$$a_{max}=\frac{D'}{d}\lambda$$

$$=\frac{0.3}{0.5\times10^{-3}}\times5.89\times10^{-7}$$

$$=3.54\times10^{-4}\text{m}=0.354\text{mm}$$

第十七章　光的衍射

17.1　波长 $\lambda=632.8\text{nm}$ 的单色平行光垂直入射缝宽为 0.20mm 的单缝。紧靠缝后放置焦距为 60cm 的会聚透镜，观察屏置于焦平面上。试求屏上中央明纹的宽度。

解　单缝衍射的中央明纹宽度由两个第一级暗条纹中心确定

$$\Delta x=2f\text{tg}\theta_1\approx2f\sin\theta_1$$

$$=\frac{2f\lambda}{a}=\frac{2\times0.6\times6.328\times10^{-7}}{0.2\times10^{-3}}$$

$$=3.8\times10^{-3}\text{m}=3.8\text{mm}$$

17.2　用波长 $\lambda=589.3\text{nm}$ 的钠黄光作单缝夫琅禾费衍射实验的光源。使用焦距为 100cm 的透镜，测得第一级暗纹离中心的线距离为 1.0mm。求单缝的宽度。

解　单缝衍射中第一级暗纹离中心距离为

$$x_1=f\text{tg}\theta_1\approx f\sin\theta_1=\frac{f\lambda}{a}$$

$$a=\frac{f\lambda}{x_1}=\frac{1\times5.893\times10^{-7}}{10^{-3}}$$

$$=5.89\times10^{-4}\text{m}=0.589\text{mm}$$

17.3　在单缝夫琅禾费衍射实验装置中，单缝宽度为 0.50mm，透镜焦距为 50cm。若用平行白光垂直照射单缝，在观察屏上离中心 1.5mm 处出现明条纹，试问此明纹呈现什么颜色？

解　单缝衍射的明纹公式为

$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}\qquad k=1,2,3\cdots$$

又因为 $\sin\theta\approx \mathrm{tg}\theta\approx\frac{x}{f}$，故有

$$\lambda=\frac{2ax}{(2k+1)f}$$

取	$k=1$	$\lambda=1000\mathrm{nm}$	红外看不见
	$k=2$	$\lambda=600\mathrm{nn}$	黄色
	$k=3$	$\lambda=428.6\mathrm{nm}$	紫色
	$k=4$	$\lambda=333.3\mathrm{nm}$	紫外看不见

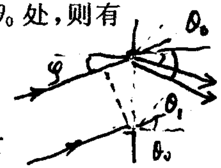
故此明纹呈紫黄色。

17.4　在单缝夫琅禾费衍射实验中，若单色平行光斜向入射单缝，试证明衍射中央明纹的半角宽度为

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{a\cos\varphi}$$

式中 a 为缝宽，φ 为入射光与衍射屏法线的夹角。

解　设斜入射时中央明纹中心的角位置在 θ_0 处，则有



$$a(\sin\theta_0-\sin\varphi)=0$$

$$\theta_0=\varphi$$

而第一级暗纹角位置在 θ_1 处，根据暗条纹公式有

$$a(\sin\theta_1-\sin\varphi)=\lambda$$

将上式改写

$$\frac{\sin\theta_1-\sin\varphi}{\Delta\theta}\Delta\theta=\frac{\lambda}{a}\qquad(1)$$

因为　$\sin\theta_1-\sin\varphi=\sin\theta_1-\sin\theta_0=\Delta\sin\theta=\cos\theta\cdot\Delta\theta=\cos\theta_0\cdot\Delta\theta$

$$(\sin\theta_1-\sin\varphi)=\Delta\sin\theta=\cos\theta\Delta\theta\approx\cos\theta_0\Delta\theta$$

故

$$\frac{\sin\theta_1-\sin\varphi}{\Delta\theta}\approx\cos\theta_0=\cos\varphi$$

将上式代入(1)式，得

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{a\cos\varphi}$$

17.5　波长 $\lambda=500\mathrm{nm}$ 的单色平行光，以角 $\varphi=30°$(与衍射屏的法线间的夹角)入射单缝衍射屏。测得第二级暗纹出现在衍射角 $\theta=30°15'24''$处。试求单缝的宽度。

