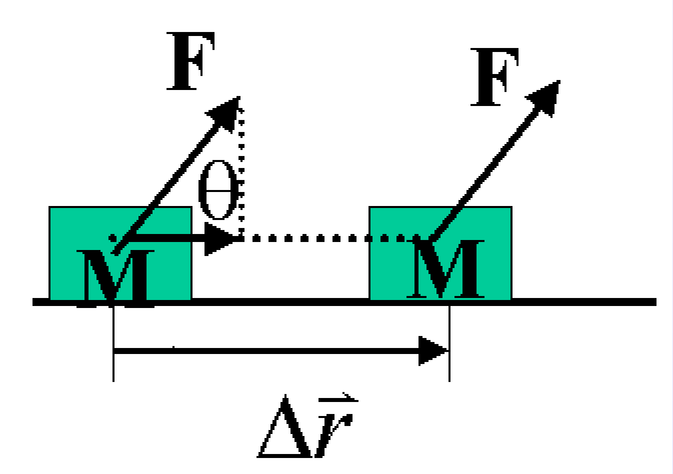
2-7 功 动能定理



一、功 力的空积累效应

1、恒力的功

$$A = F\cos\theta\Delta r = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

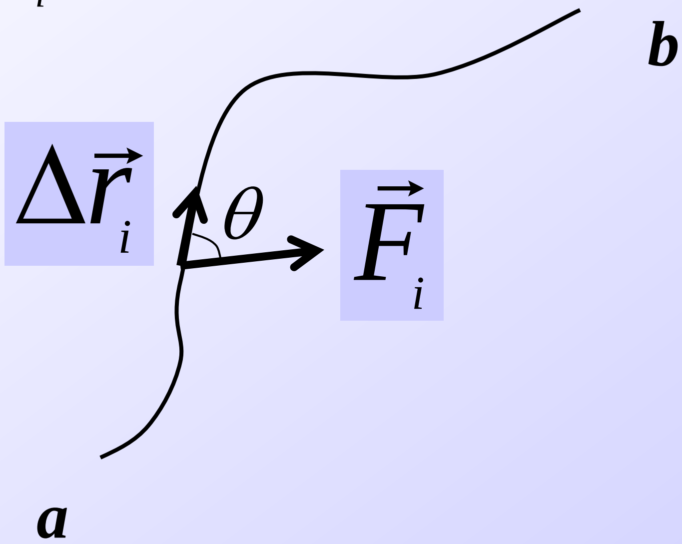
功等于力在物体位移方向的分量与位移大小的乘积

功是标量，但有正负。

2、变力的功

如果力是位置的函数，设质点在力的作用下沿一曲线运动，则功的计算如下：

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i \qquad A_{a-b} \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$



$$\boxed{A_{a-b} = \lim_{\Delta \vec{r}_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$A_{a-b} = \int_a^b (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)$$

注意：

1、功是过程量。

2、功是相对量，和参照系有关。

3、合力的功为各分力的功的代数和。

3、功率 力在单位时间内所作的功

$$平均功率：\overline{P}=\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$瞬时功率：\quad P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{dA}{dt}$$

$$\because dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\therefore P=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

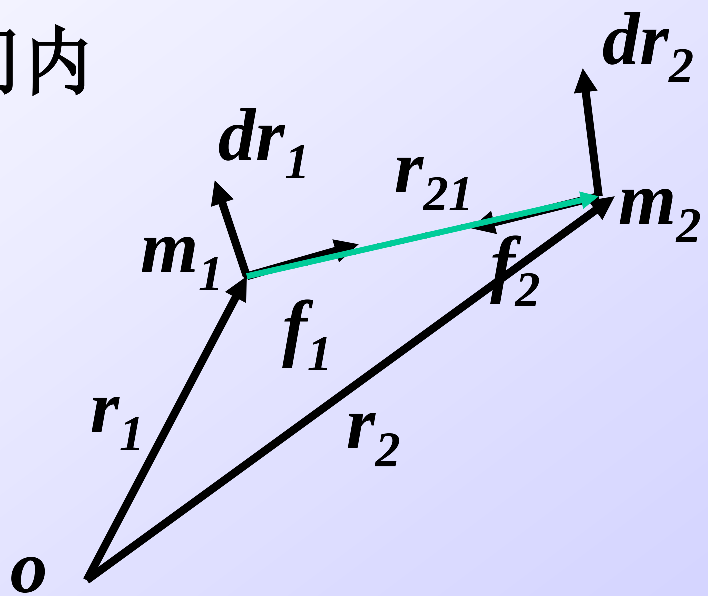
单位：W或Js^{-1}　　　量纲：ML^{2}T^{-3}

4、一对作用力和反作用力的功

m_1、m_2组成一个系统在Δt时间内

$m_1 \quad \vec{r}_1 \quad \vec{f}_1 \quad d\vec{r}_1$

$m_2 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{f}_2 \quad d\vec{r}_2$



$$dA = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

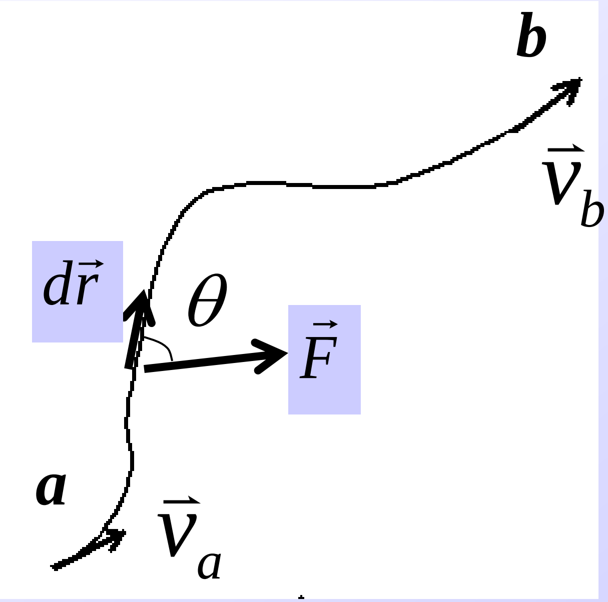
$$\because \vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \qquad \therefore dA = \vec{f}_2 \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{f}_2 \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\because \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{21} \qquad \therefore dA = \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_{21}$$

两质点间的一对作用力和反作用力所做功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一质点所移动的路径所做的功。

二、质点动能定理

能就是做功的能力或做功的本领。



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_{v_a}^{v_b} mvdv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

