第七讲

Monday, April 16, 2018 1:44 PM

线性微分方程组

§1. 一般理论

$\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \cdots, y_n) \quad 1 \le i \le n$$

定义：如果 $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n(x))$ 代入方程组，等式恒成立。

（任何一偏阶方程，都可以转化为一阶方程组）

$(n \ge 1)$

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)})$$

令：$y = y_0$

$y' = y_1 = \frac{dy_0}{dt}$

$\vdots$

$y^{(n-1)} = y_{n-1} = \frac{dy_{n-2}}{dt}$

$y^{(n)} = \frac{dy_{n-1}}{dt}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

如何求解一阶方程组?(什么时候只有唯一解)(通解结构)

充分条件(存在解): (回忆: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, 要求 f 对 y 是 Lipschitz 连续)

现在对于方程组: $\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{y})$ 要求 f_i 对 $\vec{y}$ 都是 Lipschitz 连续

即: $\|f_i(t,\vec{y}_1)-f_i(t,\vec{y}_2)\| \le L\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|$

f 的形式更简单(线性函数): 线性方程组

标准形式: $\frac{dy_i}{dt}=\underline{\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j(t)+f_i(t)}}$

例: $\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2(x)\frac{d^{(n-2)}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_n(x)y=f(x)$

(转化为一阶线性方程组)

令 $y\triangleq y_1$

$\frac{dy}{dt}=\frac{dy_1}{dt}\triangleq y_2$

$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{dy_2}{dt}=y_3$

$\vdots$

$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}=\frac{dy_{n-1}}{dt}=y_n$

$\frac{d^n y}{dt^n}=\frac{d(y_n)}{dt}=-p_n y_1-p_{n-1}y_2-\cdots-p_1 y_n+f(t)$

令 $\vec{y}=\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$, $\frac{d\vec{y}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dy_n}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_2\\ \vdots\\ y_n\\ \underline{-p_n y_1-p_{n-1}y_2\cdots-p_1 y_n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ \underline{f(t)}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} \triangleq A\vec{y}$

$f(t)$ 列 $\triangleq \vec{F}(t)$

$d\vec{y}$

$A\vec{y}$

$$\Rightarrow: \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{F}$$

1°: $\vec{F} \equiv 0$，齐次方程.

2°: $\|(A\vec{y}_1+\vec{F}) - (A\vec{y}_2+\vec{F})\| \le \|A\|\,\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$

$\le L\,\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$ （满足L-条件）解存在

3°: 给定: $y(t_0), y'(t_0), \cdots, y^{(n-1)}(t_0)$ 解唯一

$\vec{y}(t_0) = [y_1(t_0)\quad y_2(t_0), \cdots, y_n(t_0)]$

Thm: 齐次线性方程组的解的线性组合仍然是方程的解.

如果 $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m$ 满足: $\frac{d\vec{y}_i}{dt} = A\vec{y}_i$

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{y}_i\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{d\vec{y}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{m} c_i (A\vec{y}_i) \overset{(\checkmark)}{=} A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{y}_i\right)$$

下面引入向量函数的线性无关性.

定义: $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m$，若存在 $(a_1, \cdots, a_m) \ne \vec{0}$.

满足: $\sum_{i=1}^{m} a_i \vec{y}_i \equiv 0$ 则称 $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m$ 线性相关.

反则称 - - - 线性无关

如何判断n个函数 向量 线性无关.（Wronsky行列式）

$y_1, \cdots, y_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

$\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n$

$\|$

$\begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \det \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \ne 0$

$$\begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad \det \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Thm: $\boxed{\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}}$ 的解 $(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ 线性相关 $\iff W(t) = 0$

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{i1}' & \cdots & y_{in}' \\ y_{i+1,1} & \cdots & y_{i+1,n} \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

通解结构：（一阶线性齐次方程组：$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$）

Thm：设 $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n$ 是齐次方程 n 个线性无关解，

则通解表达式为：$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{y}_i(t)$.

即：1°：$\vec{y}(t)$ 是解.

2°：所有的解都可以由 $\vec{y}(t)$ 表示.

$Y = \begin{bmatrix} \vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n \end{bmatrix}$ 称为齐次线性方程的基解矩阵.

性质：$\frac{dY}{dt} = \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}, \cdots, \frac{d\vec{y}_n}{dt}\right] = [A\vec{y}_1, \cdots, A\vec{y}_n]$
$= A[\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n]$
$= AY$

非齐次方程的通解. $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{y}_i + \vec{y}^*(t)$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$= Y\vec{c}$

特解

(?)

(常数变易法)

予以令 $\vec{y}^* = Y(t)\times \vec{C}(t)$ 代入原来的非齐次方程：

$$\left(\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{F} \right)$$

$$(\vec{y}^*)' \Rightarrow (Y(t)\times\vec{C}(t))'$$

$$\Downarrow$$

$$(A\vec{y}^* + \vec{F})$$

$$\Downarrow$$

$$(A\cancel{Yc} + \vec{F})$$

$$\Rightarrow Y'(t)\,c(t) + Y(t)\,c'(t)$$

$$\Rightarrow \cancel{AYc(t)} + Y(t)\,c'(t)$$

$$\Rightarrow: \vec{F}(t) = Y(t)\,c'(t)$$

$$\Rightarrow: c'(t) = Y(t)^{-1}\,\vec{F}(t)$$

$$\Rightarrow: c(t) = \int_0^t Y^{-1}(s)\vec{F}(s)ds$$

$$\therefore\ y^*(t) = Y(t)\,c(t) = Y(t)\int_0^t Y^{-1}(s)\vec{F}(s)ds.$$

例：已知 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

的基解矩阵为：$\begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

求通解.

解：令 $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}$,

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \vec{y}(t) = Y(t)\left(\vec{C} + \underbrace{\int_0^t Y^{-1}(s)\vec{F}(s)ds}\right)$$

$$= Y(t)\vec{C} + Y(t)\underbrace{\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s}\cos s & e^{-s}\sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} ds}$$

$$= \int^t \begin{bmatrix} e^{-s} \end{bmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

什么样的 $A(t)$ 解求出基解矩阵 $Y(t)$？

如果A是常数矩阵. 则可以求出基解矩阵.

高阶常系数方程:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n y(t) = 0. \longrightarrow \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots$

转化为一阶方程组.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -p_n & -p_{n-1} & & \cdots & & -p_1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ p_n & p_{n-1} & \cdots & & \lambda + p_1 \end{bmatrix} = \boxed{\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n}$$

P155. 6, 7.