第5章　线性动态电路的正弦稳态分析

5.1　正弦交流电路的相量分析法

5.2　谐振

5.3　互感

5.4　三相交流电路

5.3 互感耦合电路

(mutual inductance)

5.3.1 互感和互感电压

5.3.2 互感线圈的串联和并联

5.3.3 含互感电路的计算

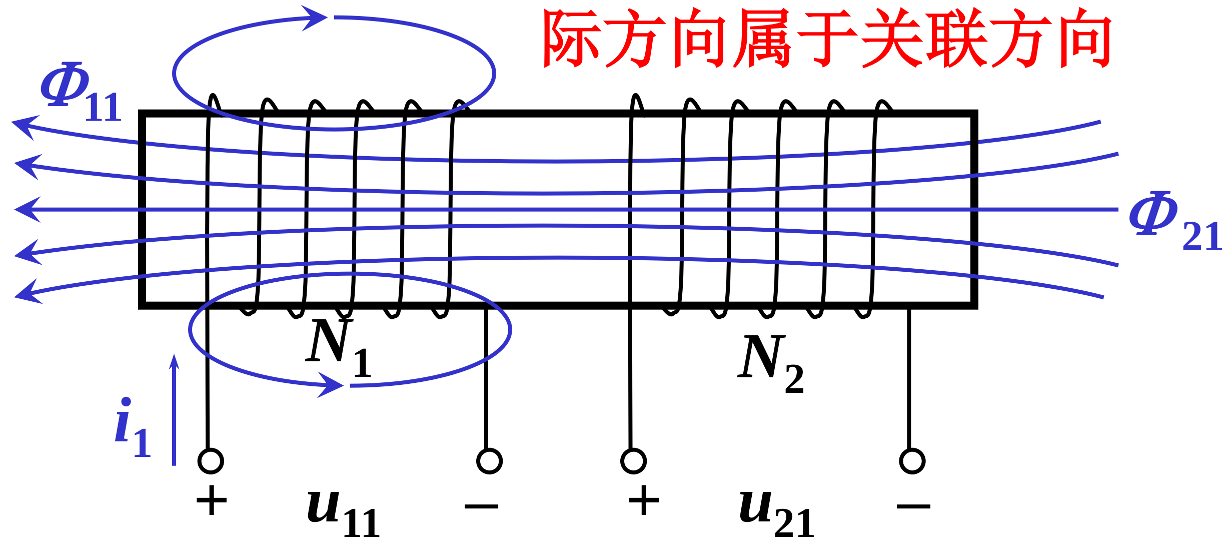
5.3.4 全耦合变压器和理想变压器

5.3.5* 实际变压器的电路模型

5.3.1 互感和互感电压

结论：自感电压与电流的实际方向属于关联方向

一、互感和互感电压



$$u_{11}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t}=N_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t}\boxed{=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$$

自感电压

$$u_{21}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t}=N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}\boxed{=M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$$

互感电压

Ψ：磁链 (*magnetic linkage*)，$\psi=N\phi$

当线圈周围无铁磁物质(空心线圈)时，Ψ_{11}、Ψ_{22}与i_1成正比。

两个线圈同时通电时，各线圈的端电压均包含自感和互感电压：

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

互感的性质：

①从能量角度可以证明：对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$

②互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数 、 相互位置和周围的介质磁导率有关，如其他条件不变时，有

$$M \propto N_1 N_2 \quad （L \propto N^2）$$

互感现象的利与弊：

利用—变压器：信号、功率传递

避免—干扰　克服：合理布置线圈相互位置减少互感作用。

耦合系数 (*coupling coefficient*) k：

$$k \overset{def}{=} \sqrt{\frac{\phi_{12}\phi_{21}}{\phi_{11}\phi_{22}}}$$

k 表示两个线圈磁耦合的紧密程度。

可以证明，$k \le 1$。

$$\because \quad L_1 = \frac{N_1\Phi_{11}}{\dot{i}_1}, \quad L_2 = \frac{N_2\Phi_{22}}{\dot{i}_2}$$

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{21}}{\dot{i}_1}, \quad M_{12} = \frac{N_1\Phi_{12}}{\dot{i}_2}$$

$$\Rightarrow \quad k \overset{def}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$K=1$ 完全耦合

