array}$$

Outline

- ▶ LP问题的基本概念
- ▶ 可行域与基本可行解

例：解如下线性规划问题

$$\begin{array}{ll}\min & z = x_1 - x_2 \\s.t. & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\& x_1 + x_2 \leq 5 \\& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$

图解法

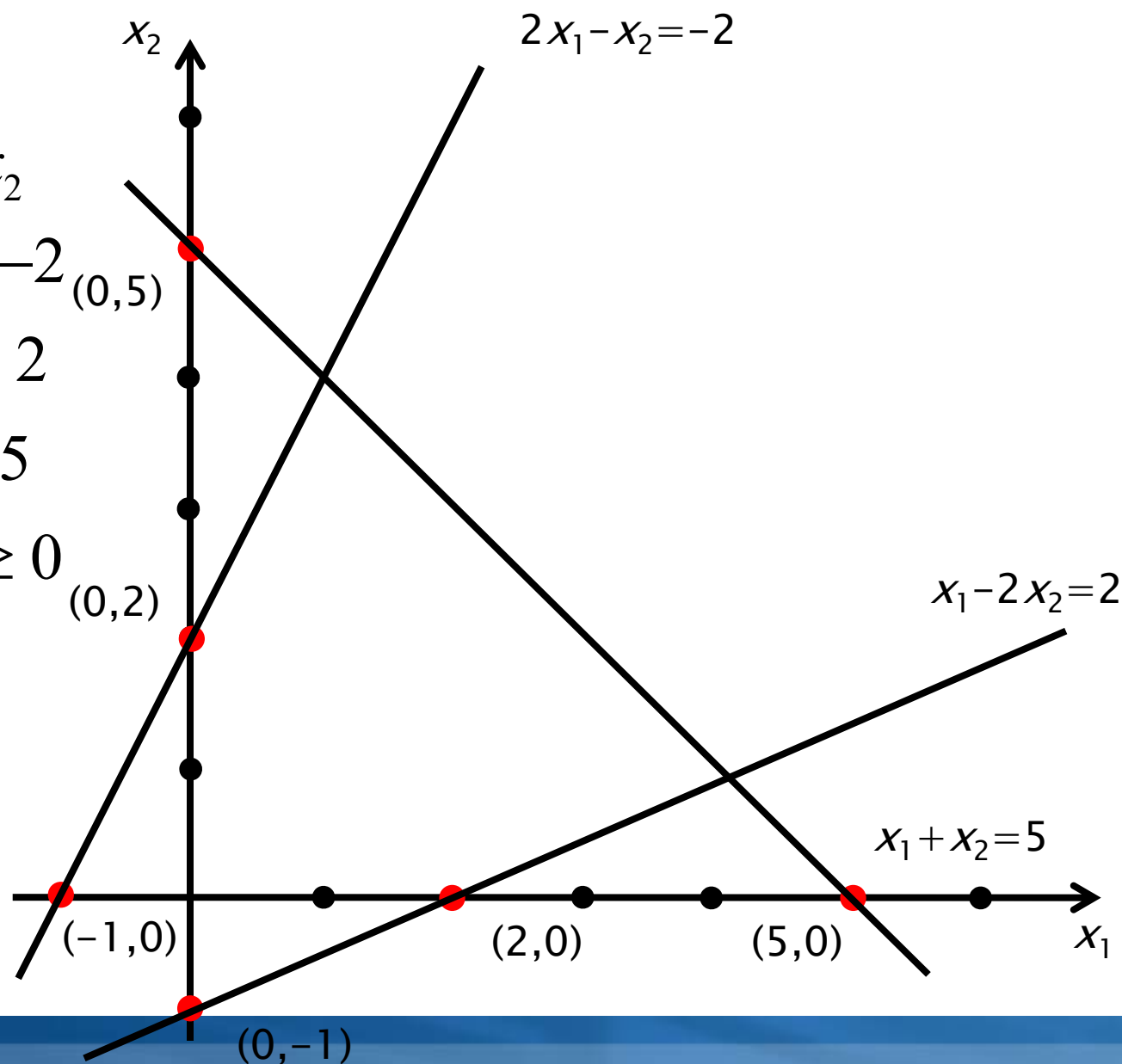
$$\min \quad z = x_1 - x_2$$

$$s.t. \quad 2x_1 - x_2 \geq -2 \quad (0,5)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (0,2)$$



