第三章、机械能守恒定理

$ 3.1 动能的定义

当我们开始一次旅行，见到一个朋友在出发时引吭高歌，我们知道他此时充满了能量。而在步行了 20 公里之后，此情此景不再。根据经验，我们知道朋友丧失了他的能量。一个有趣的问题是，我们应该如何定量地定义能量这个概念。

在力学中，人们是通过研究物体的周期性运动解决这一问题的。例如，一颗人造地球卫星绕地球做周而复始的运动。显然，在这个运动中，能量应该是一个不随时间改变的量。同理，单摆做单调的周期摆动，其能量也应该是一个不随时间改变的量。因此被称为守恒量。值得强调一点的是，无论是卫星，还是单摆，在运动时都受到了地球重力的作用。因此，它们的动量不是守恒量。

就卫星而言，它的速度可以写作

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_\theta. \tag{1}$$

观测表明，其速率 v_0 是一个不随时间改变的量。因此，我们定义

$$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m^2 v_0^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \tag{2}$$

作为它的动能。显然，这是一个守恒量。

对于单摆的运动而言，可以很容易地看到，其速率是随时间改变的。因此，其动能本身并不是一个守恒量。那么，与这个周期运动相关的守恒能量是什么呢？为了解决这个问题，我们必须从单摆的运动方程出发.

从图中，我们看到，单摆中的质点 m 受到两个力的作用，地球所施予的重力 $m\mathbf{g}$ 和绳子的拉力 $\mathbf{T}$ 。因此，在直角坐标系中，其运动方程可以被写作

$$m\dot{v}_x = T \sin\theta, \quad m\dot{v}_y = T\cos\theta - mg. \tag{3}$$

现在，我们将这两个公式分别乘以 v_x 和 v_y 。我们得到

$$\begin{aligned} m v_x \dot{v}_x &= T \sin\theta \, v_x = T\sin\theta \cdot v\cos\theta, \\ m v_y \dot{v}_y &= T\cos\theta \, v_y - mg \, v_y = T\cos\theta(-v\sin\theta) - mg v_y. \end{aligned} \tag{4}$$

二式相加后，我们有

$$m\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_x\frac{dv_x}{dt}\right)=\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v_x^2+v_y^2\right)=\frac{m}{2}\frac{d}{dt}v^2=-mgv_y=-mg\frac{dy}{dt}. \tag{5}$$

因此，下式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+mgy\right)=0 \tag{6}$$

成立。也就是说

$$\frac{1}{2}mv^2+mgy=\text{常数}. \tag{7}$$

上式的第一项代表质点的动能，第二项则称为势能。二者之和称为单摆的总机械能。上面推得的结果告诉我们，它是一个不随时间改变的守恒量。

由于摆动质点的位置是改变的，上式又可以被写作

$$\frac{1}{2}mv^2(y_1)+mgy_1=\frac{1}{2}mv^2(y_2)+mgy_2, \tag{8}$$

或是

$$\frac{1}{2}mv^2(y_1)-\frac{1}{2}mv^2(y_2)=mg(y_2-y_1). \tag{9}$$

换句话说，质点重力势能的改变引起了其动能的改变。

在上面的推导中，我们并没有考虑摩擦力这类耗散力的影响。从能量的角度看，摩擦力的后果是将机械能转变成了热能 (在热力学中被称为内能) 。在此情况下，能量守恒定律应该被改写作

$$E_K+E_P+\text{内能}=\text{不变量}. \tag{10}$$

$ 3.2 **功和功率：**

当外力对于一个质点作用时，质点的动能将被改变。我们有

$$\frac{dE_k}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{v}\cdot\left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)=\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}. \tag{11}$$

令 $\vec{\tau}$ 为物体运动轨迹的切线方向。我们知道 $\mathbf{v}=v\vec{\tau}$ 。因此，我们有

$$\frac{dE_k}{dt}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}=vf\cos\theta=f\frac{ds}{dt}\cos\theta. \tag{12}$$

这里， θ 是外力 $\mathbf{f}$ 和 $\vec{r}$ 之间的夹角。将此式积分后，我们有

$$\int_{s_1}^{s_2} dE_k = E_k(s_2) - E_k(s_1) = \frac{1}{2}mv^2(s_2) - \frac{1}{2}mv^2(s_2) = \int_{s_1}^{s_2} f\cos\theta ds. \tag{13}$$

我们称积分

$$A = \int_{s_1}^{s_2} f\cos\theta ds \tag{14}$$

为力 $\mathbf{f}$ 从 s_1 处到 s_2 处对于质点 m 所做的功。

例 3.1: 当用力将一个质量为 m 的物体从 s_1 处推至 s_2 处时，若用力方向时刻与物体的运动轨迹的切线方向相同的话，则做功为

$$A = \int_{s_1}^{s_2} f\cos 0\, ds = f(s_2 - s_1) = fD. \tag{15}$$

而沿轨迹法线方向的力，如地面支撑力的做功则为

$$A = \int_{s_1}^{s_2} N\cos\frac{\pi}{2}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} 0\, ds = 0. \tag{16}$$

