第一章　行列式

习题 1.1

1. 证明：（1）首先证明$Q(\sqrt{3})$是数域。

因为$Q\subseteq Q(\sqrt{3})$，所以$Q(\sqrt{3})$中至少含有两个复数。

任给两个复数$a_1+b_1\sqrt{3},a_2+b_2\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})$，我们有

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1\sqrt{3})+(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}\\&(a_1+b_1\sqrt{3})-(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{3}\\&(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1a_2+3b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\sqrt{3}\end{aligned}$$ 。

因为Q是数域，所以有理数的和、差、积仍然为有理数，所以

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1\sqrt{3})+(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})\\&(a_1+b_1\sqrt{3})-(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})\\&(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1a_2+3b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})\end{aligned}$$ 。

如果$a_2+b_2\sqrt{3}\neq 0$，则必有a_2,b_2不同时为零，从而$a_2-b_2\sqrt{3}\neq 0$。

又因为有理数的和、差、积、商仍为有理数，所以

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{3}}{a_2+b_2\sqrt{3}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2-b_2\sqrt{3})}{(a_2+b_2\sqrt{3})(a_2-b_2\sqrt{3})}=\frac{(a_1a_2-3b_1b_2)}{a_2^2-3b_2^2}+\frac{(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2-3b_2^2}\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})$$

。

综上所述，我们有$Q(\sqrt{3})$是数域。

（2）类似可证明$Q(\sqrt{p})$是数域，这儿p是一个素数。

（3）下面证明：若p,q为互异素数，则$Q(\sqrt{p})\not\subset Q(\sqrt{q})$。

（反证法）如果$Q(\sqrt{p})\subseteq Q(\sqrt{q})$，则$\exists a,b\in Q\Rightarrow\sqrt{p}=a+b\sqrt{q}$，从而有

$p=(\sqrt{p})^2=(a^2+qb^2)+2ab\sqrt{q}$。

由于上式左端是有理数，而$\sqrt{q}$是无理数，所以必有$2ab\sqrt{q}=0$。

所以有$a=0$或$b=0$。

如果$a=0$，则$p=qb^2$，这与p,q是互异素数矛盾。

如果$b=0$，则有$\sqrt{p}=a$，从而有“有理数=无理数”成立，此为矛盾。

所以假设不成立，从而有$Q(\sqrt{p})\not\subset Q(\sqrt{q})$。

同样可得$Q(\sqrt{q})\not\subset Q(\sqrt{p})$。

（4）因为有无数个互异的素数，所以由（3）可知在Q和$\Re$之间存在无穷多个不同的数域。

2. 解：（1）$P(\sqrt{-1})$是数域，证明略（与上面类似）。

（2）$Q(\sqrt{-1})$就是所有的实部和虚部都为有理数的复数所组成的集合。

而$\Re(\sqrt{-1})=C(\sqrt{-1})=$复数域。

（3）$Z(\sqrt{-1})$不是数域，这是因为他关于除法不封闭。例如$\dfrac{1}{2}\notin Z(\sqrt{-1})$。

3. 证明：(1) 因为F,K都是数域，所以$Q\subseteq F,Q\subseteq K$，从而$Q\subseteq F\cap K$。故$F\cap K$含有两个以上的复数。

任给三个数$a,b\in F\cap K,0\neq c\in F\cap K$，则有$a,b,c\in F$且$a,b,c\in K$。因为$F,K$是数域，所以有$a\pm b,ab,\dfrac{a}{c}\in F$且$a\pm b,ab,\dfrac{a}{c}\in K$。所以$a\pm b,ab,\dfrac{a}{c}\in F\cap K$。

所以$F\cap K$是数域。

（2）$F\cup K$一般不是数域。例如$F=Q(\sqrt{2}),K=Q(\sqrt{3})$，我们有$\sqrt{2},\sqrt{3}\in F\cup K$，但是$\sqrt{6}=\sqrt{2}\sqrt{3}\notin F\cup K$。

习题 1.2

2. 解：项$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$的符号为$(-1)^{\tau(234516)+\tau(312645)}=\cdots$

习题 1.3

1．证明：根据行列式的定义$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\overset{a_{ij}=1}{=\!=\!=}$

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = 0。$$

所以上式中(-1)的个数和(+1)的个数一样多，(-1)是由奇排列产生的，而(+1)是由偶排列产生的。同时根据行列式的定义这里包括了所有的n阶排列，故可以得到全体n阶排列中奇排列的个数与偶排列的个数一样多，各占一半。

2．解 (1) $$\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 1 \\ 2001 & 2002 & 1 \\ 2004 & 2005 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1998 & 1 & 1 \\ 2001 & 1 & 1 \\ 2004 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0；$$

（2）$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_4 + C_1}{\overset{C_3 - C_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{下三角形}}{=\!=\!=} 1\times2\times6\times8=96；$$

（3）$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_{24}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_3 + R_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_4 + R_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{上三角形}}{=\!=\!=} 1\times1\times1\times3=3；$$

（4）$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{R_1 + R_2 + R_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{提取公因子}}{=\!=\!=\!=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3 - (2c)R_1}{\overset{R_2 - (2b)R_1}{=\!=\!=\!=}} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-c-a & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3。$$

（5）$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{C_1 + \sum_{i=2}^{5} C_i}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 15 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 15 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 15 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 15 & 2 & 2 & 7 & 2 \\ 15 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} \underset{i=2,3,4,5}{\overset{R_i - R_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 15 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{上三角形}} 15\times5\times5\times5\times5=3\times5^5。$$

3．解：（1）$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{提取每行的公因子}} x_1x_2x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质4}} 0$。

（2）左端 $\xlongequal[i=4,3,2]{C_i-C_{i-1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3-C_2]{C_4-C_3}$

$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0=$右端。

（3）$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots n]{R_i-R_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{上三角形}} b_1b_2\cdots b_{n-1}$。

（4）原式（先依次 $C_n-C_{n-1},C_{n-1}-C_{n-2},\cdots,C_2-C_1$）=。。。$=\begin{cases}\cdots, & if \quad n=2 \\ \cdots, & if \quad n>2\end{cases}$。

（5）原式（先依次 $R_n-R_{n-1},R_{n-1}-R_{n-2},\cdots,R_2-R_1$）=。。。$=\begin{cases}\cdots, & if \quad n=2 \\ \cdots, & if \quad n>2\end{cases}$。

4．解：设展开后的正项个数为 x。则由行列式的定义有 $D=x-(n!-x)=2x-n!$。又因为

$D=$（利用 $R_i+R_1, i=2,3,\cdots,n$）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$（下三角行列式）$=2^{n-1}$。所以有

$2^{n-1}=2x-n!, x=\dfrac{2^{n-1}+n!}{2}$。

5．证明：（1）左端 $\xlongequal[\text{提取公因子}]{C_1+C_2+C_3} 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3-C_1]{C_2-C_1}$

$$2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \xlongequal[(-1)C_2;(-1)C_3]{C_1+C_2+C_3} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{右端。}$$

（2）利用性质 5 展开。

6．解：（3）与上面 3（3）类似可得。

7．解：利用行列式的初等变换及性质 5。

8．解：$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{C_{i+1}+C_i}$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{下三角形}} (-1)^n n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\text{。}$$

9．证明：设原行列式=D。则对 D 进行依次如下变换后 $10^4\times C_1, 10^3\times C_2, 100C_3, 10C_4, C_1+\sum_{i=2}^{5} C_i$ 所得的行列式 D′ 第一列由题设中所给的 5 个数字构成。从而由行列式的定义可知 D′ 可被 23 整除。又由行列式的性质知 D′ $=10^{10}D$。因为 23 是素数，且 10^{10} 不可能被 23 整除，所以 D 可以被 23 整除。

习题 1.4

1．解：(1) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第5行展开}} v\begin{vmatrix} x & a & b & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & e & z & 0 \\ g & h & k & u \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第4列展开}} vu\begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & y & 0 \\ 0 & e & z \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} xuv\begin{vmatrix} y & 0 \\ e & z \end{vmatrix} = xyzuv\text{；}$$

(2) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[i=4,3,2]{R_i-R_{i-1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&0\\1&1&-3&1\\1&-3&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{R_i-R_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&0\\0&-4&0&0\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第1列展开}}\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-4&0\\-4&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{习题1.2第7-(4)题}}(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}(-1)(-4)(-4)=16$；

(3)**方法一** $\begin{vmatrix}a&b&c&d&e\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\e&d&c&b&a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第1列展开}}a\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\d&c&b&a\end{vmatrix}$

$+(-1)^{5+1}e\begin{vmatrix}b&c&d&e\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2个行列式按第4列展开}}$

$a^2+e(-1)^{4+1}e\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2-e^2$；

方法二 逐次均按第 2 行展开可得同样结果，具体解法可参见下例。

(4)逐次按第 2 行展开 $\begin{vmatrix}a_1&0&0&\cdots&0&1\\0&a_2&0&\cdots&0&0\\0&0&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\1&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}=a_2\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&1\\0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=\cdots=$

$a_2a_3\cdots a_{n-1}\begin{vmatrix}a_1&1\\1&a_n\end{vmatrix}=a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1a_n-1)$；

(5) $\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&1\\x_1&x_2&0&0&0&x_3\\a_1&b_1&1&1&1&c_1\\a_2&b_2&x_1&x_2&x_3&c_2\\x_1^2&x_2^2&0&0&0&x_3^2\\a_3&b_3&x_1^2&x_2^2&x_3^2&c_3\end{vmatrix}\xlongequal{C_{36}}-\begin{vmatrix}1&1&1&0&0&0\\x_1&x_2&x_3&0&0&0\\a_1&b_1&c_1&1&1&1\\a_2&b_2&c_2&x_2&x_3&x_1\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&0&0&0\\a_3&b_3&c_3&x_2^2&x_3^2&x_1^2\end{vmatrix}\xlongequal{R_{35}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \end{vmatrix} \overset{R_{45}}{=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

$= -D(x_1, x_2, x_3)^2 = -(x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_2 - x_1)^2$；

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix} = D(1,2,-2,x) = (x+2)(x-2)(x-1)(-2-2)(-2-1)(2-1)$

$= 12(x-1)(x^2-4)$；

（7）换行后可得到范德蒙行列式;

（8）先把第一行加到第三行，再提取第三行的公因式，换行后可得到范德蒙行列式。

2．解：(1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{按第1列展开}}}$

$$(-1)^{1+1} x \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$= x^n + (-1)^{n+1} y^n$；

(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \underset{i=2,3,\cdots,n}{\overset{R_i - R_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 + \sum_{i=2}^{n} C_i}{=\!=}$

