



西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute  
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

# 约束最优化问题 Constrained optimization problem

电信学院·自动化科学与技术系  
系统工程研究所  
吴江

# Outline

- ▶ 方法概述
- ▶ 最优性条件

# 约束优化问题

$$\min \quad z = f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \leq 0$$

$$h_j(x) = 0$$

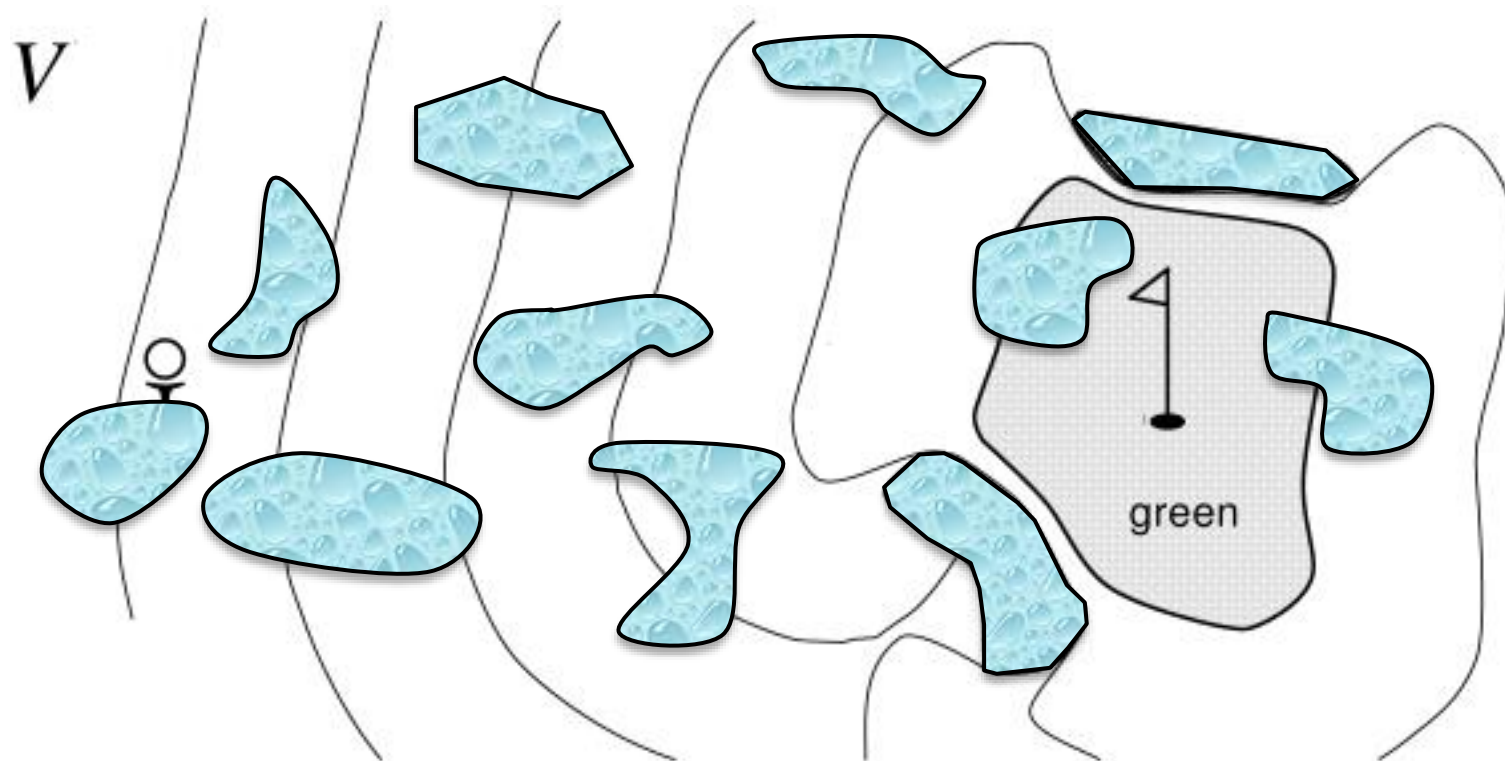
其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ ,

$$f: R^n \rightarrow R^1,$$

$$g_i: R^n \rightarrow R^1, i=1, \dots, p,$$

$$h_j: R^n \rightarrow R^1, j=1, \dots, q.$$

# 约束优化问题的困难



可行解?

可行方向?

# 解决方案

- ▶ 限定条件

线性约束、凸规划.....

