第七章 Laplace变换

1. 定义：

设 $f(t)$是$[0,+\infty)$上的实(或复)值函数，若对参数

$s=c+iy\in\mathbb{C}$, $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$在某一区域内收敛，

则称其为 $f(t)$的Laplace变换，记为

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$f(t)$称为$F(s)$的Laplace逆变换，记为$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

$F(s)$称为像函数，$f(t)$称为原像函数.

$$F'(s)=\int_0^{+\infty}\left(f(t)e^{-st}\right)'dt=\mathcal{L}[-tf(t)]$$

例1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ 的拉氏变换.

根据拉氏变换的定义, 有

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

这个积分在Re(s)>0时收敛, 而且有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$$

所以 $\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$

例2 求指数函数 $f(t)=e^{kt}$ 的拉氏变换(k为实数).

根据拉氏变换的定义, 有

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}\,dt$$

这个积分在Re(s)>k时收敛, 而且有

$$\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}\,dt=-\frac{1}{s-k}e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-k}$$

所以 $\mathcal{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}\quad(\mathrm{Re}(s)>k).$

其实k为复数时上式也成立, 只是收敛区间为

Re(s)>Re(k)

2.拉氏变换的存在定理 若函数$f(t)$满足:

(1) 在$t \geq 0$的任一有限区间上**分段连续**;

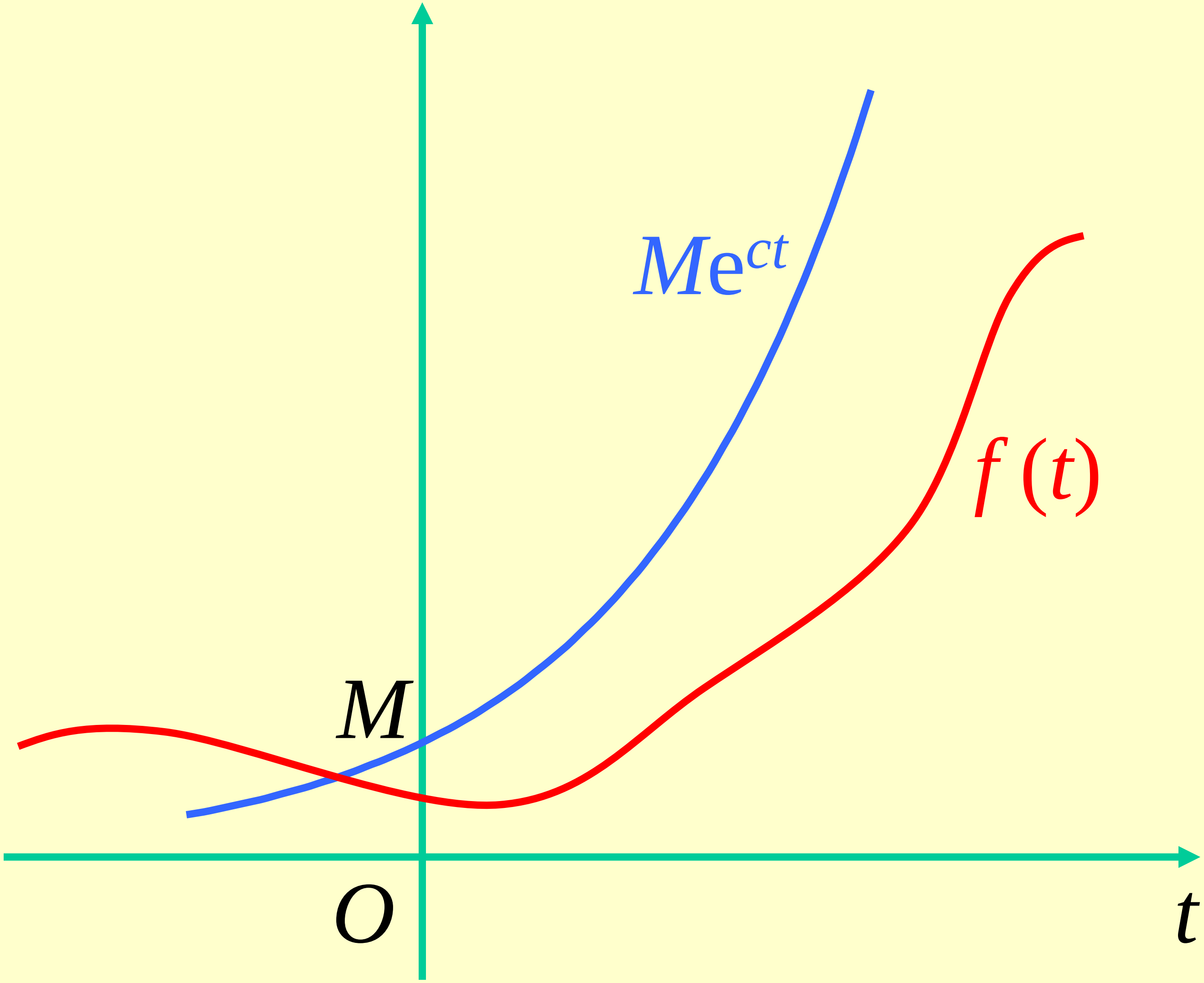
(2) 当$t \to +\infty$时, $f(t)$的增长速度不超过某一指数函数, 即存在常数 $M > 0$及$c \geq 0$, 使得

$$|f(t)| \leq M\,\mathbf{e}^{ct},\ 0 \leq t < +\infty$$

则 $f(t)$的拉氏变换

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在半平面$\mathrm{Re}(s) > c$上一定存在, 并且在$\mathrm{Re}(s) > c$的半平面内, **$F(s)$为解析函数**.