将外力做功对于时间求导，我们既可得其做功的功率 P 。它表示外力 $\mathbf{f}$ 在单位时间内对于物体所做之功。根据功率的定义，我们有

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}. \tag{17}$$

作功的单位为焦耳 (J) ，而功率的单位用瓦特 (W) 。

一般的动力机械的输出功率是一定的。因此，当一部汽车的速度较慢时，发动机的推力就较大。反之，则较小。

$ 3.3: **势能**

在引入了作功的概念之后，我们可以重新来考虑一下机械能守恒定理的含义。

假设一个质点 m 在重力的作用下，沿一任意形状的空间曲线运动。我们来计算一下重力的作功。

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1}^{s_2} m\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{s_1}^{s_2} mg\cos\theta\, ds = -\int_{h_1}^{h_2} mg\, dh = mg(h_1 - h_2). \tag{18}$$

我们注意到，这一结果与质点 m 所走过的路径无关，而仅仅依赖于质点的初始点和到达的末点的高度。换句话说，重力对于一个质点所作之功，仅仅依赖于质点的初始点和到达的末点的位置。这样的力，我们称其为保守力。

对于一个保守力，我们可以引入势能的概念。为此，我们任取空间中的一个固定点 Q ，并令势能在该处的值为 $U(Q)=U_0$ 。现再取空间中的另外一点 P 。则保守力 $\mathbf{f}$ 在 P 处的值由下式

$$U(P)=U(Q)+\int_P^Q \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(Q)-\int_Q^P \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} \tag{19}$$

给出。由于对于保守力而言，积分值 (等于力 $\mathbf{f}$ 从起初始点 P 到末点 Q 的作功) 是不依赖于积分路径的，因此， $U(P)$ 的数值是确定的。

当 P 和 Q 之间的距离为一无穷小时，我们可以将上式改写为

$$U(P)-U(Q)=dU=-\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=-\left(f_x dx+f_y dy+f_z dz\right), \tag{20}$$

或是

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-f_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-f_y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-f_z. \tag{21}$$

人们常常用一个更为紧凑的符号写出这三个公式

$$\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}\equiv\nabla U=-\left(f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k}\right)=-\mathbf{f}. \tag{22}$$

在现代物理学的研究中，势能是比力更为基本的概念。显然，势能的概念是与至少两个物体联系在一起的，它给出了粒子之间的相互作用。例如，重力势能是属于由物体和地球所组成的体系的。若我们取地面上的一点 Q 为原点，并且令 $U(Q)=0$ ，则物体的重力势能可以写作 mgh 。同样，在研究地球相对于相距较远的一个物体，例如宇宙飞船之间的相互作用时，我们可以取 Q 为无穷远的一点，并令 $U(Q)=0$ 。此时，该物体相对于地球的势能可以写作

$$U(r)=-\frac{GM_{\text{地}}m}{r}. \tag{23}$$

重力并不是唯一的保守力。另外一个大家熟知的例子是弹性力。事实上，弹簧对于一个质点的作功可以写作

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{x_1}^{x_2} f dx=\int_{x_1}^{x_2}[-k(x-x_0)]dx \\ &= -k\left(\frac{(x-x_0)^2}{2}\right)_{x_1}^{x_2}=-\frac{k}{2}\left[(x_2-x_0)^2-(x_1-x_0)^2\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

显然，这是一个不依赖于质点所经过的路径的量。因此，弹性力是一个保守力。若我们令 $U(x_0)=0$ ，则弹性势能可以定义作

$$U(x)=U(x_0)-\int_{x_0}^{x} f\,dx = 0-\left[-\frac{k}{2}(x-x_0)^2\right]=\frac{k}{2}(x-x_0)^2. \tag{25}$$

上面，我们讨论了保守力作功的情况。非保守力作功是与具体路径有关的，故无法定义势能的概念。例如，摩擦力是非保守力。它所作的功总是负的。换句话说，当体系内存在摩擦力时，系统的总机械能是随时间增大而减小的，并转变成为系统的热能 (或内能) 。人们把这种过程称为耗散过程，并将摩擦力称为耗散力。特别值得强调一点的是，尽管摩擦力是耗散力，但是非保守力并不一定都是耗散力。

对于若干个物体所组成的系统，其中物体彼此之间的相互作用力可以分为保守力和非保守力。显然，保守内力的作功导致了系统的总势能的减少，从而使得系统的总动能增加。然而，非保守内力的作功却导致了系统的机械能与其它形式能量 (如热能及化学能) 之间的转换。如果一个系统中非保守力的作功为零，则我们称该系统为一个保守系。

