诚信考试　沉着应考　杜绝违纪

浙江大学 2016 － 2017 学年 春夏 学期

《 微积分甲下 》课程期中考试试卷 A

课程号：＿＿＿＿＿，开课学院：数学科学学院

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打 √），允许带＿＿＿＿＿入场

考试日期：2017 年 4 月 24 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：＿＿＿＿＿学号：＿＿＿＿＿所属院系：＿＿＿＿＿

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（每题 7 分，共 35 分）

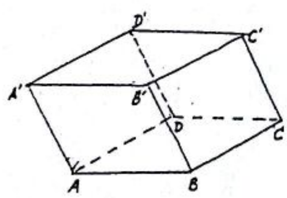
1. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=5$，求 $[(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解　原式 $=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=10$

2、一平行六面体示意图如图，已知坐标 $A(1,0,0)$，$B(5,9,2)$，$D(3,5,7)$，$A'(1,-2,6)$，求该平行六面体的体积.

解：$\overrightarrow{AB}=\{4,9,2\}$，$\overrightarrow{AD}=\{2,5,7\}$，$\overrightarrow{AA'}=\{0,-2,6\}$

$$V=\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=\left\|\begin{matrix}4&9&2\\2&5&7\\0&-2&6\end{matrix}\right\|=60.$$



3、求过点（-1，2，3）且垂直于直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{x}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

解　设所求直线的方向向量为 $\vec{v}$，由条件知 $\vec{v}\perp\vec{v_1}=\{4,5,6\}$，$\vec{v}\perp\vec{n}=\{7,8,9\}$，因此，

$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}=\{-3,6,-3\}\parallel\{1,-2,1\}$ ， 故 所 求 直 线 方 程 为

$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

4、(1) 验证直线 L_1： $\begin{cases}x+2y-2z=5\\ 5x-2y-z=0\end{cases}$ 与直线 L_2： $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ 平行；(2) 求经过 L_1 与 L_2 的平面方程.

解： (1) L_1 的方向向量 $\vec{\tau}=\{1,2,-2\}\times\{5,-2,-1\}=-3\{2,3,4\}$，所以 $L_2 // L_1$.

(2) 方法 1：用平面束方程 $(x+2y-2z-5)+\lambda(5x-2y-z)=0$，

以 L_2 上的点 $(-3,0,1)$ 代入，得 $\lambda=-\dfrac{5}{8}$，得平面方程 $17x-26y+11z+40=0$.

方法 2：在 L_1 上任取一点，例如取 $(\dfrac{5}{6},\dfrac{25}{12},0)$，它与 L_2 上的点 $(-3,0,1)$ 连接成向量

$\vec{P}=\{\dfrac{23}{6},\dfrac{25}{12},-1\}$，所以所求平面的法向量

$\vec{n}=\{2,3,4\}\times\{\dfrac{23}{6},\dfrac{25}{12},-1\}=\{-\dfrac{34}{3},\dfrac{52}{3},-\dfrac{22}{3}\}$，

由点法式得平面方程为

$$-\frac{34}{3}(x+3)+\frac{52}{3}(y-0)-\frac{22}{3}(z-1)=0,$$

即 $17x-26y+11z+40=0$.

5、求直线 $L:\begin{cases}x+y-z=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影直线 L_1 方程,并求 L_1 绕 oy 轴旋转所的旋转曲面的方程

解 直线 L_1 方程为 $\begin{cases}2x+1=0\\ z=0\end{cases}$

L_1 绕 oy 轴旋转所的旋转曲面的方程为 $\pm 2\sqrt{x^2+z^2}+1=0$，即

$x^2+z^2=\dfrac{1}{4}$

二、(每题 8/分，共 24 分)

1、讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\0, \qquad (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$在原点的可微性。

解 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0=f_x'(0,0)$.由$(x,y)$的对称性知$f_y'(0,0)=0$.要验证函数在原点是否可微，只需看$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}$是否为零，由于

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$ 极限不存在，不可微。

2、设$f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，求$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}$,由$x$，$y$地位对称，知$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2yx^3e^{-x^2y^2}$,而

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2}$,于是$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$.

3、设$z=f(3x-y)+g(x,xy)$，其中函数$f(t)$二阶可导，$g(u,v)$具有连续二阶偏导，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3f'+g_1'+g_2'\cdot y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3f''+g_{12}''\cdot x+g_{22}''xy+g_2'$.

三、(每题 7 分，共 35 分)

1、判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{a}{n})$收敛性（$a>0$,常数）

$0\le 1-\cos\dfrac{a}{n}=2\sin(\dfrac{a}{2n})^2\le 2\cdot\dfrac{a^2}{4n^2}=\dfrac{a^2}{2}\dfrac{1}{n^2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,且$\dfrac{a^2}{2}>0$,由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{a}{n})$收敛.

解 (I) 令 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_x(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}}{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|\cdot x^2=x^2.$$

所以, 当 $x^2<1$, 即 $-1<x<1$ 时, 幂级数绝对收敛. 当 $x^2>1$ 时，幂级数发散。

(II) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\right)$，$x\in[-1,1]$ 其级数收敛, 因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

此级数收敛, 故原级数的收敛域为 $[-1,1]$. 中令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\quad x\in(-1,1),$$

所以有

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1),$$

又 $S_1(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}0^{2n}=0$，故

$S_1(x)=\int_0^x S_1'(t)dt+S_1(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt+S_1(0)=\arctan x$，$x\in(-1,1)$.

$S_1(x)$ 在 $x=-1,1$ 上是连续的, 所以 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上是连续的. 所以

$S(x)=x\cdot\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

3、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解：由 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$，　$f'(x)=\dfrac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},|x|<\dfrac{1}{2}$,

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

Scanned by CamScanner

得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

4、 设常数$a>0$，$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,\mathrm{d}x$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$是条件收敛，绝对收敛，发散？还是敛散性与$a$有关？请给出论证.

解：因为$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,\mathrm{d}x$，所以有 $a_n>a_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$，即$\{a_n\}$单调减

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,\mathrm{d}x=0$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛（莱布尼兹定理）；

因为$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{a}}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a}}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛.

5、设$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$,其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx(n=0,1,2,\cdots)$,求$S(-\dfrac{9}{2})$.

解 由余弦级数$S(x)$为函数$f(x)$作偶延拓的 Fourier 级数，于是

$$S(-\frac{9}{2})=S(-4-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$$

$$=\frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+(2-2\cdot\frac{1}{2})}{2}=\frac{3}{4}.$$

四、叙述定理（可微的充分条件），并证明这个定理（6 分）。