



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

单纯形法

Simplex Method

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- ▶ 单纯形法的基本思路 (几何)
- ▶ 单纯形法的基本理论 (代数)

已有结论

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

1. 寻找初始基本可行解(端点)
2. 判断可行解是否为最优解
3. 寻找更好的基本可行解

只需在有限个顶点中寻找最优解！

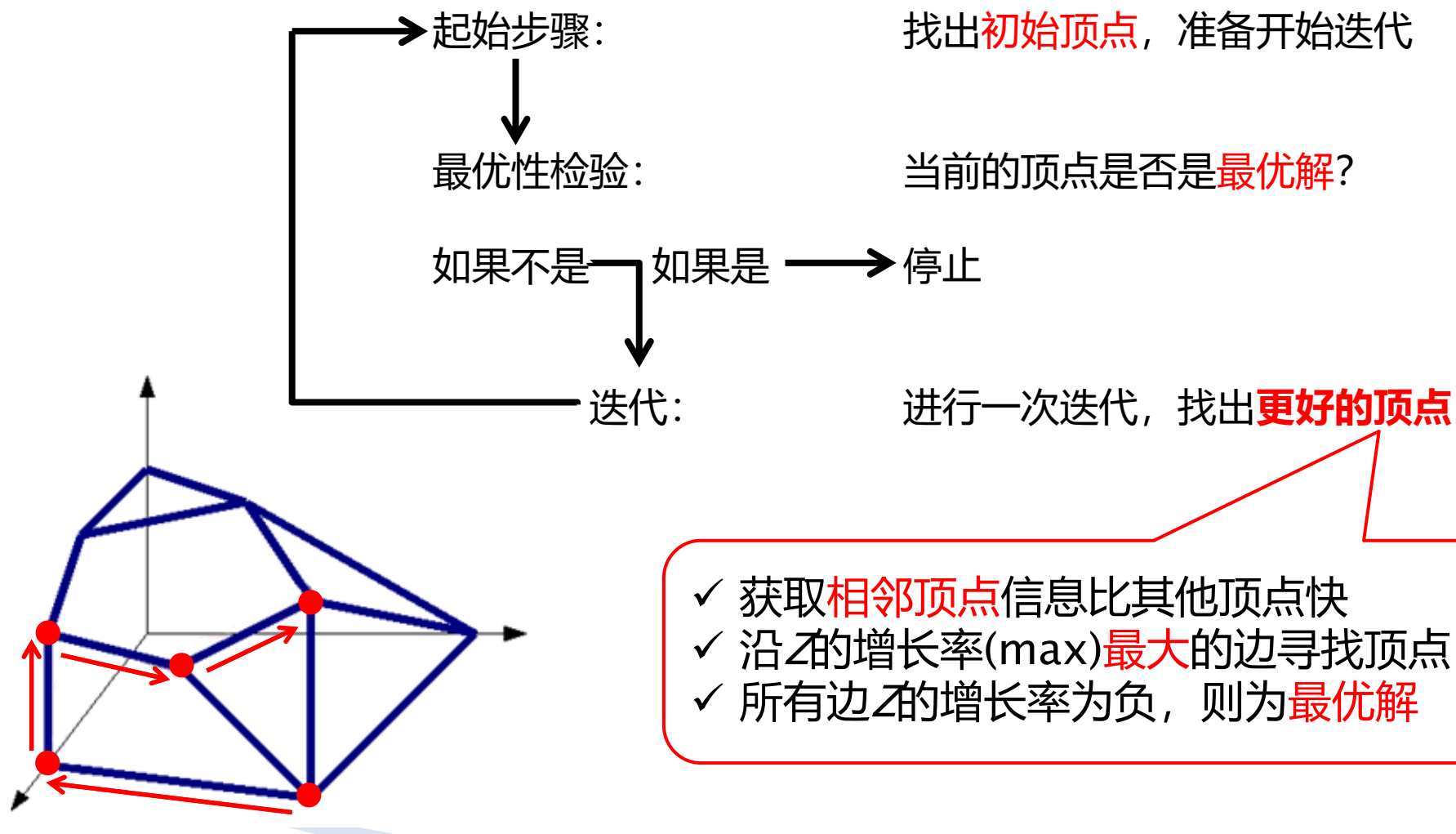
1947年，单纯形法(Simplex Method)



