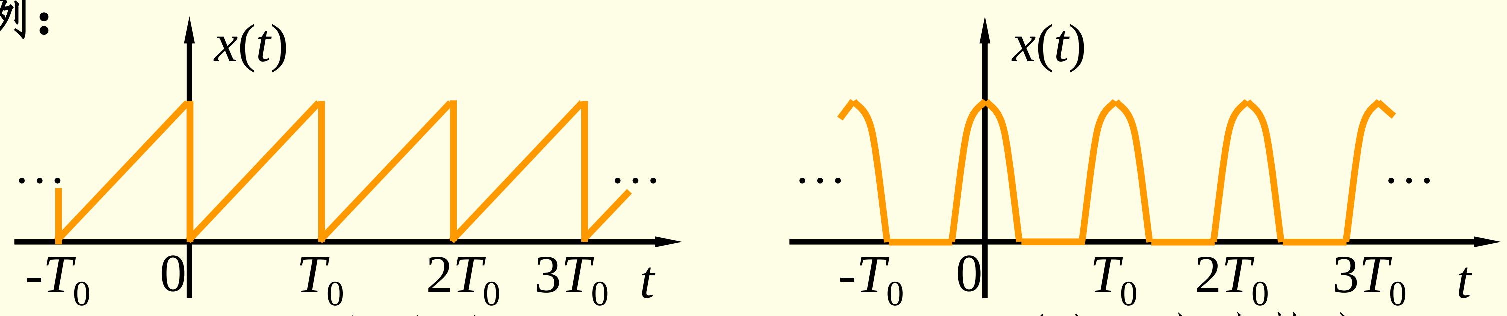
第一章 傅里叶分析与采样信号

本章主要内容

- 连续时间周期信号的傅立叶级数（FS）表示
- 非周期连续时间信号的傅立叶变换（FT）
- 卷积与相关
- 采样信号的频域表示-离散时间傅立叶变换（DTFT）
- 连续时间信号的采样和重建—采样定理

连续时间周期信号的描述

举例：



(a) 锯齿波 (b) 半波整流

定义：若连续时间信号$x(t)$在（-∞，∞）区间，以T_0为周期，周而复始地重复再现，则称信号$x(t)$为周期信号，其表达式

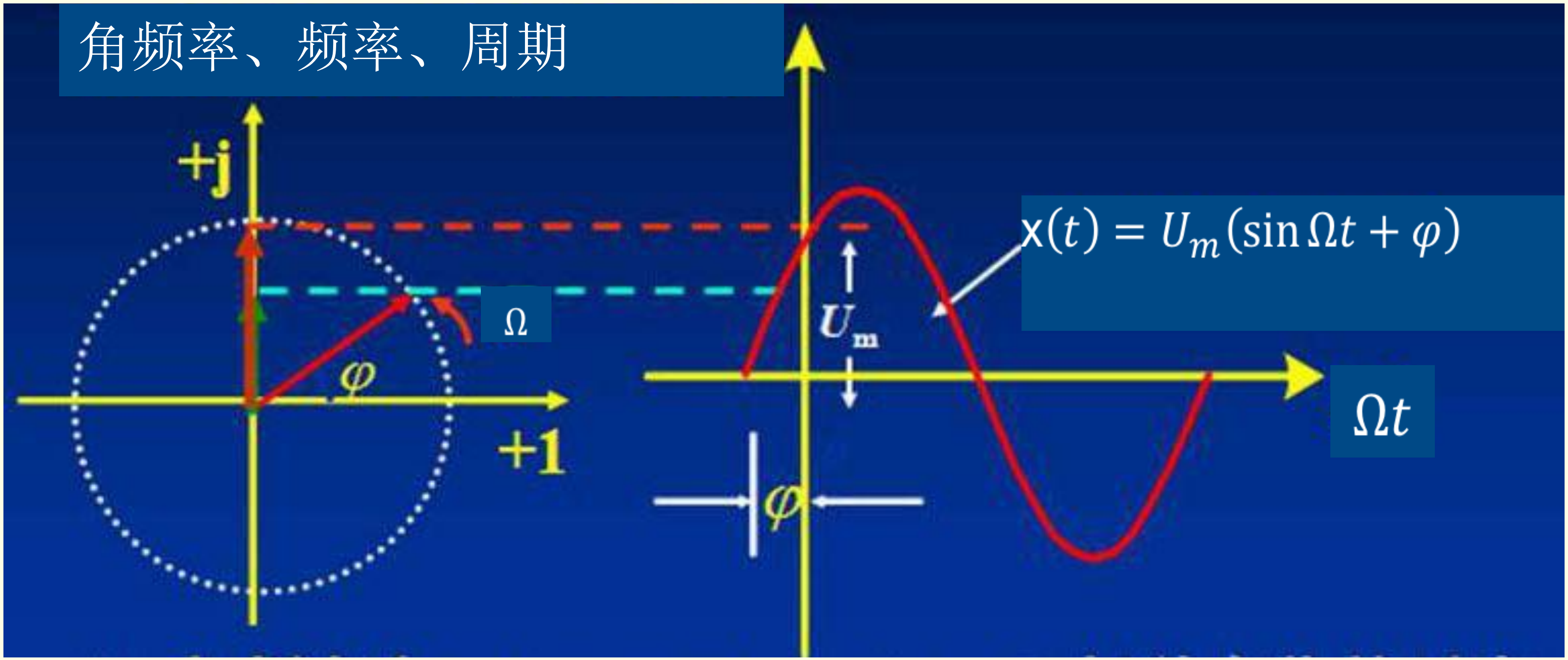
$$x(t)=x(t+T_0)=x(t+2T_0)=\cdots x(t+nT_0) \qquad t\in(-\infty,\infty)$$

性质：周期分别为T_1和T_2的两个周期信号线性叠加后，是否仍是周期信号，取决于 T_1和 T_2之间是否有最小公倍数。若存在最小 公倍数，则周期 T_0为

$$T_0=n_1T_1=n_2T_2$$

$$T_1/T_2=n_2/n_1=\text{有理数，}n_1,n_2\text{为整数}$$

连续时间周期信号



$f_o = \frac{1}{T_o}$ 频率 frequency：每秒变化的次数（单位：赫兹 Hz）

$\Omega = 2\pi f_o$ 角频率 angular frequency：每秒变化的弧度（单位：rad / s）

■ 连续时间信号在一定条件下可用级数形式表示

1、**三角函数型傅里叶级数**

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega_0 t+b_n\sin n\Omega_0 t)$$

基波频率 $\Omega_0=2\pi/T_0$

其中，傅里叶系数为

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cos n\Omega_0 t dt \quad n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\sin n\Omega_0 t dt \quad n=1,\ 2\ \ldots$$

2、**指数型傅里叶级数（讨论）**

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\Omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega_0)e^{jn\Omega_0 t}$$

形式简单，易于频域分析

其中，傅里叶系数为

$$c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=X(n\Omega_0)$$

■ 连续时间周期信号展开为FS应满足的条件

狄利克雷（Dirichlet）条件

数学上已证明，将周期为T_0的周期信号$x(t)$分解成傅里叶级数形式，$x(t)$必须在任一区间$[t, t+T_0]$内，满足狄利克雷（Dirichlet）条件：

1、在一个周期内信号绝对可积，即

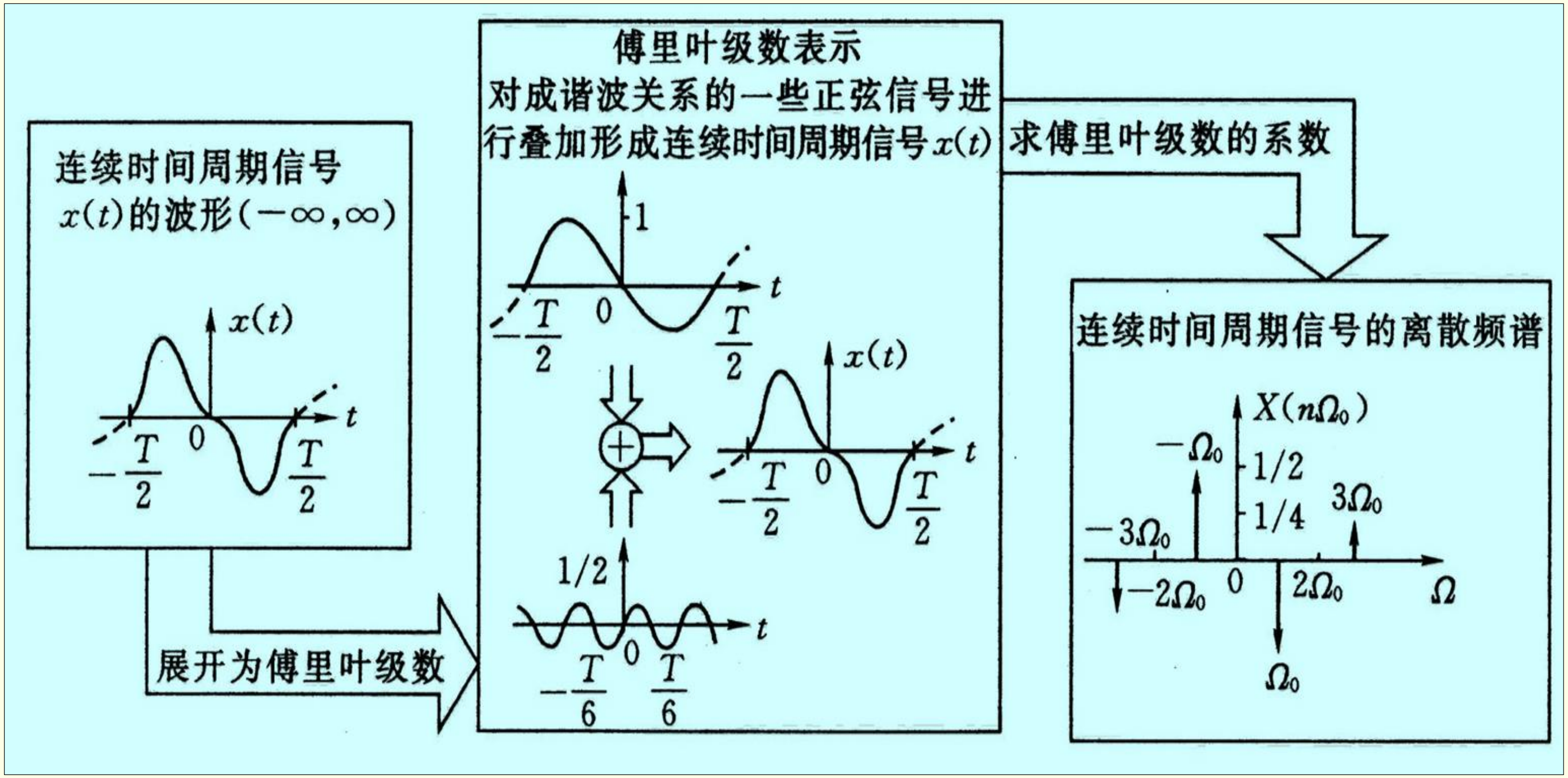
$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|dt < \infty$$

2、在一个周期内只有有限个不连续点，且这些点处的函数值必须是有限值；

3、在一个周期内只有有限个最大值和最小值。

上述条件中，条件1是充分条件但不是必要条件，且任一有界的周期信号都能满足这一条件；条件2、3是必要条件但不是充分条件。

傅里叶级数的波形分解



傅里叶级数的本质:

“任何周期信号都可以用一组成谐波关系的正弦信号的加权和来表示”