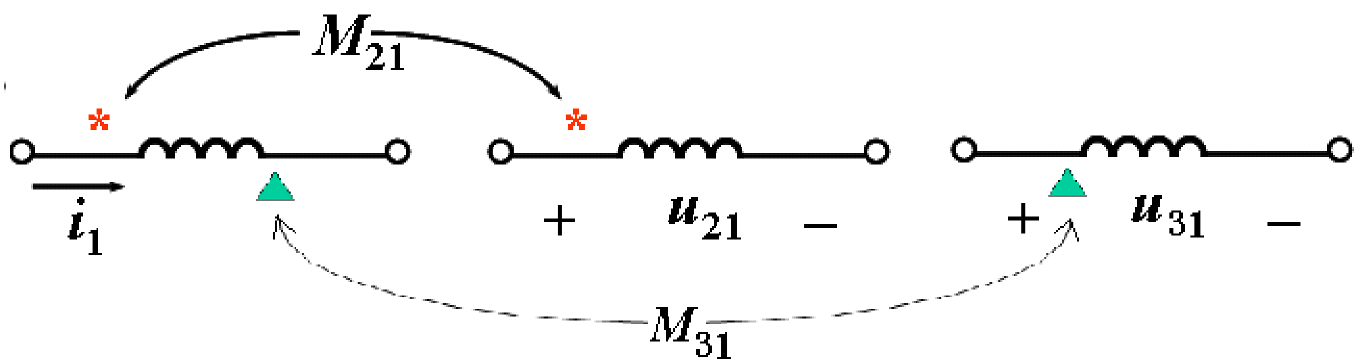
$K=0$ 无耦合

$K \Rightarrow 1$ 紧耦合

$K \Rightarrow 0$ 松耦合

二、互感线圈的同名端

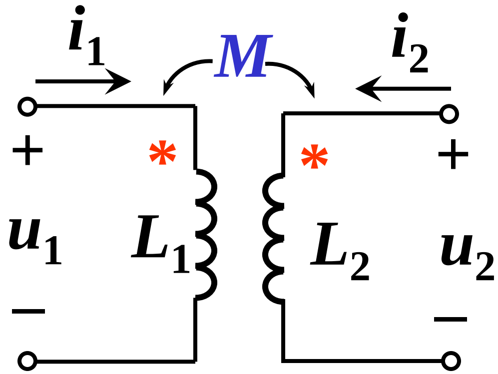
对互感电压，因产生该电压的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。

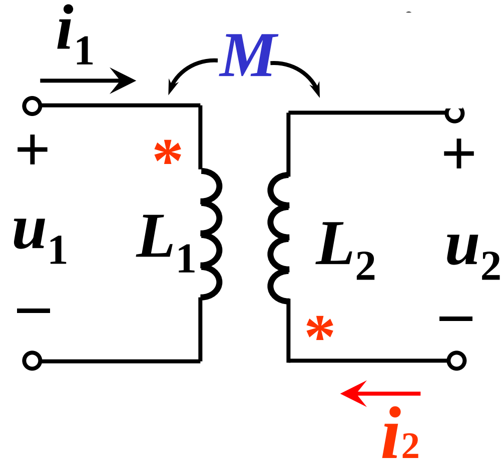


$$u_{21} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{31} = -M_{31}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入 ，其所产生的磁场相互加强时，则这两个对应端子称为同名端。





时域形式：

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

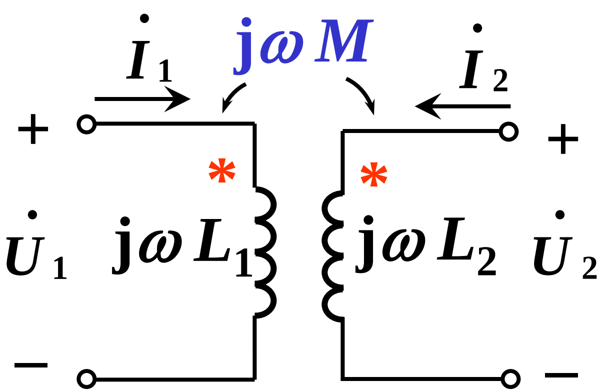
$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \mp M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

互感电压的符号既与参考方向有关又与同名端有关。

在正弦交流电路中，其相量形式的方程为



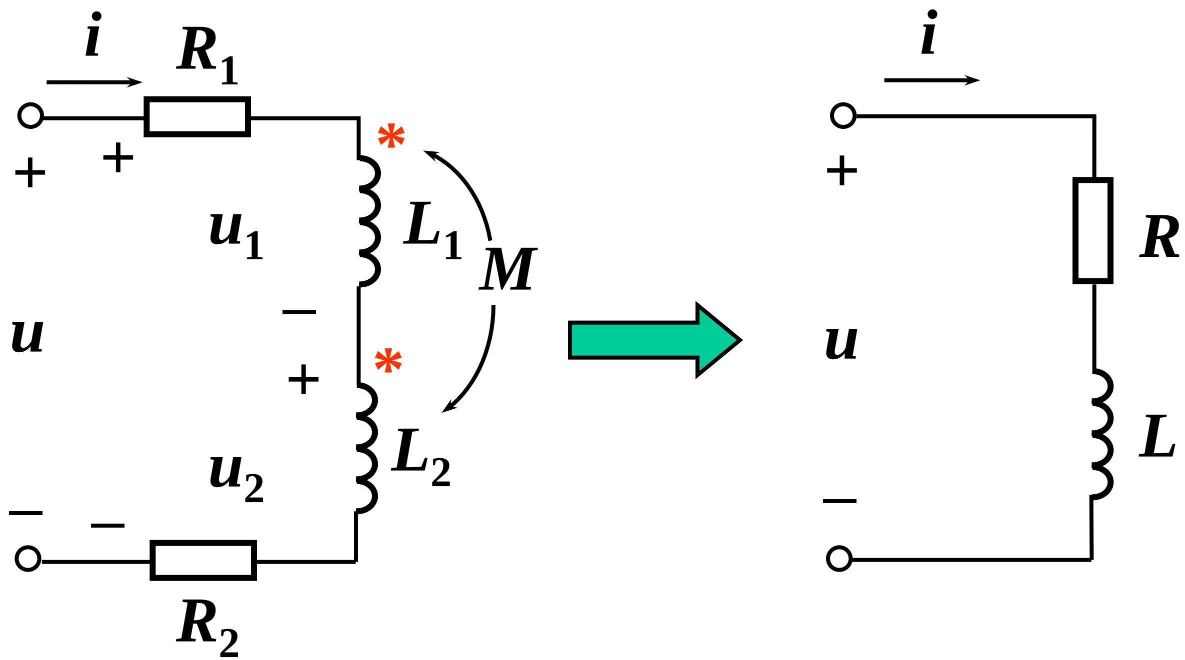
$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2$$