George Dantzig
(1947)



关键的解原理 - 几何原理



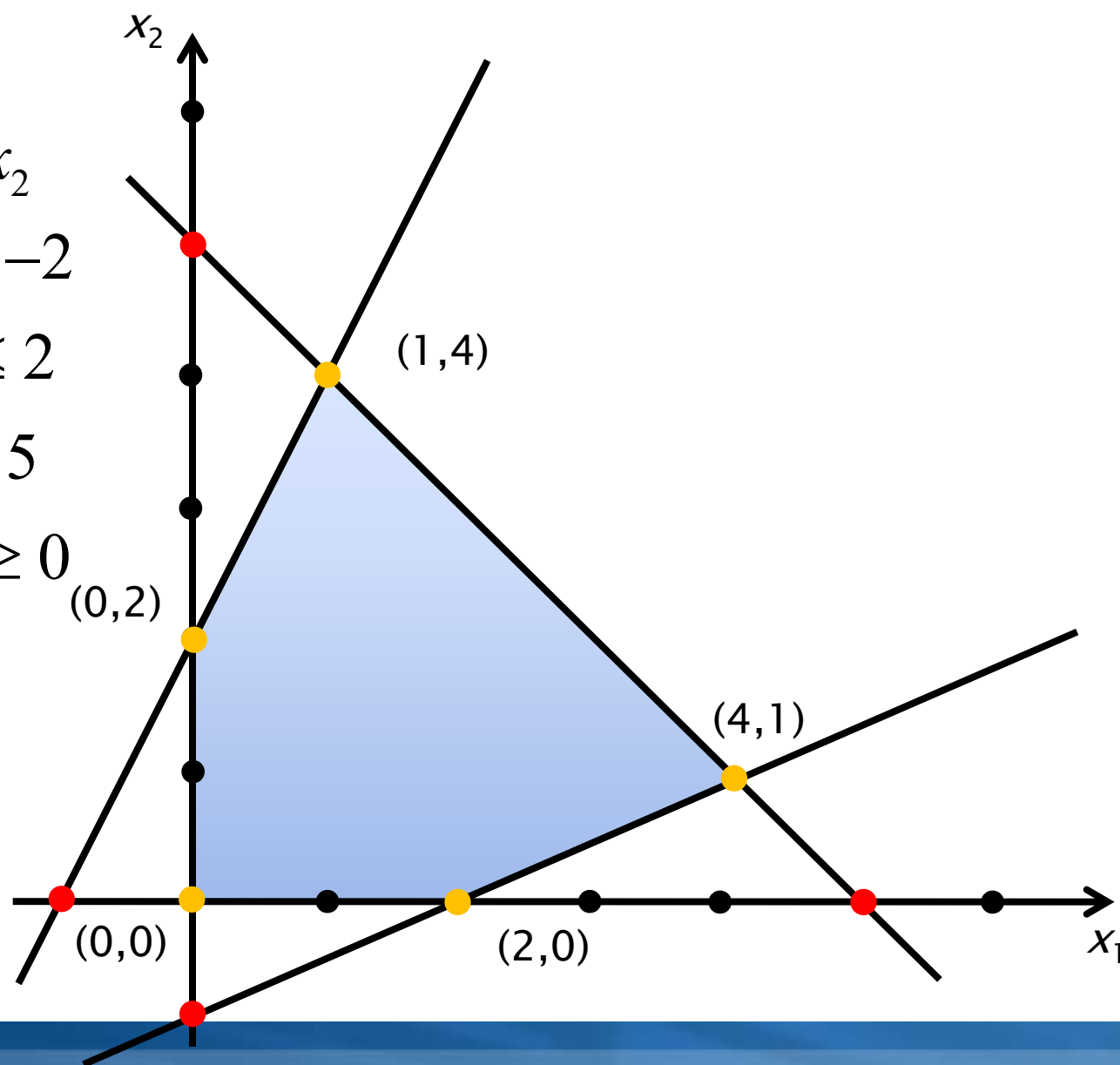
Outline

- ▶ 单纯形法的基本思路（几何）
- ▶ 单纯形法的基本理论（代数）

1. 寻找初始基本可行解(端点)
2. 判断可行解是否为最优解
3. 寻找更好的基本可行解

例:

$$\begin{array}{ll}\max & z = x_1 - x_2 \\s.t. & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\& x_1 + x_2 \leq 5 \\& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



