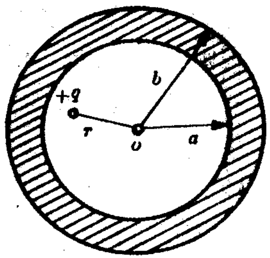
第十章　静电场中的导体和电介质

10.1　有一内外半径分别为 a 和 b 的球形金属空腔，带电量为 $+Q$，空腔内与球心 o 相距 r 处有一点电荷 $+q$（如图所示）。求球心 o 处的电势。



题 10.1 图

解　由于静电感应，球壳内表面带电为 $-q$，外表面带电为 $Q+q$，根据电势叠加原理

$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

10.2　半径为 0.1m 的金属球 A 带电 $q=1\times10^{-8}$C，把一原来不带电的半径为 0.2m 的薄金属球壳 B 同心地罩在 A 球的外面。(1)求离开球心 o 为 0.15m 处 P 点电势；(2)把 A 和 B 用导线连接后，求上述 P 点的电势。

解　(1)根据电势叠加原理

$$U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1\times10^{-8}}{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times0.15}$$

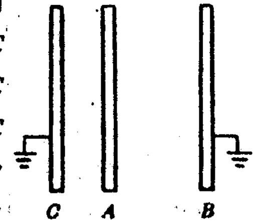
$$=600\text{V}$$

(2)把 A 和 B 用导线连接后，A 球的电量全部分布到球壳 B 上，则

$$U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{1\times10^{-8}}{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times0.2}$$

$$=450\text{V}$$

10.3　如图所示，三块平行平板 A、B 和 C，面积均为 200cm²，A、B 间相距 4mm，A、C 间相距 2mm。若使 A 板带电 3×10^{-7}C，B、C 板均接地（边缘效应忽略不计），求：(1)B 和 C 板上感应电荷各为多少？(2)A 板电势为多少？



题 10.3 图

解　设 A、B、C 三板上电荷面密度分别为 σ_A、σ_B、σ_C，由高斯定理可知，$\sigma_A=\sigma_B+\sigma_C$，三板上电荷亦为，$Q_A=Q_B+Q_C$。

(1)因为 $U_{AB}=U_{AC}$，所以

$$\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}\cdot d_{AB}=\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}\cdot d_{AC}$$

得到

$$\sigma_B=\frac{1}{2}\sigma_C$$

故有

$$\sigma_B=\frac{1}{3}\sigma_A$$

$$\sigma_C=\frac{2}{3}\sigma_A$$

代入数据

$$Q_B=\frac{1}{3}Q_A=\frac{1}{3}\times3.0\times10^{-7}$$

$$=1.0\times10^{-7}\text{C}$$

$$Q_C=\frac{2}{3}Q_A=\frac{2}{3}\times3.0\times10^{-7}$$

$$=2.0\times10^{-7}\text{C}$$

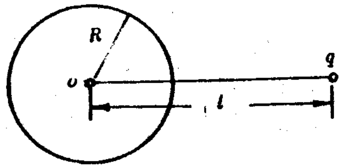
(2)A 板电势

$$U_A=\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}d_{AC}=\frac{Q_C}{\varepsilon_0 S}d_{AC}$$

$$=\frac{2.0\times10^{-7}\times2\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times200\times10^{-4}}$$

$$=2.26\times10^{3}\text{V}$$

10.4 在半径为 R 的中性金属球壳外有一点电荷 q，与球心 o 相距 l，如图所示。设它们离地和其他物体都很远，试问：(1)球内各点电势多大？(2)若把金属球壳接地，则球上的感应电荷 q' 有多大？



题 10.4

解(1)金属球壳是个等势体，由电势叠加原理

$$U_o=U_q+U_{感}$$

$$U_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

$$U_{感}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq'=0$$

故

$$U_o=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

(2)球壳接地后，$U'_o=0$

同时

只有O点的电势(R内等势体)

$$U'_o=U_q+U_{感}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq'$$

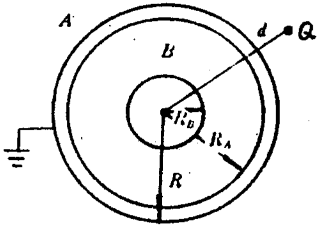
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=0$$