$=1+\sum_{i=1}^{n} a_i$；（此处有笔误）

(3) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

$$\underset{i=2,3,\cdots,n}{\overset{R_i - R_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n-x_1)y_1 & (x_n-x_1)y_2 & \cdots & (x_n-x_1)y_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix},$$

据此当$n=2$时，原式$=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$；当$n>2$时，原式$=0$。

3．解：（1）将D_n按第n 列展开得:

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & x \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} z & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$=(-1)^{n+1}yz^{n-1}+xD_{n-1}$。

（2）略（参考课本例中的叙述）。

4．解：（1）交换行、列后得到三角块行列式，然后利用例 1.4.6 的结果；或者直接利用 Laplace 定理。

（2）左端先做变换C_1+C_4, C_2+C_3，再做变换R_4-R_1, R_3-R_2，然后利用 P30 推论。

5．解：（1）$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & \vdots & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & \vdots & 4 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 4 & 9 & 7 & \vdots & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & \vdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{再分块}}{=\!=\!=} (-1)^{2\times 4}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 & \vdots & 9 & 7 \\ 5 & 3 & \vdots & 6 & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \vdots & 6 & 8 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=4$；

（2）$\begin{vmatrix}1&2&2&1\\0&1&0&2\\2&0&1&1\\0&2&0&1\end{vmatrix}\overset{C_{23}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&2&1\\0&0&1&2\\2&1&0&1\\0&0&2&1\end{vmatrix}\overset{R_{23}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&\vdots&2&1\\2&1&\vdots&0&1\\\cdots&\cdots&\vdots&\cdots&\cdots\\0&0&\vdots&1&2\\0&0&\vdots&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=9$；

（3）利用初等变换。

附加：P30 推论的证明：

证 (1) 将第 r+1 列与 r 列交换, 由将新的 r 列与 r-1 列交换, 如此继续, 直到将第 r+1 列交换到第 1 列, 这样共交换 r 次; 再将第 r+2 列如上方法交换至第 2 列, 也交换了 r 次, 如此继续直到将 r+s 列交换至第 s 列. 于是交换了 rs 次后得到

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}&c_{11}&\cdots&c_{1s}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}&c_{r1}&\cdots&c_{rs}\\0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1s}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&b_{s1}&\cdots&b_{ss}\end{vmatrix}=(-1)^{rs}\begin{vmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1rs}&a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{r1}&\cdots&c_{rs}&a_{r1}&\cdots&a_{rr}\\b_{11}&\cdots&b_{1s}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{s1}&\cdots&b_{ss}&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

将所得行列式的第 r+1 行依次与第 r 行, r-1 行, ……, 第 1 行交换. 交换 r 次后, r+1 行交换至第 1 行. 类似地交换 r 次后将 r+2 行交换至第 2 行, ……, 交换 r 次后将第 r+s 行交换至第 s 行, 于是交换 rs 次后得:

$$(-1)^{rs}(-1)^{rs}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1rs}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{r1}&\cdots&b_{rs}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1s}&a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{s1}&\cdots&c_{ss}&a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\overset{\text{例1.4.5}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1s}\\\vdots&&\vdots\\b_{s1}&\cdots&b_{ss}\end{vmatrix}$$

(2), (3) 思路与(1)类似, 证明过程略去。

习题 1.5

2．**解**：计算得 $D=\begin{vmatrix}1&0&\lambda&0\\2&0&0&-1\\\lambda&1&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}\overset{C_1+C_4}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&0&\lambda&0\\0&0&0&-1\\\lambda&1&0&0\\4&0&1&2\end{vmatrix}\overset{\text{第2行展开}}{=\!=\!=}(-1)\begin{vmatrix}1&0&\lambda\\\lambda&1&0\\4&0&1\end{vmatrix}$

$=4\lambda-1$

根据克拉默法则, 当 $D\neq 0$ 时, 即 $\lambda\neq\dfrac{1}{4}$ 时, 原方程组只有零解。

习题 1.6

1．证明：**方法一** 归化

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{R_i-R_n}$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & -a_n\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & -a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xlongequal[\text{注意}a_i\neq 0]{R_n+\sum_{i=1}^{n-1}-\frac{1}{a_i}R_i}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & -a_n\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & -a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a_n+a_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})=\text{右端}.$$

方法二 归纳法

当 $n=1$ 时，$D_1=1+a_1=a_1(1+\frac{1}{a_1})$. 结论成立.

假设 $n-1$ 时结论成立，即有 $D_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i})$.

则当 n 时，将 D_n 的第 n 列看成 1+0,1+0,……,1+a_n，故 D_n 可表示为 2 个行列式之和，而第 2 个行列式按第 n 列展开可算出为 a_nD_{n-1} 从而

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}+a_nD_{n-1}$$

而 $$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{R_i-R_n}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

所以 $D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_n\ a_1a_2\cdots a_{n-1}(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i})$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})=\text{右端}.$$

方法三 递推

由证明(二)可知 D_n 与 D_{n-1} 存在以下递推关系: $D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$

所以 $D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_n(\frac{1}{a_n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_{n-1}}{a_i})=\cdots=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$

=右端.

方法四 加边法

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\overset{C_i-C_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n+1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\overset{R_1+\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{a_i}R_i}{=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})=\text{右端。}$$

2．证明：（1）注意当把行列式按第 n 列展开时，得到的递推公式中有三项，故归纳法第一步应验证 n=1，2 时均成立。而归纳法第二步应假设当 $n<k(k\ge 3)$ 时成立，去证明当 n=k 时成立。

3．解：（2）先把除第一列外的所有列都加到第一列，然后提出第一列的公因子；再依次 $R_1-R_2,R_2-R_3,\cdots,R_{n-1}-R_n$；然后按第一列展开，再依次 $C_i-C_1,i>1$；最后按最后一列展开。

4．解：通过倍加行变换易知 f(x)的次数最大为 1；又因为如果 a_{ij} 全取零，则有 f(x)=0。所以选(D)。

5．看自己或别人的作业。

6．解：方法一：利用课本中例 1.4.3 的方法。

方法二：设 $f(x)=D(x_1,x_2,\cdots,x_n,x)$。则有 f(x)中 x^{n-1} 的系数为 D_n。又因为

$f(x)=\prod_{?}(x-x_i)\prod_{?}(x_i-x_j)$（范德蒙行列式），所以 f(x)中 x^{n-1} 的系数为。。。

所以可得 $D_n=\cdots$。

第二章 线性方程组

习题 2.1

2．证明. 因 $|A|\neq 0$，说明 $a_{11}\quad a_{12}\quad \dots\quad a_{1n}$ 不全为零,故当某个 $a_{k1}\neq 0$，通过适当的行互换,可使得 a_{k1} 位于左上角,用 a_{k1}^{-1} 来乘第一行,然后将其余行减去第一行的适当倍数,矩阵A 可以化为: $\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & \dots & a_{1n}' \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$，由于 $|A|\neq 0$，此时必有 $|A_1|\neq 0$，故可以对 A_1 重复对A的讨论, 此时A可经初等行变换化为 $\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' & \dots a_{1n}' \\ 0 & 1 & a_{23}' & \dots a_{2n}' \\ 0 & 0 & 1 & \dots a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 1 \end{bmatrix}$, 然后再将第 n 行的 $-a_{in}'$ 倍加到第 i 行($i=1,2,...,n-1$),再将第 $n-1$ 行的 $-a_{i(n-1)}'$ 倍加到第 i 行($i=1,2,...,n-2$),这样继续下去,一直到将第2行的 $-a_{12}'$ 倍加到第1行,此时A就化为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 故所证结论成立。

3．证明：以行互换 R_{ij} 为例: 列互换可以同样证明.

若 $A=\begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_j+(-1)R_i} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}-a_{i1} & a_{j2}-a_{i2} & \cdots & a_{jn}-a_{in} \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_i+R_j} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}-a_{i1} & a_{j2}-a_{i2} & \cdots & a_{jn}-a_{in} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_j+(-1)R_{ii}} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{(-1)R_{ji}} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$, 这相当于 A 中交换第 i 行和第 j 行, 所以结论成立。

习题 2.2

1. 解：A 中一定存在不为零的 $r-1$ 阶子式,否则秩 $(A)<r-1$,与题设秩（A）$=r$ 矛盾. 由秩（A）$=r$ 知，A 中至少存在一个 r 阶子式不为零, 这表明 A 中的 r 阶子式只要有一个不为零即可,其余可以等于零,也可以不等于零. A 中一定不存在不为零的 $r+1$ 阶子式, 否则 A 的秩至少是 $r+1$, 这也与题设秩（A）$=r$ 矛盾。
2. 提示：利用矩阵的行秩和向量的极大无关组证明。
3. 略。
4. 思路：可将矩阵写成一个列向量和一个行向量的乘积，从而由秩 ≤ 1；进而因为矩阵不等于零，所以秩〉0。
5. 略。

习题 2.3

略。

习题 2.4

2．证明：(I)的增广矩阵为$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$,

因为系数矩阵的秩不超过增广矩阵的秩, 所以有秩($\overline{A}$)$\geq$秩(A).

观察可知, 矩阵B其实就是在增广矩阵$\overline{A}$下面加了一行, 所以秩(B)$\geq$秩($\overline{A}$). 由题意知, 秩(A)=秩(B), 据此可得秩(A)$\geq$秩($\overline{A}$). 综上知秩($\overline{A}$)=秩(A), 故(I)有解。

3．解：将增广矩阵只用初等行变换化为阶梯形矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \vdots & b_1 \\ & 1 & -1 & & & & \vdots & b_2 \\ & & 1 & -1 & & & \vdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -1 & \vdots & b_{n-1} \\ -1 & & & & & 1 & \vdots & b_n \end{bmatrix} \xrightarrow{R_n+R_1+\cdots+R_{n-1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \vdots & b_1 \\ & 1 & -1 & & & & \vdots & b_2 \\ & & 1 & -1 & & & \vdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -1 & \vdots & b_{n-1} \\ & & & & & 0 & \vdots & b_1+b_2+\cdots+b_n \end{bmatrix}$$

当$b_1+b_2+\cdots+b_n\neq 0$时, 秩(A)$\neq$秩($\overline{A}$), 所以线性方程组无解;

当$b_1+b_2+\cdots+b_n=0$时, 秩(A)=秩($\overline{A}$)<未知量个数, 所以线性方程组有无穷多解.

