第4章　电路分析方法与电路定理

4.3 电路定理

4.3.1 叠加定理

4.3.2 替代定理

4.3.3 戴维南（诺顿）定理

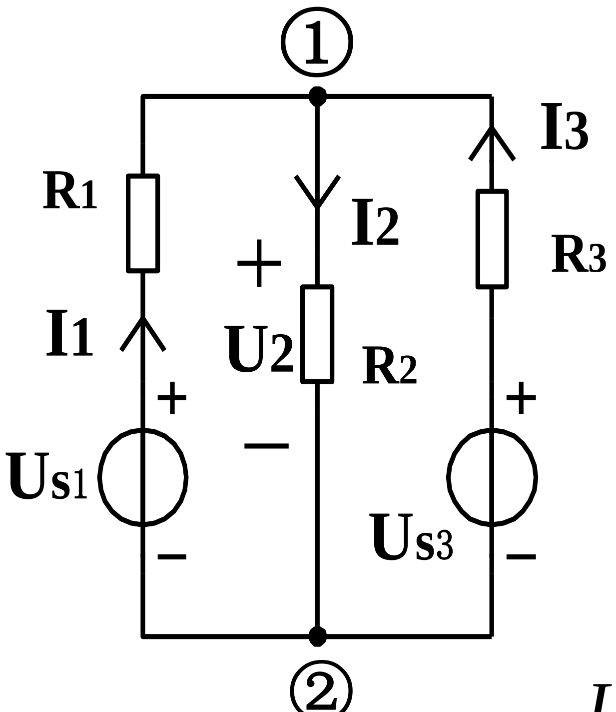
4.3.4 最大功率传输定理

4.3.5 特勒根定理与互易定理

4.3.6* 对称性原理

4.3.7* 密勒定理

爱班讲



由节点电压法可得支路2的电压为

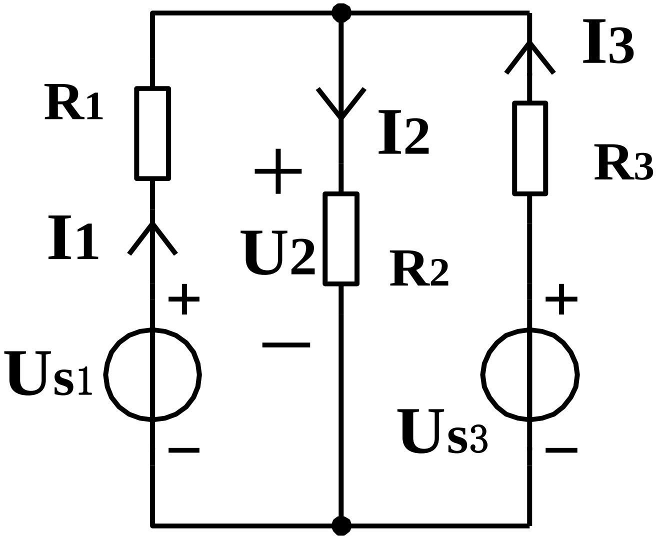
叠加原理

$$U_2 = U_2' + U_2''$$

$$U_2 = k_1 U_{s1} + k_2 U_{s2}$$

齐性原理

$$U2 = \frac{\frac{Us1}{R1} + \frac{Us3}{R3}}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}} = \frac{\frac{Us1}{R1}}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}} + \frac{\frac{Us3}{R3}}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}}$$



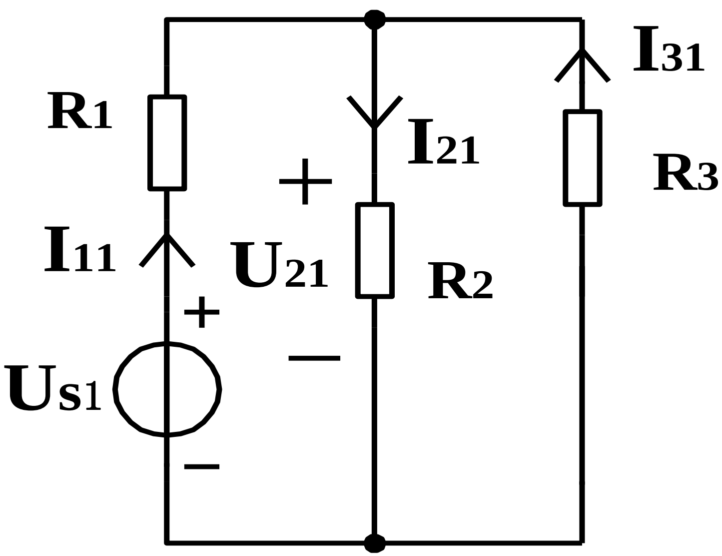
支路电压和支路电流的迭加

=∑（各电源单独激励下电路的响应）

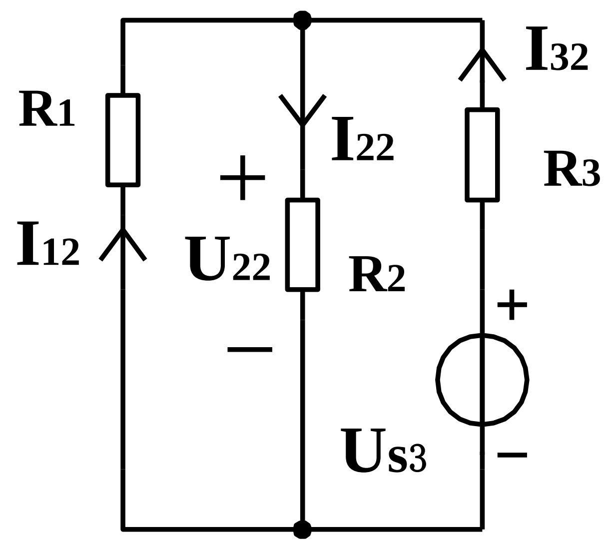
叠加原理

$$U_2 = U_2' + U_2''$$

$$U_2 = U_{21} + U_{22}$$



+



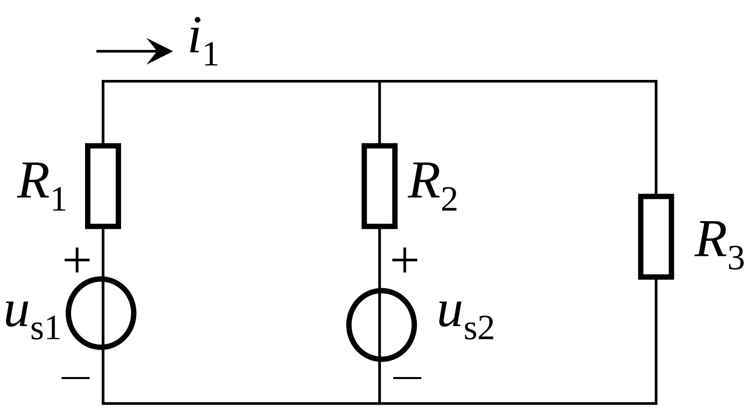
4.3.1 叠加定理（*Superposition Theorem*）

叠加定理：

在线性电路中，任一支路电流（或电压）都是电路中各个独立电源单独作用时，在该支路产生的电流（或电压）的代数和。

单独作用：一个独立电源作用，其余独立电源不作用

不作用的
- 电压源（$u_S=0$） 短路
- 电流源 （$i_S=0$） 开路



仅由Us1产生

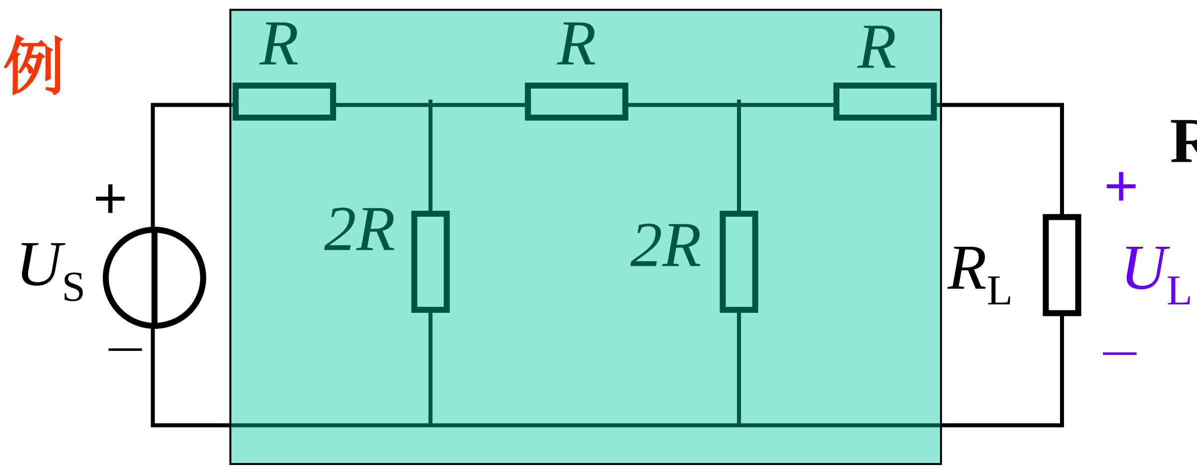
理解1 $i_1 = i_1' + i_1''$

理解2 $i_1 = k_1 u_{s1} + k_2 u_{s2}$

齐性原理（*homogeneity property*)

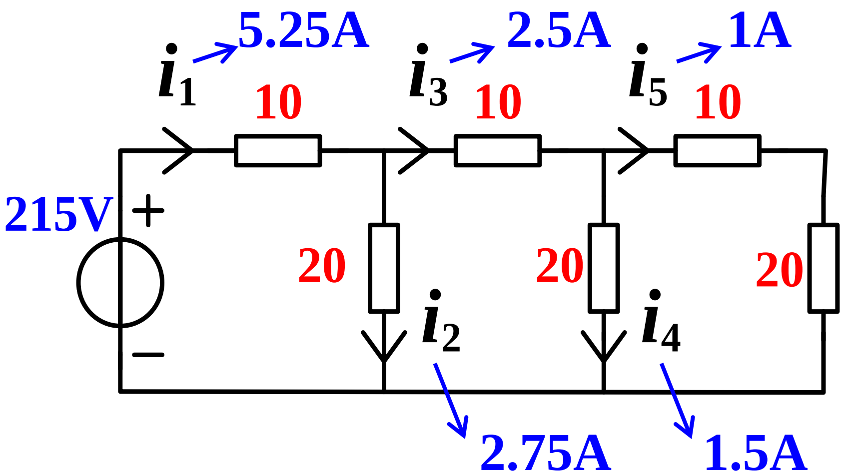
当电路中只有一个激励(独立源)时，则响应(电压或电流)与激励成正比。

例



求如图示电路中R_L=2R时的电压U_L。

例. 求各支路电流.(倒递推法)



