Компактная разностная схема для уравнения переноса

Г. К. Лебедев, научный руководитель В. А. Гордин
Лицей «Вторая школа»,
НИУ ВШЭ, факультет экономических наук & Гидрометцентр РФ

Москва, 2020 г.

Уравнение переноса — линейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее динамику скалярной величины u.

Одномерная версия (с постоянной скоростью V):

$$\partial_t u + V\partial_x u = 0, \qquad (1)$$

где u – неизвестная функция, t – время, x – координата.

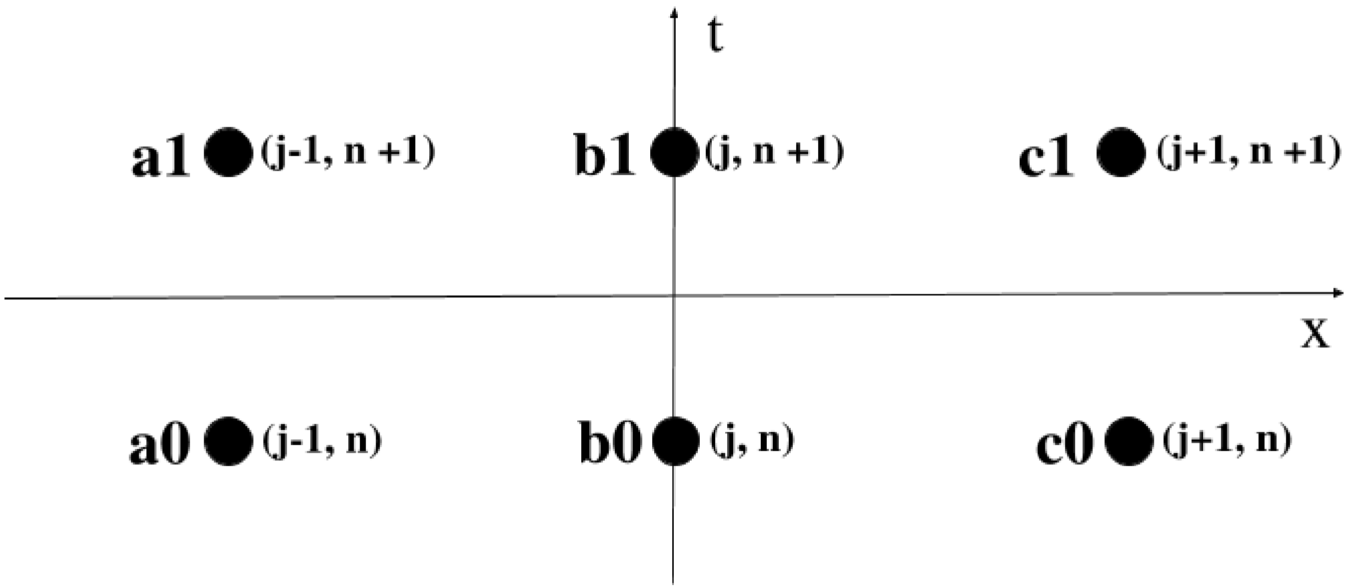
Уравнение (1) имеет аналитическое решение: $u(x,t) = u(\mathrm{x} - \mathrm{Vt})$

Рассмотрен простейший случай задачи: граничные условия – периодические, область решения — окружность длины L.

Разностная схема

Неявную компактную схему для (1) строим на двухслойном трехточечном шаблоне (с шагом h по координате x и τ по времени t) в виде:

$$a1u_{j-1}^{n+1} + b1u_{j}^{n+1} + c1u_{j+1}^{n+1} + a0u_{j-1}^{n} + b0u_{j}^{n} + c0u_{j+1}^{n} = 0 \quad (2)$$



Шаблон для компактной схемы - прямоугольник

Вычисление коэффициентов схемы

Применяя преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ к (2), получим символ оператора перехода от функции u^n к u^{n+1}:

$$\tilde{u}^{n+1} = \frac{a_0 \exp(-i\omega) + b_0 + c_0 \exp(i\omega)}{a_1 \exp(-i\omega) + b_1 + c_1 \exp(i\omega)} \tilde{u}^n, \qquad (3)$$

где $\nu = V\tau/h$ — безразмерное число Куранта, $\omega = \xi h$ — безразмерное волновое число.