所以

$$q'=-\frac{R}{l}q$$

10.5 一接地导体球壳 A，其内、外半径分别为 R_A 和 R，内有一半径为 R_B 的同心导体球 B，带电量为 q，已知 $R_A=2R_B$，$R=3R_B$。今在距球心 o 为 $d=4R_B$ 处，放一电量为 Q 的点电荷，设球壳离地很远，并与地相连。试问：(1)球壳 A 带的总电量是多少？(2)若用导线将 A 与 B 相连，球壳 A 的带电量又是多少？



题 10.5 图

解 (1)由于静电感应，球壳 A 内表面带电为 $-q$。设外表面带电为 Q'，对球心 o，电势为

$$U_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_B}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_A}+\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

又根据电势定义

$$U_O=\int_{R_B}^{R_A}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_A}\right)$$

则有

$$\frac{Q'}{R}+\frac{Q}{d}=0$$

$$Q'=-\frac{R}{d}Q=-\frac{3}{4}Q$$

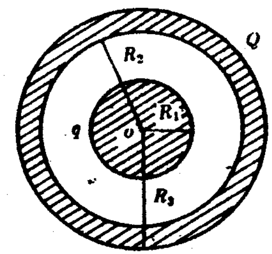
因此球壳 A 带的总电量为

$$Q_1=-q+Q'=-q-\frac{3}{4}Q$$

(2)球壳 B 上 $+q$ 与球壳 A 内表面 $-q$ 中和，所以

$$Q_2=-\frac{3}{4}Q$$

10.6 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q，球外有一个内、外半径为 R_2、R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q(见题图)。(1)求两球的电势 U_1 和 U_2；(2)若用导线将导体球和球壳相连，则 U_1 和 U_2 是多少？(3)设外球离地面很远，在情形(1)中若内球接地，U_1 和 U_2 又是多少？



题 10.6 图

解 (1)由于静电感应，外球壳内表面带电为 $-q$，外表面带电为 $Q+q$，根据电势

叠加原理

$$U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0r}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

$$=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

(2)导体球与球壳相连，因此

$$U_1=U_2=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

(3)内球接地，$U_1=0$。设内球带电为 q'，则外球壳内表面为 $-q'$，外表面为 $Q+q'$，因此有

$$U_1=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0R_3}=0$$

解得

$$q'=-\frac{R_1R_2Q}{R_1R_2+R_3(R_2-R_1)}$$

故

$$U_2=-\int_{R_1}^{R_2}\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r=-\frac{q'(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}$$

$$=\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0[R_1R_2+R_3(R_2-R_1)]}$$

10.7　两个同心球壳(设壳极薄)，内球壳半径为 R_1，外球壳半径为 R_2。若内球壳带电量为 Q_1，试问：(1)外球壳带多大电量时，才能使内球壳的电势为零。(2)内球壳电势为零时，距球心 r 处的电势为多大?

解　(1)设外球壳带电量为 Q_2。内球壳电势

$$U=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2}=0$$

得　$$Q_2=-\frac{R_2}{R_1}Q_1$$

(2)　$r\leqslant R_1$　　$U=0$

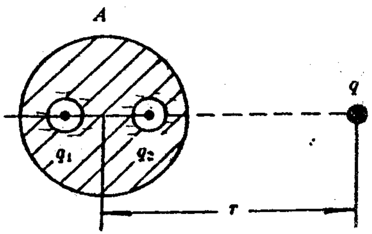
$R_1<r\leqslant R_2$　　$$U=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2}$$

$$=-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{r}\right)$$

$r>R_2$　　$$U=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0r}$$

$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

10.8　如图所示，在半径为 R 的金属球 A 内有两个球形空腔。此金属球整体上不带电。在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2。此外，在金属球 A 外很远处放置一点电荷 $q(r>>R)$。问作用在 q_1、q_2、q 上的静电力各为多少?