利用这些概念，我们现在可以将机械能守恒定律更为准确地表述为：一个保守系的总机械能的增加等于外力对于它所作之功。

在实际应用中，若我们将势能函数对位置的依赖关系用一条曲线或是曲面表示出来，常常可以使得我们对于物体的运动有一个直观的图象。

以一个一维系统为例。从关系式

$$\mathbf{f}=-\frac{dU(x)}{dx} \tag{26}$$

出发，我们知道势能函数 $U(x)$ 在 x 点处的切线斜率的负值既是质点所受之力。因此，在势能函数的每一个极值点处，质点所受到的力都是零。然而只有在极小点处，质点才能处于稳定的平衡状态。也就是说，此时，质点可以在这些点附近做微小振动。相反，势能曲线的任何一个极大点都是质点运动的不稳定点。一旦质点偏离了一个不稳定的平衡点，它就会远离而去。因此，势能函数曲线的极值点的分布形象地给出了有关系统的稳定性的信息。

例如，中性原子之间的相互作用力成为分子力，它是保守力，可以用势能函数来描述。最常见的分子力势能函数的曲线如下图所示，称为 Lennard-Jones 势。它有一个位

于的极小值。两个相对静止的原子将在这个距离上形成分子。当原子的动能不大时，它们将这个平衡位置附近做微小振动。而当它们的相对动能较大时，原子将分离开来，形成单原子状态的气体。为了使得它们能够再结合成分子，我们必须使它们将多余的动能释放出来。例如，若我们将一片铂板插入充满氢原子气体的玻璃瓶中，氢原子会被吸附在铂板的表面，从而减少了氢原子的动能。也就是说，氢原子将动能转移给了铂板。这是，我们见到铂板会因温度剧增而变得白热。损失了动能后的氢原子会彼此靠近，最后形成氢分子。而铂板对于氢分子的吸附力是很小的。因此，氢分子将很快脱离铂板形成气体。这也就是催化剂的工作原理。

例 3.2: 试求宇宙飞船脱离地球引力场所需要的速度。

解: 若我们取无穷远处地球引力的势能为零，则地球的引力势能函数可以写作

$$U(r) = U(\infty) + \int_r^\infty \left(-\frac{GMm}{r'^2}\right) dr' = \left.\frac{GM}{r'}\right|_r^\infty = -\frac{GMm}{r}. \tag{27}$$

因此，在空间中位置 $\mathbf{r}$ 处，宇宙飞船的机械能为

$$E = \frac{1}{2}mv^2(\mathbf{r}) - \frac{GMm}{r}. \tag{28}$$

这是一个守恒量。也就是说，飞船在地球表面处的总能量

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_{地}} \tag{29}$$

应该等于它在无穷远处的总能量

$$E = \frac{1}{2}mv^2(\infty) + U(\infty) = \frac{1}{2}mv^2(\infty). \tag{30}$$

由于 v_0 被定义作飞船刚刚能够脱离地球引力场所需要的发射速度，我们有 $v(\infty) = 0$ 。因此，方程 (29) 退化为

$$0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_{地}}. \tag{31}$$

解此方程，我们得到

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_{地}}} \approx 11.2km/s. \tag{32}$$

这一速度在文献中被称为第二宇宙速度。

例 3.3(**教科书** 82 **页上的例** 1): 在如图所示的滑轮体系中，绳子的 A 端由变化的力 $\mathbf{F}$ 拉动，沿水平方向做匀速运动。设其速率为 v_A 。试求 $\mathbf{F}$ 的功率 P 。

解: 按照定义，我们有

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_A = F v_A \cos\phi. \tag{33}$$

由于

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}, \tag{34}$$

我们只需求出 $\mathbf{F}$ 即可。

由于 $\mathbf{F}$ 等于绳子中的拉力 $\mathbf{T}$ ，故我们有

$$F = T = mg + ma_m. \tag{35}$$

这里， a_m 为物体 m 的加速度。它等于

$$a_m = \frac{d^2 l}{dt^2}. \tag{36}$$

为了求得它的数值，我们可以利用以滑轮中心作为原点的极坐标系。在这一坐标系中，绳子 A 端的加速度 a_r^A 和 a_θ^A 都应该为零。这是由于，按照题给， A 端在空间中是以匀速运动的。特别是，我们有

$$a_r^A = \frac{d^2 l}{dt^2} - l\dot{\theta}^2 = 0. \tag{37}$$

因此，我们得到

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = l\dot{\theta}^2 = \frac{(l\dot{\theta})^2}{l}. \tag{38}$$

又由于

$$l\dot{\theta} = v_\theta^A = v_A \sin\phi = v_A \frac{h}{l}, \tag{39}$$

因此我们得到

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = a_m = \frac{v_A^2 h^2}{l^3}. \tag{40}$$

将它代入 F 的表达式后，我们得到

$$F = mg + ma_m = mg + \frac{m v_A^2 h^2}{l^3}. \tag{41}$$

因此，拉力 $\mathbf{F}$ 的功率为

$$P = Fv_A \cos\phi = \left(mg + \frac{mv_A^2 h^2}{l^3}\right) v_A \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}. \tag{42}$$