Вычисление коэффициентов схемы

Разрешающий оператор для дифференциального уравнения (1) за время τ переводит u^n в u^{n+1}. Его символ равен

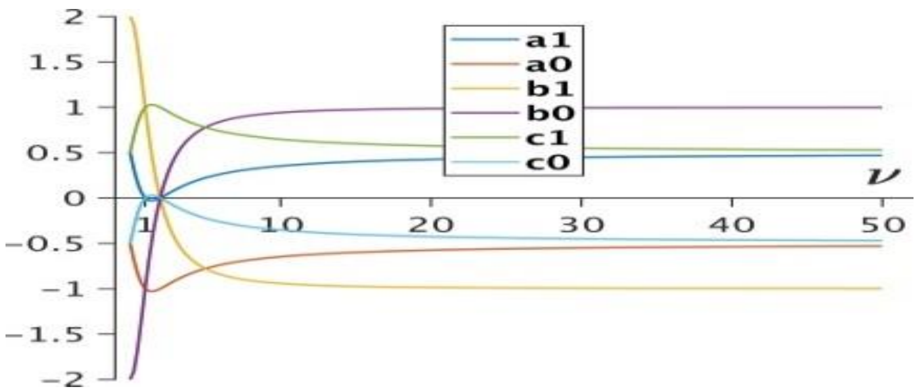
$$\sigma(\xi) = \exp(-i\xi V\tau) = \exp(-i\xi h\nu) = \exp(-i\omega\nu), \qquad (4)$$

где $\nu = V\tau/h$ — безразмерное число Куранта, $\omega = \xi h$ — безразмерное волновое число. Это эталонный символ.

Его будем приближать символом разностного оператора перехода u^n в u^{n+1}.

Вычисление коэффициентов схемы

Схема будет тем точнее, чем асимптотически ближе при $\omega \to 0$ её символ к эталонному символу. Из условия на их разность, $O(\omega^5)$, подбираются коэффициенты — задача сводится к построению аппроксимации Паде-Эрмита для $\sigma(\omega)$ и решается аналитически.



Зависимость всех шести коэффициентов компактной разностной схемы (2) от параметра Куранта ν

Аргумент символа компактной схемы

Числитель и знаменатель (3) $\dfrac{a_0\exp(-i\omega)+b_0+c_0\exp(i\omega)}{a_1\exp(-i\omega)+b_1+c_1\exp(i\omega)}$, соответствующей символу схемы, при вычисленных коэффициентах схемы комплексно сопряжены, а значит модуль символа тождественно равен 1 — компактная схема абсолютно устойчива.

Аргумент ее символа:

$$\arg\sigma_{COMPACT} = -2\arctan\frac{3\nu\sin(\omega)}{2cos(\omega)+\nu^2cos(\omega)-\nu^2+4} \quad (5)$$

Аргумент символа схемы Кранка-Николсона

Нашу схему сравниваем с классической неявной схемой Кранка-Николсона, см. [5]. Её символ по модулю равен 1, а аргумент:

$$\arg \sigma_{CN} = -2 \arctan \frac{\nu \sin(\omega)}{2} . \qquad (6)$$

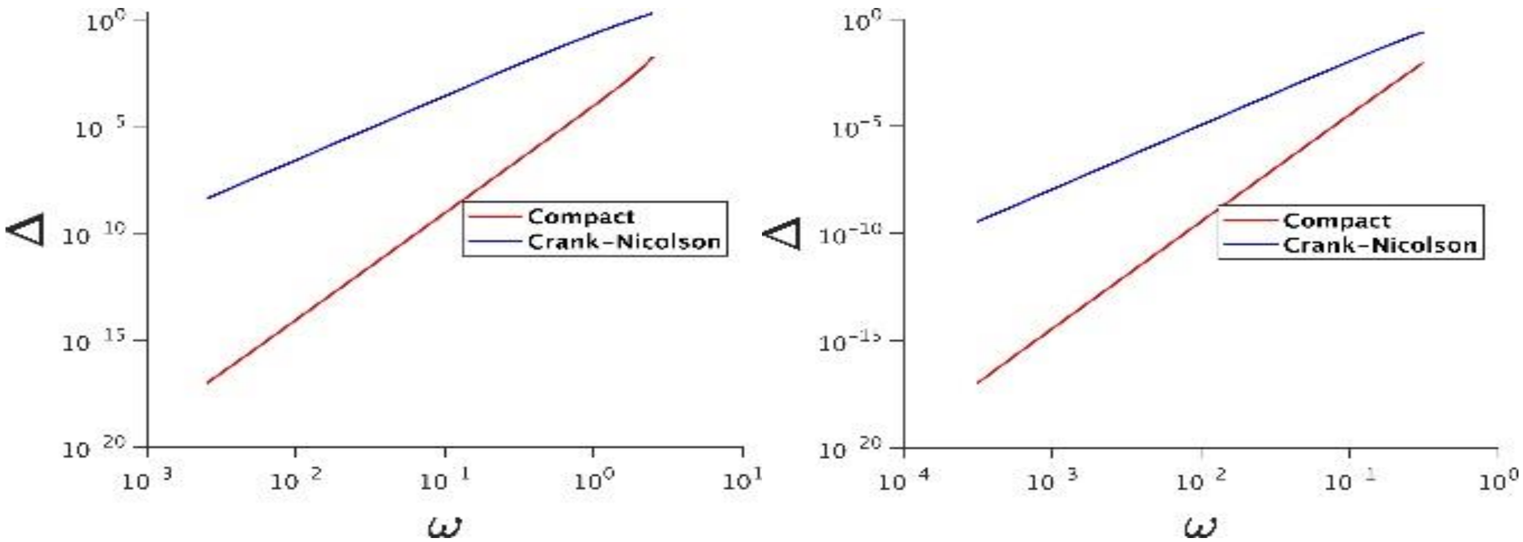
Это также абсолютно устойчивая схема. Арифметических операций требует столько же, сколько и компактная схема, однако порядок ее точности ниже.

Аргумент эталонного символа

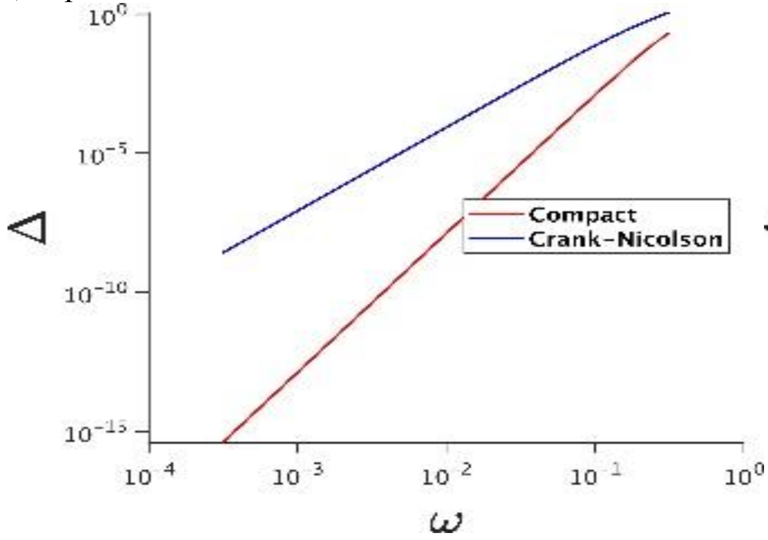
Напомним: у эталонного оператора модуль также тождественно равен 1, а аргумент равен $-\nu\omega$.

