最优性原理
Principle of Optimality

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- 最优性原理

- 确定性定期纯离散多阶段决策问题的动态规划基本方程

确定性定期多阶段决策问题的基本模型

$$\begin{cases} \min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k). & \text{决策目标} \\ s.t. \quad x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k); \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{状态转移约束} \\ \qquad x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}; \quad k = 0,1,\cdots N. & \text{状态空间约束} \\ \qquad u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{决策空间约束} \end{cases}$$

建模关键：满足无后效性的阶段划分及状态定义

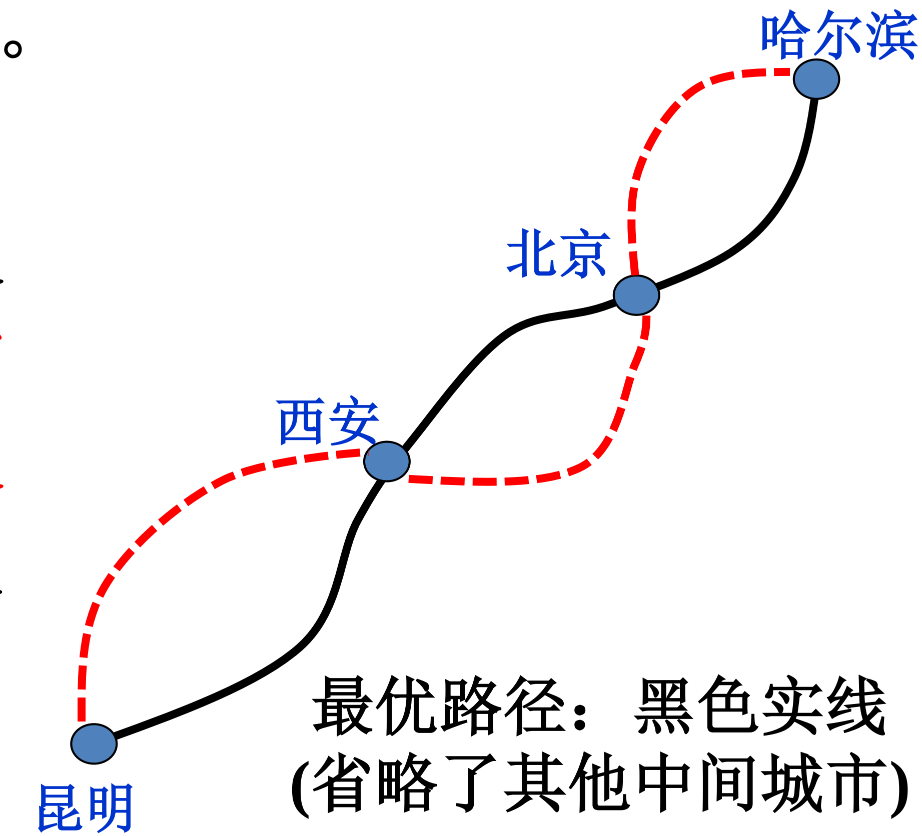
确定性定期离散时间问题

- 状态: $x_k : k = 0,1,\ldots,N. x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}$
- 决策: $u_k : k = 0,1,\ldots,N-1. u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}$
- 状态转移方程: $x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k), k = 0,1,\ldots,N-1$
- 控制/决策目标: $\min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k)$