基本可行解的定义

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \longrightarrow A = [B, M] \quad x = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

基本可行解：

— **基矩阵** B ，使得 $B^{-1}b \geq 0$ 时的基本解：

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

基本
可行解



可行基

基本解的性质

- ▶ 每个变量均可做为非基变量或基变量
- ▶ 基变量的个数等于约束方程的个数(m)
- ▶ 非基变量的个数等于变量总数减去约束条件个数($n-m$)
- ▶ 非基变量的值设为0($n-m$ 的自由度)
- ▶ 基变量 $x_B = B^{-1}b$
- ▶ 非退化：基变量均为正；退化：基变量有零值

两个重要公式

- 两个重要的下标集

$$\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

$$\{N_1, N_2, \dots, N_{n-m}\}$$

$$B = (A_{B_1}, A_{B_2}, \dots, A_{B_m})$$

$$N = (A_{N_1}, A_{N_2}, \dots, A_{N_{n-m}})$$

- 问题转化

$$Ax = b \iff x_B = \bar{b} - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x \iff z = c_B^T \bar{b} - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N$$

z_0

ζ_N^T

原问题的等价问题

对应于基本可行解 $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{b} \geq 0$

等价问题为:
$$\begin{aligned} \min \quad & z = z_0 - \zeta^T x \\ \text{s.t.} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = \bar{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

最优顶点判定

定理1： 若当前基本可行解对应的， $\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T \leq 0$ 则它是最优基本可行解。

定义1： $\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T$ 称为当前基的检验数向量。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = c_B^T \bar{b} - \zeta_N^T x_N \\ s.t. & x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{array} \right.$$

几何意义 $\frac{\partial z}{\partial x_{N_j}} = -\zeta_{N_j}$

寻找更好的顶点 (1/3)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = c_B^T \bar{b} - \zeta_N^T x_N \\ \text{s.t.} & x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{array} \right.$$

当 $\zeta_{N_k} > 0$ 时,
 \bar{a}_{N_k} 也有正分量?

$$x_B = \bar{b} - x_{N_1} \bar{a}_{N_1} - x_{N_2} \bar{a}_{N_2} - \cdots - x_{N_k} \bar{a}_{N_k} - \cdots - x_{N_{n-m}} \bar{a}_{N_{n-m}}$$

让 x_{N_k} 从 0 \square , 保持其余 x_{N_j} 仍为 0, x_B 按等式约束变化, 则 $z \square$?

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 - x_{N_k} \bar{a}_{1,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_i - x_{N_k} \bar{a}_{i,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_m - x_{N_k} \bar{a}_{m,N_k} \end{pmatrix}$$

x_{N_k} 最多可增加到多大?

$$x_{N_k} \square \theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,N_k}} \mid \bar{a}_{i,N_k} > 0 \right\}$$

寻找更好的顶点 (2/3)

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 - x_{N_k} \bar{a}_{1,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_i - x_{N_k} \bar{a}_{i,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_m - x_{N_k} \bar{a}_{m,N_k} \end{pmatrix}$$

$$x_{N_k} \leq \theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,N_k}} \mid \bar{a}_{i,N_k} > 0 \right\}$$

设最小比在 $i = r$ 处取得,

$$\text{则 } x_{B_r} \leq 0, \quad x_{N_k} \leq \theta$$

新可行解是否是为基本可行解?

考察可能的正分量: $\{x_{B_1} \cdots x_{B_{r-1}} \quad \boxed{x_{N_k}} \quad x_{B_{r+1}} \cdots x_{B_m}\}$

对应A中的列向量组: $\{a_{B_1} \cdots a_{B_{r-1}} \quad a_{N_k} \quad a_{B_{r+1}} \cdots a_{B_m}\}$

是否线性无关?

