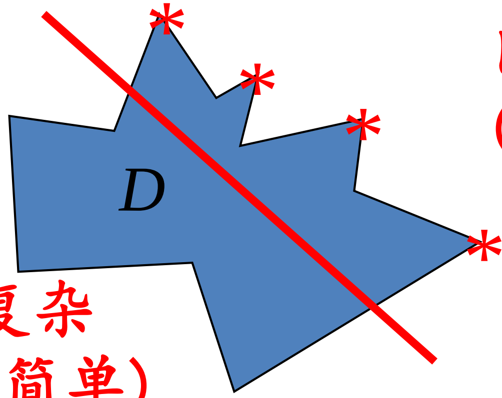
凸函数与凸规划
Convex Function & Convex Programming

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

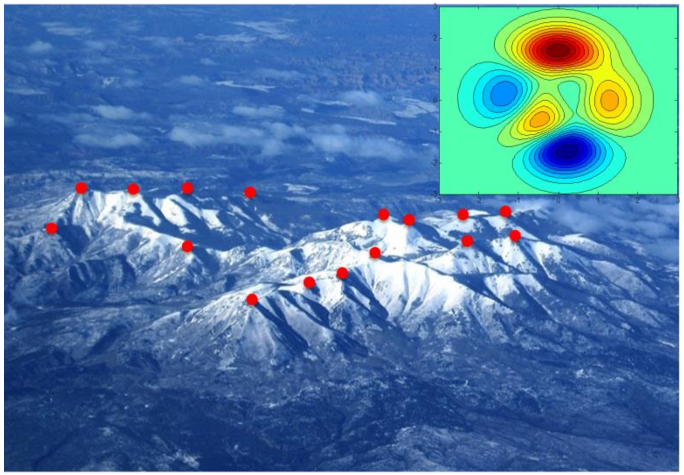
- 凸函数及其性质
- 凸规划及其性质

引言-非线性规划



可行域复杂
（目标函数简单）

目标函数复杂
（可行域简单）



有一类非线性规划问题，它的可行域几何结构简单，目标函数性态良好，导致**任一局部最优解也是全局最优解**，这就是**凸规划(Convex Programming)**问题。

