于慧敏主编<信号与系统>第一章 (P25-28)习题解答

（注：题目为黑色，解答为兰色，偶尔有红色）

1.1 试说明图 1-52（图在此略）中各种信号属哪类信号：周期、连续、能量或功率、确定信号。

解答：以表格形式比较清楚：

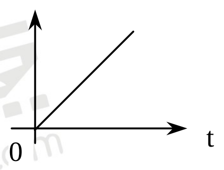
小题	周期	连续	离散	确定	随机	能量	功率
(a)	√	√		√			√
(b)	非	√		√		√	
(c)	非		√	√		√	
(d)	非	√			√		√
(e)	非	√		√			√
(f)	非	√		√			

1.2 画出以下各信号的波形：

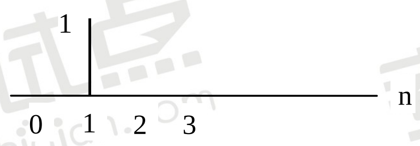
（1） $tu(t)$ ；　（2） $n\{u[n]-u[n-2]\}$ ；　（3） $(t-1)u(t-1)$ ；

(4) $(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2]$ ；(5) $e^{-t}[u(t)-u(t-1)]$ ；　（6） $\sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$ 。

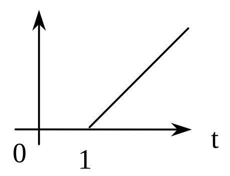
解答：(1)



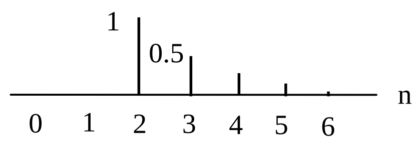
(2)



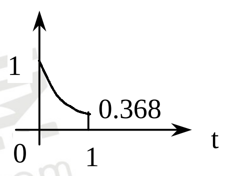
(3)



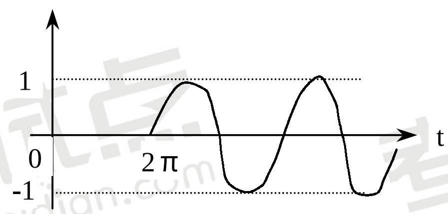
(4)



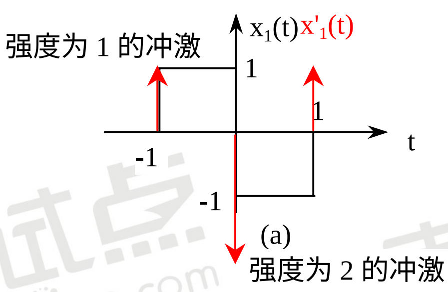
(5)



(6)

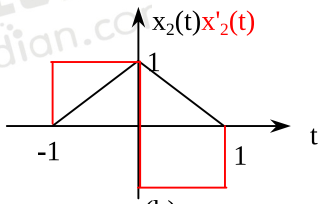


1.3 写出图 1－53 中各信号的函数表达式(注意：(b)、(d)、(e) 用 u(t)的形式)。

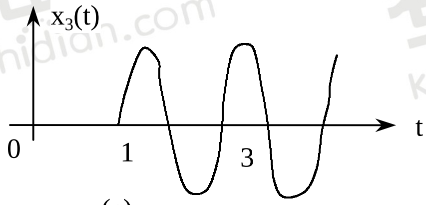


(a)

解答：(a) $x_1(t)=u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$



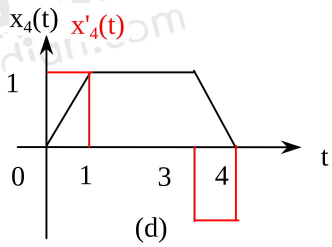
(b)



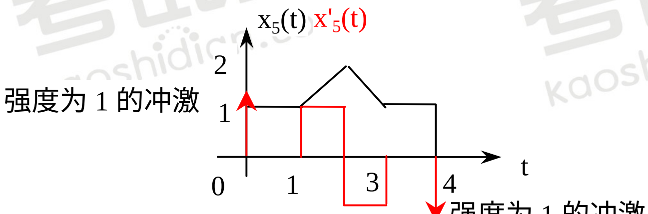
(c)

解答：(b) $x_2(t)=1-|t|,0<|t|<1$　　　(c) $x_3(t)=\sin[\pi(t-1)\cdot u(t-1)]$

$$x_2(t)=(t+1)u(t+1)-2tu(t)+(t-1)u(t-1)$$



(d)



(e)

解答：(d) $x_4(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 1 \\ 1 & 1\le t\le 3 \\ 4-t & 3\le t\le 4 \end{cases}$;　(e) $x_5(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le 1 \\ t & 1\le t\le 2 \\ 4-t & 2\le t\le 3 \\ 1 & 3\le t\le 4 \end{cases}$

$$x_4(t)=tu(t)+(1-t)u(t-1)+(3-t)u(t-3)+(t-4)u(t-4)$$

$$x_5(t)=u(t)+(t-1)u(t-1)+(4-2t)u(t-2)+(t-3)u(t-3)-u(t-4)$$

1.4 画出图 1-53 中 (a)、(b)、(d)、(e)的微分信号。

解答: 如上题图中画上的红色线条

1.5 已知一连续信号如图 1-54 所示，试画出下列各式的波形。

(1) f(2t-1)；(2) f(1-2t)；(3) f(-t/2+1)；(4) f(t)[δ(t+1)+δ(t-2)]

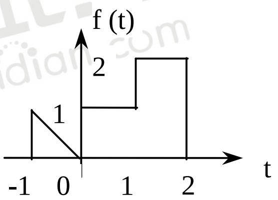
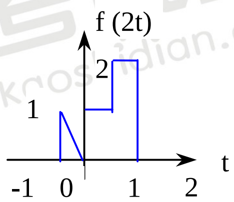


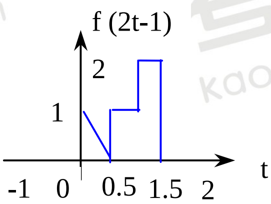
图 1-54 题 1.5 图

$$f(t)=\begin{cases} -t & -1<t<0 \\ u(t) & 0\le t\le 1 \\ 2u(t-1) & 1<t<2 \end{cases}$$

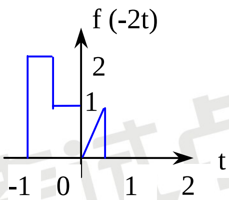
解答:

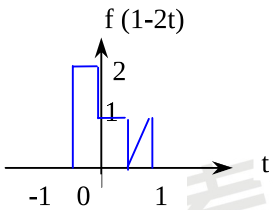
(1)



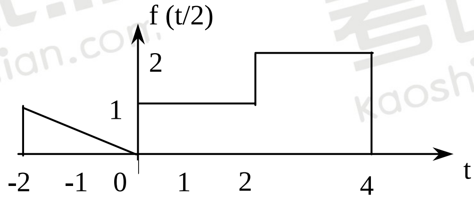


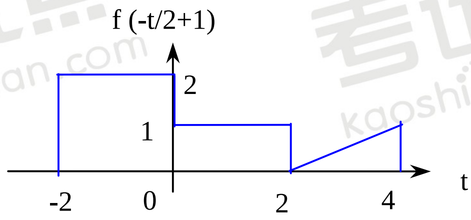
(2)



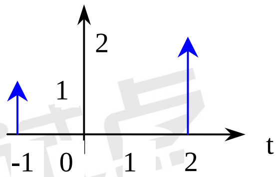


(3)





（4） f(t)[δ (t+1)+ δ (t-2)]



1.6 已知信号 x(3-2t)的波形如图 1-55 所示，试画出信号 x(t)的波形。

解答：

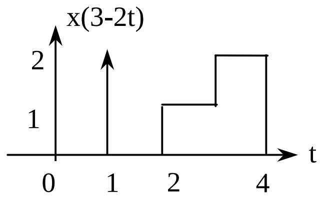
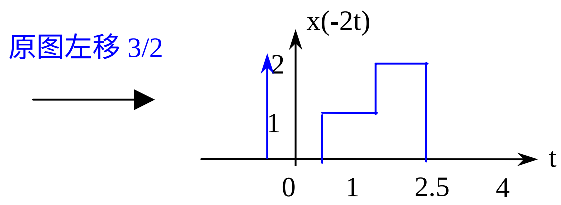
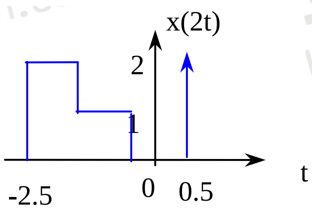


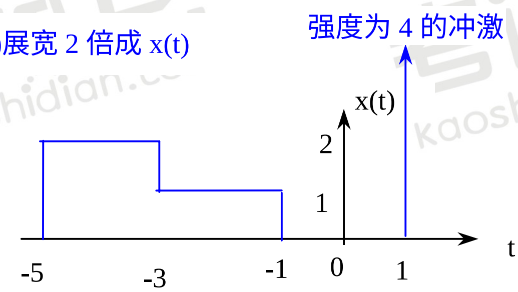
图 1-55 题 1.6 图



x(-2t)反转成 x(2t)



x(2t)展宽 2 倍成 x(t)



1.7 已知信号 x[n]如图 1-56 所示，试画出下列信号 x(t)的波形。

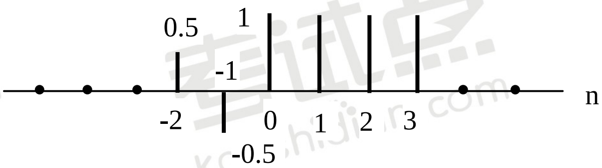
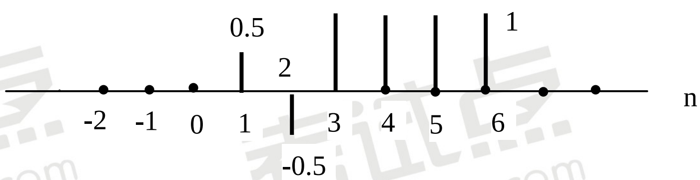


图 1-56 题 1.7 图

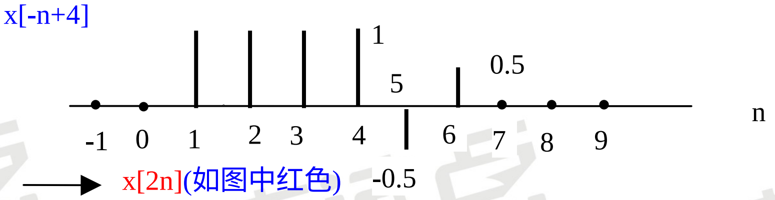
（1） x[n-3]；（2） x[4-n]；（3） x[2n+1]；（4） x[n-3] δ [n-3]。

解答：

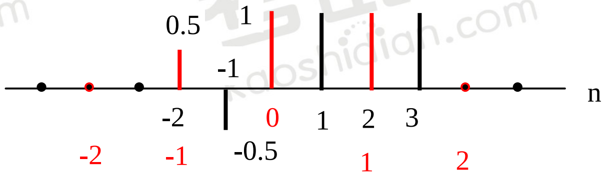
（1） x[n-3]



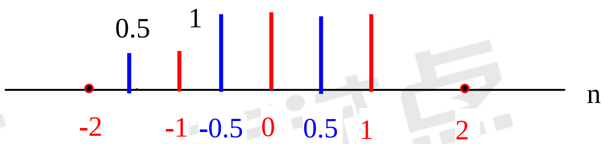
（2）x[4-n]=x[-n+4]　x[n] ⟶ x[-n] ⟶ x[-n+4]=x[-(n-4)]



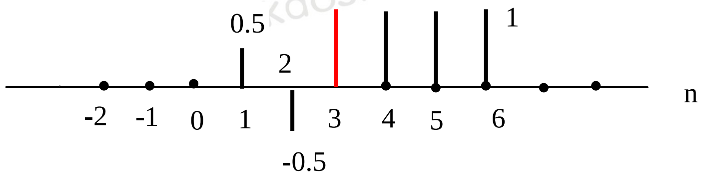
（3）x[2n+1] ⟶ x[2n](如图中红色)



⟶ x[2n+1] (如图中兰色，即向左移　0.5 个单位)



（4）从（1）得 x[n-3]δ[n-3] (如图中红色，其他为 0)



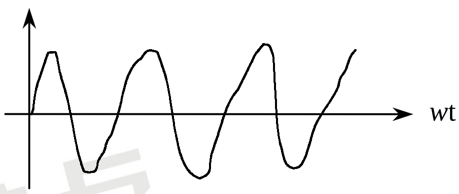
1.8 给出各下列时间函数的波形图，注意它们的区别。

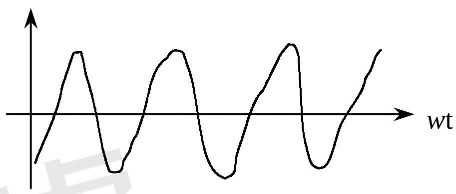
（1） $x_1(t)=\sin(wt)\cdot u(t)$ ；　　（2） $x_2(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t)$

（3） $x_3(t)=\sin(wt)\cdot u(t-t_0)$ ；　　（4） $x_4(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t-t_0)$

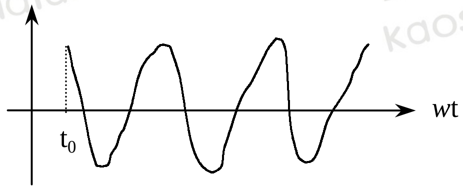
解答：

（1） $x_1(t)=\sin(wt)\cdot u(t)$ （变成了单边函数）；（2） $x_2(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t)$

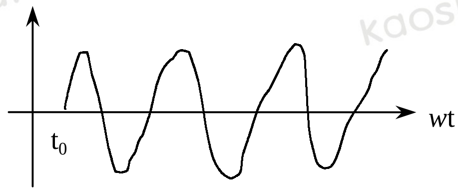




(3) $x_3(t)=\sin(wt)\cdot u(t-t_0)$



(4) $x_4(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t-t_0)$



1.9 画出图 1-57 中各信号的奇信号与偶信号。

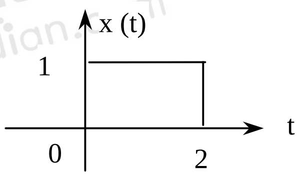


图 (1)

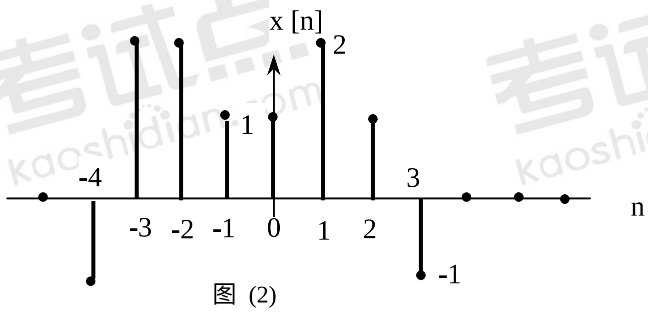


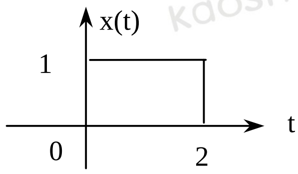
图 (2)

解答：因为一个信号可分解为偶信号与奇信号之和：$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$；

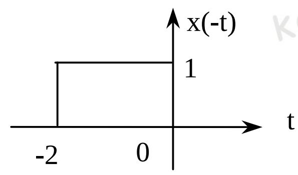
其中：$x_e(t)$ 为偶信号：$x_e(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$

$x_o(t)$ 为奇信号：$x_o(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$

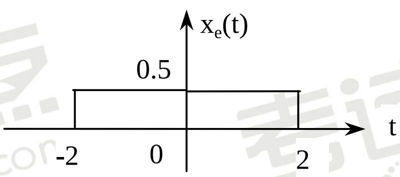
(1)



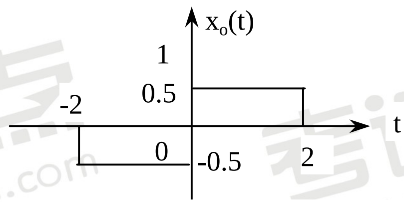
图(a) 原信号 x(t)



图(b) 原信号的反转 x(-t)



图(c) 原信号的偶信号分量 $x_e(t)$

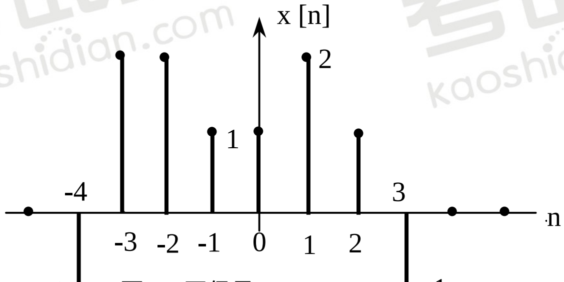


图(d) 原信号的奇信号分量 $x_o(t)$

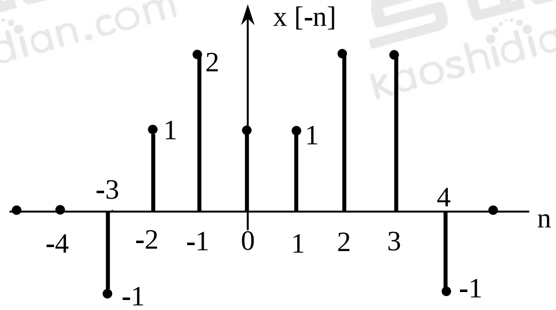
(2)类似于连续信号，离散信号也可分解为偶信号与奇信号之和: $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$

其中：$x_e[n]$ 为偶信号：$x_e[n]=\dfrac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$

$x_o[n]$ 为奇信号：$x_o[n]=\dfrac{1}{2}\{x[n]-x[n]\}$



图(a) 原信号 x[n]



图(b) 原信号的反转 x[-n]

此处偶信号 $x_e[n]$ 与奇信号 $x_o[n]$ 均不再画出

偶信号 $x_e[n]=\{\frac{1}{2}(-1,2-1,2+1,1+2,1+1,2+1,1+2,-1+2,-1)\}$

$=\{-0.5,\ 0.5,\ 1.5,\ 1.5,\ 1,\ 1.5,\ 1.5,\ 0.5,\ -0.5\}$

奇信号 $x_o[n]=\frac{1}{2}\{(-1,2+1,2-1,1-2,1-1,2-1,1-2,-1-2,1)\}$

$=\{-0.5,\ 1.5,\ 0.5,\ -0.5,\ 0,\ 0.5,\ -0.5,\ -1.5,\ 0.5\}$

1.10 判定下列时间信号的周期性，试确定它的基波周期。

(1) $x(t)=3\cos(4t+\frac{\pi}{3})$ ；　(2) $x(t)=e^{\alpha(\pi t-1)}$

(3) $x(t)=[\cos 2\pi t]u(t)$ ；　(4) $x[n]=\cos n/4$

(5) $x[n]=\cos(\frac{8\pi n}{7}+2)$ ；　(6) $x[n]=2\cos(n\pi/4)+3\sin(n\pi/6)-\cos n\pi/2)$

解答：(1) $T_0=\frac{2\pi}{|w_0|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$ ；　(2) 当 a 为实数时，$x(t)$ 是非周期信号；

(3) 单边正弦信号，非周期信号；

(4) 正弦序列，$\omega_0=1/4$，$2\pi/\omega_0=8\pi$ 为无理数，非周期序列；

(5) 正弦序列，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{7}{4}$ 为有理数，周期序列，周期为 $T=7$ ；

(6) 周期序列，周期为 $T=24$。

1.11 如 x_1(t)和 x_2(t)分别是具有基波周期为 T_1 与 T_2 的周期信号，试问在什么条件下，这两个信号之和 x_1(t)+x_1(t)是周期性的？如果该信号是周期的，基波周期是什么？

解答：$x_1(t)$ 的周期为 T_1，即有 $x_1(t)=x_1(t+T_1)$，$x_2(t)$ 的周期为 T_2，即有

$x_2(t)=x_2(t+T_2)$，当 T_1/T_2 为有理数，即可以表示为 $T_1/T_2=n/m$ 时，$x_1(t)+x_2(t)$ 为

周期信号，周期为 $T=mT_1=nT_2$，也即当 T 为 T_1，T_2 最小公倍数时信号是周期的。

1.12　试判断以下系统的性质：记忆、因果、线性、时不变、稳定性。

（1）$y(t)=e^{xt}$；　（2）$y[n]=x[n]x[n-1]$；　（3）$y(t)=\dfrac{dx}{ddt}$；

（4）$y[n]=x[n-2]-x[n+1]$；（5）$y(t)=\sin(4t)x(t)$；　（6）$y[n]=x[4n]$。

解答：以表格形式比较清楚：

小题	记忆	因果	线性	时不变	稳定性
(1)	×	√	×	√	√
(2)	√	√	×	√	√
(3)	√	√	√	√	√
(4)	√	×	√	×	×
(5)	×	√	√	×	√
(6)	×	√	√	√	√

（1）$y(t)=e^{xt}$

（a）系统在时刻 t 的输出只与时刻 t 的输入有关，无记忆系统；
（b）系统在时刻 t 的输出与时刻 t 以后的输入无关，因果系统；

（c）若 $y_1(t)=e^{x_1(t)}$，$y_2(t)=e^{x_2(t)}$，而 $y(t)=e^{x_1(t)+x_2(t)}\neq y_1(t)+y_2(t)$，非线性系统；

（d）$y_1(t)=e^{x_1(t)}$，$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，$y_2(t)=e^{x_2(t)}=e^{x_1(t-t_0)}=y_1(t-t_0)$，时不变系统；

（e）若 $|x(t)|<M$，则 $|y(t)|<e^M$，稳定系统。

（2）$y[n]=x[n]x[n-1]$

（a）系统在时刻 n 的输出与时刻 $n-1$ 的输入有关，记忆系统；
（b）系统在时刻 n 的输出与时刻 n 以后的输入无关，因果系统；

（c）若 $y_1[n]=x_1[n]x_1[n-1]$，$y_2[n]=x_2[n]x_2[n-1]$，以及 $y[n]=x[n]x[n-1]$，其中 $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$，则有 $y[n]=(x_1[n]+x_2[n])(x_1[n-1]+x_2[n-1])\neq y_1[n]+y_2[n]$，非线性系统；

（d）假设 $y_1[n]=x_1[n]x_1[n-1]$，$y_2[n]=x_2[n]x_2[n-1]$，且 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有 $y_2[n]=x_1[n-n_0]x_1[n-n_0-1]=y_1[n-n_0]$，时不变系统；

（e）若 $|x[n]|<M$，则有 $|y[n]|<M^2$，稳定系统。

（3）$y(t)=\dfrac{dx}{ddt}$

（a）$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$，系统在时刻 t 的输出与时刻 $t+\Delta t$ 的输入有关，

记忆系统；

(b) 此系统为 LTI 系统（以下可验证），又系统的单位冲激响应为 $h(t)=d\delta(t)/dt$，当 $t<0$ 时，$h(t)=0$，是因果系统；

(c) 若 $y_1(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$，$y_2(t)=\dfrac{dx_2(t)}{dt}$，$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$，其中 $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$，

则有 $y(t)=a_1\dfrac{dx_1(t)}{dt}+a_2\dfrac{dx_2(t)}{dt}=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$，是线性系统；

(d) 若 $y_1(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$，$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，

则有 $y_2(t)=\dfrac{dx_2(t)}{dt}=\dfrac{dx_1(t-t_0)}{dt}=y_1(t-t_0)$，是时不变系统；

(e) 取 $x(t)=u(t)$，显然 $x(t)$ 是有界的，但输出 $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\delta(t)$ 无界，是不稳定系统；

(4) $y[n]=x[n-2]+x[n+1]$

(a) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $n-2$ 以及时刻 $n+1$ 的输入有关，记忆系统；
(b) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $n+1$（时刻 n 以后）的输入有关，非因果系统；
(c) 若 $y_1[n]=x_1[n-2]+x_1[n+1]$，$y_2[n]=x_2[n-2]+x_2[n+1]$，以及

$y[n]=x[n-2]+x[n+1]$，其中 $x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$，则有

$y[n]=a_1x_1[n-2]+a_2x_2[n-2]+a_1x_1[n+1]+a_2x_2[n+1])=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$，是线性系统；

(d) 若 $y_1[n]=x_1[n-2]+x_1[n+1]$，$x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有

$y_2[n]=x_2[n-2]+x_2[n+1]=x_1[n-2-n_0]+x_1[n+1-n_0]=y_1[n-n_0]$，时不变系统；

(e) 若 $|x[n]|<M$，则有 $|y[n]|<2M$，稳定系统。

(5) $y(t)=\sin(4t)x(t)$

(a) 系统在时刻 t 的输出只与时刻 t 的输入有关，无记忆系统；
(b) 系统在时刻 t 的输出与时刻 t 以后的输入无关，因果系统；

(c) 若 $y_1(t)=\sin(4t)x_1(t)$，$y_2(t)=\sin(4t)x_2(t)$，$x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$，则有

$y(t)=\sin(4t)x(t)=a_1\sin(4t)x_1(t)+a_2\sin(4t)x_2(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$，是线性系统；

(d) 若 $y_1(t)=\sin(4t)x_1(t)$， $y_2(t)=\sin(4t)x_2(t)$，其中 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$，则有 $y_2(t)=\sin(4t)x_1(t-t_0)$，而 $y_1(t-t_0)=\sin(4(t-t_0))x_1(t-t_0)$，是时变系统；

(e) 若 $|x(t)|<M$，则有 $|y(t)|<M$，是稳定系统。

(6) $y[n]=x[4n]$

(a) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $4n$ 的输入有关，记忆系统；
(b) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $4n$ 的输入有关，当 $n>0$ 时，时刻 $4n$ 在时刻 n 之后，因此，是非因果系统；

(c) 若 $y_1[n]=x_1[4n]$， $y_2[n]=x_2[4n]$，以及 $x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$，则有 $y[n]=x[4n]=a_1x_1[4n]+a_2x_2[4n]=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$，线性系统；

(d) 若 $y_1[n]=x_1[4n]$， $x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有 $y_2[n]=x_2[4n]=x_1[4n-n_0]$，而 $y_1[n-n_0]=x_1[4(n-n_0)]$，因此，是时变系统；

(e) 若 $|x[n]|<M$，则有 $|y[n]|<M$，是稳定系统。

1.13 有一离散时间系统，输入为 x[n]时，系统的输出 y[n]为

$$y[n]=x[n]x[n-2]$$

问：(1)系统是记忆系统吗？

(2)当输入为 $A\delta[n]$，A 为任意实数或复数，求系统输出。

解答：(1) 是；因为系统在时刻 n 的输出 y[n]不但取决于 n 时刻的输入，还与时刻 n-2 的输入有关；

(2) $y[n]=A\delta[n]A\delta[n-2]=A^2\delta[n]\delta[n-2]=0$

1.14 一连续时间线性系统 S，其输入为 x(t)，输出为 y(t)，有以下关系：

$$x(t)=e^{j2t}\xrightarrow{\ S\ }y(t)=e^{j3t}$$

$$x(t)=e^{-j2t}\xrightarrow{\ S\ }y(t)=e^{-j3t}$$

(1) 若 $x_1(t)=\cos 2t$，求系统的输出 $y_1(t)$；

(2) 若 $x_2(t)=\cos(2t-1)$，求系统的输出 $y_2(t)$。

解：(1) $x_1(t)=\cos 2t=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})$，$y_1(t)=\frac{1}{2}(e^{j3t}+e^{-j3t})=\cos 3t$（线性系统）；