答: 线性无关!
是基本可行解!

$$\begin{aligned} & B^{-1} \begin{pmatrix} a_{B_1} & \cdots & a_{B_{r-1}} & a_{N_k} & a_{B_{r+1}} & \cdots & a_{B_m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{r-1} & \bar{a}_{N_k} & e_{r+1} & \cdots & e_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

寻找更好的顶点：结论及回顾 (3/3)

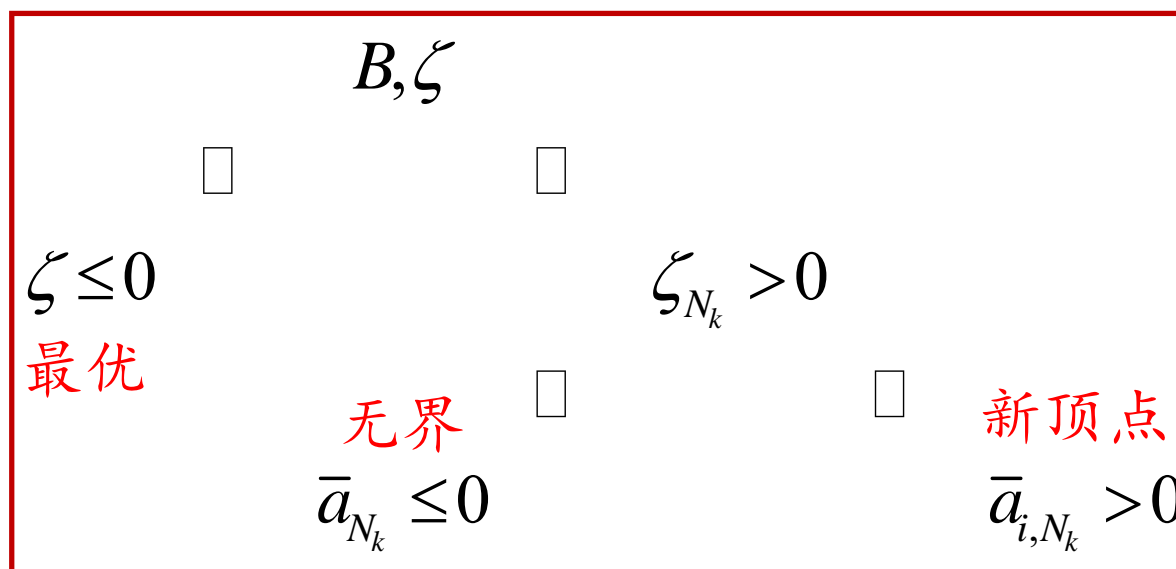
定理3: 若当前基本可行解对应的检验数有正分量 $\zeta_{N_k} > 0$ 且 \bar{a}_{N_k} 也有正分量，则可以得到一个更好的基本可行解。

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min & z = c_B^T \bar{b} - \zeta_N^T x_N \\ s.t. & x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{cases}$$

消元法：
变量消去
约束继承

$$\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T \leq 0$$

锲而不舍
百折不挠



最优性准则

- ▶ 若可行基 B 对应的检验数向量 $\zeta \leq 0$ ，则此可行基对应的基本可行解为**最优解**。且最优值为 $c_B^T \bar{b}$
- ▶ 若向量 ζ 的第 k 个分量 $\zeta_k > 0$ ，而向量 $\bar{A}_k = B^{-1} A_k \leq 0$ 则原问题**无界**。
- ▶ 对于非退化的基本可行解 \bar{x} ，若向量 ζ 中 $\zeta_k > 0$ ，而其相应的向量 \bar{A}_k **至少有一个正分量**，则有一个**新的基本可行解** \hat{x} 使得 $c^T \hat{x} < c^T \bar{x}$

单纯形法步骤

- ▶ 获取初始可行基
- ▶ 计算检验数向量 $\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T$
- ▶ 求 $\zeta_k = \max \{\zeta_j \mid 1 \leq j \leq n\}$
- ▶ 若 $\zeta_k \leq 0$, 停止, 已找到最优解
- ▶ 若 $\bar{A}_k \leq 0$, 停止, 原问题无界
- ▶ 求 $\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0, i = 1, \dots, m \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
- ▶ 以 A_k 代替 A_{Br} 得到新基, 转第2步

作业

- ▶ P73 3
- ▶ P73 4
- ▶ P73 9
- ▶ P74 12