第二十章　量子力学简介

20.1　试求：(1)初速很小的电子经过 100V 电压加速后的德布罗意波长；(2)质量为 10^{-2}kg 的子弹以每秒 800 米速率运动时的德布罗意波长。

解　(1)电子经过电压 U 加速后，其速度为

$$\frac{1}{2}m_0v^2=eU$$

$$v=\sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

根据德布罗意关系式，此时电子的波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2em_0}}\frac{1}{\sqrt{U}}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times1.6\times10^{-19}\times9.1\times10^{-31}\times100}}$$

$$=1.23\times10^{-10}\mathrm{m}=0.123\mathrm{nm}$$

(2)根据德布罗意关系式

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times800}$$

$$=8.29\times10^{-35}\mathrm{m}$$

20.2　若电子和光子的德布罗意波长均为 0.2nm，则它们的动量和总能量各为多少？

解　根据德布罗意关系式，它们的动量为

$$p_{电}=p_{光}=\frac{h}{\lambda}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.2\times10^{-9}}$$

$$=3.32\times10^{-24}\mathrm{kg\cdot m/s}$$

电子的总能量为

$$E=\sqrt{m_0^2c^4+p_{电}^2c^2}$$

$$=\sqrt{(9.1\times10^{-31})^2\times(3\times10^8)^4+(3.32\times10^{-24})^2\times(3\times10^8)^2}$$

$$=8.19\times10^{-14}\mathrm{J}=5.12\times10^5\mathrm{eV}$$

光子的能量为

$$E=pc=3.32\times10^{-24}\times3\times10^8$$

$$=9.96\times10^{-16}\mathrm{J}$$

$$=6.22\times10^3\mathrm{eV}$$

20.3　当电子的动能等于它的静止能量时，它的德布罗意波长是多少？

解　利用相对论公式，电子的动能为

$$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2$$

得 $m=2m_0$，又根据质速关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v=c\sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=\frac{h}{2m_0\frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

$$=\frac{h}{m_0\sqrt{3}c}$$

20.4　电子在铝箔上散射时，第一级最大($k=1$)的偏转角 θ 为 2°(参看题 20.4 图)，铝的晶格常数 a 为 4.05×10^{-10}m，求电子速度

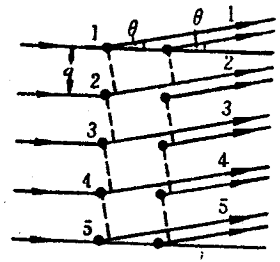
解　设电子的德布罗意波长为 λ，则有

$2d\sin\theta = k\lambda$, $\theta = 1°$ 掠射角

$$a\sin\theta = k\lambda, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

已知 $k=1, \theta=2°$，故有

$$\lambda = 4.05\times10^{-10}\sin 2°$$
$$= 0.142\times10^{-10}\text{m}$$



题 20.4 图

根据德布罗意关系式，电子的速度为

$$v = \frac{h}{m_0\lambda}$$
$$= \frac{6.63\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times0.142\times10^{-10}}$$
$$= 5.14\times10^{7}\text{m/s}$$

由于 v 已接近光速，必须考虑相对论效应，有

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{m_0\lambda}$$

解得

$$v = 5.07\times10^{7}\text{m/s}$$

20.5　假定有一个粒子的动量不确定量等于它的动量，试求这个粒子的位置的最小不确定量与它的德布罗意波长的关系。

解　已知 $\Delta p = p$，由不确定性关系式为

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{h}{4\pi p} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

因此，这个粒子的位置的最小不确定量为 $\frac{\lambda}{4\pi}$，λ 是该粒子的德布罗意波长。

20.6　一般显像管中电子的速度约为 $v_x = 1.0\times10^7$m/s，若测量电子速度的精确度为 1%（这在实验中已很精确），试求射线束中电子位置的不确定量，并对所得结果进行讨论。

解　根据题意，电子速度的不确定量为 $\Delta v_x = 1.0\times10^5$m/s，则由不确定性关系为

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi m\Delta v_x} = \frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times9.1\times10^{-31}\times1.0\times10^{5}}$$
$$= 5.8\times10^{-10}\text{m}$$

