浙江大学 2009－2010 学年春季学期
《 微积分Ⅱ》课程期末考试试卷

一、（每题 6 分，共 18 分）

1. 设 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,$ 求 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

2．验证两直线 L_1 : $\begin{cases}x+2y=0\\ y+z+1=0\end{cases}$ 与直线 L_2 : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ 平行，并求经过此两直线的平面方程.

3. 设常数 a 与 b 不同时为零，直线 L 为 $\begin{cases}x=az\\ y=b\end{cases}$ ，求 L 绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面方程. 并说明① $a=0,b\neq 0,$ ② $a\neq 0,b=0,$ ③ $ab\neq 0$ 三种情形时该曲面的名称.

二、（每题 6 分，共 24 分）

4.设函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+2y)\mathrm{d}x+ay\mathrm{d}y}{(x+ay)^2}$, 求常数 a 的值.

5. 设函数 $f(u)$ 具有连续的导数, 函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $y+z=xf(z^2-y^2)$ 确定的可微函数, 并设式子中出现的分母不为零, 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设常数 $a>0,b>0,c>0,$ (1)求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在其上点 $M(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{\sqrt{2}})$ 处的指向椭球内部的单位法向量 $\vec{n}^0$; (2) 求三元函数 $u=1-(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2})$ 在点 M 处沿 $\vec{n}^0$ 方向的方向导数.

7．设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,请确定常数 b 的值, 使上式在变换 $u=x-2y,v=x+by$ 下, 可简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

三、（每题 6 分，共 18 分）

8. 计算$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4 - y^2}\,\mathrm{d}x$.

9. 求半圆$D = \{\,(x, y)\,|\, x^2 + y^2 \le R^2,\, y \ge 0\}$的形心的纵坐标.

10. 以锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$为顶, 以平面$z = 0$上的区域$D = \{(x, y)\,|\, 0 \le y \le x, x^2 + y^2 \le 2x\}$为底, 母线平行于$z$轴的柱面为侧面的立体记为$\Omega$，试用二重积分计算此$\Omega$的体积.

四、（每题 10 分，共 40 分）

11. 计算二重积分$I = \iint\limits_D r^2 \sin\theta \cdot \sqrt{1 - r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 其中$D$在极坐标系统中表示为$D = \{\,(r, \theta)\,|\, 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\theta}, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}\}$.

12. 设点$P(x, y, z)$为曲面$S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$上的动点, 并设$S$在点$P$处的切平面总与$xOy$平面垂直. (1) 求点$P$的轨线$C$的方程; (2) 求$C$在$xOy$平面上的投影线的方程; (3) 说明$C$是一条平面曲线,并求此$C$在它所在的平面上围成的区域的面积.

13. (1)设点(x, y, z)位于第一象限的球面$x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$上, 其中$R > 0$为确定的数, 求$w = \ln x + \ln y + 3\ln z$的最大值.

(2) 证明: 对于任意正数a, b, c,成立不等式$abc^3 \le 27(\dfrac{a + b + c}{5})^5$.

14. 设平面区域$D = \{\,(x, y)\,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\,\}$, (1) 计算积分$A = \iint\limits_D |\, xy - 1\,|\,\mathrm{d}\sigma$.

(2) 设$f(x, y)$在D上连续, 且$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$, $\iint\limits_D xy\, f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = 1$, 证明存在点$(\xi, \eta) \in D$, 使$|\, f(\xi, \eta)\,|\, A \ge 1$.

参考解答：

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})=|(\vec{a}\times\vec{b})|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta+|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=2^2\times3^2=36$$

2. $\because L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$， $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$， $\therefore$ $L_1 // L_2$.

解 1. 设过 L_1 的平面束方程: $\lambda(x+2y)+y+z+1=0$, 代入 L_2 上的一个点 $(1,0,1)$,

得 $\lambda=-2$, 故得所求平面方程 $2x+3y-z=1$.

解 2. 分别在直线 L_1,L_2 上取点 $P_1(0,0,-1), P_2(1,0,1)$, 故所求平面法矢量

$$\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{l_2}=\{1,0,2\}\times\{2,-1,1\}=\{2,3,-1\}$$

故所求平面方程 $2x+3y-(z+1)=0$, 即 $2x+3y-z=1$.

3. 设旋转曲面上任意一点 (x,y,z), 绕 z 轴旋转到直线 L 上的一点 (x_1,y_1,z), 故有

$x_1=az,\ y_1=b,\ x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$,

由此得旋转曲面方程 $x^2+y^2=a^2z^2+b^2$

①$a=0,b\neq0$ 时 $x^2+y^2=b^2$ 为圆柱面; ②$a\neq0,b=0$ 时 $x^2+y^2=a^2z^2$ 为圆锥面;

③$ab\neq0$ 时 $x^2+y^2-a^2z^2=b^2$ 为单叶双曲面.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(x+2y)}{(x+ay)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{ay}{(x+ay)^2}$, $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{2x(1-a)-2ay}{(x+ay)^3}$, $\dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=\dfrac{-2ay}{(x+ay)^3}$,

$\because u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, $\therefore\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial x}$, 由此解得 $a=1$.

