浙江大学 2005－2006 学年春季学期

《 微积分Ⅱ 》课程期末考试试卷

开课学院：__理学院__ 考试形式：闭卷 考试时间：　　　年　　月　　　日 所需时间：__120__ 分钟

考生姓名：______________ 学号：________________ 专业：____________________

一、 填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1．设 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3, |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{3}$, 则 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=$ ____________________.

2．两平行平面 $x-2y+2z-5=0,\ x-2y+2z+4=0$ 之间的距离 $d=$ ______ .

3．设函数 $f(x,y)$ 可微，$g(x)$ 可导，$z=f(xy,\ \ln x+g(xy))$, 则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{\qquad\qquad}.$$

4．设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (e^x-e^{-y})\,\mathrm{d}\sigma=$ ______________ .

二、 选择题（每小题 4 分，共 16 分. 每小题所给 4 个选项中只有 1 个是符合题目要求的，把所选的字母填在题后的括号内）.

5． 设 直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $P:\ 4x-2y+z-2=0$，则直线 L

(A) 平行于 P 但不在 P 上.　　　　(B) 在 P 上.

(C) 垂直于 P.　　　　(D) 与 P 斜交.　　　　【　　】

6. 设 D 为曲线 $y=\sin x$ 介于 $x=0$ 与 $x=2\pi$ 之间的弧段与 x 轴所围成的有界闭区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=$

① $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$

② $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$

③ $\int_0^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$

④ $\int_0^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$

正确的是 (A) ①与②　　(B) ①与④　　(C) ②与③　　(D) ②与④　　【　　】

7.二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 连续，偏导数存在.　　　　(B) 不连续，偏导数存在.

(C) 连续，偏导数不存在.　　　　(D) 不连续，偏导数不存在.　　【　　】

8． 已知四个点 $P_1(-2,1,1)$, $P_2(2,-1,1)$, $P_3(1,-2,1)$, $P_4(-1,2,1)$ 都满足方程 $F(x,y,z)=x^2+xy+y^2+z^2-2z-2=0$, 则由方程 $F(x,y,z)=0$ 必可确定出惟一的连续可微函数.

(A) $z=z(x,y)$ 并满足 $z(-2,1)=1$.　　(B) $y=y(x,z)$ 并满足 $y(-1,1)=2$.

(C) $y=y(x,z)$ 并满足 $y(2,1)=-1$　　(D) $x=x(y,z)$ 并满足 $x(-2,1)=1$.　　【　】

三、 **解答题（9 至 15 每题 9 分，第 16 题 5 分）**

9． 设由 $e^{z+u}-xy-yz-zu=0$ 确定函数 $u=u(x,y,z)$, 点 $P(1,1,0)$.

① 求 $\mathrm{d}u\,|_P$；　② 求 u 在点 P 处的方向导数的最大值.

10． 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面方程，使该切平面与直线 $L:\begin{cases}2x-y-z+2=0\\3y+2z-12=0\end{cases}$ 垂直.

11．经过第一卦限中的点 (a,b,c) 作平面，使与三坐标轴的正向都相交，并且与三坐标平面构成的四面体体积为最小，求该平面方程及此最小值.

12. 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,y\le x\le\sqrt{y},0\le y\le 1\}$.

13．计算 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2)(4a^2-x^2-y^2)}}$ $(a>0)$.

14．设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，计算 $\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}\sigma$.

15．计算 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1+y+xy^2}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$.

16． 设 $\varphi(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 的某邻域内有定义，且在点 $O(0,0)$ 处连续，若 $\varphi(0,0)=0$，试证明函数 $f(x,y)=|x-y|\,\varphi(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处可微，并求 $\mathrm{d}f\,|_{(0,0)}$.

参考解答：

一．1．$\dfrac{\pi}{6}$;　　2．3;　　3．f_2'；　4．0.

二．5．C;　6.D;　7.A;　8.B.

三．9．点$P(1,1,0)$处，$e^u-1=0 \Rightarrow u(1,1,0)=0$

$$e^{z+u}(dz+du)-ydx-xdy-ydz-zdy-udz-zdu=0$$

点$P(1,1,0)$处，$dz+du-dx-dy-dz=0$，

$$\therefore\ \mathrm{d}u|_P=dx+dy,\quad \mathrm{grad}\,u(P)=\{1,1\},\quad \therefore\ \max\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=|\mathrm{grad}\,u(P)|=\sqrt{2}.$$

10. 设切平面的切点(x_0,y_0,z_0)，故 法矢量 $\vec{n}=\{x_0,2y_0,3z_0\}$，

又可求得直线的方向矢量：$\vec{v}=\{1,-4,6\}//\vec{n}$，从而

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-4}=\frac{3z_0}{6}\Rightarrow y_0=-2x_0,\ z_0=2x_0,\quad x_0^2+8x_0^2+12x_0^2=21\Rightarrow x_0^2=1\Rightarrow x_0=\pm1$$

得切点：$P_1(1,-2,2),\ P_2(-1,2,-2)$，法矢量：$\vec{n}=\{1,-4,6\}$，

则所求切平面方程：$x-4y+6z-21=0$ 及 $x-4y+6z+21=0$

11．平面与三坐标轴的截距x,y,z，有$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1$，$V=\dfrac{1}{6}xyz\ \ (x>0,y>0,z>0)$

设 $L=xyz+\lambda(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}-1)$

$$\begin{cases} L_x'=yz-\lambda a\dfrac{1}{x^2}=0 \\ L_y'=xz-\lambda b\dfrac{1}{y^2}=0 \quad \Rightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{3} \\ L_z'=xy-\lambda c\dfrac{1}{z^2}=0 \quad \Rightarrow \text{驻点}: x=3a,\ y=3b,\ z=3c \\ L_\lambda'=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}-1=0 \end{cases}$$

求得平面方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3$，体积最小值：$V_{\min}=\dfrac{9}{2}abc$.

12．$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x(e-e^x)\mathrm{d}x=\frac{e}{2}-(xe^x-e^x)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$$

13．原式$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{r^2(4a^2-r^2)}}\cdot r\,\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\arcsin(\frac{-2a\sin\theta}{2a})\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}-\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{32}$$

14．原式$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{10}+\frac{8}{30}=\frac{11}{30}$$

15．原式＝$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1+rsin\theta}{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1+2(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot(r-\arctan r)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2+2-\frac{\pi}{2}$$

16. $\varphi(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处连续，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x, y)=\varphi(0, 0)=0$,

$$f_x'(0, 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x, 0)}{x}=0,$$

$$f_y'(0, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0, y)-f(0, 0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|\varphi(0, y)}{y}=0,$$

$$\because\quad \frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le 2,\quad \lim_{\rho\to 0}\varphi(\Delta x, \Delta y)=0$$

故 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x'(0, 0)\Delta x-f_y'(0, 0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$,

则 $f(x, y)=|x-y|\varphi(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f\,|_{(0, 0)}=0$.