



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

对偶理论及对偶单纯形法 Duality Theory and Dual Simplex Method

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

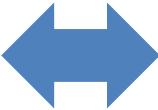


Outline

- ▶ 对偶线性规划
- ▶ 对偶理论
- ▶ 对偶单纯形法

对偶线性规划的例子

- ▶ (营养问题) 某种混合饲料由 n 种配料混合而成。要求其必须含有 m 种不同的营养成分, 且每份饲料中第 i 种营养成分的含量不低于 b_i ($i=1, 2 \dots m$)。又已知每单位的第 j 种配料中第 i 种营养成分的量为 a_{ij} 。每单位第 j 种配料的价格为 c_j 。试问: 在保证营养的前提下, 应如何配方, 使混合饲料的费用最小?
- ▶ 某企业打算生产各种单一的营养成分, 并与这些配料竞争市场份额。假设该企业对第 i 种营养成分的定价为 w_i , 则在保证具有价格优势的前提下, 应如何定价, 可使企业收益最大?

对偶线性规划的例子

$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m b_i w_i \\ \text{s.t.} \quad & a_{1,j} w_1 + a_{2,j} w_2 + \cdots + a_{m,j} w_m \leq c_j; (1 \leq j \leq n) \\ & w_1, w_2, \cdots, w_m \geq 0 \end{aligned}$		$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ \text{s.t.} \quad & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$	 <p style="color: red; font-weight: bold;">形式上的 对称关系</p>
<hr style="border: 1px solid red;"/> $\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,n} x_n \geq b_i \\ & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{aligned}$		$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$	

标准形式的对偶问题定义

▶ 对于标准LP问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

▶ 其对偶形式为:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ \text{s.t.} \quad & A^T w \leq c \end{aligned}$$

非标准形式:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x + o^T y \\ \text{s.t.} & [A \quad -I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & b^T w \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} A^T \\ -I \end{bmatrix} w \leq \begin{pmatrix} c \\ o \end{pmatrix} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & b^T w \\ \text{s.t.} & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

原问题与对偶问题之间的联系

P

D

约束i

变量i

目标函数

约束右端项

$$\min \quad c^T x$$

$$\max \quad b^T w$$

$$s.t. \quad a_i^T x = b_i$$

$$s.t. \quad w_i \geq 0$$

$$a_i^T x \geq b_i$$

$$w_i \geq 0$$

$$x_j \geq 0$$

$$A_j^T w \leq c_j$$

$$x_j \leq 0$$

$$A_j^T w = c_j$$

例:写出如下问题的对偶形式

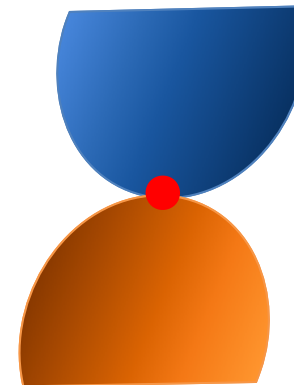
$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x & \max \quad & b^T w \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b & \text{s.t.} \quad & A^T w \leq c \\ & x \geq 0 & & \end{aligned}$$

Outline

- ▶ 对偶线性规划
- ▶ 对偶理论
- ▶ 对偶单纯形法

定理(1/3)



- ▶ 定理1: 对偶问题的对偶为原问题
- ▶ 定理2: 设 x 为(P)的可行解, w 为(D)的可行解, 则

$$c^T x \geq b^T w$$

- ▶ 证明:

$$Ax = b, w \geq 0 \quad w^T Ax = w^T b$$

$$A^T w \leq c, x \geq 0 \quad x^T A^T w \leq x^T c$$

- ▶ 定理3: x, w 分别为(P) (D)的可行解, 且 $c^T x = b^T w$ 则 x, w 分别为各自的最优解

定理(2/3)

定理4: (P) 和 (D) 同时有最优解 \longleftrightarrow 同时有可行解。

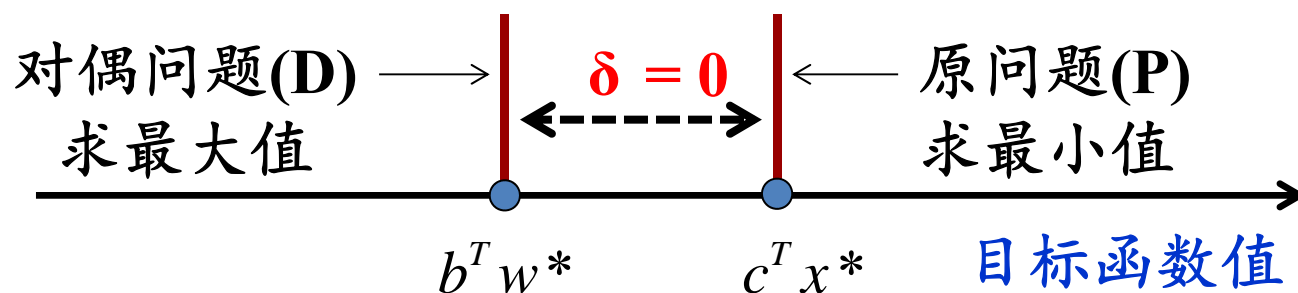
(P) \ (D)	有最优解	无界	无解
有最优解	①	×	×
无界	×	×	②
无解	×	②	③

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \begin{cases} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \\
 (D) \quad & \begin{cases} \max & b^T w \\ s.t. & A^T w \leq c \end{cases}
 \end{aligned}$$

