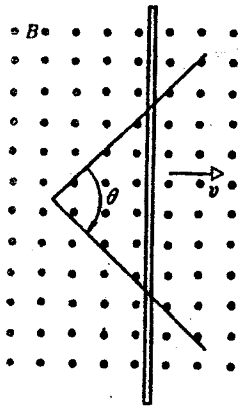
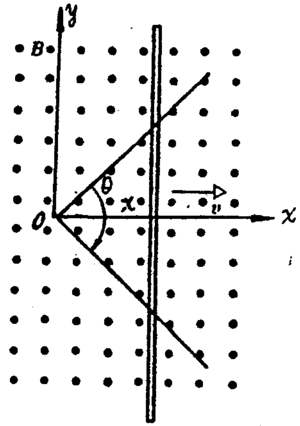


题 14.2 图



解 14.2 图

$$\mathscr{E}_i=Blv=2Bvx\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

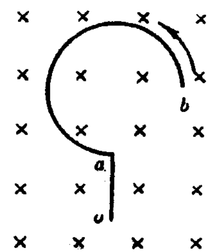
因 $t=0, x_0=0$，故 $x=vt$

$$\mathscr{E}_i=2Bv^2t\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

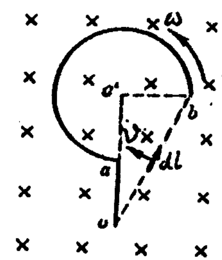
(2)
$$t=\frac{\mathscr{E}_i}{2Bv^2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\frac{56.8}{2\times0.352\times5.21^2\times\operatorname{tg}55^\circ}=2.08\mathrm{s}\approx2\mathrm{s}$$

14.3 一导体被弯成附图所示的形状，放在均匀磁场 B 中，$\widehat{ab}$ 为半径 R 的 3/4 圆弧，$\overline{oa}=R$，若此导线以角速度 ω 绕通过 o 点并与磁场平行的轴逆时针匀速转动，求此导线 oab 中的动生电动势。哪一端电势高？

解 作辅助线 ob，由于闭合回路 $oabo$ 在转动过程中磁通量不变，所以总电动势为零，故有



题 14.3 图



解 14.3 图

$$\mathscr{E}_{\widehat{oab}}=\mathscr{E}_{\widehat{ob}}=\int_0^{\overline{ob}}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$
$$=\int_o^{\overline{ob}}B\omega l\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega(\overline{ob})^2$$
$$=\frac{5}{2}B\omega R^2$$

方向从 $b\to a\to o$，即 o 点电势高。

14.4 在与均匀恒定磁场 B 垂直的平面内，有一半径为 R 的 3/4 圆弧形导线 $\widehat{abc}$。导线沿 x 轴方向以速度 v 向右平动。求导线上的动生电动势。

解 作辅助线 ac，闭合回路 $abca$ 在运动过程中磁通量不变，$\mathscr{E}_{总}=0$，故

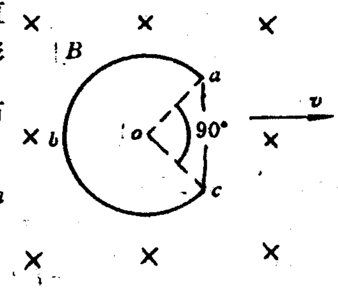
$$\mathscr{E}_{\widehat{abc}}=\mathscr{E}_{\overline{ac}}$$

$l_{ac}=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$ 且与 $\boldsymbol{v}$ 垂直

$$\mathscr{E}_{\overline{ac}}=Bl_{ac}v=\sqrt{2}BRv$$

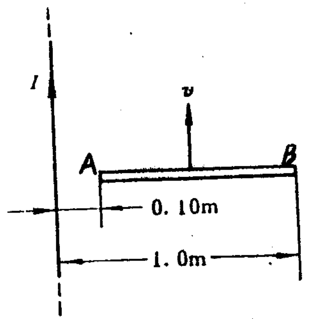
$$\mathscr{E}_{\widehat{abc}}=\sqrt{2}BRv$$

方向 $c\to b\to a$，a 点电势高

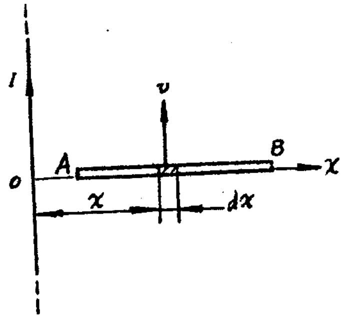


题 14.4 图

14.5　如图所示，金属杆 AB 以匀速 $v=2.0\text{m/s}$ 平行于一长直导线运动，此导线载有电流 $I=4.0\text{A}$，问 AB 金属杆中感应电动势为若干？哪一端电势高？



