浙江大学 2007－2008 学年春季学期

《 微积分Ⅱ 》课程期末考试试卷

开课学院：_理学院_ 考试形式：闭卷 考试时间：　　年　月　　日 所需时间：120 分钟

考生姓名：______________学号：______________专业：______________

一、 填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1．点 $M(1,-1,2)$ 到平面 $x-2y+2z-1=0$ 的距离 $d=$______．

2．已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \vec{a}\cdot\vec{b}=3$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ ____________.

3．设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=f(x^y,\ y^x)$, 则

$\mathrm{d}z=$ ____

4．设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续且 $f(x)>0$, a 与 b 为常数， $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$,

则 $\iint\limits_D \dfrac{a f(x)+b f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma=$ ____________.

5．设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换二次积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{x^2-2x} f(x,y)\mathrm{d}y=$ ________________ **.**

二、 选择题（每小题 5 分，共 25 分. 每小题所给 4 个选项中只有 1 个是符合题目要求的，把所选的字母填在题后的括号内）.

6．直线 l_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+5}{1}$ 与直线 l_2 : $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$.　　【　】

7. $f(x,y)$ 为连续函数, 极坐标系中的二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r$ 可以写成直角坐标中的二次积分为

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　　【　】

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$, $S(x)$ 为 $f(x)$ 的以 2 为周期的余弦级数，则 $S(-\dfrac{5}{2})=$

(A) $\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{3}{4}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.　　【　】

9.设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 则 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处

(A) 偏导数存在, 函数不连续.　　(B) 偏导数不存在, 函数连续.

(C) 偏导数存在, 函数连续.　　(D) 偏导数不存在, 函数不连续.　　【　】

三、 解答题

10．(10 分) 求曲线 $L:\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在其上点 $M(1,-1,2)$ 处的切线方程与法平面方程.

11．(10 分) 设 F 可微, z 是由 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定的可微函数, 并设 $F_2'\neq F_3'$,

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

12. (10 分)设 D 是由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 围成的两块有界闭区域的并集, 求 $\iint\limits_D [\,e^{x^2}+\sin(x+y)]\,\mathrm{d}\sigma$.

13．(10 分) 求空间曲线 $L:\begin{cases} x^2+9y^2-2z^2=0 \\ x+3y+3z=5 \end{cases}$ 上的点到 xOy 平面的距离最大值与最小值.

14．(10 分)设平面区域 $D=\{(x,\ y)\,|\,0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$\iint_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma.$$

15．(5 分) 设当 $y>0$ 时 $u(x,\ y)$ 可微, 且已知

$$\mathrm{d}u(x,\ y)=(\frac{y}{x^2+y^2}+xy^2)\ \mathrm{d}x+(-\frac{x}{x^2+y^2}+x^2y+2y)\,\mathrm{d}y\text{, 求 } u(x,y)\ .$$

参考解答：

一．1．2；

2. $\sqrt{19}$ ；

3. $(f_1'\cdot yx^{y-1}+f_2'\,y^x\ln y)\,\mathrm{d}x+(f_1'\cdot x^y\ln x+f_2'\,xy^{x-1})\,\mathrm{d}y$;

4. $\dfrac{a+b}{2}$;

5. $\int_0^{-1}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1+y}}^{1+\sqrt{1+y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

二．(6)B； (7) D； (8) C； (9) A.

三．10．曲线 $L:\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2-9=0\\3x^2+y^2-z^2=0\end{cases}$ 在点 $M(1,-1,2)$ 处切矢量：

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4x&6y&2z\\6x&2y&-2z\end{vmatrix}_M=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&-6&4\\6&-2&-4\end{vmatrix}\ //\ \{8,10,7\}$$

则切线方程：$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$，法平面方程：$8x+10y+7z-12=0$.

11. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'-F_3'}{F_3'-F_2'}-\dfrac{-F_1'+F_2'}{F_3'-F_2'}=1$

12. $\iint\limits_D[e^{x^2}+\sin(x+y)]\,\mathrm{d}\sigma=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}e^{x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1(x-x^3)\,e^{x^2}\mathrm{d}x$

$$=(1-x^2)\,e^{x^2}\Big|_0^1+\int_0^1e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=-1+e^{x^2}\Big|_0^1=e-2$$

13. 曲线上点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离: $d=|z|$,

设 $L=z^2+\lambda(x^2+9y^2-2z^2)+\mu(x+3y+3z-5)$

$$\begin{cases}L_x'=2x\lambda+\mu=0\\L_y'=18y\lambda+3\mu=0\\L_z'=2z-4z\lambda+3\mu=0\\L_\lambda'=x^2+9y^2-2z^2=0\\L_\mu'=x+3y+3z-5=0\end{cases}$$

$x=3y,\ z=\pm3y$

驻点: $A(1,\frac{1}{3},1),\ A(-5,-\frac{5}{3},5)$

$\therefore$ 最大值 $d=5$, 最小值 $d=1$.

14. 设 $D_1=\{(x,\,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{1-x^2},\,0\le x\le 1\}$,

$D_2=\{(x,\,y)\,|\,\sqrt{1-x^2}\le y\le 1,\,0\le x\le 1\}$,

$$\iint_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma$$

解 1: 原式$=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=2\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}\,r+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

解 2: 原式$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1(\sqrt{1-x^2})^3\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\ \underline{\underline{x=\sin t}}\ \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

15. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}+xy^2$, 两边关于 x 积分，有

$$u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2y^2+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}+x^2y+2y=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}+x^2y+\varphi'(y)$$

$\therefore\ \varphi'(y)=2y,\quad \varphi(y)=y^2+C$，

$$\therefore\ u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2y^2+y^2+C.$$