2-4 动量定理

一、动量定理

动量：质量和速度的乘积。（矢量）

$$\boxed{\vec{P}=m\vec{v}}$$

大小：*mv*　方向：速度的方向

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}}$$

质点动量定理的微分形式

$$\boxed{\vec{F}dt=d\vec{P}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2}d\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

定义力$\vec{F}$的冲量为：$\vec{I}\equiv\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t$

F作用时间很短时，可用力的平均值来代替。

平均冲力 $\overline{\vec{F}}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t}{t_2-t_1}$

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\overline{\vec{F}}(t_2-t_1)}$$

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

质点所受合力的冲量，等于该质点动量的增量。这个结论称为动量定理的积分形式

说明

1. $\vec{I}$ 质点所受合力的冲量，是矢量。
是力对时间的积累效应。

2.动量为状态量，冲量为过程量。
用状态的增量来反应过程量。

3.适用于惯性系。

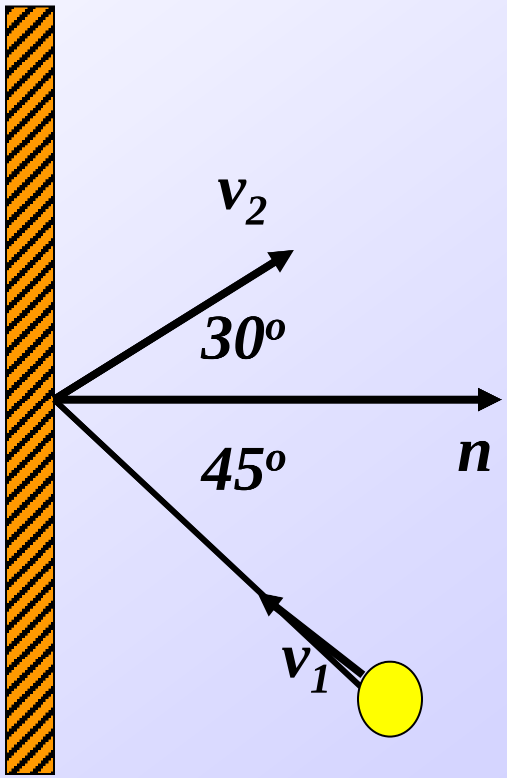
4.分量式

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt=\overline{F}_x(t_2-t_1)=mv_{2x}-mv_{1x}$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt=\overline{F}_y(t_2-t_1)=mv_{2y}-mv_{1y}$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z dt=\overline{F}_z(t_2-t_1)=mv_{2z}-mv_{1z}$$

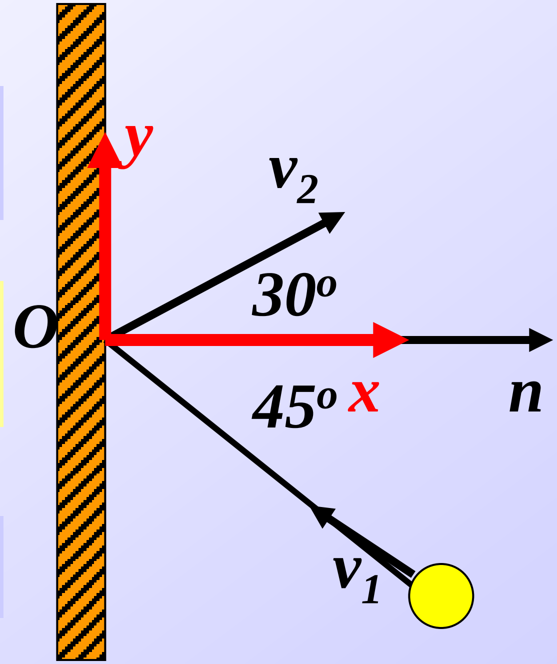
例1、质量为2.5g的乒乓球以10m/s的速率飞来，被板推挡后，又以20m/s的速率飞出。设两速度在垂直于板面的同一平面内，且它们与板面法线的夹角分别为45º和30º，求：（1）乒乓球得到的冲量；（2）若撞击时间为0.01s，求板施于球的平均冲力。



解：取球为研究对象，由于作用时间很短，忽略重力影响。设挡板对球的冲力为 $\vec{F}$

则有：
$$\vec{I}=\int\vec{F}\cdot dt=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