5.3. 2 互感线圈的联接和去耦

一、互感线圈的串联

1. 顺串

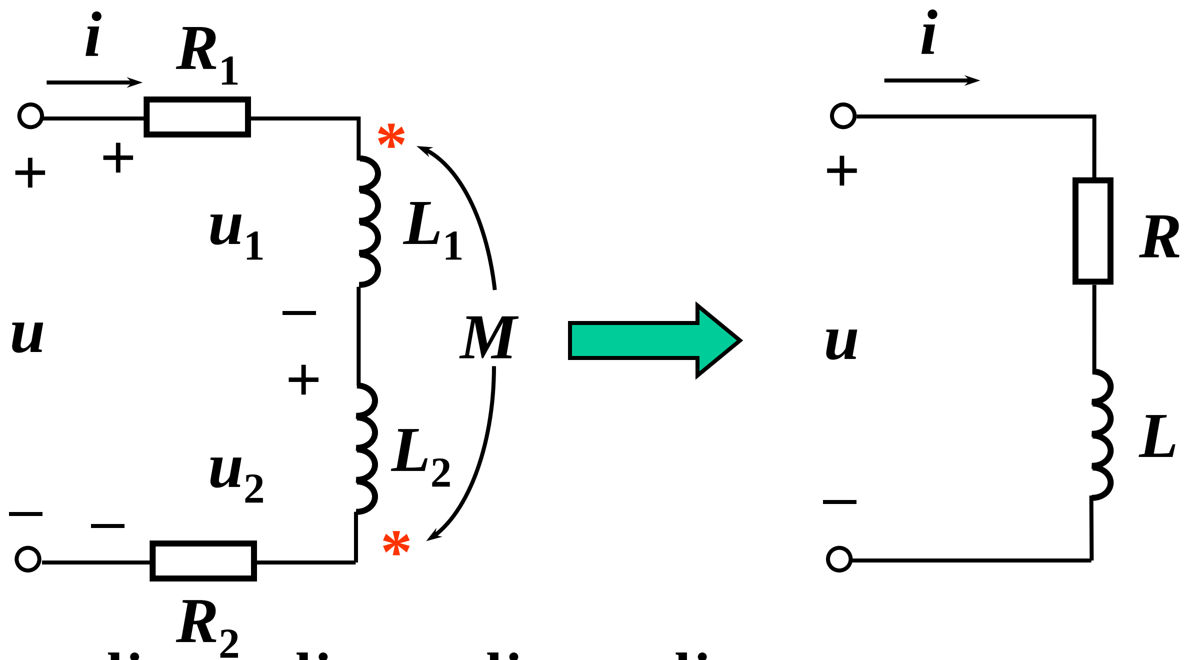


$$u = R_1 i + L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad R = R_1 + R_2 \qquad\qquad L = L_1 + L_2 + 2M$$

2. 反串



$$u = R_1 i + L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad R = R_1 + R_2 \qquad L = L_1 + L_2 - 2M$$

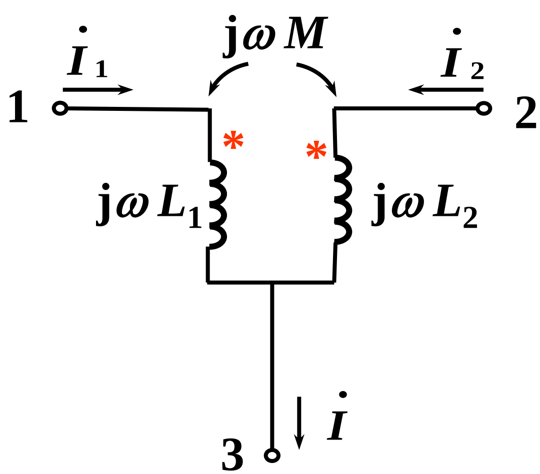
$$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0 \qquad \therefore M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

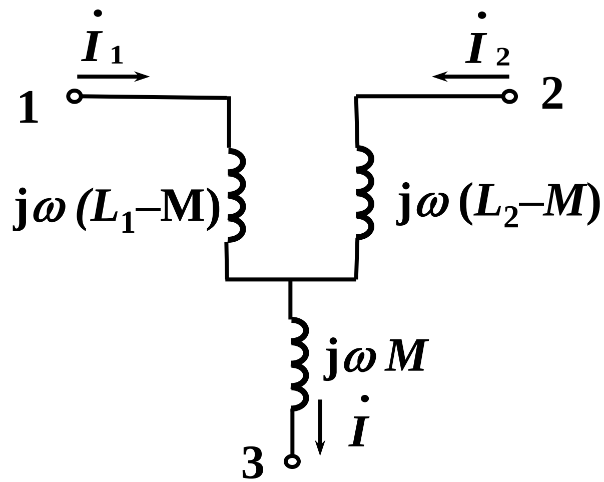
互感不大于两个自感的算术平均值。

三、互感消去法

1. 去耦等效(两电感有公共端)