解　当入射光和衍射光在单缝法线两侧时，其暗纹公式为

$$\delta=a(\sin\varphi-\sin\theta)=\pm2\lambda$$

故

$$a=\frac{-2\lambda}{\sin\varphi-\sin\theta}$$

$$=\frac{2\times5.0\times10^{-7}}{0.0034}\quad 3.87\times10^{-3}$$

$$=0.3\times10^{-3}\mathrm{m}=\cancel{0.3\mathrm{mm}}\quad 2.58\,\mathrm{mm}$$

当入射光和衍射光在单缝法线同侧时，其暗纹公式为

$$\delta=a(\sin\varphi+\sin\theta)=\pm2\lambda$$

故

$$a=\frac{2\lambda}{\sin\varphi+\sin\theta}$$

$$=\frac{2\times5.0\times10^{-7}}{1.0034}$$

$$=10^{-6}\mathrm{m}=1\mu\mathrm{m}$$

17.6　用波长 $\lambda=480\mathrm{nm}$ 光垂直照射一双缝，两缝宽度均为 $a=0.080\mathrm{mm}$，缝间距 $d=0.40\mathrm{mm}$，紧靠缝后放置焦距 $f=2.0\mathrm{m}$ 的透镜，观察屏置于透镜焦平面处。求：

(1)在屏上单缝衍射中央亮纹范围内，双缝干涉亮纹的数目；

(2)双缝干涉条纹的间距 Δx。

解　(1)单缝衍射中央明纹的衍射角范围为

$$-\frac{\lambda}{a}\leqslant\sin\theta\leqslant\frac{\lambda}{a}$$

干涉明纹公式为

$$d\sin\theta=\pm k\lambda$$

故在中央明纹范围为

$$k_{max}=\frac{d}{\lambda}\frac{\lambda}{a}=\frac{d}{a}=5$$

因为$\frac{d}{a}=5$,故第五级明纹缺级,能呈现的条纹级数为 0,±1,±2,±3,±4,共 9 条。

(2)双缝干涉条纹的间距

$$\Delta x=\frac{f}{d}\lambda=\frac{2\times4.8\times10^{-7}}{0.4\times10^{-3}}=2.4\times10^{-3}\text{m}$$

17.7 一块每厘米刻有 6000 条刻线的光栅,用白光垂直照射。计算第一级和第二级衍射光谱之间的角距离。

解 光栅常数 $d=\frac{1.0\times10^{-2}}{6000}=\frac{1}{6}\times10^{-5}\text{m}$

白光波长 λ 在 400nm～760nm 之间,由光栅方程

$$d\sin\theta=k\lambda,\qquad k=0,1,2,\cdots$$

在 $\lambda_1=760\text{nm}$ 的第一级明纹处衍射角为

$$\theta_1=\arcsin\frac{\lambda_1}{d}=27°8'$$

而在 $\lambda_2=400\text{nm}$ 的第二级明纹处衍射角为

$$\theta_2=\arcsin\frac{2\lambda_2}{d}=28°41'$$

两级光谱之间的角距离为

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=1°33'$$

17.8 汞灯发出波长为 546nm 的绿色平行光,以与光栅面的法线成 $i=30°$ 夹角斜向照射透射光栅。已知光栅每毫米有 500 条刻线,求谱线的最高级次,以及在屏上呈现的全部衍射增线,并和光线垂直入射时作比较。

