16 对下列说法，判断是对或是错：

(c) 若 $y(t)=x(t)*h(t)$，则 $y(-t)=x(-t)*h(-t)$

解:该命题是正确的，理由如下：

由于 $y(t)=x(t)*h(t)$，故 $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

从而 $y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(-t-\tau)d\tau$

另一方面，设 $x_1(t)=x(-t)$， $h_1(t)=h(-t)$

则 $x(-t)*h(-t)=x_1(t)*h_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)h_1(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\tau)h(\tau-t)d\tau$

令 $\tau'=-\tau$，则

$$x(-t)*h(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\tau)h(\tau-t)d\tau=\int_{+\infty}^{-\infty}x(\tau')h(-\tau'-t)(-d\tau')=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau')h(-\tau'-t)d\tau'$$

与 $y(-t)$ 对比可知， $y(-t)=x(-t)*h(-t)$。

21 计算下列各对信号的卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$：

(c) $x[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n-4],\ h[n]=4^n u[2-n]$

解: 这题直接按卷积公式计算,大部分是计算错误。

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\cdot h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k u[k-4]\cdot 4^{n-k}u[2-n+k]$$

再进行分段讨论。由 $k-4>0$ 得 $k>4$，由 $2-n+k>0$ 得 $k>n-2$

当 $n-2\le 4$ 时，即 $n\le 6$ 时，积分区间为 $(4,+\infty)$，此时

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k u[k-4]\cdot 4^{n-k}u[2-n+k]$$

$$=\sum_{k=4}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k\cdot 4^{n-k}=4^n\sum_{k=4}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k\cdot 4^{-k}=4^n\sum_{k=4}^{+\infty}(-\frac{1}{8})^k=\frac{4^n}{4608}$$

当 $n-2>4$ 时，即 $n>6$ 时，积分区间为 $(n-2,+\infty)$，此时

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k u[k-4]\cdot 4^{n-k}u[2-n+k]$$

$$=\sum_{k=n-2}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k\cdot 4^{n-k}=4^n\sum_{k=n-2}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k\cdot 4^{-k}=4^n\sum_{k=n-2}^{+\infty}(-\frac{1}{8})^k=\frac{512}{9}\cdot(-\frac{1}{2})^n$$

综上所述，有

$$y[n]=\begin{cases}\frac{4^n}{4608}, n\le 6\\ \frac{512}{9}\cdot(-\frac{1}{2})^n, n>6\end{cases}$$

22 计算单位冲激响应为$h(t)$的 LTI 系统在给定输入为$x(t)$时的响应$y(t)$，并简要地画出计算结果。

(b) $x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-5)$， $h(t)=e^{2t}u(1-t)$

解:由于$x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-5)$，故由卷积公式可知，

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^2 h(t-\tau)d\tau-\int_2^5 h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^2 e^{2(t-\tau)}u(1-t+\tau)d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}u(1-t+\tau)d\tau$$

由$1-t+\tau>0$得$\tau>t-1$，因此

当$t-1\le 0$，即$t\le 1$时，

$$y(t)=\int_0^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2t}-2e^{2t-4}+e^{2t-10})$$

当$0<t-1\le 2$，即$1<t\le 3$时，

$$y(t)=\int_{t-1}^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2}-2e^{2t-4}+e^{2t-10})$$

当$2<t-1\le 5$，即$3<t\le 6$时，

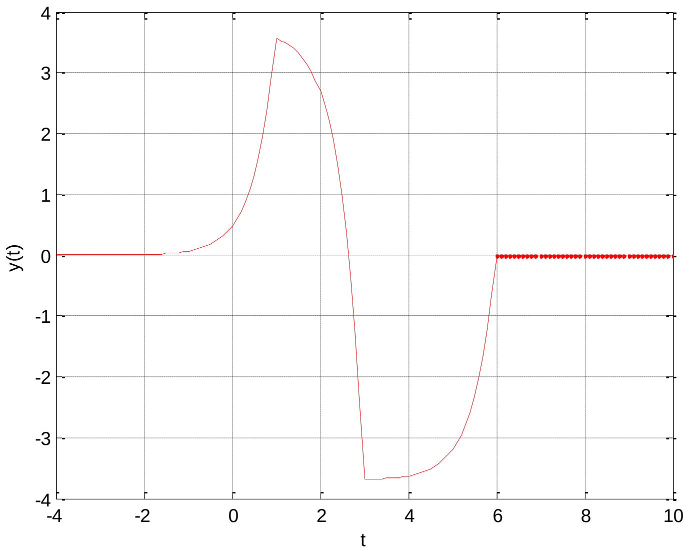
$$y(t)=-\int_{t-1}^5 e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}(-e^{2}+e^{2t-10})$$

当$t-1>5$，即$t>6$时， $y(t)=0$

终上所述，有

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^{2t}-2e^{2t-4}+e^{2t-10}), t\le 1\\ \frac{1}{2}(e^{2}-2e^{2t-4}+e^{2t-10}), 1<t\le 3\\ \frac{1}{2}(-e^{2}+e^{2t-10}), 3<t\le 6\\ 0, t>6\end{cases}$$