题 10.8 图

解　由于静电感应，两空腔内表面将分别带电 $-q_1$ 和 $-q_2$，金属球 A 外表面带电量为 q_1+q_2，同时由于金属球内部(空腔除外)场强处处为零，

所以　$F_{q_1}=F_{q_2}=0$

因为　$r\gg R$

两个点电荷　$$F_A=F_q=\frac{q(q_1+q_2)}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

10.9　两块面积均为 S 且靠得很近的平行导体平板 A 和 B，分别带电 Q_A 和 Q_B(如图)。求两块板的四个导体表面的电荷密度 σ_1、σ_2、σ_3 和 σ_4。忽略边缘效应。

解　因为电荷守恒，所以有

$$\sigma_1S+\sigma_2S=Q_A \qquad ①$$

$$\sigma_3 S+\sigma_4 S=Q_B \qquad ②$$

设场强向右为正，导体板 A 内部场强为

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \qquad ③$$

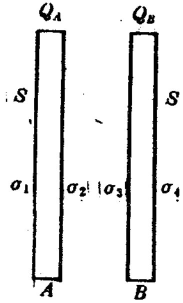
同理，B 板内场强也为零

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \qquad ④$$

联立①、②、③、④解得

$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{Q_A+Q_B}{2S}$$

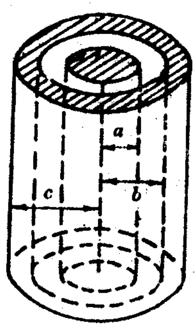
$$\sigma_2=-\sigma_3=\frac{Q_A-Q_B}{2S}$$



题 10.9 图

说明平行导体平板带电规律是相对两面等值异号，相背两面等值同号。

10.10 一均匀带电的无限长圆柱导体，其电荷面密度为 σ，半径为 a，导体外有内半径为 b、外半径为 c 的同轴导体圆筒，如图所示。求：(1)空间场强 E 的分布；(2)当外圆柱体接地时，内圆柱体的电势。



题 10.10 图

解 (1)由高斯定理得到场强分布为

$r<a$，$E=0$

$$a<r<b,\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{2\pi a\times1\times\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

$q=S\sigma=2\pi a l\sigma$

$\lambda=\frac{q}{l}=2\pi a\sigma$

$b<r<c$，$E=0$

$$r>c,\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

(2)当外圆柱接地时，$U_外=0$，所以

$$U_内=U_{ab}=\int_a^b\frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

10.11 两个半径各为 a 和 b 的金属球，用细导线相连，它们间的距离比它们自身的线度大得多。今给此系统带上电荷 Q 求：(1)留在每个球上的电荷；(2)此系统的电容。

解 (1)设半径为 a 的球上电荷为 q_1，则另一球上电荷 $q_2=Q-q_1$。两球被导线相连后 $U_a=U_b=U$，即

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}=\frac{Q-q_1}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

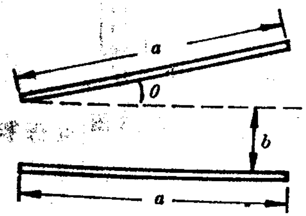
得

$$q_1=\frac{aQ}{a+b}$$

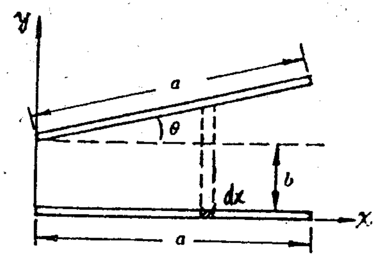
$$q_2=\frac{bQ}{a+b}$$

(2)
$$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0(a+b)$$

或者理解为电容量为 $4\pi\varepsilon_0 a$ 和 $4\pi\varepsilon_0 b$ 的两个电容器的并联。



题 10.12 图



解 10.12 图

10.12 如图所示，一电容器的两极板都是边长为 a 的正方形金属平板，两板不是严格平行，而有一夹角 θ。证明：当 θ 很小时，忽略边缘效应，它的电容为 $C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}\left(1-\frac{a\theta}{2b}\right)$。