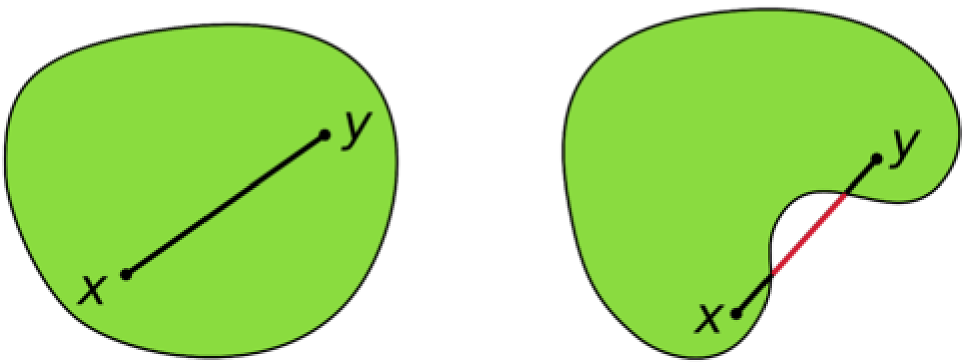
凸规划在实际应用中很常见，凸性是大部分非线性规划理论和算法的核心和基石。

凸集

- 定义：

  $S \subset R^n$, 若$\forall\, x,\ y \in S,\ \lambda \in [0,1]$

  $\Rightarrow\ \lambda x + (1-\lambda) y \in S$, 则称$S$是凸集



- 性质：任意多个凸集的交集仍然是凸集

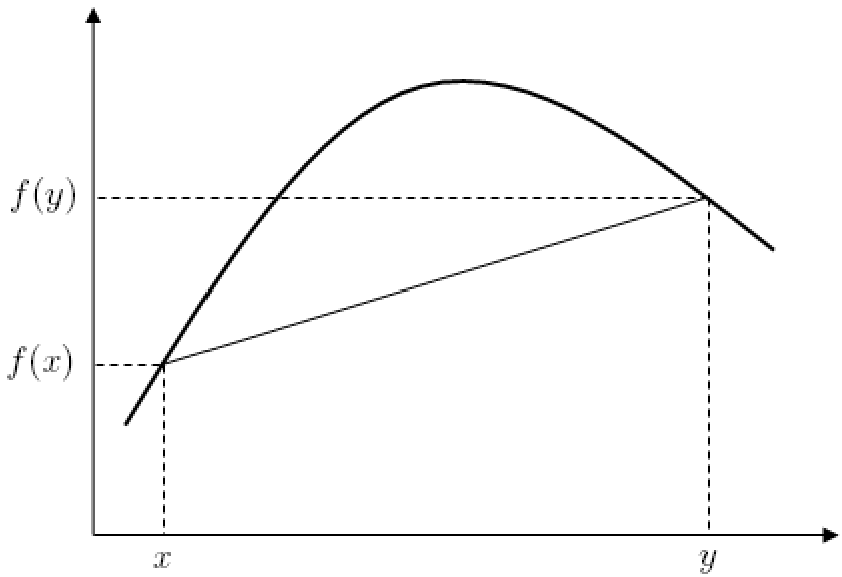
凸函数

- $S\subset R^n$ 是非空凸集, f: $S\to R^1$ ，若$\forall\alpha\in(0,1)$, 有:
  $$f(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2)\le\alpha f(x^1)+(1-\alpha)f(x^2),\forall x^1,x^2\in S$$
- 则称f是S上的凸函数

- 严格凸函数: 若$\forall\alpha\in(0,1)$, 有:
  $$f(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2)<\alpha f(x^1)+(1-\alpha)f(x^2)$$
  $$\forall x^1,x^2\in S,x^1\ne x^2$$
- 凹函数: 若$-f$为S上的(严格)凸函数, 则f为S上的(严格)凹函数

说明

- 几何意义



- *f*是*S*上的凸函数
  - *凸函数必须与凸集联系起来*

例

- 线性函数

$$f(x) = \alpha^T x + \beta$$

- 二次型

$$f(x) = x^T A x$$

A为半正定矩阵

凸函数的性质

- 定理一：$S \subset R^n$ 是非空凸集，
  - $f: S \to R^1$ 是 S 上的凸函数，且 $\alpha \geq 0$，则 αf 是 S 上的凸函数
  - $f_1, f_2: S \to R^1$ 是 S 上的凸函数，则 $f_1 + f_2$ 是 S 上的凸函数
- 定理二：$S \subset R^n$ 是非空凸集，$f: S \to R^1$ 是 S 上的凸函数，$c \in R^1$，则 $H_S(f, c) = \{x \mid x \in S 且 f(x) \leq c\}$ 是凸集.
- 定理三：$S \subset R^n$ 是非空开凸集，$f: S \to R^1$ 可微，则
  - f 是 S 上的凸函数的充要条件是

$$\nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) \leq f(x^2) - f(x^1), \forall x^1, x^2 \in S$$

  - f 是 S 上的严格凸函数的充要条件是

$$\nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) < f(x^2) - f(x^1), \forall x^1, x^2 \in S$$

凸函数的判定

- $S\subset R^n$ 是非空开凸集，f：$S\rightarrow R^1$ **二阶连续可导**，则 f 是 S 上的凸函数的充要条件是 $\nabla^2 f(x)$ 在 S **半正定**

- 例:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax+b^T x+c$$

凸规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \dots p \\
& h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots q \\
& x \in R
\end{aligned}
$$

- 若满足下述两个条件，则该问题为一个凸规划问题
  - $D = \{x \mid g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \dots p, h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots q\}$ 是R^n中的一个**凸集**
  - $f(x)$是D上的一个**凸函数**

凸函数与凸规划的性质

- 凸规划的任意局部最优解都是它的整体最优解
- 凸集在任意点具有可行方向
- 沿下降方向必可找到最优解

“事实上，优化问题的分水岭不是线性和非线性，而是凸性与非凸性”

—— R. Tyrrell Rockafellar, SIAM, 1993,.