

## E.A.6.4 ( $n$ -Queens)

### 1.1 Modellazione

#### 1.1.1 Variabili

Dato  $n \geq 1$  siano

- $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  l'insieme dei numeri da 1 a  $n$
- $Q = \{Q_{i,j} \mid i \in \mathcal{N} \wedge j \in \mathcal{N}\}$  l'insieme delle variabili t.c.
  - $Q_{i,j}$  è vera se all' $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna è presente una regina

#### 1.1.2 Vincoli

$$\begin{aligned}\phi = & \phi_{\text{almeno\_una\_regina\_per\_colonna}} \wedge \\ & \phi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_colonna}} \wedge \\ & \phi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_riga}} \wedge \\ & \phi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_diagonale}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{almeno\_una\_regina\_per\_colonna}} &= \bigwedge_{c \in \mathcal{N}} \left( \bigvee_{r \in \mathcal{N}} Q_{r,c} \right) \\ \varphi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_colonna}} &= \bigwedge_{\substack{c \in \mathcal{N} \\ i \in \mathcal{N} \\ j \in \mathcal{N} \\ i < j}} Q_{i,c} \rightarrow \neg Q_{j,c} \\ \varphi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_riga}} &= \bigwedge_{\substack{r \in \mathcal{N} \\ i \in \mathcal{N} \\ j \in \mathcal{N} \\ i < j}} Q_{r,i} \rightarrow \neg Q_{r,j} \\ \varphi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_diagonale}} &= \bigwedge_{\substack{r \in \mathcal{N} \\ c \in \mathcal{N} \\ r' \in \mathcal{N} \\ c' \in \mathcal{N} \\ |r-r'| = |c-c'| \wedge \\ (r \neq r' \vee c \neq c')}} Q_{r,c} \rightarrow \neg Q_{r',c'}\end{aligned}$$

## 1.2 Istanza $n = 4$

### 1.2.1 Variabili

Dato  $n = 4$  si ha

$$\begin{aligned} - Q = \{ & \\ & Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}, Q_{1,4}, \\ & Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}, Q_{2,4}, \\ & Q_{3,1}, Q_{3,2}, Q_{3,3}, Q_{3,4}, \\ & Q_{4,1}, Q_{4,2}, Q_{4,3}, Q_{4,4} \\ & \} \end{aligned}$$