证明 建立如图坐标系，该电容器可近似认为是由许多板面积 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x$，板间距 $y=b+x\mathrm{tg}\theta$ 的小平行板电容器并联而成，则

$$\mathrm{d}C=\frac{\varepsilon_0\mathrm{d}S}{y}=\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{b+x\mathrm{tg}\theta}$$

$$C=\int_0^a\frac{\varepsilon_0 a\mathrm{d}x}{b+x\mathrm{tg}\theta}=\frac{\varepsilon_0 a}{\mathrm{tg}\theta}\ln\left(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b}\right)$$

当 θ 很小时，$\mathrm{tg}\theta\to 0$，$\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b}\to\frac{a\theta}{b}\ll 1$，故有

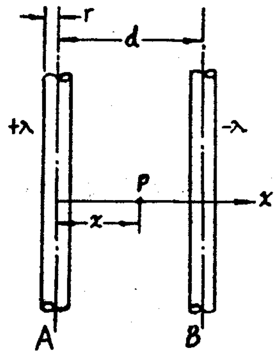
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

$$\ln\left(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b}\right)\approx\ln\left(1+\frac{a\theta}{b}\right)\approx\frac{a\theta}{b}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{b^2}$$

所以

$$C=\frac{\varepsilon_0 a}{\mathrm{tg}\theta}\ln\left(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b}\right)=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left(\frac{a\theta}{b}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{b^2}\right)=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}\left(1-\frac{a\theta}{2b}\right)$$

10.13 设有半径都是 r 的两条平行“无限长”输电线 A 和 B，两轴相距为 d，且满足 $d\gg r$，求两输电线单位长度的电容。



解 10.13 图

解 因是输电线，可设 A、B 单位长度分别带电 $+\lambda$ 和 $-\lambda$。建立如图坐标系，则两导线间任一点 P 的场强为

$$E_{A_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$E_{B_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

$$E_P=E_{A_P}+E_{B_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)$$

按定义

$$U_{AB}=\int_r^{d-r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x$$

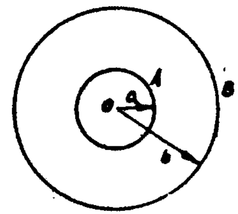
$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r}{r}$$

$$\approx\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r}$$

因此单位长度电容为

$$C=\frac{\lambda}{U_{AB}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{r}}$$

10.14 一球形电容器，在外球壳的半径 b 及内外导体间的电势差 U 维持恒定的条件下，内球半径 a 为多大时才能使内球表面附近的电场强度最小？并求这个最小电场强度的大小。



解 10.14 图

解 设内球带电为 Q，则

$$U_{AB}=\int_a^b\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=U$$

得

$$Q=\frac{4\pi\varepsilon_0 abU}{b-a}$$

内球表面附近场强

$$E_a=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{bU}{(b-a)a}$$

当

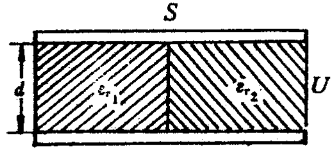
$$\frac{\mathrm{d}E_a}{\mathrm{d}a}=bU\left[\frac{1}{(b-a)^2}-\frac{1}{a^2}\right]=0$$

即 $a=\frac{b}{2}$ 时，E_a 有最小值

$$E_{a\min}=\frac{4U}{b}$$

10.15 一板面积 $S=20\mathrm{cm}^2$ 的平板电容器，其两板间的距离 d [illegible]mm，板间左右各半地充有两种不同的均匀电介质（如图所示），

它们的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=4$ 和 $\varepsilon_{r2}=6$。若在两极板间加上 $U=$15V 的电势差，忽略边缘效应。求：(1)各介质中的电位移矢量；(2)各介质中的电场强度；(3)各介质中的极化强度矢量；(4)电容器的电容。