解 光栅常数 $d=\frac{10^{-3}}{500}=2\times10^{-6}\text{m}$,当光线以跟光栅法线成 i 角斜入射时,光栅方程变成

$$d(\sin i\pm\sin\theta)=\pm k\lambda,\qquad k=0,1,2,\cdots$$

显然,对最高级次,上式左边取加号,并且 $\theta=90°$,故有

$$k_{max}=\frac{d(\sin i+\sin\theta)}{\lambda}$$

$$=\frac{2\times10^{-6}\times(\sin30°+\sin90°)}{5.46\times10^{-7}}$$

$$=5.5$$

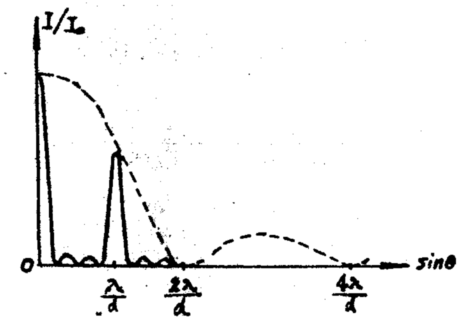
取整数,得最高级次为 5。

对垂直入射的光线,$i=0$,最高级次为

$$k_{max}=\frac{d\sin\theta}{\lambda}=\frac{2\times10^{-6}\times\sin90°}{5.46\times10^{-7}}=3.7$$

最高级次为 3,比斜入射时级次低。

17.9 一透射光栅总缝数 $N=4$,光栅常数和缝宽之比 $d:a=2:1$。用波长 λ 的单色平行光垂直照射。试画出衍射极大和极小的分布图(以 $\sin\theta$ 为横轴,相对光强 I/I_0 为纵轴)。



解 17.9 图

解 如图所示,单缝的中央极大范围内共有三条主极大,左右两边第 2 级主极大缺级,在相邻的两主极大之间存在三个极小值和个次极大。

17.10 利用一个每厘米有 4000 条刻痕的光栅,可以观测到多少个完整的可见光谱?

解 光栅常数 $d=\dfrac{10^{-2}}{4000}=2.5\times10^{-6}\text{m}$

可见光波长 λ 在 400nm～760nm 之间，由光栅方程

$$d\sin\theta=\pm k\lambda,\qquad k=0,1,2,\cdots$$

对比分析可知，第二级光谱中红光的衍射角大于第三级光谱中紫光的衍射角，因此可见光谱中第二级已和第三级发生重叠，所以完整的可见光谱只有 1 级，共有 2 个完整的光谱。

17.11 为了测定一个给定的光栅的光栅常数，用氦氖激光器的红光（$\lambda=632.8\text{nm}$）垂直照射光栅，已知第一级明纹出现在 38°的方向，试问：

（1）这个光栅的光栅常数是多少？

（2）若用此光栅对某单色光进行同样的实验，测得第一级明纹出现在 27°方向，问这单色光的波长为多少？对该单色光至少可看到第几级明条纹？

解 （1）由光栅方程 $d\sin\theta=\pm k\lambda$，且第一级明纹的衍射角 $\theta_1=38°$，则

$$d=\frac{\lambda}{\sin\theta_1}=\frac{632.8\times10^{-9}}{\sin38°}$$
$$=1.028\times10^{-6}\text{m}$$
$$=1.028\times10^{-3}\text{mm}$$

（2）对某波长为 λ' 的单色光，$\theta_1'=27°$

$$\lambda'=d\sin\theta_1'=4.667\times10^{-7}\text{m}=466.7\text{nm}$$

相应的最高级次

$$k_{\max}=\frac{d\sin90°}{\lambda'}$$
$$=\frac{1.028\times10^{-6}\times1}{4.667\times10^{-7}}$$
$$=2.2$$

故最高级次为 2

17.12 波长 600nm 的单色光垂直入射到一光栅上，相邻的两

明条纹分别出现在 $\sin\varphi=0.20$ 与 $\sin\varphi=0.30$ 处，第四级缺级。试问：

（1）光栅上相邻两缝的间距有多大？

（2）光栅上狭缝可能的最小宽度等于多少？

（3）按上述选定的 a、b 值，试列举光屏上实际呈现的全部级数。

解 由光栅方程 $d\sin\varphi_1=k\lambda$

$$d\sin\theta=\pm k\lambda,\qquad k=0,1,2,\cdots \qquad d\sin\varphi_2=(k+1)\lambda$$