解：设 $i_{5a}=1A$，则

$$i_{4a}=1.5A$$

$$i_{3a}=i_{5a}+i_{4a}=2.5A$$

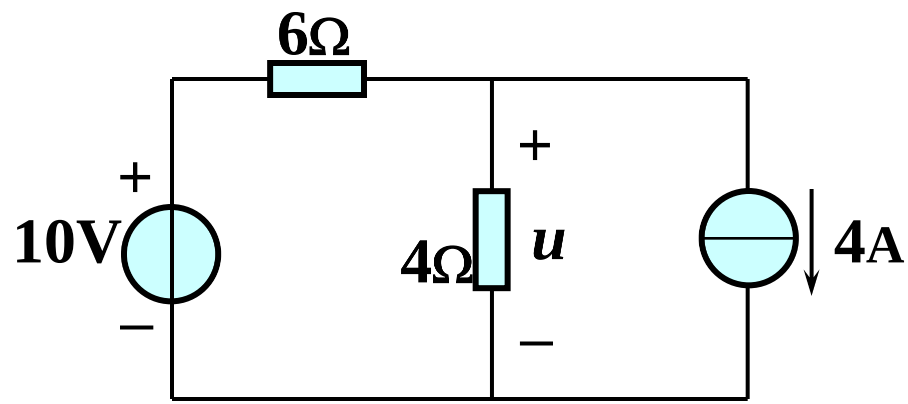
$$i_{2a}=\frac{2.5\times10+30}{20}=\frac{55}{20}=2.75A \qquad i_{1a}=i_{2a}+i_{3a}=5.25A$$

$$u_{Sa}=10\times i_{1a}+55=52.5+55=107.5V$$

实际电源电压为215V，由线性定律可知

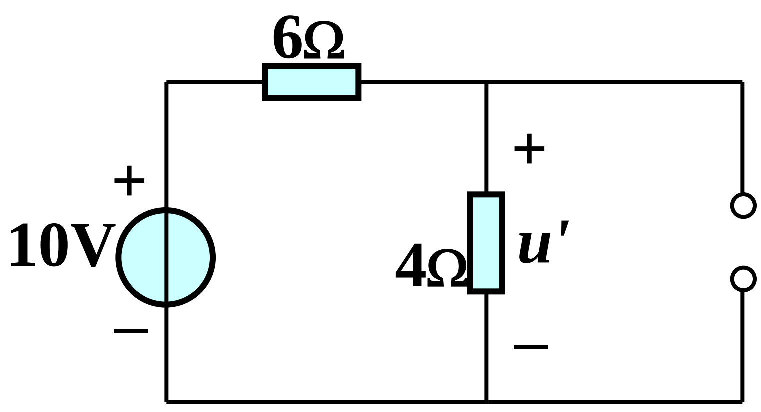
$$107.5:215=i_{5a}:i_5 \qquad i_5=\frac{215}{107.5}i_{5a}=2A$$

例1. 用叠加定理求图中电压*u*。



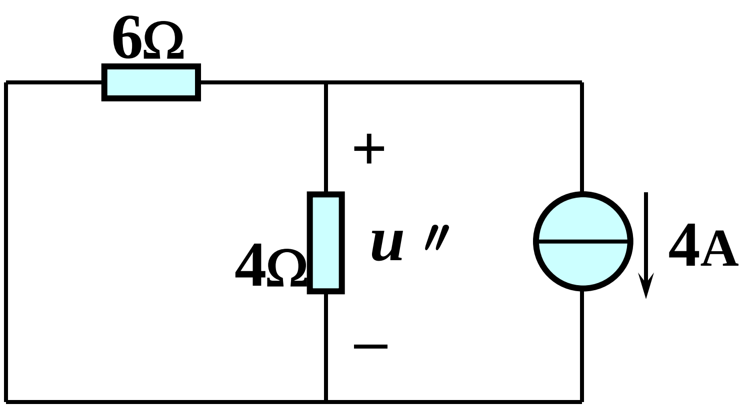
解：

(1) 10V电压源单独作用，4A电流源开路



$u' = 4\text{V}$

(2) 4A电流源单独作用，10V电压源短路



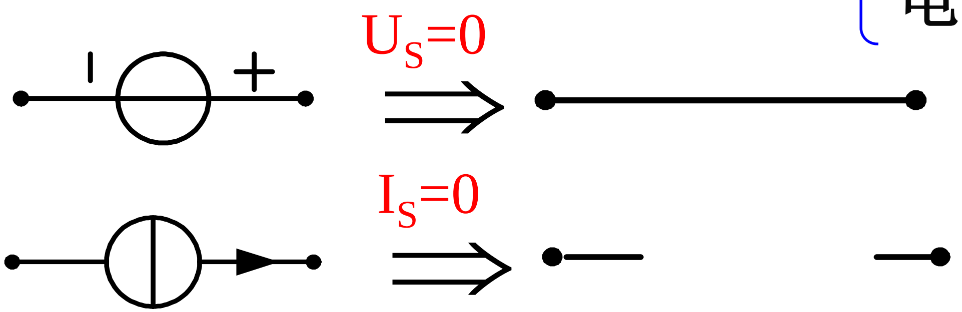
$u'' = -4\times 2.4 = -9.6\text{V}$

共同作用：$u = u' + u'' = 4 + (-9.6) = -5.6\text{V}$

应用叠加定理时注意以下几点：

1. 叠加定理只适用于线性电路求电压和电流。

2. 一个电源作用，其余电源为零
- 电压源为零—短路。
- 电流源为零—开路。



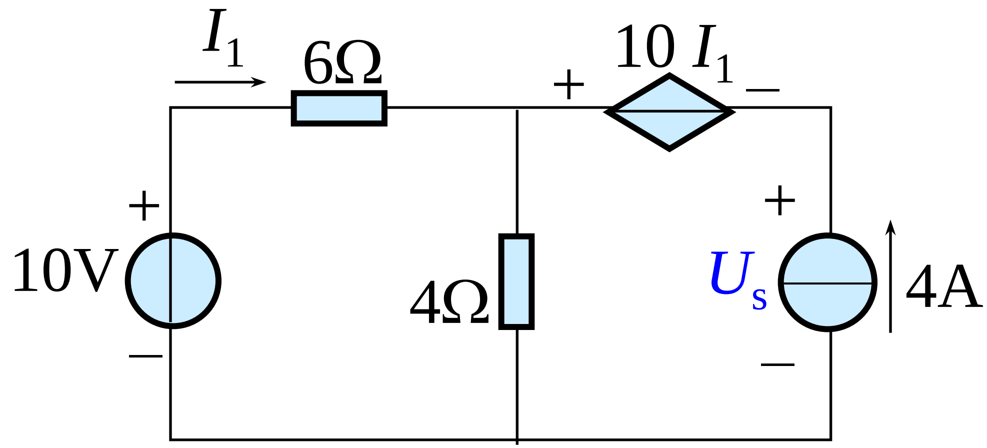
3. 功率不能叠加(功率为电源的二次函数)。

$$P_R = I^2 R = (I' + I'')^2 R \neq I'^2 R + I''^2 R$$

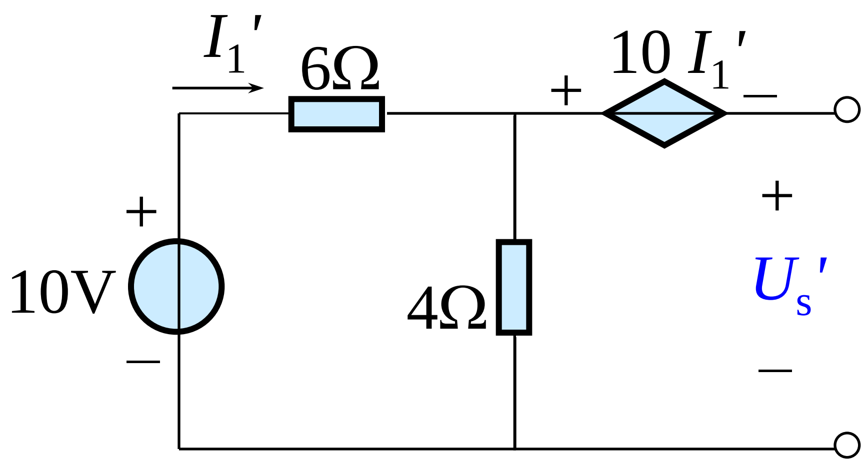
4. *u*,*i* 叠加时要注意各分量的参考方向。

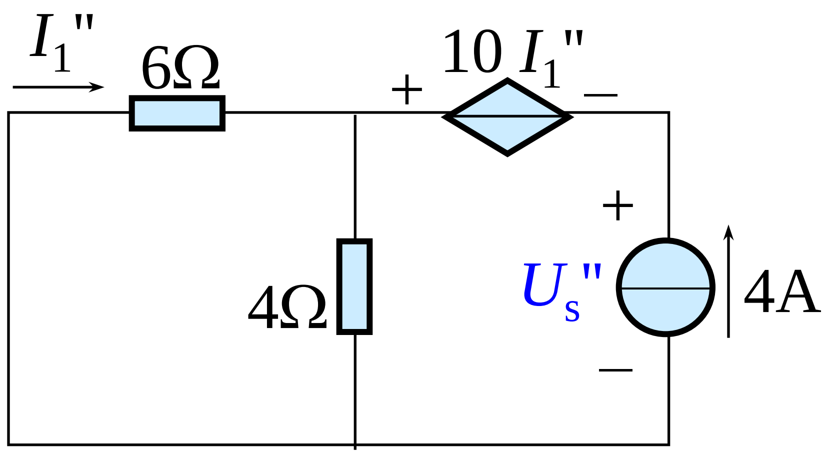
5. 含受控源(线性)电路亦可用叠加法，但受控源不能单独作用，应始终保留在电路中。