取坐标系，将上式投影，有：



$$I_x = \int F_x dt = mv_2 \cos 30^\circ - (-mv_1 \cos 45^\circ) = \overline{F_x} \Delta t$$

$$I_y = \int F_y dt = mv_2 \sin 30^\circ - mv_1 \sin 45^\circ = \overline{F_y} \Delta t$$

$$\Delta t = 0.01\text{s} \quad v_1 = 10\text{m/s} \quad v_2 = 20\text{m/s} \quad m = 2.5\text{g}$$

$$I_x = 0.061\text{Ns} \qquad I_y = 0.007\text{Ns}$$

$$\vec{I} = 0.061\vec{i} + 0.007\vec{j}\,(Ns)$$

$$\overline{F_x} = 6.1\text{N} \quad \overline{F_y} = 0.7\text{N}$$

$$\vec{\overline{F}} = 6.1\vec{i} + 0.7\vec{j}\,(N)$$

质点动力学

作业:

2 -19

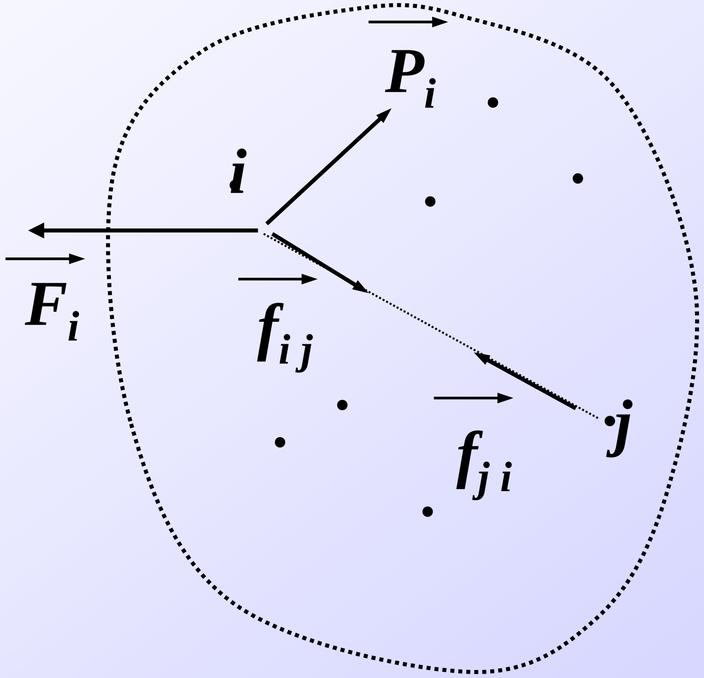
-27

-28

-30

二、质点系的动量定理

共有N个质点，外力用 F ，内力（即质点之间的相互作用）用 f，则第 i 质点的运动方程



$$\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

对系统内所有质点求和为：

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{dt}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

质点系动量定理的微分形式

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

质点系动量定理的积分形式

此式表明：合外力的冲量等于系统总动量的增量。

三、动量守恒定律

当$\vec{F} = 0$时

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \text{常矢量}$$

几点说明：

1. 合外力为零，或外力与内力相比小很多；
2. 合外力沿某一方向的分量为零；

   若$F_x = 0$, 则：$P_x = \sum m_i v_{ix} = const.$

3. 只适用于惯性系；
4. 比牛顿定律更普遍的最基本的定律。

动量守恒定律的解题步骤：

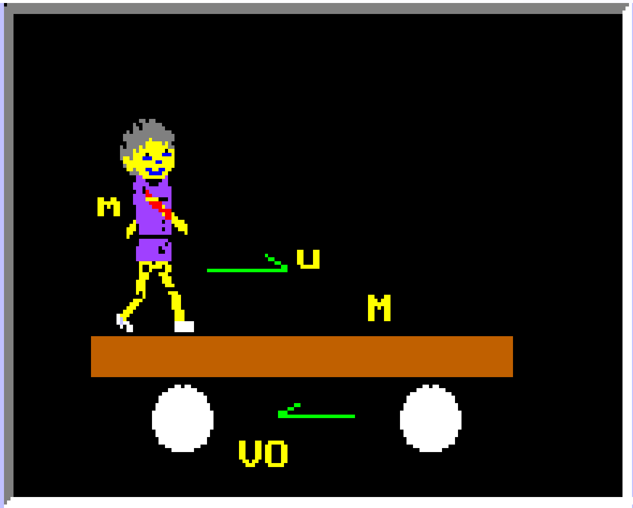
1、确定研究对象（系统），分析受力情况。

2、参照系——坐标系------分析过程。

3、列方程（相对运动问题）。

4 、解联立方程组，用符号化简后代入数据,
进行数值计算。

例题2



质量为m的人站在质量为M的车上，开始时一起以速率V_0沿光滑水平面向左运动。现在人以相对于车为u的速率向右跑，求车的速率V_t。

解：人和车为一系统　参照系：地面　如图建立坐标，则

系统初始动量为 $(M+m)V_0$　**人跑动后系统总动量为** $MV_t+m(V_t-u)$

水平方向动量守恒，故有

$$(M+m)V_0=MV_t+m(V_t-u)$$

$$V_t=V_0+\frac{mu}{M+m}$$

2-5 质心、 质心运动定律

一、质心的定义：质点系的质量中心。

质点系　N个质点

质量：$\boldsymbol{m_1}\quad \boldsymbol{m_2}\quad \boldsymbol{m_3}\ \ldots\quad \boldsymbol{m_i}\ \ldots\ \boldsymbol{m_N}$　　$m=\sum_{i=1}^{N} m_i$