例 3.4(**教科书** 93 **页上的例** 6): 某惯性系中，质量为 m 和 M 的质点 A 和 B，初始时相距 l_0，并且 A 为静止，而 B 具有沿 $\overline{AB}$ 连心线的速度 $\mathbf{v}_0$。为了抵消 B 受到 A 的引力，在 B 上施加了一个与 $\mathbf{v}_0$ 同方向的变力 $\mathbf{F}(t)$，使得 B 做匀速直线运动。

(1) 试求 A 和 B 间可达到的最大距离 $l_{\max}$。

(2) 计算从开始时刻到 A 和 B 达到最大距离时，变力 $\mathbf{F}(t)$ 所做的总功 W。

解: 由于 B 做匀速直线运动，它是一个惯性系。我们可以取 B 为静止的参照系 S_{B} 作为参考系。在此参照系中，能量守恒的表达式可以写作

$$\frac{1}{2}mv_A^2(l) - \frac{GMm}{l} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{l_0}. \tag{43}$$

这里，$\mathbf{v}_A(l)$ 为质点 A 在与质点 B 的距离为 l 时的速度。当距离 l 达到最大值 $l_{\max}$ 时，$v_A(l_{\max}) = 0$。因此，我们有

$$-\frac{GMm}{l_{\max}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{l_0}. \tag{44}$$

由此，我们解得

$$l_{\max} = \frac{2l_0 GM}{(2GM - l_0 v_0^2)}. \tag{45}$$

由于 $l_{\max}$ 必须是一个正数，故条件

$$2GM \geq l_0 v_0^2 \tag{46}$$

应该成立。

为了求得变力 $\mathbf{F}(t)$ 在整个过程中的作功，我们回到实验室参照系。由于外力作的总功，等于质点系总机械能的改变，我们有

$$W = \left[\frac{1}{2}(m+M)v_0^2 - \frac{GMm}{l_{\max}}\right] - \left[\frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{GMm}{l_0}\right] = mv_0^2. \tag{47}$$

例 3.5(**教科书** 95 **页上的例** 8): 如图所示，长度为 $2l$ 的轻杆的两端连接两个质量相同的小球 A 和 B。这一系统在其平衡状态附近做微小振动。试求其振动周期 T。

解：设在以 O 点为原点的坐标系中， A 的坐标为 $(0, y_A)$ ， B 的坐标为 $(x_B, 0)$ 。则我们有

$$x_B = 2l\sin\theta, \quad y_A = -2l\cos\theta. \tag{48}$$

因此，在任一时刻 t ，体系的动能为

$$E_K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_A^2\right) = \frac{1}{2}m(2l)^2\dot{\theta}^2 = 2ml^2\dot{\theta}^2. \tag{49}$$

而其势能为

$$V = mgy_A = -2lmg\cos\theta. \tag{50}$$

因此，体系的的总机械能为

$$E = E_K + V = 2ml^2\dot{\theta}^2 - 2lmg\cos\theta = \text{常数}. \tag{51}$$

将此式两边对于时间 t 求导数后，我们得到

$$\frac{dE}{dt} = 2l^2\left(2\dot{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + 2mgl\sin\theta\dot{\theta} = 0. \tag{52}$$

整理后，我们有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{2l}\sin\theta = 0. \tag{53}$$

在平衡状态 $\theta_0 = 0$ 附近，函数 $\sin\theta \sim \theta$ 。因此，我们可以将上式进一步简化为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{2l}\theta = 0. \tag{54}$$

将此公式与简谐振动的标准方程

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0 \tag{55}$$

进行比较后，我们得到

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{2l}}. \tag{56}$$

由此，我们解得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}. \tag{57}$$

例 3.6(**教科书** 97 **页上的例** 10): 半径为 R 的水平凹形圆槽绕着过圆周上的 A 点且垂直于黑板面的转轴作匀角速率旋转。在对径点 B 处放一个小球，与槽光滑接触。同时，小球在 $\mathrm{AC_1B}$ 段中与槽光滑接触，但在 $\mathrm{BC_2A}$ 段中则与槽有摩擦。开始时，小球有切向速度 v_0 。小球经过 $\mathrm{BC_2A}$ 半圆后，以近似为零的相对速度通过 A 点，继而又绕过四分之三圆周到达 $\mathrm{C_2}$ 点时，速度又恰好降为零。

(1) 试求圆槽的旋转角速度 ω 和小球与 $\mathrm{BC_2A}$ 半圆槽底部间的摩擦系数 μ 。

(2) 判断小球到达 $\mathrm{C_2}$ 点后能否停留在该处。若不能，小球将朝向何方运动？

解: (1) 取圆槽静止的坐标系作为参照系。我们注意到，在没有摩擦力的情况下，牛顿方程可以写作

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{N} - 2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}' + m\omega^2\mathbf{r}'. \tag{58}$$