最优性原理 多阶段决策问题怎样有效求解？

例4：从昆明至哈尔滨自驾游，只允许经停直辖市及省会城市，求最短路线安排。

最优性原理：如果一个策略是**最优策略**，则它的**前部、后部、中间片段子策略**也一定是对应部分的最优策略。



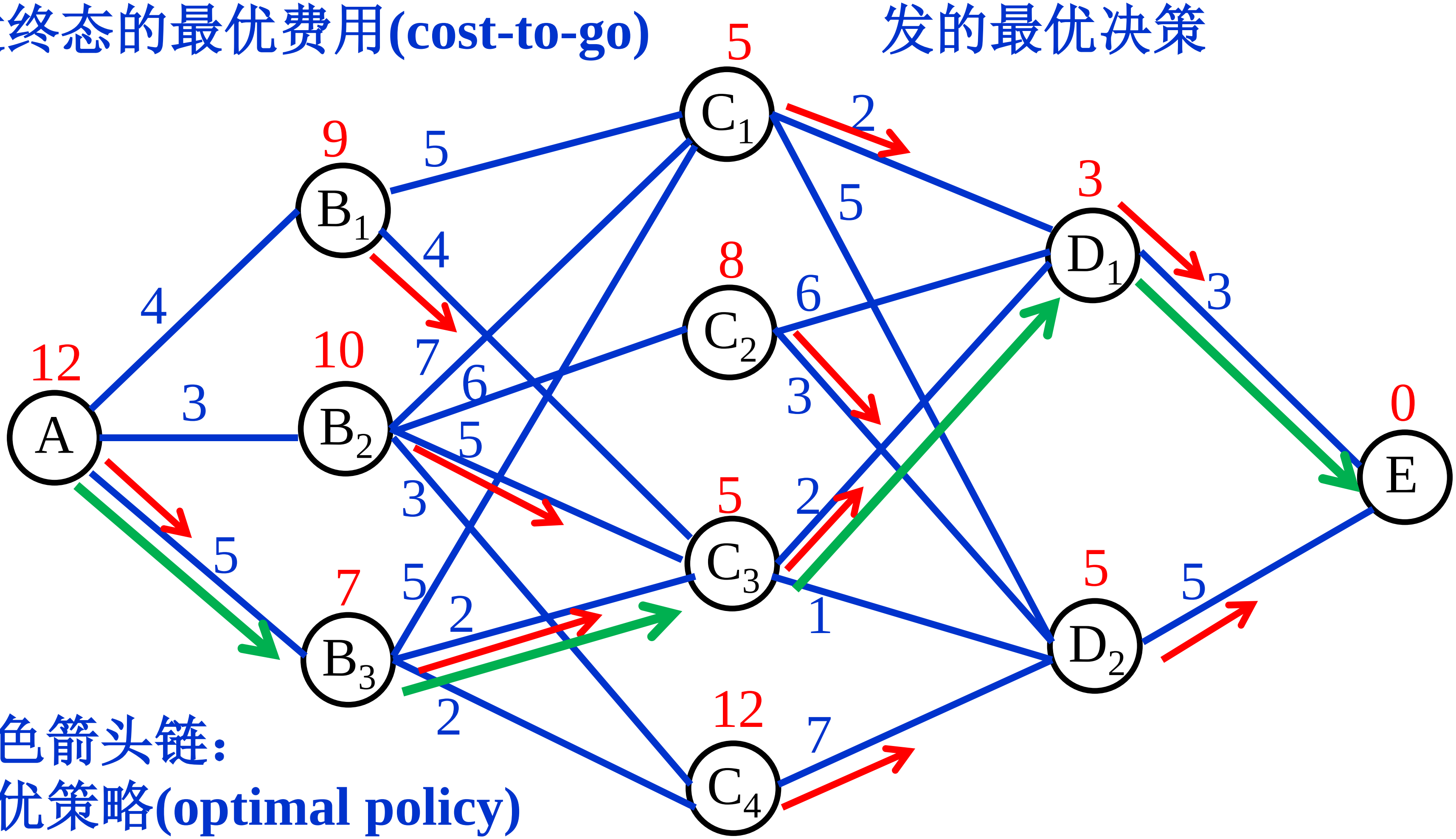
最优路径：黑色实线
(省略了其他中间城市)

最优性原理应用举例

例1. 管道铺设问题(纯离散问题)。

红色数字：从每个状态出发到达终态的最优费用(cost-to-go)

