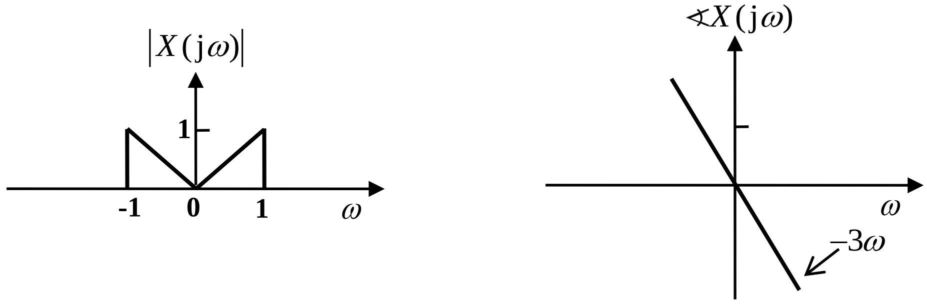
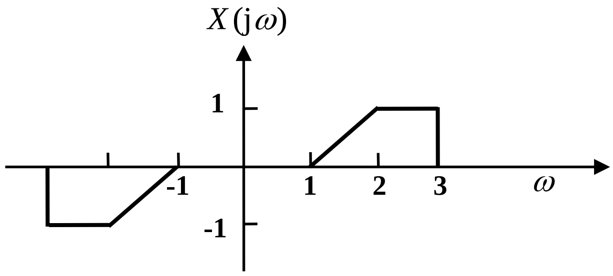
22 对下列每一个变换求对应的连续时间信号：

（c） $X(\mathrm{j}\omega)$ 的模和相位如下图所示




（e） $X(\mathrm{j}\omega)$ 如下图所示




解：这题主要是计算错误。求傅里叶反变换主要有两种方法，一种是直接按定义进行积分，另一种则是利用常见的傅里叶变换对及傅里叶变换性质。

（c）方法一：定义求解。

由图像可知，信号的频谱可以表示为 $\mathrm{X(j\omega)} = |\omega| e^{-j3\omega}$，$|\omega| \le 1$。

从而由傅立叶反变换的公式可得，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{0} -\omega e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega + \int_{0}^{1} \omega e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{0} -\omega e^{j\omega(t-3)}d\omega + \int_{0}^{1} \omega e^{j\omega(t-3)}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\left(\frac{1}{j(t-3)}\omega + \frac{1}{(t-3)^2}\right)e^{j\omega(t-3)}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{j(t-3)}\omega + \frac{1}{(t-3)^2}\right)e^{j\omega(t-3)}\Big|_{0}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(t-3)}{t-3} + \frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}\right)
\end{aligned}
$$

方法二：傅里叶变换对求解。

由于 $\mathrm{X(j\omega)} = |\omega| e^{-j3\omega}$，$|\omega| \le 1$，

若令 $G(j\omega) = \begin{cases} -1, & -1 \le \omega \le 0 \\ 1, & 0 \le \omega \le 1 \end{cases}$，则有 $\mathrm{X(j\omega)} = \omega G(j\omega) e^{-j3\omega}$。

由于 $G(j\omega)$ 可以由一个门宽为 1 的门信号向右位移 0.5 个单位以及一个门宽为 1

的门信号颠倒后向左位移 0.5 个单位叠加得到，故有

$$g(t)=e^{-j0.5t}\frac{\sin 0.5t}{\pi t}-e^{j0.5t}\frac{\sin 0.5t}{\pi t}=\frac{2j\sin^2 0.5t}{\pi t}=\frac{j(1-\cos t)}{\pi t}$$

从而有 $\omega G(j\omega)\leftrightarrow -j\dfrac{dg(t)}{dt}=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{dt}[\dfrac{1-\cos t}{t}]=\dfrac{1}{\pi}[\dfrac{\sin t}{t}-\dfrac{1-\cos t}{t^2}]$

$$\therefore \omega G(j\omega)e^{-j3\omega}\leftrightarrow\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(t-3)}{t-3}-\frac{1-\cos(t-3)}{(t-3)^2}]$$