方程两边同时点乘 $\mathbf{v}'$ 后，我们有

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}'\cdot\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dv'^2}{dt} &= \mathbf{v}'\cdot\mathbf{N} - 2m\mathbf{v}'\cdot(\vec{\omega}\times\mathbf{v}') + m\omega^2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}' \\ = \quad & m\omega^2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}' = m\omega^2 v'_{r'}r' = m\omega^2 r'\frac{dr'}{dt} = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{dr'^2}{dt}. \end{aligned} \tag{59}$$

移项后我们得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\,r'^2\right) = 0. \tag{60}$$

因此，我们可以将括号中的量解释作小球在这一非惯性系的总机械能。即我们有

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r'^2. \tag{61}$$

其中，第一项为小球的动能，第二项则为小球的离心势能。

当小球在初始位置 B 点时，我们有

$$E(B) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2. \tag{62}$$

而当它到达 A 时，其总能量变为

$$E(A) = 0. \tag{63}$$

显然，二者之差既是摩擦力在 $\mathrm{BC_2A}$ 半圆段所作之功。因此，我们有

$$(\mu mg)\pi R = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2. \tag{64}$$

同理，通过分析题给的第二步过程，我们可以得到另外一个方程

$$(\mu mg)\frac{3}{2}\pi R=\left[\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}m\omega^2(\sqrt{2}R)^2\right]. \tag{65}$$

将这两个方程联立求解后，我们得到

$$\omega=\frac{v_0}{2\sqrt{2}R},\quad \mu=\frac{v_0^2}{4\pi Rg}. \tag{66}$$

(2) 小球在 C_2 处的离心力为

$$\mathbf{F}_{\text{离心}}=m\omega^2\cdot\sqrt{2}R\mathbf{e}_r. \tag{67}$$

它在圆的切向方向上的分量为

$$F^{\tau}_{\text{离心}}=m\omega^2\cdot\sqrt{2}R\sin 45^\circ=m\omega^2 R. \tag{68}$$

而该处的摩擦力的大小为

$$f_{\text{摩擦}}=\mu mg=\frac{v_0^2}{4\pi Rg}mg=\frac{v_0^2 m}{4\pi R}=\frac{(2\sqrt{2}R\omega)^2 m}{4\pi R}=\frac{8R^2\omega^2 m}{4\pi R}=\frac{2}{\pi}m\omega^2 R. \tag{69}$$

显然，它小于 $F^{\tau}_{\text{离心}}$ 。因此，小球无法稳定下来，会向右后退，继续转动。

$ 3.4 **质心参照系**:

在牛顿力学的应用中，质点碰撞问题的研究占据着很重要的地位。为了计算碰撞的过程和后果，人们常常采用所谓质心参照系来简化问题。

首先，我们来引入质心的概念。假设体系内有 N 个质点。我们先建立一个实验室坐标系。其中质量为 m_i 的第 i 个质点在时刻 t 时的位置向量记作 $\mathbf{r}_i(t)$ 。那么，我们定义向量

$$\mathbf{r}_C(t)\equiv\frac{\sum_{i=1}^N m_i\mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i} \tag{70}$$

为质心在时刻 t 时的位置向量。由此，我们可以计算质心在时刻 t 时的速度向量

$$\mathbf{V}_C=\dot{\mathbf{r}}_c=\frac{\sum_{i=1}^N m_i\dot{\mathbf{r}}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i}=\frac{\sum_{i=1}^N m_i\mathbf{v}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i}=\frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i(t)}{M}=\frac{\mathbf{P}}{M}. \tag{71}$$

换句话说，我们有

$$M\mathbf{V}_C=\mathbf{P}. \tag{72}$$

也就是说，质心可以被看作整个质点系的代表点，似乎系统的全部质量 M 和动量 $\mathbf{P}$ 都集中到了质心上。

现在，我们引入一个新的参照系 S' 。它的原点就位于体系的质心上。显然，相对于实验室参考系， S' 系原点 O' 的速度和加速度分别为 $\mathbf{V}_C$ 和 $\dot{\mathbf{V}}_C$ 。这一参考系被称为质心参考系。它既可能是一个惯性系，也可能是一个非惯系统，取决于其原点的加速度 $\dot{\mathbf{V}}_C$ 是否为零。

相对于这一参考系，质点 m_i 的速度可以写作

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_C. \tag{73}$$

因此，相对于质心参考系而言，质点系的总动量为

$$\mathbf{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{V}_C = \mathbf{P} - M\frac{\mathbf{P}}{M} = \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0. \tag{74}$$

即质点系相对于质心参考系的总动量恒为零。在研究质点之间的碰撞问题时，这一事实经常会被用到。

当作用在所有质点上的合外力

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i = \mathbf{F} \tag{75}$$

时，质心满足运动方程

$$\mathbf{F} = M\frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = M\mathbf{a}_c. \tag{76}$$

这一方程称为质心运动方程。特别是当合外力 $\mathbf{F} = 0$ 时，质心系为一惯性系。

König **定理**：现在，我们来看一下质点系相对于实验室 S 系和质心参考系 S' 的动能表达式之间的联系。

$$\begin{aligned}
E_K &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\mathbf{v}_i' + \mathbf{V}_C\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{V}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i V_C^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \mathbf{P}' \cdot \mathbf{V}_C + \frac{1}{2} M V_C^2.
\end{aligned} \tag{77}$$

