E.A.6.8 (Graph Colouring with Red Self-Loops)

1.1 Modellazione

Dati i parametri $G = (V, E)$ siano
- $\mathcal{C} = \{R, B, C\}$
- $X = \{X_v^c \mid v \in V \land c \in \mathcal{C}\}$ l'insieme di variabili dove
  - X_v^c è vera se il nodo v ha colore c

Il problema presenta 4 vincoli

$$\phi = \phi_1 \land \phi_2 \land \phi_3 \land \phi_4 \tag{1}$$

(ALO) Ogni nodo ha almeno un colore

$$\phi_1 = \bigwedge_{v \in V} \bigvee_{c \in \mathcal{C}} x_v^c \tag{2}$$

(AMO) Ogni nodo ha al più un colore

$$\phi_2 = \bigwedge_{\substack{v \in V \\ c_1, c_2 \in \mathcal{C} \\ c_1 < c_2}} X_v^{c_1} \to \neg X_v^{c_2} \tag{3}$$

1. Non esistono nodi collegati da un arco colorati con lo stesso colore.

$$\phi_3 = \bigwedge_{\substack{(u,v) \in E \\ c \in \mathcal{C} \\ u < v}} X_u^c \to \neg X_v^c \tag{4}$$

2. Ogni nodo $v \in V$ che ha un cappio (un arco da v a v) è colorato con il colore R.

$$\phi_4 = \bigwedge_{(v,v) \in E} X_v^R \tag{5}$$

1.2 Istanziazione

1.2.1 Variabili

$V = \{\mathrm{A, B, C, D, E, G1, G2, H, I, J, S}\}$
$E = \{$

$\mathrm{(A, E), (E, A), (A, H), (H, A), (A, I), (I, A), (A, S), (S, A), (B, C), (C, B),}$
$\mathrm{(B, G2), (G2, B), (B, I), (I, B), (B, J), (J, B), (B, S), (S, B), (C, D), (D, C),}$
$\mathrm{(C, G2), (G2, C), (C, S), (S, C), (D, E), (E, D), (D, S), (S, D), (E, G1), (G1, E),}$
$\mathrm{(E, H), (H, E), (G1, H), (H, G1), (G2, J), (J, G2), (H, I), (I, H), (J, J)}$

$\}$

$$
\begin{aligned}
X = \{ & \\
& X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}, \\
X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}}, & \\
X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}}, & \\
X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}, & \\
\} &
\end{aligned}
$$

1.2.2 Vincoli

$$
\begin{aligned}
& \phi_{\text{almeno\_un\_colore}} = \\
& \quad (X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}) \land \\
& \quad (X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}) \land \\
& \quad (X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}) \land \\
& \quad (X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}})
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
& \phi_{\text{al\_più\_un\_colore}} = \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \quad \left(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}\right) \land
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
& \phi_{\text{nodi\_adiacenti\_colore\_diverso}} = \\
& \quad (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{c}) \land (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{c}) \land (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{c}) \land \\
& \quad (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \land (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \land (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \land \\
& \quad (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \land (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \land (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \land
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{A}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{C}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{C}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{C}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{D}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{D}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{D}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{D}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{E}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{E}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{E}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{D}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{E}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G1}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G1}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{G1}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{E}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{G1}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G1}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G1}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{G2}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G2}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G2}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{c}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{H}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{H}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \wedge (\neg X_{\mathrm{H}}^{c} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{c}) \wedge
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\phi_{\text{cappi}} = X_J^R \tag{9}
$$

1.3 Codifica

```rust
use computer_braining::framework::sat_codec::*;
use serde::Serialize;

#[derive(Clone, Copy, Hash, PartialEq, Eq, PartialOrd, Ord,
Serialize, Debug)]
enum Color {
    R,
    B,
    C,
}

type Node = &'static str;

#[derive(Hash, PartialEq, Eq, PartialOrd, Ord, Serialize, Debug)]
struct X(Node, Color);

fn main() {
    use Color::*;
    use Literal::Neg;

    #[rustfmt::skip]
    let nodes = [
        "A", "B", "C", "D", "E", "G1", "G2", "H", "I", "J", "S"
    ];

    #[rustfmt::skip]
    let edges = [
        ("A", "E"), ("A", "H"), ("A", "I"), ("A", "S"),
        ("B", "C"), ("B", "G2"), ("B", "I"), ("B", "J"),
        ("B", "S"), ("C", "D"), ("C", "G2"), ("C", "S"),
        ("D", "E"), ("D", "S"), ("E", "G1"), ("E", "H"),
        ("G1", "H"), ("G2", "J"), ("H", "I"), ("J", "J")
    ];

    let colors = [R, B, C];

    let mut encoder = Encoder::new();

    // Almeno un colore
    for v in nodes.iter() {
        let mut c = encoder.clause_builder();
        for color in colors {
            c.add(X(v, color));
        }
        encoder = c.end();
    }

    // Al più un colore
    for v in nodes.iter() {
        for (i_1, &color_1) in colors.iter().enumerate() {
            for &color_2 in colors.iter().skip(i_1 + 1) {
```

```
                let mut c = encoder.clause_builder();
                c.add(Neg(X(v, color_1)));
                c.add(Neg(X(v, color_2)));
                encoder = c.end();
            }
        }
    }

    // Nodi adiacenti colore diverso + Cappi
    for (u, v) in edges.iter() {
        if u == v {
            let mut c = encoder.clause_builder();
            c.add(X(v, R));
            encoder = c.end();
        } else {
            for color in colors {
                let mut c = encoder.clause_builder();
                c.add(Neg(X(u, color)));
                c.add(Neg(X(v, color)));
                encoder = c.end();
            }
        }
    }

    encoder.end();
}
```

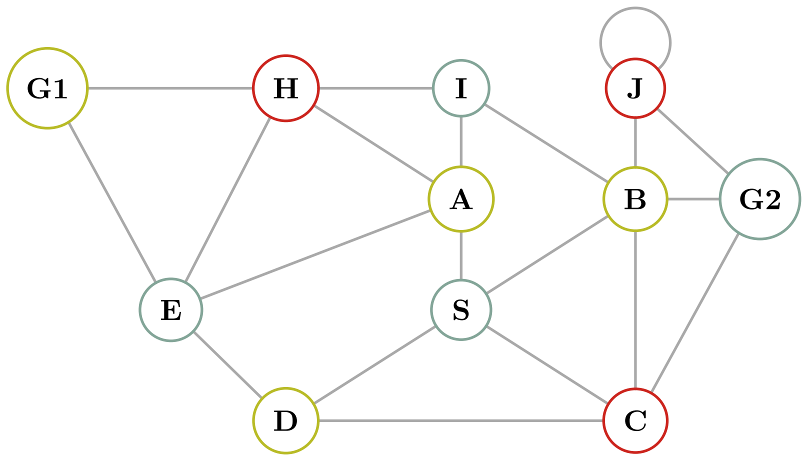

Figura 1: soluzione generata da `picosat`