定义：动能 $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$A=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

$$\boldsymbol{A= E_K - E_{K0} = \Delta E_k}$$

动能定理：合力对质点所做的功等于质点动能的增量。

说明

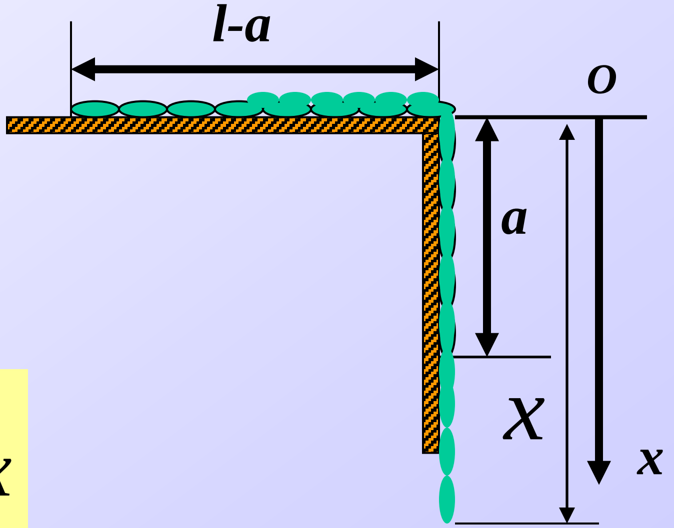
$$\textbf{1、A}\begin{cases} >0 & \Delta E_k>0 \\ <0 & \Delta E_k<0 \\ =0 & \Delta E_k=0 \end{cases}$$

2、功是过程量，可以用状态量（动能）之差来表示。

3、动能定理成立的条件：惯性系。

例1、一链条总长为L，质量为m。放在桌面上并使其下垂，下垂的长度为a，设链条与桌面的滑动摩擦系数为μ，令链条从静止开始运动，则：（1）到链条离开桌面的过程中，摩擦力对链条做了多少功？（2）链条离开桌面时的速率是多少？

解：(1)建坐标系如图



$$f = \mu \frac{m}{l}(l-x)g$$

$$A_f = \int_a^l \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_a^l -\frac{\mu m g}{l}(l-x)dx$$

$$= -\left[\frac{\mu m g}{l}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right)\right]_a^l = -\frac{\mu m g}{2l}(l-a)^2$$

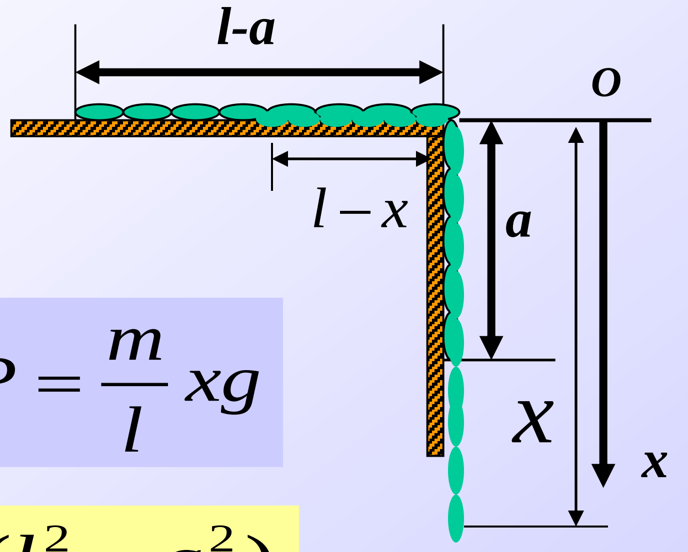
注意：摩擦力作负功！

(2)对链条应用动能定理：

$$A_P + A_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\because v_0 = 0 \therefore A_P + A_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$P = \frac{m}{l}xg$$



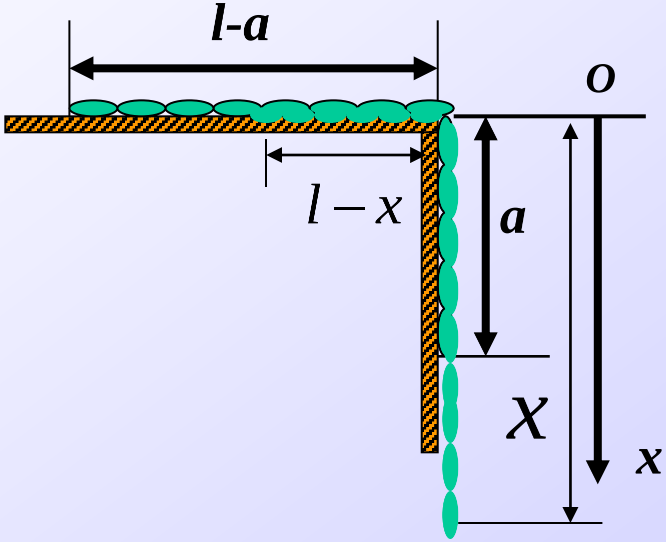
$$A_P = \int_a^l \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_a^l \frac{m}{l}xgdx = \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l}$$

前已得出：$$A_f = -\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}$$

$$\therefore \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l} - \frac{\mu mg(l-a)^2}{2l} = \frac{1}{2}mv^2$$

得$$v = \sqrt{g/l}\left[(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

或利用牛顿定律：



$$\frac{m}{l}xg-\mu\frac{m}{l}(l-x)g=m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{m}{l}xg-\mu\frac{m}{l}(l-x)g=mv\frac{dv}{dx}$$

