《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙 江 大 学 数 学 系

前　言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一，为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法，我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章，除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用，用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求，用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求；内容提要部分给出相关内容的精讲，供学生复习参考之用；习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社，2008 年) 的附后练习题为主，这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果，其中第一章和第六章由薛儒英编写，第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写，王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容，最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助，得到浙江大学数学系各位老师的大力支持，在此表示感谢。

目　录

第 3 章　行波法

§3.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 掌握求解一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式；
2. * 理解用 “球面平均” 法求解三维波动方程初值问题的思想；
3. * 理解降维的概念，会求二维波动方程初值问题；
4. 理解非齐次波动方程初值问题的齐次化方法；
5. 掌握用对称延拓法求解一维波动方程的半无界初边值问题。

二. 内容提要

1. 一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式

一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

可以直接用达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

来求解。达朗贝尔公式的物理意义是波动方程初值问题的解可分解为沿着 x 轴正负方向传播的两组行波的叠加，因此这种方法称为**行波法**。

2. * “球面平均” 法，Poisson 公式

受求解一维波动方程初值问题的达朗贝尔公式的启发，对于三维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), -\infty < x,y,z < +\infty, t > 0 \\ u(x,y,z,t)|_{t=0} = \phi(x,y,z), -\infty < x,y,z < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x,y,z), -\infty < x,y,z < +\infty. \end{cases}$$

先求三维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$ 的具有球对称性质的解 $u = u(r,t)$, 得到

$$u(r,t) = \frac{f(r+at)+g(r-at)}{r},$$

其中 f 与 g 是二个任意的二阶连续可微的函数，它们可以由给定的初始条件来确定。

在没有球对称性质的情况下，先导出 $u(x,y,z,t)$ 在以 $M(x,y,z)$ 为球心，以 r 为半径的球面上的平均值

$$\bar{u}(r;t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{S_r} u(\xi,\eta,\zeta;t)dS$$

(其中 dS 为球面 $S_r(x,y,z)$ 的面积元素) 满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 r\bar{u}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 ru}{\partial r^2},$$

其通解是

$$\bar{u}(r,t)=\frac{f(r+at)+g(r-at)}{r},$$

将二阶连续可微的函数 f 与 g 由给定的初始条件来确定得

$$\begin{aligned}\bar{u}(r,t) &= \frac{-(at-r)\bar{\phi}(at-r)+(at+r)\bar{\phi}(at+r)}{2r}\\ &+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}\alpha\bar{\psi}(\alpha)d\alpha,\end{aligned}$$

其中 $bar\phi$, $\bar{\psi}$ 分别是初始函数 ϕ 与 ψ 在以 $M(x,y,z)$ 为球心，以 r 为半径的球面上的平均值。令 $r\to 0$, 利用洛必达法则计算得

$$u(x,y,z;t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\int_{S_{at}(x,y,z)}\phi dS\right]+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\int_{S_{at}(x,y,z)}\psi dS.$$

其中 $S_{at}(x,y,z)$ 表示以 (x,y,z) 为中心，at 为半径的球面。

3. * 用降维法求二维波动方程初值问题

对于二维波动方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})+f(x,y,t),-\infty<x,y<+\infty,t>0\\ u(x,y,t)|_{t=0}=\phi(x,y),-\infty<x,y<+\infty,\\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x,y),-\infty<x,y,<+\infty.\end{cases}$$

可以用三维波动方程的初值问题的 Poisson 公式通过降维的方法来求解

$$\begin{aligned}u(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\int_{\Sigma_{at}(x,y)}\frac{\phi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}dd\xi d\eta\right]\\ &+\frac{1}{2\pi a}\int\int_{\Sigma_{at}(x,y)}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta\\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\int\int_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x,y)}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta\right]d\tau,\end{aligned}$$

其中 $\Sigma_{at}(x,y)$ 表示以 (x,y) 圆心，at 为半径的圆盘。

4. 非齐次波动方程初值问题的齐次化方法

一维非齐次波动方程的初值问题为

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x),-\infty<x<+\infty.\end{cases}\tag{3.1}$$

利用线性叠加原理，转化为下列二个初值问题的解的和：

$$(I)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x),-\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),-\infty<x<+\infty,t>0 \\ u(x,t)|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0,-\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

