机器视觉与图像处理

第6讲

汪凯巍

2019-04-1

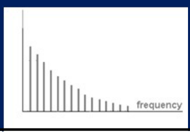
回顾

第1讲 绪论
机器视觉的定义、系统组成、价值与作用
第2讲 图像的获取
图像传感器、镜头、光照，“好的图像成功一半”
第3讲 图像的基础变换
点处理及灰度直方图、代数变换、几何变换
第4讲 图像的空间域增强
图像的平滑、图像中值滤波、图像锐化
第5讲 图像的频率域增强
图像空域到频域的转换，变换结果的理解，频域滤波（低通 高通 带通 带阻）

频率谱（Frequency Spectra）

- 为了有效地对图像进行处理，将原定义在图像空间的图像以某种形式转换到另外一些空间。基和向量空间的转换。
- 利用在这些空间的特有性质方便地进行一定的加工。
- 最后再转换回图像空间以得到所需的效果。
- 这些转换方法就是图像变换技术。

$$A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2\pi kt)$$



有没有其他形式的变换？

余弦变换

离散余弦变换(DCT, discrete cosine transform)

应用：主要用于图像压缩编码（JPEG）、数字水印、音频编码。

1. 一维离散余弦变换及其反变换定义：

$$G(u)=\alpha(u)\sum_{x=0}^{N-1}g(x)\cos\left[\frac{(2x+1)\pi u}{2N}\right],u=0,1,\cdots,N-1$$

$$g(x)=\sum_{u=0}^{N-1}\alpha(u)\cos\left[\frac{(2x+1)\pi u}{2N}\right],u=0,1,\cdots,N-1$$

$$\text{其中}\alpha(u)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{N}} & u=0\\ \sqrt{\frac{2}{N}} & 1\le u\le N-1\end{cases}$$

2.二维离散余弦及其反变换定义：

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\left[\alpha(u)\cos\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\left[\alpha(v)\cos\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

$u,v=0,1,\cdots,N-1$

$$g(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}G(u,v)\left[\alpha(u)\cos\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\left[\alpha(v)\cos\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

$x,y=0,1,\cdots,N-1$

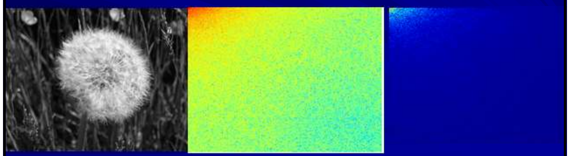
$$\text{其中}\alpha_u(v)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{N}} & u=0\\ \sqrt{\frac{2}{N}} & 1\le u\le N-1\end{cases}$$