$$\int_a^l\frac{m}{l}(1+\mu)gxdx+\int_a^l\mu mgdx=m\int_0^v vdv$$

得$v=\sqrt{g/l}\left[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

2-8　势　能

一、重力功及其特点：

质量m为的物体，从a点沿a-c-b路径到达b点：

$$A_{ab} = \vec{P}\cdot\vec{S} = mgS\cos\theta = mg(y_a - y_b)$$

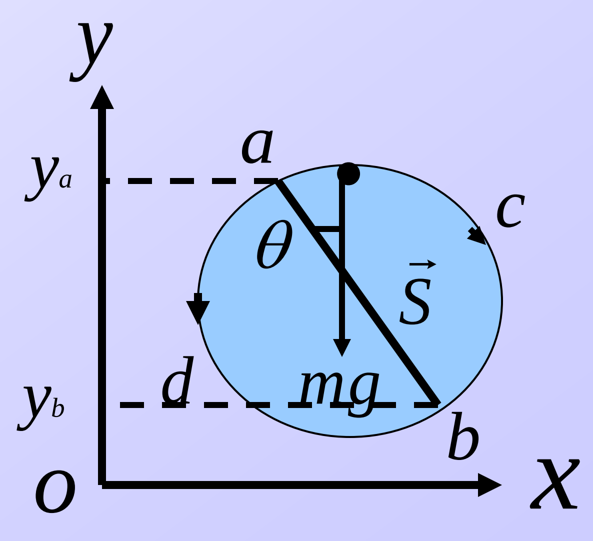
特点：重力功只与物体的始末位置有关，
而与物体运动的路径无关。

从a点沿a-d-b路径到达b点：

$$A_{ab} = \vec{P}\cdot\vec{S} = mg(y_a - y_b)$$

从a点沿a-c-b-d-a路径回到a点：　$A = 0$

特点：物体在重力场中沿任意闭合路径运动一周时，重力所做的功为零。



二、重力势能

定义：物体重力的大小与物体距某一参考点的高度之积

$E_{Pa} = mgy$　　a点距地面的高度为y

重力功：$A_{ab} = mg(y_a - y_b) = E_{pa} - E_{pb} = -(E_{pb} - E_{pa})$

结论：重力功等于重力势能增量的负值。

说明

1）物体在某一点的重力势能只有相对意义，而两点的势能差才具有绝对意义。

2）重力势能属于物体与地球组成的系统所具有的。

三、保守力和势能

保守力：力对质点做功的大小只与质点的始末位置有关，而与路径无关。

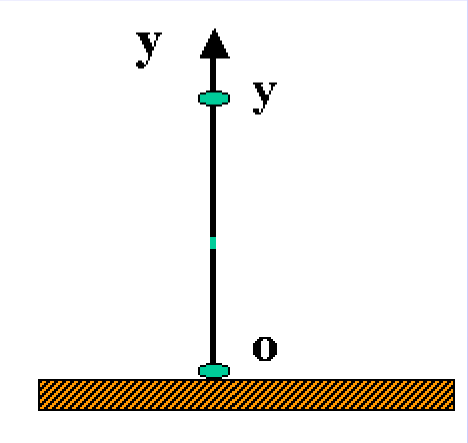
或者说：如果力对沿任意闭合路径运动一周的质点所做的功为零。

$$\oint \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = 0$$ 作功与路径无关

势能：利用保守力的功定义 ***Ep***

$$A_{保} = \int_a^b \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$ 势能差

保守力所做的功等于系统势能增量的负值。



$$E_P(a) = 0 \qquad E_P(b) = \int_b^{势能零点} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

以地面为零势能点

四、弹性力的功　弹性势能

弹性力的功：

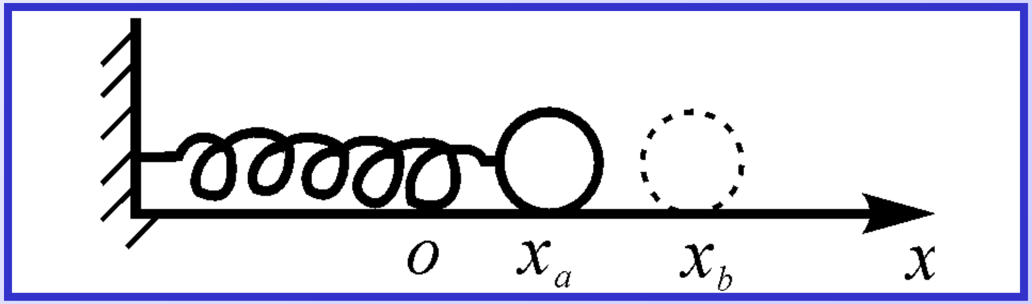
弹性力：　胡克定律　$\vec{F} = -k\,\vec{x}$

元功　$dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -kxdx$

从 $x_a \to x_b$　$A = \int_{x_a}^{x_b} -kxdx = -\frac{1}{2}k({x_b}^2 - {x_a}^2)$

特点：弹性力的功的大小只与质点的始末位置有关，而与路径无关。

弹性力是保守力。



弹性势能： $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$$A = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$

结论：弹性力的功等于弹性势能增量的负值。

五、引力的功　引力势能

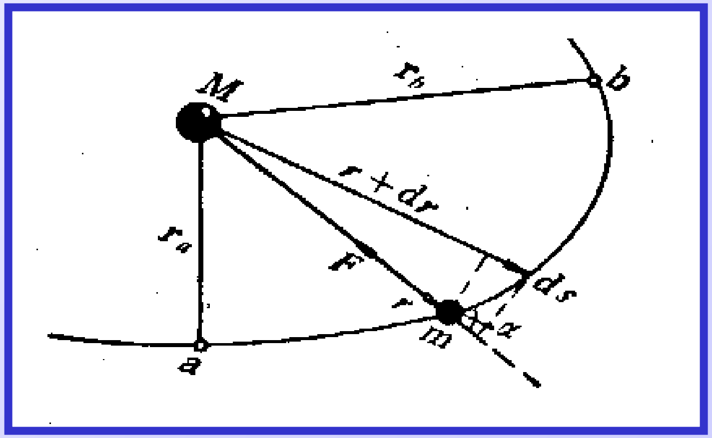
引力的功：

万有引力 $\vec{F}=-G\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}$　　元功 $dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=-G\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{s}$

$\because\ \vec{r}\cdot d\vec{s}=rds\cos\alpha=rdr$　　$\therefore\ dA=-G\dfrac{mM}{r^2}dr$

万有引力的功 $A=\int dA=-GmM\int_{r_a}^{r_b}\dfrac{1}{r^2}dr=-GmM\left(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b}\right)$

结论：万有引力功的大小只与质点的始末位置有关，而与路径无关。



引力势能： $r\to\infty$　　$E_P(\infty)=0$

$$E_P(r)=\int_r^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}dr=-GMm\frac{1}{r}$$