连续时间周期信号的频域分析

■ 频域分析的概念

由于任意波形的周期信号$x(t)$都可以用反映信号频率特性的频谱$X(n\Omega_0)$来描述，而$X(n\Omega_0)$是离散频率$n\Omega_0$的复函数，则$x(t)$与$X(n\Omega_0)$之间存在着一一对应的关系，即

$$x(t) \Leftrightarrow X(n\Omega_0) = |X(n\Omega_0)|e^{j\theta(n\Omega_0)}$$

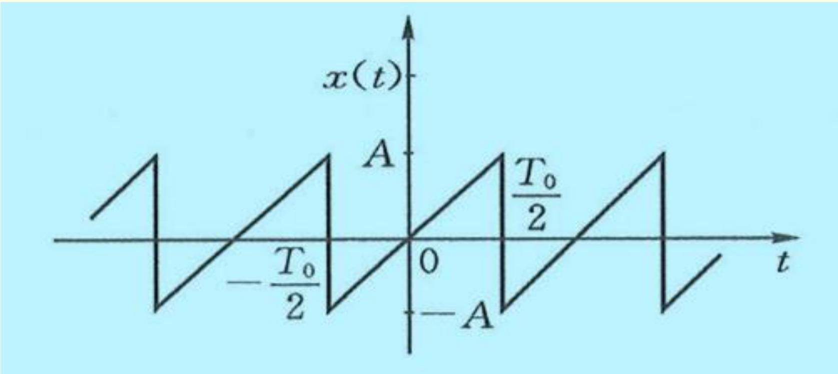
其中：$|X(n\Omega_0)|$是幅频特性，$\theta(n\Omega_0)$是相频特性

用频率函数来描述或表征任意周期信号的方法称为周期信号的频域分析。

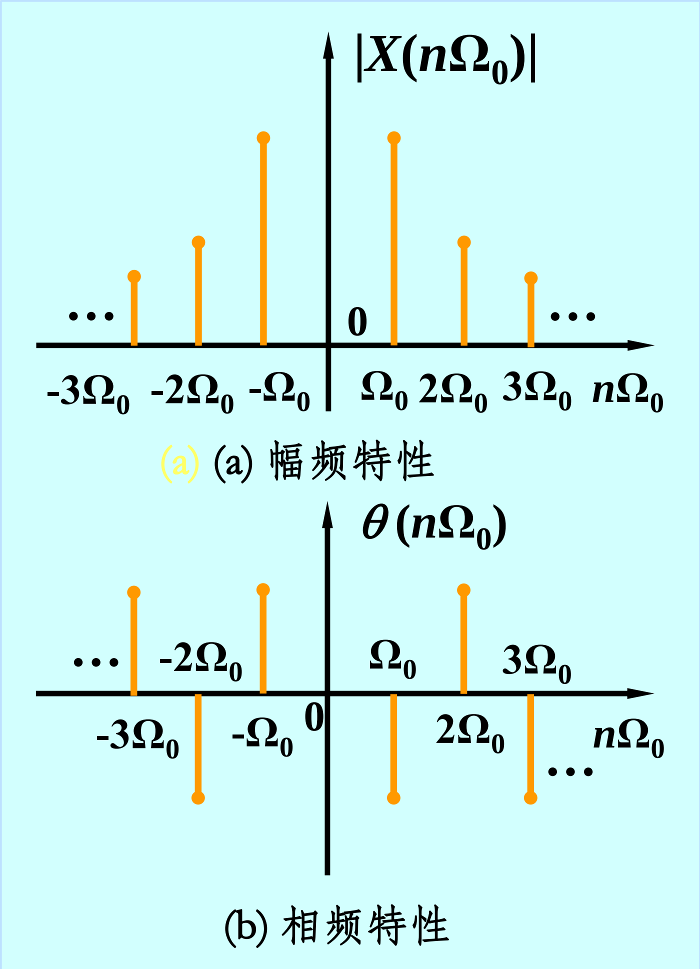
■ 频域分析信号的频谱与时域波形的关系

1. 频率的高低相当于波形变化的快慢，即时域波形变化越慢，则频谱中高频成分越少；时域波形变化越剧烈，则频谱中高频分量越多
2. 谐波幅度的大小反映了时域波形取值的大小
3. 相位的变化对应波形在时域出现的不同时刻

■ 连续时间周期信号频谱的特点



周期锯齿波信号



频域分析的离散频谱

1. **离散性**：频谱是由离散的非周期性谱线组成，每根谱线代表一个谐波分量
2. **谐波性**：频谱的谱线只在基波频率的整数倍处出现
3. **收敛性**：频谱中各谱线的幅度随着谐波次数的增加而逐渐衰减

1.2 非周期连续时间信号的傅立叶变换（FT）

（从傅里叶级数到傅里叶变换）

1.2.1 周期信号与非周期信号的关系

1、实际工程中的大量信号是非周期、能量有限；

2、在数学上，任何周期信号可以看作非周期信号的周期延拓而形成。而非周期信号可看成是周期信号的周期无穷大的极限情况

非周期信号和周期信号的关系

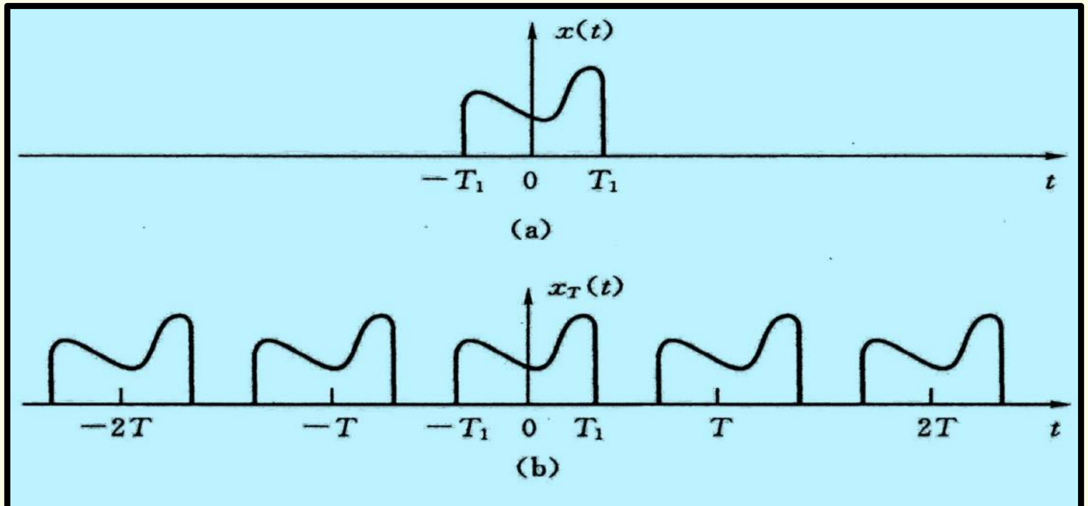


图 1.5 非周期信号 $x(t)$ 与其周期延拓信号 $x_T(t)$

$$\begin{cases} x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT) \\ x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) \end{cases}$$

1.2.2 从傅里叶级数FS到傅里叶变换FT

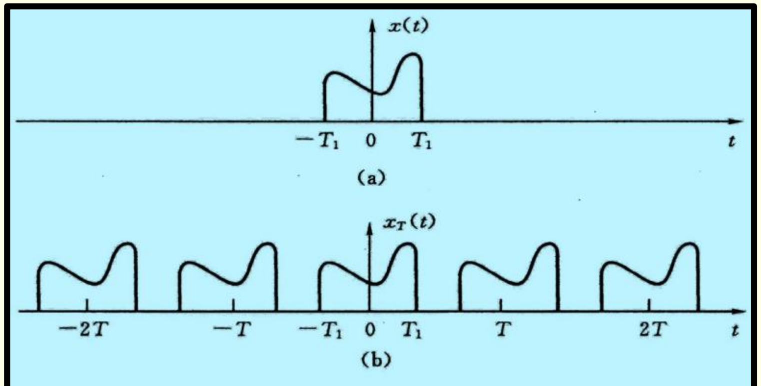


图 1.5 非周期信号 $x(t)$ 与其周期延拓信号 $x_T(t)$

周期信号与非周期信号的关系：

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t)$$

$$X(n\Omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

周期信号$x_T(t)$展开成傅里叶级数，得

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Omega_0) e^{j\Omega_0 nt}$$

把 $X(n\Omega_0)$ 代入 $x_T(t)$，得

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt\right]e^{jn\Omega_0 t}$$

$$\boxed{= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Omega_0}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt\right]e^{jn\Omega_0 t}}$$

对该式两边 T 取极限，得（推导）

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt\right]e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

则上式方括号中的部分即为连续时间非周期信号的傅里叶变换

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

1.2.3 连续时间非周期信号的傅里叶变换对

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

以上的变换对可表示为

$$X(j\Omega) = \mathrm{F}\,[x(t)],\quad x(t) = \mathrm{F}^{-1}[X(j\Omega)]$$

或用符号记作 $x(t) \Leftrightarrow X(j\Omega)$

$X(j\Omega)$是一个复函数，可写成如下形式

$$X(j\Omega) = \underbrace{\mathrm{Re}[X(j\Omega)]}_{\text{实部}} + j\,\underbrace{\mathrm{Im}[X(j\Omega)]}_{\text{虚部}}$$

$\mathrm{e}^{j\Omega t} = \cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)$
则$x(t)$是实函数时，得到

$$\mathrm{Re}[X(j\Omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)\,dt \;,\quad \mathrm{Im}[X(j\Omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\Omega t)\,dt$$

把上式重写如下

$$\boxed{\mathrm{Re}[X(j\Omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)\,dt \qquad \mathrm{Im}[X(j\Omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\Omega t)\,dt}$$

可见，**Re**$[X(j\Omega)]$ 为Ω的偶函数， **Im**$[X(j\Omega)]$ 为Ω的奇函数，有如下关系

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Re}[X(j\Omega)] = \mathrm{Re}[X(-j\Omega)], \qquad \mathrm{Im}[X(j\Omega)] = -\mathrm{Im}[X(-j\Omega)] \\ X^{*}(j\Omega)=X(-j\Omega)\end{gathered}}$$

也可以用幅度频谱和相位频谱表示$X(j\Omega)$，即

$$X(j\Omega) = \underbrace{|X(j\Omega)|}_{\text{幅度频谱}}\, e^{\underbrace{j\theta(\Omega)}_{\text{相位频谱}}}$$

$$\boxed{|X(j\Omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2|X(j\Omega)| + \mathrm{Im}^2|X(j\Omega)|}}$$

$$\boxed{\theta(\Omega) = \arctan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[X(j\Omega)]}{\mathrm{Re}[X(j\Omega)]}}$$

