图与网络分析第1节

引言、例子与基本概念

西安交通大学电信学院系统工程研究所

翟桥柱、吴江

图与网络分析：引言

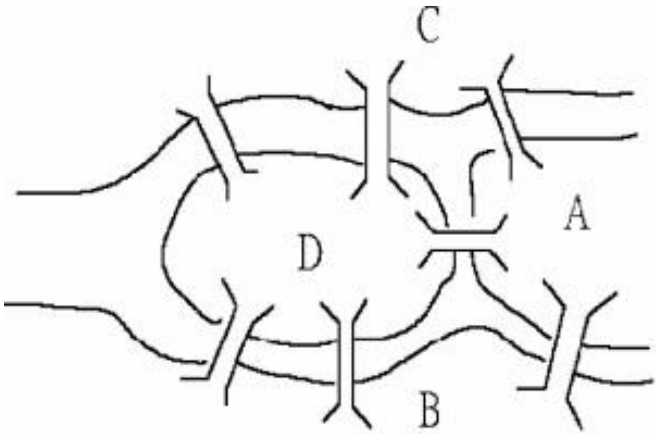
图与网络：

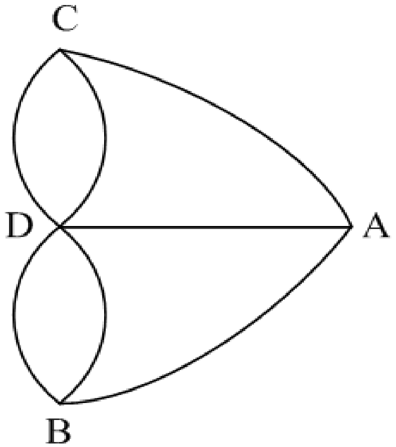
描述、分析众多自然和社会现象的有力工具

理论基础——**图论(Graph theory)**：

数学的重要分支

迷人、“门槛低”，大量非常困难的问题

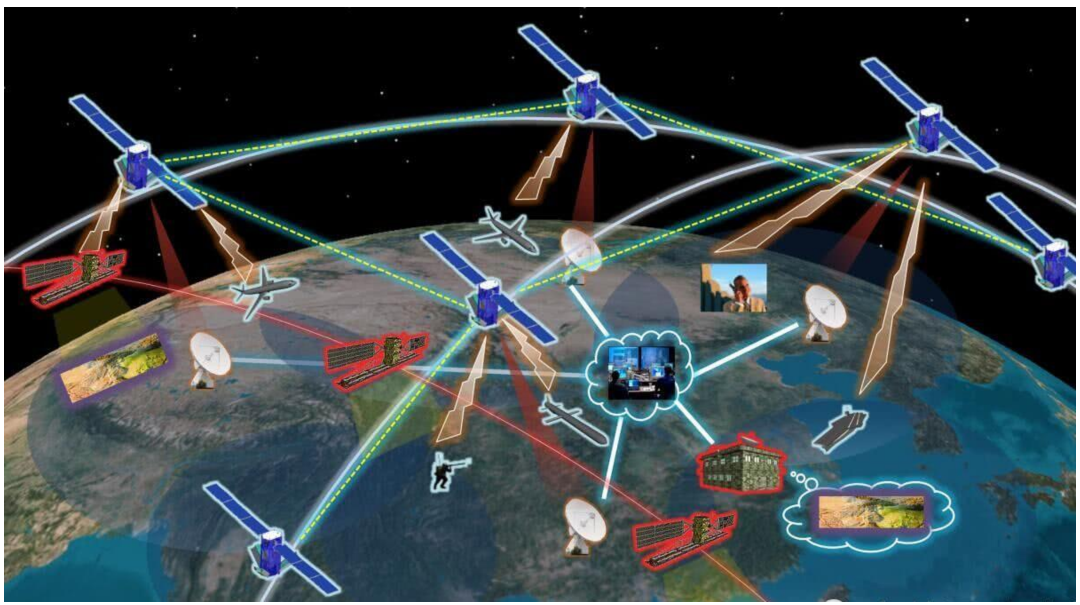


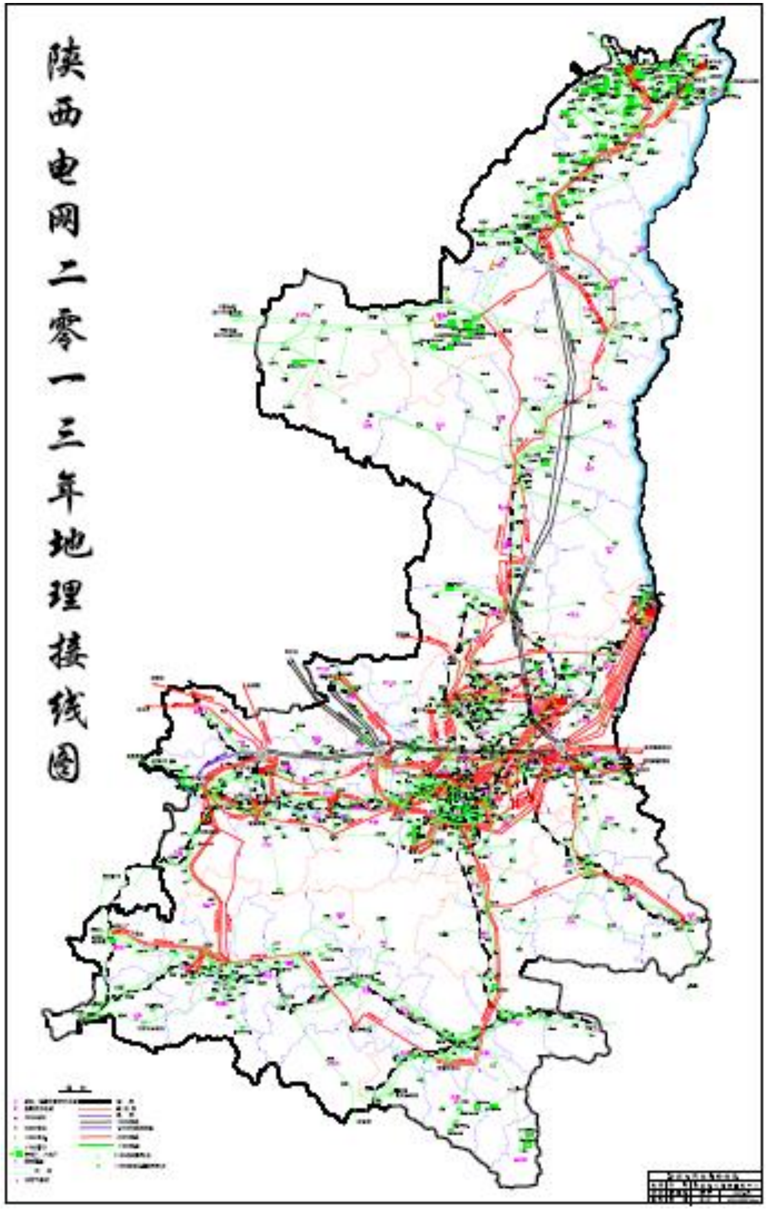


图与网络分析：研究一个系统/组织/集合中，由于各部件/成员/元素之间的(静态)二元关系导致的系统/组织/集合整体性能、特性表现及其优化运行、规划、设计等问题。

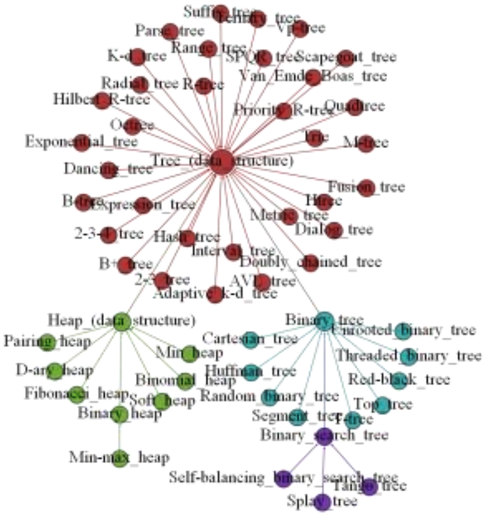
图与网络分析： 引言

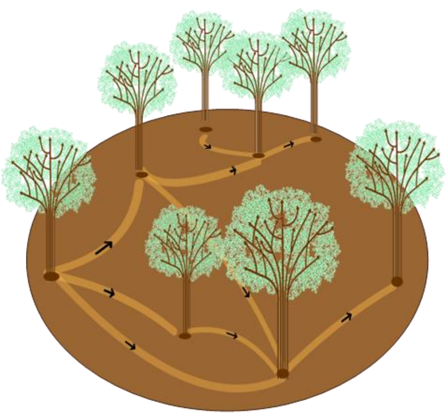

黄河水系示意图
呼和浩特
托克托
银川
太原
兰州
西宁
扎陵湖
鄂陵湖
玛多
济南
东平湖
花园口
郑州
三门峡
潼关
西安
渤海



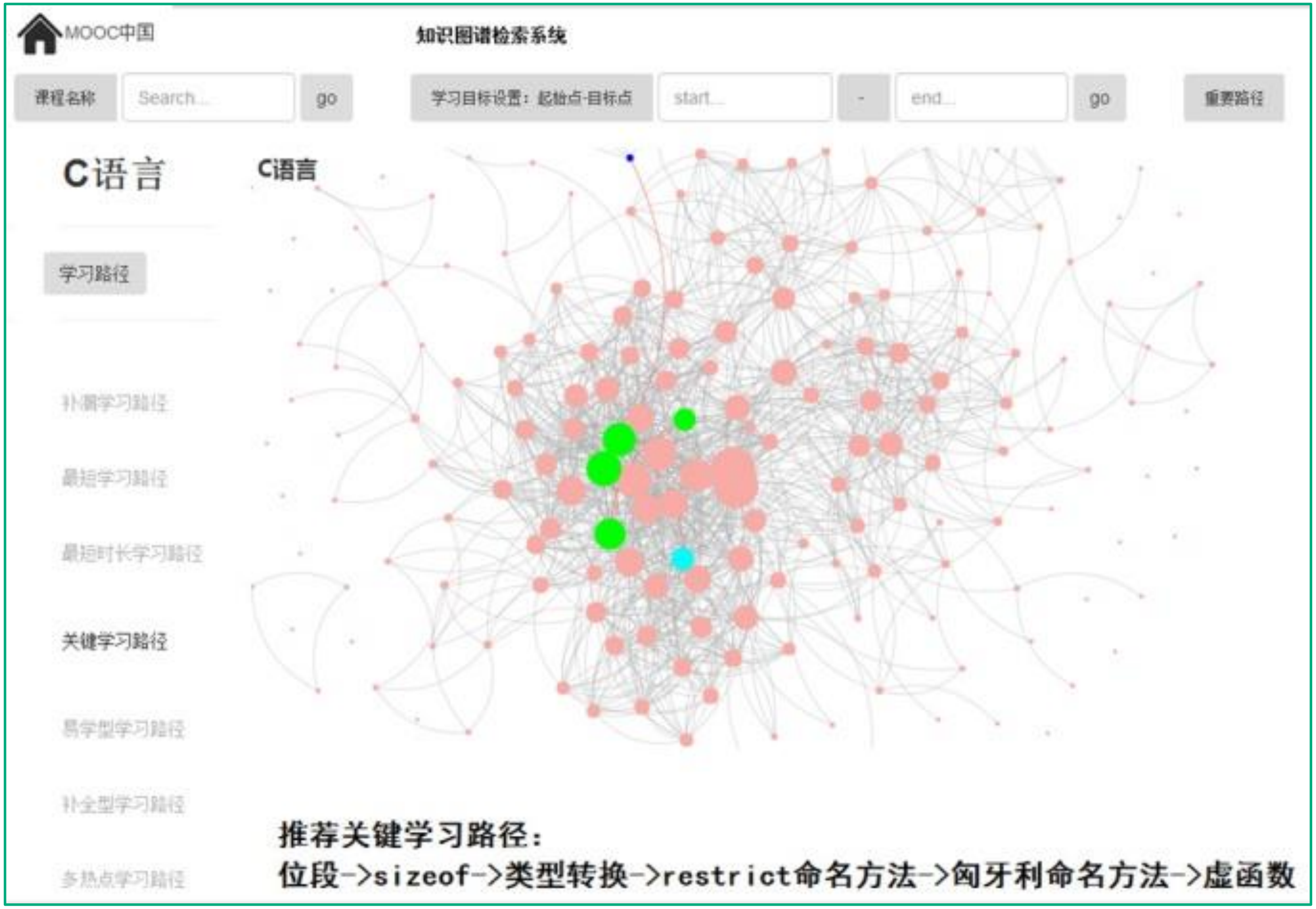

陕西电网二零一三年地理接线图

图与网络分析：引言

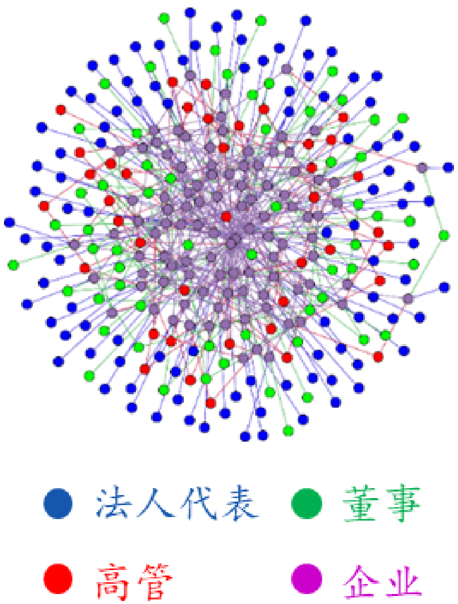


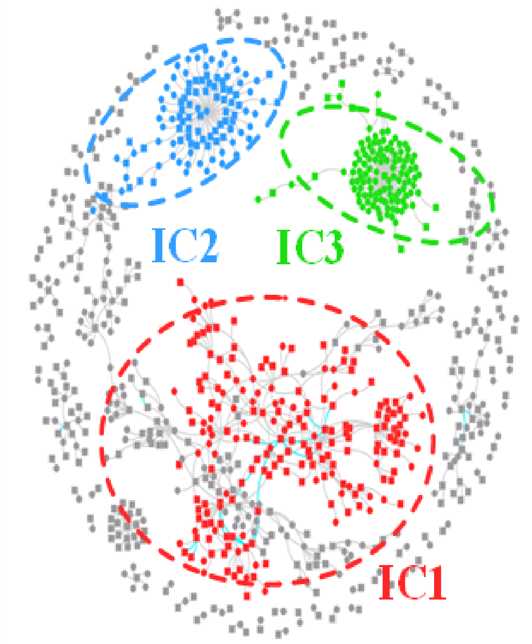


认知关系发现

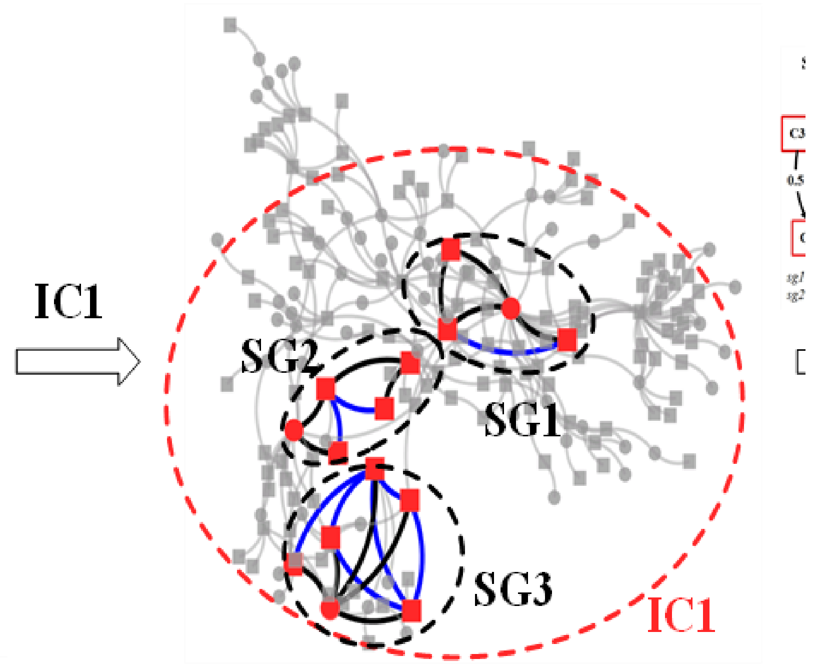


图与网络分析：引言