即 $x(t)=\dfrac{1}{\pi}[\dfrac{\sin(t-3)}{t-3}-\dfrac{1-\cos(t-3)}{(t-3)^2}]$

（e）方法一：定义求解。

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\int_{-3}^{-2}-e^{j\omega t}d\omega+\int_{-2}^{-1}(\omega+1)e^{j\omega t}d\omega+\int_{1}^{2}(\omega-1)e^{j\omega t}d\omega+\int_{2}^{3}e^{j\omega t}d\omega)$$

$$=\frac{\cos 3t}{j\pi t}+\frac{\sin t-\sin 2t}{j\pi t^2}$$

方法二：傅里叶变换对求解。

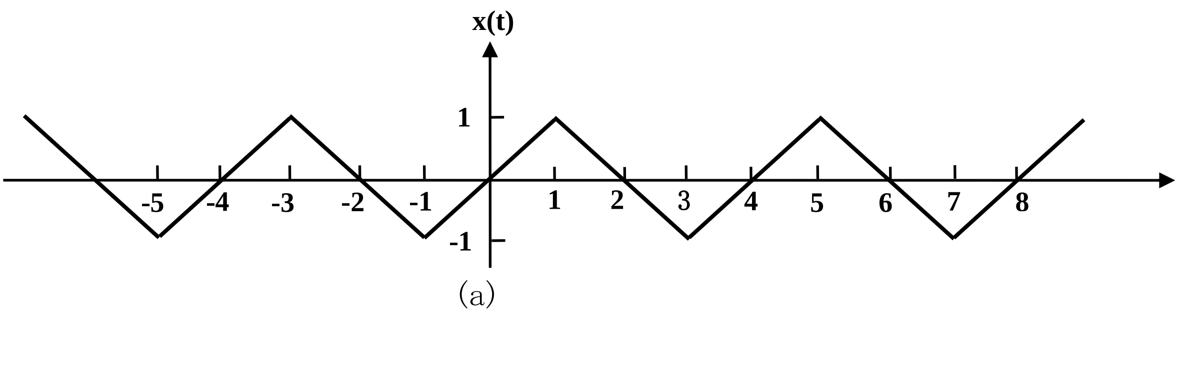
由 $\mathrm{X}(j\omega)$ 谱图可知，$\dfrac{d\mathrm{X}(j\omega)}{\mathrm{d}\omega}=-\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)+\begin{cases}1, -2\le\omega\le -1\\ 0, \text{其他}\end{cases}+\begin{cases}1, 1\le\omega\le 2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$

因此，$jtx(t)=-\dfrac{1}{2\pi}e^{-j3t}-\dfrac{1}{2\pi}e^{j3t}+e^{-j1.5t}\dfrac{\sin 0.5t}{\pi t}+e^{j1.5t}\dfrac{\sin 0.5t}{\pi t}$

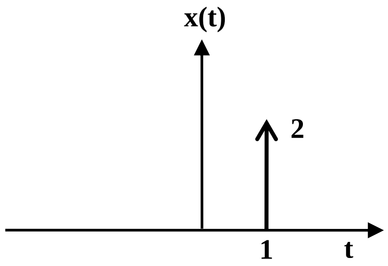
从而 $x(t)=\dfrac{\cos 3t}{j\pi t}-\dfrac{2\sin 0.5t\cos 1.5t}{j\pi t^2}=\dfrac{\cos 3t}{j\pi t}+\dfrac{\sin t-\sin 2t}{j\pi t^2}$（积化和差）