(2) $x_2(t)=\cos(2t-1)=\frac{1}{2}(e^{j(2t-1)}+e^{-j(2t-1)})=\frac{1}{2}(e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-j2t})$，

由于是线性系统，有 $y_2(t)=\frac{1}{2}(e^{-j}e^{j3t}+e^{j}e^{-j3t})=\cos(3t-1)$

1.15 用 u[n]表示图 1-58 所示的各序列。

解：图 1-58 见 P27，此略。

(1) $y[n]=u[n+1]-u[n-4]$

(2) $y[n]=\frac{(n+1)}{2}\{u[n]-u[n-5]\}$

(3) $x[n]=(2n+2)u[n]+(4-2n)u[n-2]+(8-2n)u[n-5]+(2n-14)u[n-7]$

1.16 求下列积分的值。

(1) $\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+\delta(t-1)]dt$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)\delta(t-\frac{\pi}{2})dt$

(3) $\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\delta(\cos t)dt$

解：(1) $\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+\delta(t-1)]dt=f(0)+f(1)=2+6=8$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)\delta(t-\frac{\pi}{2})dt=f(\frac{\pi}{2})=1$；

(3) $\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\delta(\cos t)dt=(1+t)\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}+(1+t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}+(1+t)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}+(1+t)\Big|_{t=-\frac{3\pi}{2}}=4$；

1.17 证明：$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$。

证明：(1) 当 $t\neq 0$ 时，$2t\neq 0$，于是有 $\delta(2t)=0$；

(2) 又 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t)dt\overset{t_1=2t}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t_1)d(\frac{t_1}{2})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t_1)dt_1=\frac{1}{2}$；当 t=0

因此有，$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$。

1.18 一个 LTI 系统，当输入 $x(t)=u(t)$ 时，输出为 $y(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$。求该系统对图 1-59 所示输入信号 $x(t)$ 的响应，并画出其波形。

解：当输入信号为 $x(t)=u(t)$ 时，　系统的输出为 $y(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$

现输入信号为 $x_1(t)=u(t-1)-u(t-2)$

由于是 LTI 系统，因此输出为 $y_1(t)=y(t-1)-y(t-2)$，即

$y_1(t)=e^{-(t-1)}u(t-1)+u(-t)-e^{-(t-2)}u(t-2)-u(1-t)$，其时域波形如下图所示。

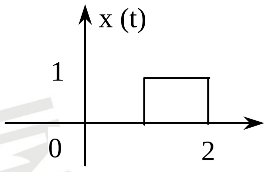
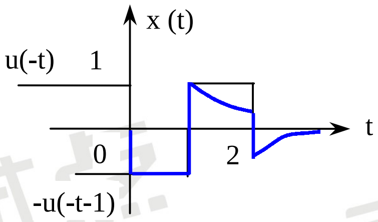


图 1-59 题 1.18 图



题 1.18 解答示意图

1.19 已知一个 LTI 系统图 1-60（a）所示信号 $x_1(t)$ 的响应 $y_1(t)$ 如图 1-60（b），求该系统对题图 1-60（c），1-60（d）所示信号 $x_2(t)$、$x_3(t)$ 的响应，并画出其波形。

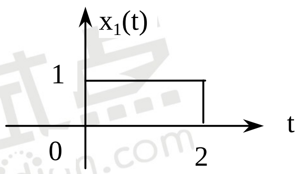


图 1-60（a）

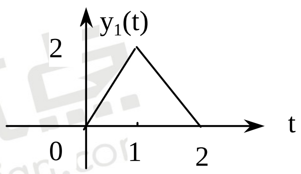


图 1-60（ b）

图 1-60 题 1.19 图

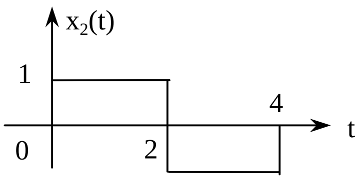


图 1-60（c）

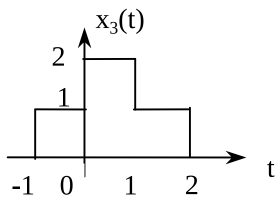


图 1-60（d）

解：(1) 由图 1-60（c）知：$x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)$

由于是 LTI 系统，便有 $y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-2)$，图见 1-60（c'）；

(2) 由图 1-60（d）知：$x_3(t)=x_1(t+1)+x_1(t)$，同（1）理，有

$y_3(t)=y_1(t+1)+y_1(t)$，图见 1-60（d'）。

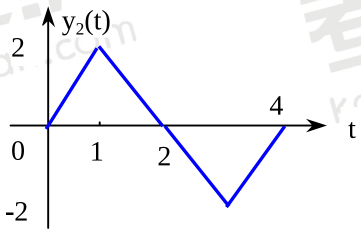


图 1-60（c’）

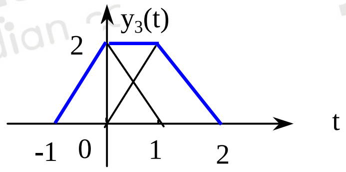


图 1-60（d’）

1.20　如图 1-61 所示的反馈系统，假设 n<0, y[n]=0，试画出 $x[n]=\delta[n]$ 时的 y[n]。

解：因为 $y[n]=x_1[n-1]$ ；$y[n+1]=x_1[n]$

$$x_1[n]=x[n]-y[n]$$

故：$y[n+1]+y[n]=x[n]$

当 n=-1 时：$y[0]+y[-1]=x[-1]$

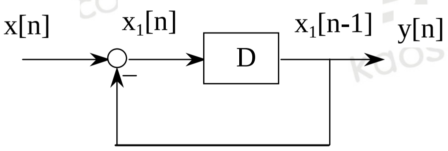


图 1-61　题 1.20 图

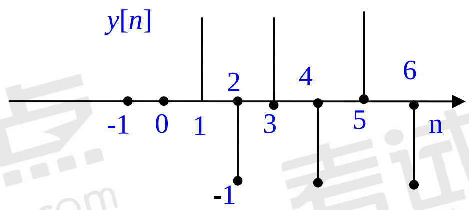
因为 n<0, y[n]=0，且 $x[n]=\delta[n]$ ；故：$y[0]=0$

当 n=0 时：$y[1]+y[0]=x[0]$ ；故：$y[1]=1$

当 n=1 时：$y[2]+y[1]=x[1]$ ；故：$y[2]=-1$

当 n=2 时：$y[3]+y[2]=x[2]$ ；故：$y[3]=1$

显然，$y[n]=(-1)^{n-1}u[n-1]$



题 1.20 解答示意图

1.21　对图所示级联，3 个系统具有以下输入输出关系

S1：$y[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}], \text{n is even} \\ 0, \ n \text{ is odd} \end{cases}$

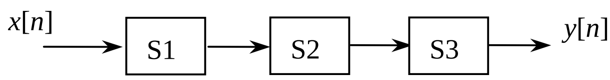


图 1-62　题 1.21 图

S2：$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

S3：$y[n]=x[2n]$

求：(1）整个系统的输入输出关系；

(2）整个系统是线性时不变系统吗？

解：设系统 S1、S2 的输出分别为 $w_1[n]$和 $w_2[n]$，则

(1) 系统 S1 的输出：$w_1[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}], \text{n is even} \\ 0, \ n \text{ is odd} \end{cases}$

(2) 系统 S2 的输出：

$$w_2[n]=w_1[n]+\frac{1}{2}w_1[n-1]+\frac{1}{4}w_1[n-2]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}]+\frac{1}{4}x[\frac{n-2}{2}], \text{n is even} \\ \frac{1}{2}x[\frac{n-1}{2}], \qquad \text{n is odd} \end{cases}$$

(3) 整个系统也即 S3 的输出： $y[n]=y_3[n]=w_2[2n]$

所以 $y[n]=x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]$

(2) 因为呈线性关系，故是线性系统。还可容易地判定系统也是时不变系统。

1.22 用直角坐标形式表示下列复数：$\frac{1}{2}e^{j\pi}$；$e^{-j\frac{\pi}{2}}$；$e^{j\frac{5\pi}{2}}$；$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$；$\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}$。

解：因为：复数的三种形式分别为：

极坐标形式：$A=re^{j\theta}$；三角形式：$A=r(\cos\theta+j\sin\theta)$

直角坐标形式：$A=a+jb$，其中：$\begin{cases}a=r\cos\theta\\ b=r\sin\theta\end{cases}$

所以：(1) $\frac{1}{2}e^{j\pi}=\frac{1}{2}\cos\pi=-\frac{1}{2}$；　(2) $e^{-j\frac{\pi}{2}}=j\sin(-\frac{\pi}{2})=-j$；

(3) $e^{j\frac{5\pi}{2}}=j$；　(4) $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+j\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1+j$

(5) $\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}=\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4})+j\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4})=-1-j$

1.23 用极坐标形式（$re^{j\theta t}$，$-\pi<\theta\le\pi$）表示下列复数：

－2，3j，1＋j，j(1－j)，$\frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})}{1+j\sqrt{3}}$，（1＋j）（1－j）。

解：(1) $-2=2e^{j\pi}$；　(2) $3j=3e^{j\frac{\pi}{2}}$；

(3) $1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$；　(4) $j(1-j)=1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$；

(5) $\frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})}{1+j\sqrt{3}}=\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\frac{\pi}{3}}}=e^{-j\frac{\pi}{12}}$；(6) $(1+j)(1-j)=2=2e^{j0}$

1.24 有一线性时不变系统，当激励 $x_1(t)=u(t)$ 时，响应 $y_1(t)=e^{-at}u(t)$，试求当 $x_2(t)=\delta(t)$ 时，响应 $y_2(t)$ 的表示式（假定起始时刻系统无储能）。

解：因为 $x_1(t)=u(t)$，而 $x_2(t)=\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=\frac{dx_1(t)}{dt}$

故从输入间的关系，可得其输出的关系（由题知起始时刻系统无储能）：

$$y_2(t)=\frac{dy_1(t)}{dt}=\frac{d(e^{-at}u(t))}{dt}=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$$

于慧敏主编<信号与系统>第二章作业(P69－75) 习题解答

2.1-2.17

2.1 求下列各函数 x(t)与 h(t)的卷积 x(t)* h(t)。

（1） $x(t)=e^{\alpha t}u(t)$， $h(t)=u(t), a\neq 0$；

（2） $x(t)=\delta(t)$， $h(t)=\cos w_0 t+\sin w_0 t$ ；

（3） $x(t)=(1+t)[u(t)-u(t-1)]$， $h(t)=u(t)-u(t-2)$

（4） $x(t)=\sin 2t\cdot u(t)$， $h(t)=u(t)$

（5） $x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-4)$， $h(t)=e^{2t}$

（6） x(t)与 h(t)如图 2-34 所示。

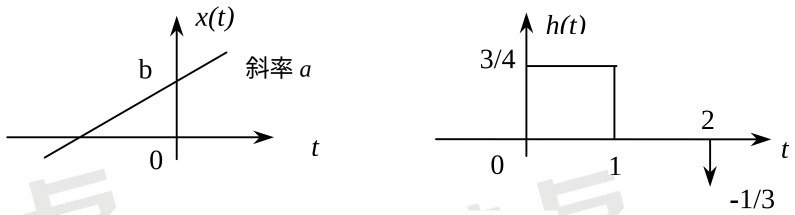


图 2-34 题 2-1 第（6）题

解：(1) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$

$$=\int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau=-\frac{1}{a}e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{a}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

(2) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)[\cos w_0 t+\sin w_0 t]d\tau$

$$=\cos w_0 t+\sin w_0 t$$

(3) 方法一为作图法：

当 $t<0$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=0$

当 $0\le t<1$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t(1+\tau)d\tau=t+\frac{t^2}{2}$

当 $1\le t<2$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^1(1+\tau)d\tau=\frac{3}{2}$

当 $2\le t<3$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{t-2}^1(1+\tau)d\tau=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2}$

当 $3\le t$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=0$

方法二：直接计算法：

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)[u(\tau)-u(\tau-1)][u(t-\tau)-u(t-\tau-2)]d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau)u(t-\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau-1)u(t-\tau-2)d\tau$$
$$=u(t)\int_0^t(1+\tau)d\tau-u(t-2)\int_0^{t-2}(1+\tau)d\tau-u(t-1)\int_1^t(1+\tau)d\tau+u(t-3)\int_1^{t-2}(1+\tau)d\tau$$
$$=(t+\frac{t^2}{2})u(t)-(t+\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2})u(t-1)-(\frac{t^2}{2}-t)u(t-2)+(\frac{t^2}{2}-t-\frac{3}{2})u(t-3)$$

(4) 当 $t<0$ 时，$y(t)=x(t)*h(t)=0$；

当 $t>0$ 时，

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sin 2\tau u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$
$$=u(t)\int_0^t\sin 2\tau d\tau=-\frac{1}{2}\cos 2\tau\ \Big|_0^t u(t)=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)u(t)$$

(5) $$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t-\tau)-2u(t-\tau-2)+u(t-\tau-4)]e^{2\tau}d\tau$$
$$=\int_{t-2}^{t}e^{2\tau}d\tau-\int_{t-4}^{t-2}e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-4)})$$

(6) $x(t)=at+b$, $h(t)=\frac{4}{3}[u(t)-u(t-1)]-\frac{1}{3}\delta(t-2)$

方法一：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{4}{3}\int_{t-1}^{t}(a\tau+b)d\tau+(at+b)*(-\frac{1}{3})\delta(t-2)$$
$$=\frac{4}{3}(\frac{a\tau^2}{2}+b\tau)\ \Big|_{t-1}^{t}+(-\frac{1}{3})[a(t-2)+b]=at+b$$

方法二：

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[a(t-\tau)+b]\{\frac{4}{3}[u(\tau)-u(\tau-1)]-\frac{1}{3}\delta(\tau-2)\}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{3}[a(t-\tau)+b][u(\tau)-u(\tau-1)]d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}[a(t-\tau)+b]\delta(\tau-2)d\tau$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^1[a(t-\tau)+b]d\tau-\frac{1}{3}[a(t-2)+b]=\frac{4}{3}(at-\frac{a}{2}+b)-\frac{1}{3}(at-2a+b)$$
$$=at+b$$

2.2 求下列离散序列 $x(n)$与 $h(n)$的卷积和。

(1) $x[n]=nu[n]$，$h[n]=\delta[n-2]$； (2) $x[n]=2^n u[n]$，$h[n]=u[n]$

(3) $x[n]=2^n u[-n-1]$，$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n-1]$； (4) $x[n]=a^n u[n]$，$h[n]=\beta^n u[n]$；

(5) $x[n]=(-1)^n(u[-n]-u[-n-8])$，$h[n]=u[n]-u[n-8]$

解：(1) $x[n]*h[n]=nu[n]*\delta[n-2]=[n-2]u[n-2]$

(2)用到等比数列前 n 项的求和公式：$S=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ （通项：$a_n=a_1q^{n-1}$）

此题：$a_1=1,q=2$

$$x[n]*h[n]=2^n u[n]*u[n]=(\sum_{k=0}^{n}2^k)u[n]=(2^{n+1}-1)u[n]$$

(3) 用到无穷等比递减数列求和公式：$S=\dfrac{a_1}{1-q},|q|<1$ （通项：$a_n=a_1q^{n-1}$）

此题，当 n<0 时，$a_1=2^{n-2},q=2^{-2}$；当 n>=0 时，$a_1=2^{-n-2},q=2^{-2}$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k u[-k-1](\frac{1}{2})^{n-k}u[n-k-1]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{2k-n}u[-k-1]u[n-k-1]=\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{n-1}2^{2k-n}=\dfrac{2^n}{3} & n<0\\ \sum_{k=-\infty}^{-1}2^{2k-n}=\dfrac{2^{-n}}{3} & n\ge 0\end{cases}=\frac{2^{-|n|}}{3}$$

(4) 用到等比数列前 n 项的求和公式（参见（2））：且此题：$a_1=1,q=\dfrac{\alpha}{\beta}$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k]=u[n]\beta^n\sum_{k=0}^{n}(\frac{\alpha}{\beta})^k=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u[n]$$ ；

(5) $x[n]=(-1)^n(u[-n]-u[-n-8])=(-1)^n(u[n+7]-u[n-1])$

$$x[n]*h[n]=\{(-1)^n(u[n+7]-u[n+1])\}*\{u[n]-u[n-8]\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k(u[k+7]-u[k-1])(u[n-k]-u[n-k-8])$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k+7]u[n-k]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k+7]u[n-k-8]$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k-1]u[n-k]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k-1]u[n-k-8]$$

$$=u[n+7]\sum_{k=-7}^{n}(-1)^k-u[n-1]\sum_{k=-7}^{n-8}(-1)^k-u[n-1]\sum_{k=1}^{n}(-1)^k+u[n-9]\sum_{k=1}^{n-8}(-1)^k$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{2}u[n+7]+[1-(-1)^n]u[n-1]+\frac{(-1)^n-1}{2}u[n-9]$$

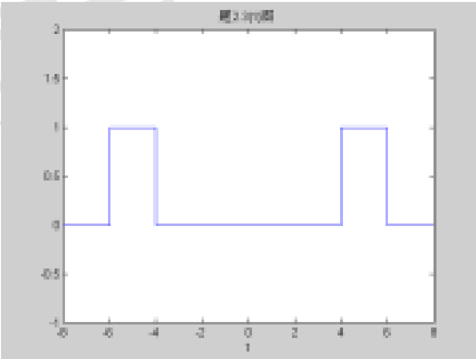
$$=\frac{(-1)^n-1}{2}(u[n+7]-2u[n-1]+u[n-9])$$

2.3 已知 $x_1(t)=u(t+1)-u(t-1)$，$x_2(t)=\delta(t+5)+\delta(t-5)$， $x_3(t)=\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})$，画出下列各卷积波形。（1） $x_1(t)*x_2(t)$；（2） $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)$；（3） $x_1(t)*x_3(t)$

解：(1) $x_1(t)*x_2(t)=[u(t+1)-u(t-1)]*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]$

$$=u(t+6)+u(t-4)-u(t+4)-u(t-6)$$

也可直接计算为： $x_1(t)*x_2(t)=x_1(t+5)+x_1(t-5)$；



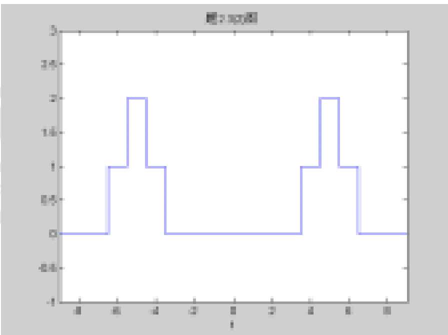
(2) $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)$

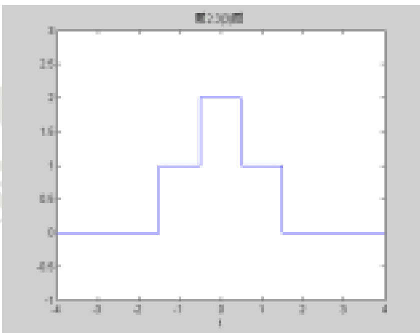
$$=[u(t+6)+u(t-4)-u(t+4)-u(t-6)]*[\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})]$$

$$=u(t+6.5)-u(t+4.5)+u(t+5.5)-u(t+3.5)+u(t-3.5)-u(t-5.5)$$

$$+u(t-4.5)-u(t-6.5)$$

也可先设 $x_1(t)*x_2(t)=y(t)$，则有 $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)=y(t+\frac{1}{2})+y(t-\frac{1}{2})$；





（3） $x_1(t)*x_3(t)=[u(t+1)-u(t-1)]*\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})$

$$=u(t+1.5)-u(t-0.5)+u(t+0.5)-u(t-1.5)$$

也可直接计算为： $x_1(t)*x_3(t)=x_1(t+\frac{1}{2})+x_1(t-\frac{1}{2})$

2.4 设 $y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)$，证明 $y(t)=Ae^{-t}$，$0\le t\le 3$，并求 A 值。

证明：$y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)*\delta(t-3k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-(t-3k)}u(t-3k)$，

当 $0\le t\le 3$ 时，有 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{0}e^{-(t-3k)}=e^{-t}\sum_{k=-\infty}^{0}e^{3k}=\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-3}}=Ae^{-t}$，其中 $A=\dfrac{1}{1-e^{-3}}$；

2.5 求图 2-35 所示信号 x(t)与 h(t)的卷积，并用图解的方法画出 x(t)* h(t)的波形。

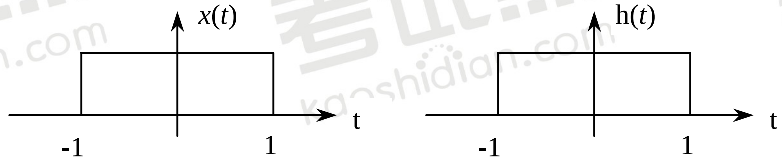


图 2-35 第(1)题图

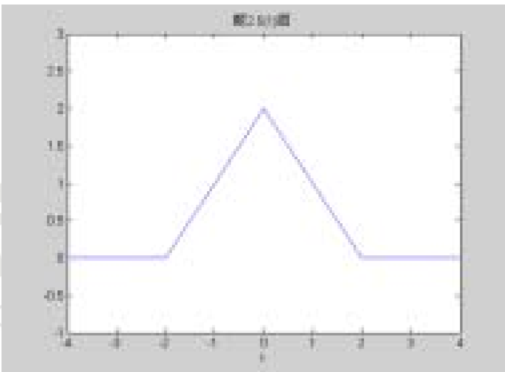
其余题图略（参见 P70）。

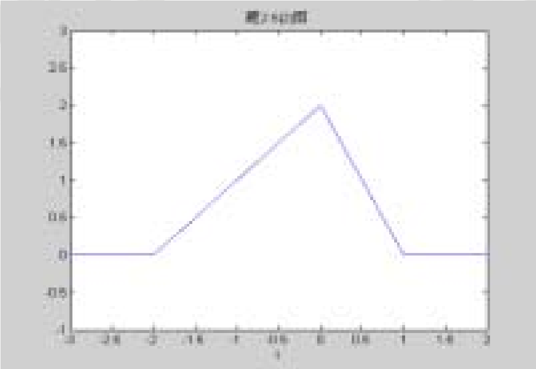
解：(1) 当 $|t|\ge 2$ 时 $x(t)*h(t)=0$

当 $-2<t<0$ 时 $x(t)*h(t)=\int_{-1}^{t+1}d\tau=t+2$

当 $0<t<2$ 时 $x(t)*h(t)=\int_{t-1}^{1}d\tau=2-t$

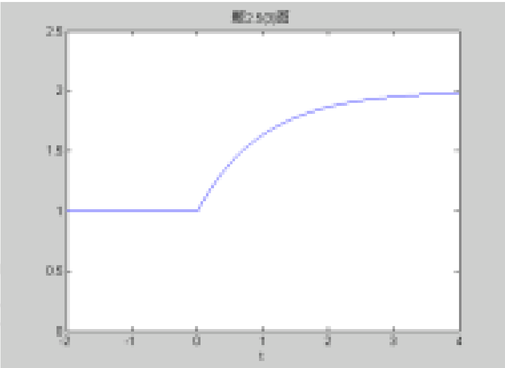
(2) $x(t)*h(t)=\begin{cases}2(1-t) & 0\le t<1\\ t+2 & -2\le t<0\\ 0 & 其它t\end{cases}$

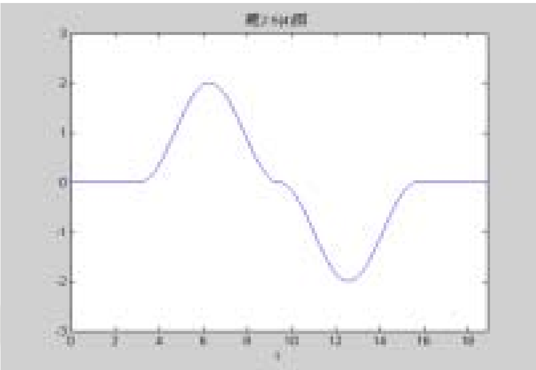




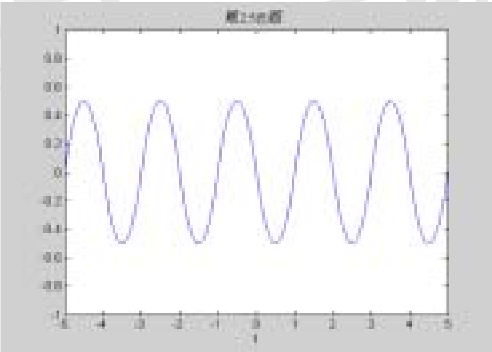
(3) $x(t)*h(t)=\begin{cases}1 & t<0\\ 2-e^{-t} & t\ge 0\end{cases}$;

(4) $x(t)*h(t)=\begin{cases}1+\cos t & \pi\le t<3\pi\\ -1-\cos t & 3\pi\le t<5\pi\\ 0 & \text{其它}t\end{cases}$;



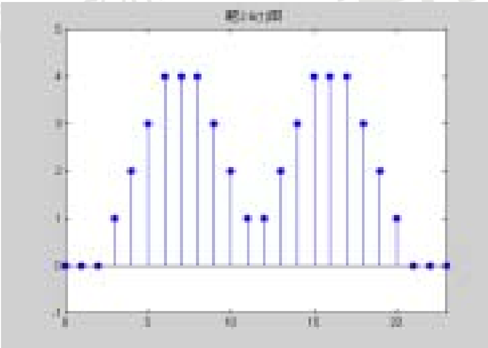


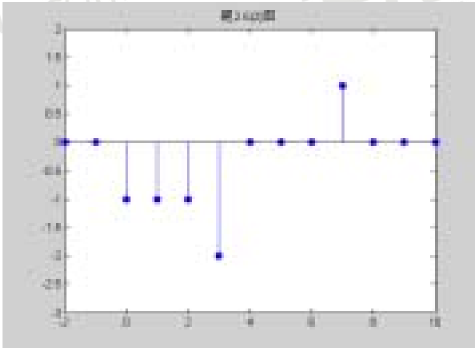
(5) $x(t)*h(t)=\begin{cases}-2t^2-2t & -1\le t<0\\ 2t^2-2t & 0\le t<1\end{cases}$，且为周期信号，其周期$T=2$；



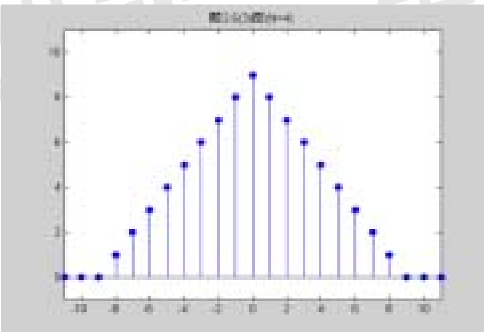
2.6　计算图 2-36 所示信号 x(n)与 h(n)的卷积和。

解：题图参见 P70 图 2-36，此略。





（3）N＝4



$$y[n]=x[n]*h[n]$$

$$=\begin{cases}0, & n<-8\\ \sum_{-4}^{4+n}1=9+n, -8\le n<0 & \\ \sum_{-4+n}^{4}1=9-n, 0\le n<8 & \\ 0, & n.>8\end{cases}$$