(a) 同名端接在一起



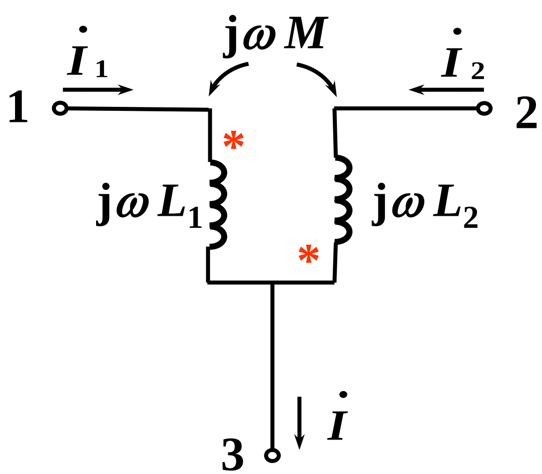


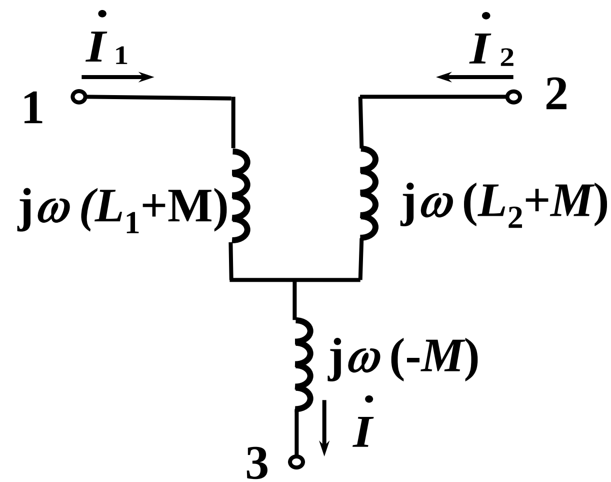
$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

(b) 非同名端接在一起



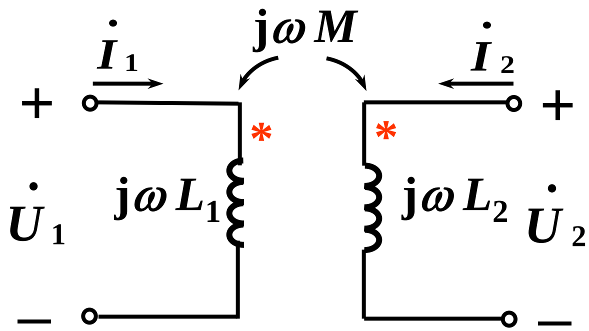


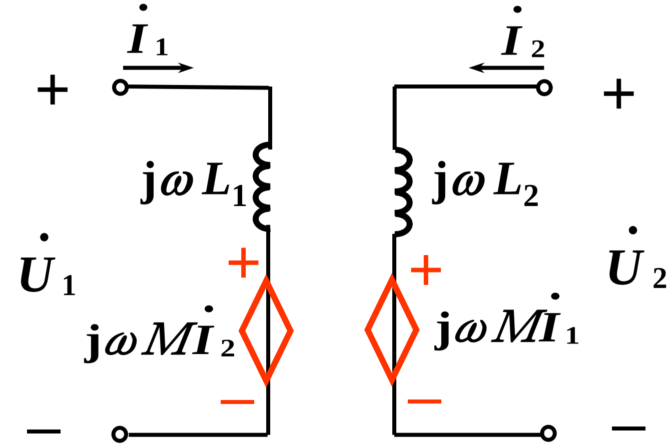
$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

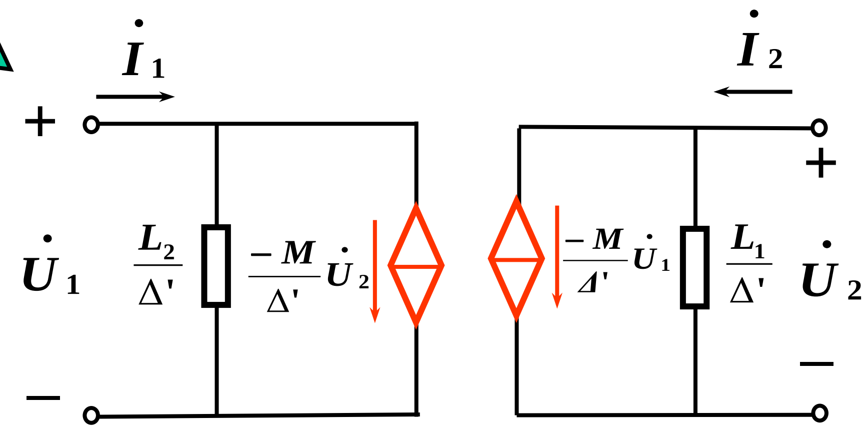
整理得

$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

2. 受控源等效电路







$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} j\omega L_2 & -j\omega M \\ -j\omega M & j\omega L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{\Delta'} & -\dfrac{M}{\Delta'} \\ -\dfrac{M}{\Delta'} & \dfrac{L_1}{\Delta'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (j\omega)^2 (L_1 L_2 - M^2), \qquad \Delta' = j\omega (L_1 L_2 - M^2)$$