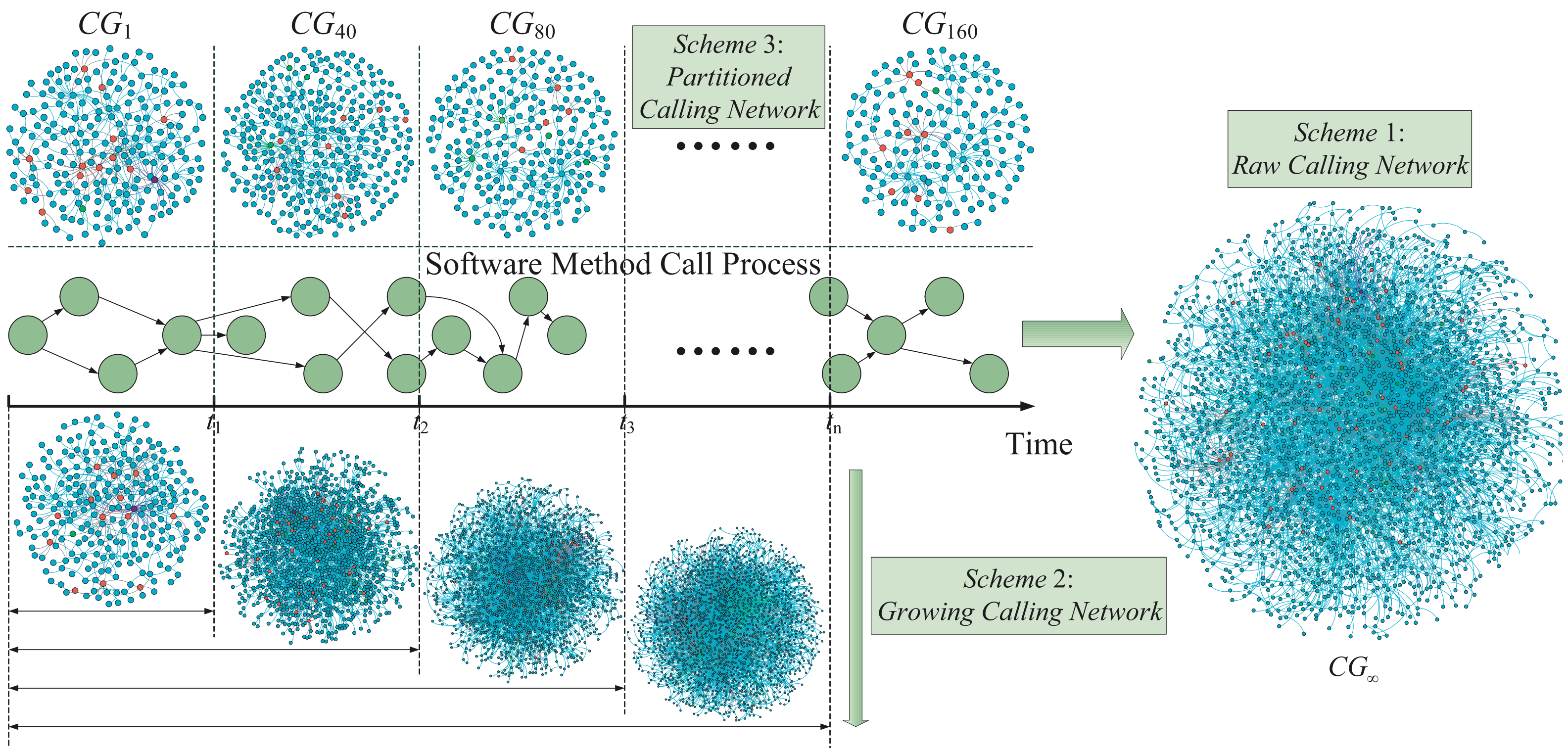


纳税人利益社团发现



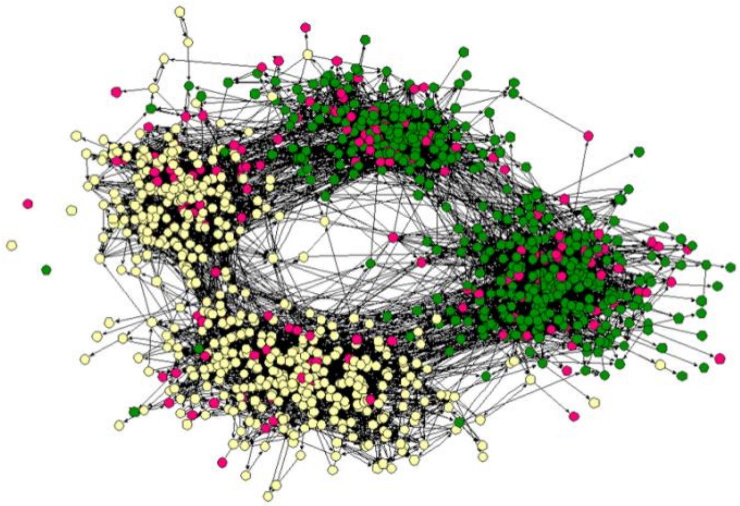
嫌疑群组定位

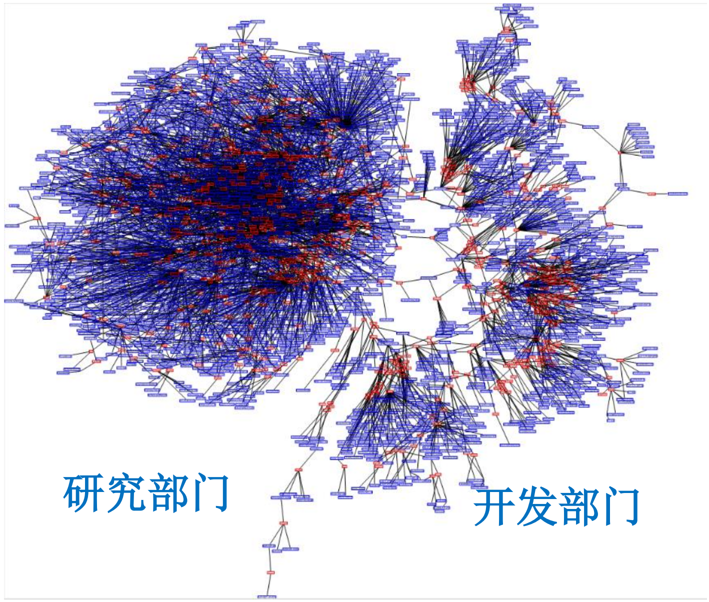
图与网络分析： 引言



CG_1
CG_{40}
CG_{80}
Scheme 3:
Partitioned
Calling Network
CG_{160}
Scheme 1:
Raw Calling Network
Software Method Call Process
t_1
t_2
t_3
t_n
Time
Scheme 2:
Growing Calling Network
CG_∞

图与网络分析：引言





“智能与网络化系统研究中心 (CFINS)” *Since 2001*

“智能网络与网络安全教育部重点实验室” *Since 2005*

本章主要内容

1. 图与网络的例子与基本概念、图的连通性
2. 树、支撑树、最小树
3. 最短(有向)路问题
4. 最大流问题
5. 最小费用流问题

注意：概念多，术语不统一

§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

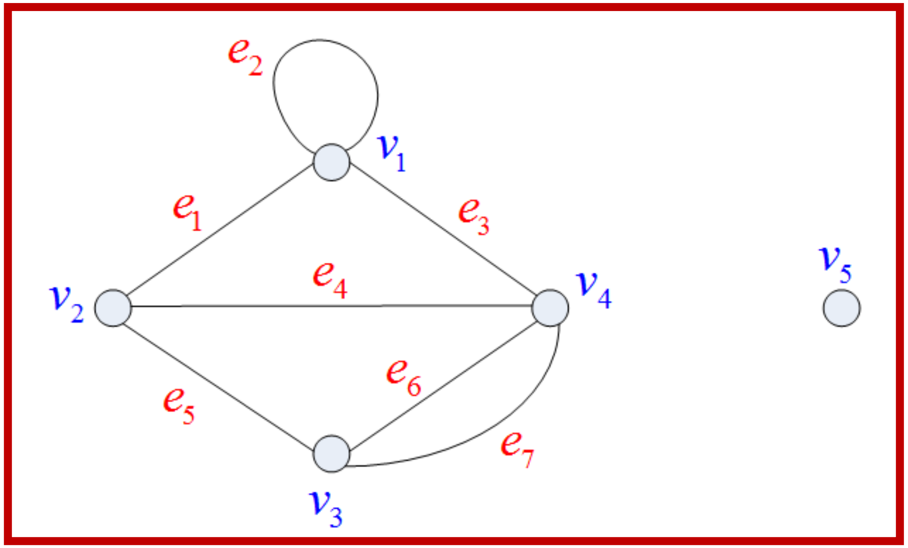
(无向)图：一个无向图G定义为一个二元组(V, E)，记作$G=(V, E)$。其中：V是一个集合，其元素称为图的**顶点**，记为$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$；$E$是另一个集合，其元素称为图的**边**，记为$