（1） $d=\dfrac{k\lambda}{\sin\theta}\overset{?}{=}\dfrac{2\times600\times10^{-9}}{0.2}=6.0\times10^{-6}\text{m}$ $d(0.3-0.2)=\lambda$

（2）因为第四级缺级，即有

$$\left.\begin{aligned}a\sin\theta&=\lambda\\ d\sin\theta&=4\lambda\end{aligned}\right\}\text{同时成立}$$

$k_2=\dfrac{d}{a}k_1=4,$

$$a=\frac{d}{4}=1.5\times10^{-6}\text{m}$$

$k_1=1或2,\ \dfrac{d}{a}=4或2$

$a=\dfrac{d}{4}$ 或 $\dfrac{d}{2}$

（3）能出现的最高级次

$$k_{\max}=\frac{d\sin90°}{\lambda}=\frac{6\times10^{-6}\times1}{6\times10^{-7}}=10$$

因 $k=\pm10$ 时明条纹的衍射角 $\theta=90°$，到达不了屏上，再考虑到 ±4、±8 缺级，故实际在光屏上呈现的全部级数为 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$，共 15 条。

17.13 波长为 λ 的单色平行光斜向入射光栅，与光栅面法线的夹角 $i=45°$。已知光栅常数和缝宽之比 $d:a=3:2$，试问哪些级次的衍射谱线可能缺级。

解 斜入射时光栅方程为

$$d(\sin i\pm\sin\theta)=\pm k\lambda,\qquad k=0,1,2,\cdots$$

而单缝衍射极小值出现在

$$a(\sin i\pm\sin\theta')=\pm k'\lambda,\qquad k'=1,2,3,\cdots$$

当 $\theta=\theta'$ 时，出现缺级现象，将上二式相除可得

$$\frac{d}{a}=\frac{k}{k'}$$

故可能缺级的级数为

$$k=\frac{d}{a}k'=\frac{3}{2}k', \qquad k'=1,2,3\cdots$$

即 $k=3,6,9\cdots$时，主极大出现缺级。

17.14 当用白光照射衍射光栅时，观察到第二级和第三级光谱彼此部分地重叠。试问第三级光谱的紫色边界（$\lambda=400\text{nm}$）和第二级光谱中的哪一波长的谱线相重叠？

解 两谱线衍射角相同就会重叠，由光栅方程有

$$d\sin\theta=3\lambda=2\lambda'$$

所求第二级光谱中的波长

$$\lambda'=\frac{3}{2}\lambda=600\text{nm}$$

17.15 用波长 $\lambda=589.3\text{nm}$ 的单色平行钠黄光作光源，垂直照射总缝数 $N=491$ 条的光栅，在第二级谱线中，刚能分辨出有两条谱线。试问此谱线的波长差 $\Delta\lambda$ 是多少？

解 由光栅的分辨本领

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=Nk$$

得波长差

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{kN}=\frac{589.3}{2\times491}=0.6\text{nm}$$

17.16 在氢和氘混合气体的发射光谱中，波长为 656nm 的红色谱线是双线，双线的波长差为 0.18nm。为能在光栅的第二级光谱中分辨它们，光栅的刻线数至少需要多少？

解 由光栅分辨本领

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=Nk$$

得光栅的刻线数

$$N=\frac{\lambda}{k\Delta\lambda}=\frac{656}{2\times0.18}=1822$$

17.17 试按下列要求设计光栅：当白光垂直照射时，在 30°衍射方向上观察到波长为 600nm 的第二级主极大，且能分辨 $\Delta\lambda=0.05\text{nm}$ 的两条谱线，同时在该处不出现其他谱线的主极大。

解 在 $\theta=30°$的方向上出现第二级主极大，由光栅方程 $d\sin\theta=\pm k\lambda$，知光栅常数为

$$d=\frac{2\lambda}{\sin30°}=\frac{2\times6.0\times10^{-7}}{0.5}$$
$$=2.4\times10^{-6}\text{m}=2400\text{nm}$$