由于 $\mathbf{P}'=0$ ，我们最后得到

$$E_K = E'_K + \frac{1}{2}MV_C^2. \tag{78}$$

这一关系被称为 König 定理。

现在，让我们来考虑 König 定理的一个特例，即系统中只有两个质点的情况。此时，我们有

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{V}_C = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{\mathbf{P}}{M}. \tag{79}$$

因此，对于质心坐标系，我们有

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_C = \frac{(m_1+m_2)\mathbf{v}_1 - m_1\mathbf{v}_1 - m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)}{m_1+m_2}, \tag{80}$$

以及

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_C = \frac{m_1(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}{m_1+m_2}. \tag{81}$$

若我们令 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 为两个质点在实验室坐标系中的相对速度，则在质心坐标系中我们也有 $\mathbf{u} = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$ 。依赖于 $\mathbf{u}$ ，我们可以将 $\mathbf{v}'_1$ 和 $\mathbf{v}'_2$ 重新改写作

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2\mathbf{u}}{m_1+m_2}, \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1\mathbf{u}}{m_1+m_2}, \tag{82}$$

而在质心参照系中的质点系的动能也可以写作

$$E'_K = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}u^2 = \frac{1}{2}\mu u^2. \tag{83}$$

在文献中， $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 被称为两个粒子的约化质量。

再利用 König 定理，现在我们可以直接写出在实验室参照系中的质点系动能的表达式

$$E_K = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}\mu u^2. \tag{84}$$

在现代高能物理实验中，为了研究微观粒子的结构，人们常常将一些带电粒子加速到很高的能量，再让它们去碰撞处于静止状态的靶粒子，然后观察碰撞的产生物。在这个过程中，真正有用的能量是运动粒子及静止粒子共同构成的质心系中的粒子之间的相对动能 $E_{kr} = \frac{1}{2}\mu u^2$ 。而质心动能 $\frac{1}{2}MV_C^2$ ，作为碰撞前后的一个不变量，并不参与这一碰撞过程。因此，E_{kr} 被称为碰撞过程的资用能。很显然，为了更有效地进行实验，人们应该尽可能提高资用能在总动能中所占的份额。为此，人们引入了所谓对撞机的设计。

在对撞机中，人们让两束相同的带电粒子沿相反的方向被加速。在加速到很高的能量后，再将它们引到一起发生碰撞。此时，两个迎面相撞的粒子在实验室坐标系中的动量为

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} + m(-\mathbf{v}) = 0. \tag{85}$$

在这种情况下，按照定义，实验室系既是质心系。并且质心的动能

$$E_{kc} = \frac{1}{2M}P^2 = 0. \tag{86}$$

也就是说，两个粒子体系的全部动能都是资用能。

$ 3.5 **两个质点的碰撞问题:**

下面，让我们来更为仔细地研究一下两个质点的碰撞。在原子及原子核物理的研究中，粒子之间的相互作用是非接触的相互作用。在粒子相互接近时，由于双方之间存在的斥力或吸引力，使得它们在接触前就各自偏离了原来的运动方向。这种过程被称为散射过程。在下一章学习角动量守恒定理时，我们还会更为详尽地讨论这一过程。

相反，在宏观碰撞过程中，质点之间的相互作用是接触型的。它们接触时的相互作用较强烈，但相互接触的时间又极为短暂。因此，在碰撞的时间间隔内，我们往往可以忽略外力的冲量效应，而认为这个两体系统的总动量是守恒的。也就是说，我们有

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2\tilde{\mathbf{v}}_2 = \widetilde{\mathbf{P}}. \tag{87}$$

这里，$(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2)$ 和 $(\tilde{\mathbf{v}}_1,\, \tilde{\mathbf{v}}_2)$ 分别为质点 m_1 及 m_2 在碰撞前后的速度。这一结果导致了在碰撞过程中，质点系的质心速度是不变的。即我们有

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{P}}{M} = \frac{\widetilde{\mathbf{P}}}{M} = \widetilde{\mathbf{V}}_C. \tag{88}$$

因此，体系的质心动能

$$E_{kC} = \frac{1}{2}MV_C^2 \tag{89}$$

在整个碰撞过程中是一个不变量，而可能改变的仅仅是资用能 $E_{kr} = \frac{1}{2}\mu u^2$ 。

这里有两种可能性。

(1) E_{kr} 在整个碰撞过程中也不变。也就是说，碰撞并不带来动能的损失。此时，我们称碰撞是完全弹性的。

(2) 在碰撞过程中，有部分或全部的资用能变为热能耗散掉。此时，我们称碰撞是非弹性碰撞或完全非弹性碰撞。

牛顿引入了下面的恢复系数 e 来表征二体碰撞过程中的这种差异

$$e = \sqrt{\frac{\widetilde{E}_{kr}}{E_{kr}}} = \sqrt{\frac{\widetilde{u}^2}{u^2}} = \frac{|\widetilde{\mathbf{v}}_1 - \widetilde{\mathbf{v}}_2|}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}. \tag{90}$$