2.7　考虑一离散时间系统，其单位样值（脉冲）响应为　$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$

（1）求 A 以满足　$h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$

（2）利用（1）的结果，求系统的逆系统的单位样值（脉冲）响应。

解：（1）$h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$，其中 $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，

令 $n=1$，则有 $h[1]-Ah[0]=\frac{1}{2}-A=0$，于是有 $A=\frac{1}{2}$；

（2）设逆系统的单位脉冲响应为 $h_1[n]$，则有 $h_1[n]*h[n]=\delta[n]$，即有，

$$h_1[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1[k]h[n-k]=\delta[n]=h[n]-\frac{1}{2}h[n-1]$$，因此

$$h_1[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

2.8 某 LTI 系统的单位冲激响应为 $h_0(t)$，当输入为 $x_0(t)$ 时，系统对 $x_0(t)$ 的响应为 $y_0(t)=x_0(t)*h_0(t)$（如图 2-37 所示）。现给出以下各组单位冲激响应 $h(t)$ 和输入 $x(t)$，分别求 $y(t)=x(t)*h(t)$（用 $y_0(t)$ 表示），并画出 $y(t)$ 的波形图。

(1) $x(t)=3x_0(t)\,,h(t)=h_0(t)$；

(2) $x(t)=x_0(t)-x_0(t-2)\,,h(t)=h_0(t)$；

(3) $x(t)=x_0(t-2)\,,h(t)=h_0(t+1)$；

(4) $x(t)=x_0(-t)\,,h(t)=h_0(-t)$；

(5) $x(t)=\dfrac{dx_0(t)}{dt}\,,h(t)=h_0(t)$；

(6) $x(t)=\dfrac{dx_0(t)}{dt}\,,h(t)=\dfrac{dh_0(t)}{dt}$。

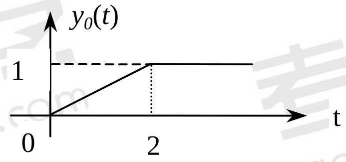
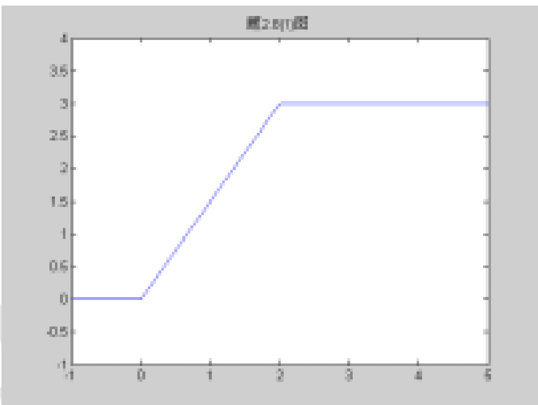
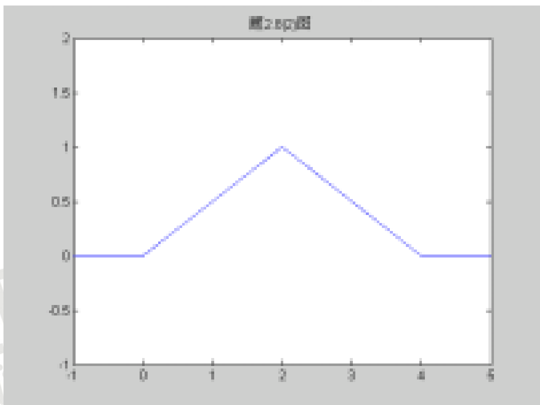


图 2-37　2.8 题图

解：(1) $x(t)*h(t)=3x_0(t)*h_0(t)=3y_0(t)$；

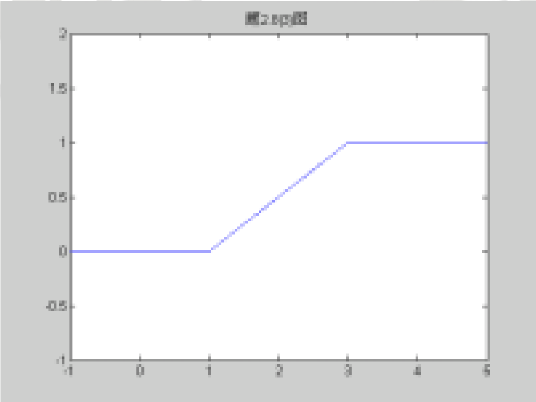
(2) $x(t)*h(t)=[x_0(t)-x_0(t-2)]*h_0(t)=y_0(t)-y_0(t-2)$；

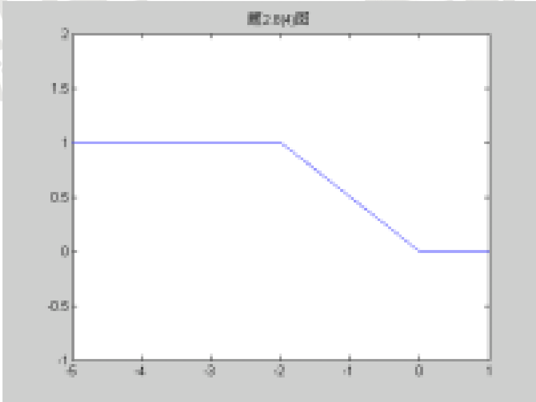




(3) $x(t)*h(t)=x_0(t-2)*h_0(t+1)=y_0(t-1)$；

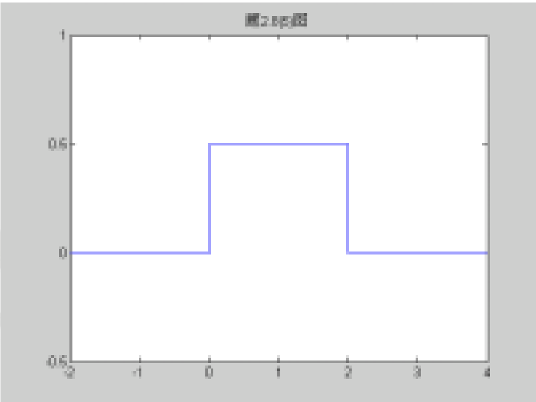
(4) $x(t)*h(t)=x_0(-t)*h_0(-t)=y_0(-t)$；

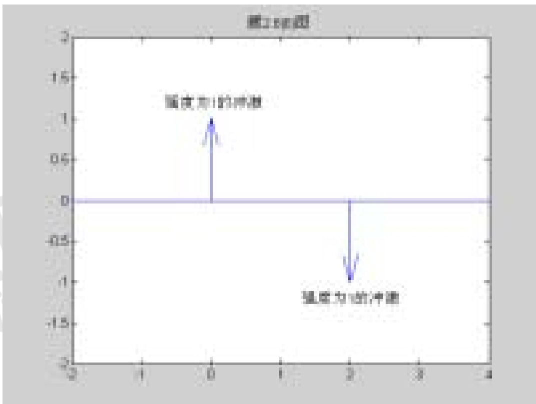




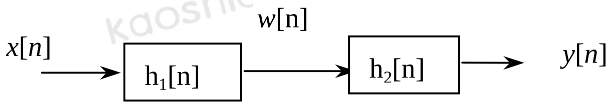
(5) $x(t)*h(t)=\dfrac{dx_0(t)}{dt}*h_0(t)=\dfrac{dy_0(t)}{dt}$；

(6) $x(t)*h(t)=\dfrac{dx_0(t)}{dt}*\dfrac{dh_0(t)}{dt}=\dfrac{d^2y_0(t)}{dt^2}$；





2.9 对图 2-38 所示两个 LTI 系统的级联，已知：$h_1[n]=\alpha^n u[n]+\beta^n u[n]$，$|\alpha|<1, |\beta|<1; \alpha\neq\beta\neq -\dfrac{1}{2}$；$h_2[n]=(-\dfrac{1}{2})^n u[n]$；输入 $x[n]=\delta[n]+\dfrac{1}{2}\delta[n-1]$。求输出 $y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]$。



2-38

解：因为 LTI 级联系统的卷积与次序无关，故

$$x[n]*h_2[n]=\{\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\}*(-\frac{1}{2})^n u[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

$$=(-\frac{1}{2})^n\delta[n]=\delta[n]$$ ；(因为当 n=0 时非零)

$$y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]*h_1[n]=*h_1[n]=\alpha^n u[n]+\beta^n u[n]$$

2.10 求 $y[n]=x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$。其中 $x_1[n]=(0.5)^n u[n]$，$x_2[n]=u[n+3]$ 和 $x_3[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$。求卷积：

（1）$x_1[n]*x_2[n]$；（2）$x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$；（3）$x_2[n]*x_3[n]$

解：(1) $x_1[n]*x_2[n]$

$$=0.5^n u[n]*u[n+3]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}0.5^k u[k]u[n-k+3]=u[n+3]\sum_{k=0}^{n+3}0.5^k$$
$$=2(1-0.5^{n+4})u[n+3]$$

（2）$x_2[n]*x_3[n]=u[n+3]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]$

$$x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]=\delta[n+3]*x_1[n]=x_1[n+3]=(0.5)^{n+3}u[n+3]$$

（3）$x_2[n]*x_3[n]=u[n+3]*(\delta[n]-\delta[n-1])=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]$；

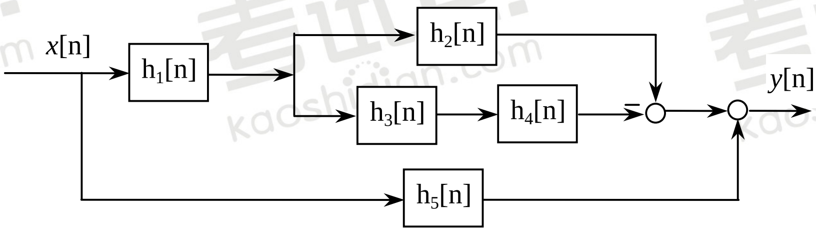
2.11 对如图 2-39 所示的 LTI 系统的互联：

（1） 用 $h_1[n]$、$h_2[n]$、$h_3[n]$、$h_4[n]$、$h_5[n]$ 表示总的单位冲激响应 $h[n]$；

（2） 当 $h_1[n]=4(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3])$，$h_2[n]=h_3[n]=(n+1)u[n]$，$h_4[n]=\delta[n-1]$，$h_5[n]=\delta[n]-4\delta[n-3]$，求单位冲激响应 $h[n]$；

（3） $x[n]$ 如图 2-40 所示，求（2）中所给的系统的响应，并画出响应的波形图。

解：



2-39

(1) $h[n]=h_1[n]*\{h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]\}+h_5[n]$

(2) $h_3[n]*h_4[n]=(n+1)u[n]*\delta[n-1]=nu[n-1]$

$$h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]=(n+1)u[n]-nu[n-1]=u[n]$$

$$h_1[n]*\{h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]\}=4(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3])*u[n]$$

$$=4\{\sum_{k=-\infty}^{n}(\frac{1}{2})^k u(k)-\sum_{k=-\infty}^{n}(\frac{1}{2})^k u(k-3)\}=4\sum_{k=0}^{2}(\frac{1}{2})^k$$

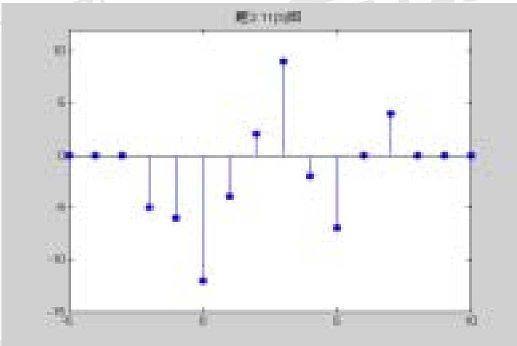
$$=4\{\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]+\frac{7}{4}\delta[n-2]\}=4\delta[n]+6\delta[n-1]+7\delta[n-2]$$

$$h[n]=h_1[n]*\{h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]\}+h_5[n]=5\delta[n]+6\delta[n-1]+7\delta[n-2]-4\delta[n-3]$$

(3) 将不同的 n 代入上式，可得（3）

n	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y[n]	…	0	-5	-6	-12	-4	2	4	-2	-7	0	4	0	…

波形图如下图所示



2.12 考虑一个 LTI 系统，其输入和输出关系通过如下方程联系

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

(1) 求该系统的单位冲激响应；

(2) 当输入如图 2-41 所示，求系统的响应。

解：(1) 因为系统输入为 $\delta(t)$，故系统输出即为系统的单位冲激响应，即：

$$y(t)=h(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}\delta(\tau-2)d\tau=\begin{cases}0 & t<2\\ e^{-(t-2)} & t>2\end{cases}=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

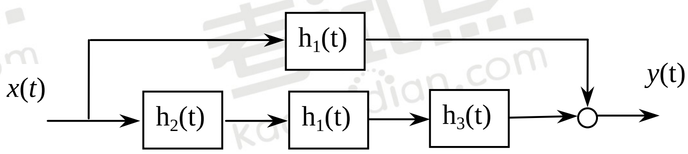
(2) 因为图 2-41 所示的输入为 u(t+1)-u(t-2)，故系统输出：

$$\begin{aligned}y(t)&=x(t)*h(t)=[u(t+1)-u(t-2)]*e^{-(t-2)}u(t-2)\\&=(1-e^{1-t})u(t-1)-(1-e^{4-t})u(t-4)\end{aligned};$$

2.13 如图 2-42 所示级联系统，各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)=u(t)$（积分器），$h_2(t)=\delta(t-1)$（单位延时器），$h_3(t)=-\delta(t)$（倒相器）。

(1) 试求总的系统的冲激响应；

(2) 当 $x(t)$ 如图 2-41 所示，求系统对该信号的响应 $y(t)$。



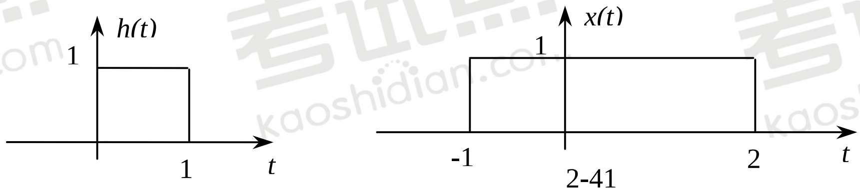
2-42

解：(1) $h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)=u(t)*\delta(t-1)*[-\delta(t)]=u(t-1)*[-\delta(t)]=-u(t-1)$

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)=u(t)-u(t-1)$$

(2) 根据 (1)，可知 h(t)如下图示， 因此，求系统响应 $y(t)$即为求下面两个信号的卷积

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$



2-41

① 当 t<－1 时， $x(\tau)$与$h(t-\tau)$无重叠部分，乘积为零，故

$$y(t)=x(t)*h(t)=0$$

② 当－1≤t<0 时， $x(\tau)$与$h(t-\tau)$的重叠区为 [-1, t]，乘积为

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-1}^{t}d\tau=t+1$$

③ 当 0≤t<2 时，$x(\tau)$与$h(t-\tau)$的重叠区为 [-1＋t, t]，乘积为

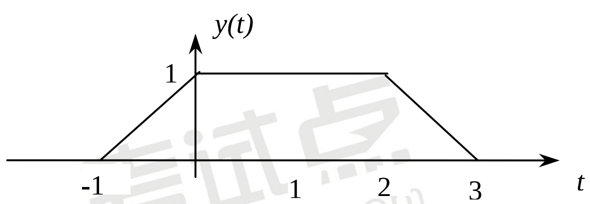
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-1+t}^{t}d\tau=1$$

④ 当 2≤t<3 时，$x(\tau)$与$h(t-\tau)$的重叠区为 [-1＋t, 2]，乘积为

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-1+t}^{2}d\tau=3-t$$

⑤ 当 t>3 时，$x(\tau)$与$h(t-\tau)$无重叠区，乘积为零。综上所述有

$$y(t)=\begin{cases} t+1 & (-1<t<0) \\ 1 & (0<t<2) \\ 3-t & (2<t<3) \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$ ， 其示意图如下所示。



亦可直接计算：

（2） $$\begin{aligned}y(t)&=x(t)*h(t)=[u(t+1)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-1)]\\&=(t+1)u(t+1)-tu(t)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)\end{aligned}$$ ；

2.14 下面均为连续时间 LTI 系统的单位脉冲响应，试判定每一个系统是否因果和/或稳定的，陈述理由。

（1） $h(t)=e^{-4t}\cdot u(t-2)$ ；　　（2） $h(t)=e^{-6t}\cdot u(3-t)$

（3） $h(t)=e^{-2t}\cdot u(t+50)$ ；　　（4） $h(t)=e^{2t}\cdot u(-1-t)$

（5） $h(t)=e^{-6|t|}$ ；　　（6） $h(t)=te^{-t}\cdot u(t)$ ；

（7） $h(t)=(-2e^{-t}-e^{(t-100)/100})\cdot u(t)$。

解：(1) 因果，稳定；从因果性及稳定性的定义出发，当 t<0（实际上，t<2）时，$h(t)=0$，系统是因果的；又因 $h(t)$ 绝对可积，故系统是稳定的。

（2）非因果，非稳定；因为 $u(3-t)=u[-(t-3)]$，显然不满足系统因果性条件；又因：

$\int_{-\infty}^{-3}h(t)dt=\int_{-\infty}^{-3}e^{-6t}dt=\infty$，故系统不稳定。

（3）非因果，稳定；非因果很显然；因为

$\int_{-50}^{\infty}h(t)dt=\int_{-50}^{\infty}e^{-2t}dt<\infty$ 绝对可积，故系统是稳定的。

（4）非因果，稳定；因为 $u(-1-t)=u[-(t+1)]$ ；不满足系统因果性条件；又因

$\int_{-\infty}^{-1}h(t)dt=\int_{-\infty}^{-1}e^{2t}dt<\infty$ 绝对可积，故系统是稳定的。

（5）非因果，稳定。$h(t)=e^{-6|t|}$ ；$t<0$ 时，$h(t)\neq 0$，非因果，又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$，稳定；

（6）因果，稳定。$h(t)=te^{-t}u(t)$ ；$t<0$ 时，$h(t)=0$，因果，又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$，稳定；

（7）因果，不稳定。$h(t)=(-2e^{-t}-e^{\frac{t-100}{100}})u(t)$ ；$t<0$ 时，$h(t)=0$，因果，又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt$ 发散，不稳定。

2.15 下面均为离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应，试判定每一个系统是否因果和/或稳定

的，陈述理由。

（1） $h[n]=(\frac{1}{5})^n\cdot u[n]$；　　（2） $h[n]=(\frac{4}{5})^n\cdot u[n+2]$；

（3） $h[n]=(\frac{1}{2})^n\cdot u[-n]$；　　（4） $h[n]=5^n\cdot u[3-n]$；

（5） $h[n]=(-\frac{1}{2})^n\cdot u[n]+(1.01)^n u[n-1]$；

（6） $h[n]=(-\frac{1}{2})^n\cdot u[n]+(1.01)^n u[1-n]$；

（7） $h[n]=n(\frac{1}{3})^n\cdot u[n-1]$。

解：依照上面连续系统的做法，逐一分析，可得如下结果：

（1） 因果，稳定；从因果性及稳定性的定义出发，当 n<0 时，$h[n]=0$，故系统是因果的；又因 $h[n]$ 绝对可和，即 $\sum_{0}^{\infty} h[n]=\sum_{0}^{\infty}(\frac{1}{5})^n<\infty$；故系统是稳定的。

（2） 非因果，稳定；因为 $u[n+2]$ 显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]=\sum_{n=-2}^{\infty}(\frac{4}{5})^n<\infty$$；故系统是稳定的。

（3） 非因果，非稳定。因为 $u[-n]$ 显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[n]=\sum_{-\infty}^{0}(\frac{1}{2})^n=\sum_{0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{-n}=\infty$$；故系统是非稳定的。

（4） 非因果，稳定。因为 $u[-(n-3)]$ 显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[n]=\sum_{-\infty}^{-3}5^n=\sum_{3}^{\infty}5^{-n}<\infty$$；故系统是稳定的。

（5） 因果，不稳定。$h[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+1.01^n u[n-1]$，$n<0$ 时，$h[n]=0$，因果，又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$ 发散，不稳定；

（6） 非因果，稳定。$h[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+1.01^n u[1-n]$，$n<0$ 时，$h[n]\neq 0$，非因果，又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$，稳定；

（7） 因 果 ， 稳 定 。 $h[n]=n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$ ， $n<0$ 时 ， $h[n]=0$ ， 因 果 ， 又

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$，稳定。

2.16 判断下面有关 LTI 系统的说法是对是错。并陈述理由。

（1）若 h(t)是一个因果稳定系统的单位冲激响应，则 h(t)满足 $\lim_{t\to\infty}|h(t)|=0$；

解答：(1) 对。

（2）若 h(t)是一个 LTI 系统的单位冲激响应，并且 h(t)是周期的且非零，则系统是不稳定；

解答：(1) 对。$\because \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=+\infty$

（3）一个因果的 LTI 系统的逆系统总是因果的；

解答：(3) 错。例如单位冲激响应 $\delta(t-1)$ 是因果的，但其 LTI 系统的逆系统 $\delta(t+1)$ 不是因果的。

（4）若 $|h[n]|\le k$（对每一个 n），k 为某已知数，则以 h[n]作为单位脉冲响应的 LTI 系统是稳定的；

解答：(4) 错。因为：$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$。例如 h[n]=1, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=+\infty$，

（5）若一个离散时间 LTI 系统其单位脉冲响应 h[n]为有限长且有界，则系统是稳定的；

解答：(5) 对 $\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<+\infty$

（6）若一个 LTI 系统是因果的，它就是稳定的；

解答：(6) 错。因为因果系统与系统的稳定性定义不同。

LTI 系统稳定的充要条件是其单位脉冲响应绝对可积。而因果性的充要条件是其单位脉冲响应满足 h[n]=0，当 n<0

（7）一个非因果的 LTI 系统与一个因果的 LTI 系统级联，必定是非因果的；

解答：(7) 错

例如$h_1(t)=\delta(t+1), h_2(t)=\delta(t-2)$， $h(t)=h_1(t)*h_2(t)=\delta(t-1)$是因果的

（8）当且仅当一个连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应 s(t)是绝对可积的，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|dt<\infty$，则该系统就是稳定的；

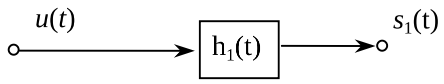
解答：(8) 错。因为 s(t)是绝对可积的不等于 h(t)绝对可积。

$\because h(t)*x(t)=x'(t)*s(t)$， 如$s(t)=\delta(t), x(t)=u(t)$ 则 $h(t)*x(t)=\delta(t)\to\infty$

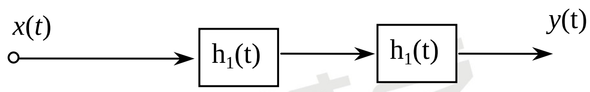
（9）当且仅当一个离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应 s[n]在 n<0 是零，该系统就是因果的。

解答：(9) 对。因为 $s[n]=s[n-1]+h[n]$，若 s[n]在 n<0 是零，h[n]在 n＜0 时也必小于零，满足离散时间 LTI 系统的因果性充要条件。

2.17 已知如图 2-43（a）所示连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应为：$s_1(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$ 。现对如图 2-43（b）所示的系统，如果 $x(t)=u(t)-u(t-2)$，求系统响应 $y(t)=x(t)*h(t)$，并绘出 y(t)的波形。



图(a)



图(b)

图 2-43　题 2.17 图

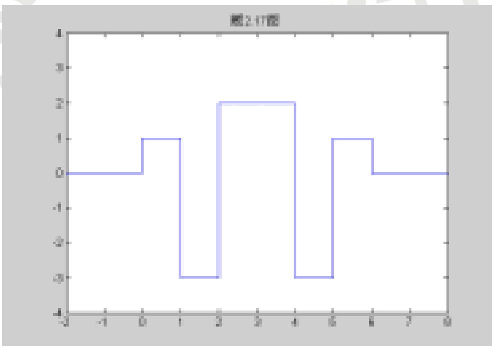
解：(1) 由 LTI 系统的线性叠加原理，据已知条件可得：

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*h_1(t)*h_2(t)=[u(t)-2u(t-1)+u(t-2)+2u(t-3)-u(t-4)]*h_1(t)$$

$$=[u(t)-2u(t-1)+2u(t-3)-u(t-4)]*h_1(t)$$

$$=u(t)-4u(t-1)+5u(t-2)-5u(t-4)+4u(t-5)-u(t-6)$$

(2) 波形图



于慧敏主编<信号与系统>第二章作业(P69－75) 习题解答

2.18-2.26

2.18　已知某连续时间 LTI 系统，当输入为如图 2-44（a）所示的 $x_1(t)$ 时，输出为如图 2-44（b）所示的 $y_1(t)$。现若给该系统施加的输入信号为 $x_2(t)=(\sin\pi t)[u(t)-u(t-1)]$，求系统的输出响应 $y_2(t)$。

解：由 $\frac{dx_1(t)}{dt}=\delta(t)-\delta(t-2)$，$\frac{dy_1(t)}{dt}=u(t)-u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)$，可得

系统的单位脉冲响应为：$h(t)=u(t)-u(t-1)$

当输入为 $x_2(t)=\sin\pi t[u(t)-u(t-1)]$ 时

系统的输出为 $y_2(t)=x_2(t)*h(t)=\frac{1-\cos\pi t}{\pi}[u(t)-u(t-2)]$；

2.19　如图 2-45 所示电路，$t<0$ 时，开关位于“1”且已达到稳定，t=0 时刻开关自“1”转自“2”。

（1）写出一个微分方程，可在 $-\infty< t<+\infty$ 时间内描述系统；

（2）试求系统 $t>0$ 时的零状态响应和零输入响应及完全响应。

解：（1）由图可出系统的微分方程：$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$

其中 $R=1\Omega$，$C=1F$，$L=2H$，$e(t)=10+10u(t)$

于是有，$2\frac{di(t)}{dt}+i(t)+\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=10+10u(t)$

两边求导有，$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{2}i(t)=5\delta(t)$；

（2）因为 $t<0$ 时，系统已达到稳定，有 $i(0_-)=0$，且 $L\frac{di(t)}{dt}\Big|_{t=0_-}=u_L(0_-)=0$，即

$i'(0_-)=0$

此系统的初始状态为零，零状态响应即为完全响应；当 $t=0$ 时，开关由位置“1”转至位置“2”

激励电压 $e(t)$ 由 $10V$ 跳变为 $20V$，由于电容两端电压不能跳变，即 $u_c(0_+)=10$，又流过

电感的电流不能跳变，即 $i(0_+)=i(0_-)=0$，电阻两端电压为 $u_R(0_+)=Ri(0_+)=0$

于是有 $u_L(0_+)=e(0_+)-u_c(0_+)-u_R(0_+)=10$，$L\frac{di(t)}{dt}\bigg|_{t=0_+}=u_L(0_+)=10$

即 $i^{'}(0_+)=5$；$t>0$ 时，$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{2}i(t)=0$，特征值为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$

解的形式为 $i(t)=e^{-\frac{t}{4}}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t)$

代入条件 $i(0_+)=0$ 以及 $i^{'}(0_+)=5$，可得 $c_1=0$，$c_2=\frac{20}{\sqrt{7}}$，即 $i(t)=\frac{20}{\sqrt{7}}e^{-\frac{t}{4}}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t$；