问题 (I) 的解 $u_1(x.y.z.t)$ 可以利用达朗贝尔公式得到

$$u_1(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

利用**齐次化方法**(Duheml 原理) 求定解问题 (II) 的解 $u_2(x,t)$: 设 $w=w(x,t,\tau)$(其中 τ 是一个参数）是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(x,t,\tau)|_{t=\tau}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases} \tag{3.2}$$

的解，则

$$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$$

是初值问题 (II) 的解。由达朗倍尔公式，

$$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t-\tau,\tau)d\tau=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

由此一维非齐次波动方程初值问题 (3.1) 的解是

$$u(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

对于三维 (或二维) 非齐次波动方程的初值问题可以用线性叠加原理结合齐次化方法不求解。

5. 一维波动方程的半无界初边值问题

一维波动方程的半无界初边值问题可以利用 Lapalce 变换法或对称延拓法来求解，这里我们先讨论对称延拓法。

(A). 端点固定的半无界弦振动

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ x\geq 0,\ t\geq 0 \\ u|_{x=0}=\nu(t),\quad t\geq 0, \\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x), \end{cases} \tag{3.3}$$

第一步，把边界条件化为齐次。记 $v=u(x,t)-\nu(t)$, 那么 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-\nu''(t), \\ v|_{x=0}=0,\quad t\geq 0 \\ v(x,t)|_{t=0}=\phi(x)-\nu(0),\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)-\nu'(0),0<x<+\infty. \end{cases} \tag{3.4}$$

第二步：把半无界弦的振动转化为无界弦的振动。把非齐次项和初始条件关于 x 作**奇**延拓

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t)-\nu''(t),\ x\geq 0 \\ -f(-x,t)+\nu''(t)\, x<0 \end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} \phi(x)-\nu(0),\ x\geq 0 \\ -\phi(-x)+\nu(0),\ x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x)-\nu'(0),\ x\geq 0 \\ -\psi(-x)+\nu'(0),\ x<0 \end{cases}$$

记 $V(x,t)$ 为初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+F(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ V(x,t)|_{t=0}=\Phi(x),\ \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0}=\Psi(x) \end{cases}$$

的解, 它可以利用一维非齐次波动方程解的 Kirchoff 公式来求解。可以知道函数 $V(x,t)$ 关于 x 是奇函数，因此函数 $V(x,t)$ 自动满足条件 $V(x,t)|_{x=0}=0$，函数 $V(x,t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的限制函数 $V(x,t)|_{x\geq 0,t\geq 0}$ 满足定解问题 (3.4)。因此定解问题 (3.3) 的解为

$$u(x,t)=V(x,t)+\nu(t),\ x\geq 0,t\geq 0.$$

(B) 端点自由的半无界弦振动

端点自由的半无界弦振动的可描述为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ x\geq 0,\ t\geq 0 \\ u_x|_{x=0}=\nu(t),\quad t\geq 0 \\ u(x,t)|_{t=0}=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x), \end{cases} \tag{3.5}$$

第一步：把边界条件化为齐次。记 $v=u(x,t)-x\nu(t)$, 那么 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-x\nu''(t) \\ v_x|_{x=0}=0,\quad t\geq 0 \\ v(x,t)|_{t=0}=\phi(x)-x\nu(0),0<x<+\infty, \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)-x\nu'(0),0<x<+\infty. \end{cases} \tag{3.6}$$

第二步：把半无界弦的振动转化为无界弦的振动。把非齐次项和初始条件关于 x 作**偶**延拓

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t)-x\nu''(t),\ x\geq 0 \\ f(-x,t)+x\nu''(t)\, x<0 \end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} \phi(x)-x\nu(0),\ x\geq 0 \\ \phi(-x)+x\nu(0),\ x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x)-x\nu'(0),\ x\geq 0 \\ \psi(-x)+x\nu'(0),\ x<0 \end{cases}$$

记 $V(x,t)$ 为初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+F(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ V(x,t)|_{t=0}=\Phi(x),\ \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0}=\Psi(x) \end{cases}$$