定理5: 若(P) (D)均可行,则二者最优目标值相等

定理(3/3)

定理5(互补松紧性): 设 x 和 w 分别为 (P) 和 (D) 的可行解, 则它们分别为 (P) 和 (D) 的最优解 $\iff (A^T w - c)^T x = 0$ 。



δ : 对偶间隙(Duality Gap)

$$(P) \begin{cases} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$
$$(D) \begin{cases} \max & b^T w \\ s.t. & A^T w \leq c \end{cases}$$

注意：线性规划的对偶间隙是0！

对偶理论的经济解释



列奥尼德·康托罗维奇 (1975)

边际成本/边际价格

$$(P) \begin{cases} \min & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

成本最小

系统需求

$$(D) \begin{cases} \max & b^T w \\ \text{s.t.} & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^*$

最优成本对需求的导数

需求增加一个单位时最优成本的增加量

影子价格

$$(P) \begin{cases} \max & z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

利润最大

资源约束

$$(D) \begin{cases} \min & b^T w \\ \text{s.t.} & A^T w \geq c \\ & w \geq 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^*$

最大利润对资源的导数

假定第*i*种资源的市场价为 λ_i ，资源买卖量为 Δb_i

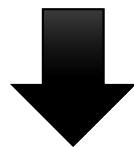
Outline

- ▶ 对偶线性规划
- ▶ 对偶理论
- ▶ 对偶单纯形法

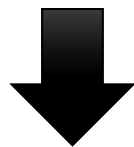
对偶可行基

在标准LP问题中, 若某个基 B 使得 $w^T = C^T_B B^{-1}$ 满足 $w^T A \leq C^T$. 则称 B 为一个对偶可行基

$$\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T \leq 0$$



$$w^T A - c^T \leq 0$$



$$A^T w \leq c$$

**对偶可行 \neq 原始
问题可行**

单纯形法 Vs. 对偶单纯形法

- ▶ 单纯形法的实质: 从一个原始可行基出发, 在保持基原始可行的前提下, 不断进行基迭代. 直到找到一个对偶可行基.

$$\bar{b} \geq 0 \rightarrow \zeta^T \leq 0$$

- ▶ 对称问题: 从一个对偶可行基出发, 在保持基对偶可行前提下, 不断进行基迭代. 直至发现一个原始可行基.

对偶单纯形法基本步骤

- ▶ 得到初始对偶可行基
- ▶ 求 $\bar{b}_r = \min \{\bar{b}_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$
- ▶ 若 $\bar{b}_r \geq 0$. 停, 已得到最优解. 否则继续
- ▶ 若 $\bar{a}_{rj} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$. 则问题无可行解. 停
- ▶ 求 $\frac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}} = \min \left\{ \frac{\zeta_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0, j = 1, 2, \dots, n \right\}$
- ▶ x_k 入基, x_{Br} 出基. 自新的对偶可行解开始迭代

对偶单纯形法举例

例：求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 24 \\ & 5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

解：第一步，化为标准形式

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - x_4 = 24 \\ & 5x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 8 \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

第二步，建立单纯形表

↓ 最小比列

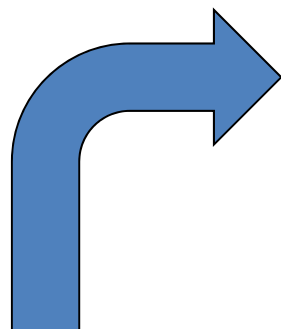
z	-4	-2	-6	0	0	0	负最大元
x_4	-2	-4*	-10	1	0	-24	←
x_5	-5	-1	-5	0	1	-8	

↓ x_2 入基
 x_4 出基

z	-4	-2	-6	0	0	0
x_2	-2	-4	-10	1	0	-24
x_5	-5	-1	-5	0	1	-8

对偶单纯形法举例

x_3 入基
 x_5 出基



z	-3	0	-1	-1/2	0	12
x_2	1/2	1	5/2	-1/4	0	6
x_3	-9/2	0	-5/2	-1/4	1	-2

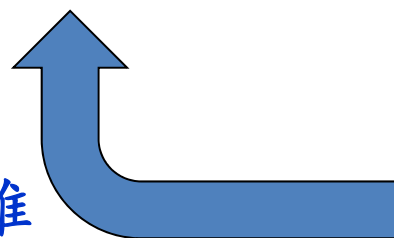
↓ 最小比列

z	-3	0	-1	-1/2	0	12
x_2	1/2	1	5/2	-1/4	0	6
x_5	-9/2	0	-5/2*	-1/4	1	-2

负最大元



化为标准
单纯形表



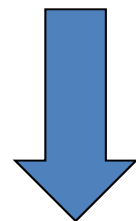
z	-4	-2	-6	0	0	0
x_2	-2	-4	-10	1	0	-24
x_5	-5	-1	-5	0	1	-8

对偶单纯形法举例

思考：

1. 和两阶段法比较，哪个更简便？
2. 什么样的问题适合用对偶单纯形法求解？
3. 怎样获得初始对偶可行基？

z	-3	0	-1	-1/2	0	12
x_2	1/2	1	5/2	-1/4	0	6
x_3	-9/2	0	-5/2	-1/4	1	-2



化为标准
单纯形表

z	-6/5	0	0	-2/5	-2/5	$12\frac{4}{5}$
x_2	-4	1	0	-1/2	1	4
x_3	9/5	0	1	1/10	-2/5	4/5

$\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ ，已得最优解。

作业

▶ P77 23(1)题