- ▶ 问题转化

约束优化->无约束优化

# 常用约束优化方法简介

## ▶ 罚函数类方法

- 外点法, 内点法, 混合法, 精确罚函数法, 乘子(罚函数)法
- 特点: 不能保证解的可行性. 乘子法效果最好

## ▶ 序列二次规划

- (约束变尺度方法)
- 特点: 不能保证解的可行性. 对中小问题效果很好

## ▶ 可行方向法

- 投影梯度法, 简约梯度法(均要求线性约束)
- 特点: 能保证解的可行性, 效果很好

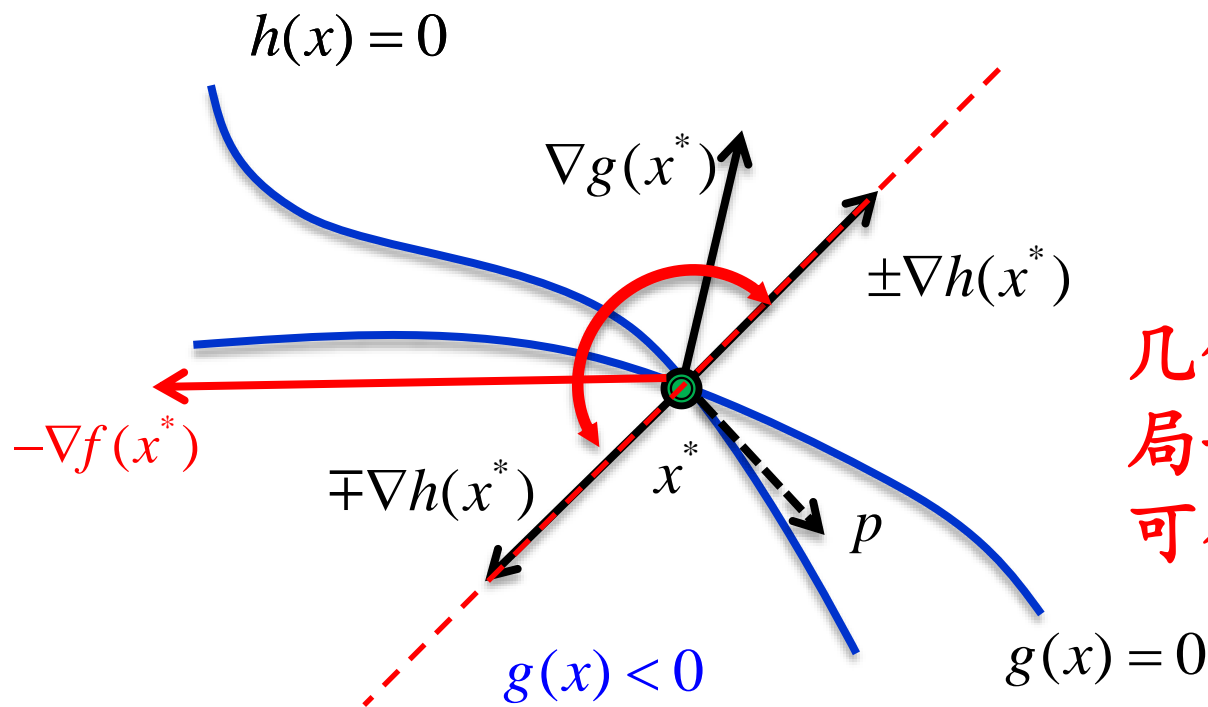
## ▶ 特殊结构算法

- 二次规划, 几何规划.....



# 约束优化问题最优点的几何意义

$$\begin{array}{ll}\min & z = f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0\end{array}$$



几何意义：  
局部最优解处不存在  
可行的下降方向！

如果  $\nabla g(x^*)$ ,  $\nabla h(x^*)$  线性无关  
则存在  $\lambda \geq 0, \mu \in R$  使得  $-\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*) + \mu \nabla h(x^*)$

# 基本概念

$$(NLP) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \quad \quad h_j(x) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \quad \quad x \in R^n \end{cases}$$

$$I = \{i | i = 1, 2, \dots, p\} \quad \text{不等式约束下标集}$$

$$E = \{j | j = 1, 2, \dots, q\} \quad \text{等式约束下标集}$$

$$D = \{x | x \in R^n, g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, \forall i \in I, j \in E\} \quad \text{可行域}$$

$$\forall x \in D, I(x) = \{i | i \in I, g_i(x) = 0\} \quad \text{有效不等式约束下标集}$$

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x) \quad \text{Lagrange函数}$$

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_p)^T \in R^p, \lambda \geq 0 \quad \text{不等式约束乘子(要求非负)}$$

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_q)^T \in R^q \quad \text{等式约束乘子}$$