例2. 求电压U_s。



解: (1) 10V电压源单独作用: (2) 4A电流源单独作用:





$$U_s' = -10\,I_1' + 4 = -10\times 1 + 4 = -6\text{V}$$

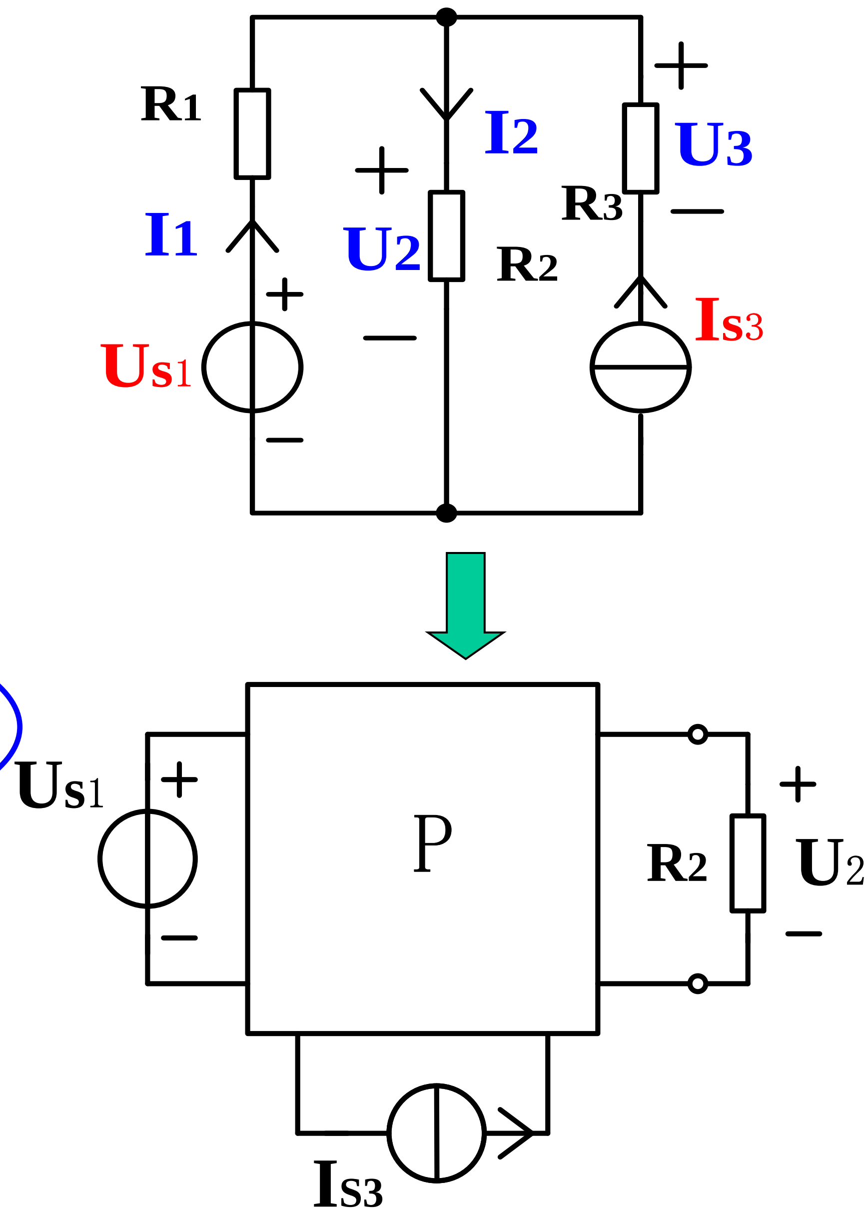
$$U_s'' = -10 I_1'' + 2.4\times 4$$
$$= -10\times(-1.6) + 9.6 = 25.6\text{V}$$

共同作用: $U_s = U_s' + U_s'' = -6 + 25.6 = 19.6\text{V}$

若有多个电压源和电流源激励, 根据迭加定理和线性定理，支路电压、电流可表示为:

$$I_k=\sum_{j=1}^{n} g_{kj}U_{Sj}+\sum_{i=1}^{m}\beta_{ki}I_{Si}$$

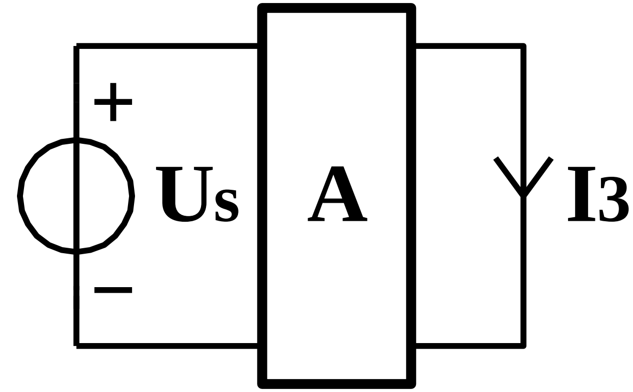
$$U_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}U_{Sj}+\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ki}I_{Si}$$



上式为线性电路（系统）中激励与响应关系——**线性定理**的一般表达式。

$$U_2=\alpha U_{S1}+\gamma I_{S3}$$

例2. 如图电路，A 为有源电路，当U_s=4V时，I_3=4A；当U_s=6V时，I_3=5A；求当U_s=2V时，I_3为多少？



解：由线性定理，I_3可表示为

$$I_3 = g_1 \times U_s + \sum_{i=1}^{n} g_i \times U_{si} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \times I_{sj}$$

由于A内电源不变，上式又可写为

$I_3 = g \times U_s + I_0$ 式中I_0为A内所有电源产生的分量，

由给出的条件 得:

$$4 = 4g + I_0$$

$$5 = 6g + I_0$$

解得：g=0.5 , I_0 = 2

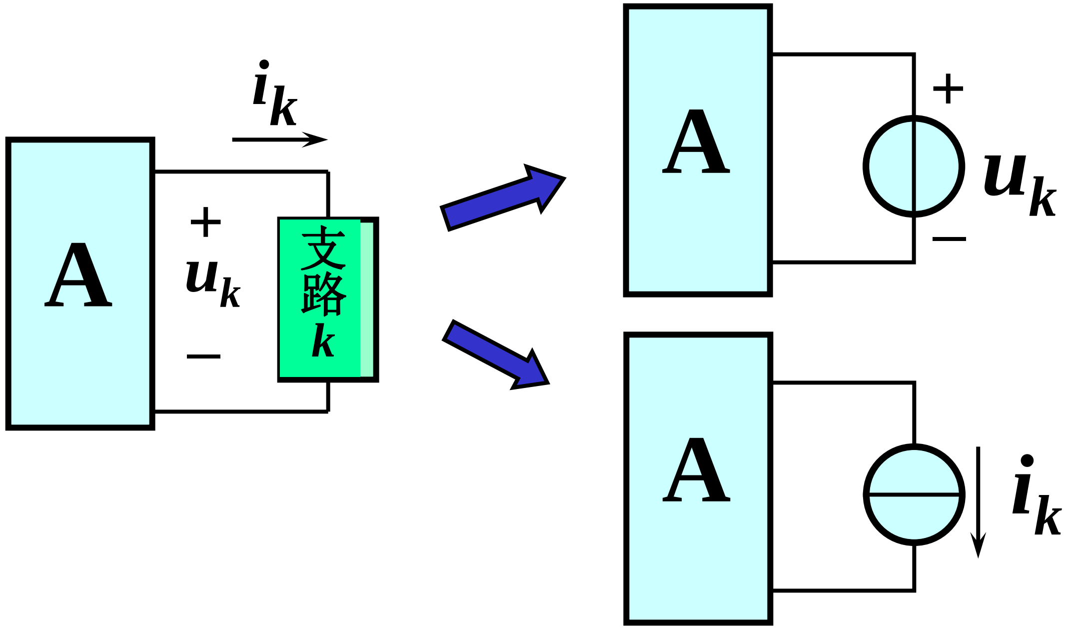
即 I_3=0.5×U_s+2

当U_s=2V时，I_3=3A。

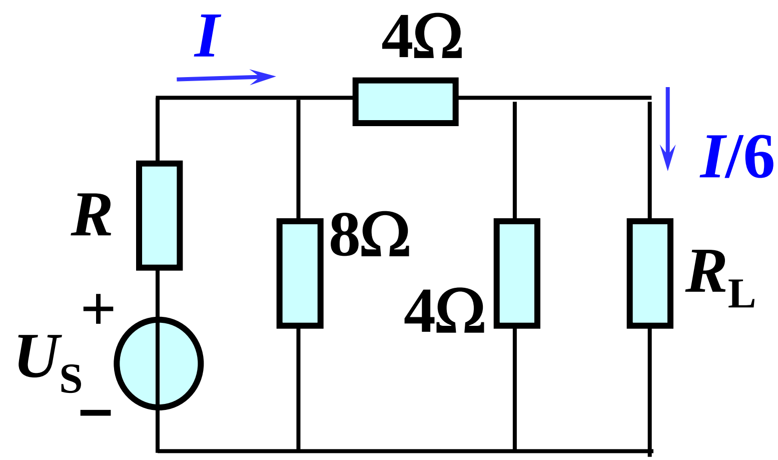
4.3.2　替代定理（*Substitution Theorem*）

替代定理

任意一个线性电路，其中第k条支路的电压已知为u_k（电流为i_k），那么就可以用一个电压等于u_k的理想电压源（电流等于i_k的独立电流源）来替代该支路，替代前后电路中各处电压和电流均保持不变。

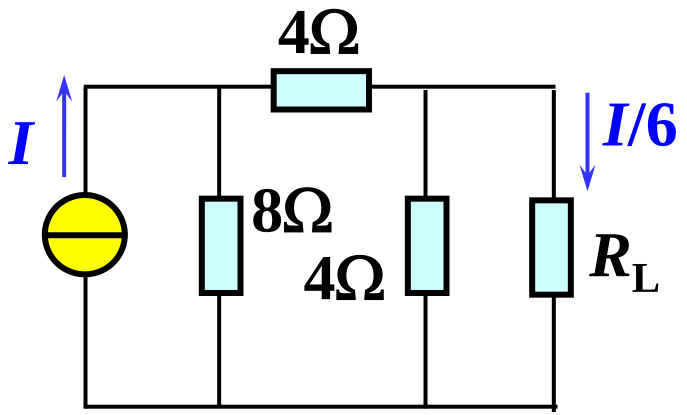


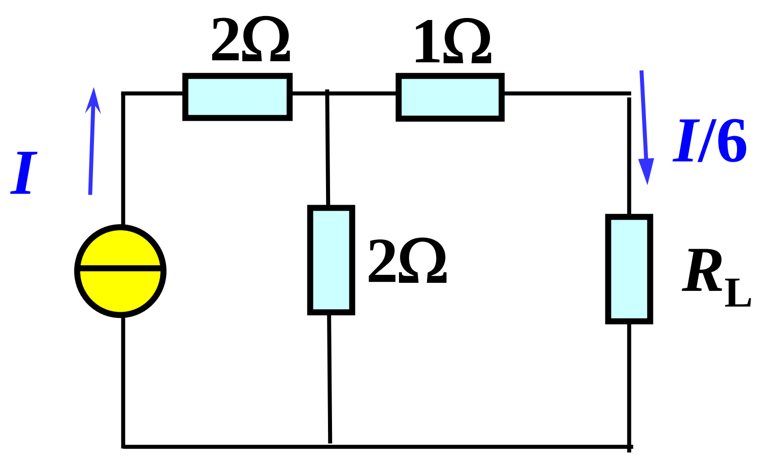
例3. 已知如图。现欲使负载电阻R_L的电流为电源支路电流I的1/6，求此电阻值。