24　(a) 下图所示的实信号中，如果有的话，哪些信号的傅里叶变换满足下列所有条件：

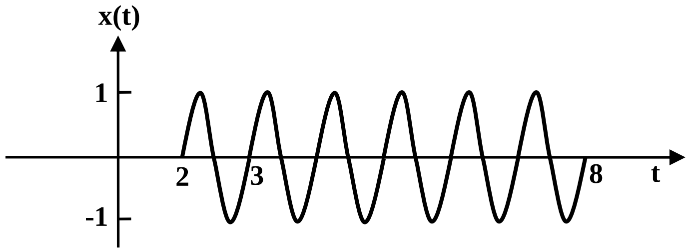
(4) $\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=0$　　(5) $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=0$　　(6) $X(\mathrm{j}\omega)$ 是周期的。



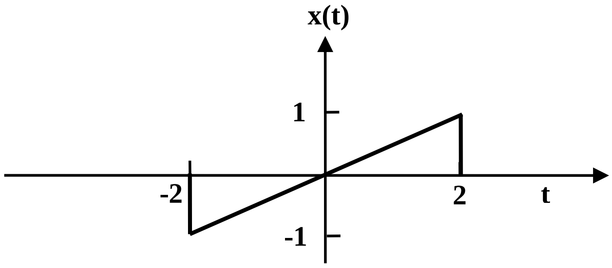
(a)



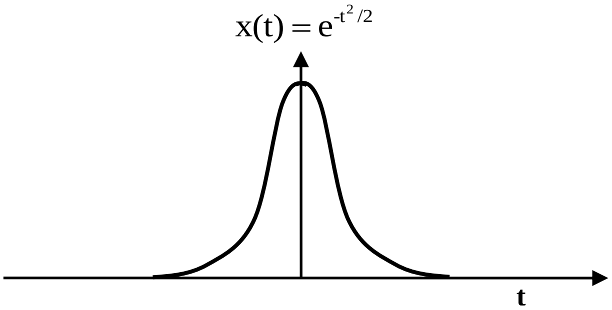

(b)



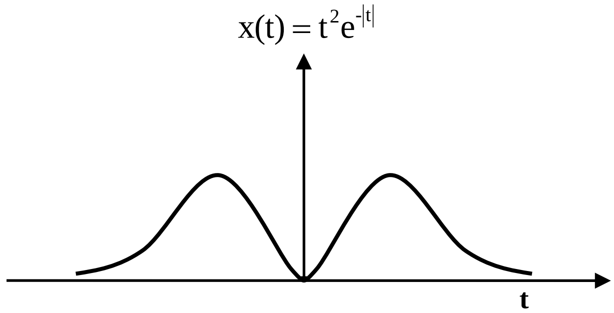

(c)




(d)




(e)




(f)

解：这题主要是后面三个性质的判断。

（4）由傅里叶逆变换 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$。令 t=0, 则 $x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)d\omega$。

因此，性质（4）即 $x(0)=0$。

则满足条件的信号为（a）（b）（c）（d）（f）。

（5）由时域微分性质 $\frac{d}{dt}x(t)\to j\omega X(j\omega)$，可得到傅里叶变换式

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

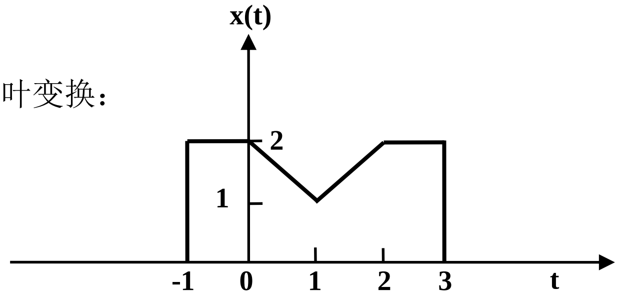
令 t=0, 则 $\frac{d}{dt}x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}j\omega X(j\omega)d\omega=0$。因此，性质（4）即 $x'(0)=0$。

则满足条件的信号为（b）（c）（e）（f）。

（6）由于时域离散，频域周期，因此性质（6）即 $x(t)$ 是离散的。

则满足条件的信号为（b）。

25 设 $X(\mathrm{j}\omega)$ 为右下图所示信号 $x(t)$ 的傅里叶变换：




(a) 求 $\sphericalangle X(\mathrm{j}\omega)$

(e) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}|X(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$