的解, 它可以利用一维非齐次波动方程解的 Kirchoff 公式来求解。可以知道函数 $V(x,t)$ 关于 x 是偶函数，因此 $V(x,t)$ 自动满足条件 $V_x(x,t)|_{x=0}=0$。函数 $V(x,t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的限制函数 $V(x,t)|_{x\geq 0,t\geq 0}$ 满足定解问题 (3.6). 因此定解问题 (3.5) 的解为

$$u(x,t)=V(x,t)+x\nu(t),\ x\geq 0,t\geq 0.$$

对于上空间 (或上半平面) 上的三维 (或二维) 波动方程的初边值问题可以延拓法类似地求解。

§3.2　习题解答

习题 3.1 证明方程

$$(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}]$$

的通解为

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}$$

其中 F,G 是任意的二次连续函数，$a,h>0$ 的常数。

解: 令 $v(x,t)=(h-x)u(x,t)$, 代入方程得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^x}$$

其通解为：

$$v(x,t)=F(x-at)+G(x+at),$$

所以

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}.$$

习题 3.2 求方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y$ 满足条件 $u|_{y=0}=x^2$ 和 $u|_{x=1}=cosy$ 的解。

解: 方程关于 x 积分得：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{3}x^3y+f(y).$$

再关于 y 积分得：

$$u=\frac{1}{6}x^3y^2+F(y)+G(x),$$

其中 $F(y)=\int f(y)dy$. 分别代入 $x=1$, $y=0$, 易得：

$$cosy=\frac{1}{6}y^2+F(y)+G(1),$$

$$x^2 = F(0) + G(x).$$

由此二式易得：

$$1 = F(0) + G(1),$$

$$x^2 + cosy = F(y) + G(x) + 1 + \frac{1}{6}y^2.$$

所以，

$$u = \frac{1}{6}x^3y^2 + x^2 + cosy - \frac{1}{6}y^2 - 1.$$

习题 3.3 求下列波动方程的特征线并化简下列方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2cosx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - sinx\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

解: 方程的特征方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2cosx\frac{dy}{dx} - sin^2x = 0,$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = cosx \pm 1,$$

解得特征线：$y - sinx - x = C_1$, $y - sinx + x = C_2$.
作变换：$\xi = y - sinx - x$, $\eta = y - sinx + x$, 代入方程，整理化简得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

习题 3.4 解初值问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{y=0} = sinx \\ u_y|_{y=0} = x \end{cases}$

解: 特征方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

由此得: $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{dy}{dx} = -1$,
解得特征线：$y + x = C_1$, $y - 3x = C_2$.
作变换：$\xi = y + x$, $\eta = y - 3x$, 代入方程，整理化简得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

$\therefore\ u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$,
$\therefore\ u(x, y) = F(y + x) + G(y - 3x)$,
其中F, G 待定函数. 代入初值：

$$sinx = F(x) + G(-3x),$$

$$x = F'(x) + G'(-3x),$$

对第二式积分得：

$$\frac{1}{2}x^2 = F(x) - \frac{1}{3}G(-3x).$$

解得：

$$F(x) = \frac{1}{4}sinx + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}C$$

$$G(x) = \frac{3}{4}sin(-\frac{x}{3}) - \frac{1}{24}x^2 - \frac{3}{4}C$$

$$\therefore\ u(x,y) = \frac{1}{4}sin(x+y) + \frac{3}{8}(x+y)^2 + \frac{3}{4}sin(x-\frac{y}{3}) - \frac{1}{24}(y-3x)^2$$

习题 3.5 求解下列初值问题

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u_t|_{t=0} = x^2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \ln(1+x^2) \\ u_t|_{t=0} = 2 \end{cases}$$

解: (1). 代 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} s^2 ds \\ &= \sin x\cos at + x^2 t + \frac{1}{3}a^2t^3 \end{aligned}$$

(2). 代 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\ln 1+(x-at)^2 + \ln 1+(x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} 2ds \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+(x-at)^2)(1+(x+at)^2) + 2t \end{aligned}$$

习题 3.6 求解下列初值问题

$$(1).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = x \end{cases} \qquad (2).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

解: (1). 问题分解成：

$$(I).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = x \end{cases}$$

$$(II).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

问题 (I) 由 D'Alembert 公式求解：$u_I(x,t) = \cos x\cos at + xt$

问题 (II) 由齐次化原理解之：先求得问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = -\sin x \end{cases}$$