Me^{ct}
$f(t)$
M
O
t

说明：由条件2可知, 对于任何t值$(0\leq t<+\infty)$, 有

$$|f(t)\mathrm{e}^{st}|=|f(t)|\mathrm{e}^{-\beta t}\leq M\mathrm{e}^{-(\beta-c)t},\ \mathrm{Re}(s)=\beta,$$

若令$\beta-c\geq\varepsilon>0$ (即$\beta\geq c+\varepsilon=c_1>c$), 则

$$|f(t)\mathrm{e}^{-st}|\leq M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}.$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|f(t)\mathrm{e}^{-st}\right|\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}M\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t=\frac{M}{\varepsilon}.$

注1:大部分常用函数的Laplace变换都存在;

注2：存在定理的条件是充分但非必要条件.

例：求函数 $f(t)=t^a\,(a>-1)$ 的 *Laplace* 变换

当 $-1<a<0$ 时, $f(t)$ 不满足 *Laplace* 变换存在性条件

因为 $t\to 0$时, $f(t)\to\infty$. 但是其 *Laplace* 变换是存在的.

事实上, 如果 $\operatorname{Re} s=c>0$, 则

$$\int_0^{\infty}|t^a e^{-st}|\,dt=\int_0^{\infty}t^a e^{-ct}dt=\frac{1}{c^{a+1}}\int_0^{\infty}u^a e^{-u}du=\frac{\Gamma(a+1)}{c^{a+1}}.$$

$\Rightarrow$ *Laplace*变换存在! 且 $F(s)$ 关于 s 是解析的.

$$F'(s)=\int_0^{\infty}(t^a e^{-st})'\,dt=-\int_0^{\infty}t^{a+1}e^{-st}dt \text{ 存在! (当} a>-1)$$

其中 Γ 函数是工程中常用的特殊函数.

其定义为: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt.\ (\alpha>0)$ 用来拟合$(n,n!)$的光滑曲线.

另一个工程中常用的函数是 *Beta* 函数,其定义为:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{1}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\quad (\alpha,\beta>0)\qquad B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

那$F(s)$到底是多少?

当 s 为正实数时，$F(s)=\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

并且 $F(s)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}(s)>0$ 上解析，

因此由解析函数的唯一性定理可知

在右半平面内 $F(s)=\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$

当$a=n$为整数时，$F(s)=\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

§2 Laplace变换的性质与计算

本讲介绍拉氏变换的几个性质, 它们在拉氏变换的实际应用中都是很有用的. 为方便起见, 假定在这些性质中, 凡是要求拉氏变换的函数都满足拉氏变换存在定理中的条件, 并且把这些函数的增长指数都统一地取为c. 在证明性质时不再重述这些条件.

1.线性性: $\mathcal{L}[f_i(t)] = F_i(s)\ (i=1,2)$,则

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1F_1(s) + a_2F_2(s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[b_1F_1(s) + b_2F_2(s)] = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t)$$

例 求 $f(t)=\sin kt$ (k为实数) 的拉氏变换

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \int_0^{+\infty} \sin kt\, \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{ikt} - \mathrm{e}^{-ikt})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{-i}{2}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-ik)t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s+ik)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{-i}{2}\left(\frac{1}{s-ik} - \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{k}{s^2+k^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}}$$ 同理可得 $$\boxed{\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}}$$

例：求 $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+2)(s+4)}\right]$.