图解法

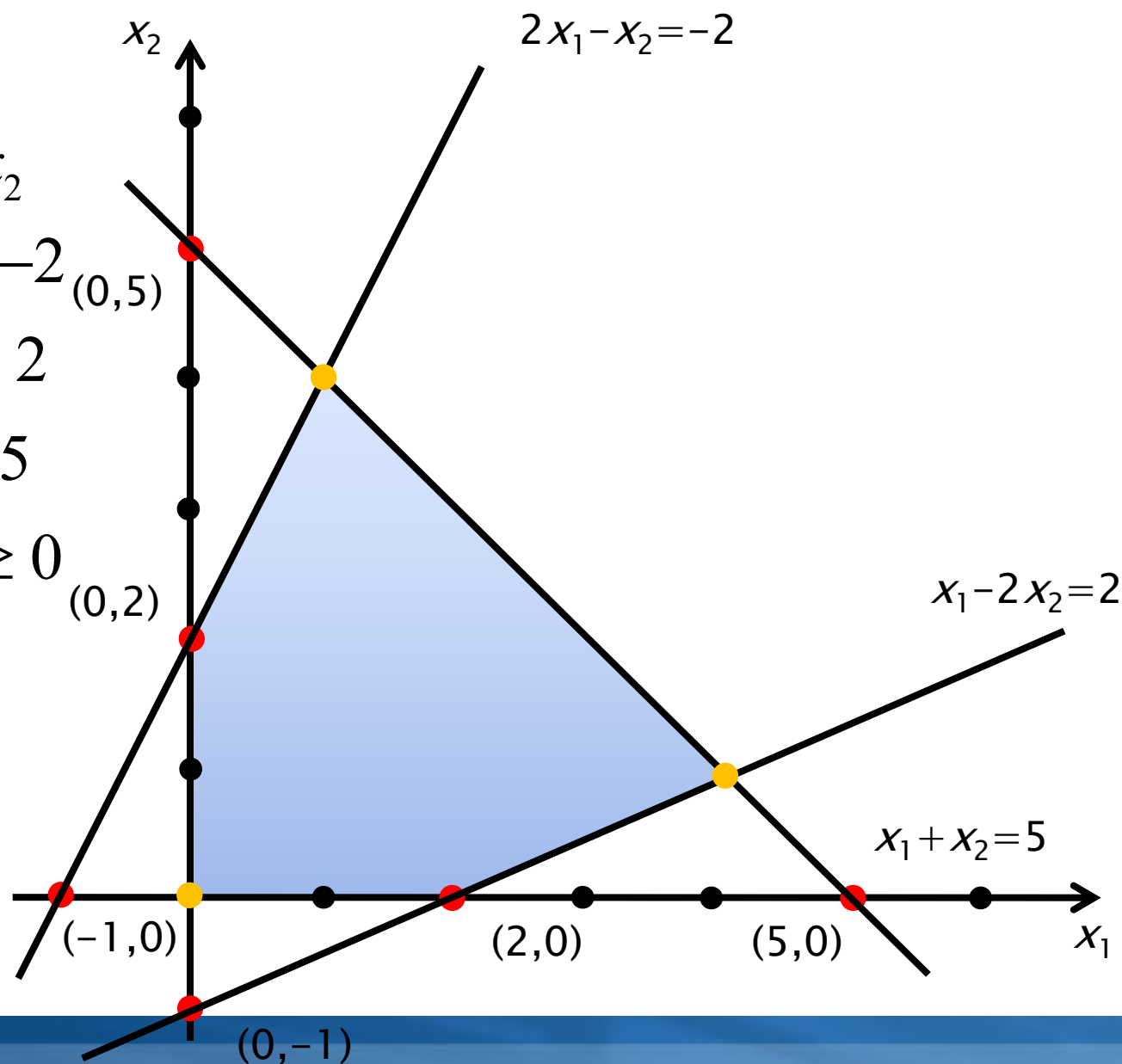
$$\min \quad z = x_1 - x_2$$

$$s.t. \quad 2x_1 - x_2 \geq -2 \quad (0,5)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

