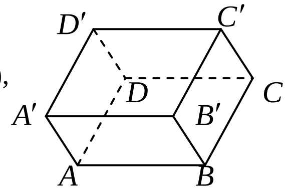
浙江大学 2008－2009 学年春季学期

《 微积分Ⅱ》课程期末考试试卷

注意：解题时应写出必要的解题过程。以下 1~10 题, 每题 6 分; 11~15 题，每题 8 分.

1、 (1)求直线 $L:\begin{cases}x-2y+z=1\\2x+y+7z=12\end{cases}$ 在 yOz 平面上的投影直线 l 的方程；(2) 求 l 绕 Oz 轴旋转一周生成的旋转曲面的方程.

2、一平行六面体示意图如图，已知坐标 $A(1, 0, 0)$, $B(5, 9, 2)$, $C(3, 5, 7)$, $A'(1,-2,6)$,求该平行六面体的体积.



3、(1) 验证直线 $L_1:\begin{cases}x+2y-2z=5\\5x-2y-z=0\end{cases}$ 与直线 $L_2:\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ 平行；(2) 求经过 L_1 与 L_2 的平面方程.

4、已知球面 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-2z+a^2-2=0$ 与平面 $x+2y-2z+7=0$ 相切，求正常数 a 的值.

5、已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$, 求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

6、设 $z=(1+xy)^{x^2y}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7、设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(w)$ 具有二阶导数，$g(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8、设 $z=f(x,y)$, $x=g(y,z)$ 均可微，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ (设解答中出现的分母不为零).

9、求曲线 $L:\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $M(1,-1,2)$ 处的切线方程.

10、计算 $\int_1^3 \mathrm{d}x\int_{x-1}^2 e^{y^2}\mathrm{d}y$.

11、设 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2,\ y\ge x\}$，计算 $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}\sigma$.

12、设 $D=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2, \frac{1}{2}\le y\le 2\}$，计算 $\iint\limits_D |xy-1|\,\mathrm{d}\sigma$.

13、以曲面 $x^2-y^2-z+8=0$ 上的点(1, 1, 8)处的切平面为顶，以椭圆柱面 $4x^2+y^2=4$ 为侧面，以平面 $z=0$ 为底围成一个斜顶柱体，计算其体积.

14、(1) 已知函数 $u=x+y+z$，球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$，点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in S$，求 u 在点 P_0 处沿 S 的外法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$；(2) 命 P_0 在 S 上变动，求 P_0 的坐标，使 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 达最大，并求此最大值.

15、(1) 证明下述二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的必要条件定理：
设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 必存在；
(2) 考察例子: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当}(x,y)\ne(0,0)\\ 0\ , & \text{当}(x,y)=(0,0)\end{cases}$，说明(1) 的逆定理不真.

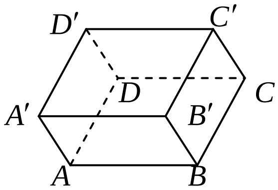
参考解答：

1．(1) 消去 x，得投影直线方程：$l: \ y+z=2, \quad x=0$

(2) l 绕 Oz 轴的旋转曲面：$\pm\sqrt{x^2+y^2}+z=2$ ，即 $x^2+y^2=(z-2)^2$

2．$\overrightarrow{AB}=\{4,9,2\}, \overrightarrow{AD}=\{2,5,7\}, \overrightarrow{AA'}=\{0,-2,6\}$

$$V=|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA'}|=\left\|\begin{vmatrix}4&9&2\\2&5&7\\0&-2&6\end{vmatrix}\right\|=60$$



3．(1) L_1 的方向矢量：$\vec{v}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-2\\5&-2&-1\end{vmatrix}=-3\{2,3,4\}=-3\vec{v}_2$ ，

$\therefore \vec{v}_1 // \vec{v}_2$， 则 $\vec{L}_1 // \vec{L}_2$.

⑵ 过 L_1 的平面束方程： $(x+2y-2z-5)+\lambda(5x-2y-z)=0$ ，

代入 L_2 上的点 $(-3,0,1)$，得 $\lambda=-\dfrac{5}{8}$，得所求平面方程：

$17x-26y+11z+40=0$

4．球面方程化为 $(x-a)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$，球心 $(a,-1,1)$ 到平面

$x+2y-2z+7=0$ 的距离 $d=\dfrac{1}{3}|a-2-2+7|=2$ ，

$\therefore a=3$

5．$19=|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=13+2\vec{a}\cdot\vec{b}, \ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=13-2\vec{a}\cdot\vec{b}=7,$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$.