注意：不必具体算出 $X(\mathrm{j}\omega)$ 就能完成以上全部计算。

解：（a）由于题目已经说明无需计算 $X(\mathrm{j}\omega)$，因此主要考虑傅里叶变换的一些性质。从图中可以看出，$x(t)$ 最直观的性质是其对称性，即 $y(t)=x(t+1)$ 是实的偶函数。因此有 $Y(\mathrm{j}\omega)$ 的虚部为 0，即 $\sphericalangle Y(\mathrm{j}\omega)=0$。

而 $y(t)$ 是 $x(t)$ 向左平移一个单位得到的，故 $Y(j\omega)=e^{j\omega}X(j\omega)$。从而 $\sphericalangle Y(j\omega)=\omega+\sphericalangle X(j\omega)$，故 $\sphericalangle X(\mathrm{j}\omega)=-\omega$。

（e）该小问主要是计算结果出错。由 parseval 定理，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\, d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\, dt$$

$$=2\pi\left(\int_{-1}^{0}2^2dt+\int_{0}^{1}(2-t)^2dt+\int_{1}^{2}t^2dt+\int_{2}^{3}2^2dt\right)$$

$$=2\pi\left(4+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+4\right)=\frac{76}{3}\pi$$

35 在本题中给出有关相位非线性变化产生的影响的几个例子。

(a) 有一个连续时间 LTI 系统，其频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{a-\mathrm{j}\omega}{a+\mathrm{j}\omega}$$

式中 $a>0$。问 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的模是什么？$\sphericalangle H(\mathrm{j}\omega)$ 是什么？该系统的单位冲激响应是什么？

(b) 若在(a)中，$a=1$，当输入为

$$\cos(t/\sqrt{3})+\cos t+\cos\sqrt{3}t$$

求该系统输出，并大致画出输入和输出。

解：(a) 由于$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{a-\mathrm{j}\omega}{a+\mathrm{j}\omega}$，从而由复数的运算性质可知

$$|H(j\omega)|=\frac{|a-\mathrm{j}\omega|}{|a+\mathrm{j}\omega|}=\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=1,\quad \measuredangle H(j\omega)=\measuredangle(a+j\omega)-\measuredangle(a-j\omega)=-2\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

或者可以将$H(\mathrm{j}\omega)$化为$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{a-\mathrm{j}\omega}{a+\mathrm{j}\omega}=\dfrac{a^2-\omega^2}{a^2+\omega^2}-j\dfrac{(2a\omega)}{a^2+\omega^2}$，则

$$|H(j\omega)|==\frac{\sqrt{(a^2-\omega^2)+(2a\omega)^2}}{a^2+\omega^2}=1,\quad \measuredangle H(j\omega)=-\tan^{-1}\frac{2a\omega}{a^2-\omega^2}$$，两者等价。

又因为$H(j\omega)=\dfrac{a-\mathrm{j}\omega}{a+\mathrm{j}\omega}=-1+\dfrac{2a}{a+j\omega}$，因此有傅里叶变换对可知，

$h(t)=-\delta(t)+2ae^{-at}u(t)$。

(b) 当 a=1 时，有$|H(j\omega)|=1,\measuredangle H(j\omega)=-2\tan^{-1}\omega$。

注意到输入$x(t)=\cos(t/\sqrt{3})+\cos t+\cos\sqrt{3}t$的频谱是单独的谱线，而 LTI 系统即是对信号频谱各个频点做复振幅的加权，

因此由$|H(j\omega)|=1,\measuredangle H(j\omega)=-2\tan^{-1}\omega$

得$H(j\dfrac{1}{\sqrt{3}})=e^{j(-\frac{\pi}{3})},H(j1)=e^{j(-\frac{\pi}{2})},H(j\sqrt{3})=e^{j(-\frac{2\pi}{3})}$

故$y(t)=\cos(t/\sqrt{3}-\pi/3)-\cos(t-\pi/2)+\cos(\sqrt{3}t-2\pi/3)$