题 10.15 图

解 因是平行板电容器，

$$E=\frac{U}{d}=5\times10^3\mathrm{V/m}$$

$$(1)D_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}E=1.77\times10^{-7}\mathrm{C/m^2}$$

$$D_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}E=2.66\times10^{-7}\mathrm{C/m^2}$$

$$(2)E_1=E_2=E=5\times10^3\mathrm{V/m}$$

$$(3)P_1=D_1-\varepsilon_0E_1=1.33\times10^{-7}\mathrm{C/m^2}$$

$$P_2=D_2-\varepsilon_0E_2=2.21\times10^{-7}\mathrm{C/m^2}$$

$$(4)C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma_1S_1+\sigma_2S_2}{U}=\frac{D_1\frac{S}{2}+D_2\frac{S}{2}}{U}=2.95\times10^{-11}\mathrm{F}$$

做高斯面，$\oint_{S_1}D_1 dS=Q_1$，

10.16 一空气平行板电容器，面积 $S=0.2\mathrm{m}^2$，间距 $d=1.0\mathrm{cm}$，充电后断开电源，其电势差 $U_0=3\times10^3\mathrm{V}$，当电介质充满两板间以后，则电势差降至 1000V。问电介质的相对介电常数 ε_r 是多大？

解 充电后断开电源，两板上带电量 Q 不变，σ_0 不变，板间 $D=\sigma_0$ 保持不变。两板间充满电介质前后的电势差分别为

$$U_0=E_0d=\frac{D}{\varepsilon_0}d=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d$$

$$U'=E'd=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d$$

比较上两式有

$$\varepsilon_r=\frac{U_0}{U'}=\frac{3\times10^3}{1000}=3$$

10.17 一圆柱形电容器是由半径 R_1 的圆柱形导体和与它同轴的导体圆筒组成，圆筒内半径 R_2，其间充满相对介电系数为 ε_r 的电介质。设沿轴线两极上单位长度带电量分别为 $+\lambda_0$ 与 $-\lambda_0$，忽略边缘效应，求：(1)介质中的电场强度；(2)介质中的电位移矢量；(3)介质表面的束缚电荷面密度 σ'。

解 (1)根据介质中高斯定理，有

$$D=\frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

(2)

$$D=\frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

(3)

$$P=D-\varepsilon_0E=\frac{\lambda_0}{2\pi r}-\varepsilon_0\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}=\frac{\lambda_0(\varepsilon_r-1)}{2\pi\varepsilon_r r}$$

由于

$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$\sigma_{R_1}'=-P_1=-\frac{\lambda_0(\varepsilon_r-1)}{2\pi\varepsilon_r R_1},\qquad \sigma_{R_2}'=P_2=\frac{\lambda_0(\varepsilon_r-1)}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$

10.18 一圆柱形电容器，外导体的内直径为 4cm，内导体的直径为 2cm，中间充满电介质强度为 200kV/cm 的电介质。问该电容器能承受的最大电压是多少？

解 设内导体外半径为 R_1，外导体内半径为 R_2，并设两导体沿轴线单位长度上带电分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，电介质击穿场强为 E_M。由高斯定理，两导体之间有

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r},\qquad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

在 R_1 处，E 最大，所以 $\lambda_m=2\pi\varepsilon R_1E_M$，得到

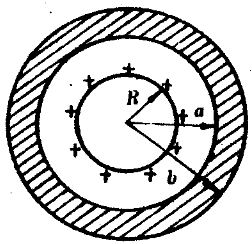
$$U_M=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi\varepsilon R_1E_M}{2\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r$$

$$=R_1E_M\ln\frac{R_2}{R_1}$$

代入已知数据

$$U_M=1.39\times10^5\mathrm{V}$$

10.19　一半径为 R 的导体球带电 Q；球外有一层均匀电介质做成的同心球壳，其内外半径分别为 a 和 b，如图所示。设电介质的相对介电常数为 ε_r，求：(1)电介质内外的场强和电位移分布；(2)电介质内的极化强度 P 和介质表面的极化电荷面密度 σ'。