红色箭头：从每个状态出发的最优决策

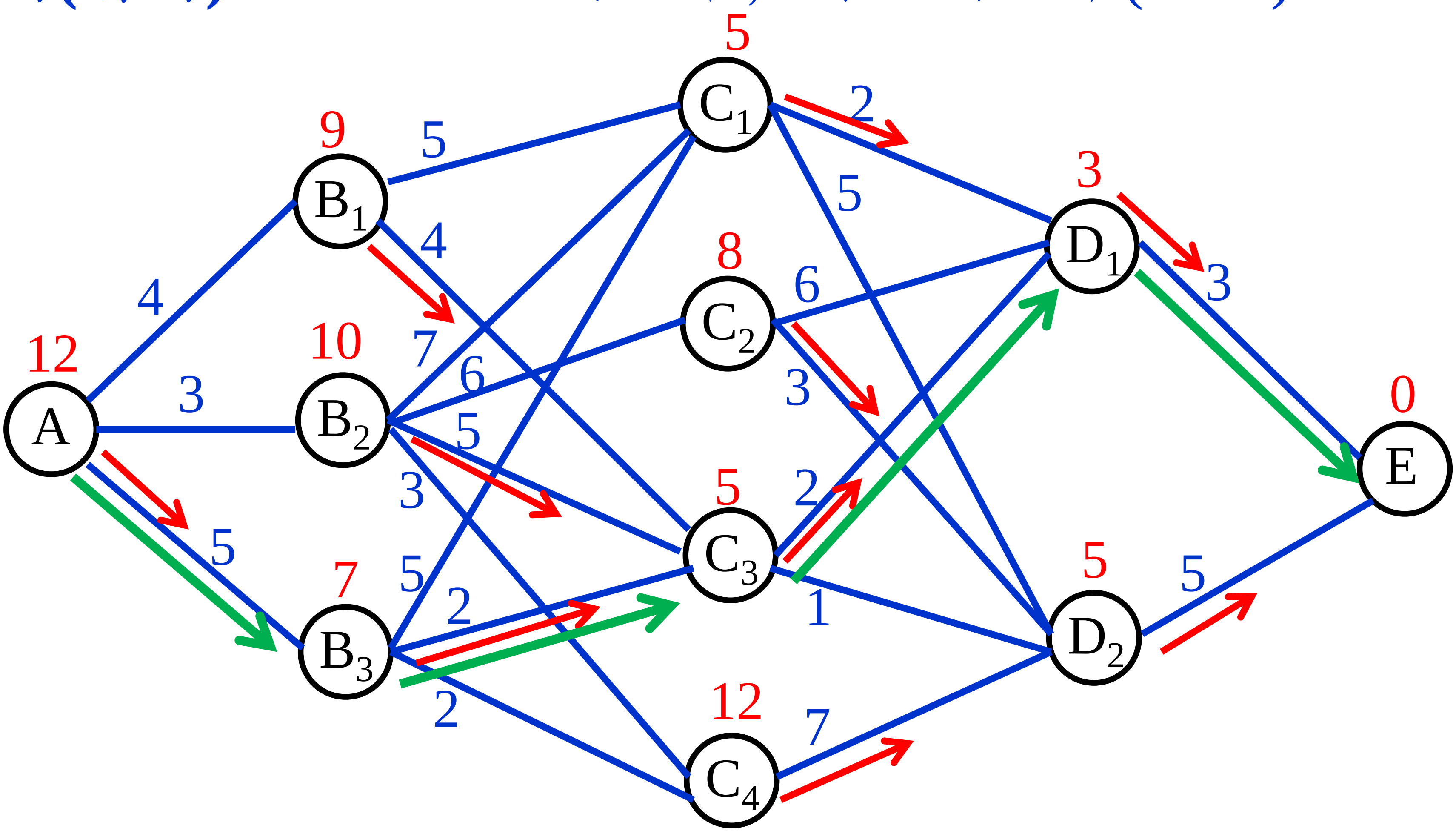


绿色箭头链：最优策略(optimal policy)

动态规划计算特点分析

反向(后向) DP： 先反向递推，再前向递推(扫描)