□快速离散余弦变换：

1）先将f(x,y)进行快速傅里叶变换，再取其实部。

2）代数分解法

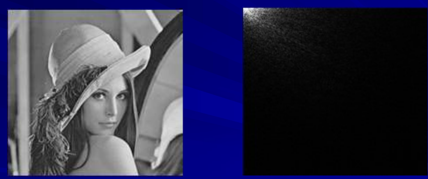
二维图像及其离散余弦变换频谱的显示



a) 原始图像　b)离散傅立叶变换　c) 离散余弦变换

□快速离散余弦变换：

二维图像及其离散余弦变换频谱的显示

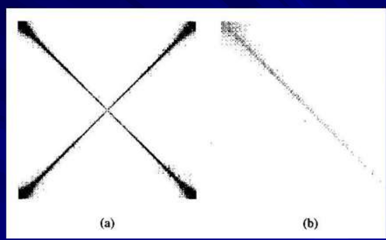


a) 原始图像　b) 离散余弦变换后的频谱

□快速离散余弦变换：

二维图像及其离散余弦变换频谱的显示

a) 原始图像　b) 离散余弦变换　c)频率成分分布示意图



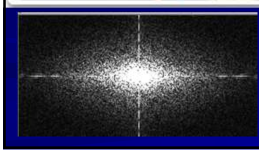
DFT和DCT的频谱分布

（a）DFT频谱分布；（b） DCT频谱分布

细节较少图片的傅立叶变换和离散余弦变换

细节中等图片的傅立叶变换和离散余弦变换

细节较多图片的傅立叶变换和离散余弦变换



与DFT不同的是，DCT是实值的，它广泛应用于数字信号处理，特别是语音和图像的数据压缩。

实例：离散余弦变换在图像压缩中的应用

a) 未经压缩的原始图像

b) 采用JPEG方式压缩存储的图像（10-40倍压缩率）

实例：离散余弦变换在图像加密中的应用

原图及水印信息

嵌入水印的图及恢复的水印信息

（1）计算图像和水印的离散余弦变换(DCT)。

（2）将水印叠加到DCT域中幅值最大的前 k 系数上(不包括直流分量)，通常为图像的低频分量。

（3）解码

沃尔什—哈达玛变换（Walsh-Hadamard）

二维哈达玛变换

$$H(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}[b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v)]}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}H(u,v)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}[b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v)]}$$

二维哈达玛正变换和反变换具有相同的形式。

哈达玛变换具有简单的递推关系：

- 最低阶的哈达玛矩阵核为：$H_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

- n阶哈达玛矩阵与n-1阶哈达玛矩阵的递推关系为：

$$H_n=\begin{bmatrix}H_{n-1} & H_{n-1}\\ H_{n-1} & -H_{n-1}\end{bmatrix}$$

例如：n=2时的哈达玛矩阵核为：

$$H_2=\begin{bmatrix}H_1 & H_1\\ H_1 & -H_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

（4）哈达玛递推矩阵

哈达玛变换可用矩阵表示为：

$F = H_n f H_n$

H_n变换矩阵的大小为 $N \times N$，$N = 2^n$，其递推式为：

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}，\text{其最小阶 } H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

例：$n = 3$时，$H_3 = ?$

最小阶哈达玛矩阵为$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

由$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}$知：

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix}，\text{而 } H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{bmatrix},$$

$$\text{即 } H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore H_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

可见，*Walsh – Hadamard*变换特点只要做加减法，不必做乘法，计算简便

例：求下列图像矩阵的二维哈达玛(DHT)变换。

$$f = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解： 计算图像的哈达玛变换 ： $F = H_n f \, H_n$

16	0	8	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

二维沃尔什变换具有某种能量集中的特性，而且原始数字中数字越均匀分布，变换后的数据越集中于矩阵的边角上。因此，应用二维沃尔什变换可以压缩图像信息。

例：求下列图像矩阵的二维哈达玛(DHT)变换。

f =

3	3	2	2
3	3	2	2
3	2	1	1
3	2	1	1

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解： 计算图像的哈达玛变换 ： $F = H_n f \, H_n$

17	1	5	1
0	0	0	0
3	-1	-1	-1
0	0	0	0

二维沃尔什变换具有某种能量集中的特性，而且原始数字中数字越均匀分布，变换后的数据越集中于矩阵的边角上。因此，应用二维沃尔什变换可以压缩图像信息。

小波变换

小波变换

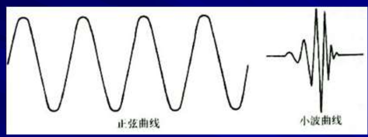
小波定义：

- 又称“凌波”，“小”是指在时域具有紧支集或近似紧支集，“波”是指具有正负交替的波动性，直流分量为0。
- 小波概念：是定义在有限间隔而且其平均值为零的一种函数。

小波变换同时具有时域性和频域性。

傅里叶变换不能同时进行时间——频率局部分析。小波变换使上述问题迎刃而解。小波分析是通过一个小波基函数的伸缩和平移来产生一组基函数来实现的。

波与小波的差异：



持续宽度相同　　　振荡波

尺度因子a 与平移参数b

给定基本小波函数 φ，信号 $f(x)$ 的连续小波变换为：

$$W_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_R f(t)\varphi(\frac{x-b}{a})dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_{a,b}(x)dx$$

其中：$a>0, b\in R$，a 为尺度因子，b 为平移参数

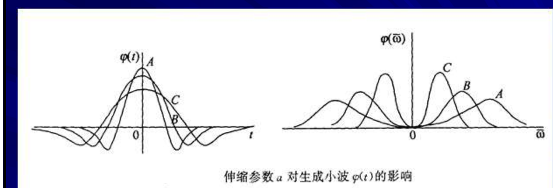
$$\varphi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\varphi(\frac{x-b}{a})$$ 称为小波。