的解：

$$\begin{aligned} w(x,t;\tau) &= \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} -\sin s ds \\ &= -\frac{1}{a}\sin x \sin a(t-\tau) \end{aligned}$$

根据齐次化原理 (II) 的解为：

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{a}\int_0^t \sin x \sin a(t-\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{a^2}\sin x + \frac{1}{a^2}\sin x \cos at \end{aligned}$$

原问题的解为：

$$\begin{aligned} u &= u_I + u_{II} \\ &= \cos x \cos at + xt - \frac{1}{a^2}\sin x + \frac{1}{a^2}\sin x \cos at \end{aligned}$$

(2). 问题分解成：$(I).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}$ $\quad (II).\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

问题 (I) 由 D'Alembert 公式求解：$u_I(x,t) = \sin x \sin t$

问题 (II) 由齐次化原理解之：先求得问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=\tau} = 0 \\ u_t|_{t=\tau} = \tau \sin x \end{cases}$ 的解为

$$\begin{aligned} w(x,t;\tau) &= \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau} \tau \sin s ds \\ &= \tau \sin x \sin(t-\tau) \end{aligned}$$

根据齐次化原理 (II) 的解为：

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \tau \sin x \sin(t-\tau)d\tau \\ &= \sin x(t - \sin t) \end{aligned}$$

原问题的解为：$u = u_I + u_{II} = t\sin x$.

习题 3.7 利用延拓法求下列定解问题的解

$$
(1)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (x\geq 0,\ y>0)\\ u|_{y=0}=2x^2 & (x>0)\\ u_y|_{y=0}=3x & (x>0)\\ u|_{x=0}=0 & (y\geq 0)\end{cases}
$$

$$
(2)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x\geq 0,\ t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (x\geq 0)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & (x\geq 0)\\ u_x|_{x=0}=0 & (t>0)\end{cases}
$$

解: (1). 作解 $u(x,y)$ 的奇延拓：

$$
v(x,y)=\begin{cases}u(x,y), & x\geq 0\\ -u(-x,y), & x<0\end{cases}
$$

则恒有 $v(0,y)=0$, 且易验证 v 满足初值问题：

$$
\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & (|x|<\infty,\ y>0)\\ v|_{y=0}=\varphi(x) & (|x|<\infty)\\ v_y|_{y=0}=\psi(x) & (|x|<\infty)\end{cases}
$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 分别为:

$$
\varphi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\geq 0\\ l-2x^2, & x<0\end{cases},\quad \psi(x)=3x.
$$

代入 D'Alembert 公式：

$$
\begin{aligned}
v(x,y) &= \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\psi(s)ds\\
&= \begin{cases}2x^2+2y^2+3xy, & x\geq y\\ 7xy & x<y\end{cases}
\end{aligned}
$$

限制于 $x\geq 0$, 得

$$
u(x,y)=v(x,y)|_{x|\geq 0}=\begin{cases}2x^2+2y^2+3xy, & x\geq y\\ 7xy & 0\leq x<y\end{cases}
$$

(2). 作解 $u(x,t)$ 的偶延拓：

$$
v(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & x\geq 0\\ u(-x,t), & x<0\end{cases}
$$

则恒有 $v_x(0,t)=0$, 且易验证 v 满足初值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (|x|<\infty,\ t>0) \\ v|_{t=0}=\hat{\varphi}(x) \quad (|x|<\infty) \\ v_t|_{t=0}=\hat{\psi}(x) \quad (|x|<\infty) \end{cases}$$

其中, $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\psi}(x)$ 分别为 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 的偶延拓, 即:

$$\hat{\varphi}(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\ge 0 \\ \varphi(-x), & x<0 \end{cases}, \quad \hat{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\ge 0 \\ \psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

代 D'Alembert 公式：

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{\hat{\varphi}(x-at)+\hat{\varphi}(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{\psi}(s)ds \\ &= \begin{cases} \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x\ge at \\ \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(s)ds, & x<at \end{cases} \end{aligned}$$

限制于 $x\ge 0$, 得 $u(x,y)=v(x,y)|_{x|\ge 0}$.