解：$\dfrac{s}{(s+2)(s+4)} = \dfrac{2}{s+4} - \dfrac{1}{s+2}$

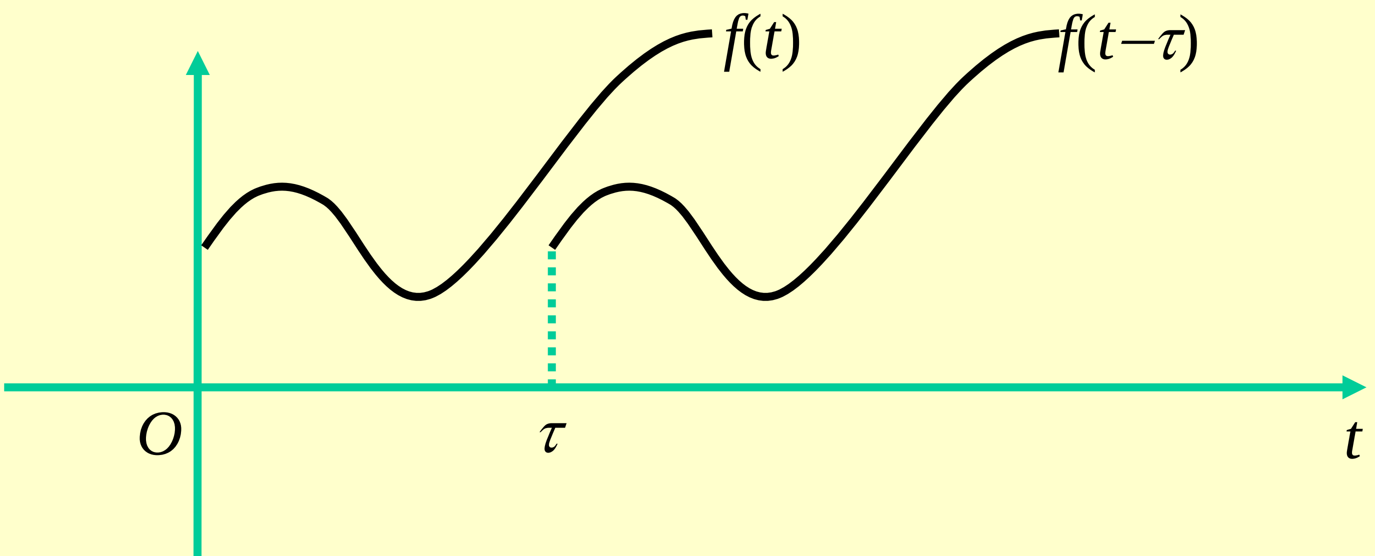
$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)(s+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s+4}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$=2\mathrm{e}^{-4t} - e^{-2t}$$

2.平移性(时移性)：$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)\ \left(t<0, f(t)=0\right)$,则

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-s\tau}F(s) \quad (\operatorname{Re} s > c)}$$

函数$f(t-\tau)$与$f(t)$相比，$f(t)$从$t=0$开始有非零数值. 而$f(t-\tau)$是从$t=\tau$开始才有非零数值. 即延迟了一个时间τ. 从它的图象讲，$f(t-\tau)$是由$f(t)$沿t轴向右平移τ而得，其拉普拉斯变换也多一个因子$e^{-s\tau}$.



证明：

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$$

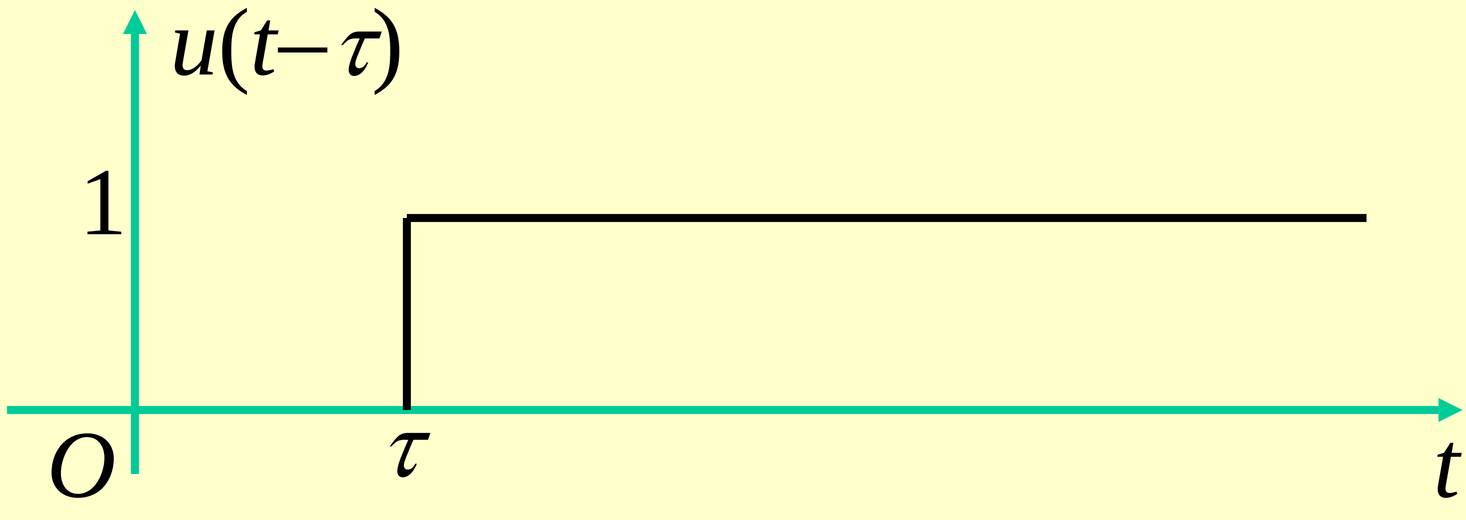
$$\underset{t=u+\tau}{=} \int_{-\tau}^{\infty} f(u)e^{-s(u+\tau)}du = e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{\infty} f(u)e^{-su}du$$

$$= e^{-s\tau}\int_0^{\infty} f(u)e^{-su}du = e^{-s\tau}L[f(t)]$$

例 求函数 $u(t-\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau \\ 1 & t>\tau\end{cases}$ 的拉氏变换.