显然，按照定义，我们有 $0 \le e \le 1$ 。当 $e = 1$ 时，碰撞为完全弹性的；当 $e = 0$ 时，碰撞为完全非弹性的。而当 $0 < e < 1$ 时，碰撞为非弹性的碰撞。

例 3.7: 两体正碰撞

若两个球碰撞前后的速度都是沿球心联线的，则碰撞被称为正碰撞。根据动量守恒定理，我们有

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\widetilde{\mathbf{v}}_1 + m_2\widetilde{\mathbf{v}}_2. \tag{91}$$

其次，在正碰撞的情况下，弹性系数的定义可以被改写作

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1 - \widetilde{\mathbf{v}}_2 = (-e)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \tag{92}$$

解此方程组，我们得到

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{(m_1 - em_2)\mathbf{v}_1 + (1+e)m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \widetilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{(1+e)m_1\mathbf{v}_1 + (m_2 - em_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{93}$$

若 $e = 1$ ，且 $m_1 = m_2$ 时，我们有 $\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_2, \widetilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_1$ 。即两个球交换了速度。而当 $e = 0$ 时，我们得到

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{V}_C = \widetilde{\mathbf{v}}_2. \tag{94}$$

也就是说，在完全非弹性碰撞以后，两个球“粘和”到了一起，共同以质心的速度运动。

例 3.8: 测量子弹出膛速率的冲击摆

为了测量子弹的出膛速率，我们可以向一个充满沙子的木箱开枪。假设这个木箱用一根长度为 L 的绳子悬空。当子弹水平地射入木箱后，会迅即停止下来。在这样短的时间间隔内，我们可以略去重力和绳子的张力对于体系的冲量不计。既我们假设体系的动量在这一完全非弹性碰撞过程中是守恒的。因此，我们有

$$m\mathbf{v}_0 = (m + M)\mathbf{v}. \tag{95}$$

尽管在碰撞过程中，体系的机械能是不守恒的，但在碰撞之后的后续运动中，机械能是一个守恒量。以碰撞瞬间木箱的高度为重力势能计算的零点。当沙箱在枪击后升高到高度为 h 的位置静止时，我们有能量守恒表达式

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh. \tag{96}$$

另一方面，我们又有几何关系式

$$h = L(1-\cos\theta). \tag{97}$$

通过解这几个联立方程，我们得到

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}. \tag{98}$$

因此，通过测量冲击摆的最后位置的角度 θ，我们即可以决定子弹的出膛速率。

例 3.9: 设有一入射球与一个相同质量的静止球发生弹性碰撞。略去外力的影响，证明二者碰撞后的速度互相垂直。

证: 在没有外力影响的情况下，这个系统的总动量是守恒的。因此，我们有

$$m\mathbf{v} = m\tilde{\mathbf{v}}_1 + m\tilde{\mathbf{v}}_2. \tag{99}$$

又由于是弹性碰撞，因此没有机械能的损失。在略去重力的影响后，我们又有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\tilde{v}_2^2, \tag{100}$$

或是

$$v^2 = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2. \tag{101}$$

将公式 (99) 的两边平方后，我们得到

$$\mathbf{v}^2 = v^2 = (\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2)^2 = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{v}}_1\cdot\tilde{\mathbf{v}}_2. \tag{102}$$

再从中减去公式 (101) 后，我们有

$$2\tilde{\mathbf{v}}_1\cdot\tilde{\mathbf{v}}_2 = 0. \tag{103}$$

此式表明，碰撞后两球的速度 $\tilde{\mathbf{v}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_2$ ，要么有一个为零，要么二者彼此垂直。

例 3.10(**教科书** 101 **页上的例** 12): 宇宙飞船在宇宙尘埃流中运动。假设开始时，飞船是以匀速率 v 逆着尘埃流的方向运动的。然后，再转过头来以同样的匀速率顺着尘埃流的方向运动。但此时发动机的牵引力仅为原来的四分之一。将飞船视作两端为平面的圆柱体。假设宇宙尘埃粒子与飞船的碰撞是完全弹性的。试求宇宙尘埃流的速率 u 。

解：当飞船逆着尘埃流的方向飞行时，尘埃颗粒相对于飞船的速度为

$$u' = u - (-v) = u + v. \tag{104}$$

在与飞船碰撞后，其相对于飞船的速度变成 $-(v+u)$(在这里，我们假设飞船的质量相对于尘埃而言为无穷大) 。因此，在时间间隔 Δt 内，尘埃流所受到飞船施予的冲量为

$$\Delta P = -m\left[2(u+v)\right] = -\left[\rho(u+v)S\Delta t\right]\left[2(u+v)\right] = -2\rho S(u+v)^2\Delta t. \tag{105}$$