6．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x^2y^2(1+xy)^{x^2y-1}+2xy(1+xy)^{x^2y}\ln(1+xy),$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3y(1+xy)^{x^2y-1}+x^2(1+xy)^{x^2y}\ln(1+xy).$

7．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''$

8. $\mathrm{d}z = f_x' \,\mathrm{d}x + f_y' \,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x = g_y' \,\mathrm{d}y + g_z' \,\mathrm{d}z$，即

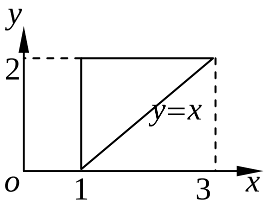
$$\begin{cases} g_y' \,\mathrm{d}y + g_z'\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \\ f_y' \,\mathrm{d}y - \quad \mathrm{d}z = -f_x' \,\mathrm{d}x, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{f_x' g_y' + f_y'}{f_y' g_z' + g_y'}$$

9. 曲线 $L: \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $M(1, -1, 2)$ 处的切矢量

$$\vec{v} // \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4x & 6y & 2z \\ 6x & 2y & -2z \end{vmatrix}_M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -6 & 4 \\ 6 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 4\{8, 10, 7\}$$

则切线方程：$\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+1}{10} = \dfrac{z-2}{7}$.

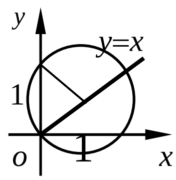
10. 积分区域如图，交换积分次序，



$$\int_1^3 \mathrm{d}x \int_{x-1}^2 e^{y^2} \mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_1^{y+1} e^{y^2} \mathrm{d}x.$$

$$= \int_0^2 y e^{y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

11. 解 1：利用极坐标：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$



圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow r = 2(\sin\theta + \cos\theta), \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}\sigma. = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} (\cos\theta - \sin\theta) r^2 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta + \cos\theta)^3 \ \mathrm{d}(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{2}{3}(\sin\theta + \cos\theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}$$

解 2：坐标变换：$x - 1 = r\cos\theta, y - 1 = r\sin\theta,$ 圆：$r = \sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4}$

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}\sigma. = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} (\cos\theta - \sin\theta) r^2 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sin\theta + \cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(-2\sqrt{2}) = -\frac{8}{3}.$$

12．积分区域分成二部分： $D=D_1(xy<1)+D_2(xy>1)$,

$$\iint_D |xy-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(xy-1)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\,x\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}}(1-xy)\,\mathrm{d}\,y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\,x\int_{\frac{1}{x}}^{2}(xy-1)\,\mathrm{d}\,y=2\ln 2+\frac{15}{64}$$

13．曲面 $x^2-y^2-z+8=0$ 在点(1, 1, 8) 处的法矢量： $\vec{n}=\{2x,-2y,-1\}_0=\{2,-2,-1\}$
切平面方程： $2(x-1)-2(y-1)-(z-8)=0$ 即 $z=2x-2y+8$，
记 $D:4x^2+y^2\le 4$，则斜顶柱体的体积：

$$V=\iint_D(2x-2y+8)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D 8\,\mathrm{d}\sigma=8\iint_D\mathrm{d}\sigma=8\cdot\pi\cdot 1\cdot 2=16\pi\,.$$

14．(1) S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线矢量： $\vec{n}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}$，，$\vec{n}^0=\{x_0,y_0,z_0\}$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\}_{P_0}\cdot\vec{n}^0=\{1,1,1\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=x_0+y_0+z_0\,.$

(2) 令 $F(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，由拉格朗日乘数法，

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y=0,\ \frac{\partial F}{\partial z}=1+2\lambda z=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0$$

由前 3 个方程得 $x=y=z$，代入第 4 个方程，解得 $x=y=z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则

函数在 $P_0\,(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ 处取得最大值，且 $\max(\dfrac{\partial u}{\partial n})=\sqrt{3}\,.$

15．(1) 略.

(2) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$， $f_y'(0,0)=0$，

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处两个偏导数存在，但是不可微，用反证法，若可微，则

$$\Delta f=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,,$$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta f-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$

而上式极限不存在，因而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.