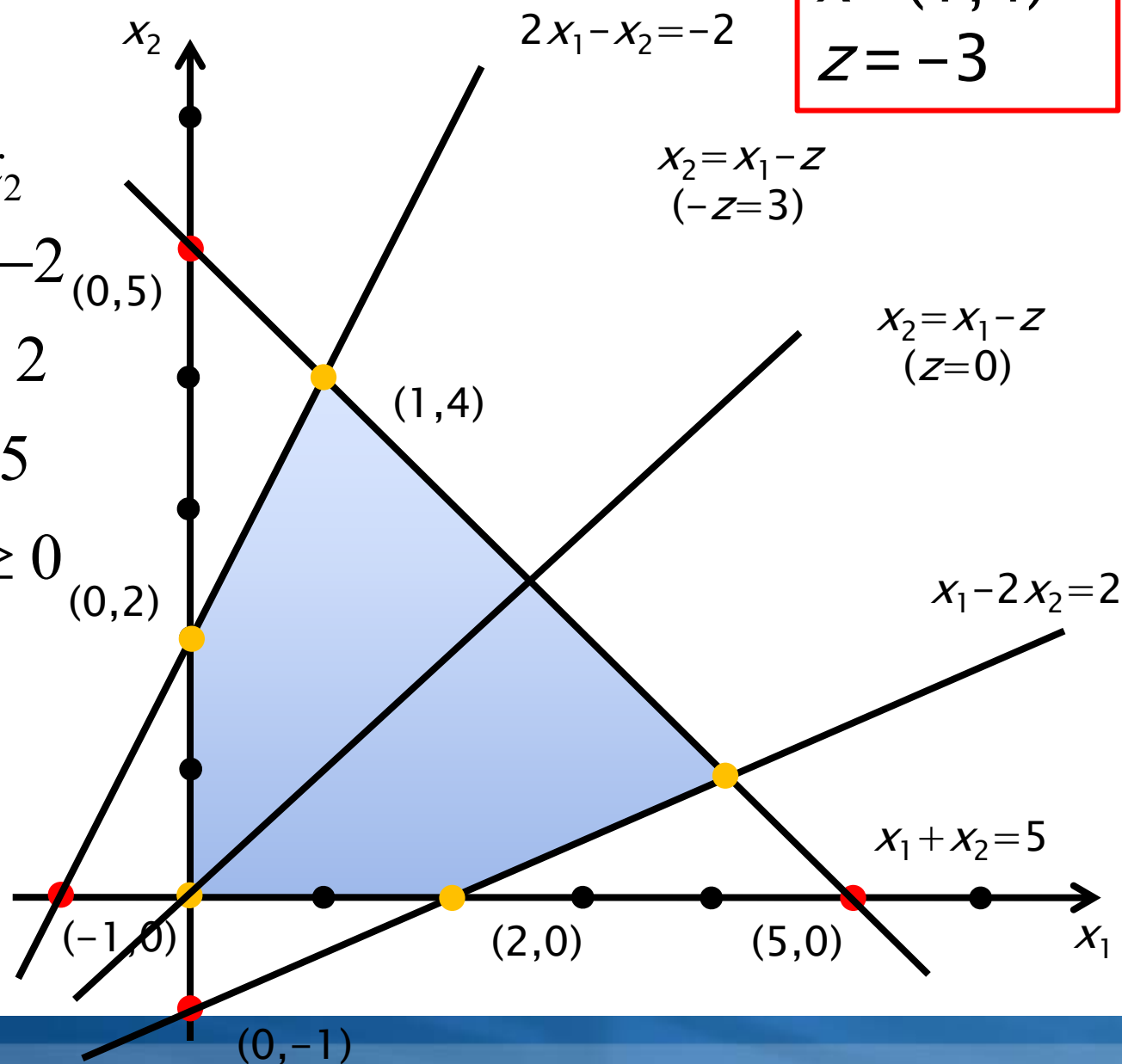
$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (0,2)$$



图解法

$$\begin{array}{ll}\min & z = x_1 - x_2 \\s.t. & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\& x_1 + x_2 \leq 5 \\& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