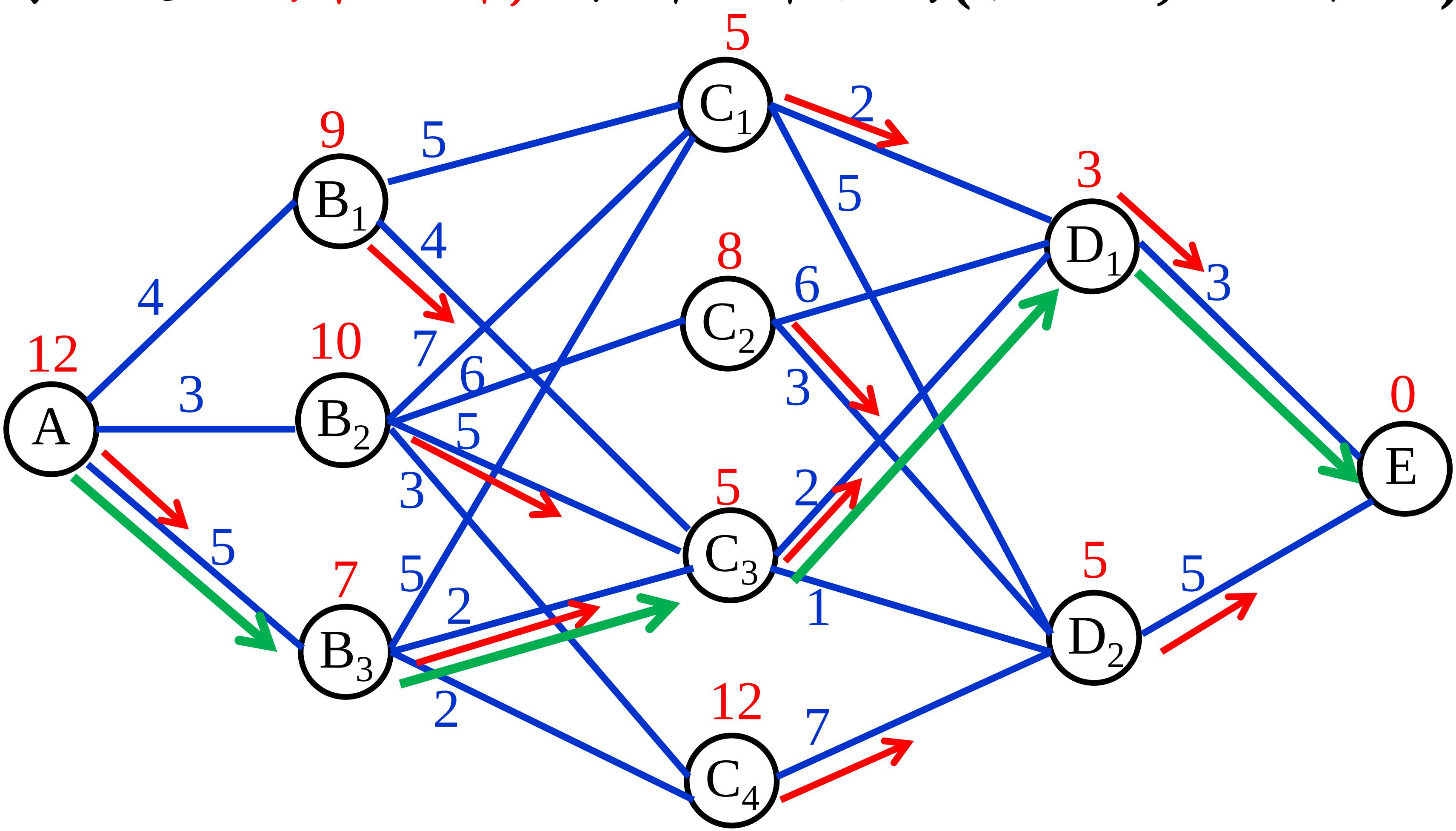
正向(前向) DP： 先正向递推，再反向递推(扫描)