位矢：$\vec{r}_1\quad \vec{r}_2\quad \vec{r}_3\cdots\ \vec{r}_i\cdots\quad \vec{r}_N$

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m}$$

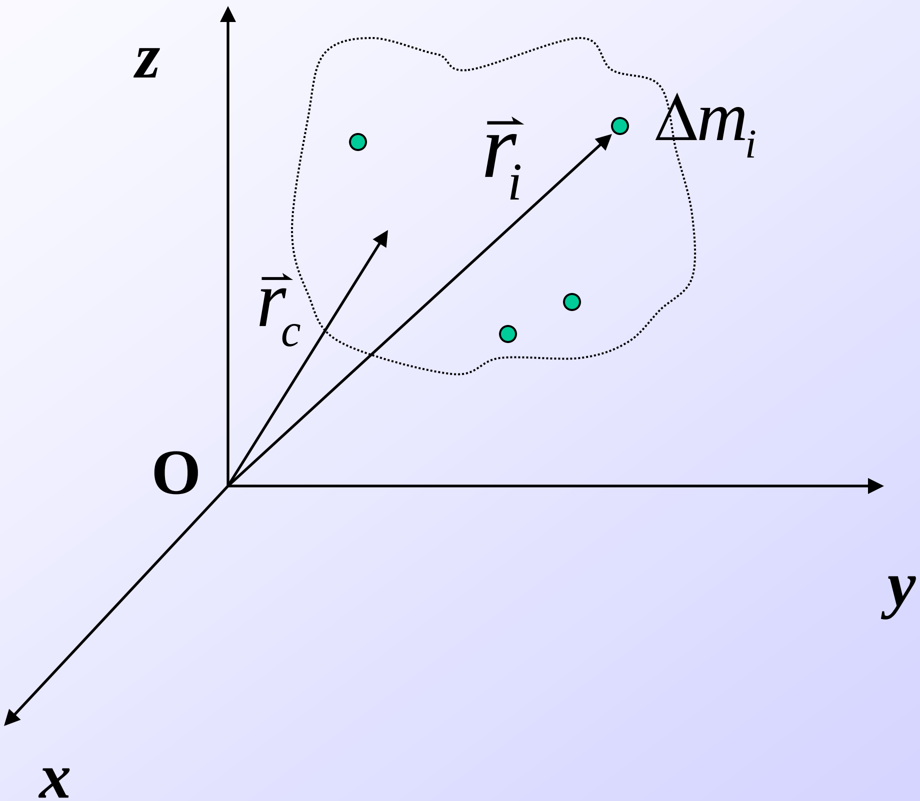
质心的位置：加权平均

质心的位矢随坐标系的选取而变化，但对一个质点系，质心的位置是固定的。

直角坐标系中的分量式为：

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{m}$$

质量连续分布时：

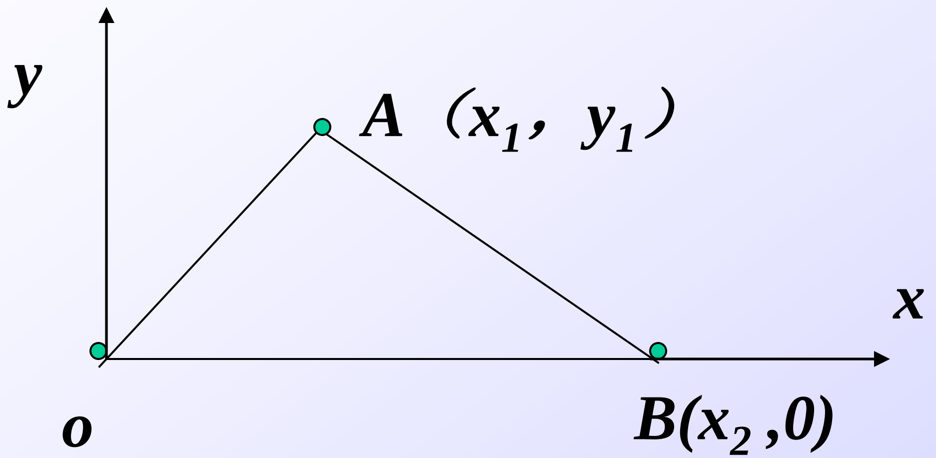


$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{m}$$

$$x_c = \frac{\int x\,dm}{m}$$

$$y_c = \frac{\int y\,dm}{m} \qquad z_c = \frac{\int z\,dm}{m}$$

例1：任意三角形的每个顶点有一质量m，求质心。



$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m}$$

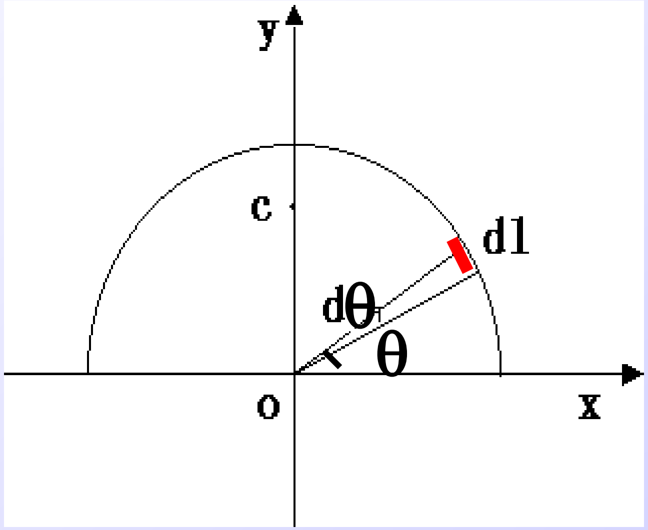
$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m}$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

例2：一段均匀铁丝弯成半径为R的半圆形，求此半圆形铁丝的质心。

解：选如图坐标系，取长为*dl*的铁丝，质量为*dm*，以λ表示线密度，*dm=λdl* 分析得质心应在y轴上。



$$\lambda = \frac{m}{\pi R} \qquad x_c = 0$$

$$y_c = \frac{\int y dm}{m}$$

$$\therefore y_c = \frac{\int y\lambda dl}{m} \qquad y = R\sin\theta \quad dl = Rd\theta$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} R\sin\theta\lambda R d\theta = \frac{1}{m}2\lambda R^2$$

$$\because \lambda = \frac{m}{\pi R} \qquad \therefore y_c = \frac{2}{\pi}R$$

注意：质心不在铁丝上。

二、质心运动定律

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\therefore m\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$$

$$\vec{P} = m\vec{v}_c$$

质点系的总动量等于它的总质量与它的质心的运动速度的乘积。

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=m\frac{d\vec{v}_c}{dt}=m\vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}_c}$$