由光栅分辨本领

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=Nk$$

$$N=\frac{\lambda}{k\Delta\lambda}=\frac{600}{2\times0.05}=6000$$

白光波长 λ 在 400nm～760nm 之间，在垂直入射时，$\theta=30°$时，k 取 3 可求出 $\lambda=400\text{nm}$，表明波长 400nm 的第三级主极大也应出现在该衍射方向，但与题意不符，就是说第三级主极大缺级，故

$$a=\frac{d}{3}=800\text{nm}$$

两缝间距 $b=d-a=1600\text{nm}$

因此满足上述条件光栅的光栅常数为 2400nm，缝宽为 800nm，总缝数 $N=6000$ 条。

17.18 为使望远镜能分辨角间距为 $3.00\times10^{-7}\text{rad}$ 的两颗星，其物镜的直径至少应多大？（可见光中心波长为 550nm）

解 最小分辨角 $\theta_{\min}=1.22\dfrac{\lambda}{D}$，故

$$D=1.22\frac{\lambda}{\theta_{\min}}=\frac{1.22\times5.5\times10^{-7}}{3.0\times10^{-7}}=2.24\text{m}$$

17.19 用人眼观察远方的卡车车前灯。已知两车前灯的间距为 1.50m，一般环境下人眼瞳孔直径为 3.0mm，视觉最敏感的波长为 550nm，问人眼刚能分辨两车灯时卡车离人有多远？

解 最小分辨角

$$\theta_{min}=1.22\frac{\lambda}{D}=\frac{\Delta x}{l}$$

$$l=\frac{D\Delta x}{1.22\lambda}=\frac{3.0\times10^{-3}\times1.5}{1.22\times5.5\times10^{-7}}=6.7\times10^{3}\text{m}$$

17.20 **在理想情况下，试估计在火星上两物体的线距离为多大时刚好被地球上的观察者所分辨：**

(1)用肉眼；

(2)用 5.08m 孔径的望远镜。已知地球至火星的距离为 8.0×10^{7}km，人眼瞳孔的直径为 3.0mm，光的波长为 500nm。

解 最小分辨角

$$\theta_{min}=1.22\frac{\lambda}{D}$$

θ_{min}很小，故距离 h 处的最小分辨距离为

$$l=h\theta_{min}=1.22\frac{h\lambda}{D}$$

(1)设人眼瞳孔为 D_1，$D_1=3$mm，则

$$l_1=1.22\frac{h\lambda}{D_1}=1.63\times10^{7}\text{m}=1.63\times10^{4}\text{km}$$

(2)设望远镜口径为 D_2，$D_2=5.08$m

$$l_2=1.22\frac{h\lambda}{D_2}=9.61\times10^{3}\text{m}=9.61\text{km}$$

17.21 **一束 X 射线含有 0.095nm 到 0.13nm 范围内的各种波长，以掠射角 $\theta=45°$入射到晶体上。已知晶格常数 $d=0.275$nm。试问晶体对哪些波长的 X 射线产生强反射？**

解 由布喇格公式

$$2d\sin\theta=k\lambda,\qquad k=1,2,3\cdots$$

得

$$\lambda=\frac{2d\sin\theta}{k}$$

当 $k=1$ 时 $\lambda=2\times0.275\times\sin45°=0.389$nm 在范围外

$k=2$ $\lambda=\frac{0.389}{2}=0.194$nm 在范围外

$k=3$ $\lambda=\frac{0.389}{3}=0.130$nm 在范围内

$k=4$ $\lambda=\frac{0.389}{4}=0.097$nm 在范围内

$k=5$ $\lambda=\frac{0.389}{5}=0.078$nm 在范围外

所以只有 $\lambda=0.130$nm 和 $\lambda_2=0.097$nm 时出现强反射。

17.22 **已知晶体的晶格常数为 0.3nm，X 光在晶体上衍射时，在掠射角为 30°的方向上出现第一级谱线，试求此 X 射线的波长。**

解 由布喇格公式

$$2d\sin\theta=k\lambda,\qquad k=1,2,\cdots$$

当 $k=1$ 时有

$$\lambda=2d\sin\theta=2\times0.3\times\frac{1}{2}=0.3\text{nm}$$