方法一：

替代

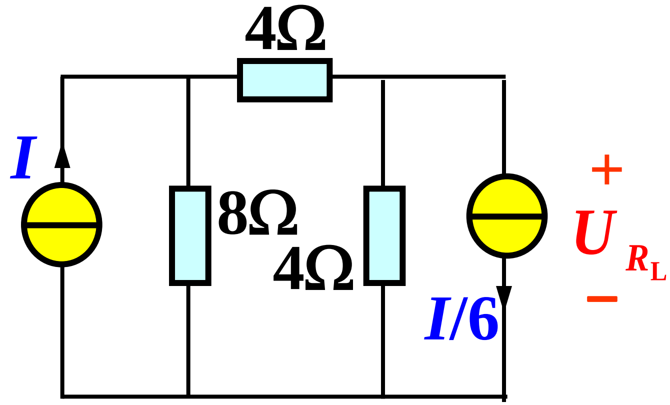




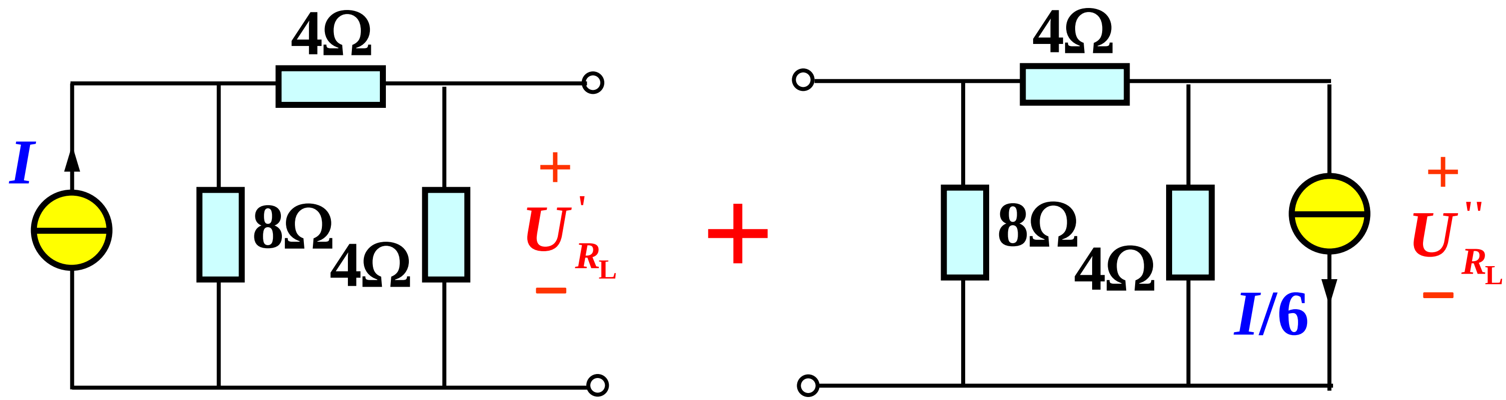
$$\frac{I}{6}=\frac{2}{3+R_L}I$$

$$R_L=9\Omega$$

方法二：替代



叠加



$$U_{R_L}=U'_{R_L}+U''_{R_L}=4\times\frac{I}{2}-\frac{I}{6}\times\frac{4\times12}{4+12}=1.5I$$

$$R_L=\frac{U_{R_L}}{I/6}=\frac{1.5I}{I/6}=9\Omega$$

注意:

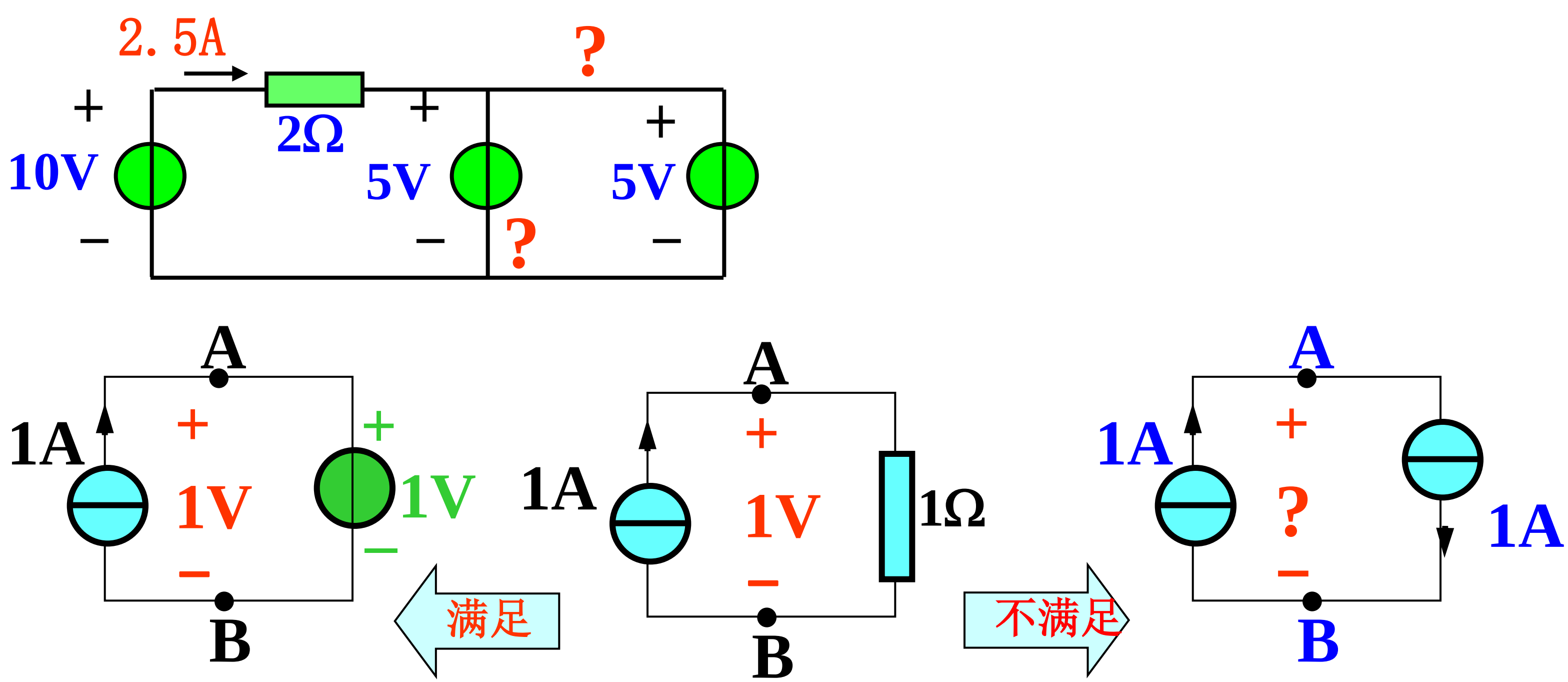
1. 替代定理适用于线性、非线性电路、定常和时变电路。

2. 替代定理的应用必须满足的条件:

   1) 原电路和替代后的电路必须有唯一解。

   2) 被替代的支路和电路其它部分应无耦合关系。

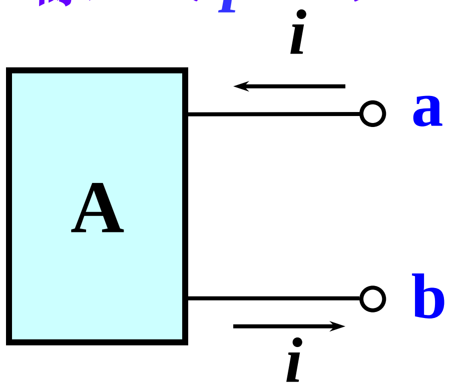
3. 未被替代支路的相互连接及参数不能改变。



4.3.3 戴维南定理和诺顿定理
（*Thevenin-Norton Theorem*）

1. 几个名词

(1) 端口（ *port* ）



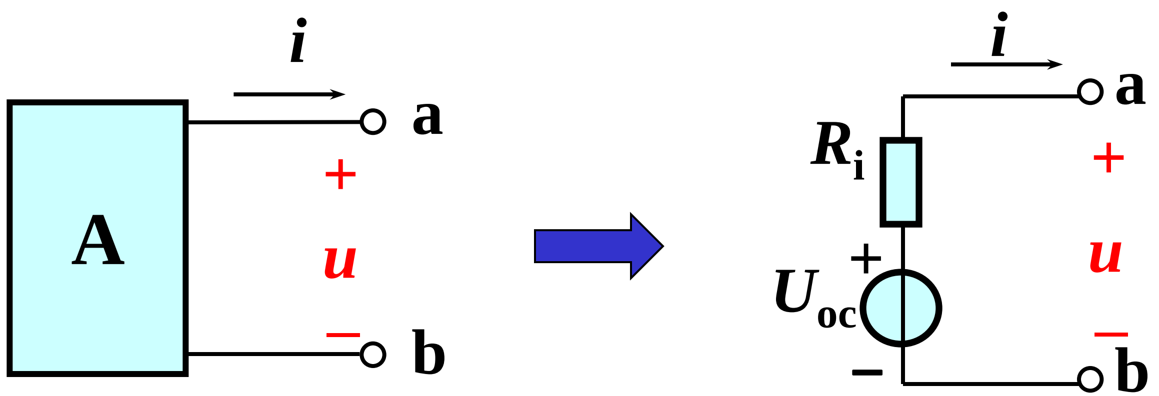
端口指电路引出的一对端钮，其中从一个端钮（如a）流入的电流一定等于从另一端钮（如b）流出的电流。

(2) 一端口网络 （*network*）

网络与外部电路只有一对端钮（或一个端口）联接。

2. 戴维南定理

任何一个含有独立电源、线性电阻和线性受控源的一端口，对外电路来说，可以用一个电压源（U_{oc}） 和电阻R_i的串联组合来等效替代；此电压源的电压等于外电路断开时端口处的开路电压，而电阻等于一端口中全部独立电源置零后的端口等效电阻。