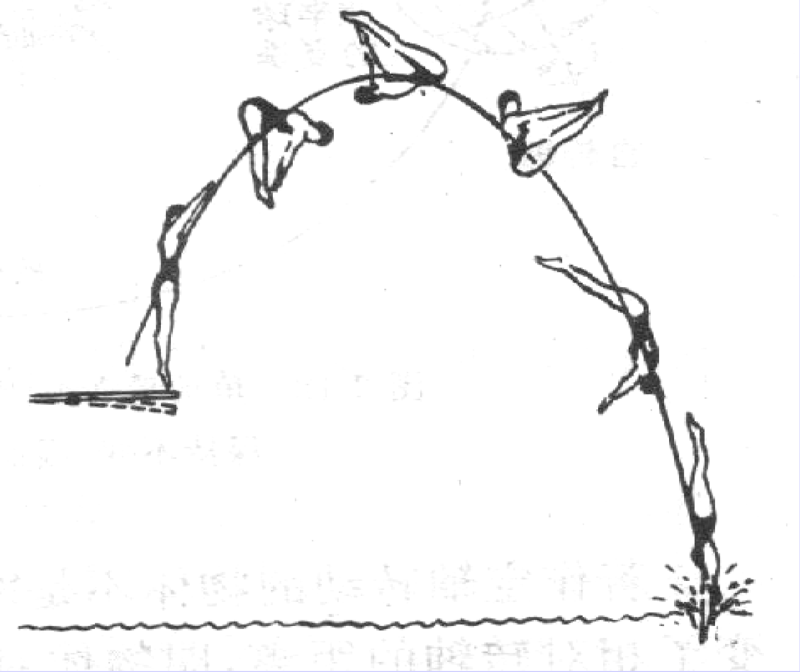
质心运动定律：系统的总质量和质心加速度的乘积等于质点系所受外力的矢量和。

三、质心参照系

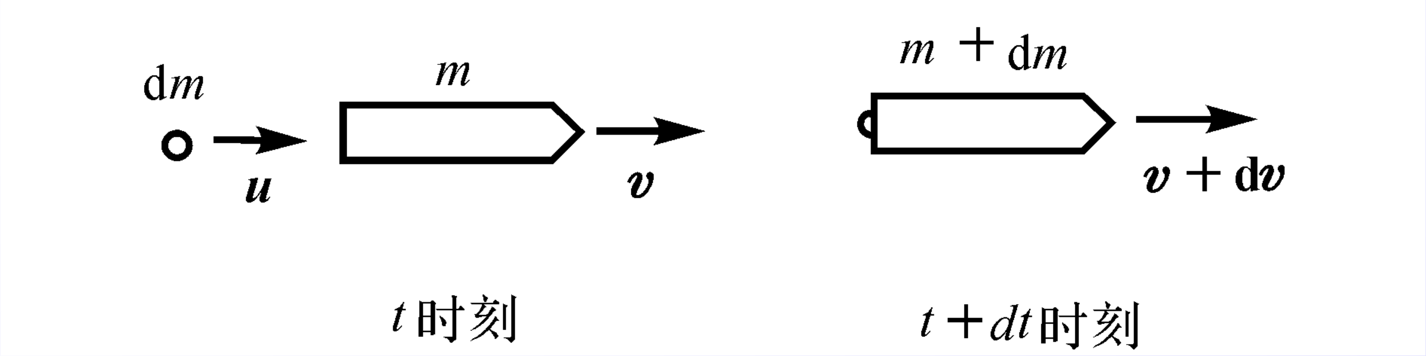
质心参照系：坐标原点选在质心上。

$$\vec{v}'_c=0$$

$$\vec{P}'=0$$ 零动量参照系



2-6 密舍尔斯基方程



主体+流动物=系统

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

$$\vec{F} \cdot dt = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)$$

$$\vec{P}(t) = m\vec{v} + \vec{u}dm \qquad \vec{P}(t+dt) = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})$$

$$\vec{F} \cdot dt = dm(\vec{v}-\vec{u}) + md\vec{v}$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}}$$

$(\vec{u}-\vec{v})\dfrac{dm}{dt}$ 的物理意义：

以流动物为研究对象：

dt时间内动量的增量

$$d\vec{P}=(\vec{v}+d\vec{v})dm-\vec{u}dm=(\vec{v}-\vec{u})dm=-v'dm$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=-v'\frac{dm}{dt}$$ 主体对流动物的作用力

几点说明： $$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+(\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}=\vec{F}+\vec{v}'\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}$$

流体对主体作用力

1. 系统的确定（主体，流动物）

2. $\vec{u},\vec{v}$分别为流动物和主体相对于惯性系的速度,

$\vec{v}'$为流动物相对于主体的相对速度.

在一维情况下, $\vec{u},\vec{v},\vec{v}'$可用+,-号表示方向,

3、$\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} > 0$时，$\vec{v}'$与主体前进的方向相同，

$\vec{v}'\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}$与主体同向，为流体对 主体的推动力。

$\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} < 0$时，$\vec{v}'$与主体前进的方向相反，

$\vec{v}'\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}$与主体同向，为流体对 主体的反冲力。

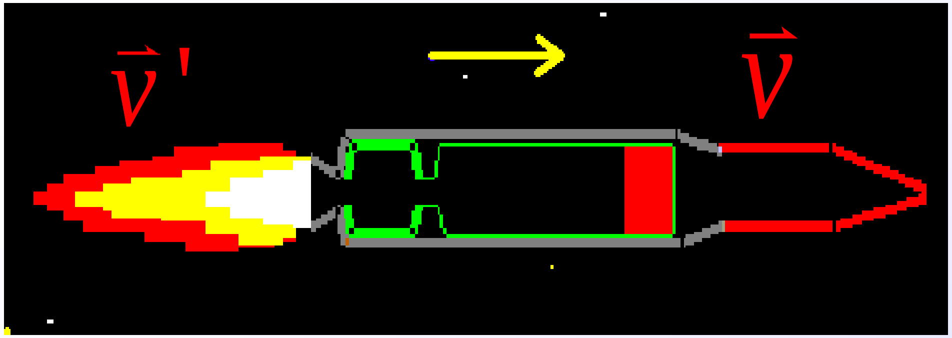
4、变质量系统中对主体F=ma不成立。

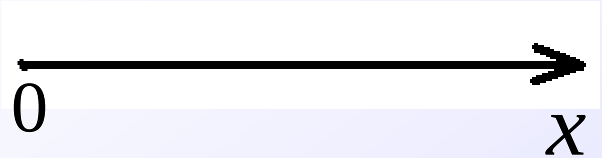
一、自由场

$\vec{F}=0$

$t=0 \quad v_0=0 \quad M_0$

燃料燃尽时：M_e





$$\boxed{\mathrm{m}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}=-\mathrm{v}'\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv=-\int_{M_0}^{M_e} v'\frac{dm}{m}$$