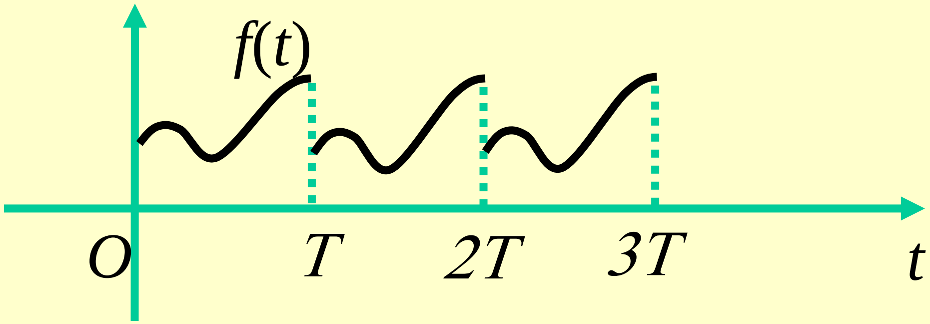
已知 $\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$,根据延迟性质

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)]=\frac{1}{s}e^{-s\tau}$$



例：　求周期函数 $f(t) = f(t+T)$的 *Laplace* 变换

解：设 $f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$



$$F_1(s) = \int_0^T f_1(t) e^{-st} dt$$

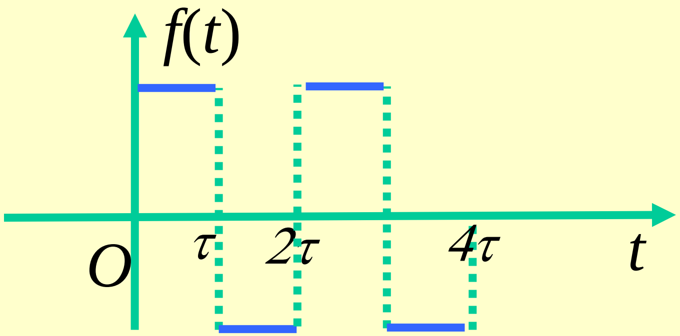
则 $f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty [f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots] e^{-st} dt$$

$$= F_1(s) + F_1(s) e^{-sT} + F_1(s) e^{-2sT} + \cdots$$

$$= F_1(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots) = F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

例：求如下矩形波的 *Laplace* 变换



解：假设 $f_1(t)=\begin{cases} A & 0<t<\tau \\ -A & \tau<t<2\tau \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 则 $f(t)=f_1(t)+f_1(t-2\tau)+\cdots$

$$F_1(s)=\int_0^{\tau} Ae^{-st}dt+\int_{\tau}^{2\tau} -Ae^{-st}dt=\frac{A}{s}(1-e^{-s\tau})^2$$

$$F(s)=F_1(s)+e^{-2\tau s}F_1(s)+\cdots=\frac{A}{s}\frac{(1-e^{-s\tau})^2}{1-e^{-2\tau s}}$$

2.平移性(频移性): $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)(\operatorname{Re} s > c)$,则

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha) \quad (\operatorname{Re}(s-\alpha) > c) \\ &\mathcal{L}^{-1}[F(s-\alpha)] = e^{\alpha t} f(t) \end{aligned}}$$

例9 求 $f(t) = e^{\alpha t} \sin kt$ 的拉氏变换.

已知 $\mathcal{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$,由位移性质得

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin kt] = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$$

3.微分性质: $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\left(\operatorname{Re}s>c\right)$,则

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)\quad\left(\operatorname{Re}s>c\right)$$

证明: $L[f'(t)]=\int_0^{\infty}f'(t)e^{-st}dt=f(t)e^{-st}\big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-sf(t)e^{-st}dt$

$$=sF(s)-f(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$\left(n=1,2,\cdots\right)\quad\left(\operatorname{Re}s>c\right)$$

特别当 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时，有

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)}$$

此性质可以使我们有可能将$f(t)$的**微分方程**转化为$F(s)$的**代数方程**.

例4 求 $f(t)=t^m$ 的拉氏变换（m为正整数）。

由于 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$, 而 $f^{(m)}(t)=m!$

一方面 $\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right]=\mathcal{L}[m!]=m!\mathcal{L}\left[u(t)\right]=m!\frac{1}{s}$;

另一方面 $\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right]=s^m\mathcal{L}\left[t^m\right]$;

$\Rightarrow s^m\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{1}{s}m! \Rightarrow \mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{1}{s^{m+1}}m! \quad (\mathrm{Re}\,s>0).$

象函数的微分性质:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]=-tf(t)\quad\left(\operatorname{Re}s<c\right)\\ \left(\mathcal{L}\left[tf(t)\right]=-F'(s)\Rightarrow f(t)=\frac{\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]}{-t}\right)\end{gathered}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right]=(-t)^n f(t)$$

$$\left(\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s)\right)$$

例5 求 $f(t)=t^2\cos kt$ (k为实数) 的拉氏变换.