由此可见，尽管电子位置坐标的可能误差比电子本身的尺度 10^{-15}m 大得多，但射线束在荧光屏上的斑点已小到 10^{-10}m 的程度，这对大多数观测已足够清晰了。因此在这种情况下把电子看成宏观的“质点”，用牛顿力学来讨论它的运动规律显然是可行的。

20.7　一束具有动量 p 的电子，垂直地射入宽度为 a 的狭缝，若在狭缝后面与狭缝相距为 f 的地方放置一块荧光屏，试证明屏幕上衍射图样中央最大强度的宽度 $d=2fh/(ap)$，式中 h 为普朗克常量。

证明　单缝衍射中各级极小的条件为

$$a\sin\theta = \pm k\lambda \qquad k = 1, 2, \cdots$$

令 $k=1$，得 $a\sin\theta = \lambda$

可见衍射图像中第一级极小离中心点的距离为

$$x_1 = f\text{tg}\theta \approx f\sin\theta = f\lambda/a$$

根据德布罗意关系 $\lambda = \frac{h}{p}$，故中央最大强度的宽度为

$$d = 2x_1 = \frac{2fh}{ap}$$

20.8　波长为 300nm 的平面光波沿 x 轴正向传播。若波长的相对不确定量 $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-6}$，试求此光子坐标的最小不确定量。

解　光子的动量 $p_x = \frac{h}{\lambda}$，则此光子动量的不确定量在数值上为

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

根据不确定性关系式，可得

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi\Delta\lambda/\lambda}$$
$$= \frac{3.0\times10^{-7}}{4\pi\times10^{-6}} \approx 2.4\times10^{-2}\text{m} = 24\text{mm}$$

20.9　如果一个原子处于某能态的寿命为 10^{-6}s，那么这个原

子的这个能态的能量的最小不确定量是多少？

解 根据不确定性关系式 $\Delta E\cdot\Delta t\geqslant\frac{h}{4\pi}$，有

$$\Delta E\geqslant\frac{h}{4\pi\Delta t}=\frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times10^{-6}}$$
$$=5.28\times10^{-29}\text{J}$$
$$=3.3\times10^{-10}\text{eV}$$

20.10 粒子在一维无限深势阱中运动，势阱宽度为 a，其波函数为 $\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$　$(0<x<a)$。求粒子出现的概率最大的各个位置。

解 由题意，其概率密度为

$$|\psi_{(x)}|^2=\psi_{(x)}\cdot\psi^*_{(x)}=\frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}$$

令 $\frac{\mathrm{d}|\psi_{(x)}|^2}{\mathrm{d}x}=0$，得

$$\frac{6\pi}{a^2}\sin\frac{6\pi x}{a}=0$$

故有

$$\frac{6\pi x}{a}=k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$x=k\cdot\frac{a}{6},\qquad k=0,\pm1,\pm2$$

又因为 $0<x<a$，因此当 $x=\frac{a}{6},\frac{a}{2},\frac{5a}{6}$时，$|\psi_{(x)}|^2$ 有极大值，当 $x=\frac{a}{3},\frac{2a}{3}$时，$|\psi_{(x)}|^2=0$，所以粒子出现概率最大的位置为

$$x=\frac{a}{6},\frac{a}{2},\frac{5a}{6}$$

20.11 一粒子被限制在相距为 l 的两个不可穿透的壁之间，描写粒子状态的波函数为 $\psi=cx(l-x)$，其中 c 为待定常量。求在 $0\sim\frac{1}{3}l$ 区间发现该粒子的概率。

解 由波函数的归一化条件

$$\int_0^l|\psi|^2\mathrm{d}x=\int_0^l c^2x^2(l-x)^2\mathrm{d}x=1$$

解得

$$c^2=\frac{30}{l^5},\qquad c=\frac{\sqrt{30l}}{l^3}$$

则在 $0\sim\frac{l}{3}$ 区间内发现该粒子的概率 P 为

$$P=\int_0^{l/3}|\psi|^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{l}{3}}\frac{30x^2(l-x)^2}{l^5}\cdot\mathrm{d}x$$
$$=\frac{17}{81}$$