动态规划计算特点分析

将一个多阶段问题转化为一系列结构相同的单阶段问题

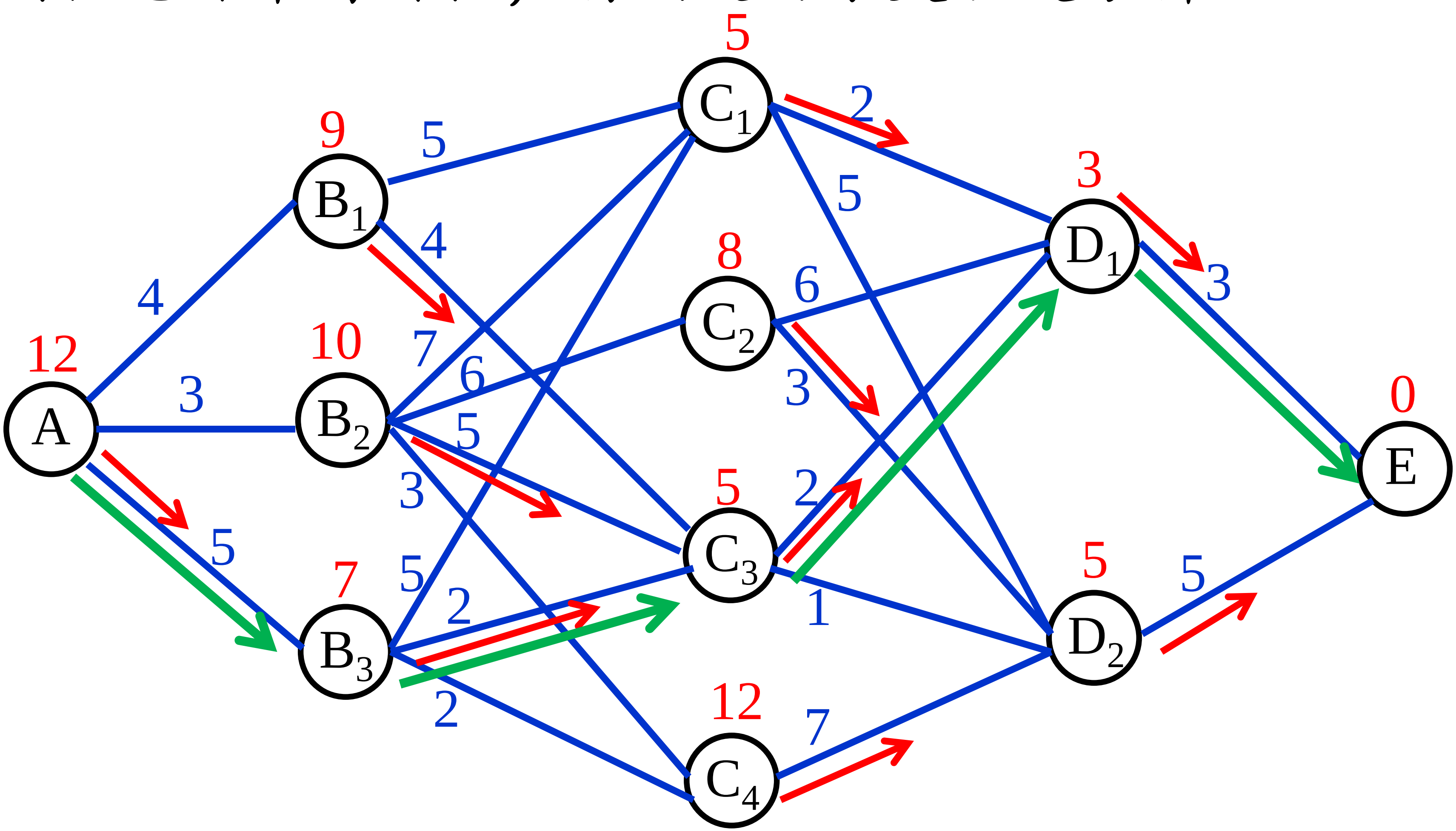
获得的是全局最优解，求解效率较高(和NLP, MIP相比)