$$\mathcal{L}\left[t^2\cos kt\right]=(-1)^2\left(\mathcal{L}\left[\cos kt\right]\right)''(s)=\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)''=\frac{2s^3-6k^2s}{(s^2+k^2)^3}$$

4. 积分性质: $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\quad(\operatorname{Re}s>c)$,则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(s)}{s}\quad\left(\operatorname{Re}s>\max(0,c)\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t}_{n次}\right\}=\frac{1}{s^n}F(s)$$

例6 求 $f(t)=\int_0^t \cos t\,dt$ 的拉氏变换.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos t\,dt\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[\cos t]=\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}$$

象函数积分性质: $\mathcal{L}[f(t)]=F(\mu)$ 则

$$\int_s^{\infty} F(\mu)\,\mathrm{d}\mu=\int_s^{\infty}\{\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t\}\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_0^{\infty} f(t)\{\int_s^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}\mu\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{-1}{t}\mathrm{e}^{-\mu t}\Big|_s^{\infty}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]\qquad \boxed{\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s.}$$

一般地,有 $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}}_{n\text{次}}F(s)\,\mathrm{d}s$

例7 求函数 $f(t)=\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ 的拉氏变换.

因 $\mathcal{L}[\operatorname{sh} t]=\dfrac{1}{s^2-1}$,

由积分性质: $\mathcal{L}\left[\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}\right]=\displaystyle\int_s^{\infty}\dfrac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u$

$$=\int_s^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\bigg|_s^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

5. 极限性质:

(1) 初值关系 $f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

证明：由微分性质可得 $L[f'(t)]=sF(s)-f(0^+),\ \forall \mathrm{Re}(s)>0$成立

两边同时取 $s\to\infty$可得：

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0^+)+\lim_{s\to\infty} L[f'(t)]=f(0^+)+\int_0^\infty f(t)\lim_{s\to\infty} e^{-st}dt=f(0^+)$$

(2) 终值关系 $f(+\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

条件：$f(+\infty)$ 存在，并且 $sF(s)$的所有奇点在$\mathrm{Re}(s)<c$的半平面内

证明：由微分性质可得 $L[f'(t)]=sF(s)-f(0^+),\ \forall \mathrm{Re}(s)>0$成立

两边同时取 $s\to 0$可得：

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=f(0^+)+\lim_{s\to 0} L[f'(t)]=f(0^+)+\int_0^\infty f'(t)\lim_{s\to 0} e^{-st}dt$$

$$=f(0^+)+f(t)\big|_0^\infty=f(\infty)$$

例：如果 $L[f(t)] = \dfrac{1}{s+a}(a>0)$, 求$f(0)$, $f(\infty)$

解：$f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s}{s+a} = 1$

$f(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{s}{s+a} = 0$

事实上，$F(s) = \dfrac{1}{s+a}$，根据频移性，$f(t) = e^{-at}(a>0)$

有时候我们只关心 $f(t)$ 的渐进性态

例如我们知道了 $f(t)$ 的微分方程, 根据微分性质, 可以直接得到 $F(s)$ 的代数方程,就可以求出 $f(t)$ 的渐进性质

条件：$f(+\infty)$ 存在，并且 $sF(s)$的所有奇点在$\mathrm{Re}(s)<c$的半平面内

反例：$F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos(t)$$

很显然 $f(\infty)$不存在，但是$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)=0$

6. 卷积性质:

定义(卷积)：　如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ 存在，

则称它为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积

符号记为 $f_1(t) * f_2(t)$

卷积满足交换律、结合律、分配律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

如果 $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0, \ \forall t < 0$

$$则\ f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{0} \ + \int_{0}^{\tau} \ + \int_{\tau}^{+\infty} \ \right) f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{0}^{\tau} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

例：$f_1(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \ f_2(t) = \begin{cases} \sin t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, 求 $f_1(t) * f_2(t)$

解：$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau d(\cos(t-\tau))$

$$= \tau \cos(t-\tau) |_0^t - \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau = t - \sin t$$

例: $t * \mathrm{e}^{at} = \int_0^t \tau \mathrm{e}^{a(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{at} \int_0^t \tau \mathrm{e}^{-a\tau} \mathrm{d}\tau$

$$= -\frac{1}{a} \mathrm{e}^{at} \int_0^t \tau \, \mathrm{d}\mathrm{e}^{-a\tau} = \frac{-\mathrm{e}^{at}}{a} \left[\tau \mathrm{e}^{-a\tau} \Big|_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau} \mathrm{d}\tau \right]$$

$$= \frac{-\mathrm{e}^{at}}{a} \left[t \mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{a} \mathrm{e}^{-a\tau} \Big|_0^t \right]$$

$$= \frac{-\mathrm{e}^{at}}{a} \left[t \mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{a} (\mathrm{e}^{-at} - 1) \right]$$

$$= -\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2} (\mathrm{e}^{at} - 1)$$