结论：引力的功等于引力势能增量的负值。

六、势能和保守力的关系：

$$A_{保} = \int_a^b \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

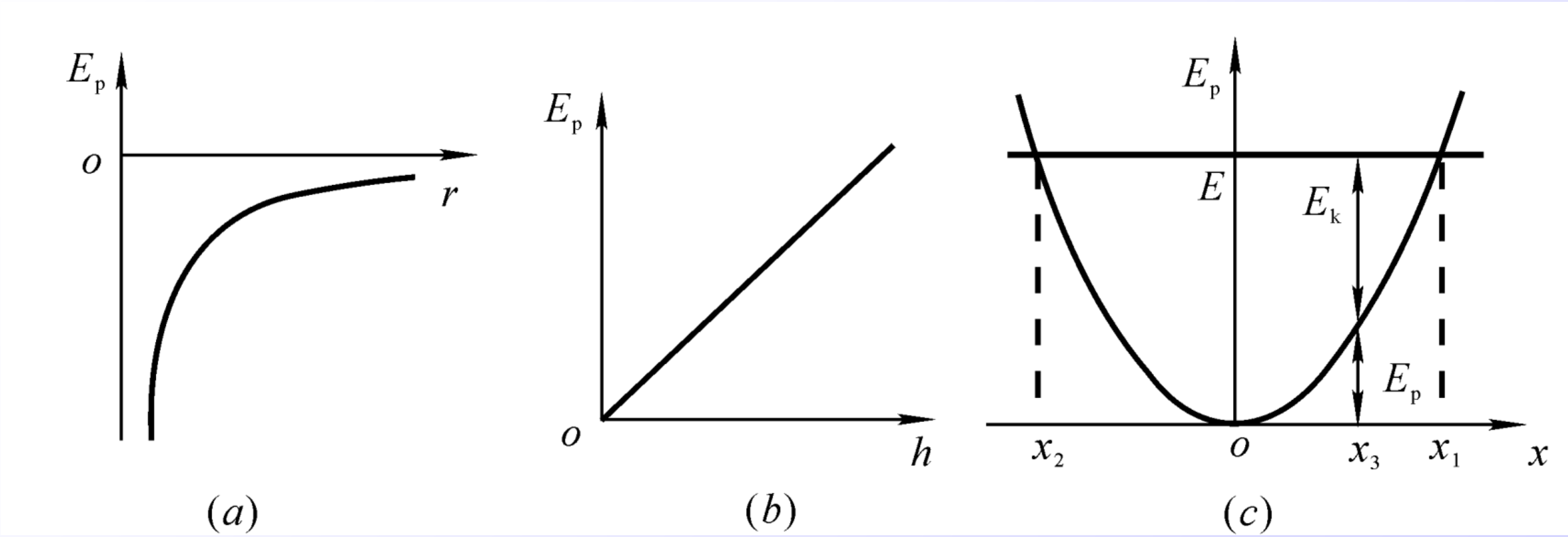
$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} \right) = -\nabla E_p \quad \text{势能梯度}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

保守力等于势能梯度的负值。

七、势能曲线:势能随位置变化的曲线。



万有引力势能曲线　　重力势能曲线　　弹性势能曲线

曲线斜率为保守力的大小。从曲线可见零势能点的选取，可分析系统的平衡条件,运动范围及能量的转化。

质点动力学

作业:

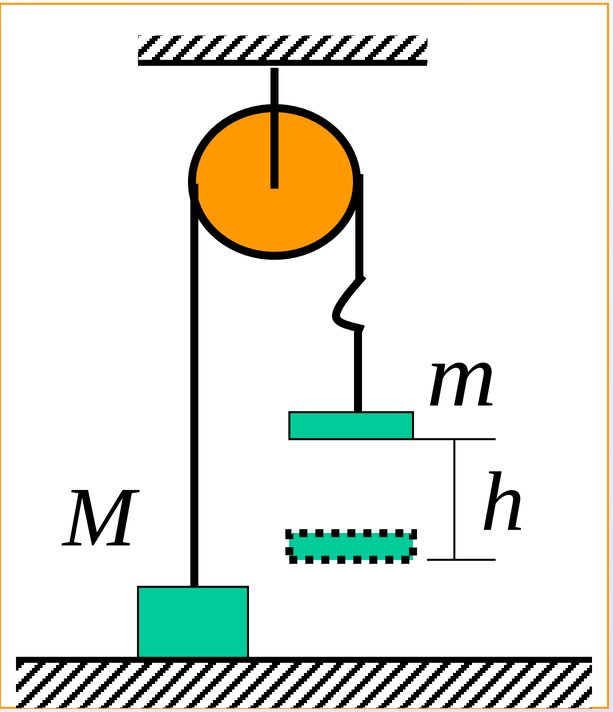
2 -48

-72

-82

-90

例题2：一绳跨过一定滑轮，两端分别系有质量m及M的物体，且$M > m$。最初M静止在桌上，抬高m使绳处于松弛状态。当m自由下落距离h后，绳才被拉紧，求此时两物体的速率v和M所能上升的最大高度(不计滑轮和绳的质量、轴承摩擦及绳的伸长)。



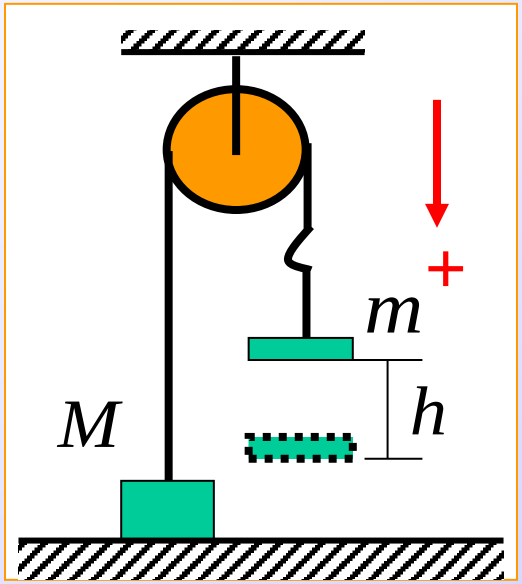
分析运动过程

当 m 自由下落 h 距离，绳被拉紧的瞬间，m和 M 获得相同的运动速率 v，此后 m 向下减速运动，M 向上减速运动。M 上升的最大高度为：

$$H = \frac{v^2}{2a}$$

分两个阶段求解

第一阶段：绳拉紧，求共同速率 v



解1： $\because M > m \quad \therefore m$不能提起$M$，

共同速率 $v = 0$

解2：绳拉紧时冲力很大，忽略重力，

$m + M$ 系统动量守恒

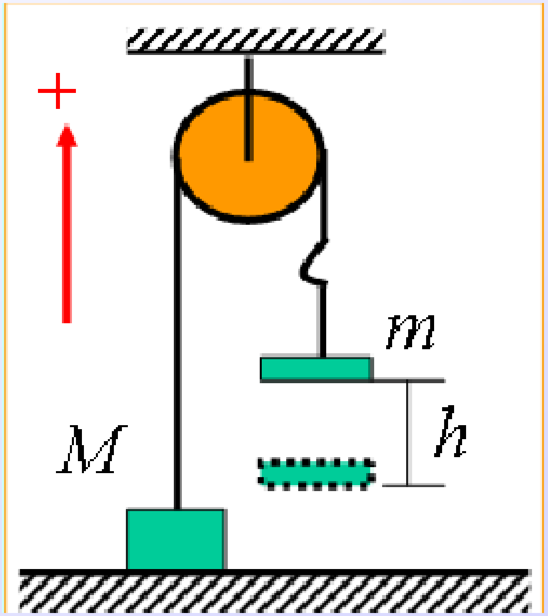
$$m\sqrt{2gh} = (m + M)v \quad ; \quad v = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + M}$$