举例：非周期矩形脉冲信号的频谱分析（讨论）

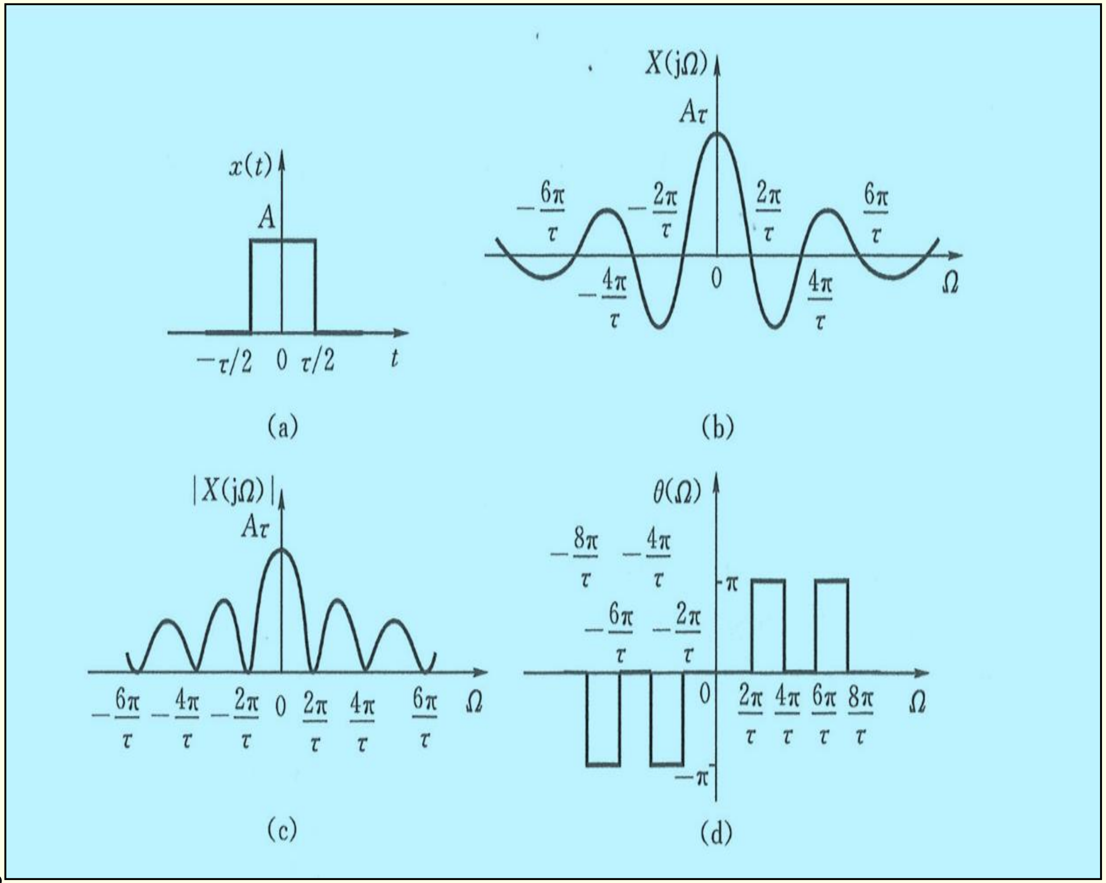
$$x(t)=\begin{cases}A, & -\frac{\tau}{2}\le t<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

傅里叶变换为

$$X(j\Omega)=A\tau\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}$$

注意：在$X(j\Omega)$的表达式保留了相消的因子，这是为了突出$\frac{\sin(x)}{x}$的形式；这种形式的函数在傅里叶分析和线性时不变系统的研究中经常出现，称为sinc函数。

非周期矩形信号的连续频谱



1.2.4 周期信号FS与非周期信号FT的区别

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\Omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega_0)e^{jn\Omega_0 t}$$

$$c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=X(n\Omega_0)$$

连续时间周期信号$x(t)$的FS

↓

时域函数$x(t)$的周期性造成其频谱的离散性和谐波性

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

连续时间非周期信号$x(t)$的FT

↓

时域函数$x(t)$的非周期性造成其频谱不具有离散性和谐波性

↓

时域函数的连续性带来了其频域函数的非周期性

以上讨论可以清楚地看到，傅立叶变换的基本概念就是通过无始无终的正弦（或指数）信号来表示信号。

1.3 连续时间傅立叶变换的性质

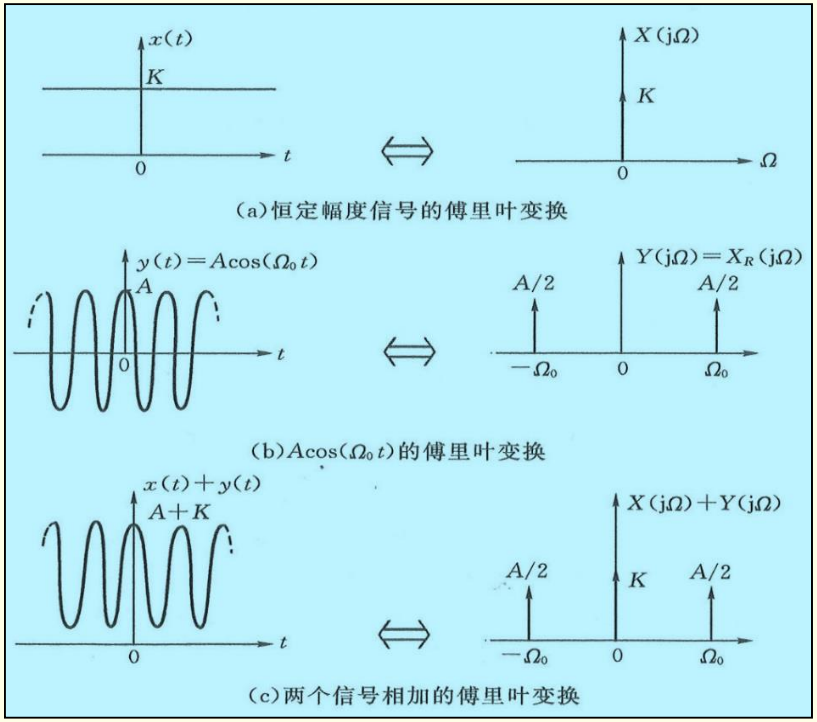
1.3.1 线性性质

若有 $x(t) \Leftrightarrow X(j\Omega)$

$y(t) \Leftrightarrow Y(j\Omega)$

则对任意常数a_1和a_2，有傅里叶变换对

$$\boxed{a_1x(t)+a_2y(t) \Leftrightarrow a_1X(j\Omega)+a_2Y(j\Omega)}$$



举例：

考虑$x(t)$和$y(t)$有如下傅里叶变换

$$x(t)=K \Leftrightarrow X(j\Omega)=K\delta(\Omega)$$

$$y(t)=A\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow Y(j\Omega)=\frac{A}{2}\delta(\Omega-\Omega_0)+\frac{A}{2}\delta(\Omega+\Omega_0)$$

由线性性质，得到

$$x(t)+y(t)=K+A\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow X(j\Omega)+Y(j\Omega)=K\delta(\Omega)+\frac{A}{2}\delta(\Omega-\Omega_0)+\frac{A}{2}\delta(\Omega+\Omega_0)$$

1.3.2 对偶性（互易性）

比较傅里叶变换对

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

它们虽然不完全相同，但二者在形式上相似，这一对称性可以导出傅里叶变换的对偶性。若$x(t)$和$X(j\Omega)$是一对傅里叶变换对，则有

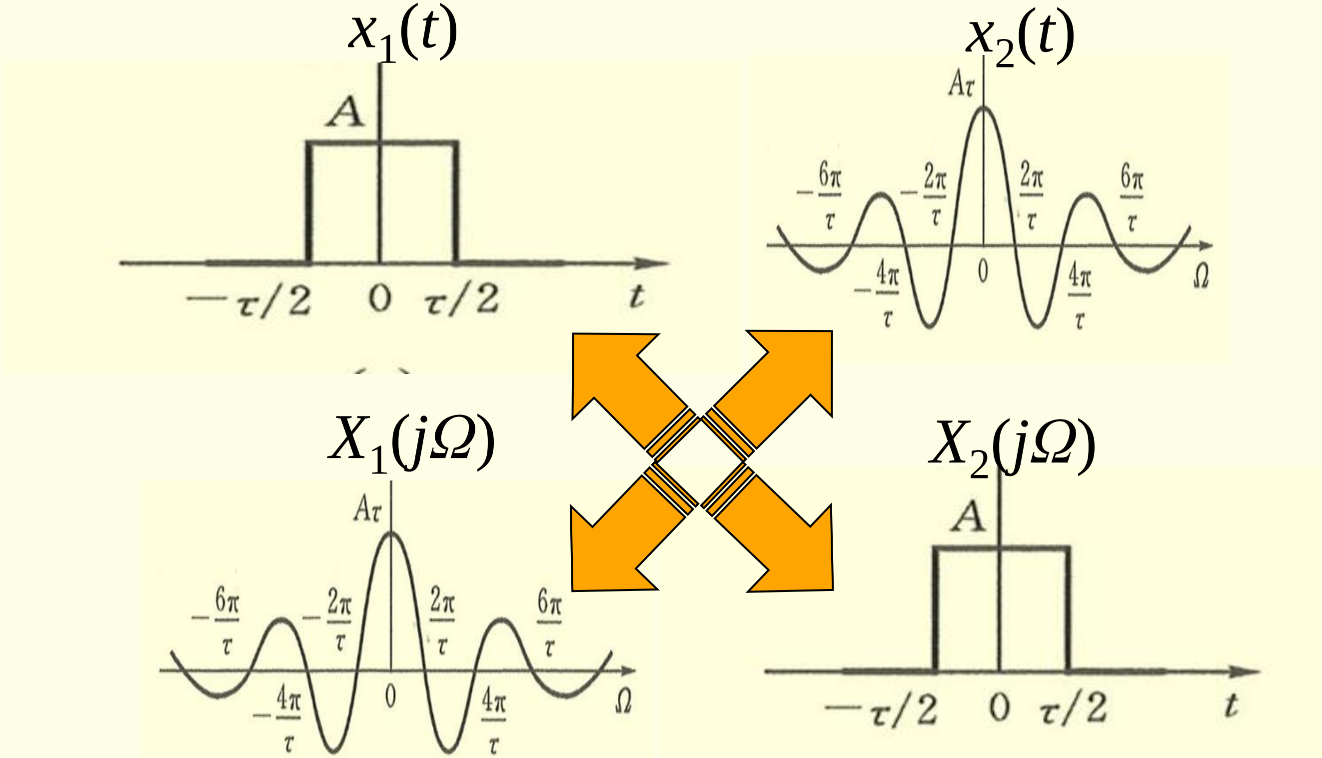
$$\boxed{X(jt)\Leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)}$$

(讨论)

对偶性又称互易性：若$x(t)$的频谱是$X(j\Omega)$，那么其波形与$X(j\Omega)$相同的时域信号$X(jt)$的频谱具有与时域信号$x(t)$相同的形状$X(-\Omega)$。

举例：矩形脉冲函数与**sinc**函数的对偶性

若$x_1(t)$的频谱是$X_1(j\Omega)$，那么在时域一定存在一个波形与$X_1(j\Omega)$相同的时域信号$x_2(t)$，其频谱形状$X_2(j\Omega)$与时域波形$x_1(t)$相似。