例：$f_1(t)=\begin{cases}\sin\omega t & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$，$f_2(t)=f_1(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$

解：$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \sin\omega\tau\sin\omega(t-\tau)d\tau$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(2\omega\tau-\omega t)-\cos(\omega t)]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}-t\cos\omega t\right]$$

卷积性质

如果 $L[f_1(t)]=F_1(s),\ L[f_2(t)]=F_2(s)$

则 $L[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_1(s)$

$L^{-1}[F_1(s)F_1(s)]=f_1(t)*f_2(t)$

证明: 假设$\mathrm{Re}(s) > \min\{c_1, c_2\}$

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^{\infty} f_1(v)e^{-sv}dv \int_0^{\infty} f_2(u)e^{-su}du$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_1(v)e^{-sv} f_2(u)e^{-su}dudv$$

$$\underset{u+v=t}{=} \int_0^{\infty}[\int_0^{\infty} f_1(v) f_2(t-v)dv]e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty}(f_1 * f_2)e^{-st}dt = L[f_1 * f_2]$$

例：如果 $L[f(t)]=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$，求$f(t)$

解：$\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}=\dfrac{1}{9}\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

$$L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=e^{-2t}\sin 3t$$

所以 $f(t)=\dfrac{1}{9}e^{-2t}\sin 3t * e^{-2t}\sin 3t$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t e^{-2\tau}\sin(3\tau)e^{-2(t-\tau)}\sin(3(t-\tau))d\tau$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t \frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t)-\cos 3t]d\tau$$

$$=\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t)$$

§3 Laplace逆变换

前面主要讨论了由已知函数$f(t)$求它的象数$F(s)$, 但在实际应用中常会碰到与此相反的问题,即已知象函数$F(s)$求它的象原函数 $f(t)$. 本节就来解决这个问题.

《拉普拉斯变换原理及题解》

1. 部分分式法 P(s)/Q(s)

2. 级数法

3. 微分方程式法

4. 运用性质法

5. 查表法

6. 利用反变换公式

反变换公式法

由拉氏变换的概念可知, 函数 $f(t)$的拉氏变换, 实际上就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的傅氏变换.

$$\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt \underline{\underline{s=\beta+j\omega}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \underline{\underline{\Delta}} F(s)$$

因此, 按傅氏积分公式, 在$f(t)$的连续点就有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)\mathrm{e}^{-\beta\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega, t>0$$

等式两边同乘以$\mathrm{e}^{\beta t}$, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega, t>0$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{j}\omega)}\mathrm{d}\omega, t>0$$

令$\beta+\mathrm{j}\omega=s, d\omega=\frac{1}{j}\mathrm{d}s$，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ t>0.$$

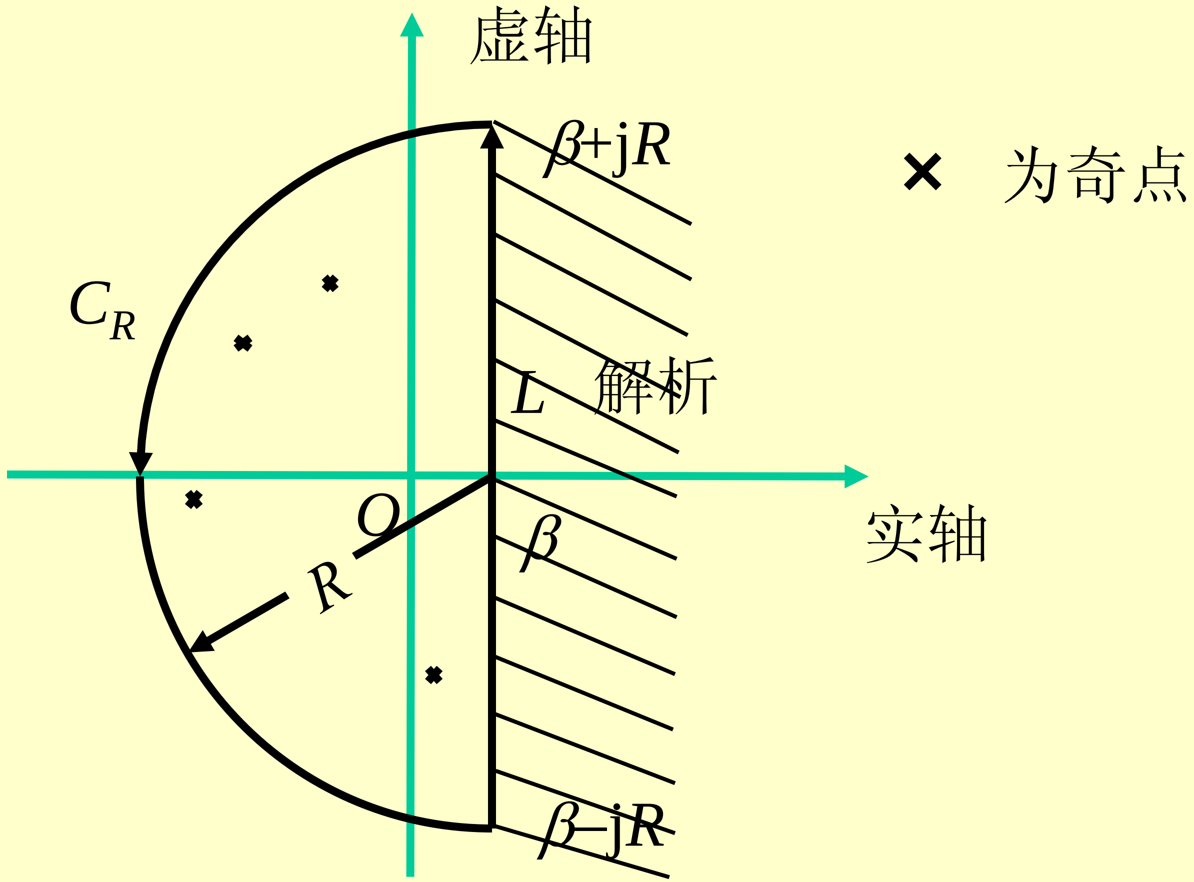
右端的积分称为拉氏反演积分.