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1-x_2=b_1, \\ x_2-x_3=b_2, \\ x_3-x_4=b_3, \\ \qquad\vdots \\ x_{n-1}-x_n=b_{n-1}. \end{cases}$

故通解为$\begin{cases} x_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + t, \\ x_2 = b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + t, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = b_{n-1} + t, \\ x_n = t. \end{cases}$ 其中t为任意常数。

4．证明：该线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & \vdots & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \vdots & a_{2,n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,n-1} & \vdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，由题意$D=\left|a_{ij}\right| \neq 0$知

秩($\overline{A}$)=n. 但是系数矩阵A是一个$n\times(n-1)$的矩阵, 所以秩(A)$\leq n-1<$秩($\overline{A}$). 据此秩(A)$\neq$秩($\overline{A}$), 所以该线性方程组无解。

第三章 矩阵

习题 3.1

4．解：（1） 由矩阵乘法运可得：

$$DA=\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{bmatrix}; \quad AD=\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{bmatrix}。$$

（2）与 D 乘法可换的矩阵A满足$DA=AD$。故DA与AD的元素对应相等，利用（1）的结果，有$\lambda_i a_{ij}=\lambda_j a_{ij}$，从而$(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0$。由于$\lambda_i \neq \lambda_j$（$i \neq j$），可得：当$i \neq j$时，$a_{ij}=0$，即$A$为对角矩阵。

5．证明：（1）数学归纳法：当$n=2$时，计算得$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，故结论成立.

假设当$n=k$时，结论成立，即有$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} 1 & k & C_k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

则当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1&k&C_k^2\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k+1&k+C_k^2\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

因$C_k^2+k=\dfrac{k(k-1)}{2}+k=\dfrac{k(k+1)}{2}=C_{k+1}^2$所以$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1&k+1&C_{k+1}^2\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}$，即当$n=k+1$时，结果成立．由归纳法原理知，对任意大于 2 得正整数n有$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}1&n&C_n^2\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$.

（2）当$n=1$时，结果显然成立．当$n=2$时，直接计算得$B^2=E$.

假设当$n=k$时，结果成立，即$B^k=\begin{cases}E, & \text{k为偶数；}\\ B, & \text{k为奇数；}\end{cases}$．我们要证明当$n=k+1$时，结果也成立，即可完成证明.

第一种情况：k 为奇数，则

$$B^{k+1}=B^kB=BB=\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&-2\\0&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&-2\\0&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E\quad.$$

第二种情况：k 为偶数，则

$$B^{k+1}=B^kB=EB=B.$$

综上：$B^{k+1}=\begin{cases}E, & \text{k+1为偶数；}\\ B, & \text{k+1为奇数；}\end{cases}$即当$n=k+1$时，结论成立.

6．解：（1）先计算出$n=1,2,3,4$时的结果。然后归纳出应该有$\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{bmatrix}$，接下来用数学归纳法证明这一归纳出的结果。

当n=1时，结论显然成立.

假设当$n=k$时，结论成立，即$\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\varphi&-\sin k\varphi\\\sin k\varphi&\cos k\varphi\end{bmatrix}$.

则当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos k\varphi&-\sin k\varphi\\\sin k\varphi&\cos k\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos k\varphi\cos\varphi-\sin k\varphi\sin\varphi & -\cos k\varphi\sin\varphi-\sin k\varphi\cos\varphi \\ \sin k\varphi\cos\varphi+\cos k\varphi\sin\varphi & -\sin k\varphi\sin\varphi+\cos k\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(k\varphi+\varphi) & -\sin(\varphi+k\varphi) \\ \sin(\varphi+k\varphi) & \sin(\varphi+k\varphi) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi \\ \sin(k+1)\varphi & \sin(k+1)\varphi \end{bmatrix}.$$

结论成立.

7．记住结论。

8．证明：因为 A 与所有 n 阶方阵乘法可换，故与 E_{ij} 乘法可换，利用第 7 题结果有

$$AE_{ij}=E_{ij}A\text{，即}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array}\end{array}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_{ii}=a_{jj} \\ a_{ij}=0 \end{cases},\forall i,j=1,2,\cdots n\text{. 设 }a_{11}=\lambda\text{，则 }A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda E,$$

即 A 为数量矩阵.

10．证明：设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} \\ +a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} \\ \vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots \\ +a_{m1}b_{1m}+a_{m2}b_{2m}+\cdots+a_{mn}b_{nm}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij} \end{aligned}$$

同理可得 $\mathrm{tr}(BA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}$

由于 $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}$，可得 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

11．证明：假如存在 n 阶方阵满足 $AB-BA=E$，则

$$AB=BA+E\Rightarrow\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA+E)=\mathrm{tr}(BA)+n.$$

由于 $n\neq 0$，可得 $\mathrm{tr}(AB)\neq\mathrm{tr}(BA)$，这与 10 题所得结果矛盾.

所以假设不成立. 即不存在 n 阶方阵 A，B 满足 $AB-BA=E$.

15. 证明：因 A，B 都是对称矩阵，故 $(AB)^T=B^TA^T=BA$，从而

AB 为对称矩阵 $\Leftrightarrow (AB)^T=AB\Leftrightarrow BA=AB$.

16. 证明：设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$，则 $A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$.

由 $A^TA=O\Rightarrow A^TA$ 的主对角线上元素为零

$\Rightarrow {a_{1i}}^2+{a_{2i}}^2+\cdots {a_{mi}}^2=0,\forall i=1,2,\cdots n$，由 a_{ij} 为实数知

$\Rightarrow a_{1i}=0,a_{2i}=0,\cdots a_{mi}=0,\forall i=1,2,\cdots n$

$\Rightarrow A=O$.

证法二：利用二次型。

习题 3.2

4. 思路：注意到矩阵多项式的运算和一般多项式的运算一样就可以了。

证明：计算 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k$，由题意可知 $A^k=O$，所以 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E$. 根据定理 3.2.1 的推论可知 $E-A$ 可逆且其逆为 $E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

5. 证明：计算

$$(E-J_n)\ (E-\frac{1}{n-1}J_n)=E^2-J_nE-\frac{1}{n-1}EJ_n+\frac{1}{n-1}{J_n}^2$$
$$=E-\frac{n}{n-1}J_n+\frac{1}{n-1}{J_n}^2=E-\frac{1}{n-1}(nE-J_n)J_n$$

计算 $(nE-J_n)J_n=\begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=O$

据此 $(E-J_n)\ (E-\frac{1}{n-1}J_n)=E-\frac{1}{n-1}(nE-J_n)J_n=E$，根据定理 3.2.1 的推论可知 $E-J_n$ 可逆且其逆为 $E-\frac{1}{n-1}J_n$.

6．证明：因为$a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = O$所以有

$A(a_m A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_1) = -a_0 E$．由题意可知$a_0 \neq 0$，所以可在等式两边同乘上$-\frac{1}{a_0}$，由此可得$-\frac{1}{a_0}A(a_m A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_1) = E$，整理得$A[-\frac{1}{a_0}(a_m A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_1)] = E$，根据定理 3.2.1 的推论可知$A$可逆且$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_m A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_1)$.

7．证明：(1) 由题意$A^2 + A - 4E = O$可得$A[\frac{1}{4}(A+E)] = E$，根据定理 3.2.1 的推论可知A可逆并且$A^{-1} = \frac{1}{4}(A+E)$.

(2) 由题意$A^2 + A - 4E = O$可得$A^2 + A - 2E = 2E$，而这个等式可化为$(A-E)(A+2E) = 2E$，即有$(A-E)[\frac{1}{2}(A+2E)] = E$，同样根据定理 3.2.1 的推论可知$A-E$可逆并且$(A-E)^{-1} = \frac{1}{2}(A+2E)$.

8．思路：注意题设实际上是给出了矩阵多项式$f(A) = A^2 - A = 0$。所以一般情况下，$2E - A$如果可逆，其逆矩阵也应该是一个矩阵多项式。所以我们可以假设其逆矩阵为$aA + bE$（待定系数法），从而由逆矩阵定义知应该有$(2E - A)(aA + bE) = E$，即$-aA^2 + (2a-b)A + 2bE = E$。在注意到题设是$f(A) = A^2 - A = 0$，所以我们有$E = -aA^2 + (2a-b)A + 2bE = -aA + (2a-b)A + 2bE = (a-b)A + 2bE$，所以有$a - b = 0, 2b = 1$，即$a = b = \frac{1}{2}$。

证明：因为$A^2 = A$，所以$(2E - A)\frac{A+E}{2} = \cdots = E$。所以。。。

9．证明：(1) $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1} = \frac{1}{3}$；

(2) 由于$AA^* = \left|A\right|E$，所以$A^* = \left|A\right|A^{-1} = 3A^{-1}$，由此可得$\left|A^*\right| = \left|3A^{-1}\right| = 3^3\left|A^{-1}\right|$
$= 27 \times \frac{1}{3} = 9$；

(3) $\left|-2A\right| = (-2)^3\left|A\right| = -8 \times 3 = -24$；

(4) $\left|(3A)^{-1}\right| = |3A|^{-1} = (3^3|A|)^{-1} = (3^3 \times 3)^{-1} = \dfrac{1}{81}$；

(5) 由(2)中分析可知 $A^* = 3A^{-1}$，所以 $\left|\dfrac{1}{3}A^* - 4A^{-1}\right| = \left|\dfrac{1}{3}(3A^{-1}) - 4A^{-1}\right| = \left|-3A^{-1}\right|$

$= (-3)^3\left|A^{-1}\right| = -27 \times \dfrac{1}{3} = -9$；

(6) 由(2)中分析可知 $A^* = 3A^{-1}$，则 $(A^*)^{-1} = (3A^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{3}(A^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{3}A$。

10．证明：A, B 都可逆，所以有 $AA^* = |A|E, BB^* = |B|E$，由此可知 $A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1}$，从而得到 $B^*A^* = |A||B|B^{-1}A^{-1}$.

另一方面，由于 A, B 都可逆且均为 n 阶方阵，所以 AB 也可逆，所以有 $(AB)^* = |AB|(AB)^{-1}$，而 $|AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1}$.

综合上述可得 $(AB)^* = |A||B|B^{-1}A^{-1} = B^*A^*$.

11．略。

12．证明：假设 A 是可逆矩阵，那么在等式 $A^2 = A$ 两边都左乘 A 的逆矩阵 A^{-1} 可得 $A = E$，这与题设中 $A \neq E$ 矛盾！所以 A 不可逆.

13．证明：根据题意可知存在非零的 n×t 矩阵 B 使 AB=0，B 是非零矩阵所以必存在某一列上的元素不全为零，不妨设这一列为 $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$. 由于 $AB = O$，所以 $A\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，据此可知 $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ 是线性方程组 $AX = O$ 的一个非零解. 由于 $AX = O$ 有非零解，所以 $|A|$=0.