题 14.5 图



解 14.5 图

解　建立如图坐标系，在金属杆上取一线元 dx

$$d\mathscr{E}_i=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=v\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx$$

$$\mathscr{E}_i=\int_{\cancel{0.01}\,0.1}^{\cancel{0.1}\,1.0}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{dx}{x}\cdot\cos\pi\, v$$

$$=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln 10$$

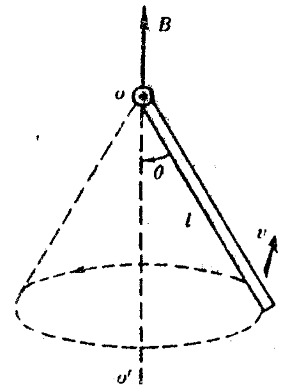
$$=-3.68\times10^{-6}\text{V}$$

左侧 A 端电势高。

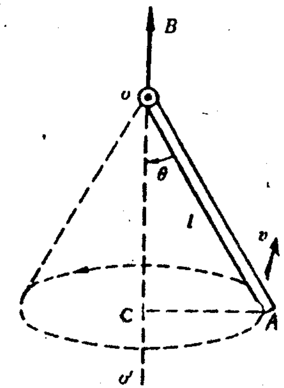
14.6　在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，有一长为 L 的导体棒以匀角速度 ω 绕 oo' 轴旋转。oo' 轴与磁场方向平行，棒与磁场方向夹角为 θ，求导线棒中的动生电动势。

解　作辅助线 AC，$AC\perp OO'$，显然闭合回路 $ACOA$ 在转动过程中磁通量不变，$\mathscr{E}_{总}=0$，而 OO' 边又不动，故 $\mathscr{E}_{AO}=\mathscr{E}_{AC}$

$$\mathscr{E}_{AC}=\frac{1}{2}B\omega\overline{AC}^2=\frac{1}{2}B\omega L^2\sin^2\theta=\mathscr{E}_{AO}$$



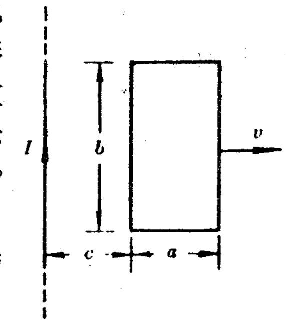
题 14.6 图



解 14.6 图

方向由 $O\to A$，下端 A 的电势高。

14.7　如图所示，一长直导线通有电流 $I=5.0\text{A}$，且在其旁有 $N=1000$ 匝矩形线圈，若线圈以速度 $v=0.030\text{m/s}$ 沿垂直于长直导线方向向右匀速离去，求在图示位置的瞬时，线圈中的感应电动势是多少？（设 $c=0.050\text{m}$，$a=0.020\text{m}$，$b=0.040\text{m}$）。



题 14.7 图

解　矩形线圈在运动过程中，只有与通电导线相平行的两条边在切割磁力线

$$\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=NB_1bv-NB_2bv$$

$$=\frac{Nbv\mu_0 I}{2\pi c}-\frac{Nbv\mu_0 I}{2\pi(c+a)}$$

$$=\frac{Nbv\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{1000\times0.04\times0.03\times4\pi\times10^{-7}\times}{2\pi}\left(\frac{1}{0.05}-\frac{1}{0.07}\right)$$

$$=6.86\times10^{-6}\text{V}$$

14.8　若上题中线圈静止在图示位置，而长直导线通以交流电

$I=10\sin 100\pi t$,问线圈中感应电动势为若干?

解 通过矩形线圈的磁通量

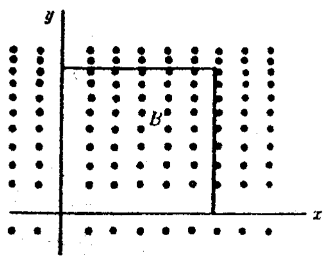
$$\Phi=\int \mathrm{d}\Phi=\int_c^{c+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot b\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\frac{c+a}{c}$$

故

$$\mathscr{E}_i=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-N\frac{\mu_0 b}{2\pi}\times 10\times 100\pi\cos 100\pi t\ln\frac{c+a}{c}$$

$$\approx -8.4\times 10^{-3}\cos 100\pi t\ \mathrm{V}$$

14.9 一个非均匀磁场磁感应强度的变化规律为 $B=4t^2y$(SI),方向垂直纸面向外。磁场中有一边长为 0.20m 的正方形线框,其位置如图所示。试确定 $t=0.25$s 时线框中感应电动势的大小和方向。



题 14.9 图

解 先计算正方形线框任一时刻的磁通量,由于 $B=4t^2y$,故在正方形中取平行于 x 轴的小长条 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}y$,通过此面元的磁通量 $\mathrm{d}\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4t^2ya\mathrm{d}y$

$$\Phi(t)=\int_0^a 4t^2 a y\mathrm{d}y=2t^2a^3$$

正方形线框任一时刻的感应电动势

$$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=-4a^3t$$

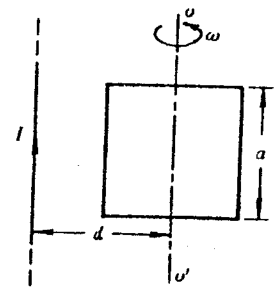
$t=0.25$s 时

$$\mathscr{E}_i=-4\times(0.20)^3\times 0.25$$
$$=-8.0\times 10^{-3}\mathrm{V}$$
$$=-8.0\mathrm{mV}$$

