第八讲

Monday, April 23, 2018 1:51 PM

答疑安排

时间：5月1日 上午 8:30 – 11:30

下午 1:30 – 4:30

地点：东1A – 204

助教：137 7736 9814 （平时成绩）

给定：$\vec{y}' = Ay$

A: $n \times n$

A: $[a]$，$y = e^{at}$

A 是常数 $y = e^{At}$ (✓)

$\cancel{X} \left(e^{a_{ij}t}\right)_{ij}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(At)^n}{n!} \quad (\checkmark)$$

$A^n = ?$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

如果 $A = U^T \Sigma U$

其中：U是单位正交阵

Σ是对角阵

$$A^n = (U^T\Sigma U)^n = (U^T\Sigma U)(U^T\Sigma U)\cdots(U^T\Sigma U) = U^T\Sigma^n U$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & 1 \\ & \lambda_2\end{matrix}} & & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U^T\Sigma^n U\, t^n}{n!}$$

$$= U^T\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Sigma^n t^n}{n!}\right)U$$

$$= U^T\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\begin{bmatrix}\frac{\lambda_1^n t^n}{n!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n^n t^n}{n!}\end{bmatrix}\right)U$$

$$= U^T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}U$$

$$= U^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix} U$$

猜测：$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$ 的解具有 $\vec{y} = \underline{e^{\lambda_i t}\vec{u_i}}$

代入方程：$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_i t}\vec{u_i}\right) = A e^{\lambda_i t}\vec{u_i}$

$$\lambda_i \cancel{e^{\lambda_i t}}\vec{u_i} = \cancel{e^{\lambda_i t}} A\vec{u_i}$$

$\Rightarrow$：$\boxed{A\vec{u_i} = \lambda_i \vec{u_i}}$ $\leftarrow$ （求解？）

如果每一个特征值 λ_i 都是单根，则对应于 n 个不同的特征向量。

$\vec{u_1}e^{\lambda_1 t}, \vec{u_2}e^{\lambda_2 t}, \cdots, \vec{u_n}e^{\lambda_n t}$ 组成基解矩阵。

例：$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

解：$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -6 & 6 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda+3)\underline{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda-5 \end{vmatrix}} + (-4)\times(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -6 & \lambda-5 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda+3)[\lambda(\lambda-5)+6] + \cdots +$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2$$

$A\vec{u_1} = \lambda_1\vec{u_1}$，不妨设 $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_1 I)\vec{u_1} = 0$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} -4\alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\begin{matrix} \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow$：$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow: \vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

同理: $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

如果出现复根(单根) $e^{\lambda_i t}\vec{u}_i$

(成对出现)

$\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\vec{u}_1=\vec{p}+i\vec{q}$

$\lambda_2=\alpha-\beta i$, $\vec{u}_2=\vec{p}-i\vec{q}$

$$\vec{y}_1(t)=e^{\lambda_1 t}\vec{u}_1=e^{(\alpha+\beta i)t}(\vec{p}+i\vec{q})$$

$$=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(\vec{p}+i\vec{q})$$

$$=\underline{e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\vec{p}-\sin\beta t\,\vec{q})}$$

$$+i\,\underline{e^{\alpha t}(\vec{p}\sin\beta t+\vec{q}\cos\beta t)}$$

$$\vec{y}_2(t)=\overline{\vec{y}_1(t)}$$

不妨令 $\vec{y}_1(t)=\underline{e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\vec{p}-\sin\beta t\,\vec{q})}$

$\vec{y}_2(t)=\underline{e^{\alpha t}(\sin\beta t\,\vec{p}+\cos\beta t\,\vec{q})}$

例: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

解: 令 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&3-\lambda&-1\\-1&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow: \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 3 \pm i.$$

取 $\lambda_2 = 3+i$, $\vec{u}_2 = \vec{p} + i\vec{q} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1-i & 1 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ -1 & 2 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-1-i)\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha - i\beta - \gamma = 0$$

不妨取 $\alpha = 1$, $\beta = 1+i$, $\gamma = 2-i$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 3-i$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\therefore \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right)$$

$$+ c_3 e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t\right)$$

$$= c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \end{pmatrix} \cdots e^{3t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cdots \end{pmatrix} \cdots e^{3t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$= C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\\ 2\cos t+\sin t\end{pmatrix} + C_3 e^{3t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \sin t+\cos t\\ 2\sin t-\cos t\end{pmatrix}$$

重根. $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$: $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\underline{(\cdot\ \cdot\cdot\ )}=0$

$n-k_i$

$\underbrace{e^{\lambda_i t}\vec{u}_i^{(1)}, *, *}_{k_i个}, \ e^{\lambda_i t}\vec{u}_i^{(2)} \quad e^{\lambda_i t}\vec{u}_i^{(k_i)}$

? ? ?

秩, rank

$(A-\lambda_i I)^{k_i}\vec{u}_i^{(j)}=0 \quad , \quad j=1,\cdots,k_i$

$\vec{u}_i^{(j)(0)}, \quad (A-\lambda_i I)^k\vec{u}_i^{(j)} = \vec{u}_i^{(j)(k)} \quad , \quad k=0,1,\cdots,k_i-1.$

$$\vec{v}_j = \vec{u}_i^{(j)(0)} + t\,\vec{u}_i^{(j)(1)} + \cdots + t^{k_i-1}\vec{u}_i^{(j)(k_i-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{k_i-1} t^k (A-\lambda_i I)^k \vec{u}_i^{(j)} \qquad (j=1,2,\cdots,k_i)$$

λ_i, k_i重根,

$\downarrow$

$\left\{\underbrace{e^{\lambda_i t}\vec{v}_j}\right\}, \quad j=1,2,\cdots,k_i$

8种: 1°: 可分离变量.

2°: 齐次方程. ($\frac{x}{y}$)

3°: $\underline{\text{一阶线性}}$

4°: 贝努利方程 (非线性. 令 $z=y^{1-n}\cdots$)

5°: 全微分

3种可降阶的二阶常微分方程：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y')$

$f(x)$, $f(y,y')$, $f(x,y')$

第二章：常系数 特征方程（齐次、非齐次）

变系数（Euler方程，令 $x=e^t$ …

非齐次 { Liouville 公式 …

幂级数解法 … ）

第三章：常系数方程组 { 齐次

非齐次

单、重根（复根）