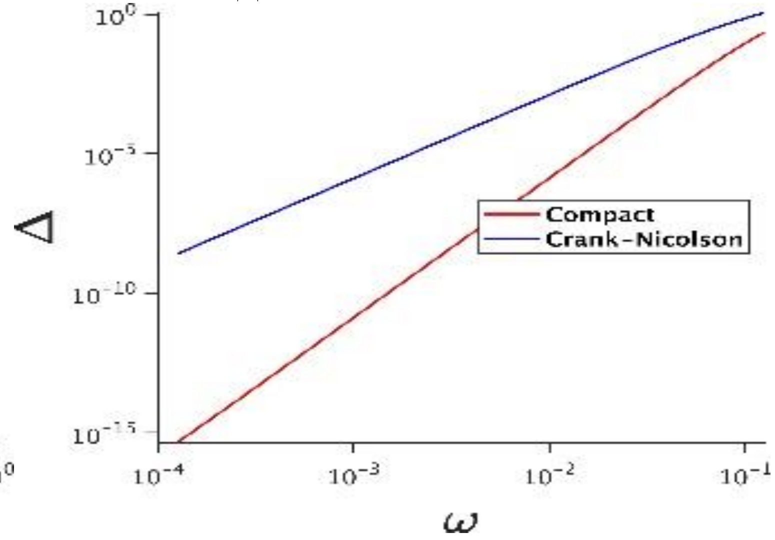
Приведем разность аргументов этих двух функций (символа эталона и символа схемы). Для сравнения (пунктир) приведены соответствующие разности для схемы Кранка-Николсона.

Зависимость невязки аргументов от безразмерного волнового числа ω в билогарифмических координатах; Число Куранта $\nu = \mathrm{const}$, см. таблицу

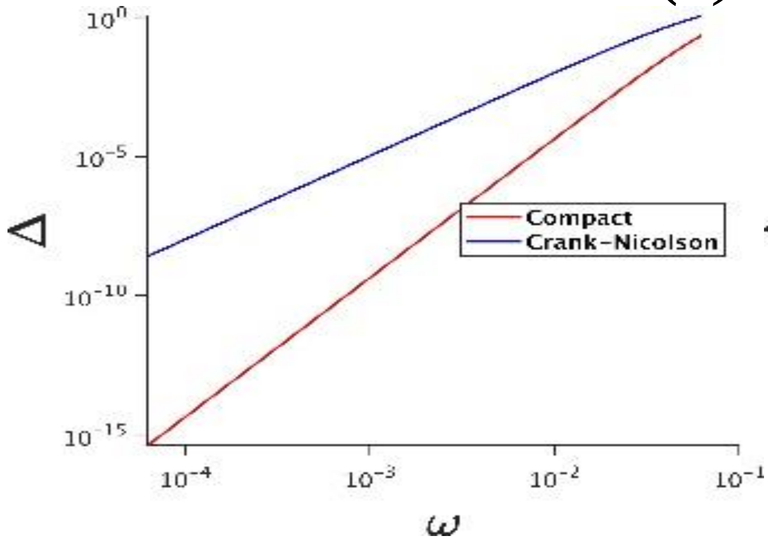


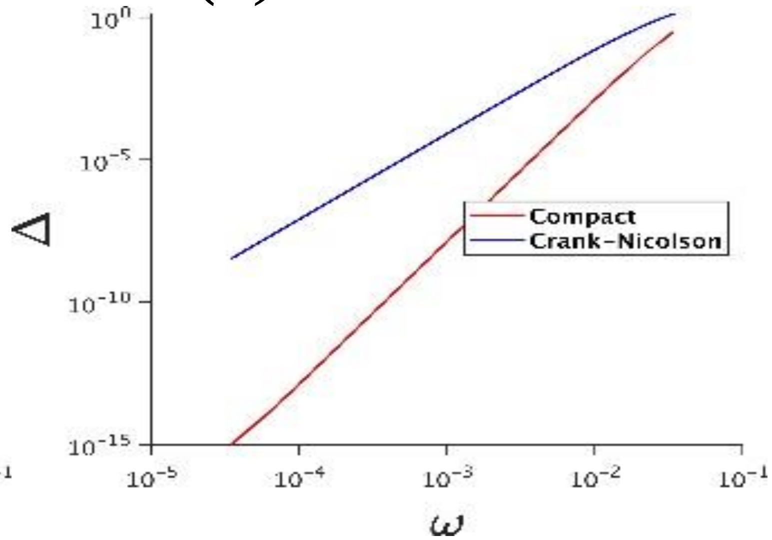
(a) *(b)*


Compact
Crank-Nicolson
Δ
ω


Compact
Crank-Nicolson
Δ
ω

(c) *(d)*


Compact
Crank-Nicolson
Δ
ω


Compact
Crank-Nicolson
Δ
ω

(e) *(f)*

Порядок аппроксимации символа при различных значениях ν для компактной схемы/схемы Кранка-Николсона