图解法

$$x = (4, 1)^T$$
$$z = 3$$

max

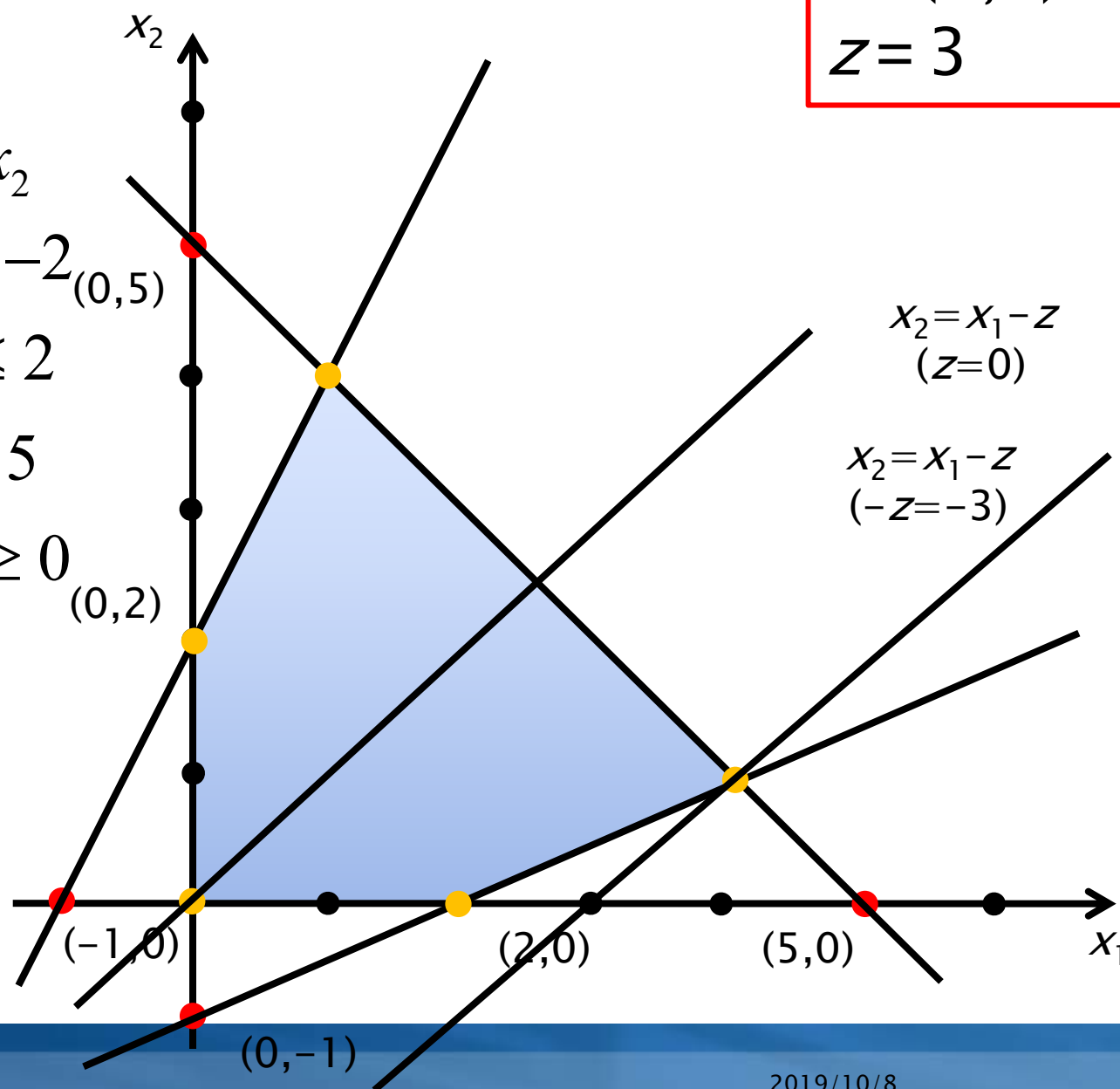
$$z = x_1 - x_2$$

s.t. $2x_1 - x_2 \geq -2$ $(0, 5)$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
 $(0, 2)$