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，且每一条边$e_i$都是$V$的一个一元或二元子集，即$e_i=\{v_j\}$或$e_i=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

不是一个好定义

衍生概念：

- 有限图、无限图
- 空图(m=0)、平凡图(n=1)
- 关联、邻接
- 环、重边、孤立点
- 简单图(无环、无重边)

图和它的图形表示

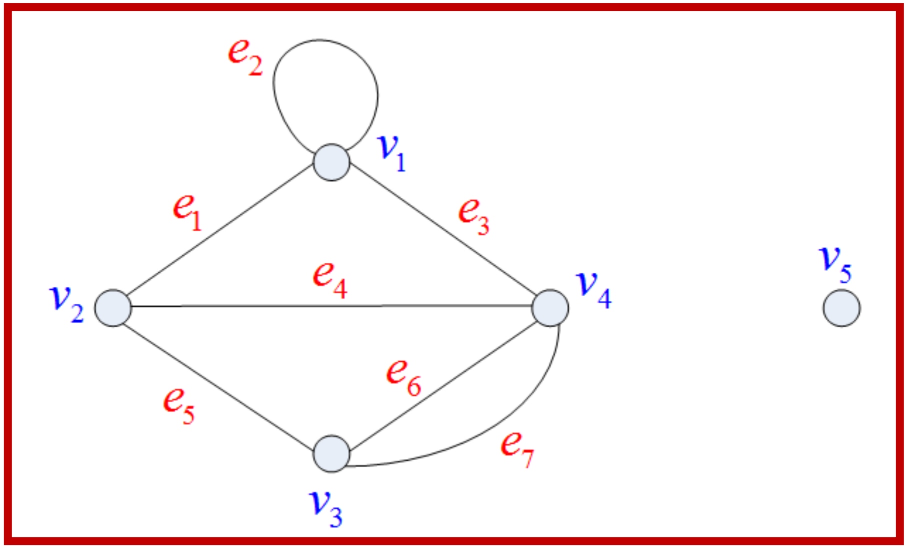


(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数 $\varphi: E\rightarrow V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或$\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

注意区分“图”和“图的图形表示”两个概念

衍生概念：
- 有限图、无限图
- 空图(m=0)、平凡图(n=1)
- 关联、邻接
- 环、重边、孤立点
- 简单图(无环、无重边)

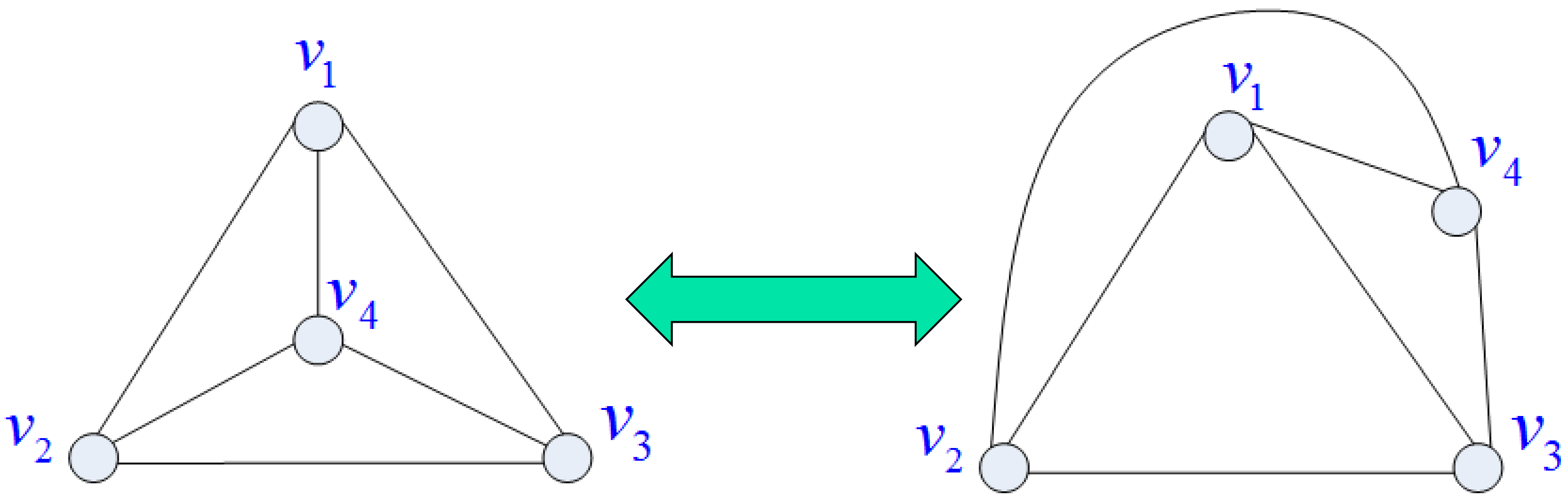
图和它的图形表示



§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数 $\varphi: E\rightarrow V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或 $\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