小结：

（1）戴维南等效电路中电压源方向与所求开路电压方向相同。

（2）串联电阻为将一端口内部独立电源全部置零（电压源短路，电流源开路）后，所得一端口网络的等效电阻。

等效电阻的计算方法：

a. 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联的方法计算；

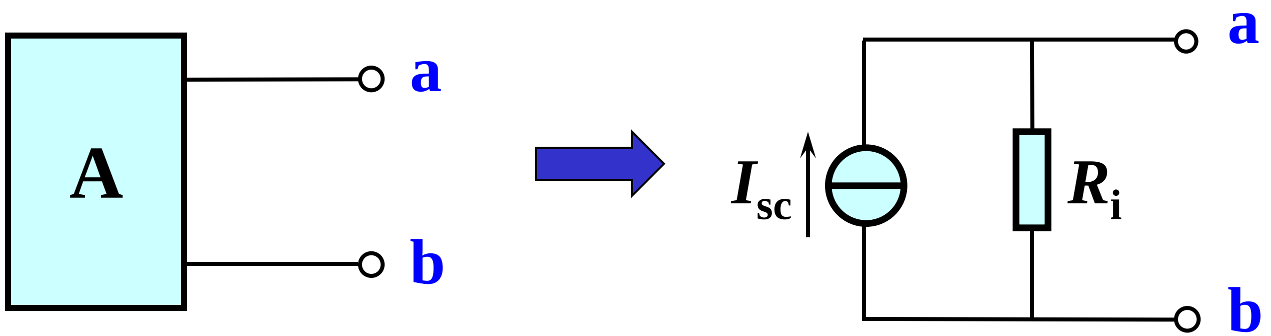
b. 端口加电压求电流法或加电流求电压法（内部独立电源置零）。

c. 等效电阻等于端口的开路电压与短路电流的比（内部独立电源保留）。

（3）当一端口内部含有受控源时，控制支路与受控源支路必须包含在被等效变换的同一部分电路中。

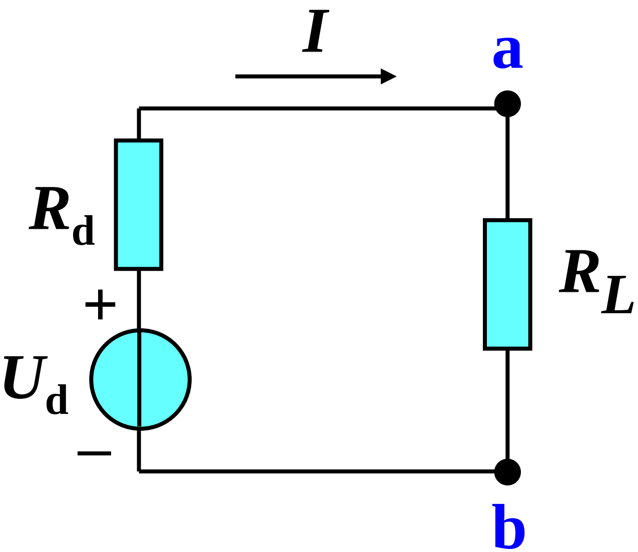
3. 诺顿定理

任何一个含独立电源，线性电阻和线性受控源的一端口，对外电路来说，可以用一个电流源和电阻（电导）的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，而电阻（电导）等于把该一端口的全部独立电源置零后的输入电阻（电导）。



诺顿等效电路可由戴维南等效电路经电源等效变换得到。但须指出，诺顿等效电路可独立进行证明。证明过程从略。

4. 3. 4 最大功率传输定理
（*Maximum Power —Transfer Theorem*）



线性有源一端口网络向可变电阻负载RL传输最大功率的条件是：**$R_L = R_d$**。

$$P_{R_L} = \left(\frac{U_L}{R_d + R_L}\right)^2 R_L$$

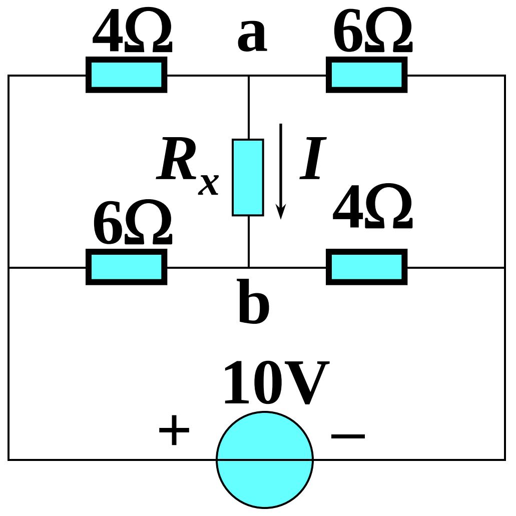
$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = U_d{}^2 \left\{ -2\left(\frac{1}{R_d + R_L}\right)^3 R_L + \left(\frac{1}{R_d + R_L}\right)^2 \right\}$$

$$= U_d{}^2 \frac{R_d - R_L}{(R_d + R_L)^3} = 0 \qquad P_{\max} = \frac{U_d{}^2}{4R_L}$$

当**R_L=R_d**时，负载获得最大功率。也称为功率匹配。

匹配状态下，功率的传输效率只有50%。经常出现在电子线路中。对于电力系统的输、配电线路，传输功率大，要求传输效率高，以减少传输过程中的能量损耗，因此都不在匹配状态下工作。

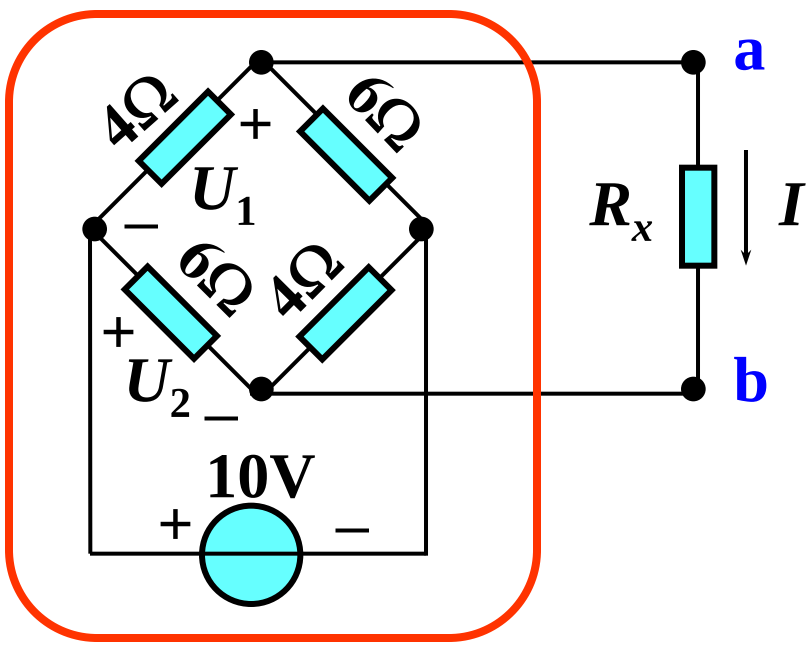
例4.

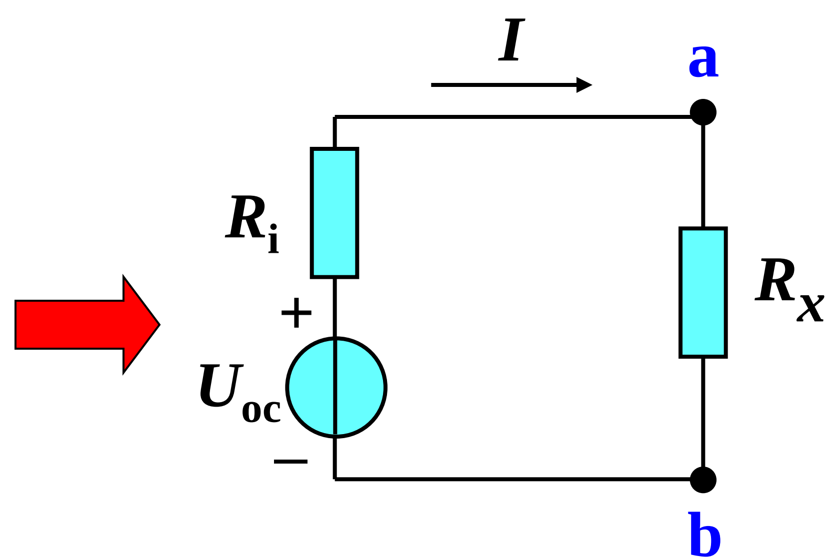


(1) 计算R_X分别为1.2Ω、5.2Ω时的I；

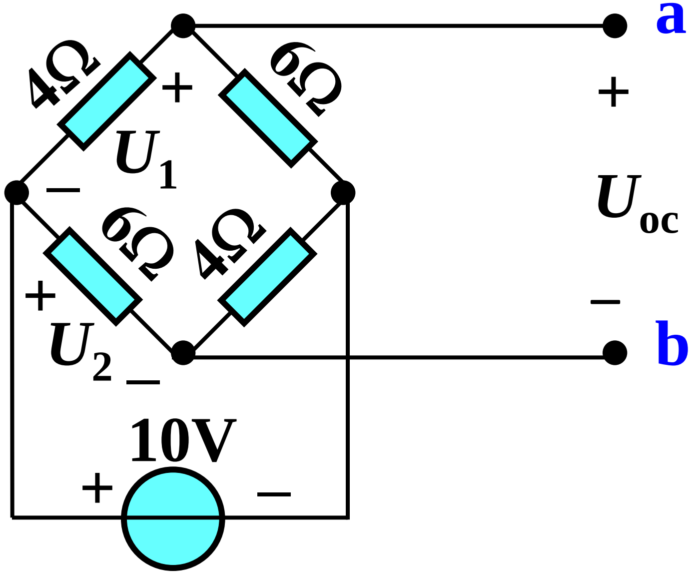
(2) R_X为何值时，其上获最大功率?

解：保留R_X支路，将其余一端口网络化为戴维南等效电路：



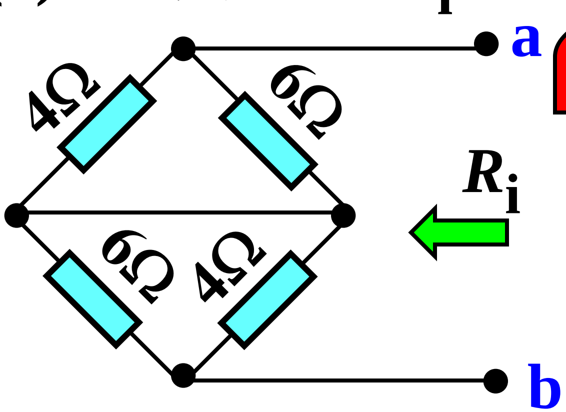


(1) 求开路电压

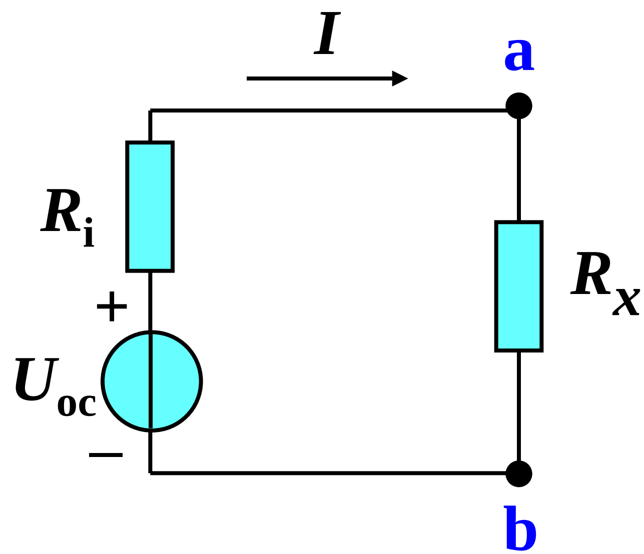


$$U_{oc} = U_1 + U_2$$
$$= -10\times4/(4+6)+10\times6/(4+6)$$
$$= -4+6=2\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_i