2.20 给定系统的微分方程、输出信号的起始条件以及激励信号，试分别求它们的完全响应（t≥0）,并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应各分量。

（1）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t), y(0\_)=y'(0\_)=1, x(t)=u(t)$

（2）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t), y(0\_)=1, y'(0\_)=0, x(t)=u(t)$

(3) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dx^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，其中 $y(0\_)=1$，$y^{'}(0\_)=0$，

$x(t)=e^{-3t}u(t)$；

（4）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，$x(t)=-2u(-t)+2u(t)$；

（5）$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，$x(t)=2u(-t)+4e^{-t}u(t)$；

解：(1) 特征方程：$\lambda^2+5\lambda+6=0$，特征根为：$\lambda_1=-2$；$\lambda_2=-3$

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

特解也即强迫响应：$y_p(t)=B$；代入原方程(1)解之：$B=\frac{1}{6}$

系统完全响应：$y(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}+\frac{1}{6}$

因为：$y_{zi}(0\_)=C_1+C_2=1$；$y'_{zi}(0\_)=-2C_1-3C_2=1$

解之：$C_1=4, C_2=-3$

故零输入分量：$y_{zi}(t)=\{4e^{-2t}-3e^{-3t}\}u(t)$

下面求零状态响应

方法一(如书上的方法)：$y_{zs}(t)=\{C_{zs1}e^{-2t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{6}\}\cdot u(t)$

对上式求导：$y'_{zs}(t)=(C_{zs1}e^{-2t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{6})\big|_{t=0}\delta(t)+[-2C_{zs1}e^{-2t}-3C_{zs2}e^{-3t}]u(t)$

$$y''_{zs}(t)=(C_{zs1}e^{-2t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{6})\big|_{t=0}\delta'(t)+[-2C_{zs1}e^{-2t}-3C_{zs2}e^{-3t}]\delta(t)$$
$$+[4C_{zs1}e^{-2t}+9C_{zs2}e^{-3t}]u(t)$$

将上面式子代入原方程，注意 t=0

$$y''_{zs}(t)+5y'_{zs}(t)+6y_{zs}(t)=0$$

方程两边关于$\delta(t)$的系数应该相等

$C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{1}{6}=0$ ；

$2C_{zs1}+3C_{zs2}=0$ ； 解之：$C_{zs1}=-\frac{1}{2};C_{zs2}=\frac{1}{3}$

于是，零状态响应：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\}u(t)$

方法二：零初始条件下应用求系统传递函数再求反变换方法得到零状态响应更简单：

因为输出的拉氏变换：$y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{6s}-\frac{1}{2(s+2)}+\frac{1}{3(s+3)}$

故零状态分量：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\}u(t)$

系统完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\{\frac{1}{6}+\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t}\}u(t)$

自由响应分量：$(\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t})u(t)$；强迫响应分量：$\frac{1}{6}u(t)$；

解：(2) 特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根为：$\lambda_1=-1$；$\lambda_2=-2$

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

特解也即强迫响应：$y_p(t)=B$；代入原方程(1)解之：$B=\frac{1}{2}$

系统完全响应：$y(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}+\frac{1}{2}$

因为：$y_{zi}(0_-)=C_1+C_2=1$；$y'_{zi}(0_-)=-C_1-2C_2=0$

解之：$C_1=2,C_2=-1$

故零输入分量： $y_{zi}(t)=\{2e^{-t}-e^{-2t}\}u(t)$

方法一：

$y_{zs}(t)=\{C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\}\cdot u(t)$；求其一阶、二阶导数后代入原方程(t=0)

$y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=\delta'(t)+\delta(t)$

方程两边关于$\delta(t)$的系数应该相等

$C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{1}{2}=1$；

$2C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{2}{3}=1$； 解之：$C_{zs1}=-1;C_{zs2}=\frac{3}{2}$

于是，零状态响应：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\}u(t)$

仿(1)方法二，可求得：$y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{3}{2(s+2)}$

故零状态分量：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\}u(t)$

系统完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\{\frac{1}{2}+e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\}u(t)$

自由响应：$(e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$；强迫响应：$\frac{1}{2}u(t)$；

解：(3) 零输入响应：特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

代入初值$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=0$，可得$c_1=2$，$c_2=-1$，即$y_{zi}(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$；

零状态响应：$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+7e^{-3t}u(t)$

根据冲激函数匹配法可得，$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=-5$；

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=7e^{-3t}$，（$t>0$ 时），特解形式为指数信号ce^{-3t}，可得

$y_{zsp}(t)=\frac{7}{2}e^{-3t}$，齐次解的形式为$y_{zsh}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

于是有$y_{zs}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}$，代入初值$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=-5$，有$c_1=\frac{1}{2}$，

$c_2=-3$，即$y_{zs}(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}$；

完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}$，（$t>0$ 时）；

自由响应：$(\frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t})u(t)$；强迫响应：$\frac{7}{2}e^{-3t}u(t)$；

解：(4) $t<0$ 时，$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=-2$，稳态解为 $y(t)=-\frac{1}{3}$

即系统的初值为 $y(0_-)=-\frac{1}{3}$，$y'(0_-)=0$；

零输入响应：特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$，$y_{zi}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

代入初值 $y(0_+)=-\frac{1}{3}$，$y'(0_+)=0$，有 $c_1=-1$，$c_2=\frac{2}{3}$，即 $y_{zi}(t)=-e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-3t}$；

零状态响应：考虑 $t\geq 0$ 时，$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=12\delta(t)+2u(t)$

根据冲激函数匹配法有，$y(0_+)=0$，$y'(0_+)=12$；

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=2$，（$t>0$ 时），特解形式为常数，可得 $y_{zsp}(t)=\frac{1}{3}$

齐次解的形式为 $y_{zsh}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$ 是有 $y_{zs}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{3}$

代入初值 $y(0_+)=0$，$y'(0_+)=12$ 有 $c_1=11$，$c_2=-\frac{34}{3}$，即 $y_{zs}(t)=11e^{-2t}-\frac{34}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$；

完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=10e^{-2t}-\frac{32}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$，（$t>0$ 时）；

自由响应：$(10e^{-2t}-\frac{32}{3}e^{-3t})u(t)$；强迫响应：$\frac{1}{3}u(t)$；

解：(5) $t<0$ 时，$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2$，稳态解为 $y(t)=1$，即系统的初值为 $y(0_-)=1$；

零输入响应：$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$，解的形式为 $y(t)=ce^{-2t}$

代入初值 $y(0_-)=1$，可得 $y_{zi}(t)=e^{-2t}$；

零状态响应：考虑 $t\geq 0$ 时，$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\delta(t)$

根据冲激函数匹配法有，$y(0_+)=2$，可得 $y_{zs}(t)=2e^{-2t}$；

完全响应：$y(t)=3e^{-2t}$；自由响应为 $3e^{-2t}u(t)$，强迫响应为 0；

2.21 求下列微分方程描述的因果系统单位冲激响应 $h(t)$和阶跃响应 $s(t)$。

(1) $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}$

(2) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$

(3) $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$

(4) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$,

解：(一) 求单位冲激响应 $h(t)$

系统的 h(t)是输入信号为 $\delta(t)$、起始条件等于零时的系统输出。由于输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 在 t＞0 时为零。因此，t＞0 时系统的输入信号为零，即系统响应为齐次解的形式。又由于输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 仅在 t=0 处非零，因此，冲激响应的特解仅在 t=0 处被反映出来，其特解形式为 $\delta(t)$ 及其导数形式。

(1) ①齐次解：$h_h(t)=C_1e^{-3t}\cdot u(t)$

②特解：　$h_p(t)=B\delta(t)$ 代入原方程：$B\delta'(t)+3B\delta(t)=2\delta'(t)$；故 B＝2

③全解：$h(t)=h_h(t)+h_p(t)=2\delta(t)+C_1e^{-3t}\cdot u(t)$

$$h'(t)=2\delta'(t)+C_1e^{-3t}\delta(t)+3C_1e^{-3t}\cdot u(t)$$

将 $h(t)$、$h'(t)$ 代入原方程,并考虑是冲激响应，仅在 t=0 处被反映，则

$2\delta'(t)+C_1\delta(t)+3\cdot 2\delta(t)=2\delta'(t)$，也即 $C_1=-6$

从而系统单位冲激响应 $h(t)$：

$$h(t)=2\delta(t)-6e^{-3t}\cdot u(t)$$

(2) ①齐次解。

方程的特征方程：$\lambda^2+\lambda+1=0$；有共轭复根 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{2}{\sqrt{3}}$

冲激响应的齐次解：$h_h(t)=e^{-0.5t}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)$

②特解：将输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 代入原方程右边：$\delta'(t)+\delta(t)$；显见：当输入的微分阶数小于 2 阶时，特解中不含有冲激函数，即 B＝0

③因此全解：$h(t)=h_p(t)$

分别求出 $h'(t)$、 $h''(t)$ ；再与 $h(t)$ 一起代入原方程， 并考虑仅在 t=0 处被反映，则有

$$C_1\delta'(t)+(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{2}C_1)\delta(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

故： $C_1=1$ ； $C_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ；从而系统单位冲激响应 $h(t)$ ：

$$h(t)=e^{-0.5t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)$$

（二）已知 h(t)求单位阶跃响应 s(t)，即求 h(t)与 u(t)的卷积

(1) 因为： $h(t)=2\delta(t)-6e^{-3t}\cdot u(t)$ ；

故： $s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}(2\delta(\tau)-6e^{-3\tau})d\tau=2e^{-3t}$

(2) 因为： $h(t)=e^{-0.5t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)$

故： $s(t)=u(t)*h(t)=\int_{0}^{t}\{e^{-0.5\tau}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\}d\tau$

$$s(t)=[1-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3})-e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3})]u(t)$$

(3) 单 位 阶 跃 响 应 $s(t)$ 满 足

$$\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=\frac{d^2u(t)}{dt^2}+3\frac{du(t)}{dt}+3u(t)=\delta'(t)+3\delta(t)+3u(t)$$

根据冲激函数匹配法有， $s(0_+)=1$， $s(t)$ 的形式为 $s(t)=\delta(t)+ce^{-2t}+\frac{3}{2}$

代入初值 $s(0_+)=1$，可得 $s(t)=\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}$， $t>0$

即 $s(t)=\delta(t)-(\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2})u(t)$ ；

单位冲激响应 $h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta'(t)+\delta(t)+e^{-2t}u(t)$ ；

(4)单位阶跃响应 $s(t)$ 满足 $\frac{d^2s(t)}{dt^2}+3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=\delta'(t)+\delta(t)+u(t)$

根据冲激函数匹配法有，$s(0_+)=1$，$s'(0_+)=-2$ $s(t)$ 的形式为 $s(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\frac{1}{2}$

代入初值 $s(0_+)=1$， $s^{'}(0_+)=-2$，可得 $s(t)=-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}$， $t>0$

即 $s(t)=(-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2})u(t)$；

单位冲激响应 $h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t)+(e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$；

2.22 求下列因果离散 LTI 系统的单位脉冲响应。

（1） $y[n]=x[n]-3x[n-1]+3x[n-2]-3x[n-3]$；

（2） $y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$

（3） $y[n]-4y[n-1]+3y[n-2]=x[n]+2x[n-2]$

解：(1) 令 $x[n]=\delta[n]$，则此题可直接写出：

$$h[n]=\delta[n]-3\delta[n-1]+3\delta[n-2]-3\delta[n-3]$$

（2）原式为： $y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=\delta[n]$

当 n=0： $y[0]+\frac{5}{6}y[-1]+\frac{1}{6}y[-2]=1$

因为对于因果系统必有： $y[-1]=y[-2]=0$。故 $y[0]=1$

又因特征方程：$\lambda^2+\frac{5}{6}\lambda+\frac{1}{6}=0$，特征根为：$\lambda_1=\frac{1}{2}$；$\lambda_2=\frac{1}{3}$

故有： $y[n]=C_1(-\frac{1}{2})^n+C_2(-\frac{1}{3})^n$

代入初始条件 $y[-1]=0$， $y[0]=1$，有

$$y[-1]=C_1(-\frac{1}{2})^{-1}+C_2(-\frac{1}{3})^{-1}=0$$

$$y[0]=C_1+C_2=1$$

解之，得 $C_1=3, C_2=-2$

故得单位阶跃响应： $h[n]=[3(-\frac{1}{2})^n-2(-\frac{1}{3})^n]u(n)$

(3) 先求出输入为 δ[n]时的系统单位阶跃响应 $h_1[n]$，利用时不移性可求得输入单独为 δ[n-2]时的系统单位阶跃响应 $h_2[n]$，最后由线性系统的叠加原理，将 $h_1[n]$ 与 $h_2[n]$ 相加便得到总的系统单位阶跃响应 h[n]

第一步：对 $y[n]-4y[n-1]+3y[n-2]=\delta[n]$

当 n=0： $y[0]=1-4y[-1]-3y[-2]$

因为对于因果系统必有： $y[-1]=y[-2]=0$。故 $y[0]=1$

又因特征方程：$\lambda^2-4\lambda+3=0$，特征根为：$\lambda_1=1$；$\lambda_2=3$

故有： $y[n]=C_1(1)^n+C_2(3)^n$

代入初始条件 $y[-1]=0$， $y[0]=1$，解之得： $C_1=-\frac{1}{2}, C_2=\frac{3}{2}$

故得单位阶跃响应： $h_1[n]=[(-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})(3)^n]u(n)$

第二步：求输入为 $\delta[n-2]$ 时的系统单位阶跃响应 $h_2[n]$

即设原式为 $y[n]-4y[n-1]+3y[n-2]=\delta[n-2]$

由时不变系统特性：单位阶跃响应： $h_2[n]=[(-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})(3)^{n-2}]u(n-2)$

总的单位阶跃响应 $h[n]=h_1[n]+2h_2[n]$

即：
$$h[n]=[(-\frac{1}{2})+(\frac{3}{2})(3)^n]u(n)+2[(-\frac{1}{2})+(\frac{3}{2})(3)^{n-2}]u(n-2)$$
$$=[-\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})(3)^n)u[n]+3(3)^{n-2}]u[n-2]=[(-\frac{3}{2})+(\frac{5}{2})(3)^n]u[n]$$

2.23 解差分方程（n≥0），并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应各分量。（假定系统为因果系统）

(1) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0, y[-1]=2, y[-2]=1$

解：(1) 由原方程 $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0$ 可知

系统特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根为：$\lambda_1=-1$；$\lambda_2=-2$

故有： $y[n]=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$

将起始条件：$y[-1]=2, y[-2]=1$ 代入原方程，可求到初始条件：$y[0]=-8, y[1]=20$

代入方程 y[n]后求解得： $C_1=4, C_2=-12$

故，完全响应为： $y[n]=[4(-1)^n-12(-2)^n]u[n]$

——因为输入为零，故自由响应分量与零输入响应相同，无强迫响应分量。
同时，零状态响应为零。

即： 零输入响应 $y_{zi}[n]=[4(-1)^n-12(-2)^n]u[n]$

零状态响应 $y_{zs}[n]=0$

自由响应分量 $y[n]=[4(-1)^n-12(-2)^n]u[n]$

强迫响应分量 $y[n]=0$

(2) $y[n]+\frac{3}{2}y[n-1]-y[n-2]=u[n], y[-1]=1, y[-2]=0$ --注意此题与书上不同！书上的题目无法求特征根，且初始条件有误

解：因为系统特征方程：$\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda-1=0$，特征根为： $\lambda_1=-2$；$\lambda_2=\frac{1}{2}$

所以方程的齐次解为： $y_h[n]=C_1(-2)^n+C_2(\frac{1}{2})^n$

将方程的一个特解 $y_p[n]=D$ 代入原方程：$D+\frac{3}{2}D-D=1$；解之：$D=\frac{2}{3}$

方程的全解：$y[n]=C_1(-2)^n+C_2(\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}$

方程的初始条件 $y[0],y[1]$ 可由已知的起始条件 $y[-1]=1,y[-2]=0$ 求出：

$y[0]=1-\frac{3}{2}y[-1]+y[-2]=-\frac{1}{2}$；$y[1]=1-\frac{3}{2}y[0]+y[-1]=\frac{11}{4}$

将初始条件 $y[0],y[1]$ 代入方程的全解，求得：$C_1=-\frac{16}{15},C_2=-\frac{1}{10}$

故系统的完全响应为：$y[n]=\{\frac{2}{3}-\frac{16}{15}(-2)^n-\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

自由响应分量：$y[n]=\{-\frac{16}{15}(-2)^n-\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

强迫响应分量：$y[n]=(\frac{2}{3})u[n]$

零输入响应：$y_{zi}[n]=A_1(-2)^n+A_2(\frac{1}{2})^n$,代入起始条件 $y[-1]=1,y[-2]=0$，得

$$y_{zi}[-1]=-\frac{1}{2}A_1+2A_2=1$$

$$y_{zi}[-2]=\frac{1}{4}A_1+4A_2=0$$

解之，$A_1=-\frac{8}{5},A_2=\frac{1}{10}$

故系统零输入响应 $y_{zi}[n]=\{-\frac{8}{5}(-2)^n+\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

书上的方法我以为更麻烦一些：即先将起始条件 $y[-1]=1,y[-2]=0$ 代入原方程求出初始条件 $y[0],y[1]$

$y_{zi}[0]=-\frac{3}{2}y[-1]+y[-2]=-\frac{3}{2}$；$y_{zi}[1]=-\frac{3}{2}y[0]+y[-1]=\frac{13}{4}$

然后再代入零输入方程：$y_{zi}[0]=A_1+A_2=-\frac{3}{2}$

$$y_{zi}[1]=-2A_1+\frac{1}{2}A_2=\frac{13}{4}$$

解之：$A_1=-\frac{8}{5},A_2=\frac{1}{10}$；结果与上相同。

零状态响应　$y_{zs}[n]=\frac{2}{3}+C_{zs1}(-2)^n+C_{zs2}(\frac{1}{2})^n$；

考虑：y[-1]=0, y[-2]=0 代入系统原方程可得：$y[0]=1,y[1]=-\frac{1}{2}$

代入上面零状态响应方程，可求得：$C_{zs1}=\frac{8}{15},C_{zs2}=-\frac{1}{5}$

故系统零状态响应 $y_{zs}[n]=\{\frac{2}{3}+\frac{8}{15}(-2)^n-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

因而系统的完全响应又可写为：$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$

(3) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=3^n, y[-1]=y[0]=0$

解：因为系统特征方程：$\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=-1$；

所以方程的齐次解为：$y_h[n]=(C_0+C_1n)(-1)^n$

将方程的一个特解 $y_p[n]=D\cdot 3^n$ 代入原方程：$D\cdot 3^2+2\cdot D\cdot 3+D=3^2$；解：$D=\frac{9}{16}$；

故，方程的全解：$y[n]=(C_0+C_1n)(-1)^n+\frac{9}{16}\cdot 3^n$

考虑零输入响应：由于初值为 $y[0]=0$，$y[1]=0$，且激励为 0，可得 $y_{zi}[n]=0$；

考虑零状态响应：可计算出在输入激励下的初值为 $y[0]=1$，$y[1]=1$

代入方程：$y_{zs}[n]=(C_0+C_1n)(-1)^n+\frac{9}{16}3^n$ 后，可计算得到：$C_0=\frac{7}{16},C_1=\frac{1}{4}$

于是零状态响应与完全响应均为：$y_{zs}[n]=[(\frac{7}{16}+\frac{n}{4})(-1)^n+\frac{9}{16}3^n]u[n]$；

自由响应：$(\frac{7}{16}+\frac{n}{4})(-1)^n u[n]$；

强迫响应：$y_{zs}[n]=\frac{9}{16}3^n u[n]$。

(4) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n], x[n]=u[-n]+2u[n]$

解：因为当 $n<0$ 时，$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=1$

考虑系统的稳态解：$y[n]+\frac{1}{2}y[n]=1$，即 $y[n]=\frac{2}{3}$，由此可得初值 $y[-1]=\frac{2}{3}$；

当 $n\geq 0$ 时，$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=2u[n]$，

因为系统特征方程：$\lambda+\frac{1}{2}=0$，特征根为：$\lambda_1=-\frac{1}{2}$；

所以方程的齐次解为：$y_h[n]=C_0(-\frac{1}{2})^n$

将方程的一个特解 $y_p[n]=D$ 代入原方程：$D+\frac{1}{2}D=2$；解：$D=\frac{4}{3}$；

故，方程的全解：$y[n]=C_0(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}$

考虑零输入响应：由 $y[-1]=\frac{2}{3}$ 可得 $y[0]=-\frac{1}{3}$，又 $y_{zi}[n]$ 的形式为

$y_{zi}[n]=C_0(-\frac{1}{2})^n$，代入初值 $y[0]=-\frac{1}{3}$，可得 $y_{zi}[n]=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$；

考虑零状态响应：初值为 $y[0]=2$， $y_{zs}[n]$ 的形式为 $y_{zs}[n]=C_1(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}$

代入初值 $y[0]=2$，可得 $y_{zs}[n]=[\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}]u[n]$；

故：完全响应： $y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]=[\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}]u[n]$；

其中：自由响应：$\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$，强迫响应：$\frac{4}{3}u[n]$。

2.24 有某一因果离散时间 LTI 系统，当输入为 $x_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ 时，其输出的完全响应 $y_1[n]=2^n u[n]-(\frac{1}{2})^n u[n]$；系统的起始状态不变，当输入为 $x_2[n]=2(\frac{1}{2})^n u[n]$ 时，系统的完全响应为 $y_2[n]=3\cdot 2^n u[n]-2(\frac{1}{2})^n u[n]$。试求：

（1）系统的零输入响应；

（2）系统对输入为 $x_3[n]=0.5(\frac{1}{2})^n u[n]$ 的完全响应（系统的初始状态保持不变）。

解：(1)由于 $x_2[n]=2x_1[n]$，便有 $y_{2zs}[n]=2y_{1zs}[n]$

考虑到 $y_1[n]=y_{1zs}[n]+y_{zi}[n]$ 以及 $y_2[n]=y_{2zs}[n]+y_{zi}[n]$

不难得出 $y_{zi}[n]=2y_1[n]-y_2[n]$，即 $y_{zi}[n]=-2^n u[n]$。

(2)由于 $x_3[n]=0.5x_1[n]$，故 $y_{3zs}[n]=0.5y_{1zs}[n]=0.5(y_1[n]-y_{zi}[n])$

因而

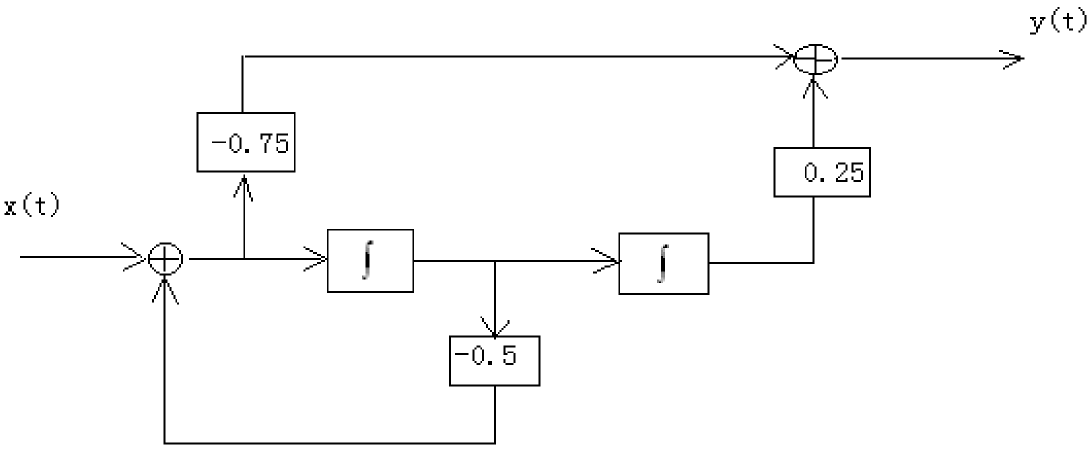
$$\begin{aligned}y_3[n]&=y_{3zs}[n]+y_{zi}[n]=0.5y_1[n]+0.5y_{zi}[n]\\&=0.5(2^n u[n]-(\frac{1}{2})^n u[n]-2^n u[n])=-(\frac{1}{2})^{n+1}u[n]\end{aligned}$$

2.25 写出下列每个连续时间 LTI 系统的模拟框图，假定这些系统都是初始静止的。

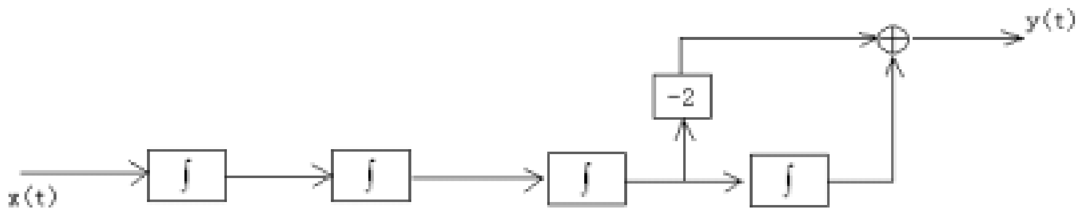
（1） $4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-3\frac{d^2x(t)}{dt^2}$； (2) $\frac{d^4y(t)}{dt^4}=x(t)-2\frac{dx(t)}{dt}$

（3） $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}+3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$。

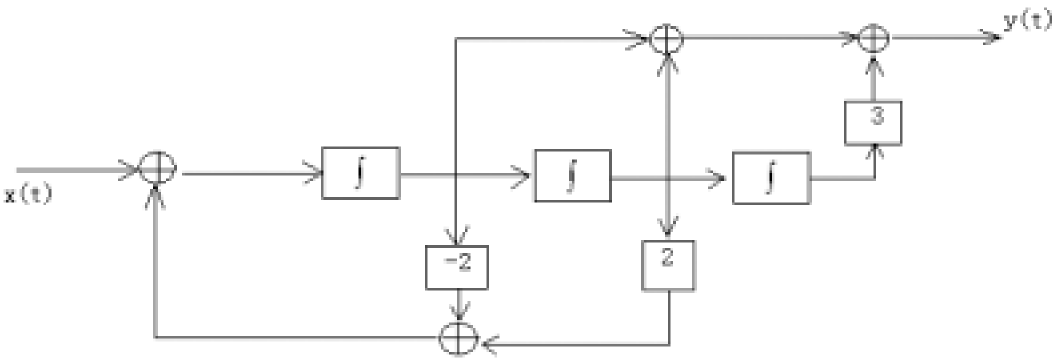
解：(1)应该有 2 个积分器



（2）应该有 4 个积分器



（3）先对方程两边求导，以消去方程左边的积分号，故应该有 3 个积分器

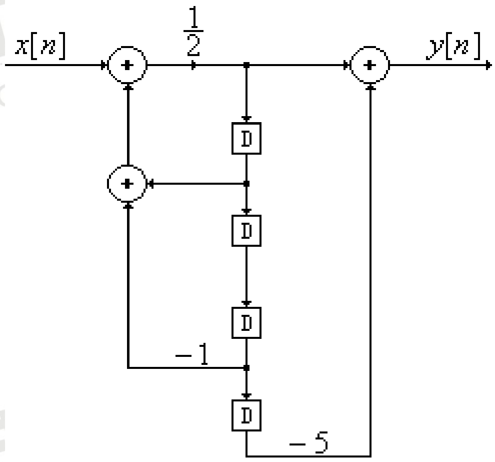


2.26　写出下列每个离散时间 LTI 系统的模拟框图，假定这些系统都是初始静止的。

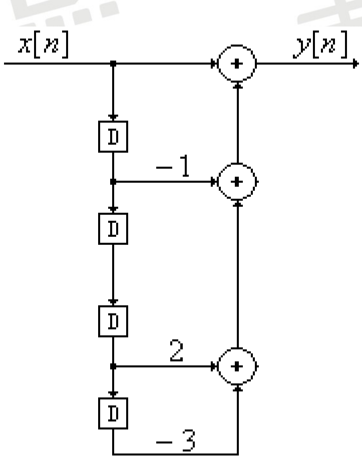
（1）$2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-4]$