积分路线中的实部 β 有一些**随意**, 但必须满足的**条件**就是$\mathrm{e}^{-\beta t}f(t)u(t)$的0到正无穷的积分必须**收敛**.

计算复变函数的积分通常比较困难, 但是可以用留数方法计算.

定理：若$F(s)$在全平面只有有限个奇点$s_1,\cdots,s_n$（均在$\operatorname{Re}s=\beta$左侧），且$\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$，则$t>0$时

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},s_k\right].$$



例1 求$F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换.

$s=0$为一阶极点, $s=1$为二阶极点,

$$f(t)=\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},0\right]+\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},1\right]$$

$$=\left.\frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}\right|_{s=0}+\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\left(\frac{t}{s}\mathrm{e}^{st}-\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{st}\right)$$

$$=1+(t\,\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t})=1+\mathrm{e}^{t}(t-1)\qquad(t>0).$$

例2 求$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$的逆变换.

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

所以 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)}\right]$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=t-1+\mathrm{e}^{-t}\qquad(t>0).$$

例2 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$，求$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$

解法1: $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=t-\sin t$

解法2: $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=t*\sin t$

$$=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau\, d\cos(t-\tau)$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\int_0^t \cos(t-s)ds$$

$$=t+\sin(t-s)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=t-\sin t$$

例3 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+5)^2}$，求$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

$$F(s)=\frac{1}{[(s+1)^2+2^2]^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]=e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t*\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t=\frac{1}{4}\int_0^t(e^{-\tau}\sin 2\tau)(e^{-(t-\tau)}\sin 2(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{8}e^{-t}\int_0^t(\cos(4\tau-2t)-\cos 2t)d\tau=\frac{1}{16}e^{-t}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right).$$

δ函数的简介及其Laplace变换

δ函数是工程上经常使用的一种函数，它的表达式是什么？

首先从经典函数出发：

$$\sigma_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & 0<t<\tau \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_\tau(t)dt=1$. 当$\tau\to 0$时，$\sigma_\tau(t)$如何变化？

$$\lim_{\tau\to 0}\sigma_\tau(t)=\begin{cases}\infty & t=0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\sigma_\tau(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)=1.$$

在数学上如何定义δ函数?

用线性泛函定义:

从函数空间到实数的一个映射称为泛函。

举个栗子:

$$L:\ \varphi(x) \to \varphi(0)$$

满足线性性 $L:\ a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) \to a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0)$

根据*Riesz*表示定理,任意一个线性泛函都可以由内积表示

存在某个函数δ,使得如上的线性泛函可以表示为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) = \varphi(0).$$

δ函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)=?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t+x_0)dt=\varphi(x_0)$$

$$\delta(t)*f(t)=\int_0^t\delta(\tau)f(t-\tau)dt=f(t)$$

在卷积运算中，δ函数是单位元

δ函数的导数是什么？还是一个线性泛函，即是一个线性映射

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)\varphi(x)=\varphi'(0)\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)\varphi(x)=\varphi^{(n)}(0)$$

δ函数的Laplace变换

$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s\times 0} = 1$$

$$L[\delta(t-t_0)] = \int_0^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-s\times t_0} = e^{-st_0}$$

$$L[\delta'(t)] = \int_0^{+\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-st} dt = s^n$$

