《线性代数》常见证明题型及常用思路

仅供参考!!!!

二、证明题

题型 1．关于$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关性的证明中常用的结论

（1）设$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，然后根据题设条件，通过解方程组或其他手段：如果能证明$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$必全为零，则$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性无关；如果能得到不全为零的$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$使得等式成立，则$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关。

（2）$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关当且仅当其中之一可用其他向量线性表示。

（3）如果$\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in F^n$，则可通过矩阵的秩等方面的结论证明。

（4）如果我们有两个线性无关组，$\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in W_1$，$\beta_1,\ldots,\beta_t\in W_2$，且$W_1,W_2$是同一个线性空间的两个子空间，要证$\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_t$线性无关。这种情况下，有些时候我们设

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_t\beta_t=0,$$
$$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m,\beta=\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_t\beta_t。$$

根据题设条件往往能得到$\alpha=\beta=0$，进而由$\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in W_1$，$\beta_1,\ldots,\beta_t\in W_2$的线性无关得到系数全为零。

题型 2. 关于欧氏空间常用结论

（1）内积的定义

（2）单位正交基的定义

（3）设 $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 是单位正交基，

$u_B=(x_1,\ldots,x_n),v_B=(y_1,\ldots,y_n)$ 。则 $(u,v)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ 5

题型 3. 关于矩阵的秩的证明中常用的结论

（1）初等变换不改变矩阵的秩

（2）乘可逆矩阵不改变矩阵的秩

（3）阶梯形的秩

（4）几个公式（最好知道如何证明）：常用来证明关于秩的不等式

$$r(A+B)\le r(A)+r(B);$$

$$r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\};$$

$$r(A)=r(A^T)=r(A^TA);$$

$$\max\{r(A),r(B)\}\le r(A,B)=r\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}\le r(A)+r(B);$$

$$r\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B);$$

$$r(A)+r(B)\le r\begin{pmatrix}A & \\ C & B\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)+r(C);$$

$$A_{m\times n}B=0\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$$

（5）利用分块矩阵的初等变化不改变矩阵的秩（常用来证明关于秩的不等式）

例：证明：$r(A_{m\times n})+r(B)\le n+r(AB)$ 。

证：

$$n+r(AB)=r\begin{pmatrix}E_n & \\ & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E_n & \\ A & AB\end{pmatrix}$$

$$=r\begin{pmatrix}E_n & -B \\ A & 0\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$$

上面第二个等号是用 A 左乘第一个分块矩阵的第一行，然后加到第二行所得；第三个等号是用 $-B$ 又乘第二个分块矩阵的第一列，然后加到第二列所得。

（6）利用齐次线性方程组解的结构（$\dim N(A_{m\times n})=n-r(A)$），此方法也可以用来证明关于向量组的秩方面的的问题。

（7）利用向量组的秩与维数

主要是两个结论：（i）矩阵的秩=列秩=行秩

（ii）$\dim\ker\sigma+\dim\operatorname{Im}\sigma=\dim\ker\sigma+r(\sigma)=\sigma$ 的定义域的维数

（8）利用行列式秩

（9）利用相抵标准形

题型 4. 关于可逆矩阵常用结论

（1）结论：A 可逆 $\Leftrightarrow AX=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$。

（2）结论：$A,B\in M_n(F)$ 可逆 $\Leftrightarrow AB$ 可逆。

（3）结论：A 可逆当且仅当可以写为初等矩阵的乘积。

（4）结论：A 可逆当且仅当 0 不是它的特征值。

题型 5. 关于矩阵对角化的常用结论

（1）结论： A 相似于 $B\Leftrightarrow \exists C\quad s.t.\quad A=C^{-1}BC$。

（2）结论：任一个复数域上的方阵都相似于一个若当形矩阵。

（3）特征值与特征向量的定义

（4）结论：λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$ 。

（5）结论：属于不同特征值的特征向量线性无关。

（6）结论：特征多项式的常数项就是它的行列式，它的第 n-1 次项的系数就是对角线上元素之和。

（7）结论：$AX = \lambda X \Rightarrow \forall h(x) \in F[x], h(A)X = h(\lambda)X$ 。

（8）结论：课本 P242 定理 7.8。

（9）结论：课本 P242 推论。

（10）结论：课本 P243 定理 7.10。

（11）结论：实对称矩阵一定可以通过正交矩阵对角化。

题型 6. 关于二次型的常用结论：

（1）定义：二次型的矩阵。

（2）定义：相合关系。

（3）实对称矩阵的相似标准形、相合标准形与相合规范形的区别。

（4）定义：课本 P263 定义 7.12 与 P269 定义 7.12

（5）实对称矩阵的正、负惯性指数与特征值的关系。

（6）结论：课本 P264 定理 7.17、7.18、7.19

（7）结论：课本 P269 定义下面的内容

重要建议：最好把课本第七章内容全部记住！