5. 解 1. 方程两边求全微分 $\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=f\ \mathrm{d}x+xf'(2z\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}y)$,

即 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{1-2xzf'}[f\,\mathrm{d}x-(1+2xyf')\mathrm{d}y]$, $\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f}{1-2xzf'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1+2xyf'}{1-2xzf'}$

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xf-z-2xyzf'}{1-2xzf'}$,或代入 $xf=y+z$, 有 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$.

解 2. 方程两边对 x 求偏导, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+xf'2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, 解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f}{1-2xzf'}$,

方程两边对 y 求偏导, $1+\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf'(2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y)$, 解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1+2xyf'}{1-2xzf'}$, 则同上.

6. (1) $\vec{n}=-\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\}_M=-\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{\sqrt{2}}{c}\}$， $\therefore \vec{n}^0=-\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{\sqrt{2}}{c}\}\Big/\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}^0}=\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}_M\cdot\vec{n}^0$

$$=-\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{\sqrt{2}}{c}\}\cdot[-\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{\sqrt{2}}{c}\}\Big/\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}]=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}.$$

7. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(b-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，代入原方程，有

$-8(b+2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(4+12b+5b^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,\ \Rightarrow -8(b+2)\neq 0,\ 4+12b+5b^2=0,$

则解得 $b=-\frac{2}{5}$.

8. 交换积分次序，

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^4-y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^4-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{y=x^2\sin t}}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\pi}{20}$$

9. $\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\frac{\pi}{2}R^2}=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3}\cdot 2=\frac{4R}{3\pi}$

10. $V=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\sin\theta=\frac{8}{3}(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}.$$

11. $D=\{\,(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le x\,\}$

$$I=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x\ (x=\sin t)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

12. (1) 曲面 S 在点 P 处切平面法矢量 $\vec{n}=\{2x,2y-z,2z-y\}_P\perp\vec{k}=\{0,0,1\}$

$\vec{n}\cdot\vec{k}=0\ \Rightarrow\ 2z-y=0$,

$\therefore$ C 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ 2z-y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\ 2z-y=0\end{cases}$

(2) C 在 xOy 平面上的投影线的方程 $\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\ z=0\end{cases}$.

(3) 由于 C 在平面 $2z-y=0$ 上, 故为一条平面曲线. 它在 xOy 平面上的投影曲线为椭圆, 其所围的面积为 $\sigma_{xy}=\pi\cdot 1\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pi$,

又平面 $2z-y=0$ 的法矢量 $\vec{n}_1=\{0,-1,2\}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 则 C 在平面 $2z-y=0$ 上围成的面积为 $S=\dfrac{\sigma_{xy}}{\cos\gamma}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}\pi.$

13. (1)设 $L=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$, 由拉格朗日乘数法,

$L'_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0,\ L'_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0,\ L'_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0,\ \Rightarrow y=x,\ z=\sqrt{3}x$

$L'_\lambda=x^2+y^2+z^2-5R^2=0$, 解得唯一驻点 $x=R, y=R, z=\sqrt{3}R$,

在约束条件下, 当 $x\to 0^+$ 时, $W\to-\infty$, 故此为 W 的最大值点, 且最大值为

$$\max W=W(R,R,\sqrt{3}R)=\ln\sqrt{27}R^5.$$

(2) 由(1), $\ln xyz^3\le\ln\sqrt{27}R^5$, 即 $xyz^3\le\sqrt{27}R^5=\sqrt{27}(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5})^{\frac{5}{2}}$,

即 $x^2y^2z^6\le 27(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5})^5$, 令 $x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$, 则

$$abc^3\le 27(\frac{a+b+c}{5})^5$$

14. (1)解 1. 积分区域分成 2 部分：$D=D_1(xy\geq 1)+D_2(xy\leq 1)$, 其中

$$D_1=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 2,\frac{1}{x}\leq y\leq 2\},$$

$$A=\iint\limits_{D}|xy-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(xy-1)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}(xy-1)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(xy-1)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}(xy-1)\,\mathrm{d}y+4-(\int_0^2 x\,\mathrm{d}x)^2$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2x+\frac{1}{2x}-2)\,\mathrm{d}x=2[(x^2+\frac{1}{2}\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-3]=2(\frac{3}{4}+\ln 2)=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

或解 2. 积分区域分成 3 部分：$D=D_1+D_2+D_3$,

$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq\frac{1}{2},0\leq y\leq 2\},D_2=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 2,0\leq y\leq\frac{1}{x}\},$$

$$D_3=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 2,\frac{1}{x}\leq y\leq 2\}$$

则 $A=\iint\limits_{D_1}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(1-xy)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3}(xy-1)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}(1-xy)\,\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}(xy-1)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}+2\ln 2\,.$$

(2) $f(x,y)$ 在 D 上连续, 存在点 $(\xi,\eta)\in D$, 使 $|f(\xi,\eta)|=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$,

故 $1=|\iint\limits_{D}xy\,f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma|=|\iint\limits_{D}[xy\,f(x,y)-f(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma|$

$$\leq\iint\limits_{D}|xy-1|\cdot|f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma\leq|f(\xi,\eta)|\iint\limits_{D}|xy-1|\,\mathrm{d}\sigma=|f(\xi,\eta)|\,A$$

则存在点 $(\xi,\eta)\in D$, 使 $|f(\xi,\eta)|\,A\geq 1$.