$$v-v_0=v'\ \ln\frac{M_0}{M_e}$$

$$v=v'\ln\frac{M_0}{M_e}$$

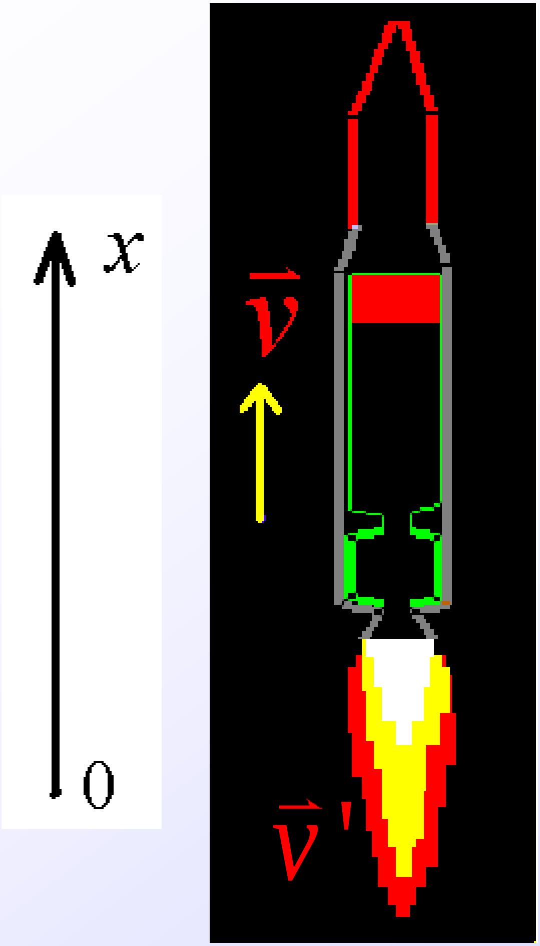
讨论：增加火箭速度的方法

①增大v’理论上可达到**5000m/s**，实际上**2500m/s**有困难；

②增加M_0/M_e，要增加质量比，只能达到**4500m/s**。

必须采用多级火箭才能真正提高速度！

二、重力场



$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -mg - \mathrm{v}'\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_0^t g\,dt - \int_{M_0}^{M_e} v'\frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = -gt + v'\ln\frac{M_0}{M_e}$$

神舟十号火箭

质点动力学

作业:

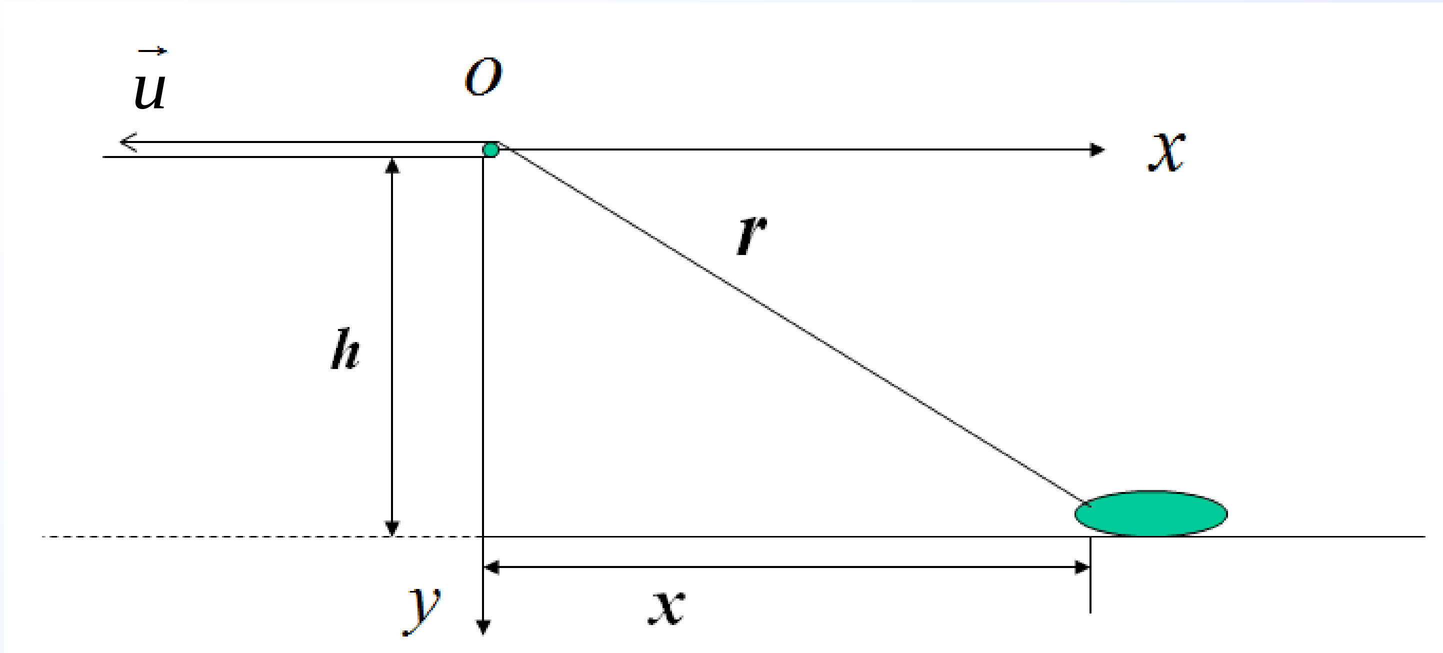
2-44

-50

-64

-68

【1-6】



求：船与岸的水平距离为x时，船的速度和加速度。

解：(1) $\vec{r} = x\vec{i} + h\vec{j}$ $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i}$ $\quad \dfrac{dr}{dt} = -u$

$$x = \sqrt{r^2 - h^2} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}}u = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}u$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}u\vec{i}$$

(2) $u = -\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}\sqrt{x^2+h^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}v_x$