图形如下所示

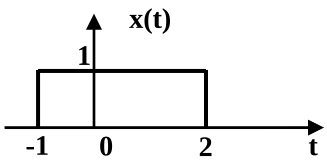


40 (a) 考虑一个 LTI 系统，其输入和输出关系由如下方程确定

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\mathrm{d}\tau$$

求该系统的单位冲激响应。

(b) 当输入信号如下图所示时，求系统的响应。



解: (a)由于题目中已经给出了输入输出的关系，因此，可直接由单位冲激响应的定义求解。令 $x(t)=\delta(t)$，则有

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}\delta(\tau-2)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-2)}\delta(\tau-2)\mathrm{d}\tau(\text{由于}\delta\text{函数的取样性})$$

$$=e^{-(t-2)}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-2)\mathrm{d}\tau(\text{由于被积变量是}\tau)$$

$$=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

(b)由图可知， $x(t)=u(t+1)-u(t-2)$，代入输入输出方程有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}(u(\tau-1)-u(\tau-4))\mathrm{d}\tau=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}(u(\tau-1)-u(\tau-4))\mathrm{d}\tau$$

因此，当 $t<1$ 时， $y(t)=0$

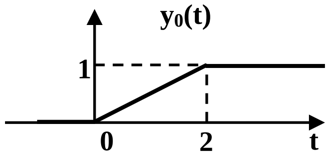
当 $1\le t<4$ 时， $y(t)=e^{-t}\int_{1}^{t}e^{\tau}\mathrm{d}\tau=1-e^{1-t}$

当$t\geq 4$时，$y(t)=e^{-t}\int_1^4 e^{\tau}\mathrm{d}\tau=e^{4-t}-e^{1-t}$

综上所述，有

$$y(t)=\begin{cases}0,t<1\\1-e^{1-t},1\leq t<4\\e^{4-t}-e^{1-t},t\geq 4\end{cases}$$

47　已知单位冲激响应为$h_0(t)$的某一线性时不变系统，当输入为$x_0(t)$时，输出$y_0(t)$如下图所示。



现在给出下列输入和线性时不变系统的单位冲激响应：

输入 $x(t)$	单位冲激响应 $h(t)$
(f) $x(t)=x_0'(t)$	$h(t)=h_0'(t)$

[这里$x_0'(t)$和$h_0'(t)$分别为$x_0(t)$和$h_0(t)$的一阶导数]。

在每一种情况下，判断当输入为$x(t)$、系统的单位冲激响应为$h(t)$时，有无足够的信息来确定输出$y(t)$。如果有可能确定$y(t)$，请准确地画出$y(t)$，并在图上标明数值。

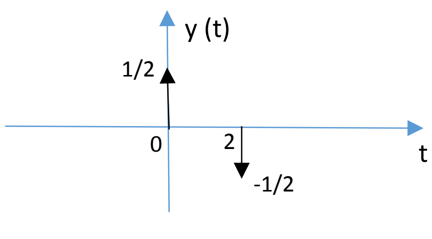
解: (f)当$x(t)=x_0'(t)$，$h(t)=h_0'(t)$时，有

$$y(t)=x(t)*h(t)=x_0'(t)*h_0'(t)=[x_0'(t)*h_0(t)]'=[y_0'(t)]'=y_0''(t)$$

由$y_0(t)$图像可知，其可表示为$y_0(t)=\frac{1}{2}[tu(t)-(t-2)u(t-2)]$。

由于单位斜坡函数$u_{-2}(t)=tu(t)$的二阶导数为单位冲激响应，因此有

$y(t)=y_0''(t)=\frac{1}{2}[\delta(t)-\delta(t-2)]$，图像如下所示



48　判断下面有关 LTI 系统的说法是对或是错，并陈述理由。

(g) 当且仅当一个连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应$s(t)$是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

则该系统就是稳定的。

(h) 当且仅当一个离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应$s[n]$在$n<0$是零，该系统就是因果的。

解: (g)该命题是错误的，理由如下：

单位阶跃响应$s(t)$绝对可积是系统稳定的充分非必要条件，即当$s(t)$绝对可积时，有$h(t)$绝对可积；但是$h(t)$绝对可积时，$s(t)$不一定绝对可积。

例如，当$h(t)=e^{-t}u(t)$时，有$s(t)=h(t)*u(t)=(1-e^{-t})u(t)$，此时$h(t)$绝对可积，而$s(t)$不是绝对可积。因此，命题中的“当且仅当”是错误的。

(h)该命题是正确的，理由如下：

由于$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$，因此，若$s[n]$在$n<0$是零，则此时有$h[n]=s[n]-s[n-1]=0$，即$h[n]$在$n<0$是零，因此系统是因果的；另一方面，若系统是因果的，则$h[n]$在$n<0$是零，则$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]=0$,即$s[n]$在$n<0$是零。

从而可知，$s[n]$在$n<0$为零是系统因果的充分必要条件，命题正确。