对偶性是一个很有意义的关系，在这种情况下，傅里叶变换对都是由形式为sinc函数和一个矩形脉冲函数组成，它们各自出现在时域和频域中。

1.3.3 时间尺度变化

若$x(t)$的傅里叶变换是$X(j\Omega)$，则$x(kt)$的傅里叶变换为

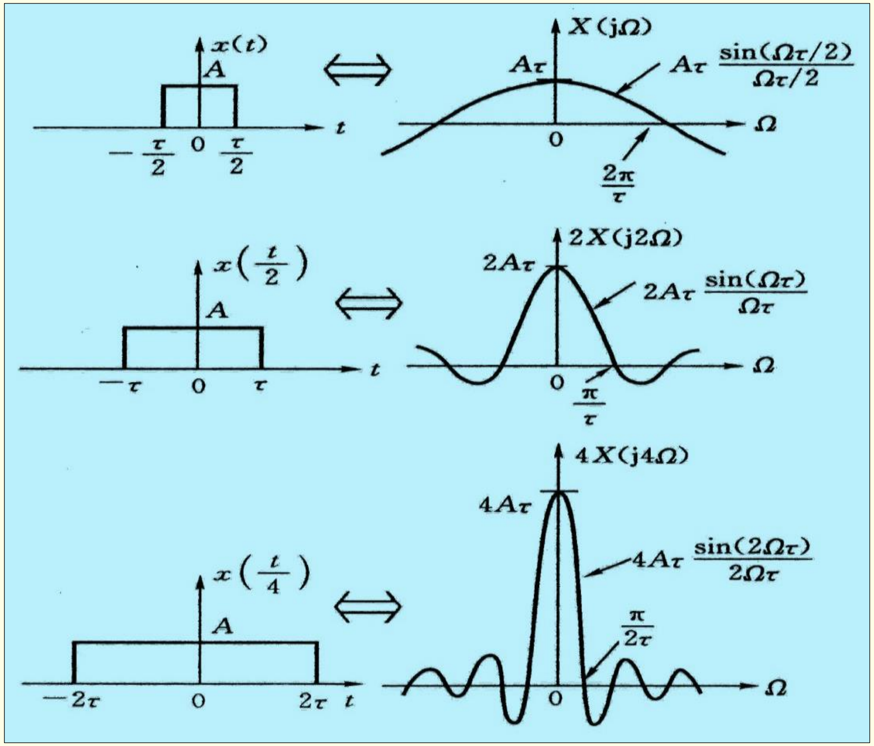
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(kt)\, e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{-j\Omega \frac{t'}{k}} d\frac{t'}{k} = \frac{1}{|k|} X\left(j\frac{\Omega}{k}\right)$$

式中$t'=kt$，k是非零实常数

$$\boxed{x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(j\frac{\Omega}{k}\right)}$$

信号时域尺度的扩展导致其频域尺度的压缩和幅度的增大

举例：以矩形脉冲函数为例



1.3.4 频率尺度变化

若$X(j\Omega)$ 的傅里叶反变换是$x(t)$，则$X(jk\Omega)$的傅里叶反变换为

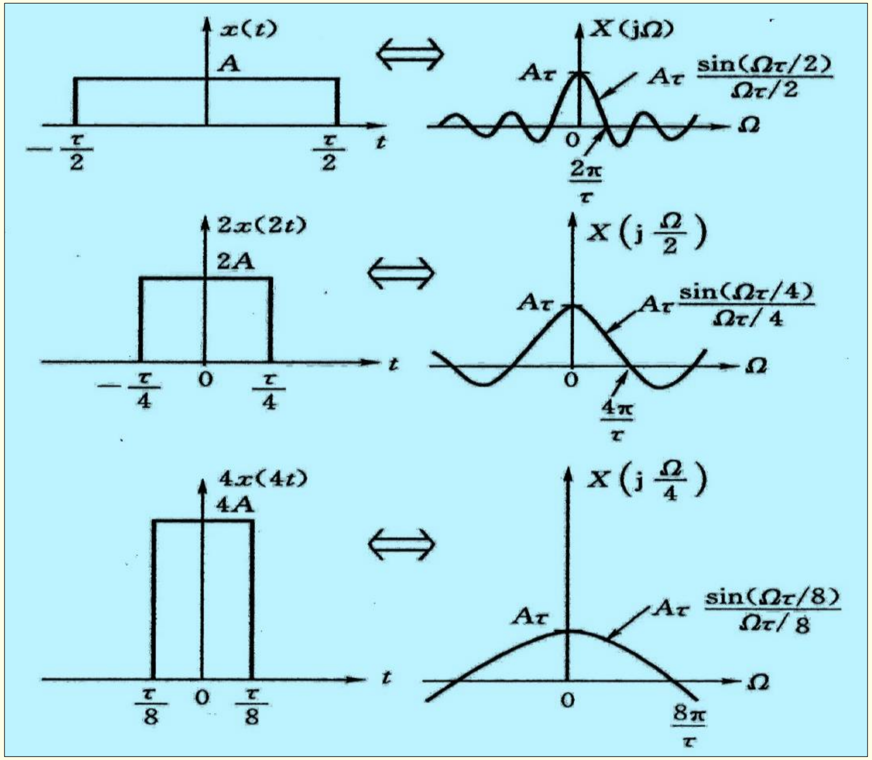
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(jk\Omega)\,e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega')\,e^{j\frac{\Omega'}{k}t}d\,\frac{\Omega'}{k}=\frac{1}{|k|}x\left(\frac{t}{k}\right)$$

式中$\Omega'=k\Omega$，k是非零实常数

$$\boxed{X(jk\Omega)\overset{F^{-1}}{\Longleftrightarrow}\frac{1}{|k|}x\left(\frac{t}{k}\right)}$$

信号频率尺度的扩展导致其时间尺度的压缩和幅度的增大

举例：以矩形脉冲函数为例



1.3.5 时间移位

若$x(t)$的自变量t移位一个常量t_0的$u=t-t_0$，则$x(u)$的傅里叶变换为

$$\boxed{x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\Omega t_0}X[j\Omega]}$$ (频域线性相移)

对式 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt$

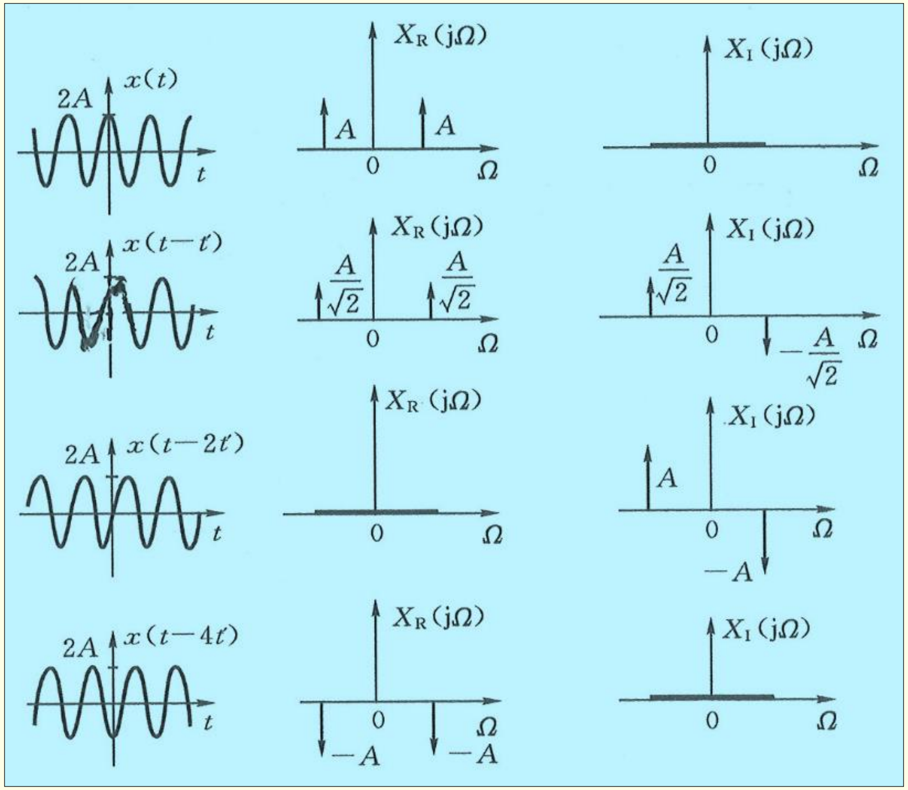
进行变量替换 $u=t-t_0$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j\Omega t} dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-j\Omega(u+t_0)} du$$

$$=e^{-j\Omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\Omega u} du$$

$$=e^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$$



(在频域中产生一个线性相移)

1.3.6 频率移位

若$X(j\Omega)$的自变量Ω移位一个常量Ω_0，则对应的傅里叶反变换为

$$\boxed{x(t)e^{j\Omega_0 t} \Leftrightarrow X[j(\Omega-\Omega_0)]}$$ （调制特性）

对式 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega$

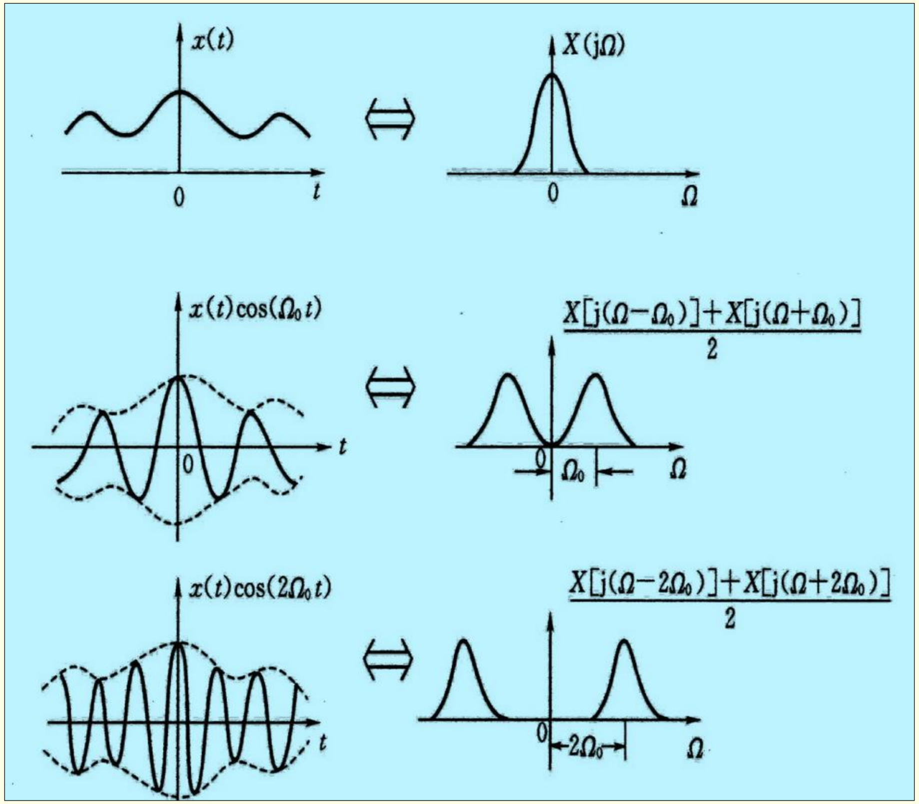
进行变量替换$v=\Omega-\Omega_0$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X[j(\Omega-\Omega_0)]\, e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jv)\, e^{j(v+\Omega_0)t} dv$$

$$=e^{j\Omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jv)\, e^{jvt} dv$$

$$=e^{j\Omega_0 t}x(t)$$



（时域信号与一个余弦函数相乘带来频率的位移Ω_0）

1.3.7 微分特性

若有 $x(t) \Leftrightarrow X(j\Omega)$，则

时域微分特性：$\dfrac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$, $\dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\Omega)^n X(j\Omega)$

频域微分特性：$-jtx(t) \Leftrightarrow \dfrac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$, $(-jt)^n x(t) \Leftrightarrow \dfrac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

1.3.8 积分特性

若有 $x(t) \Leftrightarrow X(j\Omega)$，则

$x^{(-1)}(t)$表示$x(t)$的一次积分

时域积分特性：$x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \Leftrightarrow \pi X(0)\delta(\Omega) + \dfrac{1}{j\Omega} X(j\Omega)$

频域积分特性：$\pi x(0)\delta(t) - \dfrac{1}{jt} x(t) \Leftrightarrow X^{(-1)}(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\Omega} x(j\eta)\, d\eta$