解3： 动量是矢量，以向下为正，系统动量守恒：

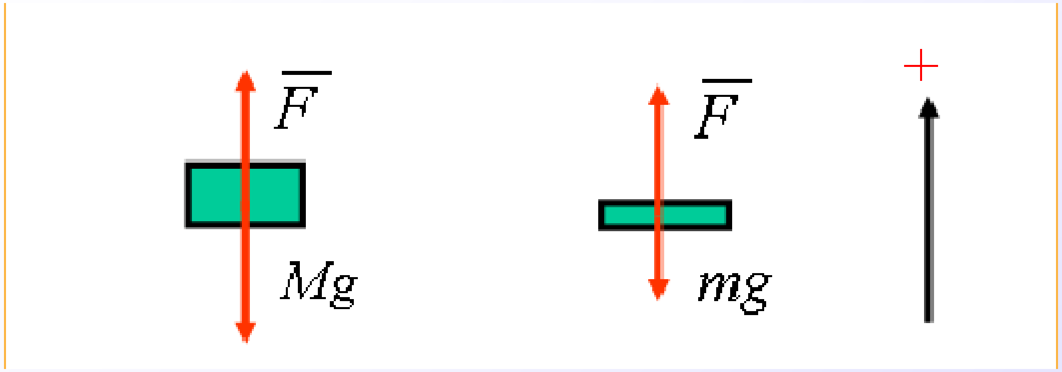
$$m\sqrt{2gh} = mv + M(-v) \quad ; \quad v = \frac{m\sqrt{2gh}}{m - M}$$

以上三种解法均不对！

正确解法： 分别对它们用动量定理



设平均冲力大小为$\overline{F}$ ，取向上为正方向



$$I_1=\left(\overline{F}-mg\right)\Delta t=-mv-(-m\sqrt{2gh})$$

$$I_2=\left(\overline{F}-Mg\right)\Delta t=Mv-0=Mv$$

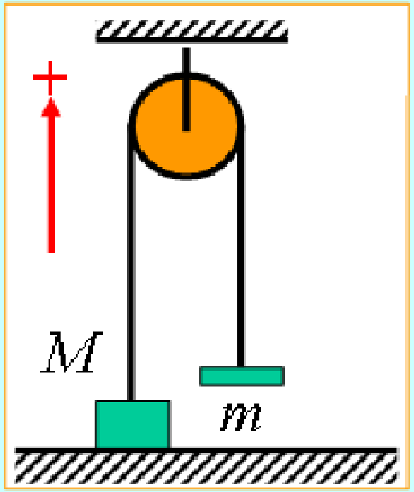
忽略重力，则有 $I_1=I_2$

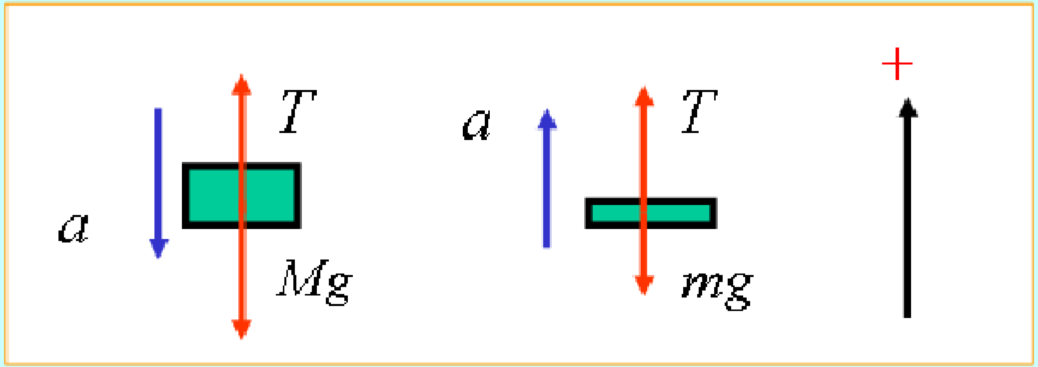
$$-mv-(-m\sqrt{2gh})=Mv$$

$$v=\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

第二阶段：M 与 m 有大小相等，方向相反的加速度 a

设绳拉力为 T ，画出 m 与 M 的受力图





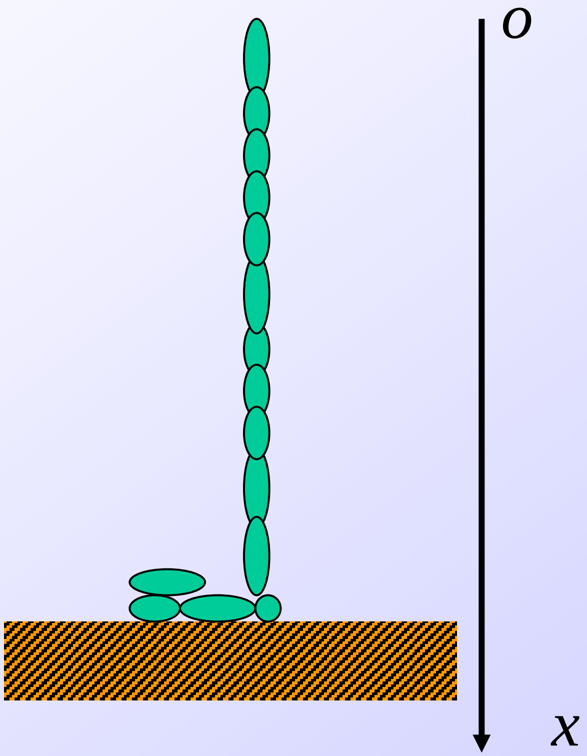
由牛顿运动定律 $\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$ 解得 $a = \dfrac{(M-m)g}{M+m}$

M 上升的最大高度为

$$H = \frac{v^2}{2a} = \left(\frac{m(\sqrt{2gh})}{M+m}\right)^2 \Bigg/ \left(\frac{2(M-m)g}{M+m}\right) = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$

例2-18

解法二：以流动体为研究对象。取如图坐标，设t时刻已有x长的绳子落至桌面，随后的dt时间内将有质量为$\rho_1 dx$的绳子以dx/dt的速率碰到桌面而停止，它的动量变化率为：



$$\frac{dP}{dt}=\frac{0-\rho_1 dx\cdot\dfrac{dx}{dt}}{dt}$$

根据动量定理，桌面对绳子的冲力为：

$$F' = \frac{dP}{dt} = \frac{-\rho_1 dx \cdot \dfrac{dx}{dt}}{dt} = -\rho_1 v^2$$