14．略。

15．解：(A) 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ 而不是 $A \neq O$，设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$，但 A 不是可逆矩阵，所以选项(A)是错误的.

(B) 设 $A = E, B = -E$，显然 A, B 都是可逆的，但是 $A + B = O$ 不是可逆矩阵，所以选项(B)是错误的.

(C) 可逆的充要条件是$|A| \neq 0$而$|A| = |A^T|$. 所以选项(C)是正确的.

(D) 不可逆的充要条件是$|A| = 0$；而$|A|$中至少有一行全为零只是$|A| = 0$的充分条件。

设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，但$A$不是可逆矩阵，所以选项(D)是错误的.

习题 3.3

1．解：

(1) 设$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，则原式可以分块写成

$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$，利用分块矩阵的性质计算得$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC & O \\ O & BD \end{bmatrix}$

而$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$， $CD = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$，据此可

得$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC & O \\ O & BD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 设$A = 2E, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$则原式可

以分块写成$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ G \end{bmatrix}$，利用分块矩阵的性质计算得$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD + BG \\ CG \end{bmatrix}$

而

$$AD + BG = 2ED + BG = 2D + BG = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

，

$$CG = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

据此可得$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AD+BG \\ CG \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2．解：(1) $A^{-1}\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_n & A^{-1} \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix} AA^{-1} \\ E_nA^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_n \\ A^{-1} \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} A^{-1} \\ E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}E_n \\ E_nA & E_n^{\ 2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_n & A^{-1} \\ A & E_n \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^2 & A \\ A & E_n \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} A & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix}=A^2+E_n$。

3．证明：(1)　先证“$\Rightarrow$”，当Q可逆时，则必有$|Q|\neq 0$．而$|Q|=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{rt}|A||B|$，

所以有$|A||B|\neq 0$，从而有$|A|\neq 0,|B|\neq 0$，因此A,B均可逆.

再证“$\Leftarrow$”，　A,B均可逆，则有$|A|\neq 0,|B|\neq 0$，所以有$|A||B|\neq 0$，而

$|Q|=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{rt}|A||B|$，所以$|Q|\neq 0$，据此可知$Q$可逆.

综上即有 Q 可逆$\Leftrightarrow$A，B 均可逆.

(2) 设$Q^{-1}=\begin{bmatrix} C & D \\ F & G \end{bmatrix}$，则有$QQ^{-1}=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & \\ & E \end{bmatrix}$

而$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \\ F & G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AF & AG \\ BC & BD \end{bmatrix}$，所以有$\begin{cases} AF=E \\ AG=O \\ BC=O \\ BD=E \end{cases}$，因为$Q$可逆，由(1)可知必

有A,B可逆，所以由$AG=O$，$BC=O$可得$G=C=O$．而由$AF=E$，$BD=E$

可得$F=A^{-1},D=B^{-1}$．所以$Q^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

5．解：(1) 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则原矩阵为$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$．而

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

因为$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=-\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，所以可得

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

习题 3.4

4．解：(1) A 中i行与j行互换相当于用初等矩阵$E(i,j)$左乘A得到$E(i,j)\ A$．由于$(A^{-1}E(i,j)^{-1})(E(i,j)A)=E$，而$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，所以相当于$A^{-1}$右乘了初等矩阵$E(i,j)$，即$A^{-1}$中的$i$列与$j$列互换.

(2) A 中i行乘上非零数k相当于用初等矩阵$E(i(k))$左乘A得到$E(i(k))\ A$．由于$(A^{-1}E(i(k))^{-1})(E(i(k))A)=E$，而$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，所以相当于$A^{-1}$右乘了初等矩阵$E(i(\frac{1}{k}))$，即$A^{-1}$中$i$行乘上非零数$\frac{1}{k}$.

(3) A 中第j行乘上数k加到第i行相当于用初等矩阵$E(i+j(k),j)$左乘A得到$E(i+j(k),j)\ A$．由于$(A^{-1}E(i+j(k),j)^{-1})(E(i+j(k),j)A)=E$，而$E(i+j(k),j)^{-1}=E(i+j(-k),j)$，所以相当于$A^{-1}$右乘了初等矩阵$E(i+j(-k),j)$，即$A^{-1}$中第$j$行乘上数$-k$加到第$i$行.

7．解：由于$A(E-C^{-1}B)^TC^T=E$，所以$A[E^T-(C^{-1}B)^T]C^T=E$，即有

$A[E^T C^T - B^T (C^{-1})^T C^T] = E$，变形得 $A[C^T - B^T (CC^{-1})^T] = E$，从而有 $A(C^T - B^T) = E$.

而 $C^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，显然是可逆矩阵. 所以只需要求出 $(C^T - B^T)^{-1}$ 即得到 A.

下面只用初等行变换把 $\begin{bmatrix} C^T - B^T & E \end{bmatrix}$ 化为 $\begin{bmatrix} E & A \end{bmatrix}$ 即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

从而得到 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$。

习题 3.5

1. 证明：设 A 为秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵，则它必与矩阵 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n}$ 等价，所以必存在两个可逆矩阵 P, Q 使得 $A = P \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n} Q$ 成立. 而 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n}$ 可以写成 r 个只有一个元素为 1 其余为零的 $m \times n$ 矩阵的和的形式：

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m \times n} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m \times n} + \cdots$$

$$+\begin{bmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&1&&\\&&&&0&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}+\begin{bmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&1&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

所以有 $A=P\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n}Q$

$$=P(\begin{bmatrix}1&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&0&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}+\cdots+\begin{bmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&1&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n})Q$$

$$=P\begin{bmatrix}1&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&0&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}Q+\cdots+P\begin{bmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&1&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}Q$$

这样 A 就表示成了 r 个矩阵之和的形式．而任一个 $P\begin{bmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&0&\\&&&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}Q$，由于中间那个矩阵只有一个元素非零，所以其秩为 1，而 P,Q 可逆，所以三个矩阵的积的秩仍然为 1．这样 A 就表示成了 r 个秩为 1 的矩阵之和了．

2．解：设 $A_1=\begin{bmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}$，$A_2=\begin{bmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&O_{m-r,n-r}\end{bmatrix}_{m\times n}$，

$$\cdots, A_r = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

显然 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的秩都是 1，但是他们的和 $A=\begin{bmatrix} r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}_{m\times n}$ 的秩是 1 而不是 r．所以该逆命题不成立.

5．证明：因为 A 列满秩，所以存在可逆矩阵 P,Q 使得 $A=P\begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}$，所以 $P^{-1}A=\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}$。进而有 $\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \end{bmatrix}P^{-1}A=E_n$。所以令 $C=\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$ 即可。

7．证明：（1）因为 $r(AB)\le r(A)\le n<m$，所以结论成立。

（2）由（1）知 AB 不满秩，所以不可逆。

（3）略。

8．证明：因为 $AB=E_m$，所以 $m=r(AB)\le r(A)\le m$。所以 $r(A)=m$。同理有 $r(B)=m$。

9．解：设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

计算得 $AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=O, ACB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

显然秩（ACB）=1，秩（AB）=0，两者不相等．所以秩（ACB）与秩（AB）不一定相等.

10．解：设秩（A）＝r_1，秩（B）=r_2，则存在四个可逆矩阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2 使得

$A=P_1\begin{bmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{bmatrix}Q_1$，$B=P_2\begin{bmatrix} E_{r_2} & O \\ O & O \end{bmatrix}Q_2$ 成立．令 $M=Q_1^{-1}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{bmatrix}P_2^{-1}$，首先因为 $Q_1^{-1},\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{bmatrix},P_2^{-1}$ 都是可逆矩阵，所以 M 也是可逆的．又因为秩（A）+秩（B）

$\leqslant$n，即 $r_1+r_2\leqslant$n，所以 $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 的前 r_1 行 r_2 列构成的块是一个零块，因此

$\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 可以写成下面这个形式 $\begin{bmatrix} O_{r_1\times r_2} & A \\ B & C \end{bmatrix}$.

计算 $$AMB=P_1\begin{bmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{bmatrix}Q_1(Q_1^{-1}\begin{bmatrix} O_{r_1\times r_2} & A \\ B & C \end{bmatrix}P_2^{-1})P_2\begin{bmatrix} E_{r_2} & O \\ O & O \end{bmatrix}Q_2$$

$$=P_1\begin{bmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_{r_1\times r_2} & A \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{r_2} & O \\ O & O \end{bmatrix}Q_2=O$$

所以存在可逆矩阵 M 使得 $AMB=O$.

习题 3.6

1．解：(1) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，易知 $|A|=0$，但 $A\neq O$，所以(1)不一定成立.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},k=2$，易得 $|kA|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4,k|A|=2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$，此时 $|kA|\neq k|A|$，所以(2)不一定成立.

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，易得 $\left|\frac{1}{|A|}A\right|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 1,$ 所以(3)不一定成立.

(4) 设 $A=E,B=-E$，易得 $|A+B|=|O|=0,\ |A|+|B|=2$，此时 $|A+B|\neq|A|+|B|$，所以(4)不一定成立.

(5) (6)都是课本中提及的性质，是成立的.

(7) $|(AB)^T|=|B^TA^T|=|B^T||A^T|=|A^T||B^T|$，所以(7)成立.

2．解：(1) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$|AA^T|=\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,\ |A^TA|=\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

显然此时 $|AA^T|\neq|A^TA|$，所以该项不一定成立.

(2) 设 $A=C=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},B=D=\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}$，则 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&0&1\\2&2&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

计算得 $|A||D|-|B||C|=1\times1-2\times2=-3$，而 M 中由于第二第四两行相同，所以 $|M|=0$. 因此此时 $|M|\neq|A||D|-|B||C|$，所以此项不一定正确.

(3) $M^T=\begin{bmatrix}A^T&C^T\\B^T&D^T\end{bmatrix}$，所以 $M^T=\begin{bmatrix}A&C\\B&D\end{bmatrix}$ 不正确.

(4) $\left|\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}\right|=(-1)^{n^2}|A||B|$，所以 $\left|\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}\right|=-|A||B|$ 不正确.

(5) 因为 A，B 为可逆矩阵，所以方程两边同左乘 A^{-1}，再右乘 B^{-1} 即得 $X=A^{-1}CB^{-1}$. 所以是正确的.

(6) 因为 $\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{bmatrix}_{n\times n}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{R_i-iR_1}\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}$，所以

秩($\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{bmatrix}_{n\times n}$)=1=秩($\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}$)，因此这两个矩阵等价.