1.4 连续信号的卷积与相关

1.4.1 卷积的定义

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

两个函数可以互为反转和移位操作的函数，即

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

卷积是一种加权求和，它不仅包含当前时间的响应，还包含之前的响应（举例）

举例：两个矩形窗信号卷积（下图）

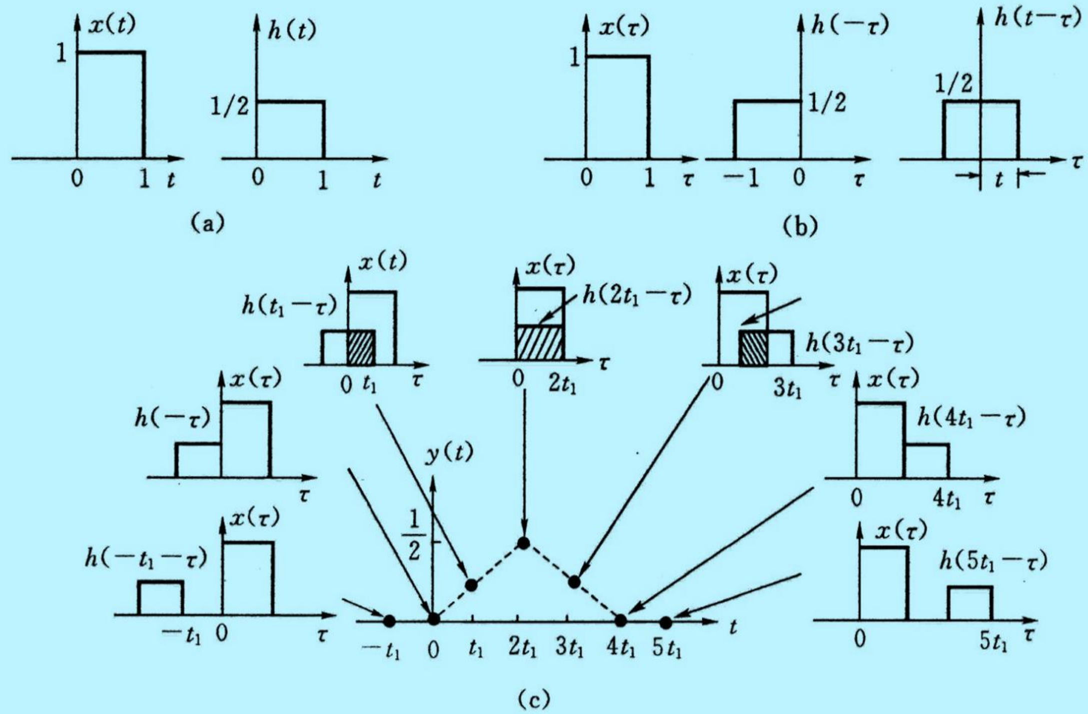
上述卷积的过程总结如下：

（1）反转：把 $h(\tau)$ 相对纵轴做镜像对称，得到 $h(-\tau)$；

（2）移位：把 $h(-\tau)$ 移动一个 t 值；

（3）相乘：将移位后的函数 $h(t-\tau)$ 乘以 $x(\tau)$；

（4）积分：$h(t-\tau)$ 和 $x(\tau)$ 乘积曲线下的面积即为 t 时刻的卷积值。



卷积的性质

- 交换律 $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- 结合律 $[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$
- 分配率

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

- 微积分性质

若$x^{(1)}(t)$、$x^{(-1)}(t)$分别表示信号$x(t)$的一阶导数和一次积分，且有

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

则有

$$y^{(1)}(t) = x_1^{(1)}(t) * x_2(t) = x_1(t) * x_2^{(1)}(t)$$

$$y^{(-1)}(t) = x_1^{(-1)}(t) * x_2(t) = x_1(t) * x_2^{(-1)}(t)$$

推广为一般形式

$$y^{(i+j)}(t) = x_1^{(i)}(t) * x_2^{(j)}(t)$$

1.4.2 时域卷积定理

卷积公式与其傅立叶变换的关系称为卷积定理，即

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) = H(j\Omega)X(j\Omega)}$$

上式表明，时域中的卷积对应于频域的相乘。

推导：令 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$，对该式两边进行傅立叶变换，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau]\, e^{-j\Omega t}dt$$

交换上式等号右边的积分顺序，得到

$$\boxed{Y(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt]\, d\tau}$$

将上式重写如下

$$Y(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt]\,d\tau$$

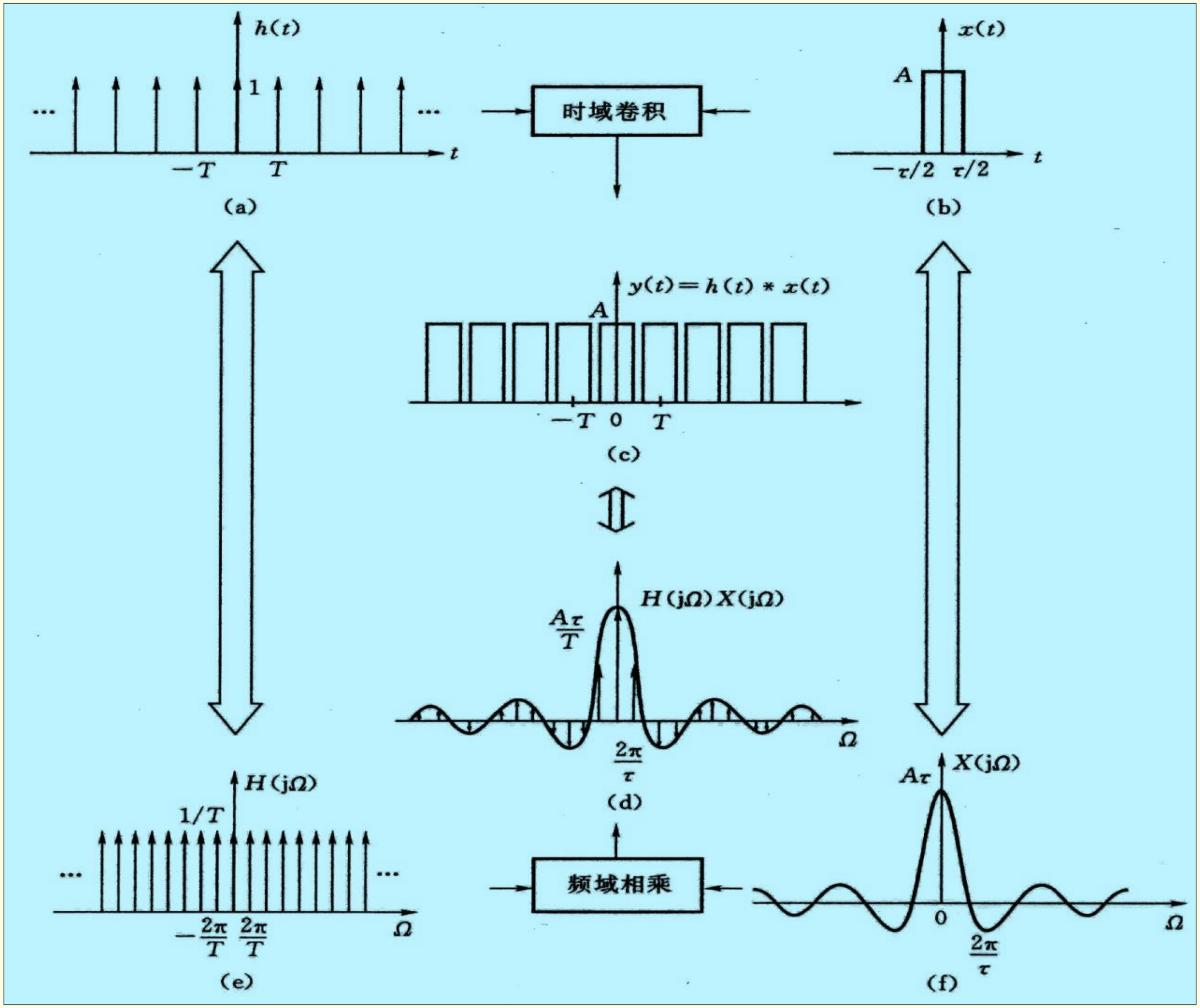
令$\alpha=t-\tau$，上式方括号中的积分项变为

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)e^{-j\Omega(\alpha+\tau)}d\alpha=e^{-j\Omega(\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)e^{-j\Omega(\alpha)}d\alpha=e^{-j\Omega(\tau)}H(j\Omega)$$

于是得到

$$Y(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\Omega(\tau)}H(j\Omega)\,d\tau=H(j\Omega)X(j\Omega)$$

以上证明了时域中的卷积对应于频域傅立叶变换的乘积

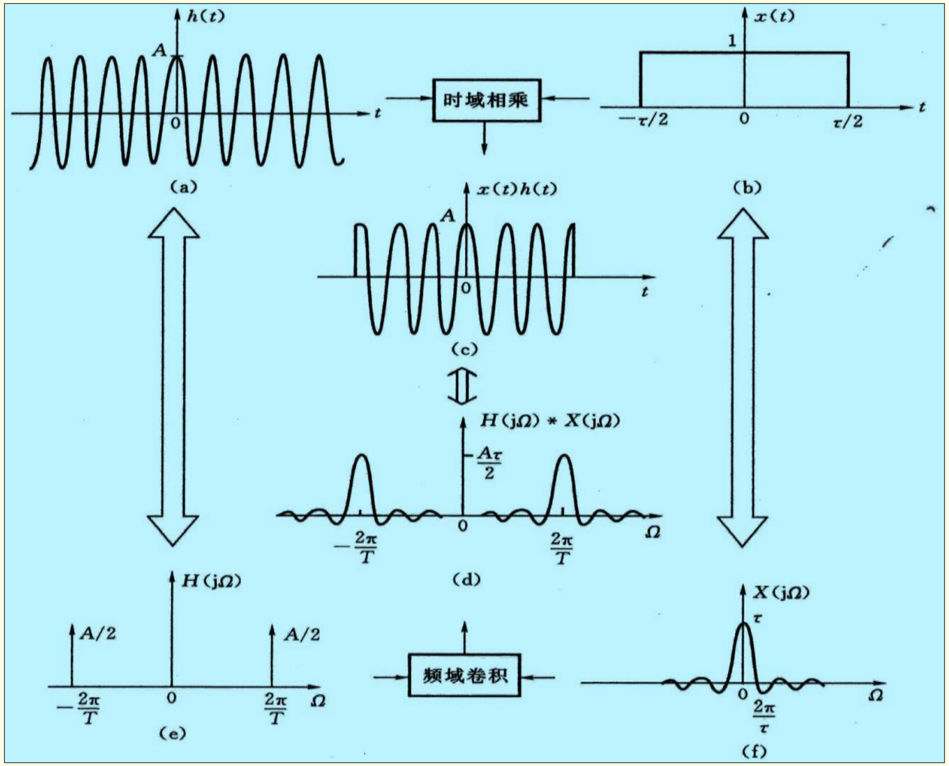


时域卷积定理的图解说明

1.4.3 频域卷积定理

$$\boxed{h(t)x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}H(j\Omega) * X(j\Omega)}$$

与时域卷积定理$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(j\Omega)X(j\Omega)$比较，可看出二者存在对偶关系