（2）$y[n]=x[n]-x[n-1]+2x[n-3]-3x[n-4]$

解答：因为有 x[n-4]，故应该有 4 个单位延时器

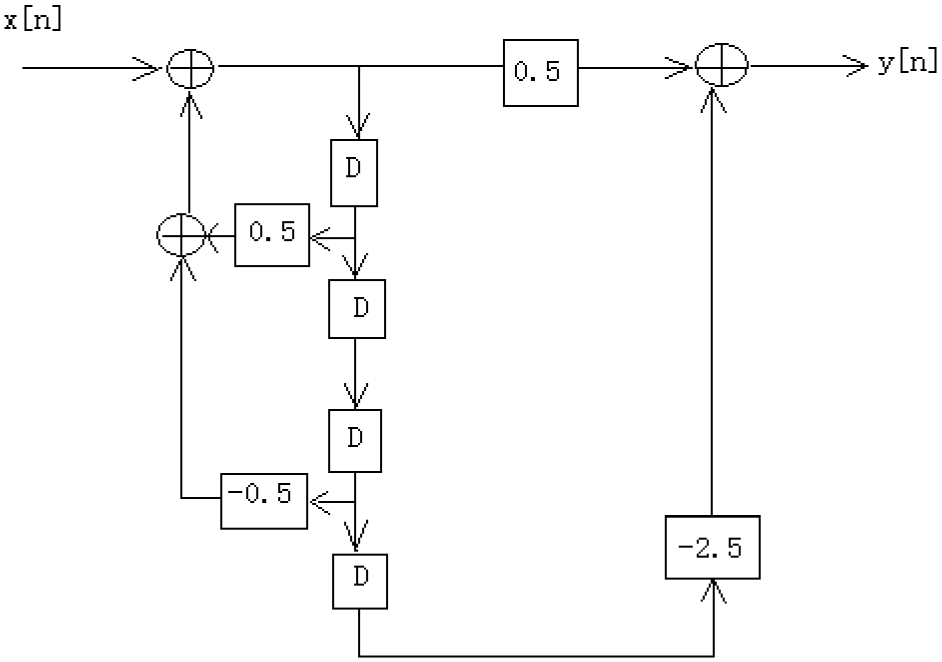


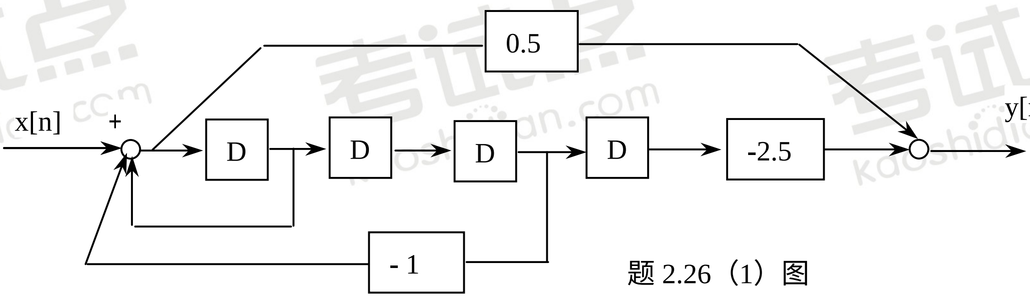
题2.26 (1)图



题2.26 (2)图

或者如下图：



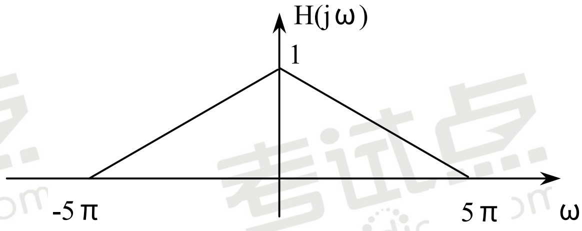


题 2.26（1）图

<信号与系统>第三章作业（P122-129）笔一部分 3.1-3.7

3.1 已知某 LTI 系统对 e^{jwt} 的特征值 H(jω)如图所示，求系统对下列输入信号的响应：

(1) 直流信号 $x(t)=E$ ；　　(2) $x(t)=\sum_{k=-10}^{10} a_k e^{ikw_0 t}, w_0=\pi$



题 3.1 图

解： $H(jw)=1-\frac{|k|}{5\pi}w, |w|\le 5\pi$

（1）因为：$x(t)=E$，$\omega_0=0$，由图得 H(j0)＝1

故：响应为：$y(t)=H(j\omega_0)E=H(j0)E=E$

（2）当输入为 $x_k(t)=a_k e^{jk\pi}$，由已知条件 $|k|\le 4$ 时，H(jw)不为零，而 $|k|\ge 5$，H(jw)=0

故响应为：$y_k(t)=H(jk\pi)a_k e^{jk\pi}=(1-\frac{|k|}{5})a_k e^{jk\pi}$，$|k|\le 4$

当 $|k|>5$ 时，激励 $x_k(t)=a_k e^{jk\pi}$ 产生的响应为 0（由于 $|k|>5$ 时，$H(jk\pi)=0$），因此有 $y(t)=\sum_{k=-4}^{4} y_k(t)=\sum_{k=-4}^{4}(1-\frac{|k|}{5})a_k e^{jk\pi}$

3.2. 求下列信号的傅里叶级数：

(1) $x(t)=\cos 2t+\sin 4t$ ；　　(2) $x(t)$ 如图 3-31(a)所示;

(3) $x(t)$ 如图 3-31(b)所示;　　(4) $x(t)$ 如图 3-31(c)所示;

(5) $x(t)$ 如图 3-31(d)所示。

解（1）方法一：根据欧拉公式直接写出指数如下的形式：

$$x(t)=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})+\frac{1}{j2}(e^{j4t}-e^{-j4t})=-\frac{1}{j2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}+\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{j2}e^{j4t}$$

显然：$w_0=2$

$a_{-2}=-\dfrac{1}{j2}$；$a_{-1}=\dfrac{1}{2}$；$a_0=0$；$a_1=\dfrac{1}{2}$；$a_2=\dfrac{1}{j2}$

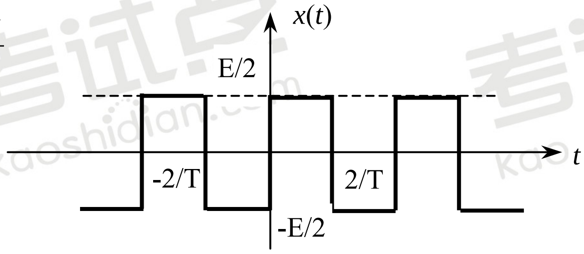
方法二：因为周期为$T=\pi$，$\omega_0=2$，傅立叶级数为：

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}+\frac{1}{2j}e^{j4t}-\frac{1}{2j}e^{-j4t};$$

(2) $x(t)$ 如图 3-31(a)所示

解：$x(t)$ 的周期为T，有$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

在一个周期内有：



题 3.2 图(a)

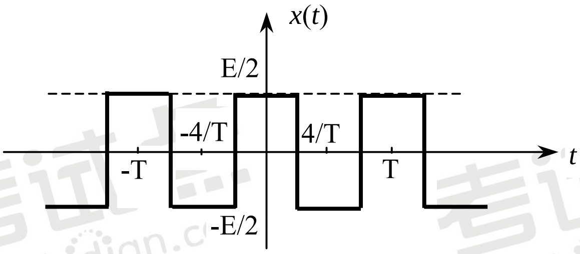
$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2},0\le t\le T/2\\ -\dfrac{E}{2},-T/2\le t<0\end{cases}$$

设 $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$，其中 $a_k=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

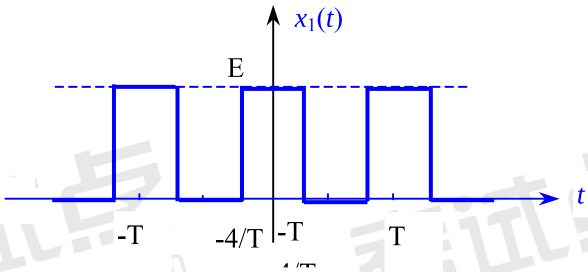
$k\neq 0$ 时，$a_k=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-\dfrac{E}{2})e^{-jk\omega_0 t}dt+\dfrac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\dfrac{E}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt=\dfrac{E[1-(-1)^k]}{j2k\pi}$

$k=0$ 时，$a_0=0$；

(3) $x(t)$ 如图 3-31(b)所示



题 3.2 图(b)



题 3.2 图(b’)

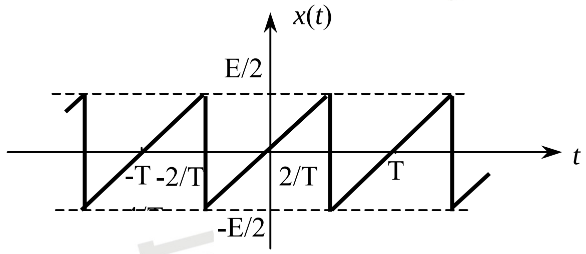
解： 如图（b）与(b’)，可设 $x_1(t)=x(t)+\dfrac{E}{2}$

则 $x_1(t)$ 为周期矩形脉冲，其周期为T，脉冲宽度为$T/2$，脉冲幅度为E（其 Fourier 级数我们已经在教材 P81 页求周期方波时求过，只不过幅度不同。）

若 $x_1(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_{1k}e^{jk\omega_0 t}$，则有 $k\neq 0$ 时，$a_{1k}=\dfrac{E\omega_0 T/4}{\pi}Sa(k\omega_0\dfrac{T}{4})=\dfrac{E}{2}Sa(\dfrac{k\pi}{2})$，$a_{10}=\dfrac{E}{2}$

设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ ，则有 $a_k=a_{1k}=\frac{E}{2}Sa(\frac{k\pi}{2})$，而 $a_0=a_{10}-\frac{E}{2}=0$

(4) $x(t)$ 如图 3-31(c)所示



题 3.2 图(c)

解：$x(t)$ 的周期为 T

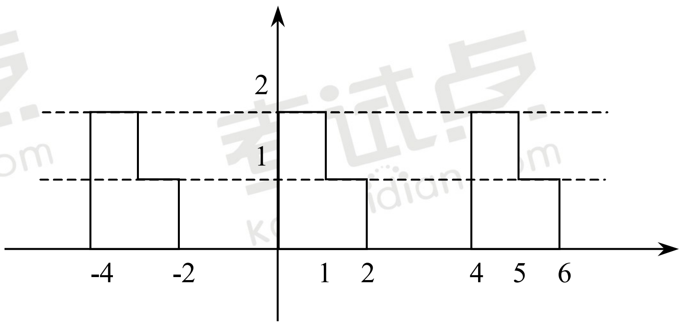
当 $-\frac{T}{2}\le t<\frac{T}{2}$ 时，$x(t)=\frac{E}{T}t$

设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$

则有 $k\neq 0$ 时，$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{T}te^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{j(-1)^k E}{2k\pi}$

当 $k=0$ 时，$a_0=0$

(5) $x(t)$ 如图 3-31(d)所示。



解：方法一(直接计算，因为该题特别简单，被积函数是 1 或 2，直接计算也很容易)：

如图 $x(t)$ 的周期为 4，设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ ，在一个周期内

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\left(\int_0^1 2e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt+\int_1^2 e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}\right|_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{4}\left.\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}\right|_{t=1}^{t=2}=\frac{1}{-j2k\pi}\left(2e^{-jk\frac{\pi}{2}}-2+e^{-jk\pi}-e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}-2+(-1)^k}{-j2k\pi};$$

当 $k=0$ 时，$a_0=\frac{3}{4}$

方法二：令 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$，其中 $x_1(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<4\end{cases}$，$x_2(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t<4\end{cases}$，

$x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 都是周期为 4 的周期信号，设 $x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{1k}e^{jk\omega_0 t}$， $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{2k}e^{jk\omega_0 t}$，

则有 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(c_{1k}+c_{2k})e^{jk\omega_0 t}$

当 $k\neq 0$ 时， $c_{1k}=\dfrac{1-e^{-j\frac{k\pi}{2}}}{j2k\pi}$， $c_{2k}=\dfrac{1-e^{-jk\pi}}{j2k\pi}$，

即有 $c_k=c_{1k}+c_{2k}=\dfrac{2-e^{-j\frac{k\pi}{2}}-e^{-jk\pi}}{j2k\pi}$，其中 $c_0=\dfrac{3}{4}$；

3.3 (1)求冲激串 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 的傅里叶变换；

(2)已知某一 LTI 系统的单位冲激响应 h(t)，如图 3-32 所示，求该系统对冲激串 $\delta_T(t)$ 响应 y(t)的傅里叶级数。

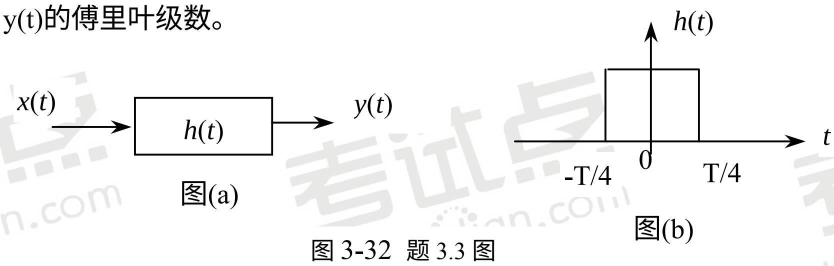


图 3-32 题 3.3 图

解：(1)答案为 $X(j\varpi)=\dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$

可有 2 种方法，一是直接计算， 如教材 P95，式（3-80)；二是如下应用频移性质

由于 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，是周期为 T 的周期信号

设 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$，其中 $c_k=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\dfrac{1}{T}$

即 $\delta_T(t)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}$ （其中 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$）

由于 $1\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega)$

根据傅立叶变换的频域平移性质有， $e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

因此有 $\delta_T(t)\xleftrightarrow{FT}\dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$；

(2) 由于系统的单位冲激响应 h(t)已知，可以据此而求出其频谱。因为 h(t)是方波脉冲，直接由典型信号的频谱得：

$$h(t) \xleftrightarrow{FT} H(j\omega) = \frac{T}{2} Sa(\frac{\omega T}{4})$$

由于激励 $\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$ ，为复指数信号，由系统特征函数的概念，可得响应 y(t)的傅里叶级数形式为：

$$y(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2} Sa(\frac{k\omega_0 T}{4}) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{k\pi}{2}) e^{jk\omega_0 t}$$

3.4 （1）如果以 T 为周期的信号 x(t)同时满足 $x(t) = -x(t-\frac{T}{2})$，则称 x(t)为奇谐信号，证明奇谐信号的傅里叶级数中只包含奇次谐波分量

（2）如果 x(t)是周期为 2 的奇谐信号，且 x(t)=t，0<t<1，画出 x(t)的波形，并求出它的傅里叶级数系数。

解：(1) 只需要证明奇谐信号的傅里叶级数中偶次谐波分量的系数为 0。

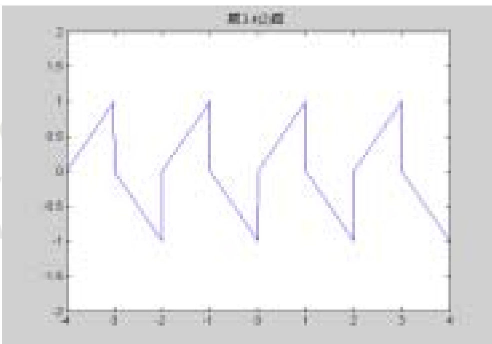
$$a_{2N} = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j(4N\pi/T)t} dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j(4N\pi/T)t} dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} x(t) e^{-j(4N\pi/T)t} dt$$

$$= \frac{1}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j(4N\pi/T)t} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -x(t-\frac{T}{2}) e^{-j(4N\pi/T)t} dt)$$

$$= \frac{1}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j(4N\pi/T)t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} -x(t) e^{-j(4N\pi/T)t} dt) = 0$$

故只含奇次谐波分量

(2) $x(t) = \begin{cases} -1-t & -1 < t \le 0 \\ t & 0 < t \le 1 \end{cases}$,



设 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

有

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt ,$$

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (t+1) e^{-jk\pi t} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t e^{-jk\pi t} dt = \frac{1-(-1)^k}{j2k\pi}(1+\frac{2}{jk\pi})$$

当 k 为偶数时，$c_k = 0$，当 k 为奇数时，$c_k = \frac{1}{jk\pi}(1+\frac{2}{jk\pi})$；

3.5 利用傅里叶变换公式，求下列信号的傅里叶变换

(1) $e^{-2(t-2)}\cdot u(t-2)$ (2) $e^{-2|t-3|}$

(3) $\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi)$ (4) $\frac{d}{dt}[u(t+2)-u(t-2)]$

(5) $x(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-1)]$； (6) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, |t|\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

解：(1) $X(j\varpi)=\dfrac{e^{-j2\omega}}{2+j\omega}$ （答案）

$$X(j\varpi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-2)}u(t-2)e^{-j\omega t}dt=\int_{2}^{+\infty}e^{-2(t-2)}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{2}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)t+4}dt=\left.\frac{e^{-(2+j\omega)t+4}}{-(2+j\omega)}\right|_{t=2}^{t=\infty}=\frac{e^{-j2\omega}}{2+j\omega}$$

(2) $X(j\varpi)=\dfrac{e^{-j3\omega}}{2-j\omega}+\dfrac{e^{-j3\omega}}{2+j\omega}=\dfrac{4e^{-j3\omega}}{4+\omega^2}$ （答案）

$$X(j\varpi)\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|t-3|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{3}e^{-2(3-t)}e^{-j\omega t}dt+\int_{3}^{+\infty}e^{-2(t-3)}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{3}e^{(2-j\omega)t-6}dt+\int_{3}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)t+6}dt$$

$$=\left.\frac{e^{(2-j\omega)t-6}}{(2-j\omega)}\right|_{t=-\infty}^{t=3}+\left.\frac{e^{-(2+j\omega)t+6}}{-(2+j\omega)}\right|_{t=3}^{t=\infty}=\frac{e^{-j3\omega}}{2-j\omega}+\frac{e^{-j3\omega}}{2+j\omega}=\frac{4e^{-j3\omega}}{4+\omega^2}$$

(3) $X(j\omega)=2\cos\omega\pi$ （答案）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi))e^{-j\omega t}dt=e^{j\omega\pi}+e^{-j\omega\pi}=2\cos\omega\pi$$

(4) $X(j\omega)=j2\sin 2\omega$ （答案）

$$\frac{d}{dt}[u(t+2)-u(t-2)]=\delta(t+2)-\delta(t-2)$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t+2)-\delta(t-2))e^{-j\omega t}dt=e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}=j2\sin 2\omega$$

(5) $X(j\omega)=\dfrac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$ （答案）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{1}e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega};$$

(6) $X(j\omega)=2Sa(\omega)+Sa(\omega-\pi)+Sa(\omega+\pi)$ （答案）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi t)e^{-j\omega t}dt=2Sa(\omega)+Sa(\omega-\pi)+Sa(\omega+\pi)$$；

3.6 利用傅里叶反变换公式，求下列反变换

（1） $X(j\omega)=\pi[\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-2\pi)]$

（2） $X(j\omega)=2[u(\omega+3)-u(\omega-3)]e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}$

解：（1） $x(t)=\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$ （答案）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-2\pi))e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$$

（2） $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}2e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}e^{j\omega t}d\omega=-\frac{1}{\pi}\int_{-3}^{3}e^{j(t-\frac{3}{2})\omega}d\omega=-\frac{2\sin 3(t-\frac{3}{2})}{\pi(t-\frac{3}{2})}$ （答案）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2(u(\omega+3)-u(\omega-3))e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}2e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}(-2e^{j(t-\frac{3}{2})\omega})d\omega$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{j(t-\frac{3}{2})\omega}}{j(t-\frac{3}{2})}\right|_{\omega=-3}^{\omega=3}=-\frac{2\sin 3(t-\frac{3}{2})}{\pi(t-\frac{3}{2})}=-\frac{6}{\pi}Sa[3(t-\frac{3}{2})]$$

3.7 已知 x(t)的傅里叶变换为 $X(j\omega)$，试将 P124 图 3-33 所示各信号的傅里叶变换用 $X(j\omega)$ 来表示。

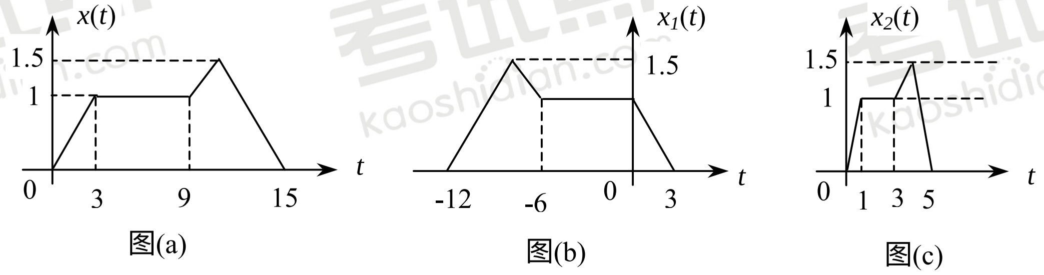


图 3-33 题 3.7 图

解：（1） 由图（b）知： $x_1(t)=x(-t+3)$ 可有 2 种方法：先时间反转再时移，或相反设 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，先时间平移再反转。

有 $x(t+3) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)e^{j3\omega}$，有 $x(-t+3) \xleftrightarrow{FT} X(-j\omega)e^{-j3\omega}$；

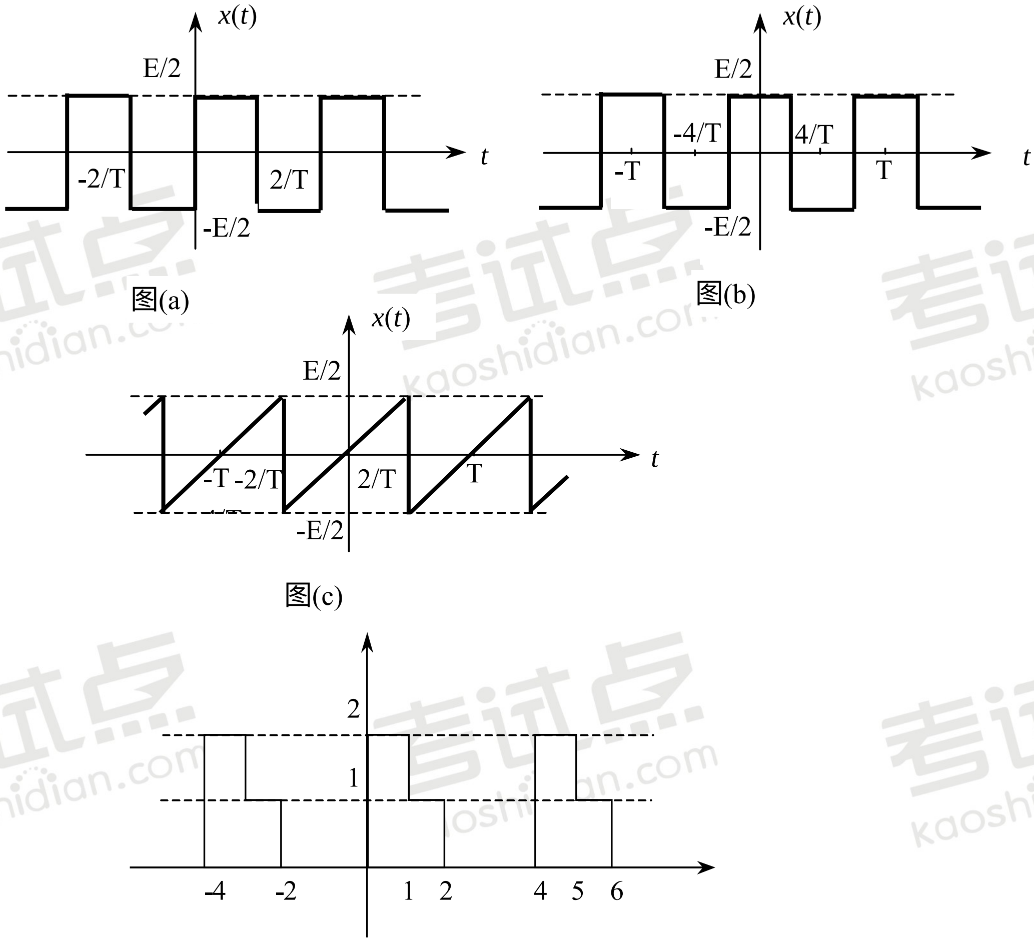
（2）又由图（c）知：$x_2(t)=x(3t)$，采用尺度变换（压缩）

由于 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$，有 $x(3t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{3}X(j\frac{\omega}{3})$；

<信号与系统>第三章作业（P122-129）第二部分（3.8-3.16）

3.8 求下列信号的傅里叶变换：

（1） 求如图 3-31 所示的各周期信号的傅里叶变换；



图(a) 图(b) 图(c) 图(d)

图 3-31 题 3.8 图

（2） $e^{-at}\cos\omega_0 t \bullet u(t) \qquad a>0$；

（3） $e^{-3|t|}\cdot\cos 2t$；

（4） $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t-kT) \quad |a_k|<1$；

（5） $\delta'(t)+2\delta(3-2t)$；

（6） $\left[te^{-t}\cos 4t\right]u(t)$；

（7） $\left[\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}\right]\left[\dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$；

（8） $x(t)$ 如图 3-34（a）所示；

（9） $x(t)$ 如图 3-34（b）所示；

（10） $x(t)$ 如图 3-34（c）所示；

（11） $x(t)$ 如图 3-34（d）所示。

解：（1） 显见，图 3-31 均为周期函数，故应该先求出各周期函数的傅里叶级数的系数 a_k

而在 3.2 题的答案已经给出了各周期函数的 a_k，这里问题就比较简单了。

因为图（a）的傅里叶级数的系数 a_k 已知(3.2 题(2)的答案)：

$k \neq 0$ 时，$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-\frac{E}{2})e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{E[1-(-1)^k]}{j2k\pi}$

$k=0$ 时，$a_0 = 0$；故

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = -jE\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\delta(\omega - k\omega_0)；$$

因为图（b）的傅里叶级数的系数 a_k 已知（3.2 题(3)的答案）：

$a_k = \frac{1}{2}Sa(\frac{k\pi}{2})$；故

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{k\pi}{2})\delta(\omega - k\omega_0)；$$

因为图（c）的傅里叶级数的系数 a_k 已知（3.2 题(4)的答案）：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{T}te^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{j(-1)^k E}{2k\pi}$$