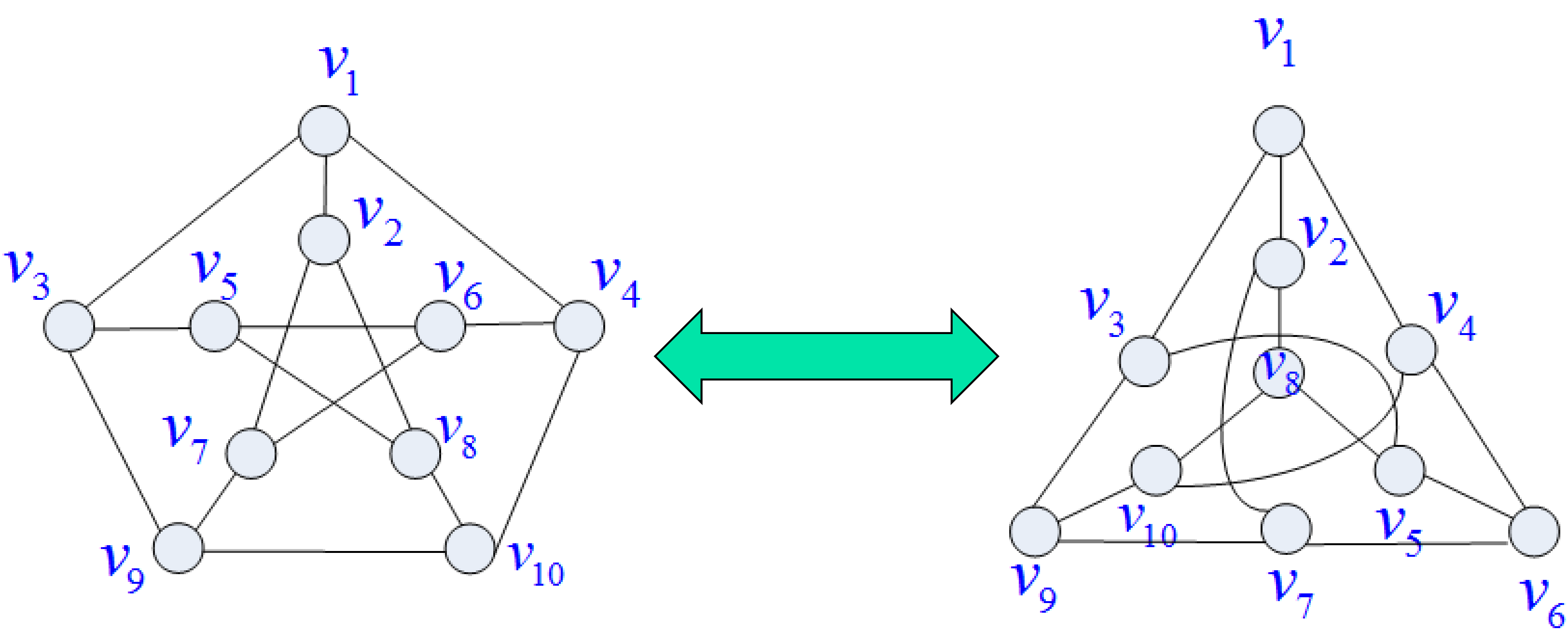
注意区分"图"和"图的图形表示"两个概念



§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$， 关联函数 $\varphi: E\rightarrow V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或$\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

注意区分“图”和“图的图形表示”两个概念



§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数 $\varphi: E\rightarrow V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或 $\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

注意区分“图”和“图的图形表示”两个概念

- 图的性质与任何具体的图形表示无关
- “图论”的所有分析本质上是符号运算和逻辑推理
- “图形表示”只起辅助分析、理解的作用
- 只能引用逻辑推理的结论，不能把几何直观上想当然的“结论”认为是真理

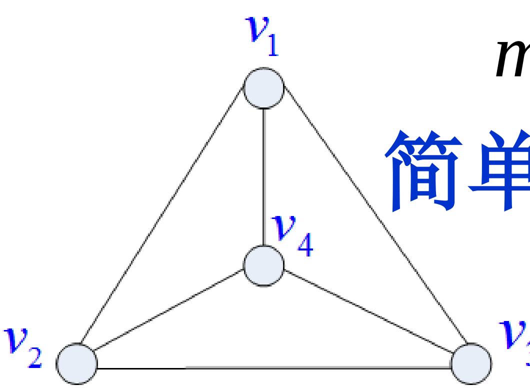
主要采用“不严谨的定义”和“图形表示”来讨论和解释有关概念、定理、算法等，但均经过严格论证

(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数$\varphi: E\rightarrow V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或$\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

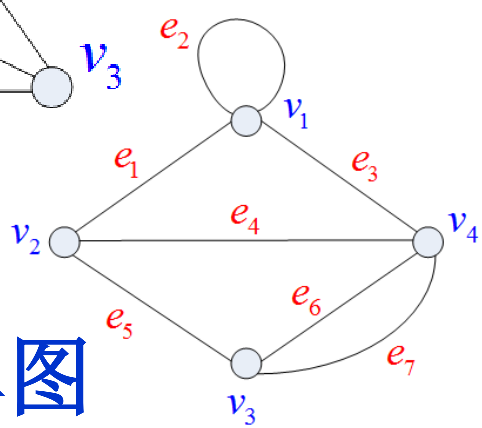
简单图：（无环，无重边）

思考：φ的特点？

$m \le n(n-1)/2$



简单图



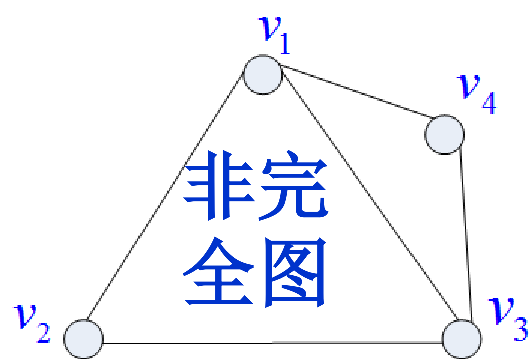
非简单图

完全图：简单图，且任意不同顶点间均有一条边

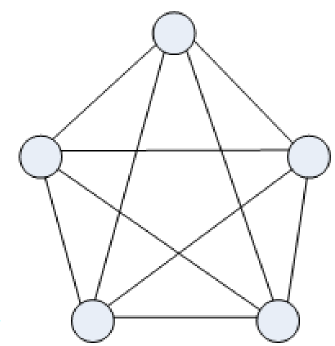
思考：φ的特点？

$m = n(n-1)/2$，记号：K_n

完全图



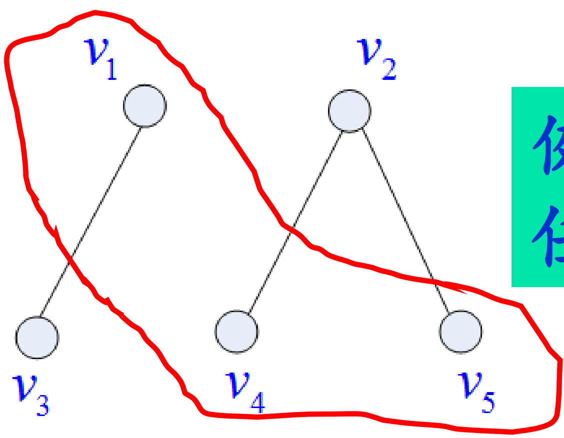
非完全图



§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数 $\varphi: E\to V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或$\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

二分图：简单图，且$V=V_1\cup V_2$，任一边的两个顶点分别在V_1和V_2中



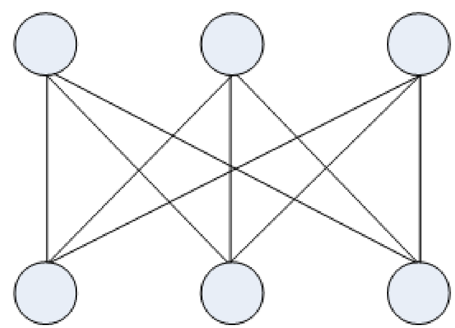
例子：
任务分配

$m\le p\times q$

$|V_1|=p, |V_2|=q$

注意：V_1和V_2取法不唯一！

完全二分图：二分图，且V_1和V_2中任意一对顶点间均有一条边，记号 $K_{p,q}$



$K_{3,3}$

$m=p\times q$

$|V_1|=p, |V_2|=q$

§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

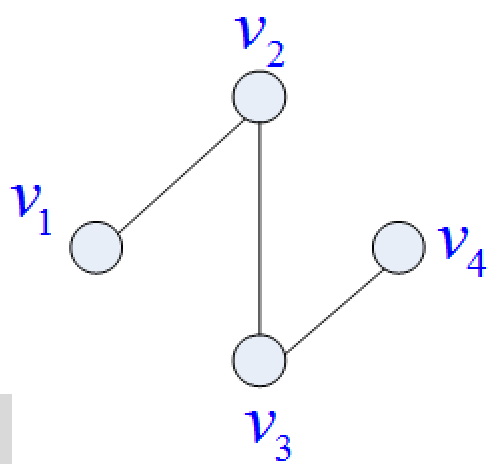
(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数 $\varphi: E\rightarrow V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或$\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