### 1.2.2 Vincoli

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{almeno\_una\_regina\_per\_colonna}} = ( & \\ & (Q_{1,1} \vee Q_{2,1} \vee Q_{3,1} \vee Q_{4,1}) \wedge \\ & (Q_{1,2} \vee Q_{2,2} \vee Q_{3,2} \vee Q_{4,2}) \wedge \\ & (Q_{1,3} \vee Q_{2,3} \vee Q_{3,3} \vee Q_{4,3}) \wedge \\ & (Q_{1,4} \vee Q_{2,4} \vee Q_{3,4} \vee Q_{4,4}) \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_colonna}} = ( & \\ & (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{2,1}) \wedge (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{3,1}) \wedge (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{4,1}) \wedge \\ & (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{3,1}) \wedge (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{4,1}) \wedge \\ & (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{4,1}) \wedge \\ & (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge \\ & (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge \\ & (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge \\ & (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge \\ & (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge \\ & (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge \\ & (Q_{1,4} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge (Q_{1,4} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge (Q_{1,4} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\ & (Q_{2,4} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge (Q_{2,4} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\ & (Q_{3,4} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_riga}} = & ( \\
& (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{1,2}) \wedge (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{1,3}) \wedge (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{1,4}) \wedge \\
& (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{1,3}) \wedge (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{1,4}) \wedge \\
& (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{1,4}) \wedge \\
& (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge \\
& (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge \\
& (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge \\
& (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge \\
& (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge \\
& (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge \\
& (Q_{4,1} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge (Q_{4,1} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge (Q_{4,1} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\
& (Q_{4,2} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge (Q_{4,2} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\
& (Q_{4,3} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\
& )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{no\_due\_regine\_stessa\_diagonale}} = & ( \\
& (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{1,1} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge \\
& (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{2,1}) \wedge (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{1,2} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge \\
& (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge (Q_{1,3} \rightarrow \neg Q_{3,1}) \wedge \\
& (Q_{1,4} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{1,4} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{1,4} \rightarrow \neg Q_{4,1}) \wedge \\
& (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{1,2}) \wedge (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{2,1} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge \\
& (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{1,1}) \wedge (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{1,3}) \wedge (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{3,1}) \wedge \\
& (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{2,2} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{1,2}) \wedge \\
& (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{1,4}) \wedge (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge \\
& (Q_{2,3} \rightarrow \neg Q_{4,1}) \wedge (Q_{2,4} \rightarrow \neg Q_{1,3}) \wedge (Q_{2,4} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge \\
& (Q_{2,4} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{1,3}) \wedge (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge \\
& (Q_{3,1} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{1,4}) \wedge (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{2,1}) \wedge \\
& (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{4,1}) \wedge (Q_{3,2} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge \\
& (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{1,1}) \wedge (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge \\
& (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{4,2}) \wedge (Q_{3,3} \rightarrow \neg Q_{4,4}) \wedge (Q_{3,4} \rightarrow \neg Q_{1,2}) \wedge \\
& (Q_{3,4} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{3,4} \rightarrow \neg Q_{4,3}) \wedge (Q_{4,1} \rightarrow \neg Q_{1,4}) \wedge
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (Q_{4,1} \rightarrow \neg Q_{2,3}) \wedge (Q_{4,1} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{4,2} \rightarrow \neg Q_{2,4}) \wedge \\
& (Q_{4,2} \rightarrow \neg Q_{3,1}) \wedge (Q_{4,2} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \wedge (Q_{4,3} \rightarrow \neg Q_{2,1}) \wedge \\
& (Q_{4,3} \rightarrow \neg Q_{3,2}) \wedge (Q_{4,3} \rightarrow \neg Q_{3,4}) \wedge (Q_{4,4} \rightarrow \neg Q_{1,1}) \wedge \\
& (Q_{4,4} \rightarrow \neg Q_{2,2}) \wedge (Q_{4,4} \rightarrow \neg Q_{3,3}) \\
& )
\end{aligned}$$

## 1.3 Encoder

È scritto molto male e non usa a pieno la libreria, me ne rendo conto.  
Ho voluto solo testare un po' tutti i tool al volo.

```
import it.uniroma1.di.tmancini.utils.*;
import it.uniroma1.di.tmancini.teaching.ai.SATCodec.*;
import java.util.*;

public class Main {
    public static void main(String args[]) {
        int n = 4;
        var N = new IntRange("coords", 1, n);
        var NN = new RangeProduct("matrix", N, N);

        var encoder = new SATEncoder("n-Queens", "n-Queens.cnf");
        encoder.defineFamilyOfVariables("Q", NN);
        for (int c = 1; c ≤ n; c++) {
            for (int r = 1; r ≤ n; r++) {
                encoder.addToClause("Q", r, c);
            }
            encoder.endClause();
        }

        for (int c = 1; c ≤ n; c++) {
            for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
                for (int j = i + 1; j ≤ n; j++) {
                    encoder.addNegToClause("Q", i, c);
                    encoder.addNegToClause("Q", j, c);
                    encoder.endClause();
                    encoder.addNegToClause("Q", c, i);
                    encoder.addNegToClause("Q", c, j);
                    encoder.endClause();
                }
            }
        }

        for (int r1 = 1; r1 ≤ n; r1++) {
            for (int c1 = 1; c1 ≤ n; c1++) {
                for (int r2 = 1; r2 ≤ n; r2++) {
                    for (int c2 = 1; c2 ≤ n; c2++) {
                        if (r1 ≠ r2 && c1 ≠ c2) {
                            if (Math.abs(r1 - r2) == Math.abs(c1 - c2)) {
                                encoder.addNegToClause("Q", r1, c1);
                                encoder.addNegToClause("Q", r2, c2);
                                encoder.endClause();
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
}
```

```
        encoder.end();  
    }  
}
```