绳子对桌面的冲力F＝－F' 即：

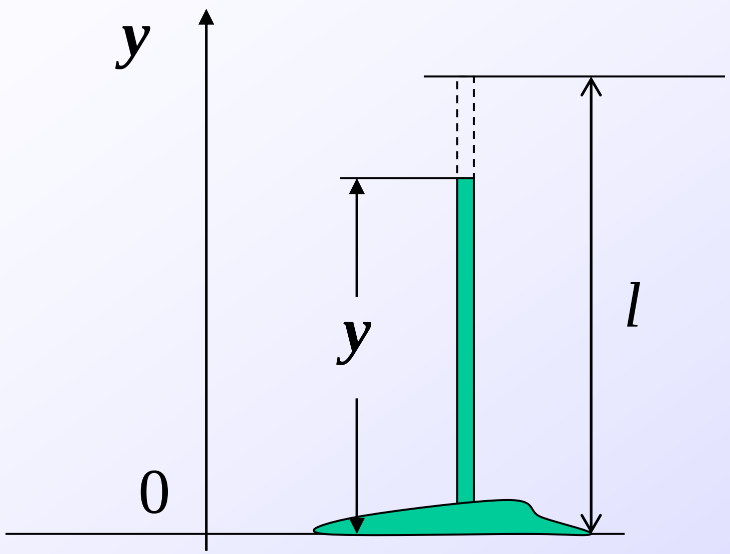
$$F = \rho_1 v^2 \quad 而 v^2 = 2gx \quad \therefore F = 2\rho_1 gx$$

而已落到桌面上的绳子的重量为: $\rho_1 gx$

所以$F_{总}=F+\rho_1 gx = 2\rho_1 gx+\rho_1 gx = 3\rho_1 gx$

解法三：利用牛顿定律求解。

在竖直向上方向建坐标，地面为原点（如图）。



设压力为 F,下落的任意时刻时：

$$F - \rho_1 g l = \frac{dp}{dt}$$

$$p = \rho_1 y v \quad -> \quad \frac{dp}{dt} = \rho_1 \frac{d(yv)}{dt}$$

$$F = \rho_1 g l + \rho_1 \frac{d(yv)}{dt}$$

$$\frac{d(yv)}{dt} = y\frac{dv}{dt} + v\frac{dy}{dt}$$

$$\boldsymbol{v = \frac{dy}{dt}} \qquad \boldsymbol{-g = \frac{dv}{dt}}$$

$$v = -gt$$

$$y = l - \frac{1}{2}gt^2$$

$$l - y = \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{d(yv)}{dt} = -yg + v^2$$

$$= -yg + 2(l-y)g$$

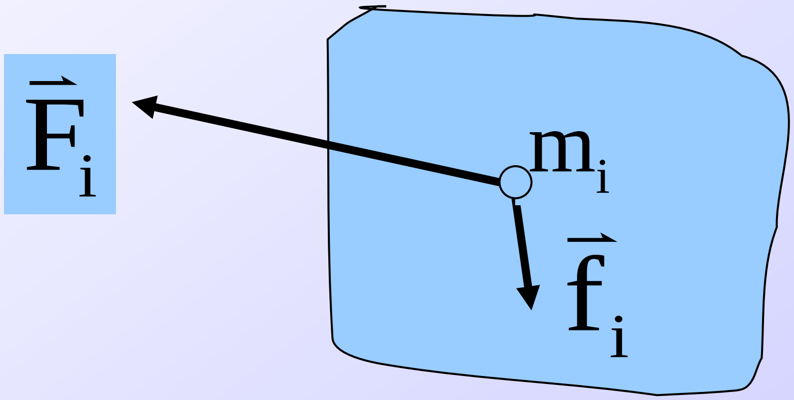
$$F = \rho_1 gl + \rho_1\frac{d(yv)}{dt} = 3\rho_1 g(l-y) = 3\rho_1 gx$$

2-9 功能原理 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理：

质点系： 对系统内质点 m_i 有

$$A_{Fi}+A_{fi}=E_{ki2}-E_{ki1}$$



对系统内所有质点求和为：

$$\sum(A_{Fi}+A_{fi})=\sum(E_{ki2}-E_{ki1})$$

$$A_{外}+A_{内}=E_{k2}-E_{k1}$$

质点系的动能定理

所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量。

二、功能原理

$$\begin{cases} A_{外}+A_{内}=E_{k2}-E_{k1} \\ A_{内}=A_{内保}+A_{内非} \\ A_{内保}=-(E_{p2}-E_{p1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_{外}+A_{内非}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

$E=E_k+E_p$ 为系统的机械能

$$A_{外}+A_{内非}=(E_2-E_1)$$

适用于惯性系

质点系在运动过程中，它所受外力的功与系统内非保守力的功的总和等于它的机械能的增量----称功能原理。

三、机械能守恒定律

$$A_{外}+A_{内非}=(E_2-E_1)$$

当 $A_{外}+A_{内非}=0$ 时，

$(E_k+E_p)=const.$（机械能守恒）.

四、能量守恒定律

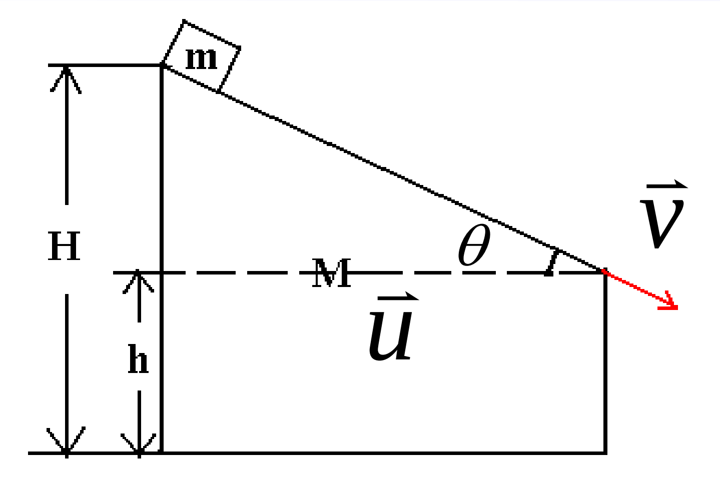
一个封闭系统内经历任何变化时，该系统的所有能量的总和保持不变。这是普遍的能量守恒定律。

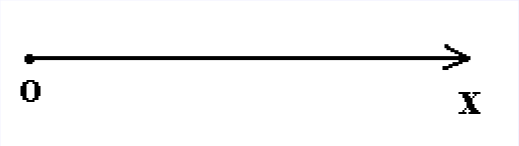
封闭系统：不受外界作用的系统。

封闭系统内有非保守力做功时，机械能不守恒，能量的形式可能变化，也可能在物体之间转移。

【例题1】如图：开始m和M都静止， m和M及M和地之间无摩擦。求（1）当m滑到斜面底端时，M的动量；（2）在这一过程中M移动的距离。

解：选m和M为一个系统，以地面为参照系





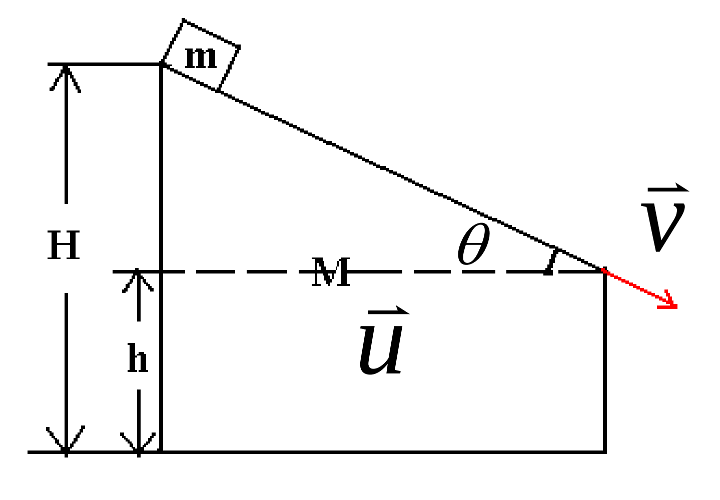
水平方向动量守恒：

$$Mu + m(v\cos\theta + u) = 0$$

机械能守恒：

$$mg(H-h) = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}m\left[(v\cos\theta + u)^2 + (v\sin\theta)^2\right]$$