题 10.19 图

解　(1)据高斯定理有

$r<R,\quad D=0,\quad E=0$

$R<r<a,\quad D=\dfrac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{D}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$

$a<r<b,\quad D=\dfrac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_rr^2}$

$r>b,\quad D=\dfrac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{D}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$

(2)介质内 $P=D-\varepsilon_0E=D(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})$

$$=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_rr^2}$$

因为

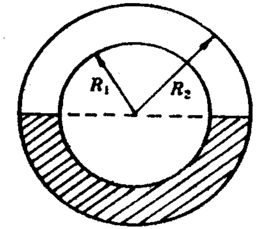
$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$\sigma_a'=-P_a=-\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_ra^2},\qquad\sigma_b'=P_b=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_rb^2}$$

10.20　一球形电容器，内球半径 R_1，外球半径 R_2，两球面间的一半空间充满相对介电常数为 ε_r 的电介质，如图所示。设边缘效应

可略，求其电容。

解　可将图中球形电容器看成由上、下二个半球形电容器并联而成，故总电容



题 10.20 图

$$C=C_上+C_下$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}+\frac{1}{2}\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_rR_1R_2}{R_2-R_1}$$

$$=\frac{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)R_1R_2}{R_2-R_1}$$

10.21　两个电容器分别标明为 200pF，500V 和 300pF，900V，把它们串联起来后等值电容多大？如果两端加上 1000V 的电压，是否会击穿？

解　串联后其等值电容为

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{200\times300}{200+300}=120\mathrm{PF}$$

加上电压 $U=1000\mathrm{V}$ 后，每个电容器带电量为

$$Q_1=Q_2=Q=CU=1.2\times10^{-7}\mathrm{C}$$

则 C_1 的电压

$$U_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{1.2\times10^{-7}}{200\times10^{-12}}=600\mathrm{V}>500\mathrm{V}$$

故 C_1 先击穿。然后所有电压 1000V 加在 C_2 上，C_2 也击穿。

10.22　在相对介电常数为 ε_r 的无限大均匀电介质中，有一半径为 R_1 带电 Q 的导体球。求：(1)电场总能量；(2)电场能量的一半分布在半径多大的球面内？

解　(1)根据介质中高斯定理

$r<R,\quad D=0,\quad E=0$

$r>R,\quad D=\dfrac{Q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_rr^2}$

$$w=\frac{1}{2}DE=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_rr^4}$$

$$W=\int_R^\infty\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_rr^4}\cdot4\pi r^2\cdot\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_rR}$$

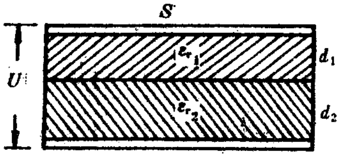
(2)设在半径为 R_0 的球面内场强占总能量的一半，则

$$\frac{1}{2}W=\int_{R_1}^{R_0}\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

$$R_0=2R_1$$

10.23　一平行板电容器极板面积 $S=40\text{cm}^2$，中间有两层电介质(如图)，介电常数各为 $\varepsilon_{r1}=4$ 和 $\varepsilon_{r2}=2$，它们厚度分别为 $d_1=2\text{mm}$，$d_2=3\text{mm}$。若两极板间的电压 $U=200\text{V}$，试计算：(1)每层电介质中的能量密度；(2)每层电介质中的总能量。



题 10.23 图

解　(1)设平行板电容器两板电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$，则由高斯定理有，$D=\sigma$，因此

$$U=E_1d_1+E_2d_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}d_1+\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}d_2$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon_0 U}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r_1}}+\dfrac{d_2}{\varepsilon r_2}}$$

$$=8.85\times10^{-7}\text{C/m}^2$$

能量密度为

$$w_1=\frac{1}{2}D_1E_1=\frac{D_1^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=1.11\times10^{-2}\text{J/m}^3$$

$$w_2=\frac{1}{2}D_2E_2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}=2.22\times10^{-2}\text{J/m}^3$$