去耦等效与受控源等效电路的特点：

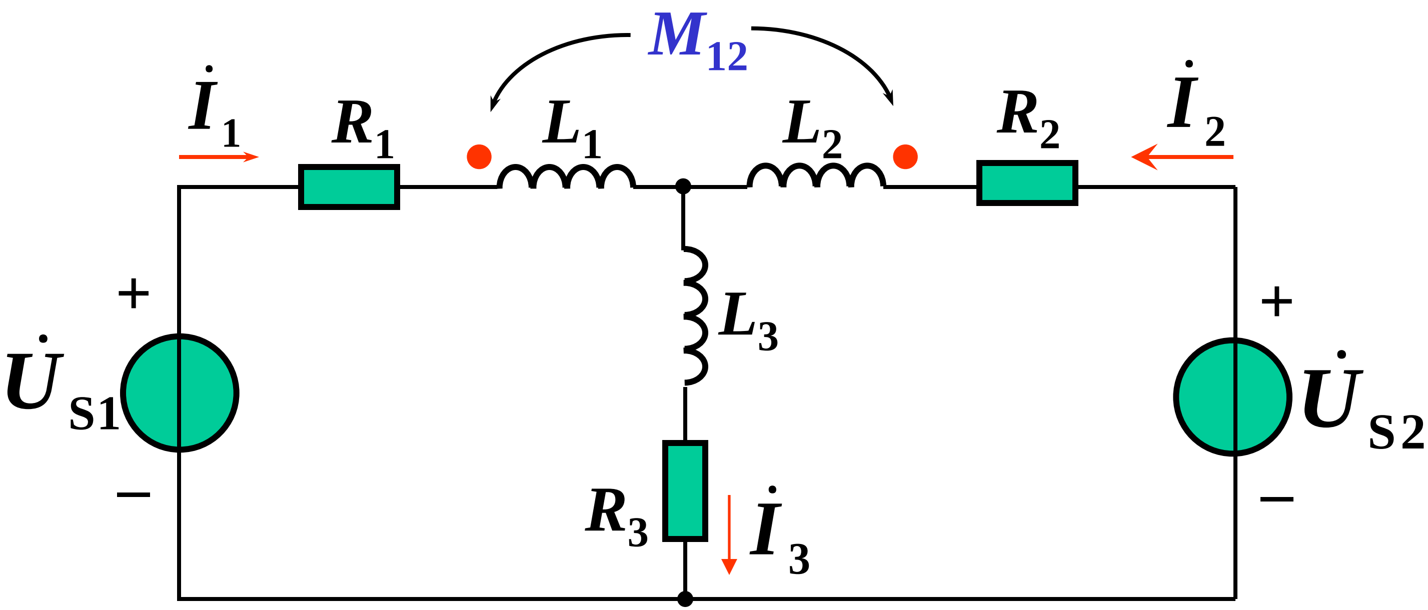
(1) 去耦等效电路简单，等值电路与参考方向无关，但必须有公共端；

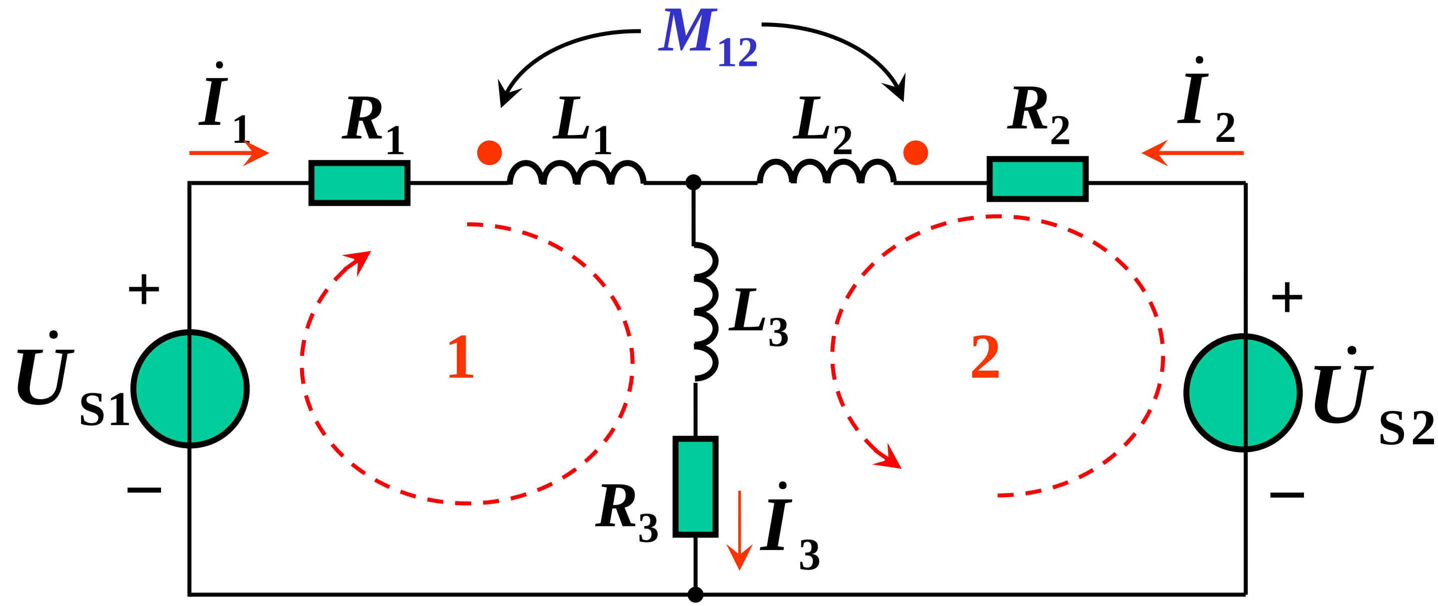
(2) 受控源等效电路，与参考方向有关，不需公共端。

5.3. 3 含互感的电路的计算

有互感的电路的计算仍属正弦稳态分析，前面介绍的相量分析的的方法均适用。只需注意互感线圈上的电压除自感电压外，还应包含互感电压。

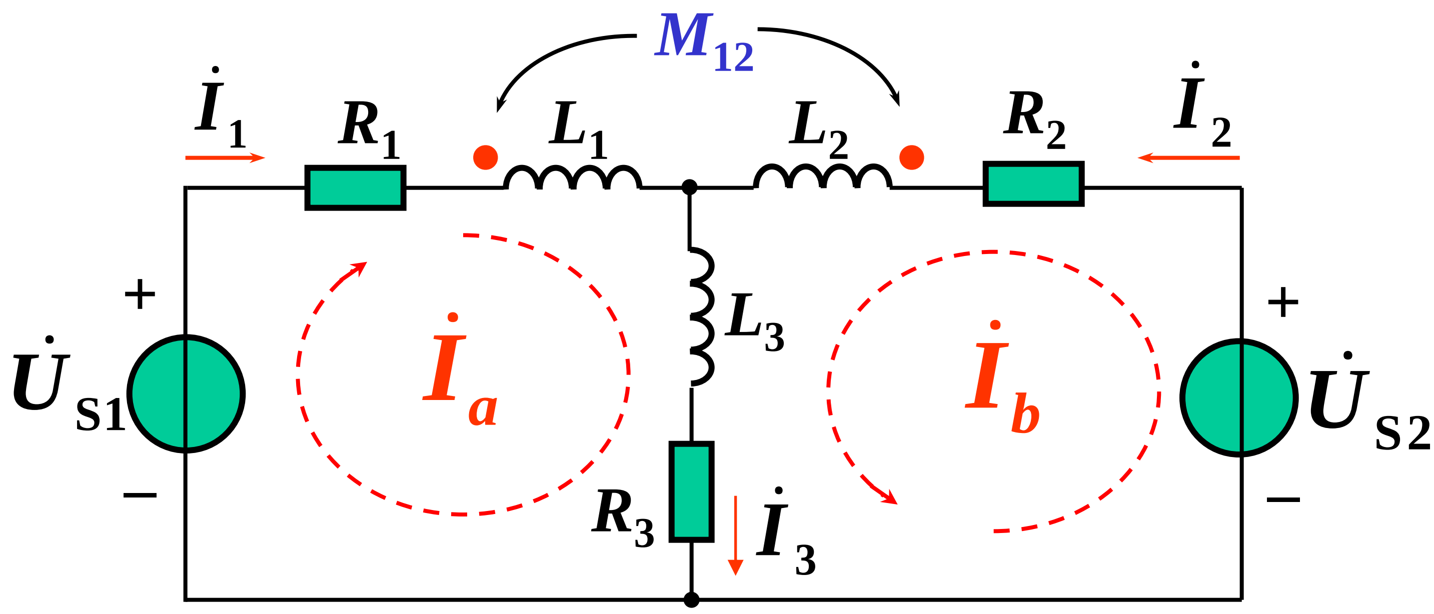
例 1. 列写下图电路的方程。





支路电流法：

$$
\begin{cases}
R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + j\omega L_3\dot{I}_3 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U}_{S1} \\
R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_3\dot{I}_3 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U}_{S2} \\
