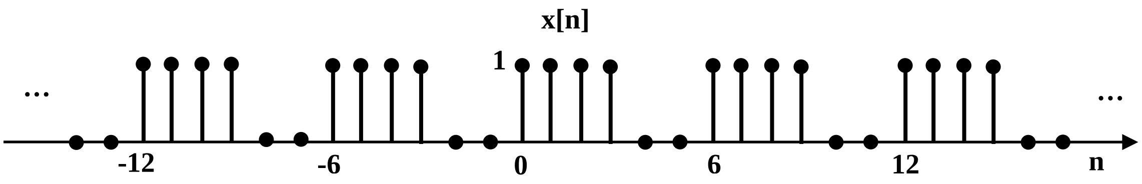
28 对下图所示的离散时间周期信号 $x[n]$ 求傅里叶级数系数，并画出每一组系数 a_k 的模和相位。



(b)

解：3.22 与该题类似，主要问题是部分同学忘记单独计算 a_0，以及未对表达式化简。

由图像可知，$x[n]$ 的周期 $T=6$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，选择 $0\le n\le 5$ 范围，

先计算 a_0，有 $a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]=\frac{2}{3}$。

当 $k\neq 0$ 时,有 $a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-j\frac{\pi}{3}kn}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{3}kn}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$（等比数列求和）

也可进一步化简，以便于求出其模和相位。

$$a_k=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\cdot(e^{j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k})}{e^{-j\frac{\pi}{6}k}\cdot(e^{j\frac{\pi}{6}k}-e^{-j\frac{\pi}{6}k})}=\frac{1}{6}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}k+j\frac{\pi}{6}k}\cdot\frac{\frac{(e^{j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k})}{2j}}{\frac{(e^{j\frac{\pi}{6}k}-e^{-j\frac{\pi}{6}k})}{2j}}=\frac{1}{6}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{3}k}{\sin\frac{\pi}{6}k}$$

从而可以得到当 $k\neq 0$ 时，a_k 的模为 $\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{3}k}{\sin\frac{\pi}{6}k}$，相位为 $-\frac{\pi k}{2}$。

41 关于一个周期为 3 和傅里叶系数为 a_k 的连续时间周期信号给出下面信息：

1. $a_k=a_{k+2}$ 2. $a_k=a_{-k}$ 3. $\int_{-0.5}^{0.5}x(t)dt=1$ 4. $\int_{0.5}^{1.5}x(t)dt=2$

试确定 $x(t)$。

解：这题大部分原因是未能正确理解条件 1，从而导致出错。

由条件 1（$a_k=a_{k+2}$）可知，

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{k+2}e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{k+2}e^{j(k+2)\omega_0 t}\cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$=e^{-j2\omega_0 t}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{k+2}e^{j(k+2)\omega_0 t}$$

$$=e^{-j2\omega_0 t}\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}a_{k'}e^{jk'\omega_0 t}(\text{令}k'=k+2)$$

$$=e^{-j2\omega_0 t}x(t)$$

若使上式恒成立，则需要在 $e^{-j2\omega_0 t}$ 不为 1 时，即 $t\neq\frac{3}{2}m,m\in Z$ 时，$x(t)$ 等于 0。

再由条件 3（$\int_{-0.5}^{0.5}x(t)dt=1$），可知当 $-0.5\le t\le 0.5$ 时， $x(t)$ 只能在 t=0 处有值且为 1。

由条件 4（$\int_{0.5}^{1.5}x(t)dt=2$），可知当 $0.5\le t\le 1.5$ 时， $x(t)$ 只能在 t=1.5 处有值且为 2。

最后由条件 2（$a_k=a_{-k}$），可知 $x(t)=x(-t)$，即 $x(t)$ 偶对称。

因此，在一个周期 $-1.5<t\le 1.5$ 内，仅在 t=0 处有值为 1，t=1.5 处有值为 2。

即该周期信号可以表示为 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(t-3k)+2\delta(t-\frac{3}{2}-3k)]$。

48 令 $x[n]$ 是一个周期为 N 的周期序列，其傅里叶级数表示为

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

下列每个信号的傅里叶级数系数都能用上式中的 a_k 来表示，试导出如下信号的表示式：

(c) $x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$（N 为偶数）

(d) $x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$（N 为偶数；注意该信号是周期的，周期为 $N/2$）

解：该题主要是(d)小问出错，未能注意到信号的周期变化。

对于(c)，该信号的周期还是同信号 $x[n]$ 周期，即周期为 N。

此时，设其傅里叶级数系数为 c_k，则由

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}(x[n]-x[n-\frac{N}{2}])\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}-\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n-\frac{N}{2}]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于 $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$，故有

$$c_k=a_k-\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n-\frac{N}{2}]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-\frac{N}{2})}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}}$$
$$=a_k-e^{-jk\pi}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n-\frac{N}{2}]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n-\frac{N}{2})}$$
$$=a_k-e^{-jk\pi}\cdot a_k$$
$$=(1-e^{-jk\pi})a_k$$

对于(d)，若记$d[n]=x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$，注意到此时有

$$d[n+\frac{N}{2}]=x[n+\frac{N}{2}]+x[n+\frac{N}{2}+\frac{N}{2}]=x[n+\frac{N}{2}]+x[n+N]$$

而信号$x[n]$的周期为N，故$d[n+\frac{N}{2}]=x[n+\frac{N}{2}]+x[n+N]=x[n+\frac{N}{2}]+x[n]=d[n]$，即此时信号$d[n]$的周期为$T'=\frac{N}{2}$，不再是N，从而有

$$d_k=\frac{1}{T'}\sum_{n=<T'>}(x[n]+x[n+\frac{N}{2}])\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T'}n}=\frac{2}{N}\sum_{n=<\frac{N}{2}>}(x[n]+x[n+\frac{N}{2}])\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}n}$$

$$=\frac{2}{N}\sum_{n=<\frac{N}{2}>}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}+\frac{2}{N}\sum_{n=<\frac{N}{2}>}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}$$

或者写成$d_k=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}$，从而有

$$d_k=\frac{2}{N}(\sum_{n=0}^{N}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}-\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n})+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}+\frac{2}{N}(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}-\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n})$$

考虑后两项，若令$n'=n-\frac{N}{2}$，则

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}-\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}-\sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n'+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}(n'+\frac{N}{2})}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}-\sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1}x[n'+\frac{N}{2}]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n'}\cdot e^{-j2\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}n}=0$$

从而有$d_k=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N}x[n]\cdot e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n}=2\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}x[n]\cdot e^{-j(2k)\frac{2\pi}{N}n}=2a_{2k}$