故：$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = jE\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$

因为图（d）的傅里叶级数的系数 a_k 已知（3.2 题(5)的答案）：

$$a_k = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 2 + (-1)^k}{-j2k\pi}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = -j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2 - e^{-jk\frac{\pi}{2}} - (-1)^k}{k}\delta(\omega - k\omega_0)。$$

（2）$e^{-at}\cos\omega_0 t \bullet u(t) \quad a>0$

解：因为单边指数函数 $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$

由频移性质：$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))]$

所以：$e^{-at}\cos\omega_0 t \bullet u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}\right] = \frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

（3）$e^{-3|t|}\cdot\cos 2t$

解：因为双边指数函数 $e^{-a|t|}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

由频移性质：$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))]$，易得

$$e^{-3|t|}\cos 2t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[\frac{6}{9+(\omega-2)^2} + \frac{6}{9+(\omega+2)^2}] = \frac{3}{9+(\omega-2)^2} + \frac{3}{9+(\omega+2)^2}$$

（4）$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t-kT) \quad |a_k|<1$

解：因为原信号本身是非周期函数，这里应该先采用 F 变换的时移性质，再运用线性性质

因为 $\delta(t)\xleftrightarrow{F}1 \quad \Rightarrow \quad \delta(t-kT)\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega kT}$

由傅里叶变换的线性性质，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta(t-kT)\xleftrightarrow{F}\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-j\omega kT}$$

（5） $\delta'(t)+2\delta(3-2t)$

解：利用线性性质分别对 $\delta'(t)$ 和 $2\delta(3-2t)$ 进行 F 变换，然后再叠加

因为 $\delta(t)\xleftrightarrow{FT}1$， $\delta(t+3)\xleftrightarrow{FT}e^{j3\omega}$ （时域平移）

$$\delta(3-2t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$ （时域尺度变换）

又因 $\delta'(t)\xleftrightarrow{FT}j\omega\cdot 1$ （时域微分），因此叠加扣： $X(j\omega)=j\omega+\frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$；

（6） $\left[te^{-t}\cos 4t\right]u(t)$；

解：令 $x_1(t)=e^{-t}\cos(4t)u(t)$，利用（2）有 $X_1(j\omega)=\dfrac{1+j\omega}{(1+j\omega)^2+16}$

由频域微分性质，于是有 $X(j\omega)=j\dfrac{dX_1(j\omega)}{d\omega}=\dfrac{(1+j\omega)^2-16}{[(1+j\omega)^2+16]^2}$；

（7） $\left[\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$；

解：令 $x_1(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$， $x_2(t)=\dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$

则有 $X_1(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，由时移性质： $X_2(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega} & |\omega|<2\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

根据频域卷积性质有：

$$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$$

$$=-\frac{j}{2\pi}(1+e^{-j\omega})[u(\omega+3\pi)-u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)+u(\omega-3\pi)]$$

（8） $x(t)$ 如图 3-34（a）所示；

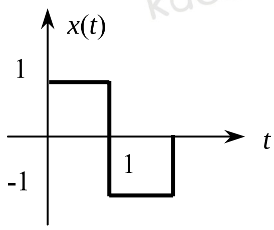


图 3-34 (a)

解：由图知： $x(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$

故直接由 F 变换公式

$$X(j\omega)=\int_0^1 e^{-j\omega t}dt-\int_1^2 e^{-j\omega t}dt=\frac{1-2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

(9) $x(t)$ 如图 3-34（b）所示；

解：因为方波是冲激函数的导数，斜坡是阶跃的导数

由图知可利用这些关系，令 $x_1(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

则 $x_1(t)=-\delta(t+2)+u(t+1)-u(t-1)-\delta(t-2)$

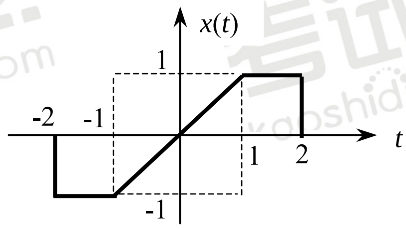


图 3-34 (b)

直接可求其 F 变换

$$X_1(j\omega)=-e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}+\frac{2\sin\omega}{\omega}=2Sa(\omega)-2\cos\omega$$，且 $X_1(j0)=0$

根据时域积分性质有，$X(j\omega)=\dfrac{X_1(j\omega)}{j\omega}+\pi X_1(j0)\delta(\omega)=\dfrac{2[Sa(\omega)-\cos\omega]}{j\omega}$

(10) $x(t)$ 如图 3-34（c）所示；

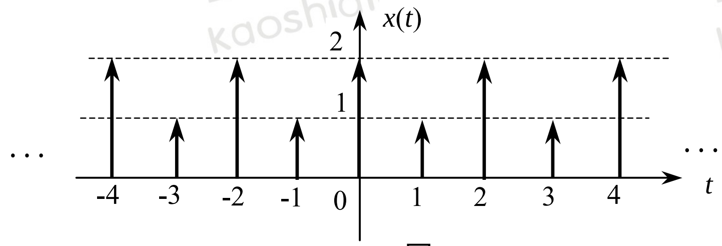


图 3-34 (c)

解：由图（c）知此为周期冲激函数，并可看成是 2 个周期函数的叠加

令 $x_1(t)=2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$，$x_2(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k+1)$，则有 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

易知：$X_1(j\omega)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$，$X_2(j\omega)=e^{j\omega}\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$

于是有：$X(j\omega)=X_1(j\omega)+X_2(j\omega)=\pi(2+e^{j\omega})\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$；

(11) $x(t)$ 如图 3-34（d）所示。

解：方法一：直接计算

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}(-t)e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}te^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{j\omega}[te^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}]_{-1}^{0}-\frac{1}{j\omega}[te^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}]_{0}^{1}$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}-2}{\omega^2}=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{2\cos\omega-2}{\omega^2}$$

$$=2Sa(\omega)-\frac{4\sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}=2Sa(\omega)-Sa^2(\frac{\omega}{2})$$

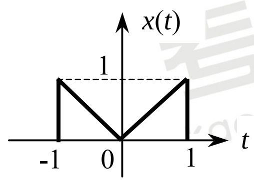


图 3-34 (d)

方法二：

仿（9），令 $x_1(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ 则有 $x_1(t)=\delta(t+1)-u(t+1)+2u(t)-u(t-1)-\delta(t-1)$

可得 $X_1(j\omega)=e^{j\omega}-e^{-j\omega}+\dfrac{2-e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{j\omega}$

$X_1(j0)=0$

根据时域积分性质有

$$X(j\omega)=\frac{X_1(j\omega)}{j\omega}+\pi X_1(j0)\delta(\omega)=2Sa(\omega)-Sa^2(\frac{\omega}{2})$$ ；

3.9　对于下列各傅里叶变换，根据傅里叶变换性质确定其对应于时域信号是否是实、虚、或者不是，偶、奇或都不是。

(1)　$X(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$；　　(2)　$X(j\omega)=\cos(2\varpi)\sin(\frac{\varpi}{2})$；

(3)　$X(j\omega)=A(\omega)e^{jB(\omega)}$，式中 $A(\omega)=\dfrac{\sin 2\omega}{\omega}$ 和 $B(\omega)=2\omega+\dfrac{\pi}{2}$；

(4)　$X(j\omega)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\dfrac{k\pi}{4}\right)$

解：(1) 设 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，已知 $X(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$

根据对偶性质有，$X(jt)\xleftrightarrow{FT}2\pi x(-\omega)$

由于 $X(jt)=u(t)-u(t-2)$ 为实信号，且非奇对称、非偶对称

故有：$x(-\omega)$ 为复信号（实部，虚部都不为零），且实部偶对称，虚部奇对称

因此：$x(t)$ 为复信号（实部，虚部都不为零），且实部偶对称，虚部奇对称；

解：(2) 设 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，$X(j\omega)=\cos(2\omega)\sin\dfrac{\omega}{2}$

根据对偶性质有，$X(jt)\xleftrightarrow{FT}2\pi x(-\omega)$

由于 $X(jt)=\cos(2t)\sin\dfrac{t}{2}$ 为实奇信号，故有 $x(-\omega)$ 为虚奇信号）

因此有 $x(t)$ 为虚奇信号；

解：(3) 方法一（直接计算）：设 $x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=A(\omega)e^{jB(\omega)}$，$x^*(t)\xleftrightarrow{F}X^*(-j\omega)$

$$\begin{aligned}X^*(-j\omega)&=\left(A(-\omega)e^{jB(-\omega)}\right)^*=A(\omega)[\cos B(-\omega)-j\sin B(-\omega)]\\&=A(\omega)\left[\cos(-2\omega+\frac{\pi}{2})-j\sin B(-2\omega+\frac{\pi}{2})\right]\\&=A(\omega)\left[\cos(2\omega-\frac{\pi}{2})+j\sin(2\omega-\frac{\pi}{2})\right])\end{aligned}$$

$$= A(\omega)\left[-\cos(\pi+2\omega-\frac{\pi}{2}) - j\sin(\pi+2\omega-\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= -A(\omega)\left[\cos(2\omega+\frac{\pi}{2}) + j\sin(2\omega+\frac{\pi}{2})\right] = -X(j\omega)$$

所以：$x^*(t) = -x(t)$，即 $x(t)$是纯虚数。

又： $x(-t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t}dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau}d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = X(-j\omega) = \left(-X(j\omega)\right)^*$

所以： $x(t)$是非奇非偶的纯虚数；

方法二（利用对偶性质）：

因为，$X(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$，其中 $A(\omega) = \dfrac{\sin 2\omega}{\omega}$， $B(\omega) = 2\omega + \dfrac{\pi}{2}$

$$X(j\omega) = \frac{\sin 2\omega}{\omega}e^{j(2\omega+\frac{\pi}{2})} = -\frac{(\sin 2\omega)^2}{\omega} + j\frac{\sin 2\omega\cos 2\omega}{\omega}$$

若 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$，则有 $jx(t) \xleftrightarrow{FT} jX(j\omega)$

而 $jX(j\omega) = -\dfrac{\sin 2\omega\cos 2\omega}{\omega} - j\dfrac{(\sin 2\omega)^2}{\omega}$， $jX(j\omega)$ 的实部为偶对称，虚部为奇对称，

可得 $jx(t)$ 为实信号，但非奇对称，非偶对称，于是有 $x(t)$ 为纯虚信号，但非奇对称，非偶对称；

解：(4) $X(j\omega)$ 是实值函数

$$X(-j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(-\omega-\frac{k\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right) = X(j\omega)$$

$X(j\omega)$ 是偶函数

所以： $X(j\omega)$ 对应的时域信号是实信号、偶函数

3.10 对下列每一个变换，求对应的连续时间信号：

（1） $X(j\omega) = \dfrac{2\sin[3(\omega-\pi)]}{(\omega-\pi)}$ ；　　（2） $X(j\omega) = \cos(4\omega)$ ；

（3） $X(j\omega) = \cos(2\omega+\dfrac{\pi}{3})$ ；　　（4） $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$，如图 3-35 所示。

解：(1) 因为： $X(j\omega) = \dfrac{2\sin[3(\omega-\pi)]}{\omega-\pi}$

据基本 F 变换可知：当 $x_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 = 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，则有 $X_1(j\omega) = 2\cdot T_1\dfrac{\sin(\omega T_1)}{T_1\omega} = 6\dfrac{\sin(3\omega)}{3\omega}$，

根据频域平移性质则有， $x(t) = x_1(t)e^{j\varpi_0 t}\Big|_{\varpi_0=\pi} = \begin{cases} e^{j\pi t} & |t| < 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ；

解：(2) 据欧拉公式 $X(j\omega) = \cos(4\omega) = \dfrac{e^{j4\omega} + e^{-j4\omega}}{2}$

由于 $\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$，根据时域平移性质有， $\delta(t+4) \xleftrightarrow{FT} e^{j4\omega}$， $\delta(t-4) \xleftrightarrow{FT} e^{-j4\omega}$，

因此有 $x(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+4)+\delta(t-4)]$；

解：(3) 与（2）相仿：$X(j\omega)=\cos(2\omega+\frac{\pi}{3})$，先由欧拉公式展开式可得到

$$x_1(t)=\frac{\delta(t+2)+\delta(t-2)}{2}\xleftrightarrow{FT}\cos 2\omega$$

再根据频域平移性质得到：

$$x(t)=e^{-j\frac{\pi}{6}t}x_1(t)=e^{-j\frac{\pi}{6}t}\frac{\delta(t+2)+\delta(t-2)}{2}=\frac{1}{2}[e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(t+2)+e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(t-2)]$$

解：(4)

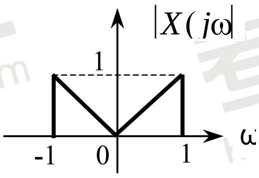


图 3-35 (a)

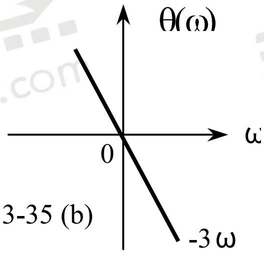


图 3-35 (b)

令 $X_1(j\omega)=|X(j\omega)|=\begin{cases}|\omega| & |\omega|<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则有

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\omega e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\omega e^{j\omega t}d\omega=\frac{t\sin t+\cos t-1}{\pi t^2}$$

由于相位谱提供的是信号在时间轴的位移信息（P96），故

根据时域平移性质有 $x(t)=x_1(t-3)=\frac{(t-3)\sin(t-3)+\cos(t-3)-1}{\pi(t-3)^2}$。

3.11 求图 3-36 所示三角形调幅信号的频谱（此处图略）。

解：令 $x_1(t)=\begin{cases}1-\frac{2}{\tau_1}|t| & |t|<\frac{\tau_1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则 $x(t)=x_1(t)\cos\omega_0 t$

再令 $x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}$，则有 $x_2(t)=\frac{2}{\tau_1}\left[u(t+\frac{\tau_1}{2})-2u(t)+u(t-\frac{\tau_1}{2})\right]$

由线性瓦特地，易得出 $X_2(j\omega)=\frac{4(\cos\frac{\omega\tau_1}{2}-1)}{j\omega\tau_1}$，且 $X_2(j0)=0$

于是有 $X_1(j\omega)=\frac{X_2(j\omega)}{j\omega}=\frac{4(1-\cos\frac{\omega\tau_1}{2})}{\omega^2\tau_1}=\frac{\tau_1}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau_1}{4})$

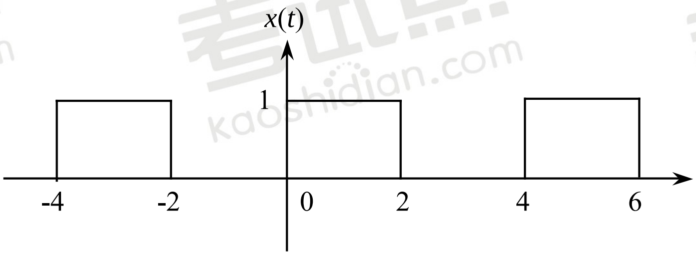
根据频域平移性质有，$X(j\omega)=\frac{\tau_1}{4}\left[Sa^2(\frac{\omega-\omega_0}{4}\tau_1)+Sa^2(\frac{\omega+\omega_0}{4}\tau_1)\right]$

3.12 求图 3-37 所示周期信号的频谱或傅里叶级数系数。

注：利用傅里叶变换相关性质及将信号看成是某一周期信号与 $\sin\omega_0 t$ 相乘的结果。

图（a）

解法一：将图（a）中的 $x_1(t)$ 可以看成是下面的周期信号（T=4）与 $\sin\pi t$ 的乘积



即：$x_1(t)=x(t)\sin\pi t \quad \Rightarrow \quad x_1(t)\xleftrightarrow{F}\frac{j}{2}\left[X(j(\omega+\pi))-X(j(\omega-\pi))\right]$

而 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数为：$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\int_0^2 e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt$

当 $k=0$ 时，$\quad a_k=\frac{1}{2}$

当 $k\neq 0$ 时，$a_k=\frac{1}{4}\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=2}=-\frac{e^{-jk\pi}-1}{j2k\pi}=\begin{cases}0 & k=2l\\ \frac{1}{jk\pi} & k=2l+1\end{cases}$

故，$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$

$$
\begin{aligned}
X_1(j\omega)&=\frac{j}{2}\left[X(j(\omega+\pi))-X(j(\omega-\pi))\right]\\
&=\frac{j}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}+\pi)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}-\pi)\right]\\
&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\delta(\omega-\frac{2l-1}{2}\pi)+\frac{j\pi}{2}\delta(\omega+\pi)-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\delta(\omega-\frac{2l+3}{2}\pi)-\frac{j\pi}{2}\delta(\omega-\pi)\\
&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{-4}{(2l-1)(2l+3)}\delta(\omega-\frac{2l+1}{2}\pi)+\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)\right]
\end{aligned}
$$

解法二（直接求解的方法）：$x_1(t)$ 为周期 T=4 的周期函数，该周期函数的傅里叶级数 a_k 为

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\int_0^2\sin\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{2j}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

当 $k=\pm 2$ 时，$a_k=\pm\frac{1}{4j}$

当 $k\neq\pm 2$ 时，

$$a_k=\frac{1}{8j}\left(\frac{e^{j(\pi-\frac{k\pi}{2})t}}{j(\pi-\frac{k\pi}{2})}-\frac{e^{-j(\pi+\frac{k\pi}{2})t}}{-j(\pi+\frac{k\pi}{2})}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{-jk\pi}-1}{(k+2)(k-2)}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{-2}{\pi(k+2)(k-2)} & k=2l+1\\ 0 & k=2l\end{cases}$$

则 $x_1(t)$ 的傅里叶变换为：

$$
\begin{aligned}
X_1(j\omega)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\\
&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{-4}{(2l-1)(2l+3)}\delta\left(\omega-\frac{(2l+1)\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)\right]
\end{aligned}
$$

解法三：令 $x_0(t)$ 为周期信号（周期为 4），在 $0 \le t < 4$ 上满足，$x_0(t)=\begin{cases}1 & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t < 4\end{cases}$，

则有 $x_1(t)=x_0(t)\sin(\pi t)=\dfrac{1}{2j}x_0(t)(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t})$

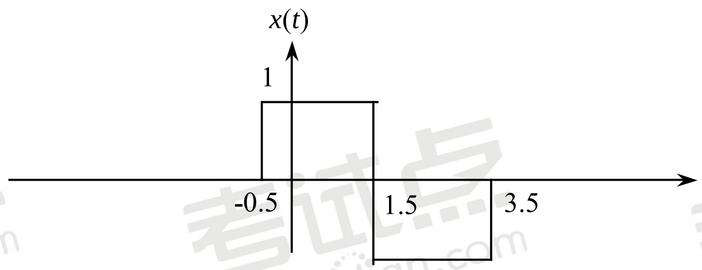
设 $x_0(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_{0k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$，则有 $c_{00}=\dfrac{1}{2}$，$k \ne 0$ 时，$c_{0k}=\dfrac{1-(-1)^k}{j2k\pi}$

若 $x_1(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_{1k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$，则有 $c_{12}=\dfrac{1}{4j}$，$c_{1(-2)}=\dfrac{-1}{4j}$

当 $k \ne \pm 2$ 时，$c_{1k}=\dfrac{1}{2j}[c_{0(k-2)}-c_{0(k+2)}]=\dfrac{1-(-1)^k}{(4-k^2)\pi}$；

图（b）

解法一：将图（b）中的 $x_2(t)$ 看成是周期为 4 的下面的周期信号与 $\cos\pi t$ 的乘积



即：$x_2(t)=x(t)\cos\pi t \quad \Rightarrow \quad x_2(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{2}[X(j(\omega-\pi))+X(j(\omega+\pi))]$

因为 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数为：

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\left[\int_{-0.5}^{1.5}e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt-\int_{1.5}^{3.5}e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt\right]$$

当 k=0 时，$a_k=0$

当 $k \ne 0$ 时，

$$a_k=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\right|_{t=-0.5}^{t=1.5}-\left.\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\right|_{t=1.5}^{t=3.5}\right]=\frac{2e^{-j\frac{3k}{4}\pi}-2e^{j\frac{k}{4}\pi}}{-j2k\pi}=\begin{cases}0 & k=2l \\ \dfrac{e^{-j\frac{3k}{4}\pi}-e^{j\frac{k}{4}\pi}}{-j(2l+1)\pi} & k=2l+1\end{cases}$$

所以 $X(j\omega)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\dfrac{2\pi k}{T})$，从而可求出 $x_2(t)$ 的傅里叶变换为：

$$X_2(j\omega)=\frac{1}{2}[X(j(\omega-\pi))+X(j(\omega+\pi))]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}-\pi)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}+\pi)\right]$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\frac{3(2l+1)}{4}\pi}-e^{j\frac{(2l+1)}{4}\pi}}{-j(2l+1)}\delta(\omega-\frac{2l+3}{2}\pi)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\frac{3(2l+1)}{4}\pi}-e^{j\frac{(2l+1)}{4}\pi}}{-j(2l+1)}\delta(\omega-\frac{2l-1}{2}\pi)$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2e^{j\frac{2l-1}{4}\pi}}{j(2l-1)}+\frac{2e^{j\frac{2l+3}{4}\pi}}{j(2l+3)}\right)\delta(\omega-\frac{2l+1}{2}\pi)$$

解法二（直接求解的方法）：

$x_2(t)$ 为周期 T=4 的周期函数，该周期函数的傅里叶级数 a_k 为

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x_2(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\left[\int_{-0.5}^{1.5}\cos\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt+\int_{1.5}^{3.5}-\cos\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5}\cos\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5}\frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

当 $k=\pm 2$ 时，$a_k=0$

当 $k\neq\pm 2$ 时

$$a_k=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{j\pi(1-\frac{k}{2})t}}{j\pi(1-\frac{k}{2})}+\frac{e^{-j\pi(1+\frac{k}{2})t}}{-j\pi(1+\frac{k}{2})}\right)\Bigg|_{t=-0.5}^{t=1.5}=\frac{-1}{2j\pi}\left(\frac{e^{j\pi(1-\frac{k}{2})t}}{k-2}+\frac{e^{-j\pi(1+\frac{k}{2})t}}{k+2}\right)\Bigg|_{t=-0.5}^{t=1.5}$$
$$=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\frac{k}{4}\pi}-e^{-j\frac{3k}{4}\pi}}{k-2}+\frac{e^{-j\frac{3k}{4}\pi}-e^{j\frac{k}{4}\pi}}{k+2}\right)=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\frac{k}{4}\pi}-e^{-jk\pi}e^{j\frac{k}{4}\pi}}{k-2}+\frac{e^{-jk\pi}e^{j\frac{k}{4}\pi}-e^{j\frac{k}{4}\pi}}{k+2}\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{-1}{\pi}\left(\dfrac{e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l-1}-\dfrac{e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l+3}\right) & k=2l+1\\ 0 & k=2l\end{cases}$$

则 $x_2(t)$ 的傅里叶变换为：

$$X_2(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\frac{-2e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l-1}+\frac{2e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l+3}\right]\delta\left(\omega-\frac{(2l+1)\pi}{2}\right)$$

或者：$X_2(j\omega)=\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{2e^{j\frac{2l-1}{4}\pi}}{j(2l-1)}+\dfrac{2e^{j\frac{2l+3}{4}\pi}}{j(2l+3)}\right]\delta\left(\omega-\dfrac{(2l+1)\pi}{2}\right)$

解法三：令 $x_0(t)$ 为周期信号（周期为 4）

在 $-0.5\le t<3.5$ 上满足，$x_0(t)=\begin{cases}1 & -0.5\le t<1.5\\ 0 & 1.5\le t<3.5\end{cases}$

则有 $x_2(t)=x_0(t)\cos(\pi t)=\frac{1}{2}x_0(t)(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t})$，设 $x_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{0k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

则有 $c_{0k}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{k\pi}{4}}Sa(\frac{k\pi}{2})$，若 $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{2k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

则有，$c_{2k}=\frac{1}{2}[c_{0(k-2)}+c_{0(k+2)}]=\frac{je^{-j\frac{k\pi}{4}}}{4}\left[Sa(\frac{k-2}{2}\pi)-Sa(\frac{k+2}{2}\pi)\right]$。

3-13 设 $x(t)$是一连续时间周期信号，其基波频率为 ω_0，傅里叶级数系数为 a_k，求信号 $x_2(t)=x(1-t)+x(t-1)$ 的频谱或傅里叶级数系数。

解：因为由题意 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$

根据题目要求有

$$x_2(t)=x(1-t)+x(t-1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0(1-t)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0(t-1)}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{-jk\omega_0}e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_{-k}+a_k)e^{-jk\omega_0}e^{jk\omega_0 t}$$

因此，信号 $x_2(t)$ 的傅立叶级数的系数为 $(a_{-k}+a_k)e^{-jk\omega_0}$；

3-14 有三个连续时间周期信号，其傅里叶级数或傅里叶变换表示如下：

$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{10}(\frac{1}{2})^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}\ ;\ X_2(j\omega)=\sum_{k=-10}^{10}2\pi\cos(k\pi)\delta(\omega-k\frac{2\pi}{50})$$
$$x_3(t)=\sum_{k=-15}^{15}j\sin(\frac{k\pi}{2})e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

利用傅里叶级数或傅里叶变换性质帮助回答下列问题：

（1）三个信号哪些是实值的？ （2）哪些又是偶函数？

解：(1) 根据连续时间傅里叶级数或傅里叶变换的性质知：实信号的傅立叶级数系数以及傅立叶变换为共轭对称，故，$x_2(t)$ 与 $x_3(t)$ 为实信号；

因为：$a_{1k}=(\frac{1}{2})^k$；$a_{-1k}=0$；

$a_{2k}=\cos(k\pi)$；$a_{-2k}=\cos(-k\pi)=\cos(k\pi)=a_{2k}$；

$a_{3k}=j\sin(\frac{k\pi}{2})$;; $a_{-3k}=j\sin(\frac{-k\pi}{2})=-j\sin(\frac{k\pi}{2})$；$a^*_{-3k}=j\sin(\frac{k\pi}{2})=a^*_{3k}$

(2) 又因实偶信号的傅立叶级数系数以及傅立叶变换为实偶对称，显然，只有

$a_{-2k}=\cos(-k\pi)=\cos(k\pi)=a_{2k}$ 为实值且为偶函数

由此可知，$x_2(t)$ 为实偶信号。

3-15 现对一信号 $x(t)$ 给出如下信息：

(1) x(t)是实的且为偶函数

(2) x(t)是周期的，周期 T=2，傅里叶系数为 a_k

(3) 对|k|>1，a_k=0

(4) $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

试确定两个不同的信号都满足这些条件。

解：由条件（1）、（2）：x(t)是周期的、实的且为偶函数，所以 $a_k = a_{-k}$，且 a_k 为实数。

再由条件（3），$|k|>1$ 时，$x(t)$ 的傅立叶系数 $a_k = 0$。故信号 x(t)可以表示为：

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{T}t} + a_1 e^{-j\frac{2\pi}{T}t} = a_0 + 2a_1 \cos \pi t \quad （T = 2，\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi）$$

结合条件（4），$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = a_0^2 + 2a_1^2 = 1$

（1） 若取 $a_0 = 0$ $\quad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x(t) = \sqrt{2}\cos \pi t$