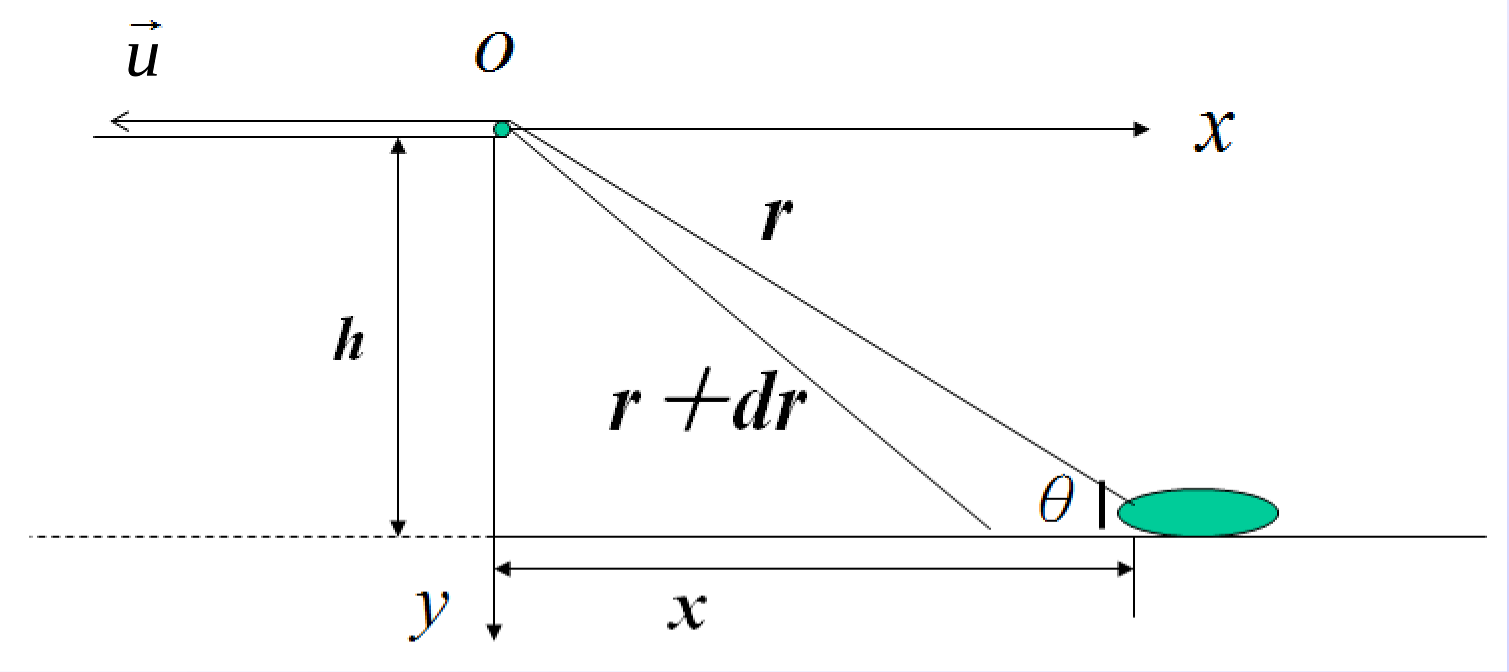
$$\vec{v} = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}u\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}u\frac{dx}{dt}\vec{i}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}u$$

$$\vec{a} = -\frac{u^2h^2}{x^3}\vec{i}$$

(3)



$$\frac{|dr|}{|dx|}=\cos\theta \qquad \frac{|dx|}{dt}=\frac{|dr|}{dt}\cdot\frac{1}{\cos\theta} \qquad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}u\vec{i}$$