补图：对简单图$G=(V, E)$，考虑另一简单图$G'=(V, E')$，G'中两顶点间有一条边当且仅当G中该两顶点间无边。称G和G'互为补图。

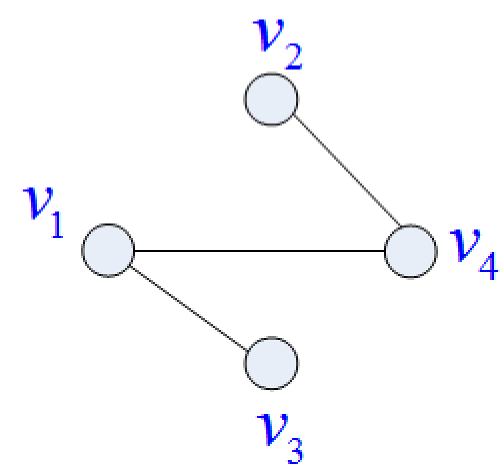
G和G'合并后得到K_n

$$|V|=n, |E|=m, |E'|=m'$$

$$m+m'=n\times(n-1)/2$$



$G=(V,E)$



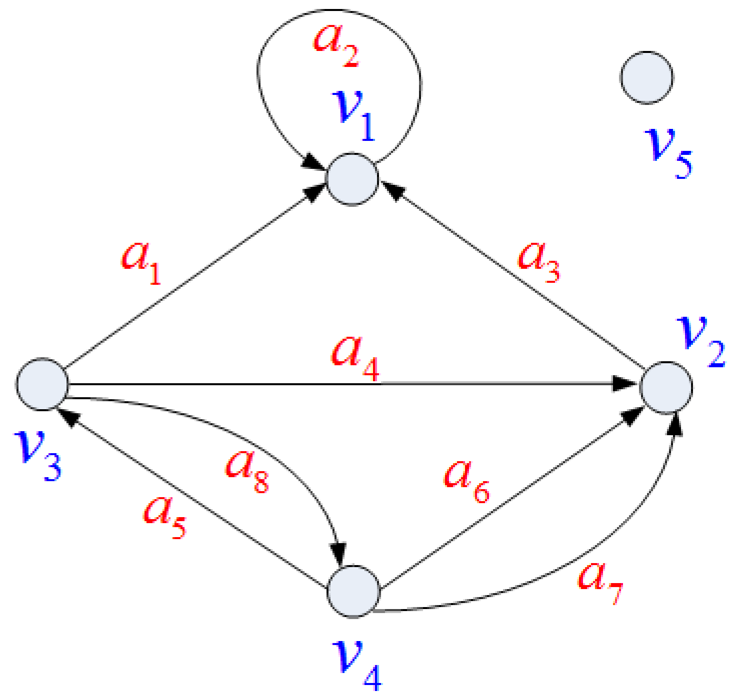
$G'=(V,E')$

有向图：一个有向图G定义为一个三元组(V, A, φ)，
顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 弧集$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$,
关联函数 $\varphi: A \to V \times V$ 的， 即$\varphi(a_i)=(v_{j1}, v_{j2})$

衍生概念：

- 弧的头(箭头所指)、尾
- 自环、重弧、孤立点
- 关联、邻接
- 简单有向图(无自环、无重弧)
- 完全有向图、二分有向图
- 有向图的基本图(弧去方向)
- 有向图的补图

有向图和它的图形表示



§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

有向图：一个有向图G定义为一个三元组(V, A, φ)，
顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，弧集$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，
关联函数 $\varphi: A \to V \times V$ 的，即$\varphi(a_i)=(v_{j1}, v_{j2})$

有向网络(赋权有向图)：给有向图的每条弧标注一个权值，记为w_i，得到(V, A, W, φ)

(无向)图：一个无向图G定义为一个三元组(V, E, φ)，顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，边集$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，关联函数 $\varphi: E \to V$的一元和二元子集，即$\varphi(e_i)=\{v_j\}$或 $\varphi(e_i)=\{v_{j1}, v_{j2}\}$

(无向)网络(赋权图)：给(无向)图的每条边标注一个权值，记为w_i，得到(V, E, W, φ)

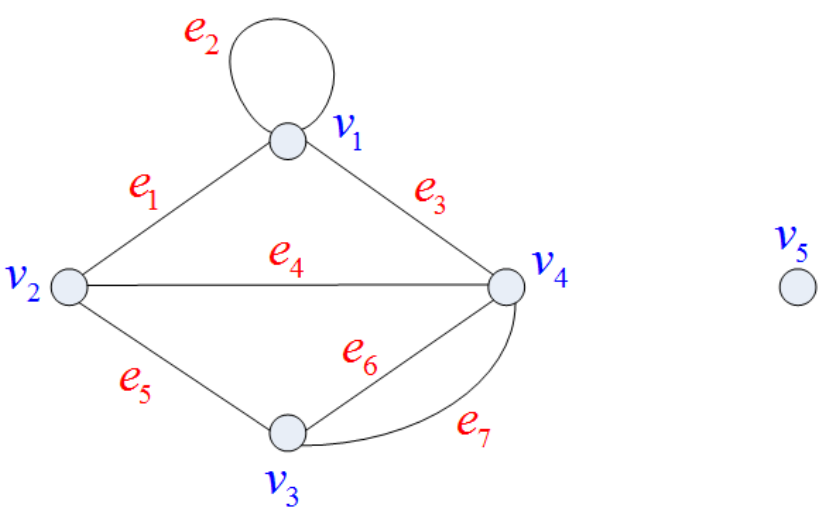
§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

分析、表示图和有向图的重要工具：关联矩阵、邻接矩阵

无向图 $G=(V,E,\varphi)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

$$\text{关联矩阵}\quad B\in R^{n\times m},\ b_{i,j}=\begin{cases}0, & \text{若顶点 } v_i \text{ 不与边 } e_j \text{ 关联}\\ 1, & \text{若顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 关联，且 } e_j \text{ 不是环}\\ 2, & \text{若顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 关联，且 } e_j \text{ 是环}\end{cases}$$

关联矩阵对非简单图仍有定义



$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

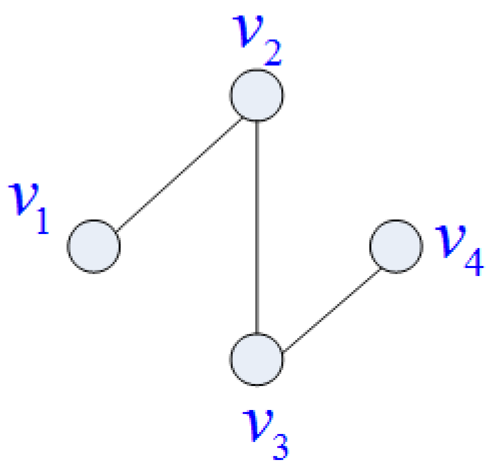
§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

分析、表示图和有向图的重要工具：关联矩阵、邻接矩阵

无向图$G = (V, E, \varphi)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

$$\text{邻接矩阵}\quad A \in R^{n\times n}, a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{若顶点 } v_i \text{ 不与 } v_j \text{ 邻接} \\ 1, & \text{若顶点 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接} \end{cases}$$

邻接矩阵是方阵，对称阵，主要针对简单图应用



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

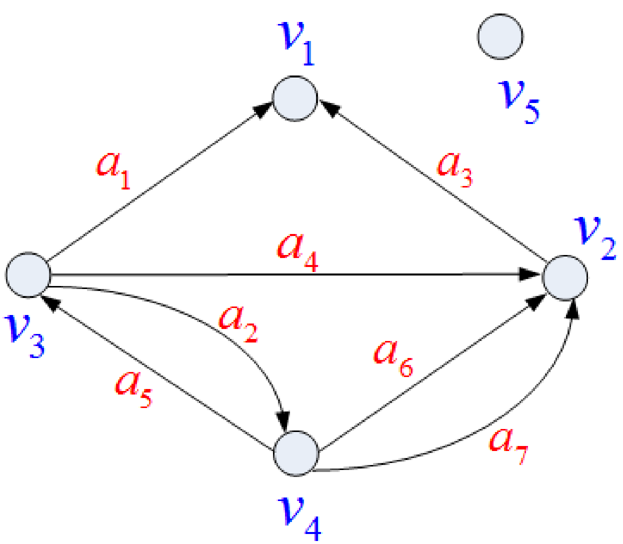
二分图邻接矩阵的结构(定理5.1.1)： $A = \begin{bmatrix} O & C \\ C^T & O \end{bmatrix}$

分析、表示图和有向图的重要工具：关联矩阵、邻接矩阵

有向图 $G=(V, A, \varphi)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

$$\text{关联矩阵 } B\in R^{n\times m},\ b_{i,j}=\begin{cases}0, & \text{若顶点 } v_i \text{ 不与弧 } a_j \text{ 关联}\\ 1, & \text{若弧 } a_j \text{ 以顶点 } v_i \text{ 为尾(发出)}\\ -1, & \text{若弧 } a_j \text{ 以顶点 } v_i \text{ 为头(指入)}\end{cases}$$

关联矩阵主要对无自环的有向图应用



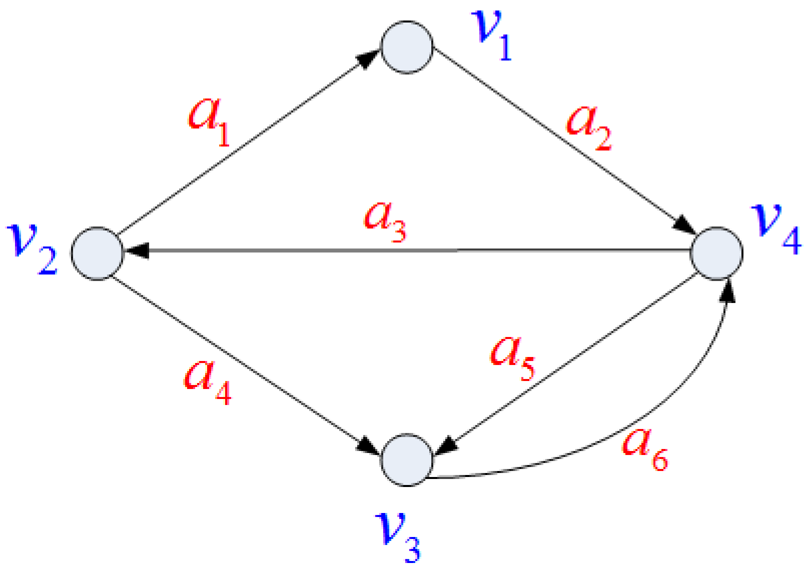
$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7\end{array}\\ \begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

