# E.A.6.8 (Graph Colouring with Red Self-Loops)

## 1.1 Modellazione

Dati i parametri $G = (V, E)$ siano
- $\mathcal{C} = \{R, B, C\}$
- $\text{LP} = \{X_v^c \mid v \in V \land c \in \mathcal{C}\}$ l'insieme di lettere proposizionali t.c.
  - $X_v^c$ è vera se il nodo $v$ ha colore $c$

Il problema presenta 4 vincoli

$$\phi = \phi_{\text{ALO\_col}} \land \phi_{\text{AMO\_col}} \land \phi_{\text{col}} \land \phi_{\text{loop}}$$

(ALO) Ogni nodo ha almeno un colore.

$$\phi_{\text{ALO\_col}} = \bigwedge_{v \in V} \bigvee_{c \in \mathcal{C}} x_v^c \tag{1}$$

(AMO) Ogni nodo ha al più un colore.

$$\phi_{\text{AMO\_col}} = \bigwedge_{\substack{v \in V \\ c_1, c_2 \in \mathcal{C} \\ c_1 < c_2}} X_v^{c_1} \to \neg X_v^{c_2} \tag{2}$$

1. Non esistono nodi collegati da un arco colorati con lo stesso colore.

$$\phi_{\text{col}} = \bigwedge_{\substack{(u,v) \in E \\ c \in \mathcal{C} \\ u < v}} X_u^c \to \neg X_v^c \tag{3}$$

2. Ogni nodo $v \in V$ che ha un cappio (un arco da $v$ a $v$) è colorato con il colore $R$.

$$\phi_{\text{loop}} = \bigwedge_{(v,v) \in E} X_v^R \tag{4}$$

## 1.2 Istanziazione

### 1.2.1 Parametri e variabili

$V = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{G1}, \mathrm{G2}, \mathrm{H}, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{S}\}$

$$
\begin{aligned}
E = \{ & \\
& (\mathrm{A},\mathrm{E}),(\mathrm{E},\mathrm{A}),(\mathrm{A},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{A}),(\mathrm{A},\mathrm{I}),(\mathrm{I},\mathrm{A}),(\mathrm{A},\mathrm{S}),(\mathrm{S},\mathrm{A}),(\mathrm{B},\mathrm{C}),(\mathrm{C},\mathrm{B}),\\
& (\mathrm{B},\mathrm{G2}),(\mathrm{G2},\mathrm{B}),(\mathrm{B},\mathrm{I}),(\mathrm{I},\mathrm{B}),(\mathrm{B},\mathrm{J}),(\mathrm{J},\mathrm{B}),(\mathrm{B},\mathrm{S}),(\mathrm{S},\mathrm{B}),(\mathrm{C},\mathrm{D}),(\mathrm{D},\mathrm{C}),\\
& (\mathrm{C},\mathrm{G2}),(\mathrm{G2},\mathrm{C}),(\mathrm{C},\mathrm{S}),(\mathrm{S},\mathrm{C}),(\mathrm{D},\mathrm{E}),(\mathrm{E},\mathrm{D}),(\mathrm{D},\mathrm{S}),(\mathrm{S},\mathrm{D}),(\mathrm{E},\mathrm{G1}),(\mathrm{G1},\mathrm{E}),\\
& (\mathrm{E},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{E}),(\mathrm{G1},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{G1}),(\mathrm{G2},\mathrm{J}),(\mathrm{J},\mathrm{G2}),(\mathrm{H},\mathrm{I}),(\mathrm{I},\mathrm{H}),(\mathrm{J},\mathrm{J})\\
\} &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LP} = \Big\{ & \\
& X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}},\\
& X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}},\\
& X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}},\\
& X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}\\
\Big\} &
\end{aligned}
$$

### 1.2.2 Vincoli

(ALO) Ogni nodo ha almeno un colore.

$$
\begin{aligned}
&\phi_{\mathrm{ALO\_col}} =\\
&(X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}) \land\\
&(X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}) \land\\
&(X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}})
\end{aligned}
$$

(AMO) Ogni nodo ha al più un colore.