【1-7】

解： $\vec{v} = -10t\vec{i} + 10\vec{j}$ $\qquad v = 10\sqrt{t^2+1}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -10\vec{i}\,(\mathrm{m/s^2}) \qquad a = 10(\mathrm{m/s^2})$$

$$\vec{v} = 10\sqrt{t^2+1} \quad \times$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{10t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \times$$

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{v}^2}{R} = 7.07 m/s^2 \quad \times$$

【1-7】

解： $\vec{v} = -10t\vec{i} + 10\vec{j}$ $\qquad v = 10\sqrt{t^2+1}$

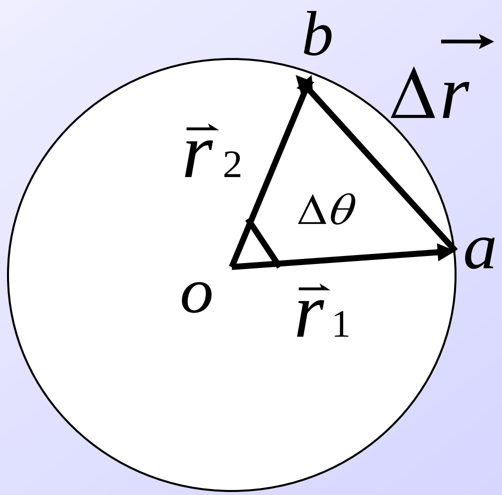
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -10\vec{i}\,(\mathrm{m/s^2}) \qquad a = 10(\mathrm{m/s^2})$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{10t}{\sqrt{t^2+1}} = 7.07m/s^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 7.07m/s^2$$

【1-14】

(1) $$\Delta S = v_0 t_2 + \frac{a_\tau t_2^{\ 2}}{2} = 7.68m$$



$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3.84m/s$$

(2) 角位移 $$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = 1.92rad$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos\Delta\theta} = 6.55m$$

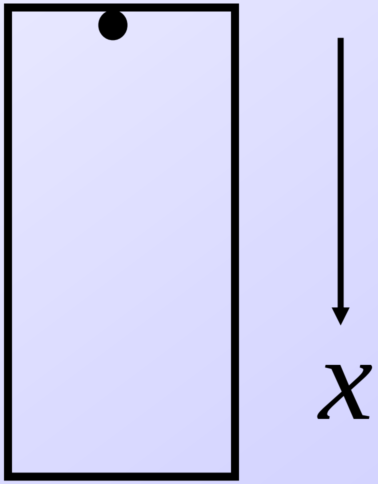
$$|\bar{\vec{v}}| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = 3.28m/s$$

【1-17】

解：（1）在K’系（升降机）：

$$a' = a - a_0 = 9.8 - (-1.2) = 11$$

$$h = \frac{1}{2}a't^2 \quad t = 0.7s$$



（2）在K系

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}a\ t^2$$

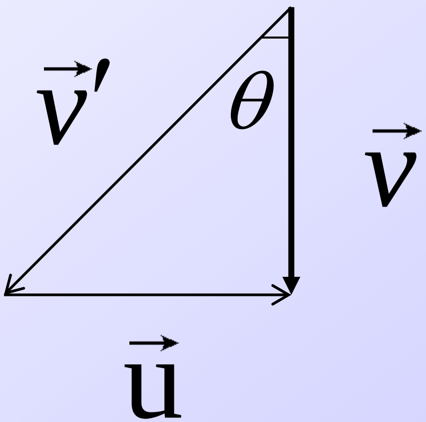
$$=(-1.2\times 2)\ \times 0.7+\frac{1}{2}\times 9.8\times 0.7^2$$

$$= 0.72(m)$$

【1-18】

解：（1）$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

$$v = \sqrt{v'^2 - u^2} = 9.2 \quad (\mathrm{m/s})$$



（2）$\theta = \sin^{-1}\dfrac{u}{v'} = \sin^{-1}\dfrac{10}{11}(°) = 65.4°$

【1-20】 **(1)**在**K**系中小球的位矢 $\vec{r}=(19.8t-\frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$

列车的位矢 $\vec{R}=4.95t\vec{i}$

$$\vec{r}'=\vec{r}-\vec{R}=-4.95t\vec{i}+(19.8t-\frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

$$\begin{cases} x'=-4.95t \\ y'=19.8t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad y'=-4x'-0.2x'^2$$

(2)在**K**系中 $\vec{a}=-9.8\vec{j}(\mathrm{m/s^2})$

在**K′**系中 $\vec{a}'=\frac{d^2\vec{y}'}{dt^2}=-9.8\vec{j}(\mathrm{m/s^2})$