3．证明：(1) 因为秩($A_{m\times n}$)=r，所以 A 与 $\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n}$ 等价，即存在两个可逆矩阵 $P_{m\times m},Q_{n\times n}$ 使得 $A=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n}Q_{n\times n}$，令 $B=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n},C=\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{n\times n}Q_{n\times n}$，因为 $P_{m\times m},Q_{n\times n}$ 是可逆的而 $\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n},\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{n\times n}$ 的秩都为 r，所以秩（B)=秩(C)=r. 并且 B 是 $m\times n$ 的，C 是 $n\times n$ 的. 而且计算可得

$$BC=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{n\times n}Q_{n\times n}=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r&O\\O&O\end{bmatrix}_{m\times n}Q_{n\times n}=A.$$

(2) 只需令 $D=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times m}$, $F=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}Q_{n\times n}$，同(1)分析可知这样构造得到的 $D_{m\times m},F_{m\times n}$ 即为所需的两个矩阵.

(3) 只需令 $R=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r\\ O\end{bmatrix}_{m\times r}$, $S=\begin{bmatrix}E_r & O\end{bmatrix}_{r\times n}Q_{n\times n}$，同(1)分析可知这样构造得到的 $R_{m\times r},S_{r\times n}$ 即为所需的两个矩阵.

4．记住此结论。

5．证明：因为 $r(AB)+r(BC)\le r(B)+r(ABC)$，所以由题设 $r(AB)=r(B)$ 知 $r(BC)\le r(ABC)$。又因为 $r(ABC)\le r(B)$，所以 $r(ABC)=r(B)$。

第四章　线性空间和线性变换

习题 4.1

2．记住此结论。

习题 4.2

10．证明：设 $t_1,t_2,\cdots,t_s\in P$ 使得 $t_1\beta_1+t_2\beta_2+\cdots+t_s\beta_s=0$，则有

$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{s-1}\alpha_{s-1}+(t_1k_1+t_2k_2+\cdots+t_{s-1}k_{s-1}+t_s)\alpha_s=0$。

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以 $t_1=t_2=\cdots=t_{s-1}=t_1k_1+\cdots+t_{s-1}k_{s-1}+t_s=0$。所以 $t_1=t_2=\cdots=t_s=0$。

习题 4.3

3．证明：设向量组(I)、(II)的极大无关组分别为(III)、(IV)。则有(I)与(III)等价，(II)与(IV)等价。所以(III)能用(I)线性表示，(II)能用(IV)线性表示。因为(I)能用(II)线性表示，所以(III)能用(IV)线性表示。因为(III)线性无关，所以(III)中所含向量的个数≤(IV)中所含向量的个数，即秩(I)≤秩(II)。

4．证明：由题设易知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ 线性表示，下面只需证明 α_r 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 线性表示即可。

因为 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ 线性表示，所以存在数 $k_1,\cdots,k_{r-1},k_r$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r\alpha_r$。因为 β 不能经 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示，所以 $k_r\neq 0$。

所以 $\alpha_r=-\dfrac{1}{k_r}(k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}-\beta)$，即 α_r 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 线性表示。

5. 证明：因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha\ \ ,\beta,\gamma$ 线性相关，所以存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_{s-1},k_s,r,t$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r\alpha_r+r\beta+t$。下面分情况对 r,t 是否为零进行讨论（四种情况）。略。

6. 证明：(1) 因为 α_2, α_3, α_4 线性无关，所以 α_2, α_3 必线形无关，又因为 α_1, α_2, α_3 线性相关，所以 α_1 能经 α_2, α_3 线性表示，并且表示方法唯一.

(2) 若 α_4 能经 α_1, α_2, α_3 线性表示，不妨设表达式为 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，根据 (1) α_1 能经 α_2, α_3 线性表示，不妨设表达式为 $\alpha_1=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，把 α_1 带入到 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 中得

$$\alpha_4=k_1(t_1\alpha_2+t_2\alpha_3)+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=(k_1t_1+k_2)\alpha_2+(k_1t_2+k_3)\alpha_3$$

即有 $\alpha_4-(k_1t_1+k_2)\alpha_2-(k_1t_2+k_3)\alpha_3=O$，从而得到 α_2, α_3, α_4 线性相关，这与题意中 α_2, α_3, α_4 线性无关矛盾！所以 α_4 不能经 α_1, α_2, α_3 线性表示.

习题 4.4

3. 解：由 $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&3&2\\-1&0&-1&1\\-2&1&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&1&0\\0&0&2&2\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$,

可得秩($\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$)=4，这四个向量线性无关，所以该向量组是 P^4 中的一组基.

因为 $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \vdots & \alpha\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1&\vdots&7\\0&-1&1&0&\vdots&0\\0&0&1&1&\vdots&3\\0&0&0&1&\vdots&4\end{bmatrix}$,

所以方程组$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix} X=\alpha$的解为$\begin{cases} x_1=6, \\ x_2=-1, \\ x_3=-1, \\ x_4=4. \end{cases}$

所以向量α在该基下的坐标为$\begin{bmatrix}6, & -1, & -1, & 4\end{bmatrix}^T$。

4．解：(1)由$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \vdots & \alpha_1'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1\end{bmatrix}$

可知$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix} X=\alpha_1'$的解为$\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-1, \\ x_3=1. \end{cases}$所以$\alpha_1'=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

同样可计算得 $\alpha_2'=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；$\alpha_3'=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$. 所以从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

(2) $X'=M^{-1}X=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$, 所以坐标为$\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}, & \frac{5}{3}, & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$。

8．解：因为$\begin{bmatrix}2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，所以秩($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$)=4, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可作为$P^4$的一组基.

设向量$\alpha=\begin{bmatrix}a, & b, & c, & d\end{bmatrix}^T$, 则它在常用基下的坐标为$\begin{bmatrix}a, & b, & c, & d\end{bmatrix}^T$. 则有

$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a \\ b \\ c \\ d\end{bmatrix}=\alpha$，即要求$\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}-E\right)\begin{bmatrix}a \\ b \\ c \\ d\end{bmatrix}=O$.

求解方程组$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}-E\right)X=O$得解为$X=[k, \quad k, \quad k, \quad -k]^T$，所以所求的向量$\alpha=[k, \quad k, \quad k, \quad -k]^T$（$k$为任意值）.

习题 4.5

1，2．思路：验证 3 条。

5．思路：即证α,β与β,γ等价。

习题 4.6

2．思路：即说明这是解空间的一组基。

4．思路：注意要指出齐次线性方程组的基础解系只含有一个向量。

7．证明：(1) 因为$AB=O$，所以秩（A）+秩（B）$\le n$，由于秩（B）=n，所以秩（A）≤ 0，由此秩（A）=0，即得$A=O$.

(2) 由题意知$AB=B$，所以$(A-E)B=O$，利用(1)可知$A-E=O$，因此$A=E$.

9．证明：先证必要性，根据等价标准形可知存在矩阵$R_{m\times 1}, S_{1\times n}$，秩（$R$）=秩（$S$）=1，使$A=RS$．令$a_1,a_2,\cdots,a_m$为$R$的$m$个分量，$b_1,b_2,\cdots,b_n$为$S$的$n$个分量，则因为秩（$R$）=秩（$S$）=1 所以$a_1,a_2,\cdots,a_m$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都不全为零．同时因为$A=RS$即得$a_{ij}=a_ib_j$（$i$=1, 2, ⋯, m；j =1, 2, ⋯, n）成立.

再证充分性，根据题意存在m个不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_m$及 n 个不全为零的数$b_1,b_2,\cdots,b_n$使$a_{ij}=a_ib_j$（i=1, 2, ⋯，m；j =1, 2, ⋯，n）．只需令$B=[a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_m]^T$, $C=[b_1, \quad b_2, \quad \cdots, \quad b_n]$，则$[a_{ij}]_{m\times n}=BC$．因为秩（$[a_{ij}]_{m\times n}$）$\le$秩（$B$）$\le 1$，又由于$a_1,a_2,\cdots,a_m$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都不全为零，所以$[a_{ij}]_{m\times n}$中必有一非零元素，因此秩（$[a_{ij}]_{m\times n}$）>0，据此可得秩（$[a_{ij}]_{m\times n}$）=1.

10．证明：(1) 由于秩（A）=n，所以$|A|\ne 0$，而$AA^*=|A|E$，在等式两边同乘$\dfrac{1}{|A|}$可得

$(\frac{1}{|A|}A)A^*=E$，据此可知 A^* 是可逆的，所以秩（A^*）=n.

(2) 秩（A）＜n−1 时，根据矩阵秩的定义可知 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0，而 A^* 的元素就是 A 的所有 $n-1$ 阶子式，所以 A^* 的元素都是 0，即 $A^*=O$，所以秩（A^*）=0.

(3) 当秩（A）=n−1 时，A 不是满秩的，所以 $|A|=0$．又因为 $AA^*=|A|E$，所以 $AA^*=O$，据此可知秩（A）+秩（A^*）$\le n$，而秩（A）=n−1，所以秩（A^*）≤ 1．同时由于秩（A）=n−1，根据矩阵秩的定义可知 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，而 A^* 的元素就是 A 的所有 $n-1$ 阶子式，所以 A^* 中至少有一个元素不为零．由此可知秩（A^*）≥ 1，所以秩（A^*）=1.

14．思路：利用分块矩阵 $\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix} \xrightarrow{R,C} \begin{bmatrix} E_n & -B \\ A & 0 \end{bmatrix}$。

习题 4.8

6．证明：因为 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均正交，所以 $(\beta,\alpha_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$

因此 $(\beta,\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{m}k_i(\beta,\alpha_i)=0$，所以 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$ 都正交.

7．解：设 $\alpha=\begin{bmatrix}x_1, & x_2, & x_3, & x_4\end{bmatrix}^T$，根据题意 α 为单位向量可知 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$. (1)

同时 α 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交，据此可得 $\begin{cases}(\alpha,\alpha_1)=x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\(\alpha,\alpha_2)=x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\(\alpha,\alpha_3)=2x_1+x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$ 从而可解得

$\begin{cases}x_1=-\frac{4}{3}t,\\x_2=0,\\x_3=-\frac{1}{3}t,\\x_4=t.\end{cases}$ （其中 t 为任意取值）．又因为条件(1)可知 $t=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}$，

所以 $\alpha=\begin{bmatrix}x_1, & x_2, & x_3, & x_4\end{bmatrix}^T=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}4, & 0, & 1, & -3\end{bmatrix}^T$.