频域卷积定理的图解说明（讨论）

1.4.4函数的相关

■ 定义

若$x(t)$、$h(t)$是能量有限的信号，则相关积分定义为

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

■ 说明

1、相关函数是两个信号之间时移 τ 的函数

2、若$x(t)$和$h(t)$不是同一信号，则 $y(t)$为互相关函数

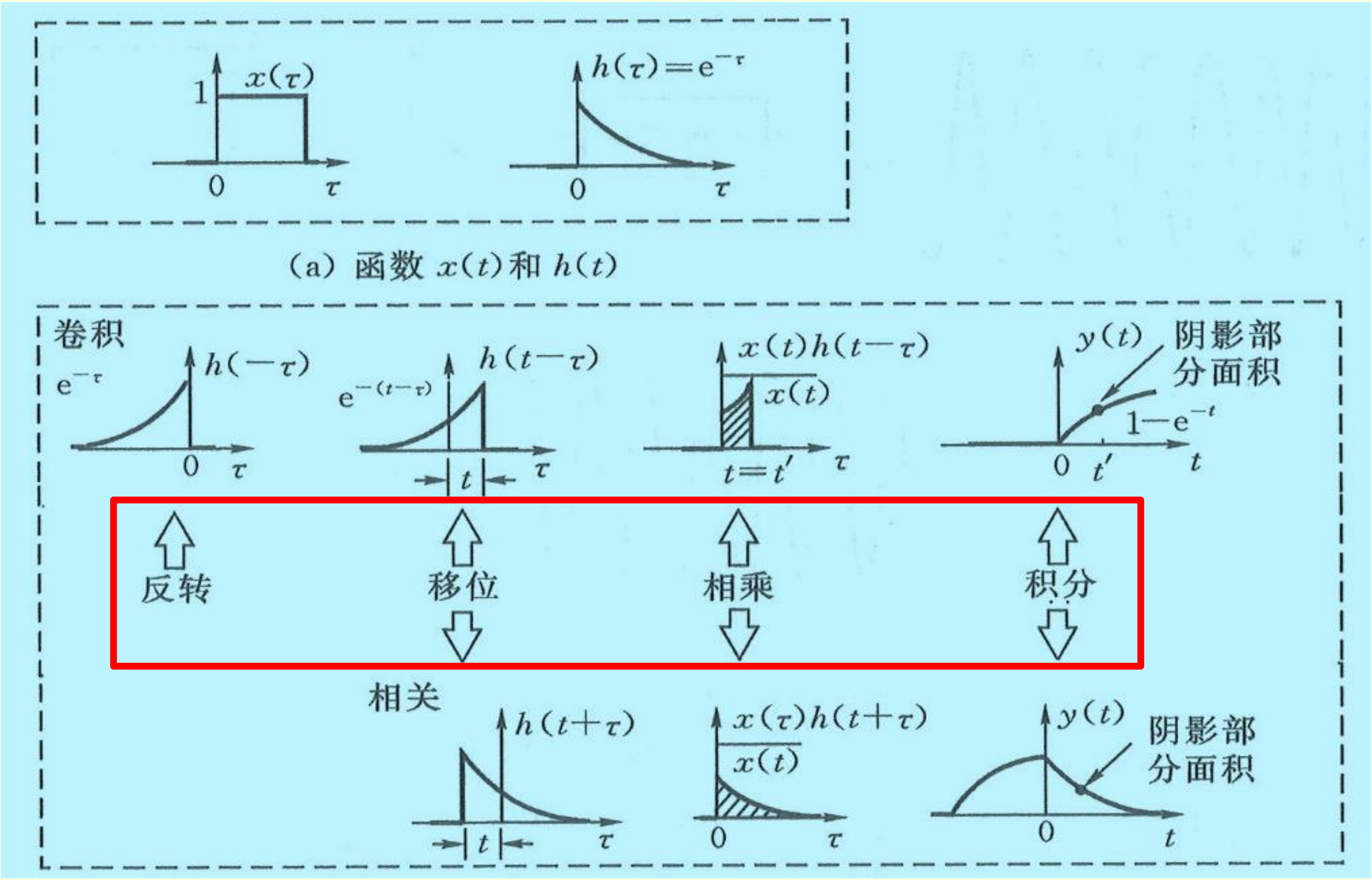
3、若$x(t)$和$h(t)$是同一信号，即 $x(t)=h(t)$，则 $y(t)$为自相关函数，且

$$y(t)=R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)x(t+\tau)dt$$

则实信号 $x(t)$ 的自相关函数是时移 τ 的偶函数，即

$$R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$$

举例：计算两个连续时间实信号的卷积和相关的比较



1.4.5 相关定理

- 相关积分的傅立叶变换对（推导）

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow H(j\Omega)X^*(j\Omega)}$$

若$x(t)$是实偶函数，那么$X(j\Omega)$是实函数，有$X(j\Omega)= X^*(j\Omega)$，在这个条件下，相关积分的傅立叶变换是$H(j\Omega)X(j\Omega)$，与卷积积分的傅立叶变换相同，即相关定理和卷积定理完全相同

$$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(j\Omega)X(j\Omega)$$

卷积积分与相关积分的区别

1、卷积计算是无序的，即$h(t)*x(t)= x(t)*h(t)$；而相关积分是有序的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)\,d\tau \neq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t+\tau)\,d\tau$$

2、对于同一个时间位移值 τ ，卷积积分和相关积分中的移位函数的移动方向是相反的

2、物理意义：卷积通常用来分析信号通过线性系统后输出的变化，而相关往往是用来分析或检测信号相似性的方法

1.5 连续时间信号的采样—离散时间傅里叶变换（DTFT）

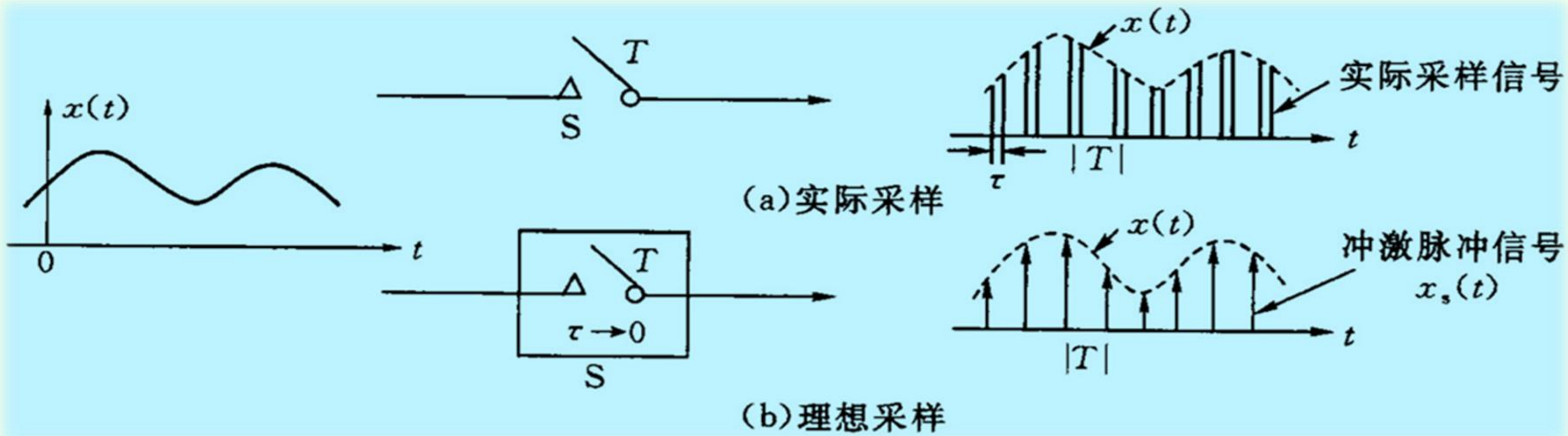
- 原信号与采样信号之间的关系
- 采样前后信号频谱的变化
- 从采样信号中不失真地恢复原始信号的条件(时域采样定理)

1.5.1 采样过程

■ 信号采样原理

采样器就是一个开关，输入信号接入开关的一端，每隔T秒接通（接通时间为τ）和断开，实现对输入信号的采样。

实际采样和理想采样的过程如下图所示



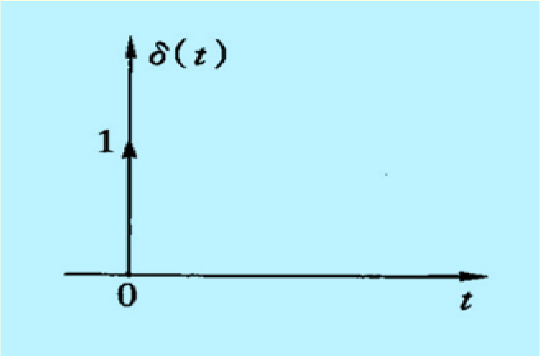
■ 采样信号

$$\boxed{x_a(t)|_{t=nT} = \{x(nT)\} = \{\dots, x(-T), x(0), x(T), x(2T), \dots\}}$$

式中 $-\infty<n<\infty$ 取整数。$x(nT)$是一个有序的数字序列，该离散序列就是时域信号$x(t)$的采样信号。

1.5.2 采样函数

$$\delta(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$



冲激强度为 1

单位冲激函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

单位冲激函数$\delta(t)$与$x(t)$相乘时，只有在$x=0$时，$x(t)$存在，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\mathrm{d}t=x(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=x(0)$$

单位冲激函数$\delta(t)$的筛选性质

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}1, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$$

其冲激强度仍是1，即

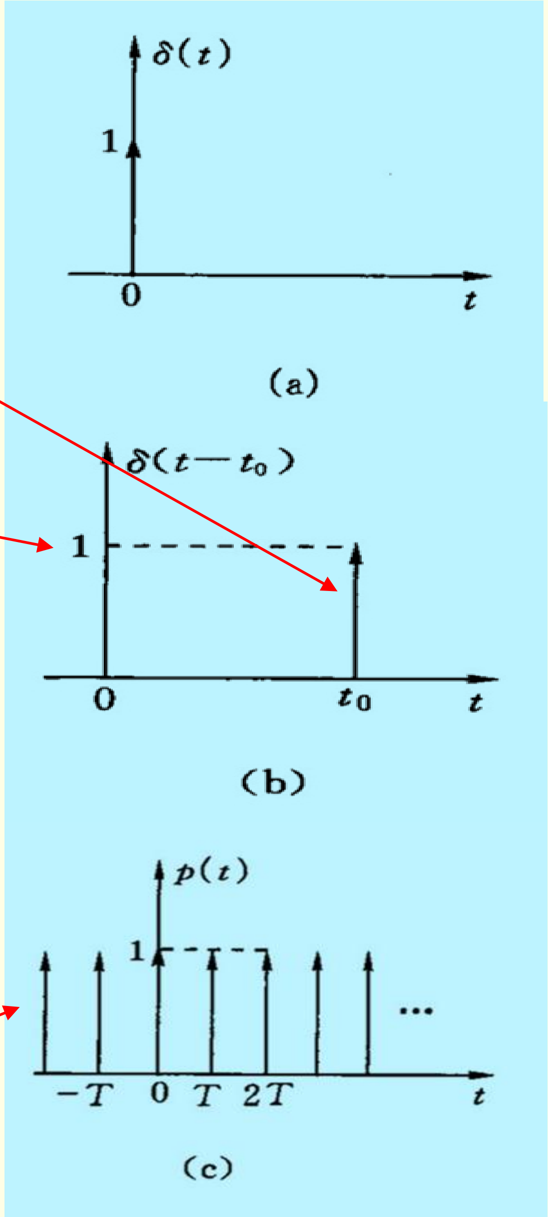
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1$$

t_0是任意实数，筛选函数选取$t=t_0$时，信号$x(t)$的值为

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=x(t_0)$$

令上式$t_0=nT$ $(-\infty<n<\infty)$，得到一组周期冲激串，将其定义为理想采样脉冲函数$p(t)$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