\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2
\end{cases}
$$



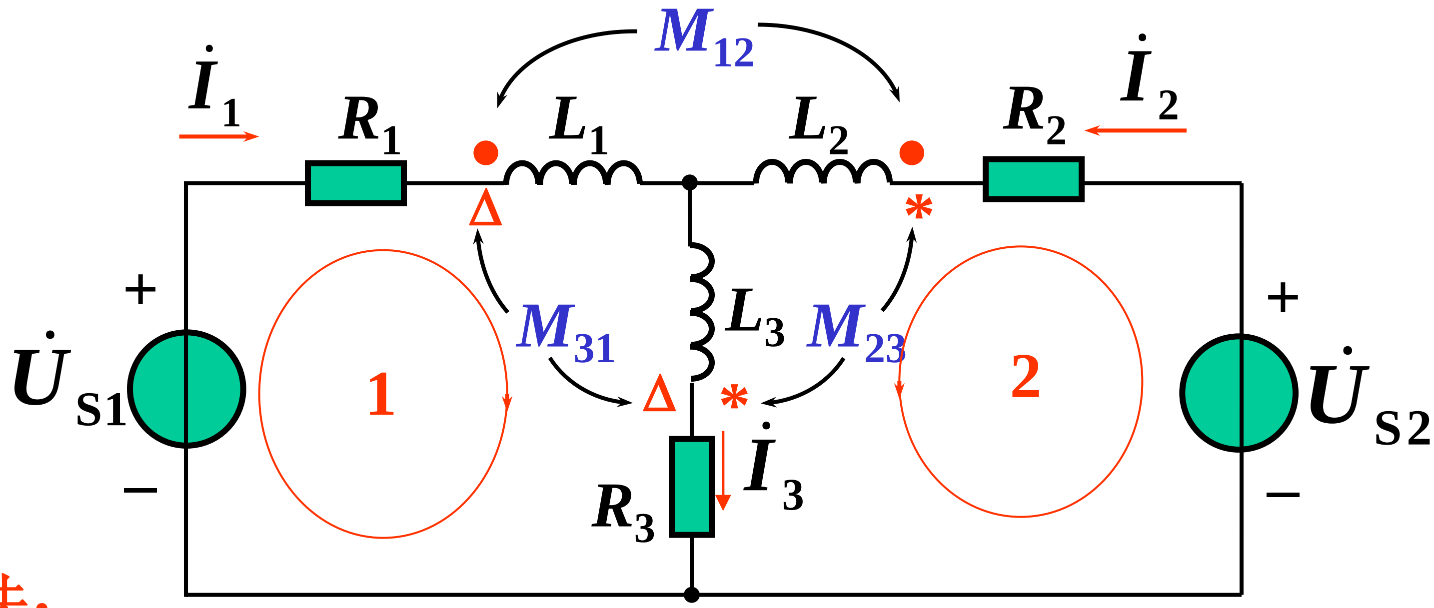
回路电流法:　(1) 不考虑互感　(2) 考虑互感

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1 + R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_a + (R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_b + j\omega M\dot{I}_b = \dot{U}_{S1} \\ (R_2 + j\omega L_2 + R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_b + (R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_a + j\omega M\dot{I}_a = \dot{U}_{S2} \end{cases}$$