这里， ρ 为尘埃流的质量密度。而 S 为飞船端面的面积。因此，根据牛顿第三定律，飞船所受到的尘埃流给予的外力为

$$F_1 = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = -\frac{dP}{dt} = 2\rho S(u+v)^2. \tag{106}$$

当飞船是顺着粒子流的方向运行时，有两种情况需要分别加以考虑。

(i) $v > u$ 。此时，飞船的前端被撞。碰撞前尘埃流相对于飞船的速度为 $u' = u - v < 0$ ，而碰撞后则变为 $-(u-v)$ 。因此，在碰撞发生的时间间隔 Δt 内，飞船所受的力为

$$F_2 = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = -2\rho S(u-v)^2. \tag{107}$$

(ii) $v < u$ 。此时，飞船的后端被撞。碰撞前与碰撞后，尘埃流相对于飞船的速度仍分别为 $u-v$ 和 $-(u-v)$ 。因此，飞船所受的力为

$$F_2 = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = -\frac{dP}{dt} = 2\rho S(u-v)^2. \tag{108}$$

其数值与第一种情况的结果是一样的。

现在，根据题目中的假设，我们得到

$$\frac{1}{4} = \frac{|F_2|v}{|F_1|v} = \frac{|F_2|v}{|F_1|v} = \frac{2\rho S(v-u)^2}{2\rho S(v+u)^2} = \left(\frac{v-u}{v+u}\right)^2, \tag{109}$$

或是
$$\frac{v-u}{v+u} = \pm\frac{1}{2}. \tag{110}$$
由此，我们得到两个可能的解 $u=\frac{1}{3}v$ 或 $u=3v$ 。

例 3.11(**教科书** 102 **页上的例** 14): 一袋面粉沿着倾角为 $\phi=60^\circ$ 的光滑斜板，从高度为 H 的地方无初速地滑落到水平地面后，没有向上跳起。已知面粉袋与地板的摩擦系数为 $\mu=0.7$ 。问袋子将停于何处？若 $H=2$米, $\phi=45^\circ$, $\mu=0.5$ ，袋子又将停于何处？

解: 着地的瞬间，面粉袋的速率为 $v_0=\sqrt{2gH}$ 。其分量为
$$\vec{v}_\parallel = v_0\cos\phi\mathbf{i}, \quad \vec{v}_\perp = -v_0\sin\phi\mathbf{j}. \tag{111}$$
由于在垂直方向的碰撞为完全非弹性的，因此我们有
$$\overline{N}\Delta t = 0-(-mv_0\sin\phi) = mv_0\sin\phi. \tag{112}$$
这里， $\overline{N}$ 为地面的平均支撑力 (原则上讲，我们应该考虑重力 mg 的冲量。这里，我们假设 $\overline{N}\gg mg$) 。而 $\vec{f}=-\mu\overline{N}\mathbf{i}$ 则为面粉袋着地后，时间间隔 Δt 内，地面对于面粉袋的平均摩擦力。它使得面粉袋的水平动量亦发生变化。我们有
$$\vec{f}\Delta t = -\mu\overline{N}\Delta t\mathbf{i} = m\vec{v}_\parallel' - m\vec{v}_\parallel. \tag{113}$$
因此，我们得到
$$mv_\parallel' = mv_\parallel - \mu\overline{N}\Delta t = mv_0\cos\phi - \mu mv_0\sin\phi, \tag{114}$$
或是
$$v_\parallel' = v_0\cos\phi - \mu v_0\sin\phi = v_0(\cos\phi-\mu\sin\phi). \tag{115}$$
对于 $\phi=60^\circ$, $\mu=0.7$ ，我们有
$$\cos 60^\circ - 0.7\sin 60^\circ = \frac{1}{2} - 0.7\times\frac{\sqrt{3}}{2} < 0. \tag{116}$$
因此， $v_\parallel'<0$ ，即面粉袋着陆后将退后。而这是不可能的。因此，面粉袋就停在着陆点。

当 $\phi = 45^\circ$ 时，我们有

$$\cos 45^\circ - 0.5\sin 45^\circ = 0.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0. \tag{117}$$

因此， $v'_\parallel > 0$ 。故面粉袋可以在着陆后再向前滑行一段距离 s 。其数值为

$$\begin{aligned} s &= \frac{v'^2_\parallel}{2\mu g} = \frac{v_0^2(\cos\phi - \mu\sin\phi)^2}{2\mu g} = \frac{2gH(\cos\phi - \mu\sin\phi)^2}{2\mu g} \\ &= (\cos\phi - \mu\sin\phi)^2\frac{H}{\mu} = 0.5\text{米}. \end{aligned} \tag{118}$$

作业：教科书 104 页至 110 页 3-4， 3-7， 3-8， 3-9， 3-10， 3-12， 3-17， 3-18， 3-20， 3-22， 3-24， 3-26， 3-29， 3-33， 3-34 题。