20.12 一维无限深方势阱中的粒子，其波函数在边界处为零，这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波，因而势阱的宽度 a 必须等于德布罗意波半波长的整数倍。试利用这一条件导出能量量子化公式 $E_n=\frac{h^2}{8ma^2}\cdot n^2$。

解 由题意 $a=n\frac{\lambda}{2}$，根据德布罗意关系式有

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{hn}{2a}$$

粒子的能量为

$$E_n=\frac{p^2}{2m}=\frac{h^2}{8ma^2}\cdot n^2,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

20.13 一质量为 m 的微观粒子被约束在长度为 L 的一维线段上，试根据不确定性关系式估算该粒子所具有的最小能量值，并由此计算在直径为 10^{-14}m 的核内质子和中子的最小能量。

$(h=6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}, m_p=1.67\times10^{-27}\text{kg})$

解 根据不确定性关系式 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geqslant\frac{h}{4\pi}$，可得

$$\Delta v_x \geqslant \frac{h}{4\pi m \Delta x}$$

粒子的最小能量应满足

$$E_{\min} \geqslant \frac{1}{2} m (\Delta v_x)^2 \geqslant \frac{h^2}{32\pi^2 m \Delta x^2} = \frac{h^2}{32\pi^2 m l^2}$$

在核内，质子和中子的最小能量

$$E_{\min} \geqslant \frac{h^2}{32\pi^2 m l^2} = \frac{(6.63\times10^{-34})^2}{32\pi^2 \times 1.67\times10^{-27}\times(10^{-14})^2}$$
$$= 8.3\times10^{-15}\text{J}$$

20.14 试证明，对于作圆周运动的粒子，不确定性关系可表达为 $\Delta L \Delta\varphi \geqslant \frac{h}{4\pi}$。这里 ΔL 是角动量的不确定量，$\Delta\varphi$ 是角位置的不确定量。

证明 设粒子在某处的角位置不确定量为 $\Delta\varphi$，则沿该处切向的线位置不确定量 $\Delta x = r\Delta\varphi$，相应的粒子动量在该处沿切向的不确定量 $\Delta p_x = \Delta p$，由此引起的角动量不确定量为

$$\Delta L = r \cdot \Delta p$$

根据不确定性关系，$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{h}{4\pi}$，有

$$r\Delta\varphi \cdot \frac{\Delta L}{r} \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

故

$$\Delta L \Delta\varphi \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

20.15 在无限深方势阱中，势阱宽度为 0.6nm，当电子从 $n=3$ 的能级跃迁到 $n=2$ 的能级时，试问所辐射的光子的能量是多少？

解 无限深势阱中电子的能量为

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2}\cdot n^2, \qquad n=1,2,\cdots$$

当电子从 $n=3$ 的能级跃迁到 $n=2$ 的能级发出光子的能量

$$E = E_3 - E_2 = \frac{h^2}{8ma^2}(9-4)$$

$$= \frac{5h^2}{8ma^2}$$
$$= \frac{5\times(6.63\times10^{-34})^2}{8\times9.1\times10^{-31}\times(0.6\times10^{-9})^2} = 8.39\times10^{-19}\text{J}$$
$$= 5.25\text{eV}$$

20.16 计算宽度为 0.6nm 的无限深方势阱中，电子的最低的三个能级。

解 无限深势阱的能量公式为

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2}\cdot n^2, \qquad n=1,2,\cdots$$

由此可得电子最低三个能级的能量为

$$E_1 = \frac{(6.63\times10^{-34})^2}{8\times9.1\times10^{-31}\times(0.6\times10^{-9})^2}\times1$$
$$= 1.68\times10^{-19}\text{J}$$
$$= 1.05\text{eV}$$
$$E_2 = 4E_1 = 4.20\text{eV}$$
$$E_3 = 9E_1 = 9.45\text{eV}$$

20.17 假设粒子在一维空间运动，处于如下波函数所描述的状态

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-\lambda x} & (x\geqslant0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

式中 λ 为正的常量。试求：

(1)归一化波函数；

(2)粒子在空间分布的概率密度。

解 (1)由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{(x)}|^2 \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x}\cdot \mathrm{d}x$$
$$= \frac{A^2}{8\lambda^3}\int_0^{\infty} y^{2} e^{-y}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$