如果 $\varphi_{a,b}(x)$ 是复变函数时，采用共轭函数 $\overline{\varphi_{a,b}(x)}$

当 $a>1$，则函数 $\varphi(x)$ 具有伸展作用；

当 $a<1$，函数具有收缩作用。

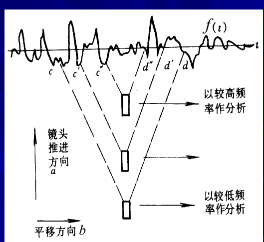
伸缩参数 a 和平移参数 b 对生成小波 $\varphi(t)$ 的影响：



随着参数 a 的减小，$\varphi_{a,b}(t)$ 的支撑区随之变窄，而 $\varphi_{a,b}(\omega)$ 的频率随之向高频端展宽。反之亦然。因此，当信号频率增高时，视窗宽度变窄，而频窗宽度增大，有利于提高时域分辨率。反之亦然。

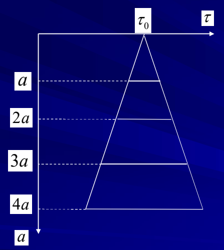
小波变换的时频分析

- 用镜头观察目标 $f(t)$（待分析信号）。
- $\psi(t)$ 小波代表镜头所起的作用（如滤波或卷积）。
- b 相当于使镜头相对于目标平行移动。
- a 的作用相当于镜头向目标推进或远离。

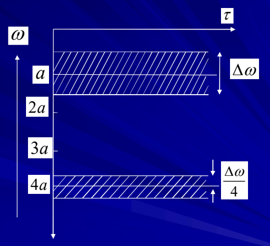


小波变换的粗略解释

小波变换的多分辨分析特性：



不同a值下小波分析区间的变化



不同a值下分析小波频率范围的变化

几种典型的一维小波

（1） Haar小波

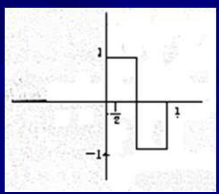
正交函数，A.Haar于1910年提出

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(t)\psi_H(t-n)dt = 0 \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(t)\psi_H(t-n)dt = 0 \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots$$

波形

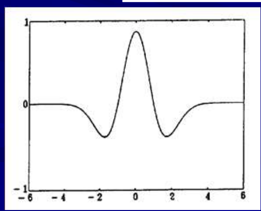


Haar 小波

（2） Mexico Hat小波，也叫Marr小波

Mexico Hat小波是Gauss函数的二阶导数，即：

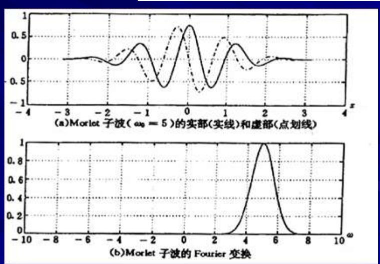
$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}(1-t^2)} e^{\frac{-t^2}{2}}$$



Marr小波在视觉信息加工研究和边缘监测方面应用较多。

（3） **Morlet**小波

最常用的复值小波 $\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}}\left[e^{-j\omega_0 t} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2}}\right] e^{-\frac{t^2}{2}}$



Morlet小波及其**Fourier**变换

离散小波对图像作用的实质：

离散小波的实现最终是通过与小波相应的高（低）通滤波器来完成的。

通过对图像的高低通滤波可以将图像分解为对应不同尺度的近似分量（低频分量）和细节分量（高频分量）。

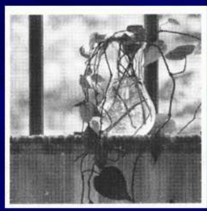
一般分为以下四个分量：近似分量、水平分量、垂直分量和细节分量。

小波变换在图像压缩中的应用

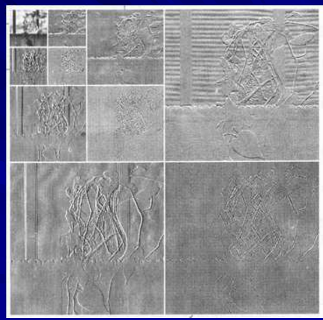
a) 原始灰度图像　b) 一级小波分解后的图像　c) 二级小波分解后的图像

近似分量、水平分量、垂直分量和细节分量。

用哈尔基函数的离散小波变换：



(a) 原图像



(b) 变换后图像