11．解：(1) 因为 $\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_3) & (\alpha_1,\alpha_4)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_3) & (\alpha_2,\alpha_4)\\(\alpha_3,\alpha_1) & (\alpha_3,\alpha_2) & (\alpha_3,\alpha_3) & (\alpha_3,\alpha_4)\\(\alpha_4,\alpha_1) & (\alpha_4,\alpha_2) & (\alpha_4,\alpha_3) & (\alpha_4,\alpha_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，所以

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 R^4 的一组标准正交基.

(2) 由（1）知 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4)}=\sqrt{30}$；

因为 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}1, & 2, & 3, & 4\end{bmatrix}^T$，而 β 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}(\beta,\alpha_1), & (\beta,\alpha_2), & (\beta,\alpha_3), & (\beta,\alpha_4)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\sqrt{2}, & \sqrt{2}, & 0, & 0\end{bmatrix}^T$，

所以 $(\alpha,\beta)=(\begin{bmatrix}1, & 2, & 3, & 4\end{bmatrix}^T,\begin{bmatrix}\sqrt{2}, & \sqrt{2}, & 0, & 0\end{bmatrix}^T)=3\sqrt{2}$.

15．解：因为 $\begin{bmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&-1&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1&0&1\\0&-1&1&1&-5\end{bmatrix}$，所以方程组的一个基础解系为

$\alpha_1=\begin{bmatrix}0, & 1, & 1, & 0, & 0\end{bmatrix}^T,\alpha_2=\begin{bmatrix}-1, & 1, & 0, & 1, & 0\end{bmatrix}^T,\alpha_3=\begin{bmatrix}4, & -5, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}^T$

先进行正交化得到 $\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}0, & 1, & 1, & 0, & 0\end{bmatrix}^T$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}-1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 1, & 0\end{bmatrix}^T;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}, & -\frac{6}{5}, & \frac{6}{5}, & \frac{13}{5}, & 1\end{bmatrix}^T$$

再进行单位化得到 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0, & 1, & 1, & 0, & 0\end{bmatrix}^T$；

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-2, & 1, & -1, & 2, & 0\end{bmatrix}^T;$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}==\frac{1}{3\sqrt{35}}\begin{bmatrix}7, & -6, & 6, & 13, & 5\end{bmatrix}^T.$$

所以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 即为所求的标准正交基.

习题 4.11

2．证明：(1) 因为 $AX=O$ 的解均为 $BX=O$ 的解，所以 $AX=O$ 的基础解系中的解也都是 $BX=O$ 的解，所以 $BX=O$ 的基础解系中所含的向量的个数不少于 $AX=O$ 的基础解系中所含向量的个数．而 $BX=O$ 的基础解系中所含的向量的个数为 n-秩(B)，$AX=O$ 的基础解系中所含向量的个数为 n-秩(A)，因此 n-秩(B)$\geq n$-秩(A)，所以秩(A)⩾秩(B).

(2) 因为 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解，所以 $AX=O$ 的基础解系也就是 $BX=O$ 的基础解系，所以两者的基础解系所含向量个数相同，因此 n-秩(B)= n-秩(A)，即有秩(A)=秩(B).

(3) 因为秩(A)=秩(B)，所以 n-秩(B)= n-秩(A)，据此可知 $AX=O$ 和 $BX=O$ 的基础解系所含向量的个数相同．因为 $AX=O$ 的解均为 $BX=O$ 的解，所以 $AX=O$ 的某一基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ ($t=$ n-秩(A))也都是 $BX=O$ 的解，如果 $AX=O$ 与 $BX=O$ 不同解，则 $BX=O$ 的解中存在一个解 η 不是 $AX=O$ 的解，则 η 一定不能被 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性表示，所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t,\eta$ 线性无关，这样 $BX=O$ 的解中至少含有 $t+1$ 个解线性无关，即 $BX=O$ 的基础解系所含向量的个数大于等于 $t+1$，这与 $AX=O$ 和 $BX=O$ 的基础解系所含向量的个数相同矛盾．所以 $AX=O$ 与 $BX=O$ 不同解的假设是不成立的，因此 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$，显然满足秩($A$)=秩($B$)，但是 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1.\end{cases}$ 是 $AX=O$ 的一个解，但是不是 $BX=O$ 的解．所以不能导出 $AX=O$ 与 $BX=O$ 同解.

3．证明：首先由题设可得齐次线性方程组 $AX=0,BAX=0$ 同解。然后去证明 $ACX=0,BACX=0$。

4．证明：易证明 $AX=O$ 的解都是 $CAX=O$ 的解，又因为秩(CA)=秩(A)，根据本节第 2 个习题(3)可知 $AX=O$ 和 $CAX=O$ 同解．同样易证 $ABX=O$ 的解都是 $CABX=O$ 的解．另一方面，设 η 是 $CABX=O$ 的任意一个解则有 $CAB\eta=O$，即 $CA(B\eta)=O$，可知 $B\eta$ 是 $CAX=O$ 的一个解，已经证明 $AX=O$ 和 $CAX=O$ 同解，所以 $B\eta$ 也一定是 $AX=O$ 的解，即有 $AB\eta=O$，所以 η 也就是 $ABX=O$ 的解，据此可得 $CABX=O$ 的解也一定是 $ABX=O$ 的解，所以 $CABX=O$ 和 $ABX=O$ 同解．根据本节第 2 个习题(2)可得秩(CAB)=秩(AB).

5．证明：

6．证明：(1) 要证 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，即证 $\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=0$，等价与证明 $(\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta))=0$。

因为σ保持内积，所以由内积的双线性性得

$$
\begin{aligned}
&(\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)) \\
&=(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta))-(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha))-(\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\beta))-(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha+\beta)) \\
&-(\sigma(\beta),\sigma(\alpha+\beta))+(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))+(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))+(\sigma(\beta),\sigma(\beta))+(\sigma(\beta),\sigma(\alpha)) \\
&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha+\beta,\alpha)-(\alpha+\beta,\beta)-(\alpha,\alpha+\beta) \\
&-(\beta,\alpha+\beta)+(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)+(\beta,\alpha) \\
&=((\alpha+\beta)-\alpha-\beta,(\alpha+\beta)-\alpha-\beta)=(0,0)=0
\end{aligned}
$$

。

第五章　特征值和特征向量　矩阵对角化

习题 5.1

1．解：(A) 设$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&4\end{bmatrix}$，因为秩（$A$）=秩（$B$）所以$A$与$B$等价; 但是由于$\operatorname{tr}A$与$\operatorname{tr}B$不相等, 所以$A$与$B$不相似. 因此(A)不正确.

(B) A与B相似, 即存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$, 所以秩（A）=秩（B）, 因此A与B等价. (B)是正确的.

(C) 与(A)一样，设$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&4\end{bmatrix}$, 秩（$A$）=秩（$B$），但是由于 $\operatorname{tr}A$与$\operatorname{tr}B$不相等, 所以A与B不相似. 因此(C)不正确.

(D) 与(A)一样，设$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&4\end{bmatrix}$，$|A|=|B|$，但是由于$\operatorname{tr}A$与$\operatorname{tr}B$不相等, 所以$A$与$B$不相似. 因此(D)不正确.

7．解：(1) 因为$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\2&\lambda-5&2\\2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，所以特征值为 1,1,3.

求解方程组 $(E-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的特征向量为

$\xi_1=\begin{bmatrix}2,&1,&0\end{bmatrix}^T k_1+\begin{bmatrix}-1,&0,&1\end{bmatrix}^T k_2$ (其中k_1,k_2为不同时为零的任意数).

求解方程组$(3E-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & 4 & -1\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 3 的特征向量为

$\xi_2=\begin{bmatrix}0, & 1, & 1\end{bmatrix}^T k_3$ (其中k_3为不为零的任意数).

习题 5.2

4．证明：A^T 的特征多项式为$\left|\lambda E-A^T\right|=\left|((\lambda E)^T-A)^T\right|=\left|(\lambda E-A)^T\right|=\left|\lambda E-A\right|$

而$\left|\lambda E-A\right|$是 A 的特征多项式，所以 A 与 A^T 有相同的特征多项式.

6．解：因为 1 是 A 的一重根，所以$(E\text{-}A)X=O$的基础解系含有 1 个向量，因此 3-秩$(E\text{-}A)$=1，从而可知秩$(E\text{-}A)$=2. 又因为 2 是 A 的二重根，所以$(2E\text{-}A)X=O$ 的基础解系含有向量的个数为 1 或 2，由于 A 不能与对角矩阵相似，则可知 A 的线形无关的特征值个数小于 3，所以$(2E\text{-}A)X=O$ 的基础解系含有向量的个数只能为 1，同样可得 3-秩$(2E\text{-}A)$=1，所以秩$(2E\text{-}A)$=2.

7．解：因为$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & 3-2x\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，所以 A 的

特征值为−1, 1, 1. 因为 A 与对角矩阵相似，所以要求特征根的重数 n_i 与

$(\lambda_i E-A)X=O$的基础解系所含向量个数r_i相等. -1 是一重根所以一定满足，所以只

要特征值 1 满足即可. 也就是要求$(E-A)X=O$的基础解系含有 2 个向量，由此可知

n-秩($E-A$)=2，因此秩($E-A$)=1.

因为 $E-A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -2x+3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -3x+3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，所以当且仅当 $x=1$ 时秩

($E-A$)=1,所以$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & 2x-3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$能与对角矩阵相似，则必有 $x=1$。

习题 5.3

2．解：因为秩(A)=1=秩(B)，所以 A 与 B 等价. 又因为 tr A=4, tr$B$=1，即有$trA\neq trB$，所以 A 与 B 不相似. 综上可知(B)是正确的.

3．解：(1) 因为$f(A)=A^2+A-2E$，所以$f(x)=x^2+x-2$。因为 A 有三个不同的特征

值，所以 $f(A)$ 也可以对角化。

所以 A^2+A-2E 的所有特征值为 $f(-1)=2, f(1)=0, f(2)=2$。

(2) $|A^2+A-2E|=f(-1)f(1)f(2)=2\times0\times2=0$.

5. 解：(1) 因为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2-24\lambda+28=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$,

所以特征值为 2, 2, −7.

求解方程组 $(2E-\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的线形无关的特征向量为

$\begin{bmatrix}2, & 0, & 1\end{bmatrix}^T,\begin{bmatrix}-2, & 1, & 0\end{bmatrix}^T$.

对 $\begin{bmatrix}2, & 0, & 1\end{bmatrix}^T,\begin{bmatrix}-2, & 1, & 0\end{bmatrix}^T$ 进行施密特正交化化为正交单位向量组得

$\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2, & 0, & 1\end{bmatrix}^T,\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2, & 1, & 0\end{bmatrix}^T$。

求解方程组 $(-7E-\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix})X=O$，得到属于−7 的线形无关的特征向量为

$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}, & -1, & 1\end{bmatrix}^T$.

