偏微分方程复习指南

一、 基本概念、预备知识

基本概念：

齐次方程：$Lu=0$、非齐次方程：$Lu=f$ （不知道 L 是什么，看 P15）

边界条件：空间(一般是关于 x,y,z 的)；分为齐次非齐次。
初始条件：时间(一般是关于 t)。
要注意，我们解方程解的是u，而不是 x,y,z,t,它们只是变量。
叠加原理：要以 L 的观点看（例如 P21 页应用叠加原理分解你明白吗？）

预备知识：

求二阶偏导(微 2)
二阶常系数齐次、非齐次方程的解(常微分方程 P72、82)
一阶伯努利方程(常微分方程 P14 公式 1.30，1.33 要记住)
欧拉方程(常微分方程 P99)

二、 行波法

1. 无界弦的自由振动(无边界条件，齐次方程)

D'Alembert 公式记住
P11-12，会化简，三种标准型；P18-19，会推导，掌握解题过程。
例题：P13-14 例 1，2，3。 P25 例 3

2. 半无界弦(延拓法)

奇延拓：$u|_{x=0}=0$；偶延拓：$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0$

P20-21，会推导，掌握解题过程。
例题：P34 T7

3. 无界弦强迫振动(方程非齐次)

齐次化原理、Kirchhoff 公式（不常用）

三、 分离变量

1. 齐次方程齐次边界条件

P36-39 解题过程全面掌握(分离、解本征值、求 T、求 An，Bn)
P42 例 2

2. 非齐次方程齐次边界条件

P44-P45 掌握解题过程
其中解 Cn 时不要用 Cauchy 公式，直接用预备知识的二阶常系数非齐次解法解。

3. 边界条件齐次化

普遍情况的边界条件齐次化：P48 掌握解题过程
特殊情况，方程边界条件同时齐次化：P49 掌握解题过程
P50 例 1 例 2

4. 自然边界条件、周期性边界条件

P52 页 掌握解题过程 （化简部分可不看）
一个重点是找出潜在的边界条件

5. 其他

Bessel：P55-56 幂级数解法

Legendre: P67-68 幂级数解法

四、 傅里叶变换

1. 傅里叶变换的定义及性质

- 傅里叶变换的定义要记住
- 傅里叶变换的性质记住并且会证明
- 对性质的应用要熟悉

2. 应用傅里叶变换解题

- 核心是降阶，把偏微分变成常微分，这个时候解常微分方程显得十分重要
- 应用傅里叶变换特别注意是对哪一个变量做变换(一般来说是对 x 做变换，如果是这样，那么$\varphi(t)$在变换中始终相当于常数)
- 等式右边的 f(x,t)做变换后不用立即求出具体的式子，P95-97 页 3 道例题

3. 常用变换及性质

- $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant A\\ 0 & |x|>A\end{cases} \quad\Rightarrow\quad F(f)=\dfrac{2\sin(\lambda A)}{\lambda}$

- $f(x)=e^{-Ax^2} \quad\Rightarrow\quad F(f)=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$

$$\left(F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]=e^{-a^2\lambda^2t}\right)$$

- $F(e^{-a|x|})=\dfrac{2a}{a^2+\lambda^2}$

- $\begin{cases}F(f(x))=\hat{f}(\lambda)\\ F\left(\hat{f}(x)\right)=2\pi f(-\lambda)\end{cases}$

$$F\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right]=\frac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|} \qquad F\left[\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right](x)=e^{-y|\lambda|}$$

- 微分性质 常用于正向变换；卷积性质 正向反向都有

  平移性质 多用于求逆（F 中带有 e 的指数就要想到平移 很多复杂的式子其实都是平移了而已）

  伸缩性质 正向反向都有

五、 解题经验

解题时，一般题目会要求你使用某种方法（例如使用行波法/延拓法/分离变量法解答下题）。如果没有就要从题目的形式出发，判断方程齐次 or 非齐次，边界条件齐次 or 非齐次，是否为半无界(一般是延拓法)，最终结合经验选择解题的方向。

齐次方程齐次边界条件是最简单的情况，而非齐次边界条件的复杂度要高于非齐次方程，所以要先看边界条件，再看方程。一般来说边界条件非齐次都要化为齐次，而非齐次方程则不一定(因为我们有非齐次方程齐次边界条件的分离变量方法)。

另外要注意边界条件齐次化、方程齐次化是一种思想，不光在分离变量中可以用，行波法也可以用。(例如 13-14 第一题)

一般归为 3 类。对 3 类各有不同的解题流程，希望大家能结合本资料归纳总结。

1、 行波法

   包含化简方程、行波法、延拓法。

2、 分离变量法

   边界条件齐次化、方程齐次化、自然边界条件

3、 傅里叶变换法

   相关证明、直接傅里叶变换、先延拓再变换(08-09 夏学期第四题)

一般的题目是直接给出方程让你解，但是也有的题目看上去与常规题目不同。遇到这种情况，大家要牢记解方程是这门课或者这个考试的核心。如果看出来了最好，如果没有那就按照题目的给出的条件按照解题的流程，一步步做下去，可能到一半就豁然开朗了。或者最好也没想明白，但是解方程的步骤你已经做了，大部分分数也得到了。（例如 13-14 冬学期第三题，12-13 冬学期第四题）

求系数 An，Bn 时要细心，有时条件已经是傅里叶展开形式，可以直接用对应系数相等的方法。（如 14-15 冬学期第二题、13-14 第二题）

偏微分解题确实不易，但是却有一套方法可循。解题的时候每个环节都做好，不出错，即可事半功倍。各种方法的解题流程在课本上写的比较详细，要理解其原理，掌握其流程。然后做至少 5 套历年卷练习，每个题每一步弄明白，偏微分取得不错的成绩却也不难！

一些注意：

1. 求本征值时，$\lambda<0$一般无解，但是$\lambda=0$时却不一定，有时会有常数解，此时就要考虑$n=0$的情况。

2. An、Bn 系数求解要掌握。

3. $\omega(x)$只与 x 有关，$f(t)$只与 t 有关。

4. 常见的偏微分方程会求解(预备知识里涵盖了 80%的情况)。

5. 标注黄色代表很重要，灰色代表不是很重要(根据我的经验)。

6. Bessel 和 Legendre 以前是不考的，从 2017 年开始也要考，但是这个地方不好出题。我建议大家看一看幂级数解法，足矣。解题还是先分离变量，再用幂级数求解其中一个方程。

六、结语

以上都是基于我的一年前的经验和笔记所写，当然不能包含所有考点，其中难免会有些许错误。大家可将此资料作为复习指南，以便复习时更有针对性，特别是标注黄色部分所对应的课本部分。

临近考试，老师应该会说一些考点，以老师说的考点为准。最后，祝大家能愉快的刷偏微分题目，在考试中取得好成绩！

2019.1.3

Z.T