习题 3.8 证明：若 $w(x,t,\tau)$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases}$ 的解，则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \\ u|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解。

证明 先验证 u 满足方程：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=w(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau=0+\int_0^t\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}(x,t,\tau)d\tau \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=f(x,t)+\int_0^t\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}d\tau=f(x,t)$$

再验证满足定解条件：

$$u(x,0)=0$$

得证。

习题 3.9 证明：若 $w(x, t\tau)$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = f(x,\tau) \end{cases}$ 的解，则 $u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 是定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解。

解 先验证 u 满足方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = w(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau = 0 + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)d\tau \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\tau)(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}(x,t,\tau)d\tau \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}(x,t,\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} d\tau = f(x,t)$$

再验证满足定解条件：

$$u(0,t) = \int_0^t w(0,t,\tau)d\tau = \int_0^t 0d\tau = 0$$

$$u(l,t) = \int_0^t w(l,t,\tau)d\tau = \int_0^t 0d\tau = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

得证。

习题 3.10 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \\ u|_{t=0} = x^3 + y^2 z \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解: 由 Poission 公式得：

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{S_{at}^M} \frac{\xi^3 + \eta^2 \zeta}{at} ds$$

其中, S_{at}^M 是以 $M(x,y,z)$ 为球心, at 为半径的球面: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=(at)^2$.
作球面坐标变换:

$$\begin{cases} \xi = x + at\sin\varphi\cos\theta \\ \eta = y + at\sin\varphi\sin\theta \\ \zeta = z + at\cos\varphi \end{cases}$$

计算面积分

$$\begin{aligned}
& \int\int_{S_{at}^M} \frac{\xi^3+\eta^2\zeta}{at} ds \\
= \ & at\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} [(x+at\sin\varphi\cos\theta)^3+(y+at\sin\varphi\sin\theta)^2(z+at\cos\varphi)]d\theta \\
= \ & at\pi\int_0^\pi \sin\varphi[2x^3+3xa^2t^2\sin^2\varphi+(2y^2+a^2t^2\sin^2\varphi)(z+at\cos\varphi)]d\varphi \\
= \ & at\pi[4x^3+4xa^2t^2+4y^2z+\frac{4}{3}a^2t^2z]
\end{aligned}$$

于是

$$u(x,y,z,t) = x^3+y^2z+3xa^2t^2+za^2t^2.$$

习题 3.11 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ u|_{t=0} = \varphi(r) \\ u_t|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$$

的轴对称解 $u=u(r,t)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
解: 由 Poission 公式得:

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) \ = \ & u(r,t) = \frac{1}{2\pi a}(\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} d\xi d\eta \\
& + \int\int_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{(at^2)-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} d\xi d\eta) \\
= \ & \frac{1}{2\pi a}(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{at} \frac{\varphi(\sqrt{(r\cos\theta+x)^2+(r\sin\theta+y)^2})}{\sqrt{(at^2)-r^2}} rdr \\
& + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{at} \frac{\psi(\sqrt{(r\cos\theta+x)^2+(r\sin\theta+y)^2})}{\sqrt{(at^2)-r^2}} rdr)
\end{aligned}$$

其中, Σ_{at}^M 是以 $M(x,y)$ 为园心, at 为半径的圆: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \le (at)^2$.
r,θ 是极坐标变换:

$$\begin{cases} \xi = x + r\cos\theta \\ \eta = y + r\sin\theta \end{cases}$$

习题 3.12 利用降维法, 由二维 *Poission* 公式, 导出弦振动方程的 *D'Alembert* 公式。

解: 设 $u(x,t)$ 是下列定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ 的解。设 $v(x,y,t) = u(x,t)$, 则 v 满足下列方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

由二维 Poission 公式得

$$\begin{aligned} v(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}(\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{(at^2) - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \\ &\quad + \int\int_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(x)}{\sqrt{(at^2) - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta) \end{aligned}$$

其中, Σ_{at}^M 是以 $M(x,y)$ 为园心, at 为半径的园：$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq (at)^2$.
在直角坐标下, 先对 η 积分, 记 $b = \sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2}$, 并利用 $\int_{-b}^{b} \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \pi$,

$$\begin{aligned} v(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \int_{y-b}^{y+b} \frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - (\eta - y)^2}} d\eta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \int_{y-b}^{y+b} \frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - (\eta - y)^2}} d\eta \\ &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2a} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

由解的唯一性知：

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2a} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

即为 D'Alembert 公式。