$$
\begin{aligned}
&\phi_{\mathrm{AMO\_col}} =\\
&\big(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}\big) \land\\
&\big(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}\big) \land \big(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}\big) \land
\end{aligned}
$$

$\left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{S}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}}\right)$

1. Non esistono nodi collegati da un arco colorati con lo stesso colore.

$\phi_{\mathrm{col}} =$

$$\left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{C}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{G2}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{G2}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{G2}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{J}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{J}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{J}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{D}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{D}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{D}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{G2}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{G2}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{G2}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{D}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{D}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{D}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{D}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{D}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{D}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{S}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{G1}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{E}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{G1}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{G1}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{E}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{G1}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{G1}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{G1}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{G2}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{J}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{G2}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{J}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{G2}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{J}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}} \vee \neg X^{\mathrm{R}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge \left(\neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}} \vee \neg X^{\mathrm{B}}_{\mathrm{I}}\right) \wedge$$
$$\left(\neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}} \vee \neg X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{I}}\right)$$

2. Ogni nodo $v \in V$ che ha un cappio (un arco da $v$ a $v$) è colorato con il colore $R$.

$$\phi_{\mathrm{loop}} = X^R_J$$

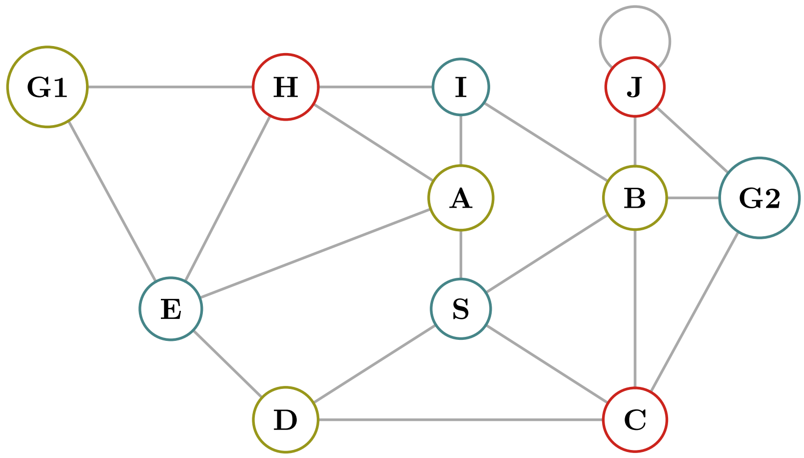


Figura 1: soluzione generata da `picosat`

## 1.3 Codifica

```rust
use crate::encoder::*;
use serde::Serialize;

#[derive(Clone, Copy, Hash, PartialEq, Eq, PartialOrd, Ord,
Serialize, Debug)]
pub enum Color {
    R,
    B,
    C,
}

#[derive(Clone, Copy, Hash, PartialEq, Eq, PartialOrd, Ord,
Serialize, Debug)]
pub struct X<T>(T, Color);

pub fn encode_instance<T>(vertices: &[T], edges: &[(T, T)]) ->
(String, Vec<X<T>>)
where
    T: std::cmp::Eq + std::hash::Hash + std::fmt::Debug +
Serialize + Clone + Copy,
{
    use Literal::Neg;
    let colors = [Color::R, Color::B, Color::C];

    let mut encoder = EncoderSAT::new();

    // ALO_col
    for &v in vertices {
        encoder.add(colors.into_iter().map(|color| X(v,
color).into()).collect());
    }

    // AMO_col
    for &v in vertices {
        for (i_1, &color_1) in colors.iter().enumerate() {
            for &color_2 in colors.iter().skip(i_1 + 1) {
                encoder.add(vec![Neg(X(v, color_1)), Neg(X(v,
color_2))]);
            }
        }
    }

    // col + loop
    for &(u, v) in edges {
        if u == v {
            encoder.add(vec![X(v, Color::R).into()])
        } else {
            for color in colors {
                encoder.add(vec![Neg(X(u, color)), Neg(X(v,
color))]);
            }
```

```
        }
    }

    encoder.end()
}
```