分析、表示图和有向图的重要工具：关联矩阵、邻接矩阵

有向图$G=(V,A,\varphi)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

$$\text{邻接矩阵}\ C\in R^{n\times n}, c_{i,j}=\begin{cases}0, & \text{若不存在弧从 } v_i \text{ 指向 } v_j\\ 1, & \text{若存在弧从 } v_i \text{ 指向 } v_j\end{cases}$$

简单有向图的邻接矩阵是方阵，但不是对称阵



$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

分析、表示图和有向图的重要工具：关联矩阵、邻接矩阵

顶点的次、入次、出次与关联矩阵的关系

无向图$G=(V,E,\varphi)$的顶点v_i的次，记为d_i，指与它关联的边的数目，每一个环在计算顶点的次时按2计算。

$$d_i=\sum_j b_{i,j}\quad,\quad\sum_i d_i=2|E|$$

有向图$G=(V,A,\varphi)$的顶点v_i的入次，记为d_i^-，指以它为头的弧的数目；顶点v_i的出次，记为d_i^+，指以它为尾的弧的数目。

$$d_i^+-d_i^-=\sum_j b_{i,j}\quad,\quad\sum_i d_i^+=\sum_i d_i^-=|A|$$

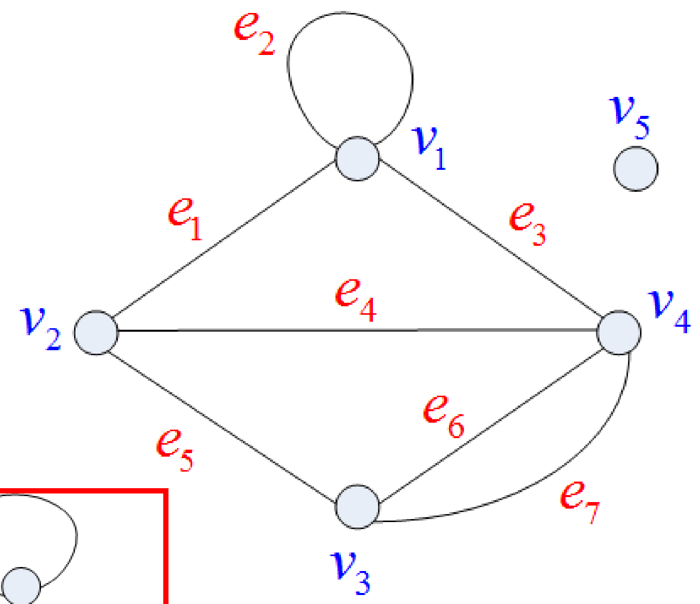
子图及图的交、并运算

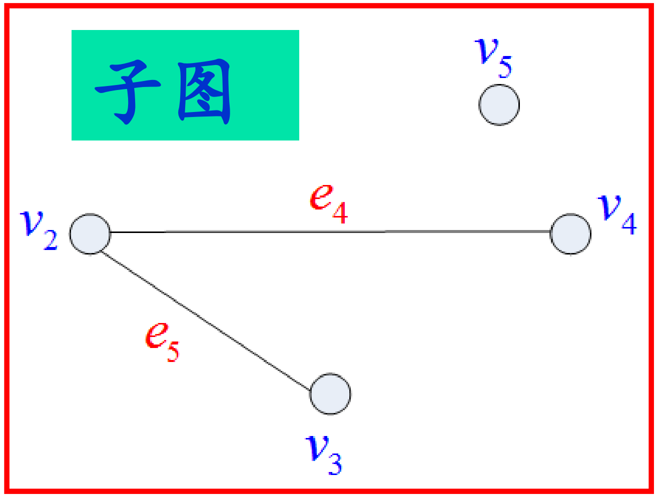
仅讨论无向图

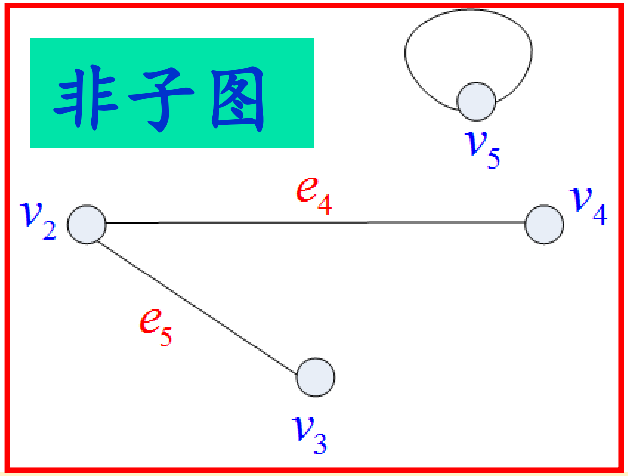
无向图 $G = (V, E)$， $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

子图： $G' = (V', E'), V' \subset V, E' \subset E,$

且 E' 中的边其顶点均在 V' 中







子图及图的交、并运算　　　　仅讨论无向图

无向图$G=(V, E)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

子图： $G'=(V', E'), V'\subset V, E'\subset E,$

且E'中的边其顶点均在V'中

支撑子图： $G'=(V', E')$是子图，且$V'=V$

点导出子图： E'中包含了E中所有两顶点均在V'中的边

边导出子图： V'中包含了与E'中的边关联的所有顶点

两个子图的关系与运算：$G_1=(V_1, E_1), G_2=(V_2, E_2)$

不相交 $V_1\cap V_2=\phi$ ⟹ **边不重** $E_1\cap E_2=\phi$

并 $G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$，**交** $G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2, E_1\cap E_2)$

图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

无向图$G=(V,E)$，$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

无向图的一条**路**定义为顶点和边的一个交错序列：

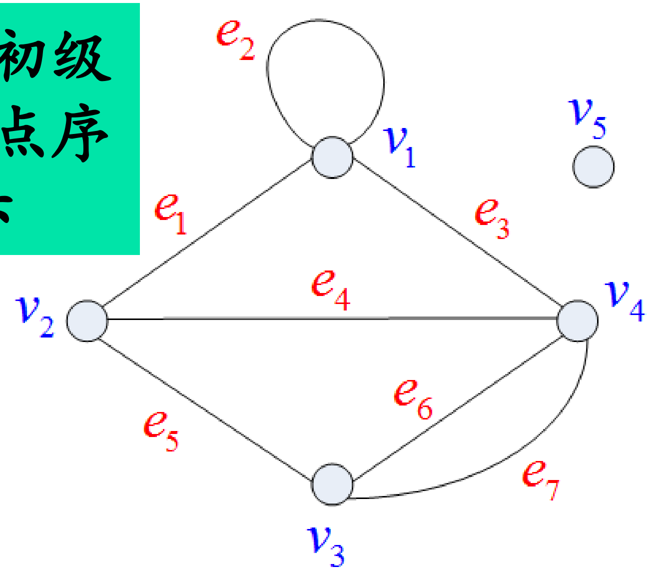
$$\left(v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, e_{j_k}, v_{i_k}\right)$$

且其中每一条边 e_{j_l} 恰好与 $v_{i_{l-1}}, v_{i_l}$ 两个顶点关联。

衍生概念：

- 路的起点、终点、逆
- 中间片段、长度(边数)
- 简单路(边互不相同)
- **初级路**(顶点互不相同)

简单图中初级路可用顶点序列表示



图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

无向图$G = (V, E)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

无向图的一条**路**定义为顶点和边的一个交错序列：

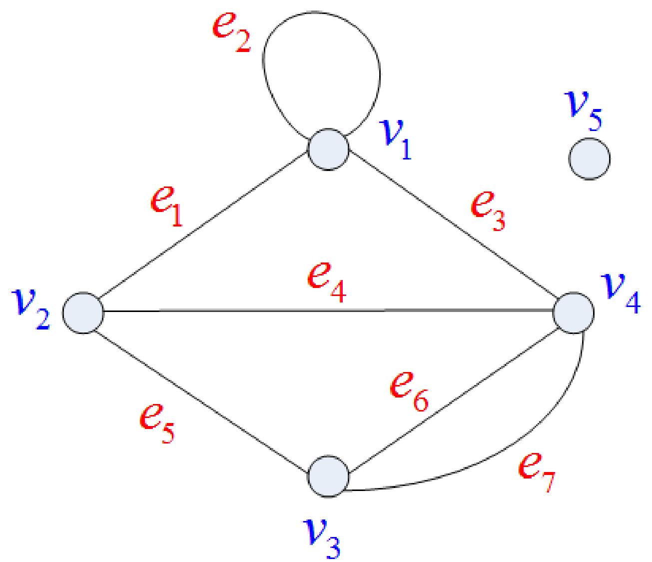
$$\left(v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, e_{j_k}, v_{i_k}\right)$$

且其中每一条边 e_{j_l} 恰好与 $v_{i_{l-1}}, v_{i_l}$ 两个顶点关联。

衍生概念：

简单回路(起、终点重合，且边互不相同)

➢ **初级回路**(简单回路，且起终点与中间顶点互不相同)