R_i=4//6+6//4=4.8Ω



(3) R_x =1.2Ω时，$I= U_{oc}/(R_i + R_x)$ =0.333A

R_x =5.2Ω时，$I= U_{oc}/(R_i + R_x)$ =0.2A

$R_x = R_i$ =4.8Ω时，其上获最大功率。

作业

2、4、6为交叉线

- 等效变换

  4.2，4，5，8，11*

- 支路法

  4.12，13

- 回路法

  4.15，16，18

- 节点法

  4.19，21，22，23

  4.24，25

只列写方程，三阶以上不求解

单元2.2测试题（方程法）

单元2.3测试题（定理）

2.1.1讲测试题

2.1.2讲测试题

2.1.3讲测试题

- 定理

  4.27，30，31，32*

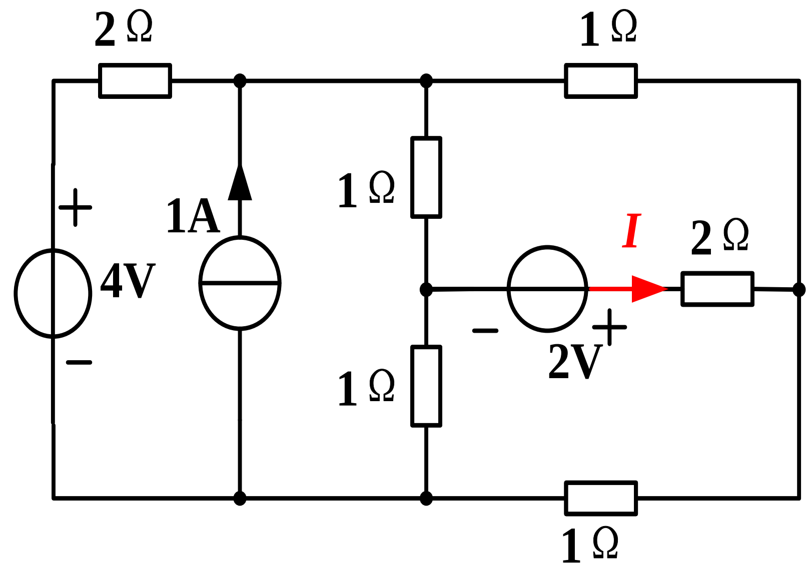
  4.35，36，37，38，39

  ~~4.41，42，43，44，47~~

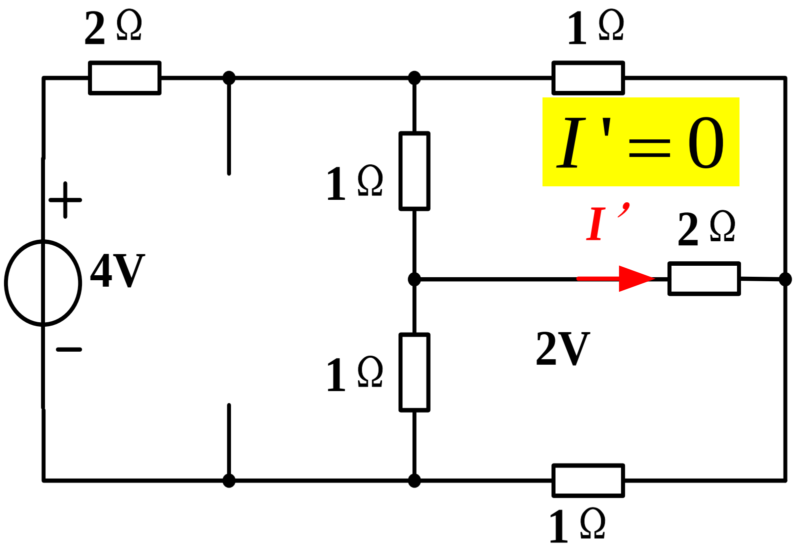
特勒根（普通班略）

这章学完，我会出纸质测试题

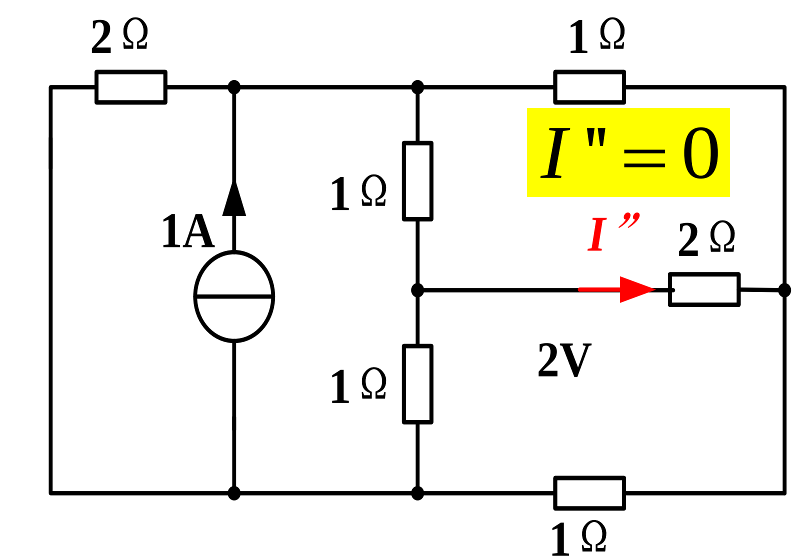
测试1. 求图示电路中的电流I 。



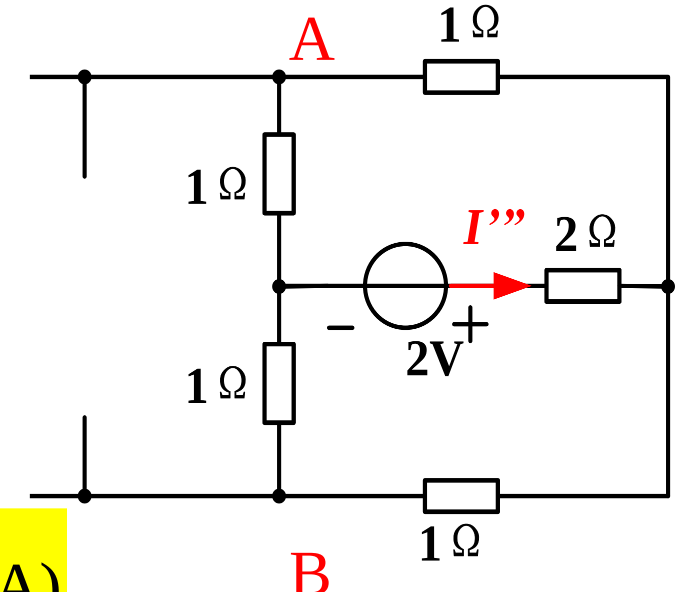
解: 三个电源分别 作用



$$I' = 0$$



$$I'' = 0$$



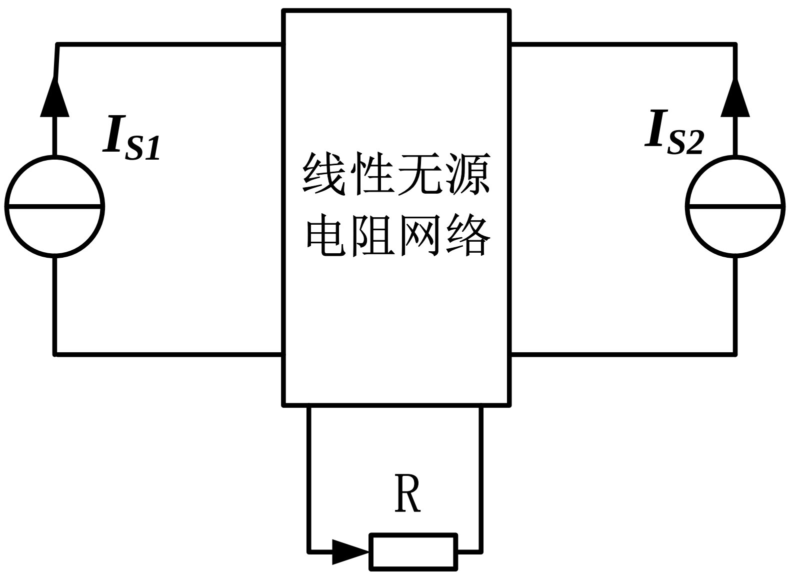
$$I''' = \frac{2}{3}(\mathrm{A})$$

$$I = I' + I'' + I''' = \frac{2}{3}(\mathrm{A})$$

测试2： R=2Ω，当I_{S1}单独作用且 I_{S1} =3A , P_R=8W;

当I_{S2}单独作用且 I_{S2} =6A , P_R=18W;

求它们共同作用时，P_R=?