（2）若取 $a_1 = 0$ $\quad a_0 = 1$ $\quad x(t) = 1$

（3）若取 $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$a_1 = \pm\frac{1}{2}$，$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \cos \pi t$

其实。因为方程数 1 少于未知数个数 2，所以存在无穷解可以满足题中各条件。

3-16 考虑信号 x(t)，其傅里叶变换为 X(jω)，且满足以下条件：

（1） $F^{-1}\{(2+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-t}u(t)$，A 与 t 无关，且 A 为实数和 A>0;

（2） $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 1$

求。

解：因为 $Ae^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{A}{1+j\omega} = (2+j\omega)X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{A}{1+j\omega} - \frac{A}{2+j\omega} \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t)A(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

由帕斯瓦尔定理：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_0^{\infty} (e^{-t} - e^{-2t})^2 dt = 1$

积分并解之，得 $A = 2\sqrt{3}$

所以 x(t)的时域表达式：$x(t) = 2\sqrt{3}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$。

<信号与系统>第三章作业（P122-129）第三部分 3.17-3.25

3.17 设 x(t)的傅里叶变换 X(jω)满足以下条件：

（1） x(t)为实值信号，且 x(t)=0，t<0；

（2） $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega = e^{-|t|}$

求 x(t)的时域表达式。

解：由条件（1），x(t)是实值信号，则 x(t)分解后的偶部对应其傅里叶变换 X(jω)的实部，

即：$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\xleftrightarrow{F}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$；考虑 F 变换公式(3-53)，知

所以：$\frac{x(t)+x(-t)}{2}=e^{-|t|}$

因为 x(t)=0, 当 t<0 时

所以得到 x(t)的时域表达式：$x(t)=2e^{-t}u(t)$

3.18 设图 3-38 所示信号 x(t)的傅里叶变换为 X(jω)：

（1） 求 X(jω)的相频特性 θ(ω)

（2） 求 X(0)

（3） 求 $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)d\omega$

（4） 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}\cdot e^{j2\omega}d\omega$

（5） 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$

（6） 画出 Re{X(jω)}的反变换

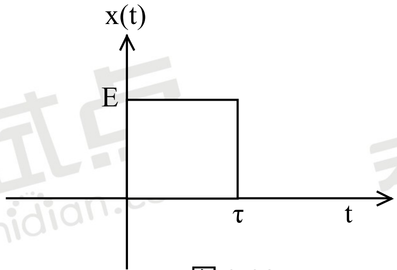


图 3-38

解：(1) 方法一：

信号 x(t)可看成是矩形窗函数 $x_1(t)$（$T_1=\tau/2$）经过时移 t_0（$t_0=\tau/2$）并乘以常数 E 得到，

即：$x(t)=Ex_1(t-\frac{\tau}{2})$,因此 x(t)的傅里叶变换为：

$$X(j\omega)=\frac{2E\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\omega}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$；易知其相频特性为：$\theta(\omega)=-\frac{\tau\omega}{2}$

方法二（直接计算）：信号 $x(t)=E[u(t)-u(t-\tau)]$，

$$X(j\omega)=\int_0^{\tau}Ee^{-j\omega t}dt=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$；可得相位特性为：$\theta(\omega)=-\frac{\tau\omega}{2}$；

(2) 因为 $X(0)=\lim_{\omega\to 0}X(j\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{2E\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\omega}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}=\lim_{\omega\to 0}E\tau Sa(\frac{\tau\omega}{2})e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}=E\tau$

故 $X(0)=\int_0^{\tau}Edt=E\tau$

(3) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = 2\pi x(t)$

令 $t=0$，可得 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi x(0)$，由于 $x(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，应有

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi\frac{x(0_-)+x(0_+)}{2} = E\pi$$

(4) 令 $x_1(t)=u(t+1)-u(t-1)$，可得 $x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X_1(j\omega)=2Sa(\omega)$

（或：$x_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<1 \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$）

由时域卷积性质，可得：$f(t)=x(t)*x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)X_1(j\omega)=F(j\omega)$

再由 F 反变换公式(3-54)，并代入 $X_1(j\omega)=2Sa(\omega)$，得

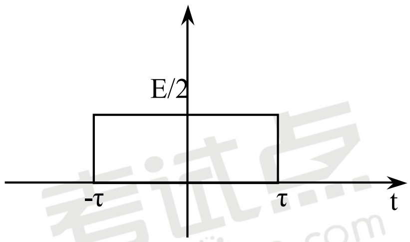
$\int_{-\infty}^{\infty} 2X(j\omega)Sa(\omega)e^{j\omega t}d\omega = 2\pi\{x(t)*x_1(t)\}$，令 $t=2$ 可得，

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega = 2\pi\left[x(t)*x_1(t)\right]_{t=2} = \begin{cases}0 & \tau<1 \\ 2\pi E(\tau-1) & 1\le\tau<3 \\ 4\pi E & \tau\ge 3\end{cases};$$

(5) 由帕斯瓦尔定理：$\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt = 2\pi E^2\tau$

(6) 由于 $\mathrm{Re}[X(j\omega)] \xleftrightarrow{IFT} x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}=\frac{E}{2}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$

于是可画出 Re{X(jω)}的反变换图



3.19 有一系统其频率响应为：$H(j\omega)=\frac{\sin 3\omega}{\omega}\cdot\cos\omega$，求它的单位冲激响应 h(t)。

解：方法一：$H(j\omega)=\frac{\sin 3\omega}{\omega}\cdot\cos\omega=\frac{\sin 3\omega}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right)=\frac{e^{j\omega}}{2}\frac{\sin 3\omega}{\omega}+\frac{e^{-j\omega}}{2}\frac{\sin 3\omega}{\omega}$

因为：$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1 \\ 0 & |t|>T_1\end{cases} \quad \xleftrightarrow{F} \quad \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$

所以：$h(t)=\left.\dfrac{x(t+1)+x(t-1)}{4}\right|_{T_1=3}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & |t|<2\\ \dfrac{1}{4} & 2<|t|<4\\ 0 & else\end{cases}$

方法二：设 $H_1(j\omega)=\dfrac{\sin(3\omega)}{\omega}$，则有 $h_1(t)=\begin{cases}0.5 & |t|<3\\ 0 & |t|>3\end{cases}$，

$$H(j\omega)=H_1(j\omega)\cos\omega=\frac{1}{2}\left[H_1(j\omega)e^{j\omega}+H_1(j\omega)e^{-j\omega}\right]$$

根据傅立叶变换的时域平移性质有 $h(t)=\dfrac{1}{2}\left[h_1(t+1)+h_1(t-1)\right]=\begin{cases}0.5 & |t|<2\\ 0.25 & 2\le|t|<4\\ 0 & |t|\ge 4\end{cases}$；

3.20 有一因果 LTI 系统，其频率响应为 $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$，对某一特定的输入 x(t)，其输出是

$y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$，求 x(t)。

解：输出的傅里叶变换为：$Y(j\omega)=\dfrac{1}{3+j\omega}-\dfrac{1}{4+j\omega}=\dfrac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$

输入的傅里叶变换为：$X(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\dfrac{1}{4+j\omega}$

输入 x(t)：$x(t)=F^{-1}\{X(j\omega)\}=e^{-4t}u(t)$

3.21 已知某一因果二阶 LTI 系统的频率响应为：$H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$，试求

（1） 该系统的微分方程

（2） 该系统的单位脉冲响应

（3） 若输入 x(t)如图 3－38 所示，求系统输出。

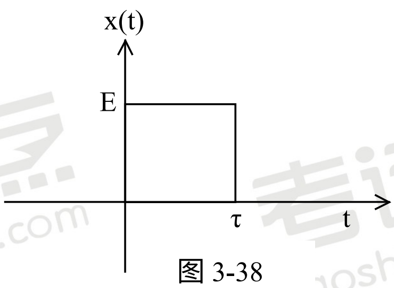


图 3-38

解：（1） 因为 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

即：$[(j\omega)^2+3j\omega+2]Y(j\omega)=j\omega X(j\omega)$

系统的微分方程为：$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$；

（2） 因为 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=\dfrac{2}{j\omega+2}-\dfrac{1}{j\omega+1}$

容易求得系统的单位脉冲响应 h(t)：$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=(2e^{-2t}-e^{-t})u(t)$

（3） 方法一：给定的输入信号可以表示为矩形脉冲的时移（参见题 3.18(1)），

因此输入的傅里叶变换：$X(j\omega)=Ee^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\frac{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$

输出的傅里叶变换：$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{2Ee^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\cdot j\omega}{\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}\cdot\frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j}$

$$=E\left(\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}\right)\left(1-e^{-j\omega\tau}\right)$$

输出的时域表达式：$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=E\left[(e^{-t}-e^{-2t})u(t)-(e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)})u(t-\tau)\right]$

方法二：$x(t)=E[u(t)-u(t-\tau)]$，$\frac{dx(t)}{dt}=E[\delta(t)-\delta(t-\tau)]$

则：$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{FT}E(1-e^{-j\omega\tau})$

输出：$Y(j\omega)=\frac{E(1-e^{-j\omega\tau})}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=(\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2})E(1-e^{-j\omega\tau})$

于是，可得：$y(t)=E(e^{-t}-e^{-2t})u(t)-E[e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}]u(t-\tau)$；

3.22 一因果 LTI 系统的方程为 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$

（1） 求该系统的单位冲激响应 h(t)；

（2） 若 $x(t)=te^{-t}u(t)$，该系统的响应是什么？

（3） 若 $x(t)=e^{-2t}u(t)$，该系统的响应又是什么？

（4） 若 $x(t)=\sum_{k=0}^{5}(\frac{1}{2})^k\cos 100\pi kt$，该系统的响应又是什么？

解：（1）因为 $x(t)=\delta(t)\xleftrightarrow{FT}1=X(j\omega)$

所以 $H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\frac{2}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega+2}$

取 F 反变换得该系统的单位冲激响应 h(t)：

$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=(2e^{-3t}-e^{-2t})u(t)$；

（2） 若 $x(t)=te^{-t}u(t)$，令 $x_1(t)=e^{-t}u(t)$，则 $e^{-t}\xleftrightarrow{FT}X_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$

由频域微分性质可得：$X(j\omega)=te^{-t}\xleftrightarrow{FT} j\dfrac{dX_1(j\omega)}{d\omega}=\dfrac{1}{(j\omega+1)^2}$，于是

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{0.5}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}+\frac{0.5}{j\omega+3},$$

于是，系统的响应为：$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$；

(3) 若 $x(t)=e^{-2}u(t)$，$e^{-2t}\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}$，于是

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+3)}=\frac{2}{j\omega+2}-\frac{1}{(j\omega+2)^2}-\frac{2}{j\omega+3},$$

于是，系统的响应为：$y(t)=(2e^{-2t}-te^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$；

(4) 若 $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{5}(\dfrac{1}{2})^k\cos(100k\pi t)=\sum\limits_{k=0}^{5}(\dfrac{1}{2})^{k+1}(e^{j100k\pi t}+e^{-j100k\pi t})$，

当输入为 $x_k(t)=e^{j100k\pi t}$（$k\neq 0$ 时），输出即为

$$y_k(t)=H(j100k\pi)e^{j100k\pi t}=(\frac{2}{3+j100k\pi}-\frac{1}{2+j100k\pi})e^{j100k\pi}\text{；}$$

而当 $k=0$ 时，$x_0(t)=1$，对应的输出为 $y_0(t)=\dfrac{1}{6}$

于是系统的响应为：$y(t)=\dfrac{1}{6}+\sum\limits_{\substack{k=-5\\k\neq 0}}^{5}(\dfrac{1}{2})^{k+1}(\dfrac{2}{3+j100k\pi}-\dfrac{1}{2+j100k\pi})e^{j100k\pi}$；

3.23 利用卷积性质，用频域法求下列各信号 x(t)和 h(t)的卷积

(1) $x(t)=e^{-t}u(t)$，$h(t)=e^{-3t}u(t)$； (2) $x(t)=te^{-t}u(t)$，$h(t)=e^{-3t}u(t)$；

(3) $x(t)=u(t+1)-u(t-1), h(t)=u(t+1)-u(t-1)$。

解：(1) $x(t)=e^{-t}u(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$

$h(t)=e^{-3t}u(t)\xleftrightarrow{F}H(j\omega)=\dfrac{1}{3+j\omega}$

所以：$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+j\omega}-\dfrac{1}{3+j\omega}\right)$

$x(t)*h(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})u(t)$；

(2) $x(t)=te^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} j\dfrac{d\{\frac{1}{1+j\omega}\}}{d\omega}=\dfrac{1}{(1+j\omega)^2}$

所以：$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{(1+j\omega)^2(3+j\omega)}=\dfrac{1}{4}[\dfrac{2}{(j\omega+1)^2}-\dfrac{1}{j\omega+1}+\dfrac{1}{j\omega+3}]$

可得： $y(t)=x(t)*h(t)=\dfrac{1}{4}(2te^{-t}-e^{-t}+e^{-3t})u(t)$；

(3) 因为：$x(t)=u(t+1)-u(t-1)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=(e^{j\omega}-e^{-j\omega})\left(\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$

$h(t)=u(t+1)-u(t-1)\xleftrightarrow{F}H(j\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$

所以：$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)=\left(\dfrac{2\sin\omega}{\omega}\right)^2=4Sa^2(\omega)$

设 $x_1(t)=\begin{cases}E(1-\frac{2}{\tau}|t|) & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$，则 $X_1(j\omega)=\dfrac{E\tau}{2}Sa^2(\dfrac{\omega\tau}{4})$ (参见 P100 例 3-7)

若令 $\tau=4$， $E=2$，

则有 $X_1(j\omega)=\dfrac{E\tau}{2}Sa^2(\dfrac{\omega\tau}{4})=4Sa^2(\omega)=Y(j\omega)$，此时 $x_1(t)=y(t)$，

即 $y(t)=x(t)*h(t)=\begin{cases}2(1-\frac{|t|}{2}) & |t|<2\\ 0 & |t|>2\end{cases}$；

3.24 设 x(t)的傅里叶变换为 $X(j\omega)$，令 p(t)是基波频率为 ω_0 的周期信号。其傅里叶级数是

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0}$$

求：(1) $y(t)=x(t)\cdot p(t)$ 的傅里叶变换；

(2) 若 $X(j\omega)$ 如图 3-39 所示，对下列每个 p(t)画出 y(t)的频谱。

① $p(t)=\cos(\frac{t}{2})$； ② $p(t)=\cos t$； ③ $p(t)=\cos 2t$；

④ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi k)$；⑤ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2\pi k)$； ⑥ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4\pi k)$。

解：(1) 因为 $x(t)e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}X(j(\omega-k\omega_0))$，于是由线性性质有

$$x(t)p(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k x(t)e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k X(j(\omega-k\omega_0))$$

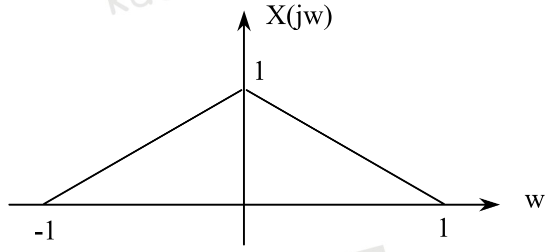


图 3-39

(2) ① $p(t)=\cos(\frac{t}{2})=\frac{1}{2}(e^{j\frac{t}{2}}+e^{-j\frac{t}{2}})$；

可得 $x(t)p(t)=\frac{x(t)}{2}(e^{j\frac{t}{2}}+e^{-j\frac{t}{2}})\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[X(j(\omega-\frac{1}{2}))+X(j(\omega+\frac{1}{2}))]$；

② $p(t)=\cos t=\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})$；

可得 $x(t)p(t)=\frac{x(t)}{2}(e^{jt}+e^{-jt})\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[X(j(\omega-1))+X(j(\omega+1))]$；

③ $p(t)=\cos 2t=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{x(t)}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[X(j(\omega-2))+X(j(\omega+2))]$；

④ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\pi)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j2kt}$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{j2kt}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-2k))$

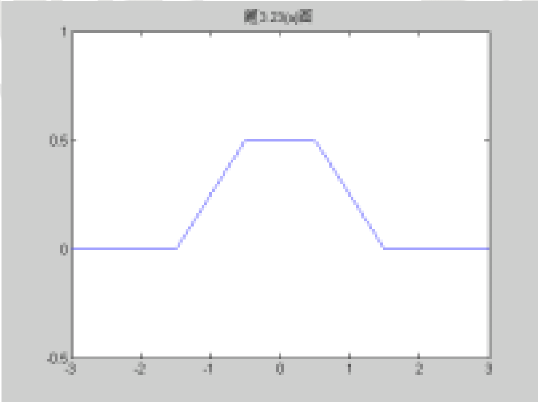
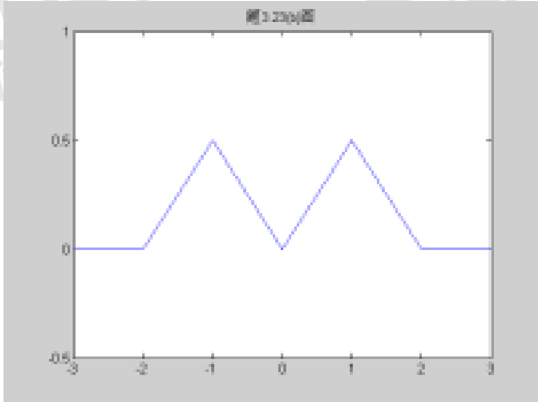
⑤ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jkt}$，

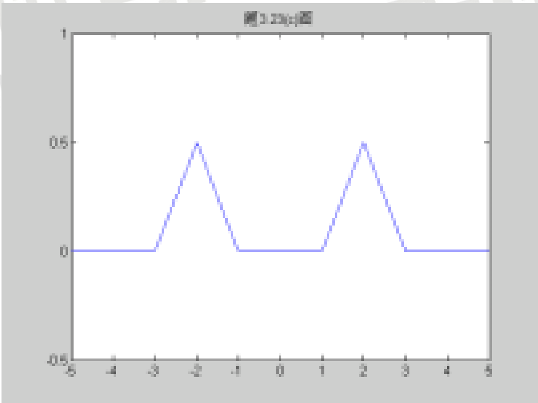
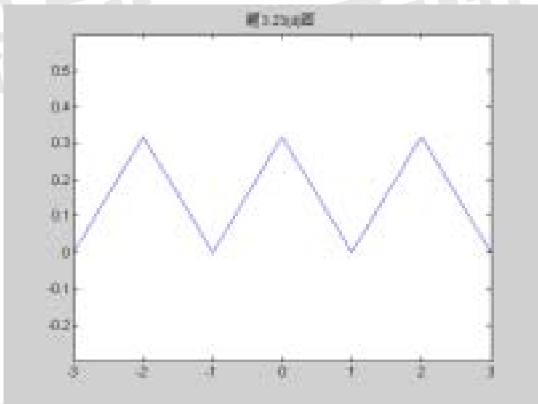
可得 $x(t)p(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{jkt}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k))=\frac{1}{\pi}$

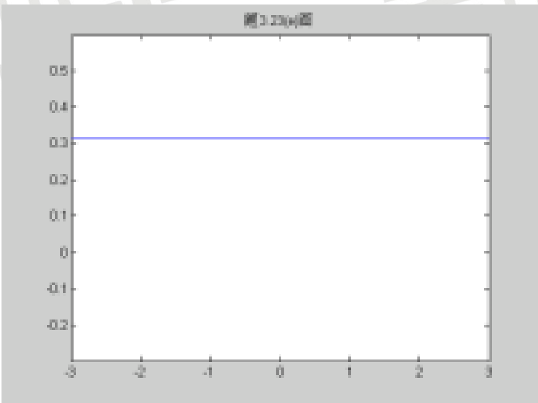
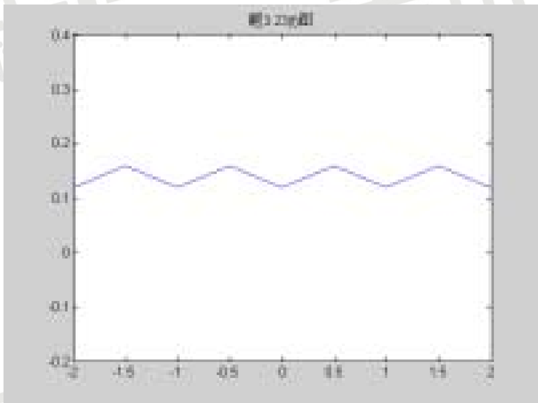
⑥ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4k\pi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{k}{2}t}$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\frac{k}{2}t}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-\frac{k}{2}))$。

相应的频谱如下所示。

3.25 考虑一 LTI 系统，对输入为 $x(t)=\left[e^{-t}+e^{-3t}\right]u(t)$ 的响应 y(t)是 $y(t)=\left[2e^{-t}-2e^{-4t}\right]u(t)$，

(1) 求系统的频率响应 $H(j\omega)$

(2) 确定该系统的单位冲激响应 h(t)

(3) 求该系统的微分方程

解：(1) 易知输入的傅里叶变换：$X(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}+\dfrac{1}{3+j\omega}=\dfrac{2(2+j\omega)}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$

输出的傅里叶变换：$Y(j\omega)=\dfrac{2}{1+j\omega}-\dfrac{2}{4+j\omega}=\dfrac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

系统的频率响应：$H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\dfrac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}=\dfrac{3/2}{2+j\omega}+\dfrac{3/2}{4+j\omega}$

（2）系统的单位冲激响应 h(t)： $h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=\left(\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)$

（3）系统的微分方程

因为 $H(j\omega)=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}=\frac{9+3j\omega}{(j\omega)^2+6j\omega+8}$

所以 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$

<信号与系统>第三章作业（P122-129）第四部分 3.26-3.34

3.26 证明 LTI 系统对周期信号的响应仍是周期信号且不会产生新的谐波分量或新的频率分量。

证明：设 LTI 系统的频率响应为 $H(j\omega)$，输入信号 $x(t)$ 为周期信号，且周期为 T，则 $x(t)$ 可以展开为，$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$；其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ 为周期信号 $x(t)$ 的基频，a_k（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）为 $x(t)$ 的傅立叶级数；当输入为 $x_k(t)=e^{jk\omega_0 t}$ 时，系统对应的输出应为 $y_k(t)=H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$（特征函数），由于是 LTI 系统，故当输入为 $x(t)$ 时，系统的输出为 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$，由此可见输出 $y(t)$ 仍为周期信号，且无新的谐波分量。

3.27 考虑一 LTI 系统，其单位冲激响应为：$h(t)=\frac{\sin 5(t-1)}{\pi(t-1)}$，求系统对下面各输入信号的响应：

（1）$x(t)=\cos(7t+\frac{\pi}{3})$；（2）$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kt$；

（3）$x(t)=\frac{\sin 5(t+1)}{\pi(t+1)}$；（4）$x(t)\left[\frac{\sin\frac{5}{2}t}{\pi t}\right]^2$。

解：因为 $\frac{\sin Wt}{\pi t}\overset{F}{\longleftrightarrow}\begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}$

所以由时移性质的：$h(t)=\frac{\sin 5(t-1)}{\pi(t-1)}\overset{F}{\longleftrightarrow}H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega} & |\omega|<5\\ 0 & |\omega|>5\end{cases}$

（1）$x(t)=\cos(7t+\frac{\pi}{3})\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=\pi\left[e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot\delta(\omega-7)+e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot\delta(\omega+7)\right]$

输出的傅里叶变换：$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=0$

所以输出响应 $y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=0$

（2）$y(t)=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}\sin k(t-1)$

(3) $x(t)=\dfrac{\sin 5(t+1)}{\pi(t+1)} \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=\begin{cases} e^{j\omega} & |\omega|<5 \\ 0 & |\omega|>5 \end{cases}$

输出的傅里叶变换为：$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\begin{cases} 1 & |\omega|<5 \\ 0 & |\omega|>5 \end{cases}$

所以输出响应为：$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=\dfrac{\sin 5t}{\pi t}$。

(4) $y(t)=\left[\dfrac{\sin\frac{5}{2}(t-1)}{\pi(t-1)}\right]^2$

3.28 如图 3－40 所示周期信号 $v_i(t)$加到 RC 低通滤波器电路，已知 $v_i(t)$得基波频率 $f_0=\dfrac{2\pi}{T}=1kHz, E=1V, R=1k\Omega, C=0.1\mu F$ ：

（1） 设电容器两端电压为 $v_c(t)$，求系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{V_c(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

（2） 求 $v_c(t)$的直流分量、基波和五次谐波的幅度

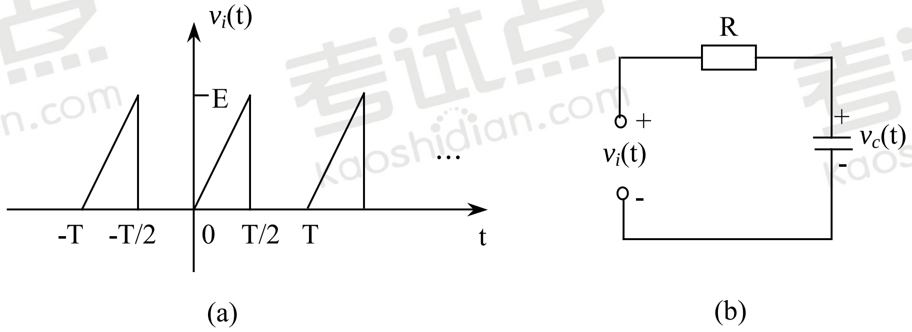


图 3-40 题 3.28 图

解：

(1) 由基尔霍夫定理：$v_c(t)+RC\dfrac{dv_c(t)}{dt}=v_i(t)$，两边取傅里叶变换，得

$V_c(j\omega)+j\omega RCV_c(j\omega)=V_i(j\omega)$，则 $H(j\omega)=\dfrac{V_c(j\omega)}{V_i(j\omega)}=\dfrac{1}{1+RCj\omega}=\dfrac{1}{1+10^{-4}j\omega}$

(2) 由周期函数得傅里叶级数：$V_i=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk1000t}$

其中：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}te^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2E}{T^2}\left[\dfrac{1}{-jk\omega_0}\left(\dfrac{T}{2}(-1)^k + \dfrac{(-1)^k - 1}{jk\omega_0}\right)\right] = \dfrac{(-1)^k jE}{2k\pi} + \dfrac{E\left((-1)^k - 1\right)}{2k^2\pi^2} & k \neq 0 \\ \dfrac{E}{4} \quad k = 0 \end{cases}$$

所以：$V_c(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk1000t}$

其中：$b_k = a_k H(jk\dfrac{2\pi}{T}) = \dfrac{a_k}{1 + j0.1k}$

$$b_0 = a_0 = \frac{E}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{1 + j0.1} = E\left(\frac{-j}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1}{1 + j0.1}$$

$$b_5 = \frac{a_5}{1 + j0.1} = E\left(\frac{-j}{10\pi} - \frac{1}{25\pi^2}\right)\frac{1}{1 + j0.1}$$

3.29 由图 3－41 所示的 RL 电路，电流源输出电流为输入 x(t)，系统的输出为流经电感线圈的电流 y(t)。

(1) 求该系统的频率响应 $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$；

(2) 写出关联 x(t)和 y(t)的微分方程；

(3) 若 x(t)=cos(t)，求输出 y(t)