求周期函数$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$ 的Laplace变换

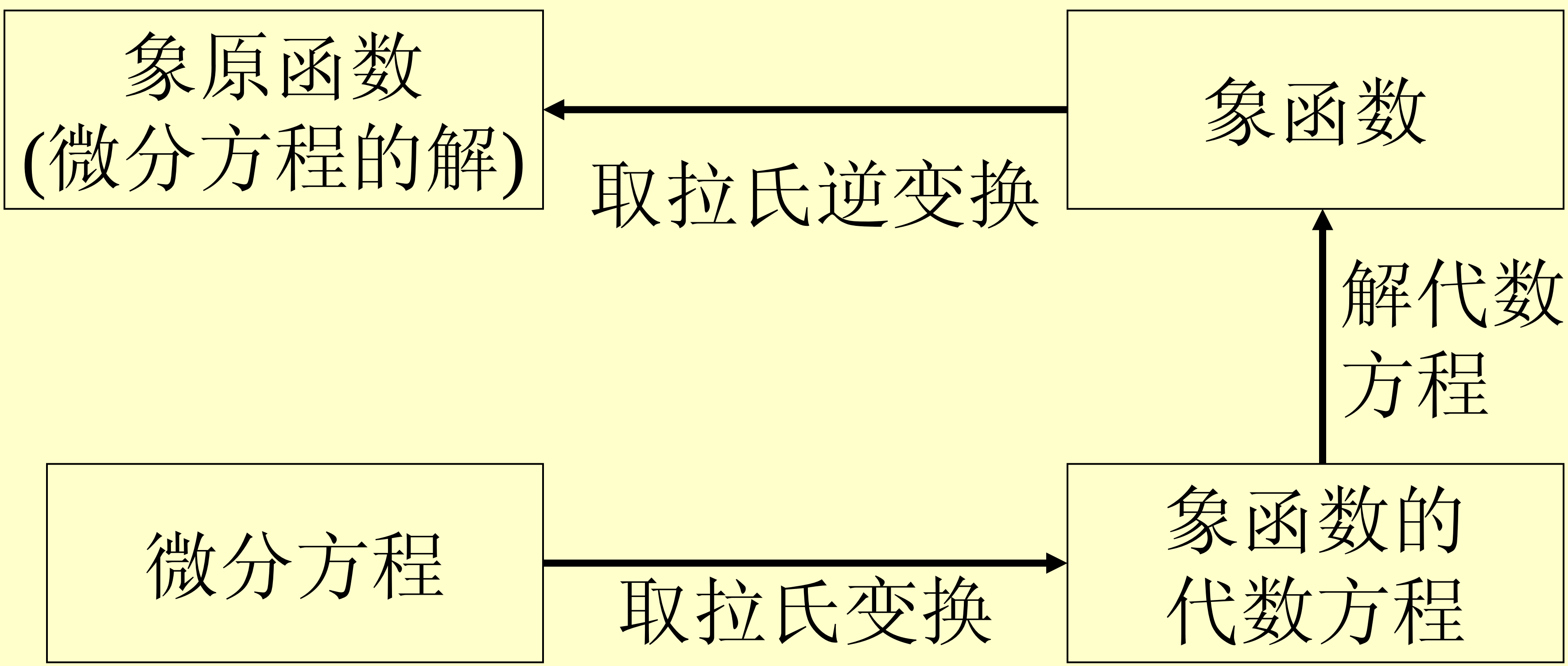
$$L[f(t)] = F(s) \times \frac{1}{1-e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-sT}}.$$

§5 Laplace变换的应用

对一个系统进行分析和研究, 首先要知道该系统的数学模型, 也就是要建立该系统特性的数学表达式. 所谓线性系统, 在许多场合, 它的数学模型可以用一个线性微分方程来描述, 或者说是满足叠加原理的一类系统. 这一类系统无论是在电路理论还是在自动控制理论的研究中, 都占有很重要的地位. 本节将应用拉氏变换来解线性微分方程.

微分方程的拉氏变换解法

首先取拉氏变换将微分方程化为象函数的代数方程, 解代数方程求出象函数, 再取逆变换得最后的解. 如下图所示.



例1 求解 $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2e^{t}\cos t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$。

令$X(s)=\mathcal{L}\left[x(t)\right]$,方程两边取Laplace变换，

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-2\left(sX(s)-x(0)\right)+2X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

$$s^2X(s)-2sX(s)+2X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}\Rightarrow X(s)=\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}\right]=e^{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{\left[s^2+1\right]^2}\right]$$

$$=-e^{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right]=te^{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=te^{t}\sin t$$

例2 求解 $\begin{cases} x'(t)+2x(t)+2y(t)=10e^{2t} \\ -2x(t)+y'(t)+3y(t)=13e^{2t} \\ x(0)=1, y(0)=3 \end{cases}$

令 $X(s)=\mathcal{L}\left[x(t)\right], Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$,

$$\begin{cases} sX(s)-1+2X(s)+2Y(s)=\dfrac{10}{s-2} \\ -2X(s)+sY(s)-3+3Y(s)=\dfrac{13}{s-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ Y(s)=\dfrac{3}{s-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=e^{2t} \\ y(t)=3e^{2t} \end{cases}$$

求解：$y(t)+\int_0^t y(t-u)e^u du = 2t-3.$

这是一个第二类*Volterra*型的积分方程，存在唯一解。

解：令$Y(s)=L[y(t)]$，两边同时求Laplace变换可得

$$Y(s)+Y(s)\times\frac{1}{s-1}=\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$$

$$Y(s)=\frac{s-1}{s}\left(\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}\right)=-\frac{2}{s^3}+\frac{5}{s^2}-\frac{3}{s}$$

$$y(t)=-t^2+5t-3$$