Рис.	a	b	c	d	e	f
ν	1,01	5	10	25	50	100
Порядок	5.09/ 2.89	4.98/ 2.95	4.91/ 2.87	4.89/ 2.88	4.91/ 2.88	4.83/ 2.86

Реализация алгоритма

Разобьём окружность равномерной сеткой на $N = L/h$ отрезков. Решаем СЛАУ:

$$Au^{n+1} = Bu^n, \tag{7}$$

где A, B – трехдиагональные матрицы порядка N:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad B = -\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & b_0 & c_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & b_0 & c_0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & b_0 & c_0 \\ c_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

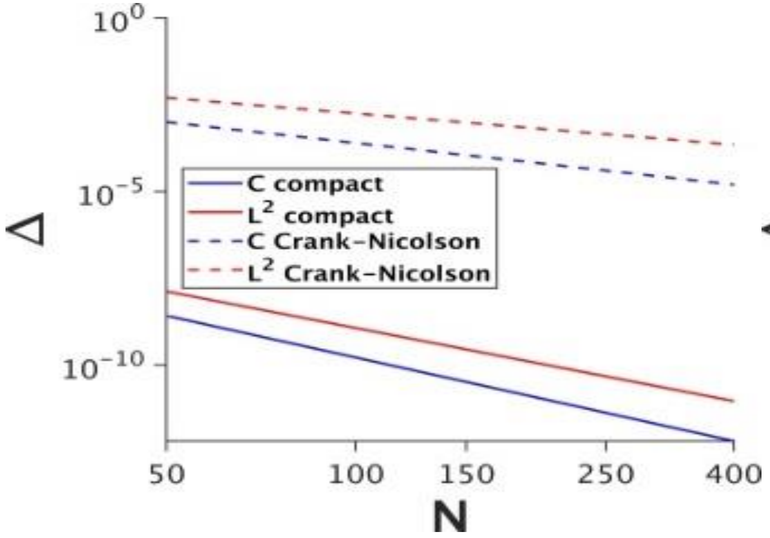
Результаты

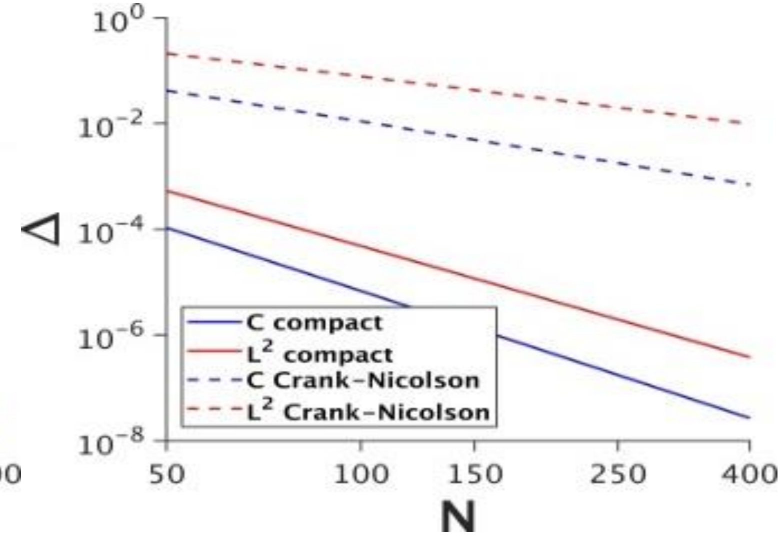
На численном эксперименте проверим порядок точности, меняя шаги τ и h при $\nu = const$. Решение уравнения проверяем в момент времени $T = L/V$ (полный обход окружности). Для сравнения (пунктиром) погрешность схемы Кранка – Николсон.