动态规划计算特点分析

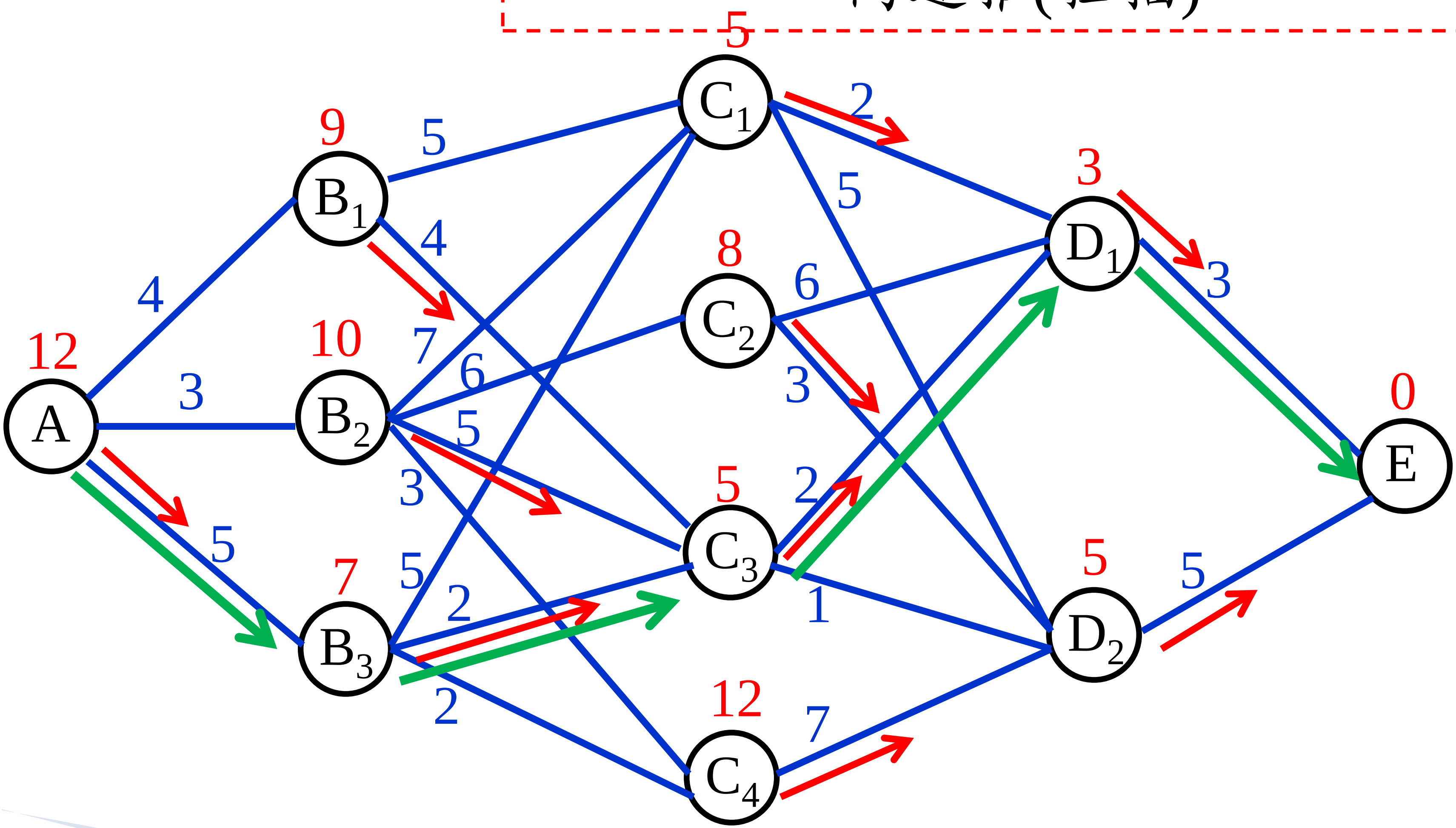
获得的是多个多阶段决策问题的全局最优解

中间信息非常有价值，特别是对于灵敏度分析



状态转移图

反向(后向) DP： 先反向递推，再前向递推(扫描)