- 采样在数学上等效为下列运算

乘积关系在推导采样前后信号的谱关系很有用

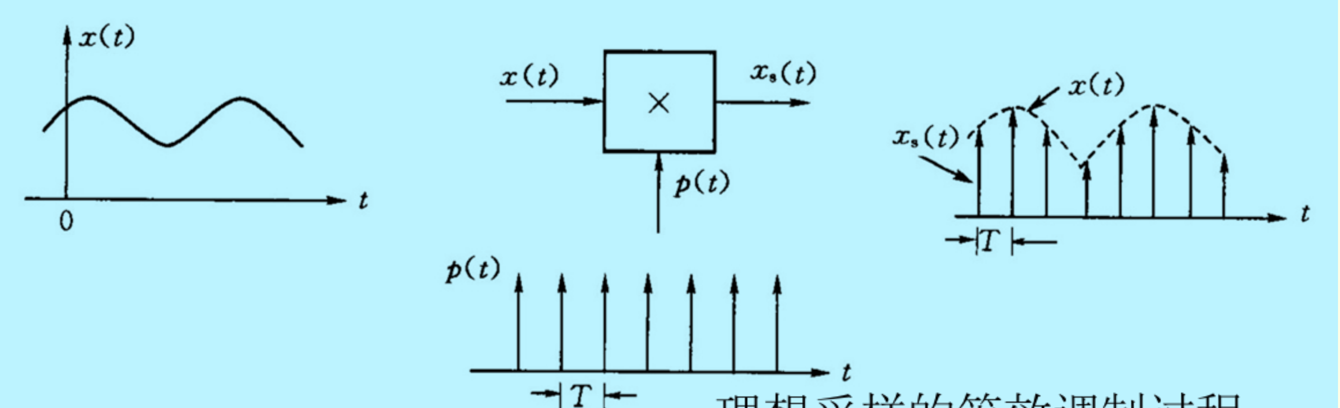
理想采样脉冲$p(t)$的连续时间信号$x(t)$相乘

$$x_s(t) = x(t)p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

由冲激信号的筛选性质，上式又可表示为

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

- 以采样间隔T对连续时间信号的理想采样过程（也可看着是一种调制）



理想采样的等效调制过程

1.5.4 采样信号的频域表示—离散时间傅立叶变换（DTFT)

非周期信号$x(t)$的FT

$$\boxed{\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega \end{aligned}}$$

对任何能量有限信号，其的傅里叶变换总是存在。因此采样信号的FT为

$$X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)]\, e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

将上式重写如下

$$X_s(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)]\,e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

交换积分号和求和号的位置，并根据 δ 函数的筛选性质有

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)dt=1$$

当$t=nT$时，得到

$$X_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\mathrm{T})e^{-j\Omega nT}$$

上式定义为采样信号$x_s(t)$的离散时间傅里叶变换（DTFT）

注意：由于$e^{j(\Omega T)n}=e^{j(\Omega T+2\pi)n}$，$\Omega T$只能在[-$\pi$，$\pi$]内取值，因此采样信号频谱$X_s(j\Omega)$的周期为$[-\frac{\pi}{T},\ \frac{\pi}{T}]$。

将采样信号的频谱表达式（DTFT）重写如下

$$X_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\mathrm{T})e^{-j\Omega nT}$$

上式傅立叶变换的系数$x(nT)$由下列积分计算

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega$$

上式定义为采样信号$x_s(t)$的离散时间傅立叶反变换（IDTFT）。

该式把$x_s(t)$的样本$x(nT)$表示成无限个复正弦 $\frac{1}{2\pi}e^{j\Omega nT}$ 在频率（$-\frac{\pi}{T}$，$\frac{\pi}{T}$）区间的叠加，每个复正弦分量的大小由$X_s(j\Omega)$确定。

1.6 用信号的样本表示连续时间信号—采样定理

采样函数与连续时间信号相乘（采样过程）

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

采样信号表达式确定了连续时间信号与其采样信号的时域关系，$x_s(t)$和$x(t)$二者都有各自的傅立叶变换表示，它们的频谱也一定存在着某种对应关系。

连续时间信号 $x(t)$ 的傅立叶反变换：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

采样信号$x_s(t)$的傅立叶变换的系数：

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega$$

为分析$X(j\Omega)$和$X_s(j\Omega)$的对应关系，将$t = nT$代入$x(t)$表达式中，得到

$t = nT$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega}$$

得到

$$\boxed{x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega}$$

把上式表示为无限多积分之和，每个积分的区间宽度为$\frac{2\pi}{T}$，中心为$\frac{2\pi r}{T}$，r为整数，即

$$\boxed{x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(j\Omega)e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega}$$

(推导)

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(j\Omega)e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

对上式进行变量替换$v=\Omega+2\pi r/T$和$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}v$, 并交换积分与求和的次序，得到

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega-j\frac{2\pi r}{T}\right)\right]e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

上式与采样信号的傅里叶变换表示$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_S(j\Omega)e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$形式相同，得到用$X(j\Omega)$表示$X_S(j\Omega)$的关系式

$$X_s(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega-j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

或

$$X_s(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega-r\Omega_s)]$$

■ 分析（讨论）

$$\boxed{X_s(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X[j(\Omega-r\Omega_s)]}$$

1、上式说明了$X(j\Omega)$与$X_s(j\Omega)$关系，该式恰好即为周期延拓的定义式，其周期为Ω_s

$$\frac{2\pi}{T}=\Omega_s$$

2、$X_s(j\Omega)$的频谱是周期函数，周期为Ω_s；也就是说采样信号$x_s(t)$的频谱是原连续时间信号$x(t)$的频谱以采样频率Ω_s为周期进行无限周期延拓的结果，其频谱幅度变为原来的$1/T$。

改变采样周期 T 究竟会带来采样信号频谱的什么变化?

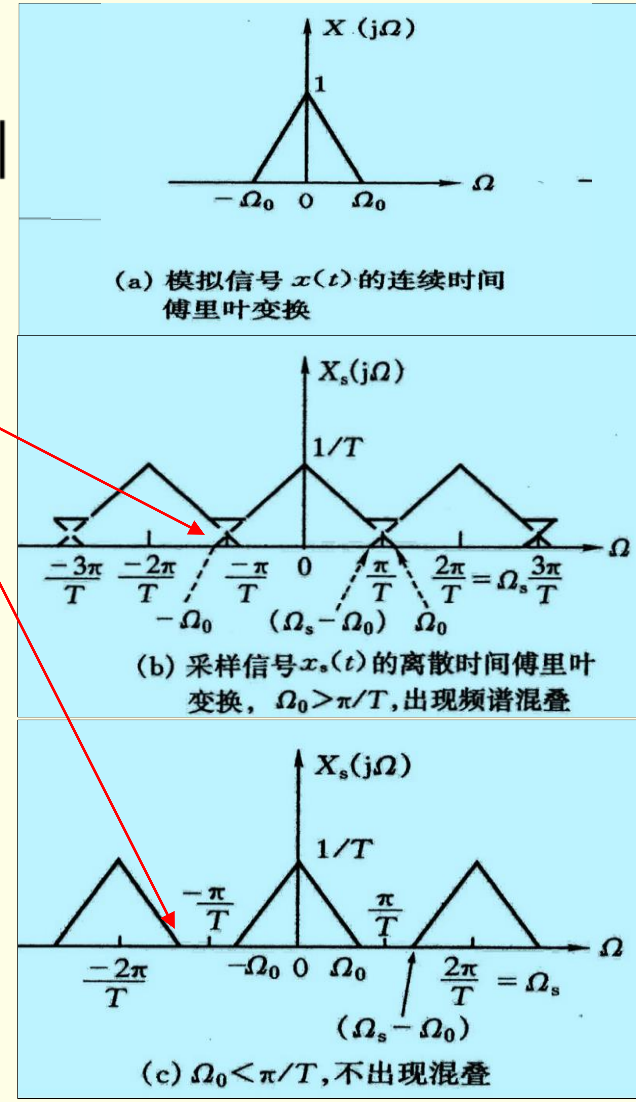
假设：

1、$X(j\Omega)$是实函数，相位恒为零，即$X(j\Omega)=|X(j\Omega)|$

2、假定信号的非零的最高频率为Ω_0

当T过大时，即$\Omega_s-\Omega_0<\Omega_0$，此时出现频谱“混叠”现象

当T取得足够小，即$\Omega_s-\Omega_0>\Omega_0$，此时没有频谱“混叠”现象



(a) 模拟信号 $x(t)$ 的连续时间傅里叶变换

(b) 采样信号$x_s(t)$的离散时间傅里叶变换，$\Omega_0>\pi/T$，出现频谱混叠

(c) $\Omega_0<\pi/T$，不出现混叠

因此，只有在 $\Omega_s>2\Omega_0$ 的条件下，采样信号的频谱采不会出现原模拟信号频谱的混叠。

即，采样频率f_s必须满足

$$\Omega_s>2\Omega_0 \quad \text{或} \quad f_s\geq 2f_{max}$$

式中 $f_s=\frac{\Omega_s}{2\pi}$, $f_0=\frac{\Omega_0}{2\pi}$

- 需要注意

在实际工作中，为了避免频谱混淆现象发生，采样频率总是选得比奈奎斯特频率更大些，例如选到Ω_s取$(3\sim4)\Omega_0$。同时为了避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器造成频谱混淆，一般在采样器前加入一个保护性的前置低通滤波器，其截止频率为$\Omega_s/2$，以便滤除掉高于$\Omega_s/2$的频率分量。

1.7 利用内插由样本重建信号

若一个信号是有限带宽的，即频谱在$|\Omega|> \Omega_0$时幅值为零，按采样定理确定的采样间隔$T\leq\frac{\pi}{\Omega_0}$对信号进行采样，则该信号可由采样信号完全重建。

连续时间信号的傅立叶反变换重写如下

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega}$$

若$x(t)$的最高频率为Ω_0，且采样频率足够高$\Omega_s>2\Omega_0$，上式的积分上下限$\int_{-\infty}^{\infty}$可用$\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}$替代，并将$X(j\Omega)=TX_s(j\Omega)$代入上式，得到

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}TX_s(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega}$$

而上式中采样信号的傅立叶变换（DTFT）为

$$X_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{j\Omega nT}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} TX_s(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

得到

将采样信号的傅里叶变换（DTFT）代入

$$X_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{j\Omega nT}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{j\Omega nT}\}e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

交换积分与求和的顺序，并将积分求出，得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT)\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-n)T}\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{2\sin[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)]}{(t-nT)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

由$x(t)$的采样样本$x(nT)$重构模拟信号$x(t)$的内插公式

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tx(nT)\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}e^{j\Omega(t-n)T}\mathrm{d}\Omega$$
$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{2\sin[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)]}{(t-nT)}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\sin[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