(2)

$$W_1=w_1Sd_1$$
$$=8.88\times10^{-8}\text{J}$$
$$W_2=w_2Sd_2$$
$$=2.66\times10^{-7}\text{J}$$

10.24　两个相同的空气电容器，其电容都是 $0.9\times10^{-9}F$，都充

电到电压各为 900V 后断开电源，把其中之一浸入煤油中($\varepsilon_r=2$)，然后把两个电容器并联。求：(1)浸入煤油过程中能量的损失；(2)并联过程中能量的损失。

解　(1)充电后断开电源，每个电容器上电量均为

$$Q_1=Q_2=C_1U=0.9\times10^{-9}\times900$$
$$=8.1\times10^{-7}\text{C}$$

其中一个电容器浸入煤油过程中能量变化为

$$\Delta W=\frac{Q_1^2}{2C_1'}-\frac{Q_1^2}{2C_1}=\frac{Q_1^2}{2\varepsilon_rC_1}-\frac{Q_1^2}{2C_1}$$

$$=-\frac{Q_1^2}{4C_1}=-\frac{(8.1\times10^{-7})^2}{4\times0.9\times10^{-9}}$$

$$=-1.82\times10^{-4}\text{J}$$

$W_0-W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_rC_0}=W_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

能量损失为 $1.82\times10^{-4}\text{J}$

(2)并联后，$Q=Q_1+Q_2=1.62\times10^{-6}\text{C}$

$$C=C_1'+C_2=3C_1=2.7\times10^{-7}\text{F}$$

并联前后能量变化(包括浸入煤油过程)

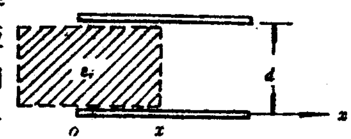
$$\Delta W=\frac{Q^2}{2C}-\frac{Q_1^2}{2C_1}-\frac{Q_2^2}{2C_2}$$

$$=-\frac{Q_1^2}{3C_1}=-2.43\times10^{-4}\text{J}$$

能量共损失了 2.43×10^{-4}J。

$2.43\times10^{-4}-1.82\times10^{-4}=0.61\times10^{-4}$ J 为仅并联过程中的损失

10.25　平行板电容器的极板是边长为 a 的正方形，间距为 d，两板带电 $\pm Q$。如本题图，把厚度为 d、相对介电常数为 ε_r 的电介质板插入一半。试问电介质板所受电场力的大小及方向。



题 10.25 图

解　当电介质插入 x 时，电容器电容相当于两电容器的并联

1)，其

$$
\begin{aligned}
C &= C_1 + C_2 \\
&= \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r a x}{d} \\
&= \frac{\varepsilon_0 a}{d}[a + (\varepsilon_r - 1)x]
\end{aligned}
$$

电容器内电场能量为

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 a[a+(\varepsilon_r-1)x]}$$

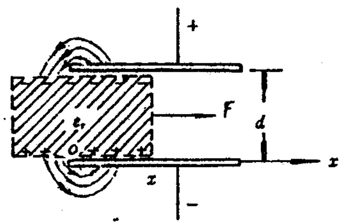
根据电场力作功与能量变化关系

$$F = \frac{-\partial W}{\partial x} = \frac{(\varepsilon_r - 1)dQ^2}{2\varepsilon_0 a[a+(\varepsilon_r-1)x]^2}$$