最优性原理的数学表述

确定性定期离散时间多阶段决策问题基本模型

$$\begin{cases} \min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k). & \text{决策目标} \\ s.t. \quad x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k); \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{状态转移约束} \\ \quad x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}; \quad k = 0,1,\cdots N. & \text{状态空间约束} \\ \quad u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{决策空间约束} \end{cases}$$

最优性原理：

如果 $x_0^* \xrightarrow{u_0^*} x_1^* \xrightarrow{u_1^*} x_2^* \xrightarrow{u_2^*} \ldots \xrightarrow{u_{N-1}^*} x_N^*$ 是最优解，

则 $\forall k, 0 \le k \le N$, $x_k^* \xrightarrow{u_k^*} x_{k+1}^* \xrightarrow{u_{k+1}^*} \ldots \xrightarrow{u_{N-1}^*} x_N^*$ 是以 x_k^* 为初始状态的后部过程最优解。

最优性原理的数学表述

确定性定期离散时间多阶段决策问题基本模型

$$\begin{cases} \min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k). & \text{决策目标} \\ s.t. \quad x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k); \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{状态转移约束} \\ x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}; \quad k = 0,1,\cdots N. & \text{状态空间约束} \\ u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{决策空间约束} \end{cases}$$

$$f_k(x_k) = \min \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j, u_j, j) = \min_{u_k, u_{k+1}, \cdots, u_{N-1}} \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j, u_j, j)$$

$$= \min_{u_k} \left[G(x_k, u_k, k) + \min_{u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots, u_{N-1}} \sum_{j=k+1}^{N-1} G(x_j, u_j, j) \right]$$

$$= \min_{u_k} [G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]$$

动态规划基本方程
(递归/递推方程)

$$\boxed{f_k(x_k) = \min_{u_k} [G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]}$$

最优性原理的数学表述

$$\begin{cases} f_k(x_k): \text{出发费用，相当于状态转移图中每个状态上的红色数字} \\ u_k^*(x_k) = \arg\min\limits_{u_k}[G(x_k,u_k,k) + f_{k+1}(x_{k+1})]: \text{最优决策，反向递推} \\ f_N(x_N) = 0: \text{边界条件} \\ x_0^* = x_0,\ x_{k+1}^* = \phi(x_k^*, u_k^*(x_k^*), k); \quad k = 0,1,\cdots N-1: \text{前向递推，最优策略} \end{cases}$$

各自和状态转移图上的什么相对应？

$$f_k(x_k) = \min \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j,u_j,j) = \min_{u_k,u_{k+1},\cdots,u_{N-1}} \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j,u_j,j)$$

$$= \min_{u_k}\left[G(x_k,u_k,k) + \min_{u_{k+1},u_{k+2},\cdots,u_{N-1}} \sum_{j=k+1}^{N-1} G(x_j,u_j,j) \right]$$

$$= \min_{u_k}[G(x_k,u_k,k) + f_{k+1}(x_{k+1})]$$

动态规划基本方程(递归/递推方程)

$$\boxed{f_k(x_k) = \min_{u_k}[G(x_k,u_k,k) + f_{k+1}(x_{k+1})]}$$

基本步骤

- 明确问题，找出**阶段**数
- 确定变量，找出**状态变量**和**决策变量**
- 找出状态**转移方程**
- 写出**递推关系**
- 求解**递推关系**

Life can only be understood backwards, but it must be lived forwards

--索伦·克尔凯郭尔

求解的一般途径

DP的主要特点：

全局最优解

求解效率较高

中间信息可充分利用

纯离散问题：

小规模时，状态转移图

其他情况下，基于基本方程递推求解

时间离散，状态连续问题：

状态离散化，化为纯离散问题近似求解

基于基本方程，递推求解

求解的关键步骤及主要难点：

- **恰当的阶段划分**
- **恰当的状态定义**
- **正确列出基本方程**