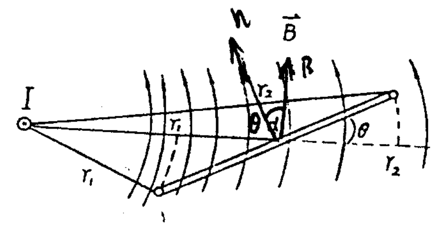
负号表示方向与题设方向相反,即为顺时针方向。

14.10 在长直导线附近,有一边长为 a 的正方形线圈,绕其中心线 oo' 以角速度 ω 旋转,转轴 oo' 与长直导线间的距离为 d,如导线

中通有电流 I,求线圈中的感应电动势。



题 14.10 图



解 14.10 图

解 设线圈转过 θ 角,其俯视图如图所示,这时穿过线圈回路的磁通量

$\mathrm{d}\phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=B\cos\theta\, a\,\mathrm{d}l$
$=Ba\,\mathrm{d}r$
$\cos\theta\,\mathrm{d}l=\mathrm{d}r$

$$\Phi=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}a\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

其中

$$r_1=\sqrt{d^2+(\frac{a}{2})^2-2d(\frac{a}{2})\cos\theta}$$

$$r_2=\sqrt{d^2+(\frac{a}{2})^2+2d(\frac{a}{2})\cos\theta}$$

故

$$\Phi=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{d^2+(\frac{a}{2})^2+da\cos\theta}{d^2+(\frac{a}{2})^2-da\cos\theta}}$$

因 $\theta=\omega t$,于是有

$$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\frac{\mu_0 aI}{4\pi}\left[\frac{da\omega\sin\omega t}{d^2+(\frac{a}{2})^2+da\cos\omega t}-\frac{-da\omega\sin\omega t}{d^2+(\frac{a}{2})^2-da\cos\omega t}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 a^2 d\omega I}{4\pi}\sin\omega t\left[\frac{1}{d^2+(\frac{a}{2})^2+da\cos\omega t}+\frac{1}{d^2+(\frac{a}{2})^2-da\cos\omega t}\right]$$

14.11 设有半径为 a、高度为 b 的铝圆盘，其电阻率为 ρ，把圆盘放在均匀磁场中，磁场方向垂直盘面。设磁场随时间变化，且 $\frac{dB}{dt}=k$，k 为一常量。求盘内的感应电流（圆盘内感应电流产生的磁场略去不计）。

解 在圆盘中选取一个半径为 r，宽度 $\mathrm{d}r$ 的同心小圆环，通过小圆环的磁通量 $\Phi=\pi r^2 B$，相应的感应电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_i=-\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-k\pi r^2$$

小圆环的电阻为 $R=\rho\frac{2\pi r}{b\mathrm{d}r}$

小圆环上的感应电流

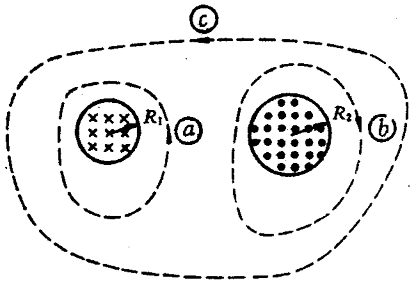
$$\mathrm{d}I_i=\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_i}{R}=-\frac{kb}{2\rho}r\mathrm{d}r$$

圆盘上的总感应电流

$$I_i=\int\mathrm{d}I_i=-\frac{kb}{2\rho}\int_0^a r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{kb}{4\rho}a^2$$

14.12 图中两个均匀磁场区域的半径分别为 $R_1=21.2\text{cm}$ 和 $R_2=32.3\text{cm}$，磁感应强度为 $B_1=48.6\text{mT}$ 和 $B_2=77.2\text{mT}$，方向如图所示（忽略边缘效应）。两个磁场正以 8.5mT/S 的变化率减小。试对 a、b、c 三个回路分别计算积分 $\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。