$$P = Mu = -\frac{Mm}{M+m}\sqrt{\frac{2g(H-h)(m+M)}{M+(M+m)tg^2\theta}}$$



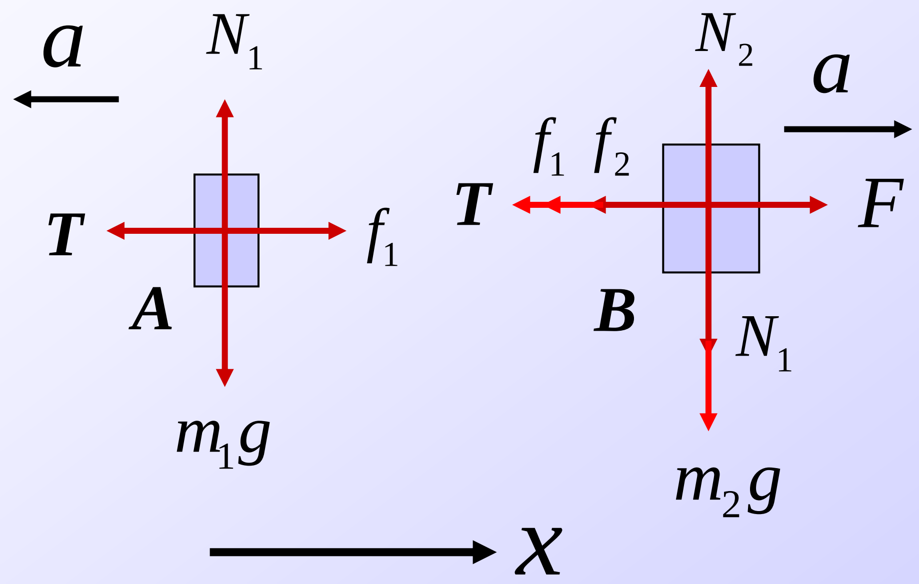
$$\int_0^t v\,dt = l = \frac{H-h}{\sin\theta} \qquad \int_0^t u\,dt = S$$

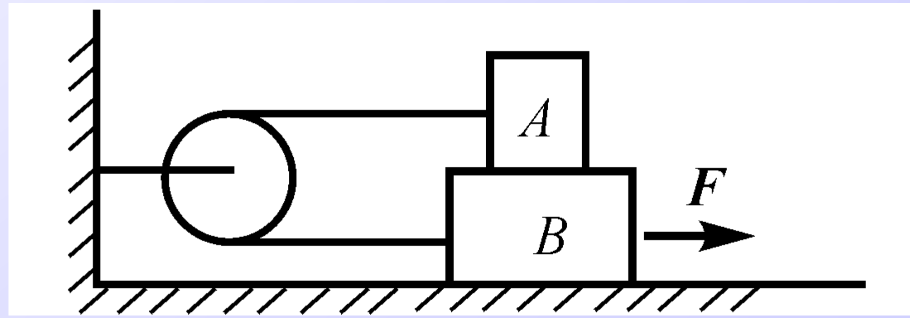
$$\int_0^t \left[Mu + m(v\cos\theta + u)\right]dt = 0$$

$$S = -\frac{m(H-h)\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}$$

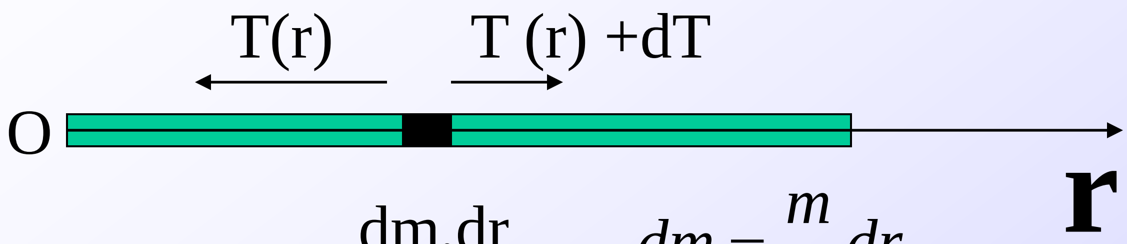
【2-3】

$$
\begin{cases}
T - f_1 = m_1 a \\
N_1 - m_1 g = 0 \\
f_1 = \mu_1 N_1 \\
F - T - f_1 - f_2 = m_2 a \\
N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \\
f_2 = \mu_2 N_2
\end{cases}
$$





【2-18】 m, l, ω 求距转轴r处绳中的张力。



$$dm = \frac{m}{l} dr$$

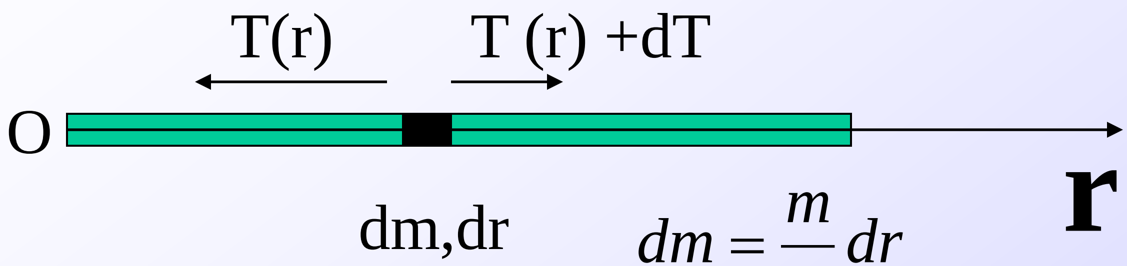
解:
$$T(r) - \left[T(r) + dT(r)\right] = dm \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$-dT(r) = \frac{m}{\ell} \cdot dr \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$\int_0^{T(r)} -dT(r) = \frac{m}{\ell} \cdot \omega^2 \cdot \int_\ell^r r \cdot dr$$

$$T(r) = \frac{m}{2\ell} \cdot \omega^2 (\ell^2 - r^2)$$

如果质量不均匀分布，单位长度的质量为 $\lambda(r) = kr^2$



$$dm = \frac{m}{l} dr$$

$$T(r) - T(r + dr) = dm \cdot \omega^2 \cdot r \qquad dm = \lambda(r)dr = kr^2 dr$$