图解法

min

$$z = 2x_1 - x_2$$

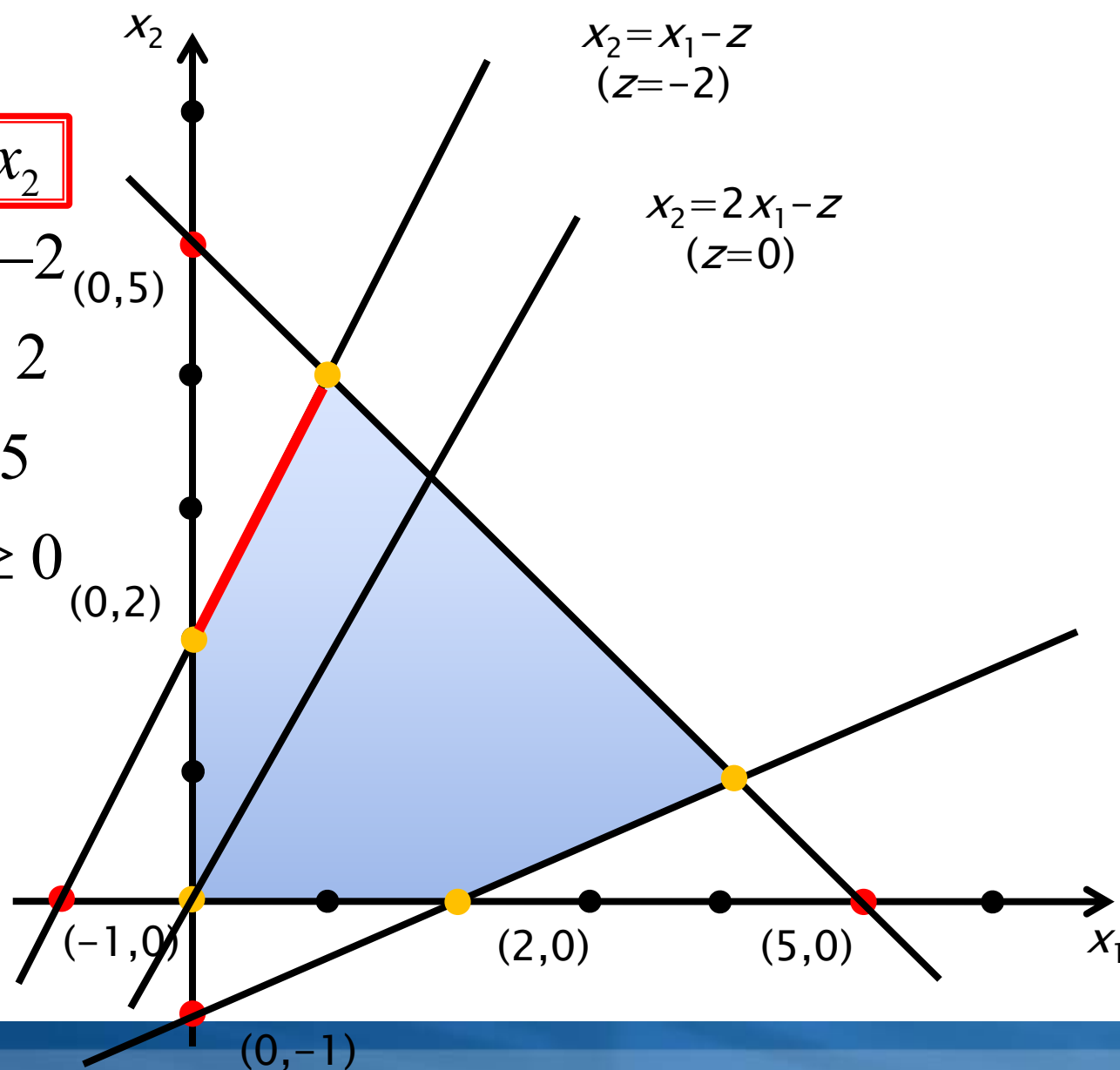
s.t.

$$2x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



两个重要结论

- ▶ 线性规划的**可行域** D 是若干个半平面的交集，它形成了一个有界或无界的**凸多边形**
- ▶ 对于给定的线性规划问题，如果它有**最优解**，最优解总可以在 D 的某个**顶点**上达到

可行区域的几何结构

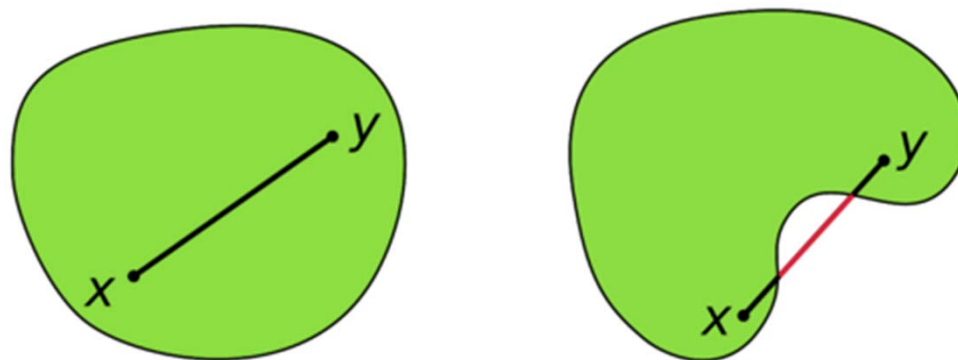
$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

$$D = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$$

凸集

► 定义:

$S \subset R^n$, 若 $\forall x, y \in S, \lambda \in [0, 1]$
 $\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$, 则称 S 是凸集



► 性质: 任意多个凸集的交集仍然是凸集

多面凸集

- ▶ 超平面: $b \in R, a \in R^n$ 若, 称集合
$$H = \{x \in R^n \mid a^T x = b\}$$

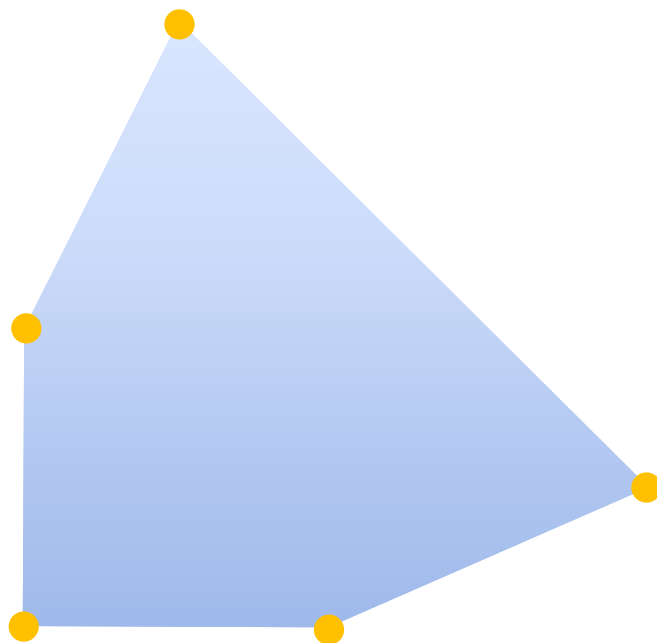
为 R^n 中的一个超平面

- ▶ 闭半空间: $H^+ = \{x \in R^n \mid a^T x \geq b\}$
 $H^- = \{x \in R^n \mid a^T x \leq b\}$

- ▶ 多面凸集: 有限多个闭半空间的交集
$$D = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$



顶点



设 S 为凸集, $x \in S$ 。若 $\forall y, z \in S$, 且 $y \neq z$,
 $\forall \lambda \in (0, 1)$
 $\Rightarrow x \neq \lambda y + (1 - \lambda)z$, 则称 x 是 S 凸集的一个顶点

基本可行解-定义 (1)

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad x = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

假设矩阵 (A, b) 的秩为 $\text{rank}(A) = m$ 。当我们将矩阵 A 的列进行适当调整以后, 记 $A = [B, N]$, 其中矩阵 B 是一个 $m \times m$ 维的可逆矩阵, 而矩阵 N 是一个 $m \times (n-m)$ 维的矩阵。

令 $x = \{x_B, x_N\}^T$, 则 $Ax = b$ 可记作 $Bx_B + Nx_N = b$
解得 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

基本可行解-定义 (2)

- ▶ 基（基矩阵）： B , A 的任意线性无关列构成的矩阵
- ▶ 基变量： x_{B_i} ($i=1, \dots, m$)
- ▶ 非基变量： x_{N_i} ($i=1, \dots, n-m$)
- ▶ 基本解：

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ 基本可行解：当 $B^{-1}b \geq 0$ 时的基本解
- ▶ 可行基：此时与之对应的 B

例:

$$\begin{array}{ll}\min & z = x_1 - x_2 \\s.t. & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\& x_1 + x_2 \leq 5 \\& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\min & z = x_1 - x_2 \\s.t. & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\& x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\& x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\& x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 5)\end{array}$$

线性规划基本定理

- ▶ 基本可行解判定
 - 可行解 \bar{x} 是基本可行解的充要条件是它的正分量所对应的 A 中列向量线性无关
 - \bar{x} 是基本可行解的充要条件是 \bar{x} 是可行域 D 中的顶点
- ▶ 基本可行解存在性
 - 若有可行解，则至少有一个基本可行解
 - 有有限最优值，则一定存在一个基本可行解是最优解

对于标准形式的LP问题，只需在基本可行解的集合中进行搜索

三个重要结论

- ▶ 线性规划的**可行域** D 是若干个闭半空间的交集，它形成了一个有界或无界的**多面凸集**
- ▶ 对于给定的线性规划问题，如果它有**最优解**，最优解总可以在 D 的某个**顶点**上达到
- ▶ 顶点即**基本可行解**，可由**可行基矩阵**求得