题 14.12 图

解 对于回路 a

$$\oint_a \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mathrm{d}\Phi_a}{\mathrm{d}t}=\pi R_1^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$=\pi\times(21.2\times10^{-2})^2\times(-8.5\times10^{-3})$$

$$=-1.2\times10^{-3}\text{V}$$

$$=-1.2\text{mV}$$

回路 b

$$\oint_b \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mathrm{d}\Phi_b}{\mathrm{d}t}=\pi R_2^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$=\pi\times(32.3\times10^{-2})^3\times(-8.5\times10^{-3})$$

$$=-2.79\times10^{-3}\text{V}$$

$$=-2.79\text{mV}$$

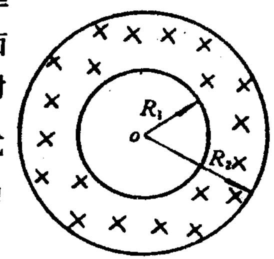
对于回路 c

$$\oint_c \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mathrm{d}\Phi_a}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\Phi_b}{\mathrm{d}t}$$

$$=-1.2+2.79$$

$$=1.59\text{mV}$$

14.13 高度为 D 的铜质圆环，内半径为 R_1，外半径为 R_2，放置在垂直于环面的磁场中。若磁场局限在圆环范围内（见附图），且磁感应强度按 $B=\frac{t}{r}$ 规律变化，式中 t 为时间，r 为环上任一点与圆环中心的距离。已知铜的电阻率为 ρ，求圆环上的电流。



题 14.13 图

解 在铜质圆环内选取一半径为 r，宽度为 $\mathrm{d}r$ 的细小圆环，由题意，通过该圆环的总磁通量为

$$\Phi=\int_{R_1}^{r}B\cdot2\pi r\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{r}2\pi t\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi t(r - R_1)$$

圆环上的感应电动势的大小为

$$d\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -2\pi(r - R_1)$$

细圆环的电阻为 $R = \rho\frac{2\pi r}{D dr}$

所以

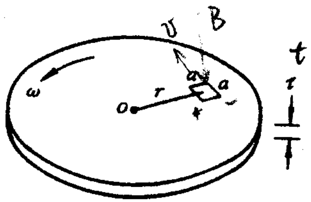
$$dI_i = \frac{d\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{D}{\rho}(1 - \frac{R_1}{r})dr$$

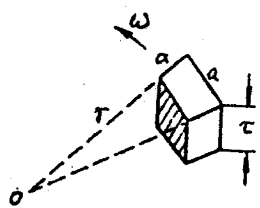
$$I_i = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{D}{\rho}(1 - \frac{R_1}{r})dr$$

$$= -\frac{D}{\rho}\left[(R_2 - R_1) - R_1 \ln\frac{R_2}{R_1}\right]$$

负号表示电流流向与题设相反，为顺时针方向。 t

14.14 一电磁“涡流”制动器由一电导率为 γ 和厚度为 τ 的圆盘组成，此盘绕通过其中心的轴旋转，且有一覆盖面积为 a^2 的磁场 B 垂直于圆盘，如图所示，若面积 a^2 在离轴 r 处，当圆盘角速度为 ω 时，试求使圆盘慢下来的转矩的近似表式。





题 14.14 图　　解 14.14 图

解 在圆盘上沿径向长度为 a 的线段切割磁力线而产生的感应电动势

$$\mathscr{E}_i = Bva = Br\omega a$$

而小方块 a^2 沿半径方向的电阻

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{a}{a\tau} = \frac{1}{\gamma\tau}$$

相应的感应电流

$$i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = Bar\omega\gamma\tau$$

因此这一小体积在磁场中受到的力为

$$F = iaB$$

方向垂直半径。

这力对转轴的力矩大小为

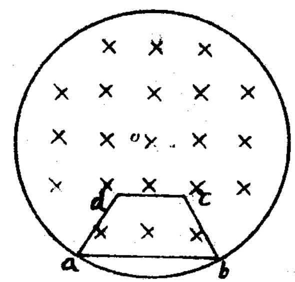
$$M = r \cdot F = iaBr$$

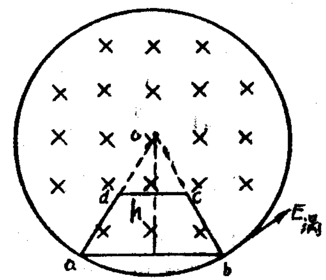
$$= B^2a^2r^2\omega\gamma\tau$$

14.15 如图所示，均匀磁场 B 被限制在半径 R 的无限长圆柱空间中，方向垂直纸面向里。磁场中放置一等腰梯形金属框 $abcd$。设此磁场正以 $\frac{dB}{dt}$ 的速率增加，已知 $ab = R$，$cd = R/2$。试求：

(1)各边中的感生电动势；

(2)线框中的总感应电动势。





题 14.15 图　　解 14.15 图

解 由分析可知，在长直圆柱体内外空间的涡旋电场方向均沿切线，且指向逆时针方向，所以

$$\mathscr{E}_{bc} = \mathscr{E}_{da} = 0$$

$$\mathscr{E}_{ab}=\mathscr{E}_{\Delta abo}=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}hR\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向由 $a\to b$。

同理

$$\mathscr{E}_{dc}=\mathscr{E}_{\Delta odc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}R\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}}{16}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