图的连通性及相关概念、性质

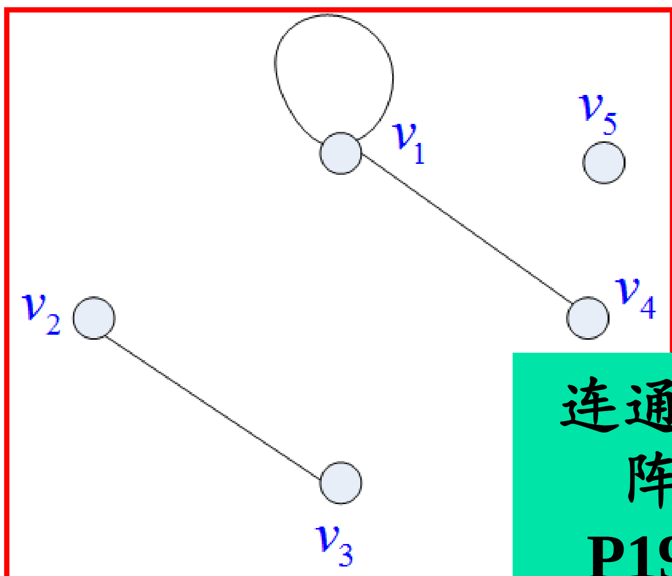
图论及网络优化中非常核心和基本的概念

无向图$G = (V, E)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

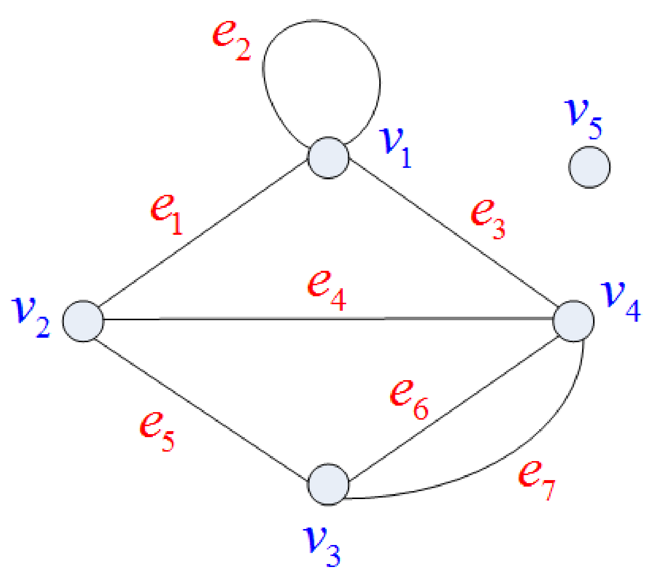
若两顶点间至少存在一条路，则称二顶点**连通**。

若图G的任意两顶点都连通，则称为**连通图**。

连通分支：G的**极大**连通子图



连通分支与邻接阵的关系：P199定理5.2.1



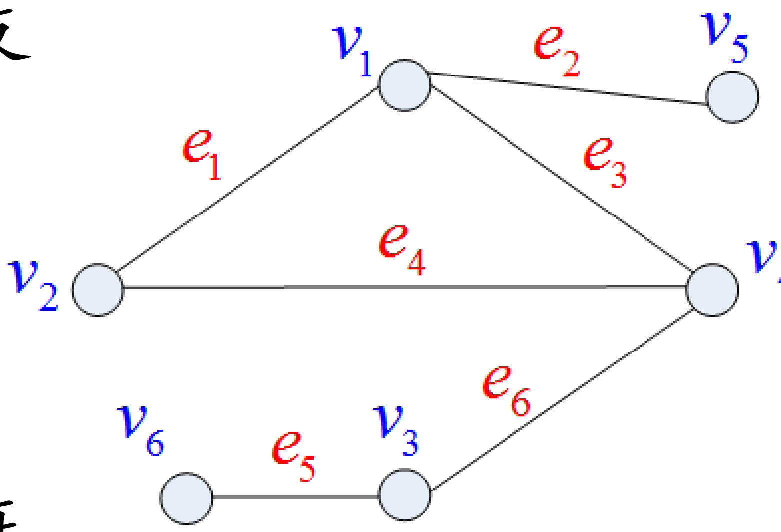
图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

无向图$G = (V, E)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

割边：若某条边去掉后，连通分支数严格增加，则该边称为割边。

例：图中e_2, e_5, e_6均为割边。



思考：去掉一条割边后，连通分支增加多少？ 只增加1

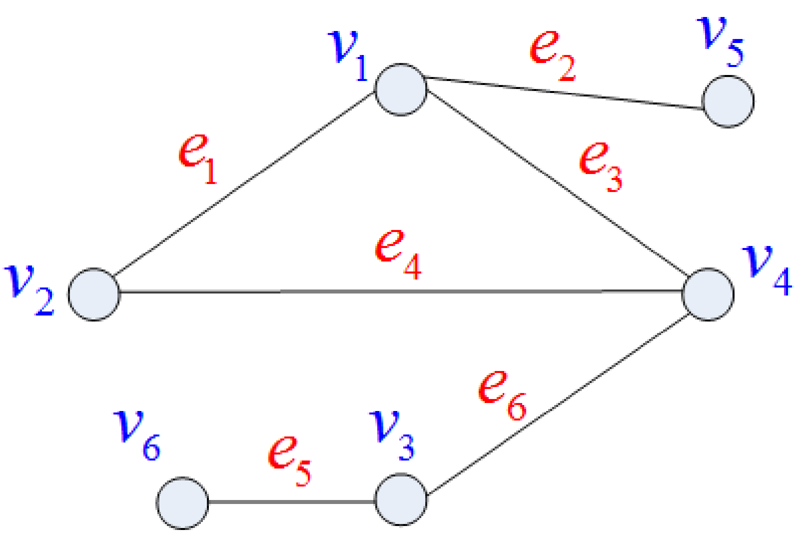
边割：$S \subset V, \{S, \bar{S}\}$表示一个顶点在$S$中，另一个顶点在$\bar{S}$中的边的全体，若其不空，则称为边割。

例：至多31个边割

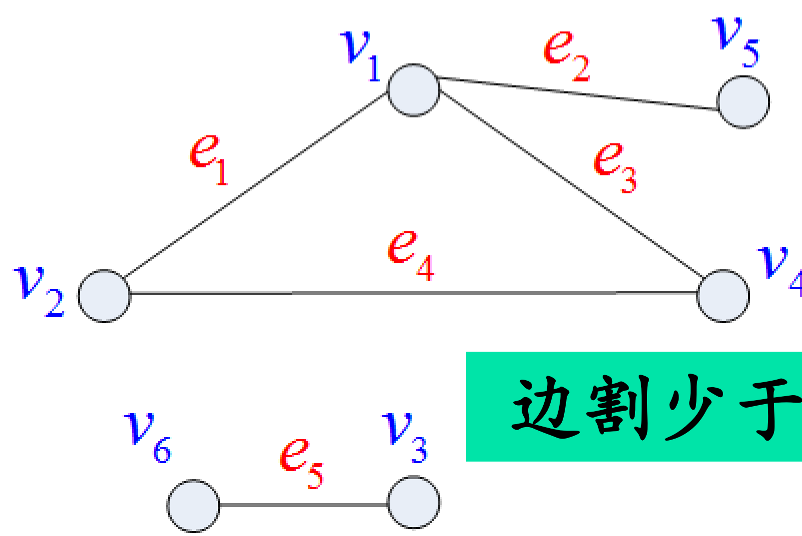
注意：边割是边的子集

思考：割边是边割吗？
边割的子集仍可能是边割？

§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性



至多31个边割



边割少于31个

$$\{e_1, e_4\} = (\{v_2\},\{v_1,v_3,v_4,v_5,v_6\})$$
$$= (\{v_2,v_3,v_6\},\{v_1,v_4,v_5\})$$

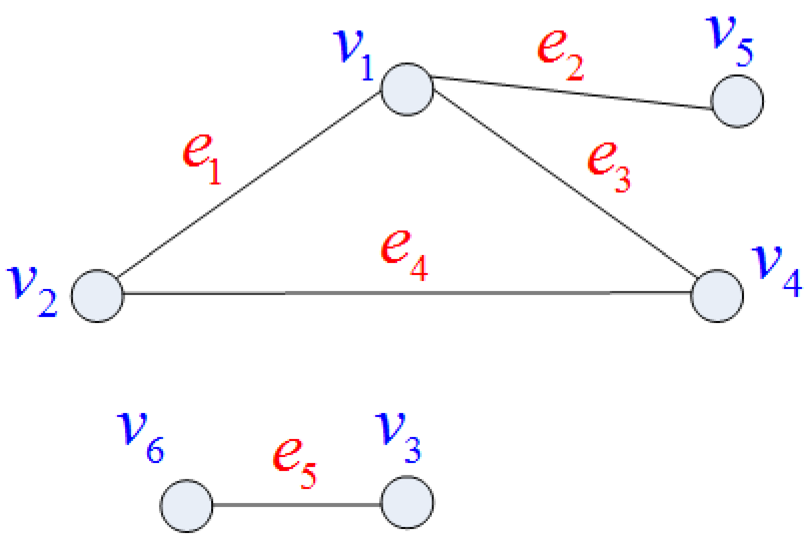
边割：$S\subset V, \{S,\bar{S}\}$ 表示一个顶点在 S 中，另一个顶点在 $\bar{S}$ 中的边的全体，若其不空，则称为边割。

注意：边割的形式表示不唯一

注意：边割是边的子集

思考：割边是边割吗？
边割的子集仍可能是边割？

割集： 若某边割的任意真子集都不是边割，则其称为割集。



$$\{e_1, e_4\} = (\{v_2\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\})$$
$$= (\{v_2, v_3, v_6\}, \{v_1, v_4, v_5\})$$

- 割集的形式表示不唯一
- 割边是割集
- 去掉割集后，连通分支数增加1

边割： $S \subset V, \{S, \bar{S}\}$ 表示一个顶点在 S 中，另一个顶点在 $\bar{S}$ 中的边的全体，若其不空，则称为边割。