对 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}, & -1, & 1\end{bmatrix}^T$ 进行施密特正交化化为正交单位向量组得 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1, & -2, & 2\end{bmatrix}^T$。

所以 $A=U\Lambda U^{-1}$，其中 $U=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{bmatrix}$. 由此可得

$A^k=(U\Lambda U^{-1})^k=U\Lambda^kU^{-1}=U\Lambda^kU^T$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & & \\ & 2^k & \\ & & (-7)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix} 2^{k+3}+(-7)^k & -2^{k+1}+2(-7)^k & 2^{k+1}-2(-7)^k \\ -2^{k+1}+2(-7)^k & 5\cdot 2^{k+1}+4(-7)^k & 2^{k+1}-4(-7)^k \\ 2^{k+1}+2(-7)^k & 2^{k+2}-4(-7)^k & 5\cdot 2^{k+1}+4(-7)^k \end{bmatrix}.$$

(2) $f(A)=A^3+3A^2-24A+28E$ 的特征值为 $f(2)=0, f(2)=0, f(-7)=0$，所以

$A^3+3A^2-24A+28E=UOU^{-1}=O$.

6．解：因为方阵 A 的 n 个特征值为 1，2，…，n, 所以 A 可以对角化。所以 $A+E$ 的特征值为 2,3, ……, n, $n+1$.所以｜$A+E$｜$=(n+1)!$.

11．证明：因为 $|\lambda E-A|=\begin{bmatrix} \lambda-a & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda-a & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda-a & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a \end{bmatrix}=(\lambda-a)^n$，所以 a 是 A 的 n 重根. 如果 A 能与对角矩阵相似, 则必有 $(aE-A)X=O$ 的基础解系含有 n 个向量,

即 n -秩($aE-A$)=n, 也就是秩($aE-A$)=0, 从而得到此时 $aE-A=O$，即 $A=aE$，这与条件 $A\neq aE$ 矛盾！所以 A 不能与对角矩阵相似.

12．证明：因为 $0=A^2+4A+4E=(A+2E)^2$，所以 $|A+2E|=0$，即-2 是 A 的一个特征值。

设 λ 为 A 的特征值，ξ 是 A 的属于 λ 的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$，所以 $(A^2+4A+4E)\xi=\lambda^2\xi+4\lambda\xi+4\xi=O\xi=O$，从而可得 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，即得 $\lambda=-2$，所以 A 的特征值仅为-2.

习题 5.4

1. 证明：设 λ 是反对称矩阵 A 的一个特征值，$O\neq\xi=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，则有

$$A\xi=\lambda\xi. \qquad (1)$$

令 $\overline{\xi}=\left[\overline{a_1},\quad \overline{a_2},\quad \cdots,\quad \overline{a_n}\right]^T$，其中 $\overline{a_i}$ 表示 a_i 的共扼复数，$i=1,2,\cdots,n$．对(1)式两边同取共扼得 $\overline{A\xi}=\overline{\lambda\xi}$．因为 A 是实矩阵，所以有 $\overline{A}=A$，因此有

$$A\overline{\xi}=\overline{\lambda\xi}. \qquad (2)$$

对(1)式两边转置得 $\xi^T A^T=\lambda\xi^T$，因为 A 是反对称矩阵，所以 $A^T=-A$ 从而

$$\xi^T A=-\lambda\xi^T. \qquad (3)$$

对(2)式两边同左乘 ξ^T，对(3)式两边同右乘 $\overline{\xi}$，分别得

$$\xi^T A\overline{\xi}=\overline{\lambda}\xi^T\overline{\xi},\quad \xi^T A\overline{\xi}=-\lambda\xi^T\overline{\xi}$$

从而得 $\overline{\lambda}\xi^T\overline{\xi}=-\lambda\xi^T\overline{\xi}$，移项得 $(\overline{\lambda}+\lambda)\xi^T\overline{\xi}=0$，因为 $\xi^T\overline{\xi}\neq 0$，所以 $(\overline{\lambda}+\lambda)=0$，所以 λ 为零或者纯虚数.

2．解：(3) 因为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda-5)$，所以特征值为 1,1,1,5.

解线性方程组 $(E-\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 1 的线性无关的特征向量为 $\left[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0\right]^T,\left[1,\quad 0,\quad 1,\quad 0\right]^T,\left[1,\quad 0,\quad 0,\quad -1\right]^T$.

解线性方程组 $(5E-\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix})X=O$，得属于特征值 5 的线性无关的特征向量为 $\left[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1\right]^T$.

所以 $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，对角矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5\end{bmatrix}$.

3．解：(3) 先对属于特征值 1 的三个特征向量进行正交化.

$\xi_1=\left[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0\right]^T,\xi_2=\left[1,\quad 0,\quad 1,\quad 0\right]^T,\xi_3=\left[1,\quad 0,\quad 0,\quad -1\right]^T$.

$\eta_1=\xi_1=[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T$;

$\eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=[1,\quad 0,\quad 1,\quad 0]^T-\dfrac{1}{2}[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T=\left[\dfrac{1}{2},\quad -\dfrac{1}{2},\quad 1,\quad 0\right]^T$;

$\eta_3=\xi_3-\dfrac{(\xi_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\dfrac{(\xi_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=\dfrac{1}{3}[1,\quad -1,\quad -1,\quad -3]^T$.

再对向量进行单位化, 得到三个正交单位向量.

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}[1,\quad 1,\quad 0,\quad 0]^T,\dfrac{1}{\sqrt{6}}[1,\quad -1,\quad 2,\quad 0]^T,\dfrac{\sqrt{3}}{6}[1,\quad -1,\quad -1,\quad -3]^T$,

再对属于特征值 5 的特征向量进行单位化得$\dfrac{1}{2}[1,\quad -1,\quad -1,\quad 1]^T$.

由此得到$U=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 对角矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}$.

4．证明：$\Rightarrow$ 显然成立.

$\Leftarrow$ 因为 A, B 有相同的特征多项式, 则 A, B 必有相同的特征根. 不妨设这些根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 因为 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 所以存在可逆矩阵 P,Q 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$. 由此可知 $P^{-1}AP=Q^{-1}BQ$, 所以有 $A=(QP^{-1})^{-1}BQP^{-1}$, 其中 QP^{-1} 是可逆的, 因此 A 与 B 相似.

7．解：因为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$ ，所以A特征值为 0, 2, 2.（然后验证A可对角化，从而B可对角化）

因为$B=(kE+A)^2=k^2E+2kA+A^2=f(A)$(其中 $f(x)=x^2+2kx+k^2$), 所以 B 的特征值为 $f(0)=k^2, f(2)=k^2+4k+4, f(2)=k^2+4k+4.$

所以$\Lambda=\begin{bmatrix} k^2 & & \\ & k^2+4k+4 & \\ & & k^2+4k+4 \end{bmatrix}$.

习题 5.5

5. 解：因为$|\lambda E-A|=[\lambda-(n-1)b](\lambda+b)^{n-1}$，所以 A 的特征值为一个一重特征值$(n-1)b$ 和一个$n-1$重特征值$-b$. 因为秩($[(n-1)bE-A]$)=$n-1$，所以$n_1=n-(n-1)=1$与重数相同. 因为秩($[-bE-A]$)=1，所以$n_2=n-1$与重数相同. 所以 A 能对角化（也可由实对称矩阵得到），与其相似的对角矩阵为$\begin{bmatrix} (n-1)b & & & \\ & -b & & \\ & & \ddots & \\ & & & -b \end{bmatrix}$.

6．证明：设λ为 n 阶方阵 A 的特征值，ξ为 A 的属于λ的特征向量，则有$A\xi=\lambda\xi$. 所以 $A^2\xi=\lambda^2\xi=\xi$，即有$\lambda^2=1$，因此 A 的特征值或为 1，或为-1.

7. 解：(1) 因为矩阵 A 与 B 相似，所以 tr$A$=tr$B$，$|A|=|B|$，由此可以得到$\begin{cases} 5+a=4+b, \\ 6a-6=4b. \end{cases}$，从而可知$a=5,b=6$.

当$a=5,b=6$时，易知 A 的特征值为 2,2,6.

求解方程组$(2E-\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的线形无关的特征向量为 $[1,\ 0,\ 1]^T,[-1,\ 1,\ 0]^T$.

求解方程组$(6E-\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 6 的线形无关的特征向量为 $\left[\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ 1\right]^T$.

所以此时 A 可以对角化。

类似可以证明此时 B 也可以对角化。所以由他们的特征值相同可以知道此时 A 与 B 合

同。

（2）由（1）可知$P=\begin{bmatrix}1 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

8．解：因为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ -a & \lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & -3 & \lambda-2 & 0\\ -2 & -3 & -c & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$，所以 A 有一个两重特征值 1 和一个两重特征值 2. $n_1=n-$秩$(E-A),n_2=n-$秩$(2E-A)$, A 能与对角矩阵相似所以必有 $n_1=2,n_2=2$．因此要求秩（$E-A$）= 秩（$2E-A$）=2.

$E-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -a & 0 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -1 & 0\\ -2 & -3 & -c & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1 & -c & -3 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，要使得秩($E-A$)=2, 必有 $a=0$；$2E-A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -c & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -a & -2 & -2\\ 0 & 1 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -c\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，要使得秩($2E-A$)=2, 必有$c=0$．综上$a=0$，$c=0$．

10．解：（1）由$A\xi=\lambda_0\xi$可得三个方程，解之可得结果。

（2）略。

第六章　二次型

习题 6.1

2．解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2$,

令$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\ y_2=x_2+2x_3,\\ y_3=x_3.\end{cases}$因为$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$，所以线性替换是非退化的. 从而得到标准形 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

先令$\begin{cases} x_1=y_1-y_2, \\ x_2=y_1+y_2, \\ x_3=y_3. \end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$

令$\begin{cases} z_1=y_1+y_3, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3. \end{cases}$ 则$\begin{cases} z_1=\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+x_3, \\ z_2=-\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2, \\ z_3=x_3. \end{cases}$ 因为$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，所以先行替换是非退化的. 从而得到标准形 $z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

3．解：(1) 错，因为$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$，所以线形替换$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=x_1-x_2, \\ y_3=x_2. \end{cases}$是退化的，所以错.

正确的为 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2=(2x_1-x_2)^2+5x_2^2=y_1^2+5y_2^2$，

其中线性替换为$\begin{cases} y_1=2x_1-x_2, \\ y_2=x_2, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 因为$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，所以该线形替换是非退化的.