采样函数定义为

$$S(x)=\frac{\sin(x)}{x}=\mathrm{sinc}(x)$$

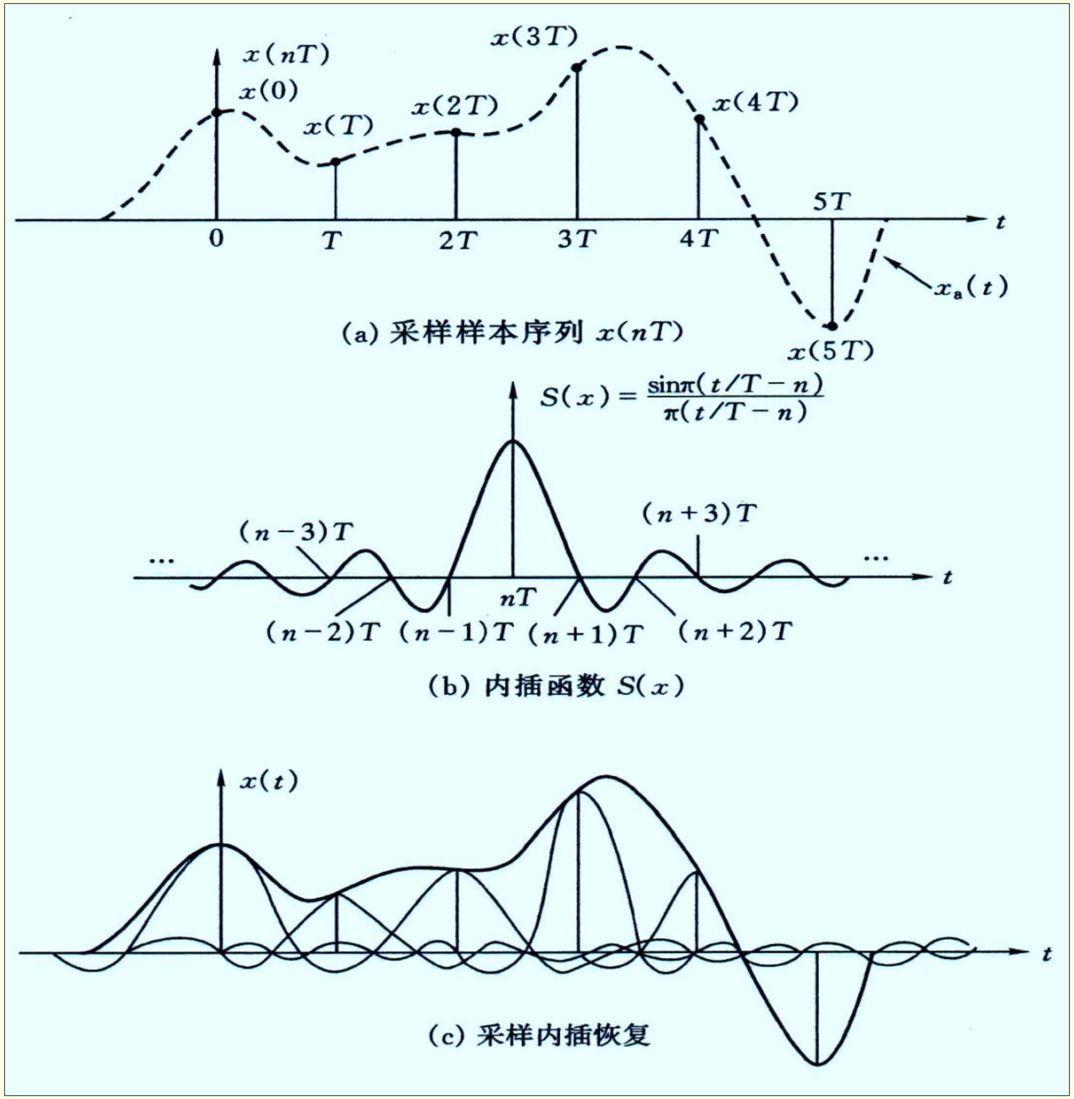
式中x定义为

$$x=\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

内插公式又可表示为

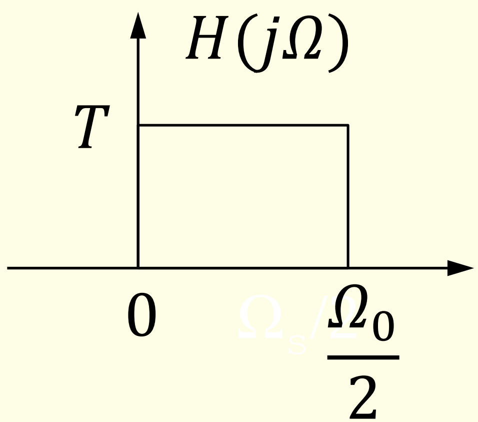
$$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{sinc}(\pi[\frac{t}{T}-n])$$

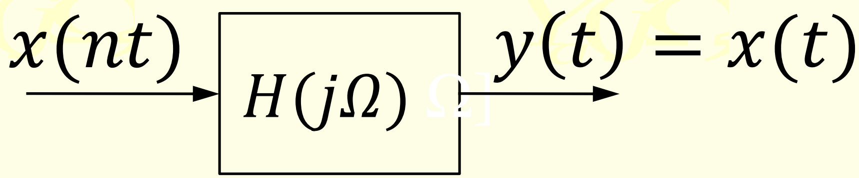
由采样样本内插重建原始信号示意图



举例：利用理想低通滤波器给出满足采样定理的内插函数

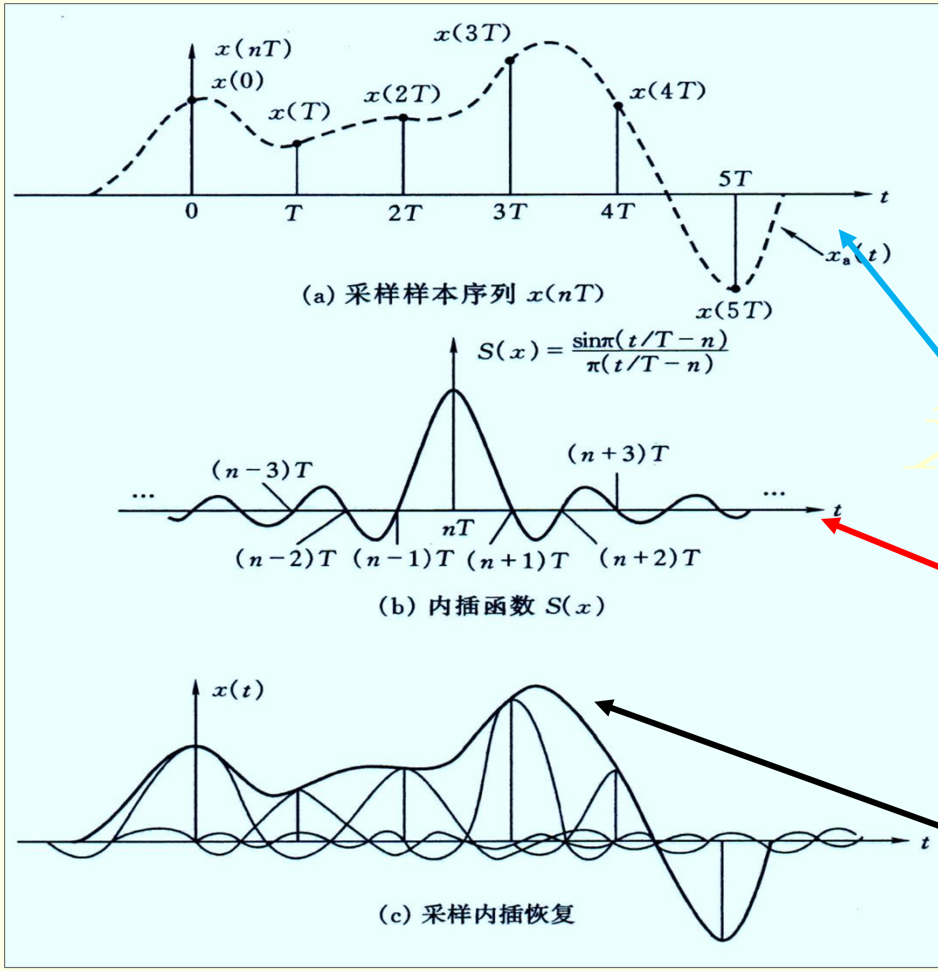
$$H(j\Omega)=\begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{1}{2}\Omega 0 \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{1}{2}\Omega_0 \end{cases}$$

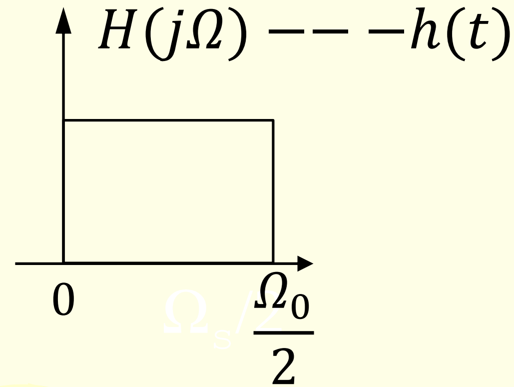


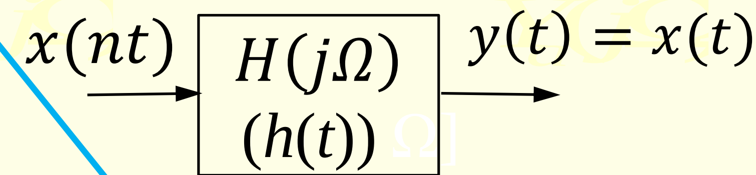


理想低通滤波器的输出
(推导)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin[\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)]}{\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)}$$





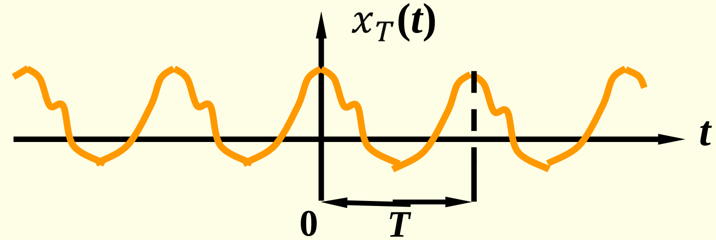


$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)}$$

周期信号的傅里叶级数—非周期信号的连续时间傅里叶变换—采样信号的离散时间傅里叶变换

连续时间周期信号的傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} X(n\Omega_0)e^{jn\Omega_0 t}$$



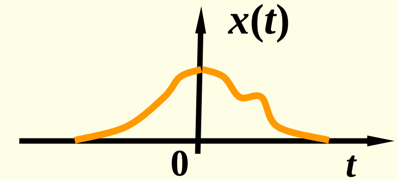
$$x_T(t)=\lim_{T\to\infty} x(t+T)$$

$$\frac{2\pi}{T}=\mathrm{d}\Omega\text{，}\ n\Omega_0=\Omega$$

连续时间非周期信号的傅里叶变换

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$



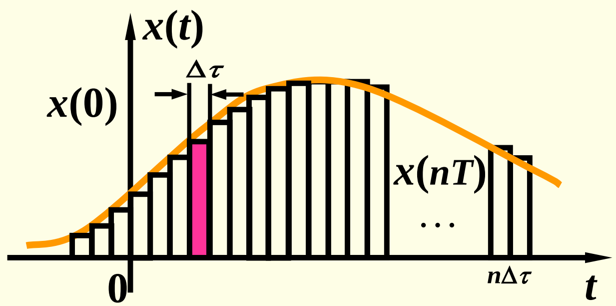
$$t=nT$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

采样信号的离散时间傅里叶变换

$$X_s(j\Omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega$$



本章小结

- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 非周期信号的连续时间傅里叶变换
- 卷积与相关
- 连续时间信号的采样
- 采样信号的频域表示-离散时间傅里叶变换
- 用信号样本表示连续信号—采样定理
- 利用内插由样本重建信号