# 定理1: K-T条件

$$\min \quad z = f(x)$$

▶ 对于非线性规划问题:  $s.t. \quad g_i(x) \leq 0$   
 $h_j(x) = 0$

▶ 假设:

- 1.  $f, g_i, h_j$  都是连续可微函数
- 2.  $x^*$  是该问题的一个局部极小点
- 3.  $\{\nabla g_i(x^*)\}_{i \in I(x^*)}, \{\nabla h_j(x^*)\}_{j \in E}$  线性无关

▶ 则存在一组  $\lambda_i (i \in I(x^*))$ ,  $\lambda_i \geq 0$  和一组  $\mu_j (j \in E)$ , 使得

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

# 几点说明

- ▶ 仅是 $x^*$ 成为局部最优解的**必要条件**
- ▶ (3)中的条件称为约束规范
- ▶ 若令 $i \in \Lambda(x^*)$ 时 $\lambda_i=0$ , 则结论可写为:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

或

$$\nabla_x L(x^*, \lambda, \mu) = 0, \lambda_i g_i(x^*) = 0$$

- ▶ 条件 $\lambda_i g_i(x^*)=0$ 称为**互补松弛条件**
- ▶ KT点:  $x \in R^n$ , 满足: 
$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0 \end{cases}$$

# 定理2

**定理2.** 假设(NLP)中 $f, g_i (i=1,2,\dots,p)$ 是可微凸函数,  $h_j (j=1,2,\dots,q)$ 是线性函数,  $x^*$ 是一个可行的KT点, 则 $x^*$ 是该问题的全局最优解。

证明:  $x^*$ 为KT点  $\Rightarrow$  存在 $\lambda^* \geq 0, \mu^* \in R^q$ 使得 $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

$$L(x, \lambda^*, \mu^*) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* h_j(x) \text{ 关于 } x \text{ 为凸函数}$$

$$f(x^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*) \leq f(x), \quad \forall x \in D$$

可行KT点, 互补松弛条件

$x^*$ 为 $L$ 的全局极小

$x$ 可行, 乘子非负

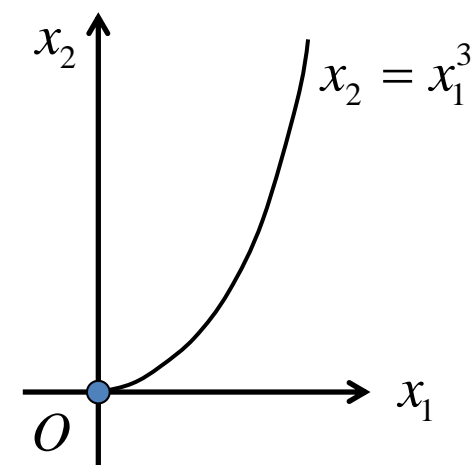
## 定理2

- ▶ 对于一个NLP问题,若 $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i=(1, \dots, p)$ 都是凸函数,  $h_j(x)$ ,  $j=(1, \dots, q)$ 都是线性函数. 且 $x^*$ 是一个可行KT点, 则 $x^*$ 是该问题的全局最优解

# 例1

$$\begin{array}{ll}\min & x_1 \\s.t. & x_2 \leq x_1^3 \\ & x_2 \geq 0\end{array}$$

例1: 
$$\begin{cases} \min & x_1 \\ \text{s.t.} & x_2 \leq x_1^3 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min & x_1 \\ \text{s.t.} & x_2 - x_1^3 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$



$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**线性相关，约束规范  
不成立！**

不存在  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  使得  $\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) = 0$

**约束规范不成立时，局部最优解可能不是KT点！**

## 例2 用K-T条件求解问题

$$\min \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$s.t. \quad g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

$$h_1(x) = -x_1 + x_2 - 1 = 0$$

例2:

解: 先写出Lagrange函数.

$$L(x, \lambda, \mu) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2 + \mu(-x_1 + x_2 - 1)$$

依次写出KT条件、乘子非负条件、可行条件(原问题约束)

$$\begin{cases} \begin{cases} 2(x_1 - 1) + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu = 0 \\ 2(x_2 - 2) + \lambda_1 - \lambda_3 + \mu = 0 \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0 \\ \lambda_3 x_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

分情况讨论: ①.  $\lambda_1 \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \text{已得} \\ \mu = 0 & \text{KT点.} \end{cases} \quad \checkmark$$

分情况讨论: ②.  $\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{或者 } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ \text{或者 } x_1 = 0, x_2 = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{或者 } x_1 = 1, x_2 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \mu = 0 \\ \text{或者 } x_1 = 0, x_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = -4, \mu = 2 \end{cases} \quad \times$$





# 作业

- ▶ P155 21, 22(1)