Погрешность оцениваем в нормах C (максимум разности точного и приближенного решений на грубой сетке) и L^2 (корень из суммы квадратов разностей точного и приближенного решений на грубой сетке).

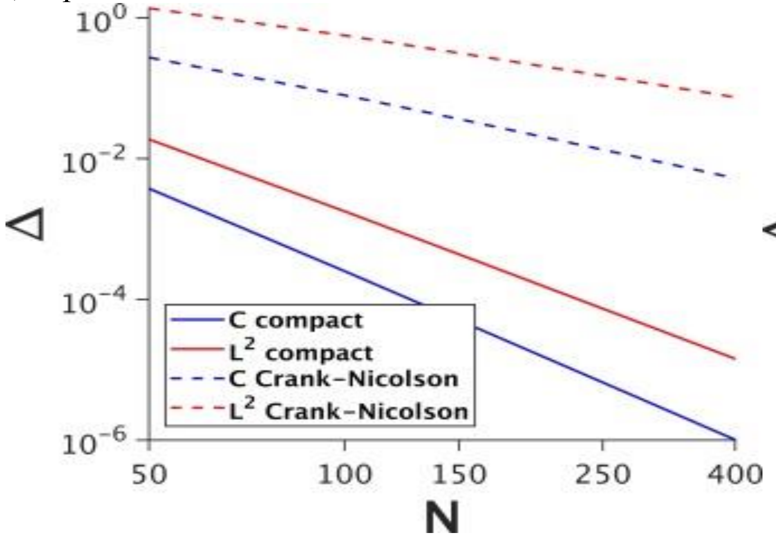
Начальное условие, на котором проводились численные эксперименты простейшее: $u(x,0) = \sin(x)$.

Зависимость погрешности разностного решения от числа шагов по пространству N при $t = T$ в билогарифмических координатах; $\nu = \mathrm{const}$, см. таблицу



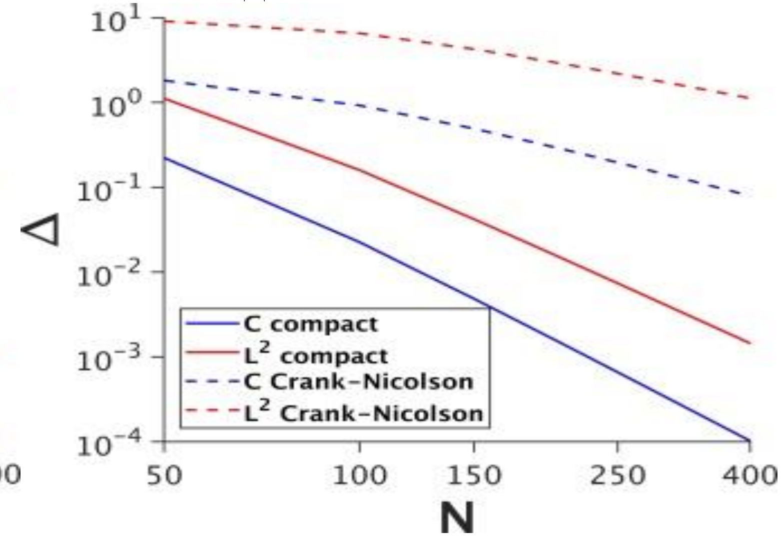


(a) *(b)*



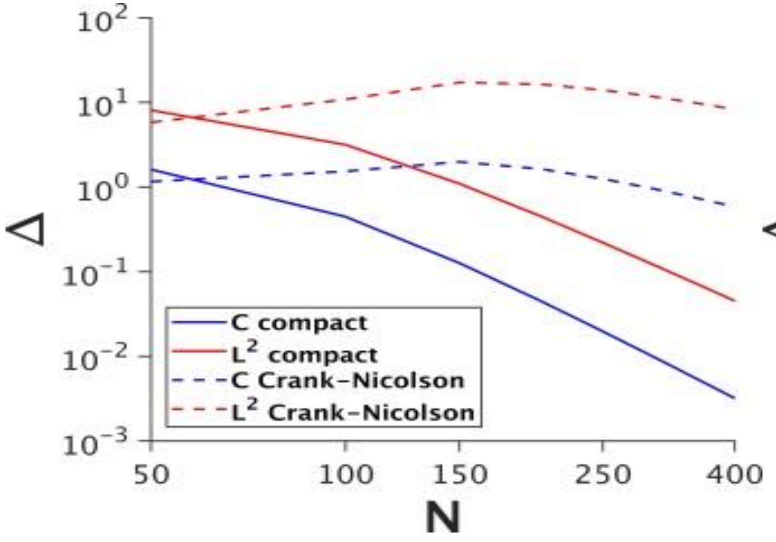
Δ
N
C compact
L² compact
C Crank-Nicolson
L² Crank-Nicolson