解： $\cancel{P_R=26W}$

当I_{S1}单独作用， $I_R = \pm 2A$

当I_{S2}单独作用， $I_R = \pm 3A$

$I_R = \pm 2 + (\pm 3)$

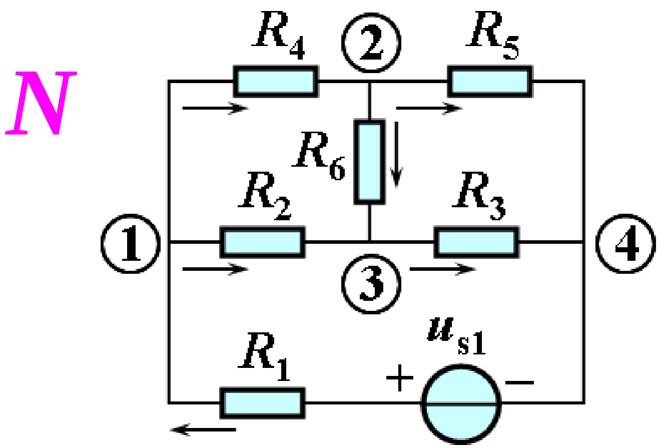
$I_R = \pm 5$ 或 ± 1

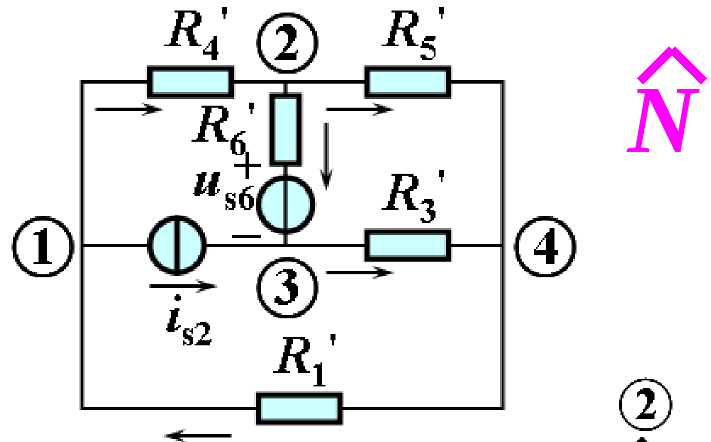
$P_R = 50W$ 或 $2W$

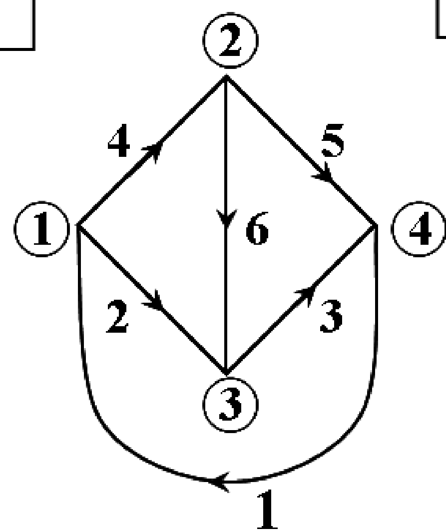
4.3.5　特勒根定理（*Tellegen's　Theorem*）

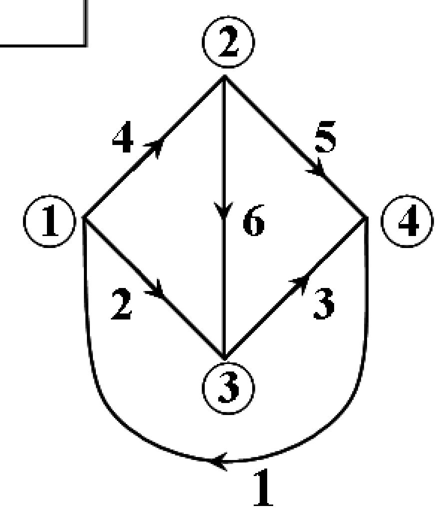
1.具有相同拓扑结构的电路

两个电路，支路数和节点数都相同，而且对应支路 与节点的联接关系也相同。









2. 特勒根定理

注意（1）对应支路取相同的参考方向。
（2）各支路电压、电流均取关联的参考方向。

两个具有相同拓扑结构的电路N和$\hat{N}$。电路$N(\hat{N})$的所有支路中的每一支路的电压$u_k(\hat{u}_k)$与电路$\hat{N}(N)$中对应的支路中的电流$\hat{i}_k(i_k)$的乘积之和为零即

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \qquad (似功率守衡关系)$$

3. 功率守衡定理

在任一瞬间，任一电路中的所有支路所吸收的瞬时功率的代数和为零，即

$$\sum_{k=1}^{b} p_k = \sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

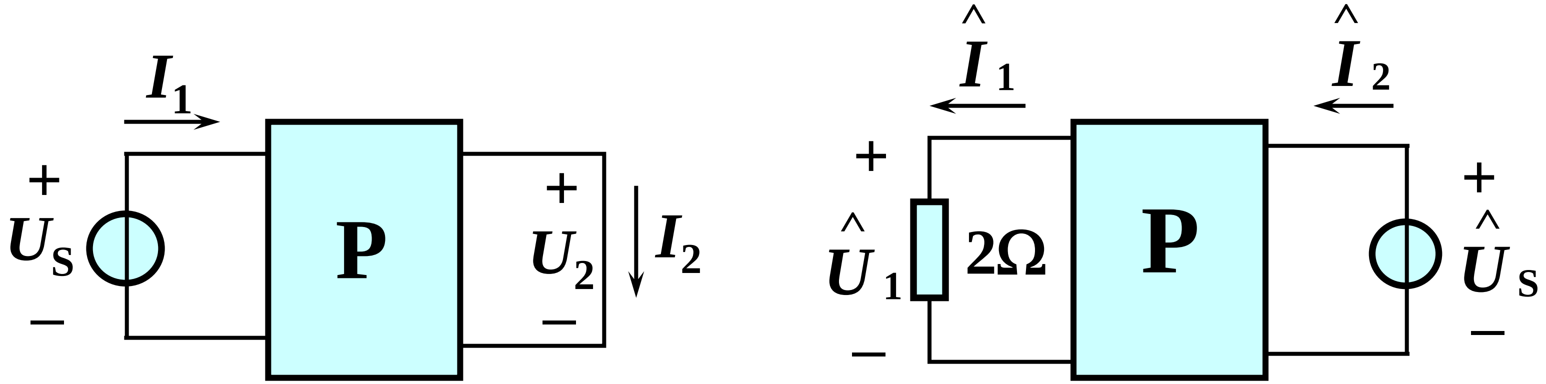
将特勒根定理用于同一电路中各支路电流、电压即可证得上述关系。（亦可视为N，$\hat{N}$为同一电路，则$u_k = \hat{u}_k$，$i_k = \hat{i}_k$）

此亦可认为特勒根定理在同一电路上的表述。

例5. 图示两个电路中方框内为同一电阻网络。

已知：U_S=10V， I_1=5A，I_2=1A，$\hat{U}_2 = 10\text{V}$ 。

求：$\hat{U}_1$ 。



解　由特勒根定理

$$\begin{cases} U_S \hat{I}_1 + U_2(-\hat{I}_2) + \sum_{k=3}^{b} U_k \hat{I}_k = 0 \\ \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_S I_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{U}_k I_k = 0 \\ \hat{U}_1 = 2\hat{I}_1 \end{cases}$$

方框内为同一网络

$$\sum_{k=3}^{b} U_k \hat{I}_k = \sum_{k=3}^{b} I_k R_k \hat{I}_k = \sum_{k=3}^{b} I_k \hat{U}_k = \sum_{k=3}^{b} \hat{U}_k I_k$$

得 $U_S \hat{I}_1 + U_2(-\hat{I}_2) = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_S I_2$

$$U_S \times \frac{\hat{U}_1}{2} + 0 \times (-\hat{I}_2) = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_S I_2$$

$$10 \times \frac{\hat{U}_1}{2} + 0 = \hat{U}_1 \times (-5) + 10 \times 1$$

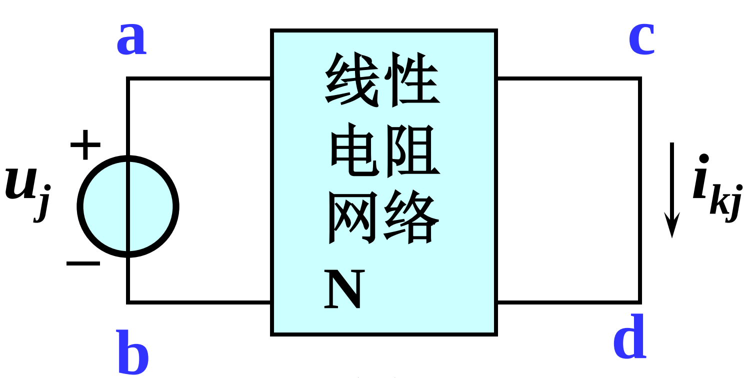
$$\hat{U}_1 = 1\text{V}$$

4.3.6 互易定理（*Reciprocity Theorem*）

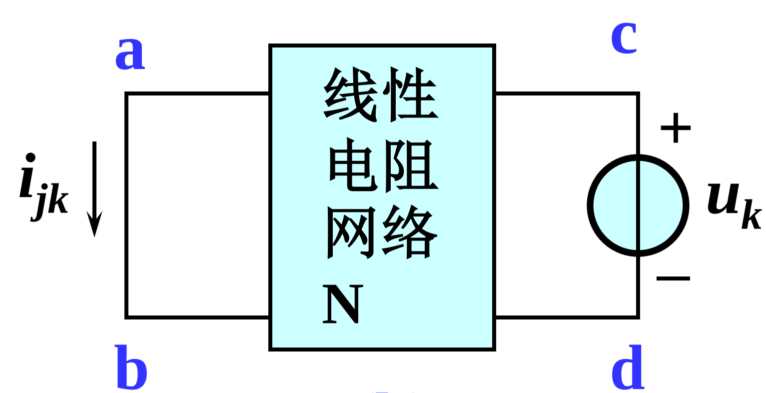
第一种形式:

激励（*excitation*）为电压源，响应（*response*）为电流。

给定任一仅由线性电阻构成的网络（见下图），设支路j中有电压源u_j，其在支路k中产生的电流为i_{kj}（图a）；若支路k中有电压源u_k，其在支路j中产生的电流为i_{jk}（图b）。



(a)



(b)

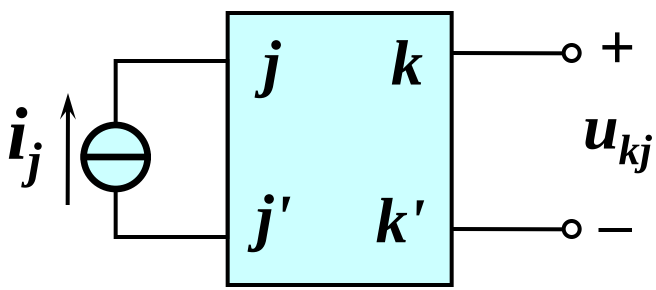
则有如下关系： $\dfrac{i_{kj}}{u_j} = \dfrac{i_{jk}}{u_k}$ 或 $u_k i_{kj} = u_j i_{jk}$

第二种形式：激励是电流源，响应是电压。

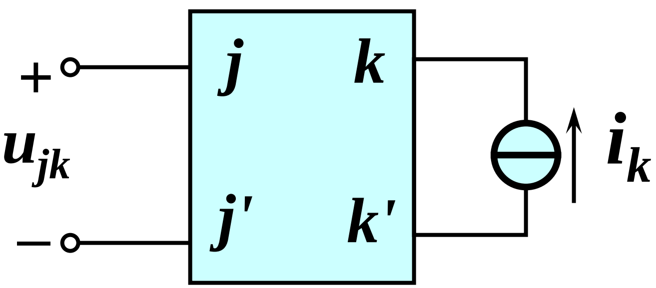
在任一线性电阻网络的一对节点 j 和 j'间接入电流源 i_j，它在另一对节点 k 和 k'产生电压u_{kj}（见图（a））；若改在节点 k 和 k'间接入电流源 i_k，它在节点 j 和 j' 间产生电压 u_{jk}（图（b））,则上述电压、电流有如下关系：

$$\frac{u_{kj}}{i_j} = \frac{u_{jk}}{i_k} \qquad \text{或} \qquad u_{kj} i_k = u_{jk} i_j$$