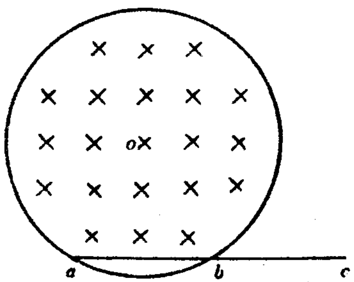
方向由 $d\to c$。

(2)线框内的总电动势为

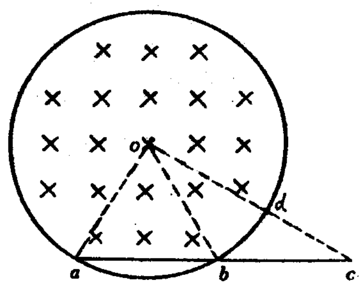
$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{ab}-\mathscr{E}_{dc}=\frac{3\sqrt{3}}{16}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向沿逆时针方向。

14.16　在 14.15 题所述的磁场中放置长为 $2R$ 的金属棒，如图所示，若 $ab=bc=R$，求棒中的感生电动势。



题 14.16 图



解 14.16 图

解　作连接 oa、ob、oc 的辅助线，由于 $E_{涡}$ 方向始终沿圆周切线，在径向线段上不产生感生电动势，故

$$\mathscr{E}_{ac}=\mathscr{E}_{\Delta aco}$$

在 Δaco 中有磁通量的面积为 Δabo 和扇形 bdo，即

$$S=\frac{1}{2}R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R+\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}\cdot\pi R^2=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\pi R^2}{12}$$

感应电动势的大小为

$$\mathscr{E}_{ac}=\mathscr{E}_{\Delta aco}=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\pi R^2}{12}\right)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

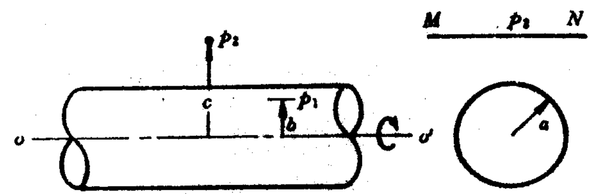
$$=\frac{3\sqrt{3}+\pi}{12}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向由 $a\to c$。

14.17　一半径为 a 的无限长均匀带电圆筒面，单位长度上的电荷为 λ，圆筒绕 oo' 以匀角加速度 β 转动，试求：

(1)圆筒内与轴相距为 b 的 P_1 点的电场强度；

(2)若有一长为 l 的金属棒 MN 与圆筒轴线相垂直，P_2 点在金属棒正上方，且已知垂直距离 $oP_2=c$，求金属棒 MN 两端的电势差。



题 14.17 图

解　(1)旋转的带电圆筒等效于载流长直螺线管。取长为 L 的一段圆筒，带电量 $q=\lambda L$，转动时形成的电流

$$I=nq=\frac{\omega}{2\pi}\lambda L$$

$\beta t=\omega$

单位长度上的电流

$$j=\frac{I}{L}=\lambda\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\lambda\beta t}{2\pi}$$

圆筒内的磁感应强度为

$$B=\mu_0 nI=\mu_0\frac{NI}{L}=\mu_0 j=\frac{\mu_0\lambda\beta t}{2\pi}$$

方向沿轴向右。

再过 P_1 点作一同轴圆周回路，则有

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$E_{p1}\cdot 2\pi b=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi b^2\cdot B)$$

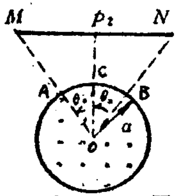
$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi b^2\cdot\frac{\mu_0\lambda\beta t}{2\pi}\right)$$

$$E_{p1}=-\frac{\mu_0\lambda\beta b}{4\pi}$$

负号表示涡旋电场的方向阻碍磁场的变化，左视为顺时针方向。

(2)作辅助线 OM、ON，由于 $E_{涡}$ 沿圆周切向，所以

$$\mathscr{E}_{MN}=\mathscr{E}_{\Delta OMN}$$



解 14.17 图

三角形 OMN 中只有扇形 OAB 中有磁通量存在，且 $\theta=\mathrm{arctg}\,\dfrac{l}{2c}$。穿过回路面积的磁通量为

$$\Phi=\frac{2\theta}{2\pi}\cdot\pi a^2\cdot B=a^2\theta B=\frac{\mu_0\lambda\beta t}{2\pi}a^2\theta$$

则有

$$\mathscr{E}_{MN}=\mathscr{E}_{\Delta OMN}=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mu_0\lambda\beta a^2}{2\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{l}{2c}$$

方向由 $M\rightarrow N$，N 端电势高。

14.18 电子在电子感应加速器中，沿半径为 0.4m 的轨道作圆周运动。如果每转一周它的动能增加 160ev，试求：(1)轨道内磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的平均变化率；(2)欲使电子获得 16Mev 的能量需转多少周？共走多长路程？