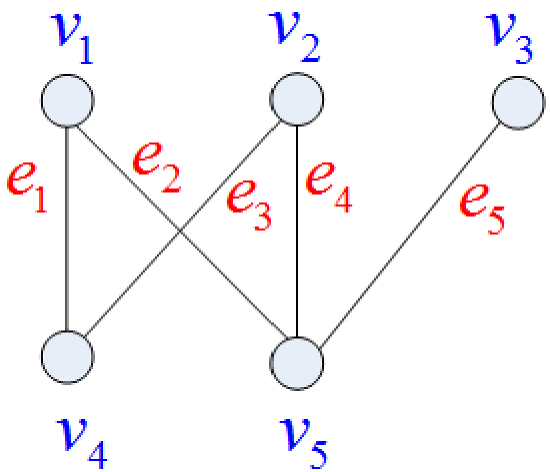
注意：边割的形式表示不唯一

注意：边割是边的子集

思考： 割边是边割吗？
边割的子集仍可能是边割？

割集：若某边割的任意真子集都不是边割，则其称为割集。

定理5.2.2：任何边割都是互不相交割集的并。



$$S=\{v_1,v_2,v_3\},\bar{S}=\{v_4,v_5\}$$

$$\{S,\bar{S}\}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$$

$$\{S,\bar{S}\}=\{e_1,e_2\}\cup\{e_3,e_4\}\cup\{e_5\}$$

$$\{S,\bar{S}\}=\{e_1,e_3\}\cup\{e_2,e_4\}\cup\{e_5\}$$

边割：$S\subset V,\{S,\bar{S}\}$ 表示一个顶点在 S 中，另一个顶点在 $\bar{S}$ 中的边的全体，若其不空，则称为边割。

注意：边割的形式表示不唯一

注意：边割是边的子集

思考：割边是边割吗？
边割的子集仍可能是边割？

§1.图与网络的例子与基本概念、图的连通性

有向图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

有向图$G=(V, A)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

一条**有向路**定义为顶点和弧的一个交错序列：

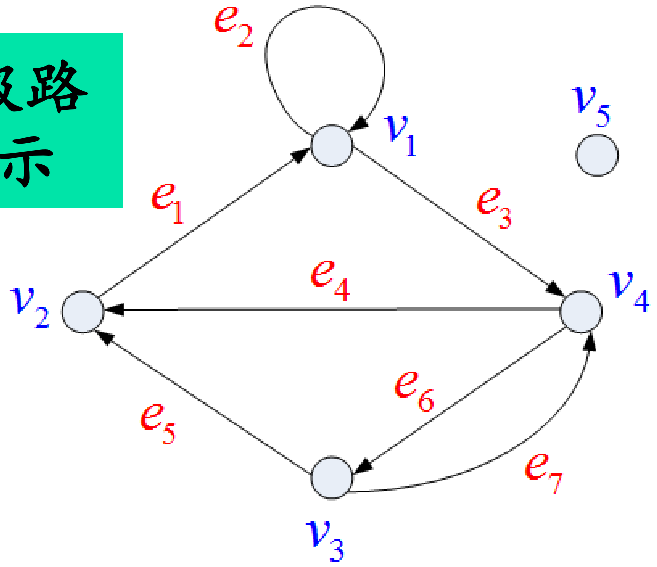
$$\left(v_{i_0}, a_{j_1}, v_{i_1}, a_{j_2}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, a_{j_k}, v_{i_k}\right)$$

且其中每一条弧 a_{j_l} 恰好以 $v_{i_{l-1}}, v_{i_l}$ 分别为尾和头。

衍生概念：

- 路的起点、终点
- 中间片段、长度(弧数)
- 简单有向路(弧互不相同)
- **初级有向路**(顶点互不相同)

简单有向图中初级路可用顶点序列表示



有向图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

有向图 $G = (V, A)$， $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

一条**有向路**定义为顶点和弧的一个交错序列：

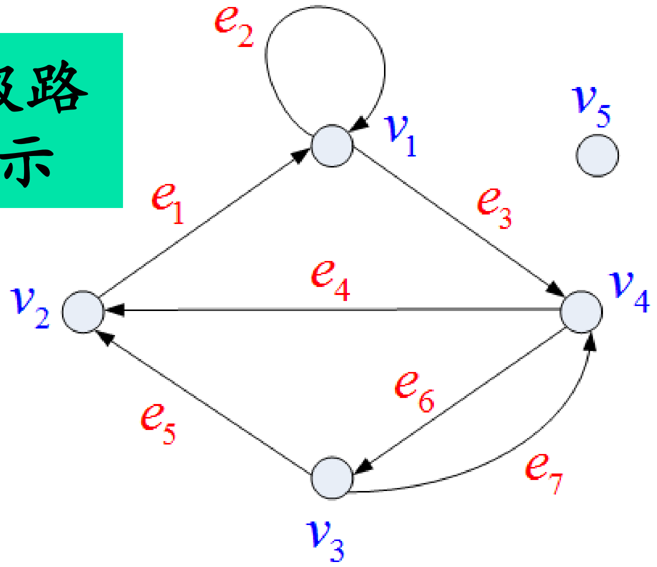
$$\left(v_{i_0}, a_{j_1}, v_{i_1}, a_{j_2}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, a_{j_k}, v_{i_k}\right)$$

且其中每一条弧 a_{j_l} 恰好以 $v_{i_{l-1}}, v_{i_l}$ 分别为尾和头。

衍生概念：

- 有向回路
- 简单有向回路(弧互不相同)
- **初级有向回路**(简单有向回路，且起终点与中间顶点互不相同)

简单有向图中初级路可用顶点序列表示



有向图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

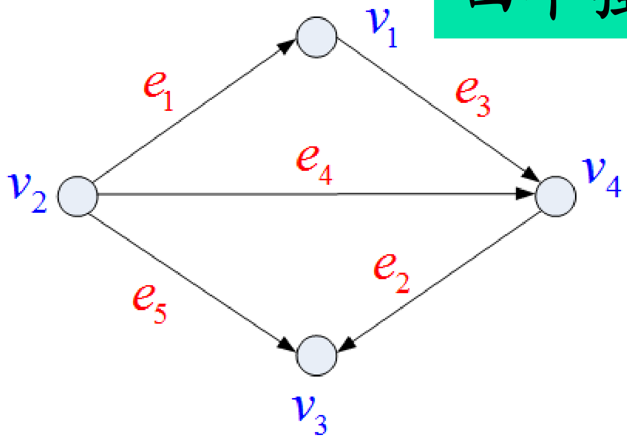
有向图$G = (V, A)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

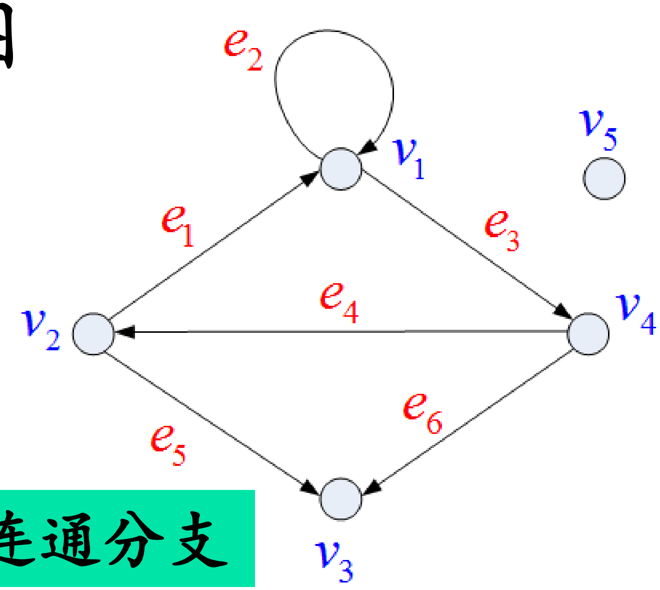
强连通：若存在一条从v_i到v_j的有向路，也存在一条从v_j到v_i的有向路则称二顶点**强连通**。

若图G的任意两顶点都强连通，则称为**强连通图**。

强连通分支：G的**极大**强连通有向子图

四个强连通分支





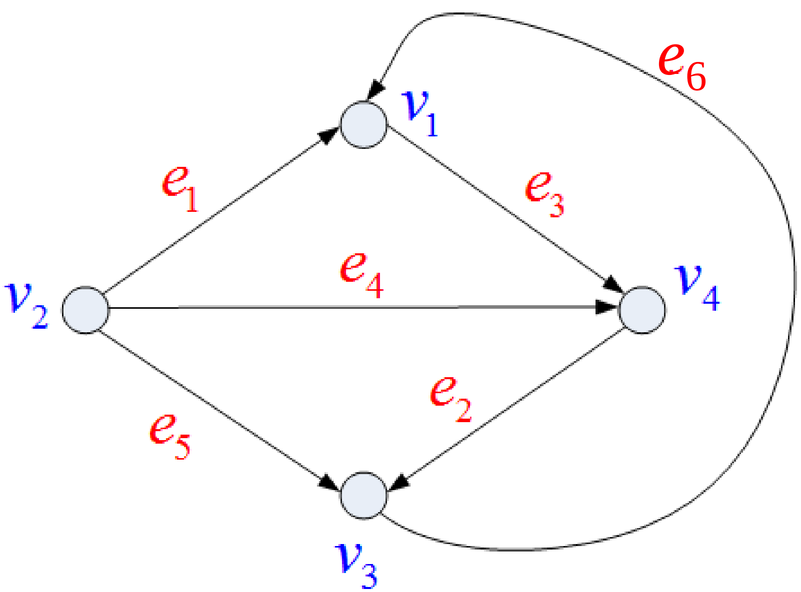
三个强连通分支

有向图的连通性及相关概念、性质

图论及网络优化中非常核心和基本的概念

有向图$G=(V, A)$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

弧割：$S \subset V, \{S, \bar{S}\}$表示尾在 S 中，头在 $\bar{S}$ 中的弧的全体，若其不空，**且去掉后会使强连通分支数增加**，则称为弧割。



- **弧割是弧的子集**
- **$\{e_1, e_4, e_5\}$不是弧割**
- **$\{e_3, e_4, e_5\}$是弧割，$\{e_3\}$也是弧割**
- **去掉弧割后，强连通分支数增加可能不止1**

有向割集：任何真子集都不是弧割的弧割(极小化弧割)。

谢谢！

割集： 若某边割的任意真子集都不是边割，则其称为割集。

定理5.2.2： 任何边割都是互不相交割集的并。