当 $i_k = j_j$ 时，$u_{kj} = u_{jk}$。



（a）



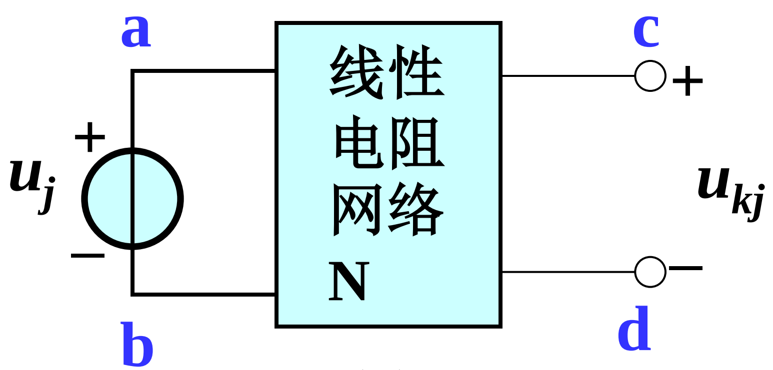
（b）

由读者自己证明。

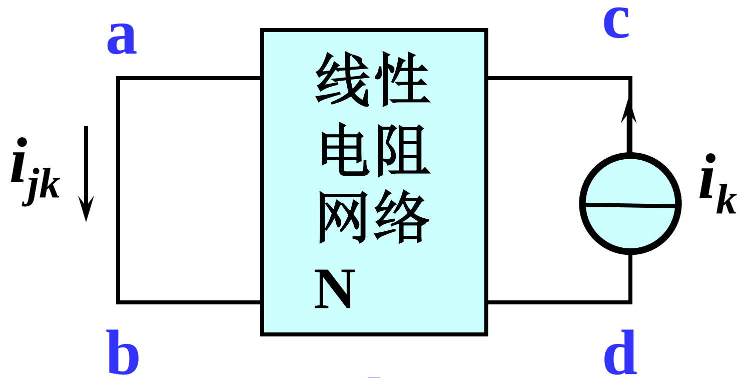
第三种形式:

激励（*excitation*）为电压源，响应（*response*）为电流。

给定任一仅由线性电阻构成的网络（见下图），设支路j中有电压源u_j，其在支路k中产生的电压为u_{kj}（图a）； 若支路k中有电流源i_k，其在支路j中产生的电流为i_{jk}（图b）。



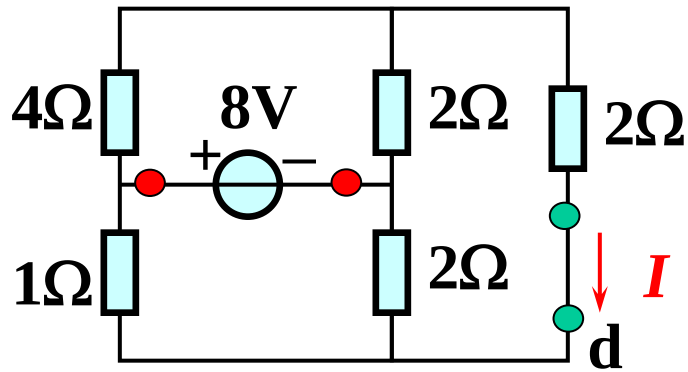
(a)



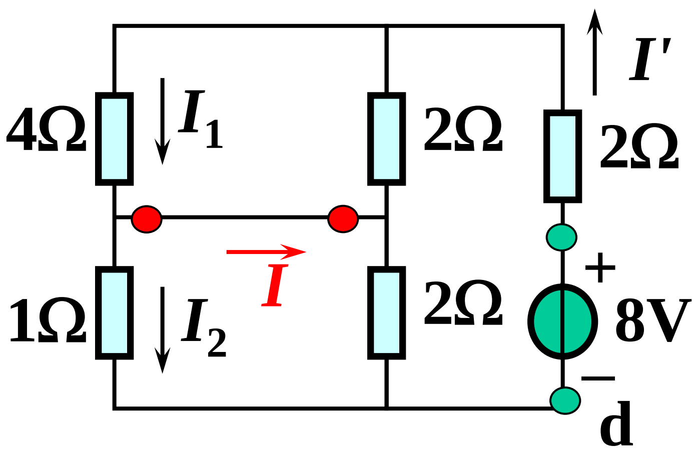
(b)

则有如下关系： $$\frac{u_{kj}}{u_j}=\frac{i_{jk}}{i_k}$$ 或 $$i_k u_{kj}=u_j i_{jk}$$

例6. 电路如图所示，求电流I 。



解　利用互易定理，可得下图



$$I' = \frac{8}{2+4 /\!/ 2+1 /\!/ 2} = \frac{8}{4} = 2\text{A}$$

$$I_1 = I' \times 2/(4+2) = 2/3\text{A}$$

$$I_2 = I' \times 2/(1+2) = 4/3\text{A}$$

$$I = I_1 - I_2 = -0.667\text{A}$$

应用互易定理时应注意：

（1） 互易定理适用于线性网络在单一电源激励下，电源支路和另一支路间电压、电流的关系。

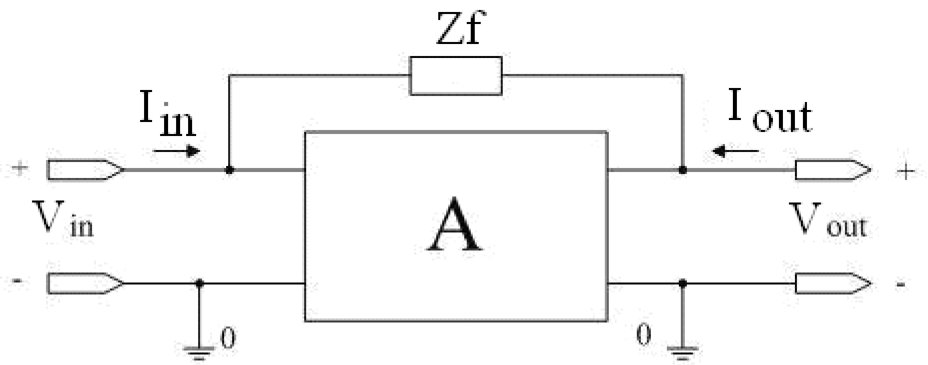
（2） 互易要注意电压源（电流源）与电流(电压)的方向。

（3） 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

4. 3. 8　密勒定理（*Miller's Theorem*）

设节点1和节点2的电压分别为V_{in}和V_{out}，且 $A=\dfrac{V_{out}}{V_{in}}$

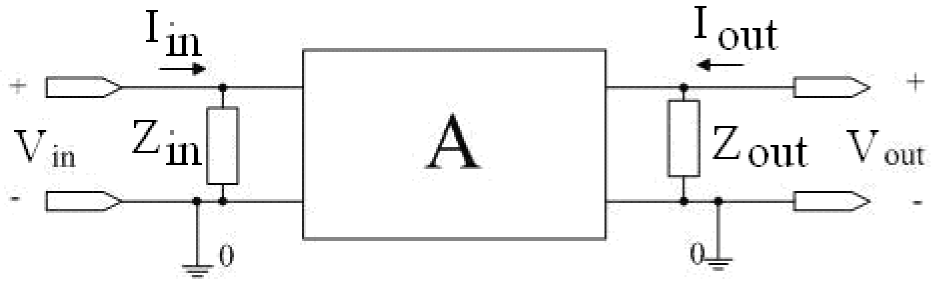
则，图a所示电路可等效为图b所示电路。并有：



图a

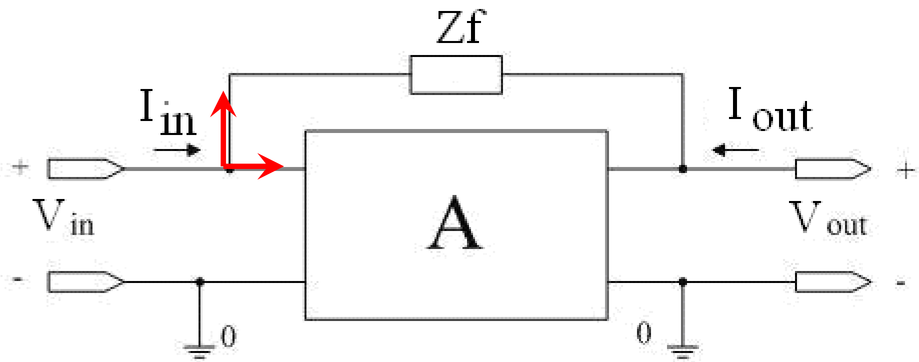
$$Z_{in}=\frac{1}{1-A}Z_f$$

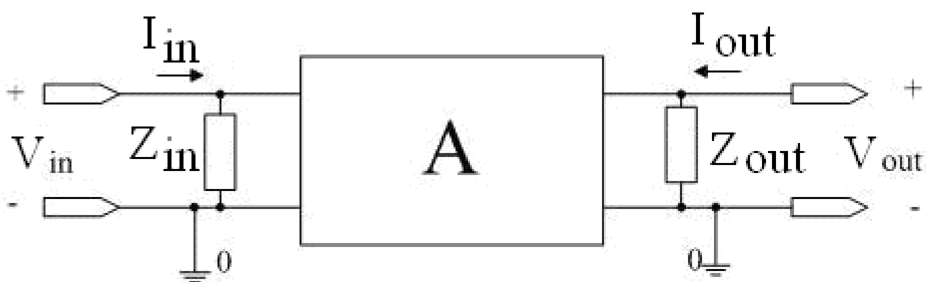
$$Z_{out}=\frac{A}{A-1}Z_f$$



图b

证明：





$$I_{in} = \frac{V_{in} - V_{out}}{Z_f} + I_{in0}$$

$$I_{out} = -\frac{V_{in} - V_{out}}{Z_f} + I_{out0}$$

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{Z_{in}} + I_{in0}$$

$$I_{out} = \frac{V_{out}}{Z_{out}} + I_{out0}$$

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{Z_f} = \frac{V_{in}}{Z_{in}} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1}{1-A} Z_f$$

$$\cdots\cdots \Rightarrow Z_{out} = \frac{A}{A-1} Z_f$$

作业

2.1.1讲测试题
2.1.2讲测试题
2.1.3讲测试题

2、4、6为交叉线

- 等效变换

  4.2，4，5，8，11*
- 支路法

  4.12，13
- 回路法

  4.15，16，18
- 节点法

  4.19，21，22，23

  4.24，25

只列写方程，三阶以上不求解

单元2.2测试题（方程法）

单元2.3测试题（定理）

- 定理

  4.27，30，31，32*

  4.35，36，37，38，39

  ~~4.41，42，43，44，47~~

特勒根（普通班略）

这章学完，我会出纸质测试题