解 (1)半径 R 的圆周上的感应电动势为

$$\mathscr{E}_i=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=\pi R^2\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$e\mathscr{E}_i=\Delta E=160\mathrm{eV}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}=\frac{160}{\pi R^2}=\frac{160}{\pi\times 0.4^2}=318\mathrm{T/s}$$

(2) $$N=\frac{E}{e\mathscr{E}_i}=\frac{16\times 10^6}{160}=10^5\ 周$$

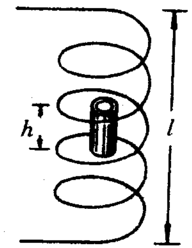
经过的路程

$$l=N\cdot 2\pi R=2\pi\times 0.4\times 10^5$$

$$=251\times 10^3\mathrm{m}$$

$$=251\mathrm{km}$$

14.19 为了排除真空器件中金属部件上附着的气体，通常是将部件放在高频感应炉工作线圈的磁场中，用感应电流使其加热以脱除气体。设工作线圈共 30 匝，长 0.20m，工作电流 $I=I_0\sin 2\pi ft$，其中 $I_0=25\mathrm{A}$，$f=1.0\times 10^5\mathrm{Hz}$，被加热工件是一个半径 $r=4.0\times 10^{-3}\mathrm{m}$ 的薄壁金属圆筒，高度 $h\ll l$，其电阻 $R=5.0\times 10^{-3}\Omega$，工作线圈中心处的磁场可用长直螺线管的磁场公式计算，且不计感应电流的磁场，求：



题 14.19 图

(1)被加热工件中的感应电流的最大值；

(2)工件中每秒产生的热量；

(3)当频率 f 增加一倍时，热量增加几倍？

解 (1)线圈中磁感应强度

$$B=\mu_0 nI=\mu_0\frac{N}{l}I_0\sin 2\pi ft$$

通过被加热金属部件的磁通量为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=\pi r^2 B$$

则

$$I=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\pi^2 r^2\mu_0 NI_0 f}{Rl}\cos 2\pi ft$$

$$I_m = \frac{2\pi^2 r^2 \mu_0 N I_0 f}{Rl}$$
$$= \frac{2\pi^2 \times (4.0\times10^{-3})^2 \times 4\pi\times10^{-7}\times30\times25\times1.0\times10^5}{5\times10^{-3}\times0.2}$$
$$= 29.8\text{A}$$

(2) $$Q = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{T} I_m^2 R \int_0^T \cos^2 2\pi f t \cdot \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2} I_m^2 R$$
$$= 2.2\text{W}$$

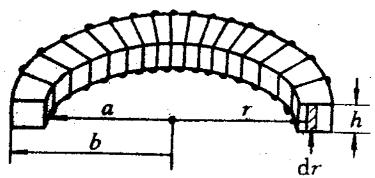
(3)因为 $Q \propto I_m^2$，而 $I_m \propto f$，所以 $Q \propto f^2 a$

当 $f' = 2f$ 时

$$Q' = 4Q$$

热量增加为原来的 4 倍。

14.20 横截面为矩形的环形螺线管，共绕有线圈 1000 匝，内半径 $a = 0.050\text{m}$，外半径 $b = 0.10\text{m}$，厚度 $h = 0.010\text{m}$，求其自感系数。



题 14.20 图

解 由安培环培定理

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

通过横截面的磁通量

$$\Phi = \int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\cdot h\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

因此自感系数

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$= \frac{4\pi\times10^{-7}\times(10^3)^2\times0.01\ln\frac{0.1}{0.05}}{2\pi}$$
$$= 1.4\times10^{-3}\text{H}$$

14.21 有一半径 0.2m 共 100 匝的大线圈，在线圈中心放一小铜丝环，环面积为 $5.0\times10^{-4}\text{m}^2$，两线圈在同一平面内。求：

(1)当大线圈的电流在 $t = 0.010\text{s}$ 内，由 20 安培减少到零，小铜丝环中产生的平均感应电动势；

(2)它们的互感系数。

解 (1)由题意可知，小铜丝环处磁场可视为均匀，为

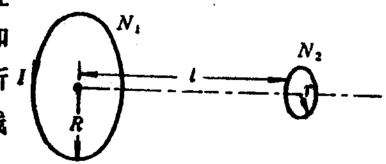
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

穿过小铜丝环的磁通量 $\Phi_M = B_0 \cdot S$，则

$$\overline{\mathscr{E}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - \frac{\mu_0 N I}{2R}S}{\Delta t} = \frac{\mu_0 N I S}{2R\Delta t}$$
$$= \frac{4\pi\times10^{-7}\times100\times20\times5\times10^{-4}}{2\times0.2\times0.01}$$
$$= 3.14\times10^{-4}\text{V}$$

(2) $M = \frac{\Phi_M}{I} = \frac{\mu_0 N I\cdot S}{2RI} = \frac{\mu_0 N S}{2R} = 1.57\times10^{-7}\text{H}$