(c)



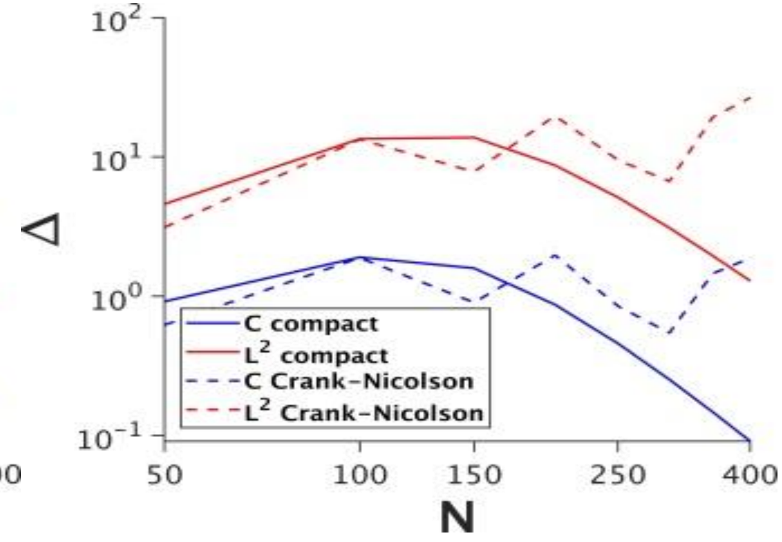
Δ
N
C compact
L² compact
C Crank-Nicolson
L² Crank-Nicolson

(d)



Δ
N
C compact
L² compact
C Crank-Nicolson
L² Crank-Nicolson

(e)



Δ
N
C compact
L² compact
C Crank-Nicolson
L² Crank-Nicolson

(f)

Порядок точности при различных значениях ν для компактной схемы/схемы Кранка-Николсона

Рис.	a	b	c	d	e	f
ν	1,01	5	10	25	50	100
Порядок в норме C	4/2	3.98/ 1.97	3.95/ 1.9	3.69/ 1.5	3/1.24	2.91/*
Порядок в норме L^2	3,5/1.5	3.48/ 1.47	3.45/ 1.4	3.19/1	2.5/ 0.74	2.41/*

Заключение

Получена неявная компактная схема высокого порядка точности для линейного дифференциального уравнения переноса. По вычислительной сложности совпадает с классической схемой Кранка–Николсона, а по точности существенно превосходит.

Рассмотренное уравнение однородное. Сейчас ведется исследование компактной схемы для уравнения (1) с ненулевой правой частью – заданной функцией $\partial_t u + V\partial_x u = f(t,x)$.

Работа была поддержана грантом № 20-04-021 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2020 - 2021 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Литература

1. P. H. Cowell, A. C. D. Crommelin. Investigation of the motion of Halley's comet from 1759 to 1910. Appendix to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh (1910) pp. 1 - 84.

2. Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: «Мир», 1990.

3. B. V. Noumerov, A Method of Extrapolation of Perturbations, Monthly Notices Royal Astronomical Society 84 (1924) pp. 592-601.

4. V. A. Gordin, E. A. Tsymbalov. Compact difference schemes for the diffusion and Schrodinger equations. Approximation, stability, convergence, effectiveness, monotony // Journal of Computational Mathematics, Vol. 32, No.3, 2014, pp. 348-370

5. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.

Спасибо за внимание!