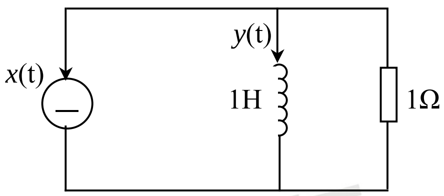


图 3-41 题 3.29 图

解：

(1) 电阻的阻抗为：R　　电感的阻抗为：$j\omega L$

由此得到：$\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = -\dfrac{R}{R + j\omega L} = -\dfrac{1}{1 + j\omega}$

(2) 对上式进行傅里叶反变换，得微分方程

$$y'(t) + y(t) = -x(t)$$

(3) 输入 $x(t) = \cos t$，则输出为 $y(t) = \left|H(j\omega_0)\right|\cos\left(t + \theta(\omega_0)\right)$

因为：$\omega_0 = 1$　　$H(j\omega_0) = \dfrac{1}{1 + j}$　　$\left|H(j\omega_0)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\theta(\omega_0) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

所以：$y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t + \dfrac{3\pi}{4}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t - \dfrac{\pi}{4})$

3.30 由图 3－42 所示的 RLC 电路，试求

(1)　系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$；

(2)　写出关联 x(t)和 y(t)的微分方程；

(3)　若 x(t)=sin(t)，求输出 y(t)

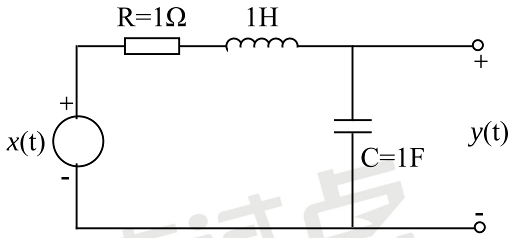


图 3-42　题 3.30 图

解：(1) 电阻的复阻抗为 R，电感的复阻抗 $j\omega L$，电容的复阻抗 $\dfrac{1}{j\omega C}$，所以由电路图可知：

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{(j\omega)^2LC+j\omega RC+1}=\frac{1}{(j\omega)^2+j\omega+1}$$

(2) 对上式取傅里叶反变换，得微分方程：

$$y''(t)+y'(t)+y(t)=x(t)$$

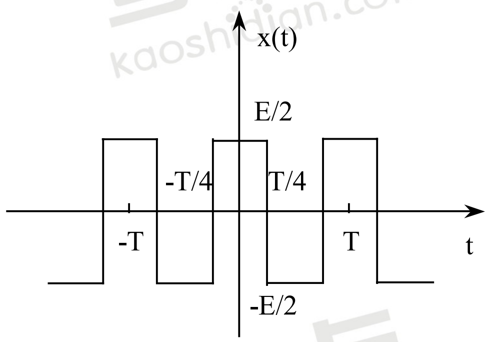
(3) 输入 $x(t)=\sin t$，则输出为 $y(t)=|H(j\omega_0)|\sin(t+\theta(\omega_0))$

因为：$\omega_0=1 \quad H(j\omega_0)=-j \quad |H(j\omega_0)|=1 \quad \theta(\omega_0)=-\dfrac{\pi}{2}$

所以：$y(t)=\sin(t-\dfrac{\pi}{2})=-\cos(t)$

3.31 考虑一连续时间 LTI 系统，其单位冲激响应为：$h(t)=e^{-|t|}$，对下列各输入情况，求输出 y(t)的傅里叶变换或傅里叶级数：

(1) $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$　(2) $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-k)$　(3) x(t)如图 3-31(b)所示周期方波



(b)

图 3-31

解：$h(t)=e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} H(j\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$

(1) x(t)是周期 T＝2 的周期函数，其傅里叶级数系数为 1：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

所以 $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{2}{1+\omega^2}\delta(\omega-2k\pi)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{2}{1+(2k\pi)^2}\delta(\omega-2k\pi)$

(2) x(t)是周期 T＝2 的周期函数，其傅里叶级数系数为：

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-1/2}^{3/2}\left(\delta(t)-\delta(t-1)\right)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{2}\left(1-e^{-jk\pi}\right)=\frac{1}{2}(1-\cos k\pi)$$

所以 $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-k) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=\dfrac{2\pi}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\dfrac{2\pi}{T})=\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{2}(1-\cos k\pi)\delta(\omega-k\pi)$

所以：$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-\cos k\pi}{1+\omega^2}\delta(\omega-k\pi)=\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-\cos k\pi}{1+(k\pi)^2}\delta(\omega-k\pi)$

(3) x(t)的傅里叶级数系数 a_k ，则输入的傅里叶变换为：

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

所以输出：$Y(j\omega)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_kH(jk\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\dfrac{2}{1+(k\omega_0)^2}\delta(\omega-k\omega_0)$

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ $a_k=\dfrac{E}{2}Sa(\dfrac{k\pi}{2})$，而 $a_0=0$

鉴于有些同学认为定义式和上次王老师讲的方法不一致，所以特别按照定义式推导了一遍

$$a_k=\frac{1}{T}\left(\int_{-T/4}^{T/4}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0t}dt-\int_{T/4}^{3T/4}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0t}dt\right)$$

$$=\frac{E}{2T}\times\frac{e^{-jk\omega_0\frac{T}{4}}-e^{jk\omega_0\frac{T}{4}}-e^{-jk\omega_0\frac{3T}{4}}+e^{-jk\omega_0\frac{T}{4}}}{-jk\omega_0}$$

$$=\frac{E}{2T}\times\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}-e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{3\pi}{2}k}+e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{-jk\omega_0}\qquad k\neq 0$$

$$=\frac{E}{T}\times\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}-e^{j\frac{\pi}{2}k}}{-jk\omega_0}=\frac{E}{T}\frac{2\sin\frac{\pi}{2}k}{k\omega_0}=\frac{E}{2}Sa(\frac{\pi k}{2})$$

3.32 电路如图 3-43 所示，激励电流源为 $i_1(t)$，输出电压为 $v_1(t)$，试求：

(1) 系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega)}$

(2) 能否使 $v_1(t)$和 $i_1(t)$波形一样（无失真）？如能试确定 R_1 和 R_2（设给定 L＝1H，C＝

1F)。

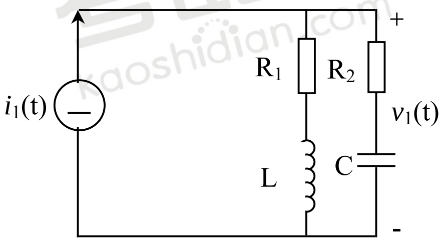


图 3-43　题 3.32 图

解：电阻的复阻抗为 R，电感的复阻抗 $j\omega L$，电容的复阻抗 $\frac{1}{j\omega C}$，所以有电路图可知：

$$\frac{V_1(j\omega)}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}+\frac{V_1(j\omega)}{R_1+j\omega L}=I_1(j\omega)$$

所以 $$H(j\omega)=\frac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega)}=\frac{\left(R_2+\frac{1}{j\omega C}\right)(R_1+j\omega L)}{R_2+\frac{1}{j\omega C}+R_1+j\omega L}=\frac{R_1+j\omega(L+R_1R_2C)+(j\omega)^2R_2LC}{1+j\omega(R_1+R_2)+(j\omega)^2LC}$$

若 L=1H, C=1F，则

$$H(j\omega)=\frac{R_1+j\omega(1+R_1R_2)+(j\omega)^2R_2}{1+j\omega(R_1+R_2)+(j\omega)^2}$$

(2) 要使 $v_1(t)$和 $i_1(t)$的波形无失真，必须 $H(j\omega)=1$， $R_1=1\Omega, R_2=1\Omega$

3.33 一个理想带通滤波器的幅频特性和相频特性如图 3-44 所示，试求它的冲激响应。并说明此滤波器在时域上是否是物理可实现的？

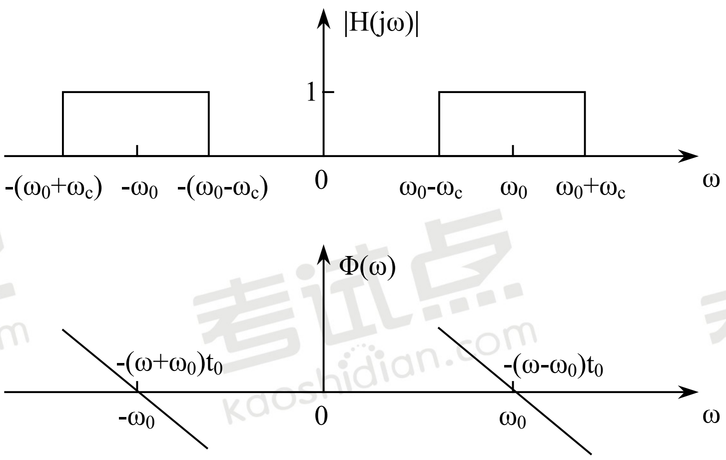


图 3-44　题 3.33 图

解：由图可知：

$$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j(\omega+\omega_0)t_0} & |\omega+\omega_0|<\omega_c\\ e^{-j(\omega-\omega_0)t_0} & |\omega-\omega_0|<\omega_c\\ 0 \quad else & \end{cases}$$

又因为：$H_1(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F^{-1}} h_1(t)=\dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t}$

$$e^{-j\omega t_0}H_1(j\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} h_1(t-t_0)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}$$ 时移特性

$$e^{-j(\omega+\omega_0)t_0}H_1(j(\omega+\omega_0)) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{-j\omega_0 t}h_1(t-t_0)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}e^{-j\omega_0 t}$$ 频移特性

并且 $H(j\omega)=e^{-j(\omega+\omega_0)t_0}H_1(j(\omega+\omega_0))+e^{-j(\omega-\omega_0)t_0}H_1(j(\omega-\omega_0))$

则其冲激响应为：

$$h(t)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right)=\frac{2\sin\omega_c(t-t_0)\cos\omega_0 t}{\pi(t-t_0)}$$

由于当 t<0 时，h(t)≠0，所以系统是非因果的，物理上不能实现

3.34 考虑一连续时间理想滤波器 $H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\,] \\ 0 & else\end{cases}$，当输入如图 3-45 所示，求系统输出。当满足 $T>>\dfrac{2\pi}{\omega_c}$ 时，画出输出信号的大致波形。

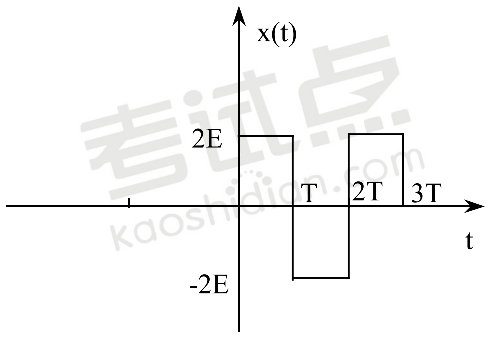


图 3-45　题 3.34 图

解

$$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}$$

理想低通滤波器的阶跃响应应为：$s(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$

输入 x(t)可以表示为：$x(t)=2E\big(u(t)-2u(t-T)+2u(t-2T)-u(t-3T)\big)$

则系统的输出为：

$$y(t)=\frac{2E}{\pi}\{Si[\omega_c(t-t_0)]-2Si[\omega_c(t-t_0-T)]+2Si[\omega_c(t-t_0-2T)]-Si[\omega_c(t-t_0-3T)]\}$$

于慧敏主编<信号与系统>第四章作业(P173~183) 习题解答

4.1 ~ 4.15

4.1 确定下列离散时间周期信号的傅里叶级数，并写出每一组系数 a_k 的模和相位

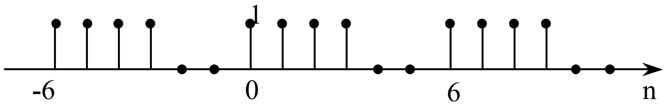
（1）x[n]如图 4-28（a）所示　　　（2）　x[n]如图 4—28（b）所示

（3）$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{2\delta[n-4m]+4\delta[n-1-4m]\}$　　（4）　$x[n]=\cos(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/3)$

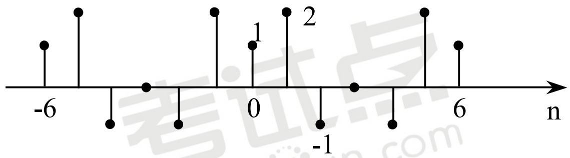
（5）$x[n]=1-\sin(\pi n/4),\quad 0\le n\le 3$，且 x[n]以 4 为周期

（6）$x[n]=1-\sin(\pi n/4),\quad 0\le n\le 11$，且 x[n]以 12 为周期

（7）$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$，　$0\le n\le 7$ 且 x[n]以 8 为周期



(a)



(b)

图 4—28

（1）解：该周期信号的周期 N 为 6，$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<6>}a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+e^{-j\pi k}\right)$$

$$=\frac{1}{6}e^{-j\frac{k}{2}\pi}\left(e^{j\frac{k}{2}\pi}+e^{j\frac{k}{6}\pi}+e^{-j\frac{k}{6}\pi}+e^{-j\frac{k}{2}\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{6}e^{-j\frac{k}{2}\pi}\left(2\cos\frac{k}{2}\pi+2\cos\frac{k}{6}\pi\right)$$

$|a_k|=\frac{1}{3}\left|\cos\frac{k}{2}\pi+\cos\frac{k}{6}\pi\right|$　　　a_k 的相位为 $-\frac{k\pi}{2}$

另外一种答案：

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+e^{-j\pi k}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}\times\dfrac{1-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}=\frac{1}{6}\times\dfrac{e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{6}k}\left(e^{j\frac{\pi}{6}k}-e^{-j\frac{\pi}{6}k}\right)}=\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\sin\frac{2k\pi}{3}}{6\sin\frac{k\pi}{6}} & 1\le k\le 5\\ \frac{2}{3} & k=0\end{cases}$$

$$|a_k|=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{6\sin\frac{k\pi}{6}} & 1\le k\le 5\\ \frac{2}{3} & k=0\end{cases}$$

a_k 的相位为 $-\frac{k\pi}{2}$

(2) 解：该周期信号的周期 N 为 6， $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<6>}a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{6}\left(1+2e^{-j\frac{\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}+2e^{-j\frac{5\pi}{3}k}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+4\cos\frac{k\pi}{3}-2\cos\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$|a_k|=\left|\frac{1}{6}\left(1+4\cos\frac{k\pi}{3}-2\cos\frac{2k\pi}{3}\right)\right|$， a_k 的相位 $\begin{cases}0 & k=0,1,2,4,5\\ \pi & k=3\end{cases}$

(3) 解：该周期信号的周期 N 为 4

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<4>}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{4}\left(2+4e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)=\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{2}k-j\sin\frac{\pi}{2}k$$

$$|a_k|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{k\pi}{2}\right)^2+\sin\frac{k\pi}{2}}$$

a_k 的相位 $-arctg\dfrac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{1}{2}+\cos\frac{k\pi}{2}}=\begin{cases}0 & k=4m\\ -arctg2 & k=4m+1\\ \pi & k=4m+2\\ arctg2 & k=4m+3\end{cases}$ m 为整数

(4) 解：该周期信号的周期 N 为 3

$$x[n]=\cos(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/3)$$
$$=\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2}+\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}-e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2j}=\frac{1-j}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}n}+\frac{1+j}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<3>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{3}n}$$

则：一个周期内 $a_0=0$，$a_1=\frac{1-j}{2}$，$a_{-1}=\frac{1+j}{2}$。

a_k 的相位 $\begin{cases}0 & k=3m\\ -\pi/4 & k=3m+1\\ \pi/4 & k=3m+2\end{cases}$

（5）解：该周期信号的周期 N 为 4，$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<4>}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{4}\left(1+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-j\frac{\pi}{2}k}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-j\frac{3\pi}{2}k}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+(2-\sqrt{2})\cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

$|a_k|=\left|\frac{1}{4}\left(1+(2-\sqrt{2})\cos\frac{k\pi}{2}\right)\right|$　　a_k 的相位为 0

（6）解：该周期信号的周期 N 为 12，$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<12>}a_k e^{jk\frac{\pi}{6}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}(1-\sin(\pi n/4)e^{-j\frac{k\pi}{6}n}$$

$$a_k=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}(1-\sin\frac{\pi n}{4})e^{-jk\frac{\pi}{6}n}=\frac{1}{12}[1+2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\frac{k\pi}{6}+2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\frac{k\pi}{2}$$
$$+2\cos\frac{2k\pi}{3}+2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\frac{5k\pi}{6}+2(-1)^k]$$

（7）解：该周期信号的周期 N 为 8，$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<8>}a_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\frac{k\pi}{4}n}\right)=\frac{1}{8}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right)^8}{1-\frac{1}{3}e^{-jk\frac{\pi}{4}}}=\frac{3(1-\frac{1}{3^8})}{8(3-e^{-j\frac{k\pi}{4}})}=\frac{\frac{820}{6561}}{1-\frac{1}{3}e^{-jk\frac{\pi}{4}}}$$

$$|a_k| = \frac{\frac{820}{6561}}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{4})^2+(\frac{1}{3}\sin\frac{k\pi}{4})^2}}$$ a_k的相位为 $-arctg\dfrac{\sin\frac{k\pi}{4}}{3-\cos\frac{k\pi}{4}}$

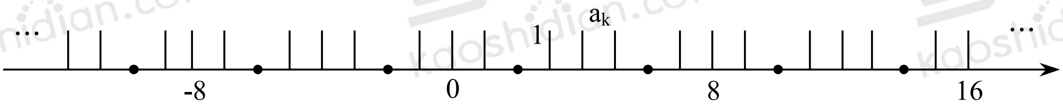
4.2 已知以下每一离散周期信号的傅里叶级数系数 a_k，且周期都为 8，试确定各信号 x[n]。

（1） $a_k=\cos\left(\frac{k}{4}\pi\right)+\sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$ （2） $a_k=\sin\frac{k\pi}{4}, 0\le k\le 7$

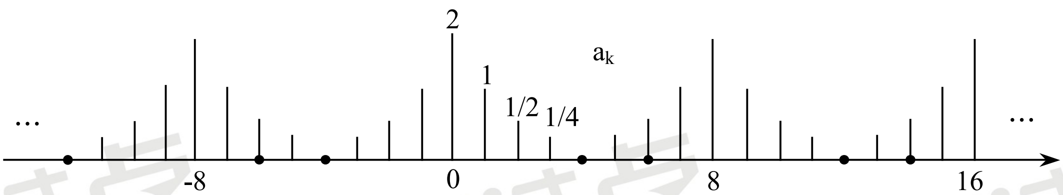
（3）a_k如图 4－29（a）所示（a0=1,a1=1,a2=0,a3=1,a4=1,a5=1,a6=0,a7=1）

（4）a_k如图 4－29（b）所示（a0=2,a1=1,a2=1/2,a3=1/4,a4=0,a5=1/4,a6=1/2,a7=1）

（5） $a_k=-a_{k-4}, x[2n+1]=(-1)^n$



(a)



(b)

解： $x[n]$的周期为 $N=8$，有 $\omega_0=\frac{\pi}{4}$

(1)

$$a_k=\cos\frac{k\pi}{4}+\sin\frac{3k\pi}{4}=\frac{1}{2}e^{j\frac{k\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{k\pi}{4}}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{3k\pi}{4}}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{3k\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4}x[n]e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

当 $-3\le n\le 4$ 时， $x[-3]=4j$， $x[-1]=4$， $x[1]=4$， $x[3]=-4j$，其他 $x[n]=0$。

(2)

$$a_k=\sin\frac{k\pi}{4}=\frac{1}{2j}e^{j\frac{k\pi}{4}}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{k\pi}{4}}=\frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4}x[n]e^{jk\frac{\pi}{4}n},$$

当 $-3\le n\le 4$ 时， $x[1]=-4j$， $x[-1]=4j$，其他 $x[n]=0$。

(3)

注：本题有问题，由图可得傅立叶系数 a_k 的周期为 4，故序列 $x[n]$ 的周期为 4（而不是题中所说的 8）。

$$x[n]=\sum_{k=-1}^{2}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}=e^{-j\frac{n\pi}{2}}+1+e^{j\frac{n\pi}{2}}=1+2\cos\frac{n\pi}{2}$$

(4)

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<8>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{8}n}$$
$$=2+e^{j\frac{\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{4}e^{j\frac{3\pi}{4}n}+\frac{1}{4}e^{j\frac{5\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{6\pi}{4}n}+e^{j\frac{7\pi}{4}n}$$
$$=2+2\cos\frac{\pi}{4}n+\cos\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n$$

(5)

$$x[2n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}2n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$
$$=a_0+a_1e^{j\frac{\pi}{2}n}+a_2e^{j\pi n}+a_3e^{j\frac{3\pi}{2}n}-a_0e^{j2\pi n}-a_1e^{j\frac{5\pi}{2}n}-a_2e^{j\frac{6\pi}{2}n}-a_3e^{j\frac{7\pi}{2}n}$$
$$=0$$

所以：$x[n]=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^k & n=2k+1\end{cases}$ k 为整数

4.3 周期为 N 的 x[n]的傅里叶级数表示为：$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

(1) 设 N 为偶数，且满足 $x[n]=-x\left[n+\frac{N}{2}\right]$，对全部 n。证明 $a_{2k}=0$，k 为任意整数。

(2) 设 N 可以被 4 除尽，且满足 $x[n]=-x\left[n+\frac{N}{4}\right]$，对全部 n。证明 $a_{4k}=0$，k 为任意整数。

证明：

(1)

将序列 $x[n]$ 表示为，$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

则有，$x\left[n+\frac{N}{2}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+\frac{N}{2})}=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\pi}e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=-x[n]=-\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

故有，$a_k e^{jk\pi}=-a_k$，即 $(-1)^k a_k=-a_k$，

当 k 为偶数时，有 $a_k=-a_k$，即 $a_k=0$。

(2)

将序列 $x[n]$ 表示为，$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

则有，$x\left[n+\frac{N}{4}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+\frac{N}{4})}=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{k\pi}{2}}e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=-x[n]=-\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

故有，$a_k e^{j\frac{k\pi}{2}}=-a_k$，当 $k=4l$ 时，有 $a_{4l}e^{j2l\pi}=-a_{4l}$，即 $a_{4l}=-a_{4l}=0$。

4.4　x[n]是一个周期为 N 的实周期信号，其傅里叶级数系数为 a_k，其直角坐标表示式为 $a_k=b_k+jc_k$，其中 b_k 和 c_k 都是实数

（1）　证明 $a_{-k}=a_k^*$，进而推出 b_k 与 b_{-k}，c_k 与 c_{-k} 之间的关系。（提示利用 x*[n]=x[n]）

（2）　设 N 为偶数，证明 $c_{N/2}=0$，且 $a_{N/2}$ 是实数。

（3）　利用（1）所得到的结果，证明 x[n]也能表示为如下三角函数形式的傅里叶级数：

若 N 为奇数，则有 $x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$

若 N 为偶数，则有 $x[n]=\left(a_0+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$

（4）　证明若 a_k 的坐标为 $A_k e^{j\theta_k}$，那么 x[n]的傅里叶级数表示也能写成如下形式：

若 N 为奇数，则有 $x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right)$

若 N 为偶数，则有 $x[n]=\left(a_0+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right)$

（5）　假设 x[n]和 z[n]如图 4-30 所示，它们的三角函数形式的傅里叶级数为：

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{3}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right)$$

$$z[n]=d_0+2\sum_{k=1}^{3}\left(d_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-f_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right)$$

试画出下面信号

$$z[n]=a_0-d_0+2\sum_{k=1}^{3}\left(d_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)+(f_k-c_k)\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right)$$

解：

（1）傅立叶级数的共轭特性可得，若 $x[n]\xleftrightarrow{FS}a_k$，则 $x^*[n]\xleftrightarrow{FS}a_{-k}^*$

因为：x[n]=x*[n]

所以 $a_{-k}=a_k^*$

又因：$a_k^*=b_k-jc_k$，$a_{-k}=b_{-k}+jc_{-k}$

所以 $b_k = b_{-k}$， $c_k = -c_{-k}$

(2)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{N}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jn\pi} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} (-1)^n x[n]$$

由于 $x[n]$ 是实序列，故 $a_{N/2}$ 为实数，即 $c_{N/2} = 0$

(3)

当 N 为奇数：

$$x[n] = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{-1} (b_k + jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_{-k} + jc_{-k})e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k - jc_k)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(b_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)$$

当 N 为偶数时

$$x[n]=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{\frac{N}{2}}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{-1}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_{-k}+jc_{-k})e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k-jc_k)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=a_0+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)$$

(4)

当 N 为奇数：

$$x[n]=\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{-1}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_{-k}e^{j\theta_{-k}}e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{-j\theta_k}e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(A_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\theta_k\right)\right)$$

或者

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}(b_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-c_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}(A_k\cos\theta_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-A_k\sin\theta_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k\cos(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k)$$

当 N 为偶数时

$$x[n]=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{\frac{N}{2}} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_{-k} e^{j\theta_{-k}} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{-j\theta_k} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=a_0++a_{\frac{N}{2}}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(A_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\theta_k\right)\right)$$

或者：

$$x[n]=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-c_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(A_k\cos\theta_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-A_k\sin\theta_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}A_k\cos(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k)$$

（5） $y[n]=a_0-d_0+2\sum_{k=1}^{3}(d_k\cos\frac{2\pi kn}{7}+f_k\sin\frac{2\pi kn}{7}-c_k\sin\frac{2\pi kn}{7})$

其中，a_0 为序列 $x[n]$ 的直流分量，即 $a_0=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}x[n]=1$，

d_0 为序列 $z[n]$ 的直流分量，即 $d_0=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}z[n]=1$，

而 $d_0+2\sum_{k=1}^{3}d_k\cos\frac{2\pi kn}{7}=Even(z[n])=\frac{z[n]+z[-n]}{2}$，

以及 $2\sum_{k=1}^{3}(-c_k\sin\frac{2\pi kn}{7})=Odd(x[n])=\frac{x[n]-x[-n]}{2}$，

$2\sum_{k=1}^{3}f_k\sin\frac{2\pi kn}{7}=-Odd(z[n])=\frac{z[-n]-z[n]}{2}$

故有

$$y[n]=a_0-2d_0+Even(z[n])-Odd(z[n])+Odd(x[n])$$

$$=-1+\frac{1}{2}(z[n]+z[-n])-\frac{1}{2}(z[n]-z[-n])+\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])$$

$$=-1+z[-n]+\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])$$

（图略）

4.5 求下列信号的离散时间傅里叶变换

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$ (2) $2^n \cdot u[-n]$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$ (4) $\delta[6-2n]$

(5) $\delta[n-2]+\delta[n+2]$ (6) $u[n-1]-u[n-5]$

(7) $(a^n \cos\omega_0 n)u[n], |a|<1$ (8) $\left(a^{|n|}\sin\omega_0 n\right), |a|<1$

(9) $n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ (10) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n-4k]$

(11) x[n]如图 4-31（a）所示 (12) x[n]如图 4-31（b）所示

解：

(1) 因为 $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a|<1$，时移性质 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

所以，令 $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

$$x[n-1]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

(2) 因为 $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a|<1$，时间反转性质 $x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$

令 $x[n]=2^n \cdot u[-n] \quad \Rightarrow \quad x[-n]=2^{-n}\cdot u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$

则 $x[-n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$，所以 $x[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$

或者：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{0} 2^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-0.5e^{j\omega}}$$

(3) 因为 $a^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}, |a|<1$，时移性质 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

所以，令 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$