E.A.6.8 (Graph Colouring with Red Self-Loops)

1.1 Modellazione

Dati i parametri $G = (V, E)$ siano
- $\mathcal{C} = \{R, B, C\}$
- $X = \{X_v^c \mid v \in V \land c \in \mathcal{C}\}$ l'insieme di variabili dove
  - X_v^c è vera se il nodo v ha colore c

Il problema presenta 4 vincoli

$$\phi = \phi_1 \land \phi_2 \land \phi_3 \land \phi_4$$

(ALO) Ogni nodo ha almeno un colore.

$$\phi_1 = \bigwedge_{v \in V} \bigvee_{c \in \mathcal{C}} x_v^c \tag{1}$$

(AMO) Ogni nodo ha al più un colore.

$$\phi_2 = \bigwedge_{\substack{v \in V \\ c_1, c_2 \in \mathcal{C} \\ c_1 < c_2}} X_v^{c_1} \to \neg X_v^{c_2} \tag{2}$$

1. Non esistono nodi collegati da un arco colorati con lo stesso colore.

$$\phi_3 = \bigwedge_{\substack{(u,v) \in E \\ c \in \mathcal{C} \\ u < v}} X_u^c \to \neg X_v^c \tag{3}$$

2. Ogni nodo $v \in V$ che ha un cappio (un arco da v a v) è colorato con il colore R.

$$\phi_4 = \bigwedge_{(v,v) \in E} X_v^R \tag{4}$$

1.2 Istanziazione

1.2.1 Parametri e variabili

$V = \{\mathrm{A, B, C, D, E, G1, G2, H, I, J, S}\}$
$E = \{$

$(\mathrm{A, E}), (\mathrm{E, A}), (\mathrm{A, H}), (\mathrm{H, A}), (\mathrm{A, I}), (\mathrm{I, A}), (\mathrm{A, S}), (\mathrm{S, A}), (\mathrm{B, C}), (\mathrm{C, B}),$
$(\mathrm{B, G2}), (\mathrm{G2, B}), (\mathrm{B, I}), (\mathrm{I, B}), (\mathrm{B, J}), (\mathrm{J, B}), (\mathrm{B, S}), (\mathrm{S, B}), (\mathrm{C, D}), (\mathrm{D, C}),$
$(\mathrm{C, G2}), (\mathrm{G2, C}), (\mathrm{C, S}), (\mathrm{S, C}), (\mathrm{D, E}), (\mathrm{E, D}), (\mathrm{D, S}), (\mathrm{S, D}), (\mathrm{E, G1}), (\mathrm{G1, E}),$
$(\mathrm{E, H}), (\mathrm{H, E}), (\mathrm{G1, H}), (\mathrm{H, G1}), (\mathrm{G2, J}), (\mathrm{J, G2}), (\mathrm{H, I}), (\mathrm{I, H}), (\mathrm{J, J})$

$\}$

$$
\begin{aligned}
X = \{ \\
& X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}, \\
& X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}, \\
& X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}, \\
& X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}, X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}} \\
\}
\end{aligned}
$$

1.2.2 Vincoli

(ALO) Ogni nodo ha almeno un colore.

$$
\begin{aligned}
\phi_1 = \\
& (X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}) \land \\
& (X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}) \land \\
& (X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}) \land \\
& (X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}) \land (X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}} \lor X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(AMO) Ogni nodo ha al più un colore.

$$
\begin{aligned}
\phi_2 = \\
& \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

1. Non esistono nodi collegati da un arco colorati con lo stesso colore.

$$
\begin{aligned}
\phi_3 = \\
& \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}\right) \land \\
& \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}}\right) \land \left(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \lor \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}\right) \land
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{S}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G1}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{G2}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{J}}^{\mathrm{C}}) \wedge \\
&(\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{R}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{B}}) \wedge (\neg X_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}} \vee \neg X_{\mathrm{I}}^{\mathrm{C}})
\end{aligned} \tag{7}
$$

2. Ogni nodo $v \in V$ che ha un cappio (un arco da v a v) è colorato con il colore R.

$$\phi_4 = X_J^R \tag{8}$$

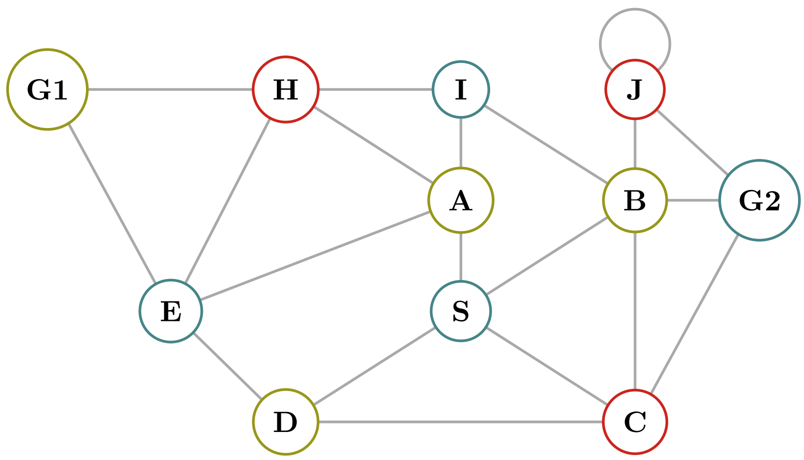

Figura 1: soluzione generata da `picosat`

1.3 Codifica

```rust
use computer_braining::framework::encoder::*;
use serde::Serialize;

#[derive(Clone, Copy, Hash, PartialEq, Eq, PartialOrd, Ord,
Serialize, Debug)]
enum Color {
    R,
    B,
    C,
}

type Node = &'static str;

#[derive(Hash, PartialEq, Eq, PartialOrd, Ord, Serialize, Debug)]
struct X(Node, Color);

fn main() {
    use Color::*;
    use Literal::Neg;

    #[rustfmt::skip]
    let nodes = [
        "A", "B", "C", "D", "E", "G1", "G2", "H", "I", "J", "S"
    ];

    #[rustfmt::skip]
    let edges = [
        ("A", "E"), ("A", "H"), ("A", "I"), ("A", "S"),
        ("B", "C"), ("B", "G2"), ("B", "I"), ("B", "J"),
        ("B", "S"), ("C", "D"), ("C", "G2"), ("C", "S"),
        ("D", "E"), ("D", "S"), ("E", "G1"), ("E", "H"),
        ("G1", "H"), ("G2", "J"), ("H", "I"), ("J", "J")
    ];

    let colors = [R, B, C];

    let mut encoder = EncoderSAT::new();

    // ALO
    for v in nodes {
        encoder.add(colors.into_iter().map(|color| X(v,
color).into()).collect());
    }

    // AMO
    for v in nodes {
        for (i_1, &color_1) in colors.iter().enumerate() {
            for &color_2 in colors.iter().skip(i_1 + 1) {
                encoder.add(vec![Neg(X(v, color_1)), Neg(X(v,
color_2))]);
            }
```

```
        }
    }

    // 1. + 2.
    for (u, v) in edges {
        if u == v {
            encoder.add(vec![X(v, R).into()])
        } else {
            for color in colors {
                encoder.add(vec![Neg(X(u, color)), Neg(X(v,
color))]);
            }
        }
    }

    encoder.end();
}
```