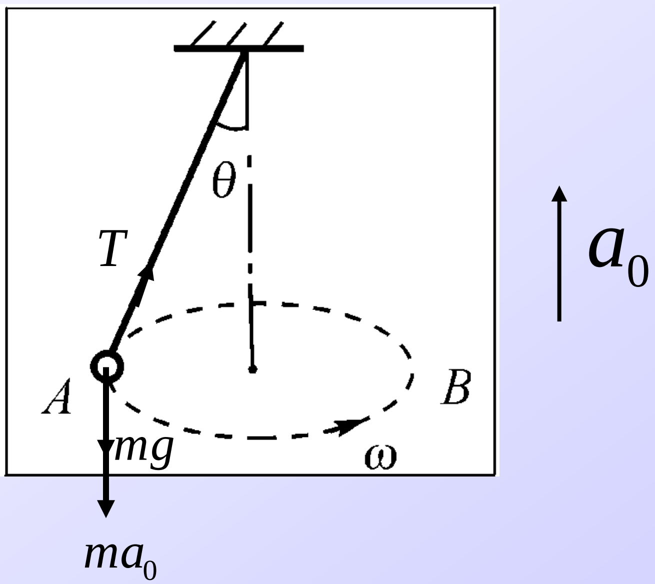
$$-dT(r) = k\omega^2 \cdot r^3 dr$$

$$\int_{T(r)}^{0} -dT(r) = k\omega^2 \int_{r}^{\ell} r^3 dr$$

$$T(r) = \frac{k\omega^2}{4}(l^4 - r^4)$$

2-19

$$\begin{cases} T\cos 30^\circ = m(g + a_0) \\ T\sin 30^\circ = m\omega^2 l \sin 30^\circ \end{cases}$$



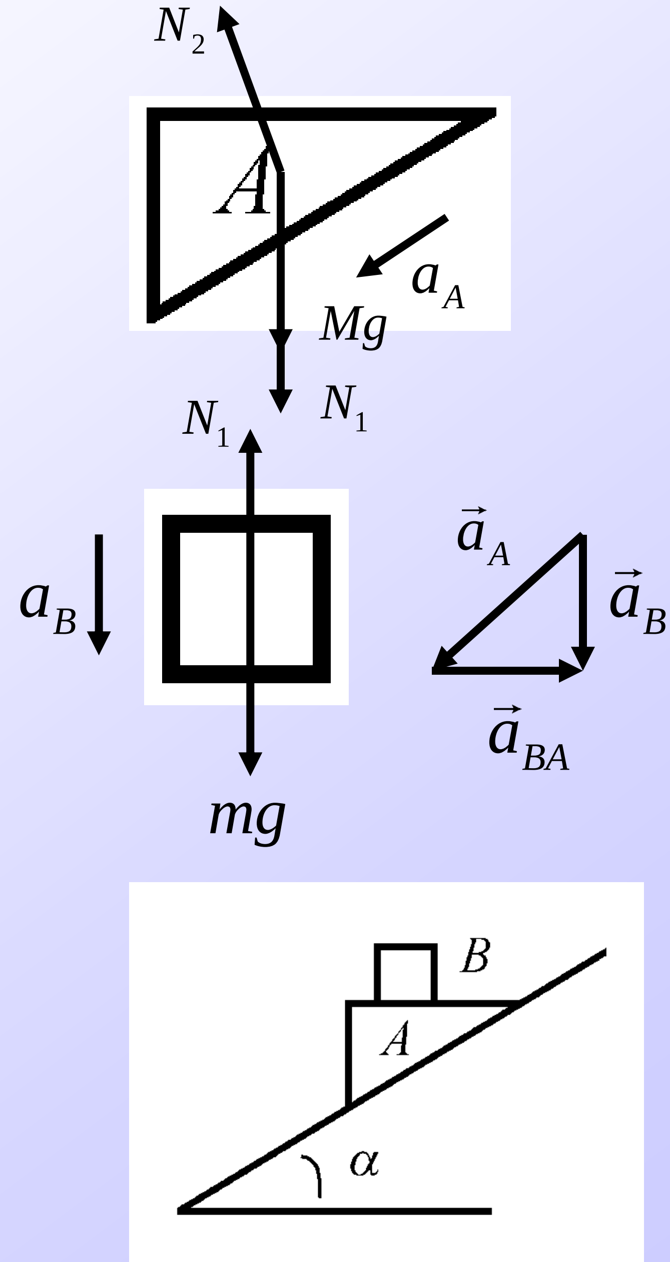
$$\omega = 7.6 rad/s$$

$$T = 7.2N$$

【2-20】

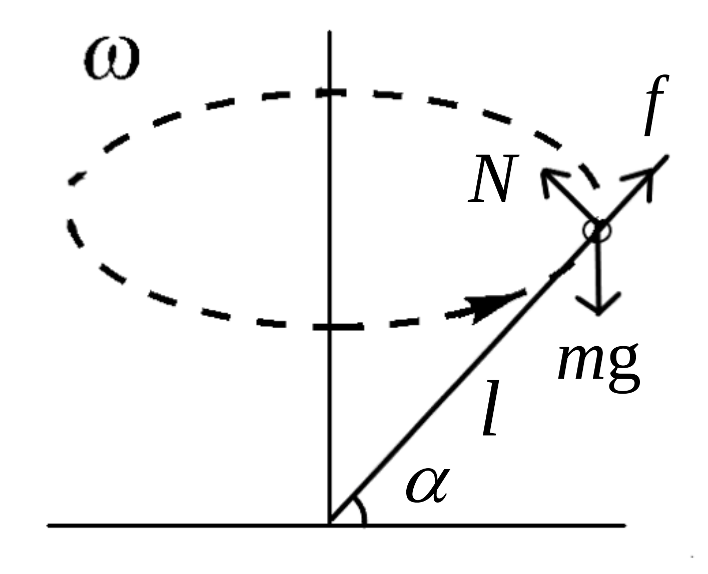
以地面为参照系

$$
\begin{cases}
(Mg + N_1)\sin\alpha = Ma_A \\
mg - N_1 = ma_B \\
a_B = a_A \sin\alpha
\end{cases}
$$



【2-27】

$$
\begin{cases}
N\sin\alpha - f\cos\alpha = m\omega^2 l\cos\alpha \\
N\cos\alpha + f\sin\alpha - mg = 0 \\
|f| \le \mu N \quad \text{稳定运动的条件}
\end{cases}
$$



质点动力学

作业:

2 -91

   -98

   -110