14.22 两个共轴线圈，半径分别为 R 和 r，匝数分别为 N_1 和 N_2，相距 l。设 r 很小，则小线圈所在处的磁场可以视为均匀。求线圈的互感系数。



题 14.22 图

解 设在大线圈中通过电流 I_1，则在小线圈处产生的磁感应强度沿轴向，大小为

$$B_{21} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 R^2}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

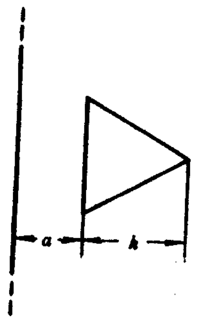
通过小线圈的磁通链为

$$\Psi_{21}=N_2BS$$

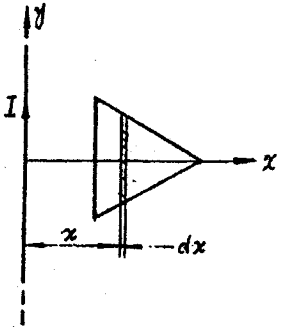
$$=\frac{\mu_0\pi N_1N_2R^2r^2I_1}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0\pi N_1N_2R^2r^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

14.23　在无限长直导线近旁放置一等边三角形平面线圈，线圈的一边与导线平行(见附图)，求其互感系数 M。



题 14.23 图



解 14.23 图

解　建立如图坐标系，设在无限长直导线中通上电流 I，则其磁场分布为

$$B=\frac{\mu_0I}{2\pi x}$$

在等边三角形中取一平行于直导线的细长条面元 dS，面积为

$$dS=2y\mathrm{d}x=2(a+h-x)\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}(a+h-x)\mathrm{d}x$$

穿过 dS 的通量

$$\mathrm{d}\Phi_M=B\cdot\mathrm{d}S=\frac{\mu_0I}{\sqrt{3}\pi}(\frac{a+h}{x}-1)\mathrm{d}x$$

在三角形中的总磁通量

$$\Phi_M=\int_a^{h+a}\frac{\mu_0I}{\sqrt{3}\pi}(\frac{a+h}{x}-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0I}{\sqrt{3}\pi}\left[(a+h)\ln\frac{a+h}{a}-h\right]$$

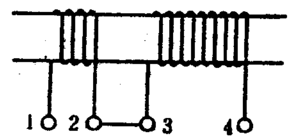
则有

$$M=\frac{\Phi_M}{I}=\frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi}\left[(a+h)\ln\frac{a+h}{a}-h\right]$$

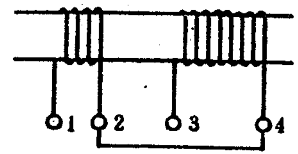
14.24　两线圈的自感分别为 L_1 和 L_2，它们之间的互感为 M。

(1)将两线圈顺串联如附图(a)所示，求 1 和 4 端之间的等效自感；

(2)将两线圈反串联如(b)图，求 1 和 3 端之间的等效自感。



(a) 顺串联



(b) 反串联

题 14.24 图

解　如图所示，通过线圈 12 的磁通量将全部通过线圈 34，反之也一样。

(1)当两线圈顺串联时，设两线圈通有电流 I，两线圈所产生的磁场在两线圈内部是相互加强的，于是线圈 12 中的电流分别在其本身和线圈 34 中产生的磁通链为

$$\Psi_1=L_1I,\qquad \Psi_{21}=MI$$

反过来线圈 34 在其本身和线圈 12 中产生的磁通链为

$$\Psi_2=L_2I,\qquad \Psi_{12}=MI$$

则 1、4 间的总磁通链数为

$$\Psi_{总}=\Psi_1+\Psi_{21}+\Psi_2+\Psi_{12}$$

$$=(L_1+L_2+2M)I=LI$$

$$L_{顺}=L_1+L_2+2M$$

(2)反接串联时，两线圈所产生的磁场相互减弱，则 Ψ_{21} 与 Ψ_{12} 应取负值，则 1、3 间的总磁通链数为

$$\Psi_{总}=\Psi_1-\Psi_{21}+\Psi_2-\Psi_{12}$$

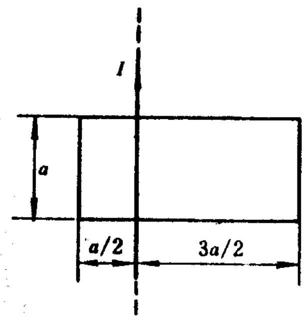
$$=(L_1+L_2-2M)I=LI$$

$$L_{反}=L_1+L_2-2M$$

14.25 一无限长直导线中通有电流 $I=I_0\sin\omega t$，有一绝缘的矩形线框与直导线共面，如图所示。试求：

(1)直导线与线框的互感系数；

(2)线框的互感电动势。



题 14.25 图

解 (1)在线框上取一平行于长直导线的细长条面元 $\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x$，通过 $\mathrm{d}S$ 的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_M=B\cdot\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}a\mathrm{d}x$$