(2) 错，因为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，所以线形替换$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_2-x_3, \\ y_3=x_3+x_1. \end{cases}$是退化的，所以错.

正确的为 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$$

其中线性替换为$\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3, \\ y_2=x_2-x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 因为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，所以该线形替换是非

退化的.

习题 6.2

1．解：

3．解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

计算特征多项式 $\left|\lambda E-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$，得到特征值为 1, 2, 5.

解方程 $(E-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 1 的线形无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}^T$.

解方程 $(2E-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 2 的线形无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$.

解方程 $(5E-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix})X=O$，得到属于 5 的线形无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \end{bmatrix}^T$.

三个向量已经两两正交，所以只要单位化即可得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \end{bmatrix}^T.$$

所以 $U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，因此正交变换为 $Y=X\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，而标准型为

$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

6．证明：(1) 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，令 $X=X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$（X_i 满足

$x_i=1, x_j=0, j\neq i$), 则有 $X^TAX=a_{ii}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

再令 $X=X_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n, i\neq j)$ (X_{ij} 满足 $x_i=1, x_j=1, x_s=0, s\neq i, s\neq j$), 则有

${X_{ij}}^TAX_{ij}=a_{ij}+a_{ji}+a_{ii}+a_{jj}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$, 因为 $a_{ii}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,并且由于 A 是一个 n 阶对称矩阵所以有 $a_{ij}=a_{ji}$, 所以由 $a_{ij}+a_{ji}+a_{ii}+a_{jj}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$ 可得 $a_{ij}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$, 因此 $A=O$.

(2) 若存在两个对称矩阵 A,B 使得 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$, $f(x_1,x_2,x_3)=X^TBX$, 则两式相减得 $X^T(A-B)X=O$ 对任意 X 成立. 由于 A,B 都是对称矩阵, 所以两者的差 $A-B$ 也是对称矩阵, 根据(1)可知 $A-B=O$, 从而得到 $A=B$.

8. 证明：因为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 所以 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 可以通过若干次互换变成 $1,2,\cdots,n$.而每次互换就相当于交换 $\lambda_{i_s},\lambda_{i_t}$ 的位置, 由第 8 个习题可知这就相当于同时左乘右乘同一个互换得到的初等矩阵 $E(i_s,i_t)$. 由此可知

$E(i_{s_m},i_{t_m})\cdots E(i_{s_2},i_{t_2})E(i_{s_1},i_{t_1})diag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]E(i_{s_1},i_{t_1})E(i_{s_2},i_{t_2})\cdots E(i_{s_m},i_{t_m})$

$=diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$.

设 $C=E(i_{s_1},i_{t_1})E(i_{s_2},i_{t_2})\cdots E(i_{s_m},i_{t_m})$,

则 $C^T=E(i_{s_m},i_{t_m})^T\cdots E(i_{s_2},i_{t_2})^TE(i_{s_1},i_{t_1})^T=E(i_{s_m},i_{t_m})\cdots E(i_{s_2},i_{t_2})E(i_{s_1},i_{t_1})$

所以得到 $C^Tdiag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]C=diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$, 因此矩阵 $diag\left[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\right]$ 与 $diag\left[\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_n}\right]$ 合同.

习题 6.3

3. 证明：与习题 3.5T1 类似，只不过要把右边的可逆矩阵换成左边的转置。

4. 解：因为两个矩阵合同的充要条件是有相同的秩和相同的正惯性指数, 按秩从 0, 1, 2, 到 n 有 n+1 大类, 秩为 0 时正惯性指数只有一种可能就是 0; 秩为 1 时正惯性指数有 0, 1 两种可能, 秩为 2 时正惯性指数有 0, 1, 2 三种可能; ……; 秩为 n 时正惯性指数有 0, 1, 2, ……, n 共 n+1 种可能. 所以一共有 1+2+……+ n+1=$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 种可能, 所以

一共有 $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 多个合同类．秩为 i，正惯性指数为 j 的合同类中最简单的矩阵是一个对角矩阵它主对角线上前 j 个元数为 1, 中间 $i-j$ 个元素为−1, 其他为 0.

6．解：(1) 不正确,

令 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -3\end{bmatrix}$，显然 A 与 B 合同, C 与 D 合同, 但是 $A+C=O$，$B+D=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}$, 两者秩不同所以不合同．所以(1)不正确.

(2) 正确，A 与 B 合同，C 与 D 合同，所以存在两个可逆矩阵 F,G 满足 $F^TAF=B, G^TCG=D$．令 $K=\begin{bmatrix}F & \\ & G\end{bmatrix}$，因为 F,G 可逆，所以 K 也可逆．又有 $K^T\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}K=\begin{bmatrix}F^T & \\ & G^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F & \\ & G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^TAF & \\ & G^TCG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & \\ & D\end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}B & O\\ O & D\end{bmatrix}$ 合同．因此(2)是正确的.

习题 6.4

2．解：$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & m & n+2\\ 0 & m-1 & m\end{bmatrix}$ 正定，首先要求 A 是对称矩阵，所以有 $n+2=m-1$．还必须要求三个顺序主子式都大于零．所以要求 $|1|=1>0, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{vmatrix}=m>0, \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & m & m-1\\ 0 & m-1 & m\end{vmatrix}=2m-1>0$．因此要求 $m>\dfrac{1}{2}$，所以选 (A).

6. 解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$,

要求二次型正定即要求所有顺序主子式

$|1|=1>0,\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0,\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-t(5t+4)>0$，由此可得 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时此二次型正定.

7．解：因为 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 是正定矩阵，所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是正定二次型，所以对于任意非零向量 X 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX>0$．现令 $X=X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$（X_i 满足 $x_i=1,x_j=0,j\neq i$），则有 $X^TAX=a_{ii}>0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$.

8．证明：（1）参看下面$\Leftarrow$部分的证明。

（2）$\Rightarrow$ 因为 A^TA 为正定矩阵，所以对任意的 n 维非零向量 X 都有 $X^T(A^TA)X>0$，即有 $(AX)^T(AX)>0$，所以不存在非零向量使得 $AX=O$，因此可得秩(A)=n..

$\Leftarrow$ 首先显然 A^TA 是一个对称矩阵，现取任意一个 n 维非零向量 ξ，不妨设 $A\xi=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_m\end{bmatrix}^T$

则 $\xi^T(A^TA)\xi=(A\xi)^TA\xi=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{m}a_i^2\geq 0$，并且当且仅当 $A\xi=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_m\end{bmatrix}^T=O$ 时取到 0. 又因为秩(A)=n 所以 $AX=O$ 只有零解，而 ξ 是非零向量，所以 $A\xi=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_m\end{bmatrix}^T\neq O$，因此 $\xi^T(A^TA)\xi>0$，由此可得 A^TA 为正定矩阵.

9．证明：(2) $\Rightarrow$ 假设秩(P)<m，则 $PX=O$ 有非零解 ξ，由此可知 $\xi^T(P^TAP)\xi=(P\xi)^TA(P\xi)=O^TAO=0$，这与 P^TAP 为正定矩阵矛盾．所以假设不成立，因此秩(P)=m.

$\Leftarrow$ 首先因为 $(P^TAP)^T=P^TAP$ 所以 P^TAP 是对称矩阵．现取任意一个 n 维非零向量 ξ，因为秩(P)=m，所以 $PX=O$ 只有零解，由此可知 $P\xi\neq O$．又因为 A 为 n 阶正定矩阵，所以 $(P\xi)^TA(P\xi)>0$，即有 $\xi^T(P^TAP)\xi=(P\xi)^TA(P\xi)>0$，所以 P^TAP 为正定矩阵.

10．证明：注意到$B = diag[b_1, b_2, \cdots, b_n] A diag[b_1, b_2, \cdots, b_n]$即可。

习题 6.5

4．解：因为$f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$经正交替换化为标准形$3y_1^2 + 5y_2^2$，所以实对称矩阵$A$的特征值为 3, 5, 0.

因此$|A| = 3 \times 5 \times 0 = 0$.

5．解：因为A, B合同，所以A, B有相同的规范形．因为$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$，所以$B$的所有特征值为-3, 1, 2,

因此B的规范形为$f(y_1, y_2, y_3) = -3y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$，由此可知 A 的规范形也为$f(y_1, y_2, y_3) = -3y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$.

6．解：(1)因为秩(A)=秩(B)，所以A与B等价.

(2)因为 tr$A$=4，但是 tr$B$=0，两者不相等，所以A与B不相似.

(3)因为$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^4$，所以$A$的所有的特征值为 1, 1, 1, 1，秩为 4，正惯性指数为 4．但是$|\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$，所以$B$的所有特征值为-1, -1, 1, 1，秩为 4，正惯性指数为 2．两者的正惯性指数不想等，所以不合同.

8．证明：设存在一组数$k_1, k_2, \cdots, k_n$满足$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = O$，取任意一个$\alpha_i$，在等式两边同左乘$\alpha_i^T A$得到$\alpha_i^T Ak_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_i^T Ak_i\alpha_i + \cdots + \alpha_i^T Ak_n\alpha_n = 0$ (*)，根据题意$\alpha_i^T Aa_j = O(i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$，所以(*)式可化为$k_1\alpha_i^T A\alpha_1 + \cdots + k_i\alpha_i^T A\alpha_i + \cdots + k_n\alpha_i^T A\alpha_n = k_i\alpha_i^T A\alpha_i = 0$，又因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以对于非零向量α_i必有$\alpha_i^T A\alpha_i \neq 0$，由此可得$k_i = 0$，所以$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

9．解：(1)如果$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$正定，则他的所有顺序主子式都大于零，即有

$|2| = 2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = 3t > 0$. 所以要求 $t > 0$ 即可.

(2) 因为 A 与 B 等价充要条件是秩（A）= 秩（B），又因为 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以秩（$B$）=2，所以要求秩（$A$）=2. 而 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$，只有当 $t = 0$ 时秩（A）=2，所以当 $t = 0$ 时 A 与 B 等价.

(3) 如果 A 与 C 相似，则必有 tr A=tr$C$，所以有 $t + 4 = 9$，从而得到 $t = 5$.

(4) 因为 A 与 D 合同则要求秩相等并且有相同的正惯性指数，$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，所以秩（$D$）=3，又由于 $|\lambda E - D| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$，所以 D 的正惯性指数为 2. 而 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ 且 $|\lambda E - A| = (\lambda - t)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$，所以要秩为 3 则 $t \neq 0$，要正惯性指数为 2，则要求 $t \leq 0$，因此当 $t < 0$ 时 A 与 D 合同.