当 $x = \frac{a}{2}$ 时，电介质受力为

$$F = \frac{2(\varepsilon_r - 1)dQ^2}{\varepsilon_0 a^3(\varepsilon_r + 1)}$$

由于电介质和平行板电容的边缘效应，在平行板电容器的边缘，平行板的场强 E 对电介质上的正负束缚电荷都有一个沿板面向右的分力，故电介质受一个向右的合力。



解 10.25 图

10.26 半径为 a 的长直导线，外面套有共轴导体圆筒，圆筒的内半径为 b，导线与圆筒间充满相对介电系数为 ε_r 的均匀电介质。设沿轴线单位长度上导线带电 $+\lambda$，圆筒带电 $-\lambda$，略去边缘效应，求沿轴线单位长度的电场能量。

解 根据介质中高斯定理

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

电能密度为

$$w = \frac{1}{2}DE = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}.$$

在轴向长度 h 的区域内，电介质中能量为

$$W = \int_a^b \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \cdot 2\pi r h \mathrm{d}r = \frac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$$

单位长度的电场能量为

$$W' = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$$

10.27 一平板电容器的电容为 C，把它接到电势差为 U_0 的电源上充电，然后在下列情况下将电容器的极板距离拉大一倍，求拉大过程中外力所作的功：(1)拉大时极板和电源断开；(2)拉大时极板和电源相连。

解 极板间距拉大一倍，$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{C}{2}$

(1)与电源断开，$Q = CU_0$ 保持不变

外力作功等于电场能量的增量

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU_0^2$$

(2)与电源相连，U_0 保持不变

$$A + A_{电} = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}C'U_0^2 - \frac{1}{2}CU_0^2 = -\frac{1}{4}CU_0^2$$

电源作功

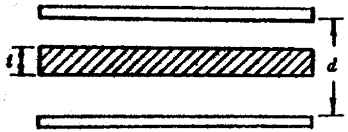
$$
\begin{aligned}
A_{电} &= U_0 \cdot \Delta Q = U_0(Q_2 - Q_1) \\
&= U_0(C'U_0 - CU_0) = -\frac{1}{2}CU_0^2
\end{aligned}
$$

故

$$A = \frac{1}{4}CU_0^2$$

10.28 空气电容器两极板的面积 $S = 3\times10^{-2}\mathrm{m}^2$，极板间距 $d = 3\times10^{-3}\mathrm{m}$。在两极板间平行放置一面积与极板相同的金属板(见附图)厚度 $t = 1\times10^{-3}\mathrm{m}$。将电容器充电至电势差 $U_1 = 600\mathrm{V}$ 时与电

源断开。求：(1)抽出金属板需作之功；(2)抽出金属板后，两极板的相互作用。



题 10.28 图

解 (1)抽出金属板前后极板电荷 $Q=C_1U_1$ 不变，电容由原来的 $C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-t}$ 变成 $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

外力作功

$$A=W_2-W_1=\frac{Q^2}{2C_2}-\frac{Q^2}{2C_1}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 S t U_1^2}{2(d-t)^2}$$

$$=1.2\times10^{-5}\mathrm{J}$$

(2)电容器极板带电量为 Q，$\sigma=\dfrac{Q}{S}$，带电板之一在极板间产生的场强是均匀的

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

另一板所受作用力为

$$F=EQ=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2(d-t)^2}$$

$$=1.2\times10^{-2}\mathrm{N}$$

10.29 一个黄铜球浮在相对介电常数为 $\varepsilon_r=3.0$ 的油湖中，球一半浸在油中，球上的净电荷为 $2.0\times10^{-6}C$。问：球的上半部有多少电荷？下半部有多少电荷？

解 空气中半个铜球的电容为

$$C_上=2\pi\varepsilon_0 R$$

浸在油中的半个铜球的电容为

$$C_下=2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R$$

由于铜球是等势体，$U_上=U_下=U$，可视为两个电容器并联(另一极均

在无穷远处)

$$C=C_上+C_下,\quad q=CU$$

故有

$$q_上=C_上U_上=C_上U=C_上\frac{q}{C}=\frac{C_上 q}{C_上+C_下}$$

$$=\frac{q}{\varepsilon_r+1}$$

$$=0.5\times10^{-6}\mathrm{C}$$

$$q_下=q-q_上=1.5\times10^{-6}\mathrm{C}$$