由于矩形线框在导线左右两侧的磁通量部分抵消，只需计算导线右侧 $\frac{a}{2}$ 到 $\frac{3a}{2}$ 的磁通量，这也就是通过整个矩形线框的总磁通量

$$\Phi_M=\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}}\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln 3$$

故互感系数

$$M=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 3$$

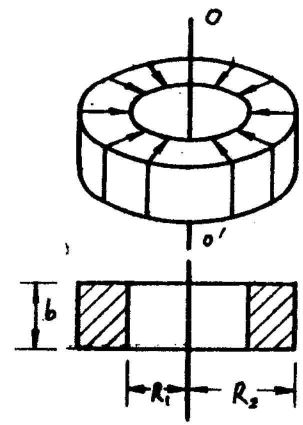
(2)线框中的互感电动势

$$\mathscr{E}_M=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 3\cdot I_0\omega\cos\omega t$$

$$=-\frac{\mu_0 a I_0\omega}{2\pi}\cos\omega t\cdot\ln 3$$

14.26 一矩形截面螺绕环($\mu_r=1$)，由细导线均匀密绕而成，内半径为 R_1，外半径为 R_2，高为 h，共 N 匝。在螺绕环的轴线上，另有一无限长直导线 oo'，如图所示，在螺线环内通以交变电流 $I=I_0\cos\omega t$，求当 $\omega t=\pi/4$ 时，在无限长直导线中的感应电动势 $\mathscr{E}_i$。

已知 $R_1=8\times10^{-2}\mathrm{m}$，$R_2=2.4\times10^{-2}\mathrm{m}$，$b=6\times10^{-2}\mathrm{m}$，$N=1000$ 匝，$I_0=5\mathrm{A}$，$\omega=100\pi\mathrm{rad/s}$。



题 14.26 图

解 先求互感系数。设在无限长直导线中通上电流 I_1，则在螺绕环中产生的磁通链数为

$$\Psi_M=N\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot b\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 N I_1 b}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

互感系数

$$M_{21}=\frac{\Psi_M}{I_1}=\frac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

因为

$$M_{12}=M_{21}=M$$

故当在螺绕环中通以交变电流 $I=I_0\cos\omega t$ 时，在长直导线中的感应电动势

$$\mathscr{E}_M=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\cdot I_0(-\omega)\sin\omega t$$

$$=\frac{\mu_0 NbI_0\omega}{2\pi}\sin\omega t\cdot\ln\frac{R_2}{R_1}$$

当 $\omega t=\frac{\pi}{4}$ 时，代入已知数据

$$\mathscr{E}_M=1.47\times10^{-2}\text{V}$$

14.27　**在玻尔氢原子模型中，电子绕原子核作圆周运动，圆轨道半径为 5.3×10^{-11}m，频率 $f=6.8\times10^{15}$1/s，问这轨道中心的磁场能量密度有多大？**

解　电子作圆周运动时等效于圆电流

$$I=q\cdot n=ef$$

在圆心处的磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1.6\times10^{-19}\times6.8\times10^{15}}{2\times5.3\times10^{-11}}$$

$$=12.9\text{T}$$

磁能密度为

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{12.9^2}{2\times4\pi\times10^{-7}}=6.62\times10^7\text{J/m}^3$$

14.28　**(1)地磁场的磁感应强度为 5.0×10^{-5}T。试问它的磁场能量密度有多大？**

(2)假设在比地球半径小得多的距离中，磁感应强度较为恒定，并且忽略地磁极附近的磁场变化。试问，从地球表面到表面上空16km 之间的球壳中贮藏了多大的磁场能量？($R_{地}=6.3\times10^6$m)。

解　(1)　$w_m=\dfrac{B^2}{2\mu_0}=\dfrac{(5\times10^{-5})^2}{2\times4\pi\times10^{-7}}=1.0\times10^{-3}\text{J/m}^3$

(2)近似认为在上述范围内 w_m 为恒值

$$W_m=\frac{4}{3}\pi[(R+h)^3-R^3]w_m\approx4\pi R^2h\cdot w_m$$

$$=4\pi\times(6.3\times10^6)^2\times16\times10^3\times1\times10^{-3}$$

$$=7.98\times10^{15}\text{J}$$

14.29　**利用高磁导率的铁磁体，能在实验室产生 $B=5000$Gs 的磁场。**

(1)求这磁场的能量密度 w_m。

(2)若要产生能量密度等于该值的电场，问电场强度 E 的值应为多少？这在实验上容易做到吗？

解　(1)　$w_m=\dfrac{B^2}{2\mu_0}=\dfrac{0.5^2}{2\times4\pi\times10^{-7}}=1.0\times10^5\text{J/m}^3$

(2)　$w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2=w_m$

$$E=\sqrt{\frac{2w_m}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{2\times1.0\times10^5}{8.85\times10^{-12}}}=1.5\times10^{8}\text{V/m}$$

显然，如此强的电场在实验上是很难实现的。