注意: 互感线圈的互感电压的的表示式及正负号。

含互感的电路，直接用节点法列写方程不方便。

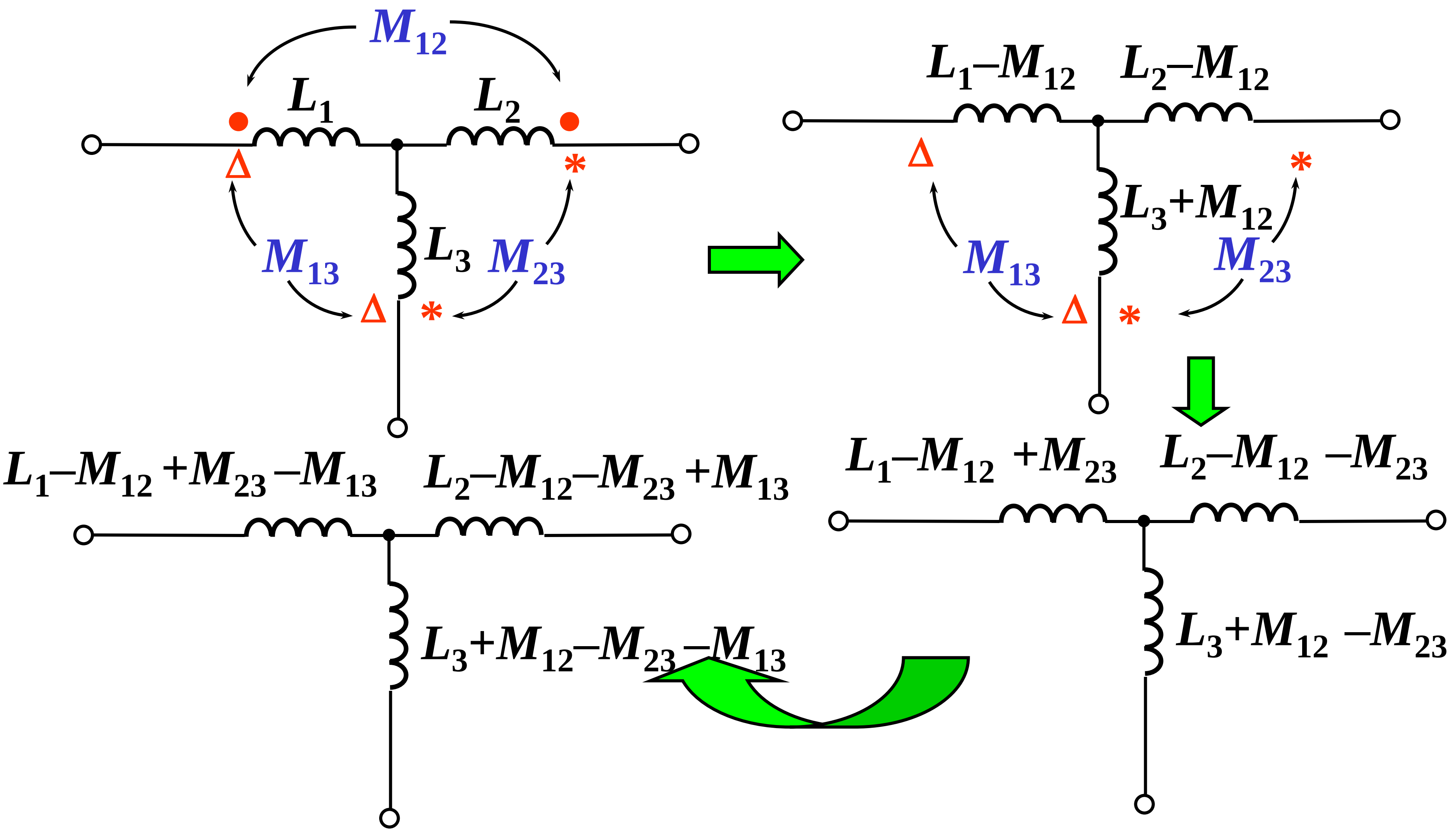
例 2.



支路法:

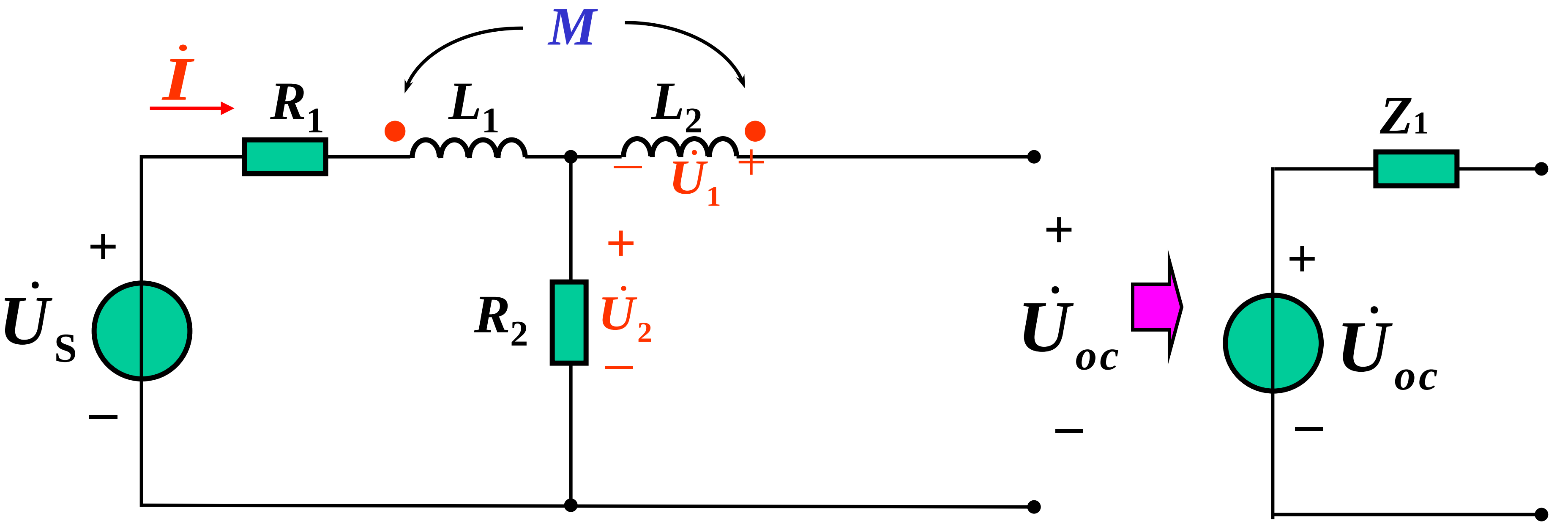
$$\begin{cases} \dot{I}_1+\dot{I}_2=\dot{I}_3 \\ R_1\dot{I}_1+(j\omega L_1\dot{I}_1+j\omega M_{12}\dot{I}_2-j\omega M_{31}\dot{I}_3)+ \\ \qquad (j\omega L_3\dot{I}_3-j\omega M_{31}\dot{I}_1-j\omega M_{23}\dot{I}_2)+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_{S1} \\ R_2\dot{I}_2+(j\omega L_2\dot{I}_2+j\omega M_{12}\dot{I}_1-j\omega M_{23}\dot{I}_3)+ \\ \qquad (j\omega L_3\dot{I}_3-j\omega M_{31}\dot{I}_1-j\omega M_{23}\dot{I}_2)+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_{S2} \end{cases}$$

此题可先作出去耦等效电路，再列方程(一对一对消):



若 $L_1 = L_2 = L_3 = L$；$M_{12} = M_{23} = M_{31} = M$，则三个电感均为$L - M$。

例3. 已知 $\omega L_1=\omega L_2=10\Omega, \omega M=5\Omega, R_1=R_2=6\Omega, U_S=6V$，求其戴维南等效电路。

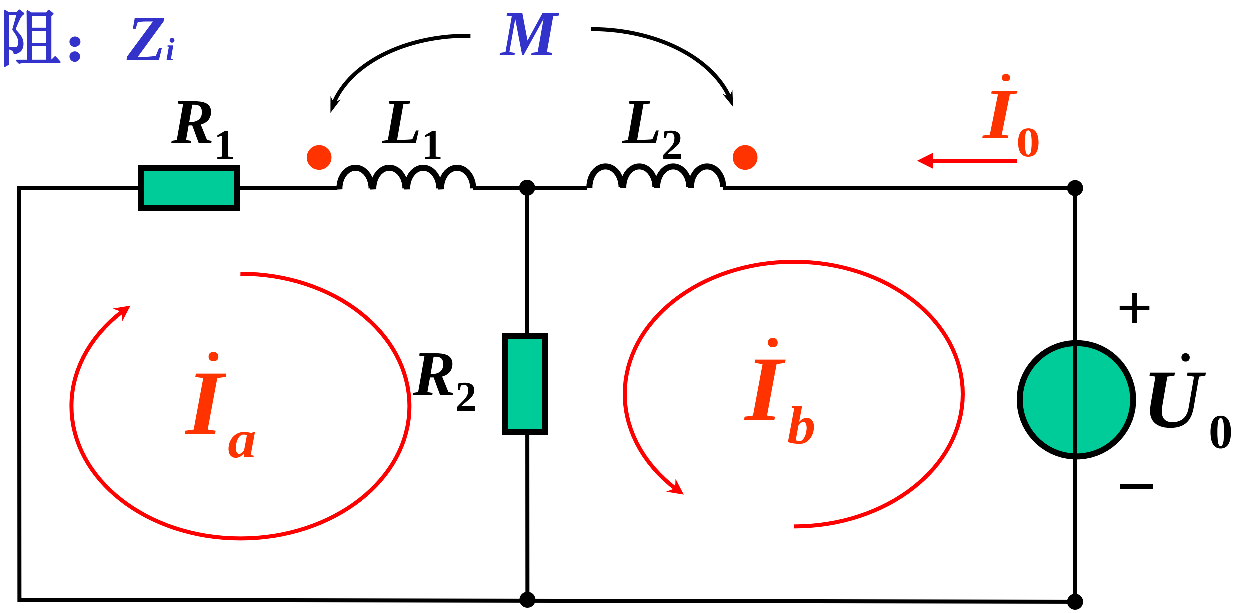


计算开路电压$\dot{U}_{OC}$。

$$\dot{U}_{OC}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=j\omega M\,\dot{I}+R_2\dot{I}=(6+j5)\times 0.384\angle-39.8^\circ=3\angle 0^\circ\ V$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R_1+j\omega L_1+R_2}=\frac{6\angle 0^\circ}{12+j10}=\frac{6\angle 0^\circ}{15.62\angle 39.8^\circ}=0.384\angle-39.8^\circ\ A$$

求内阻：Z_i

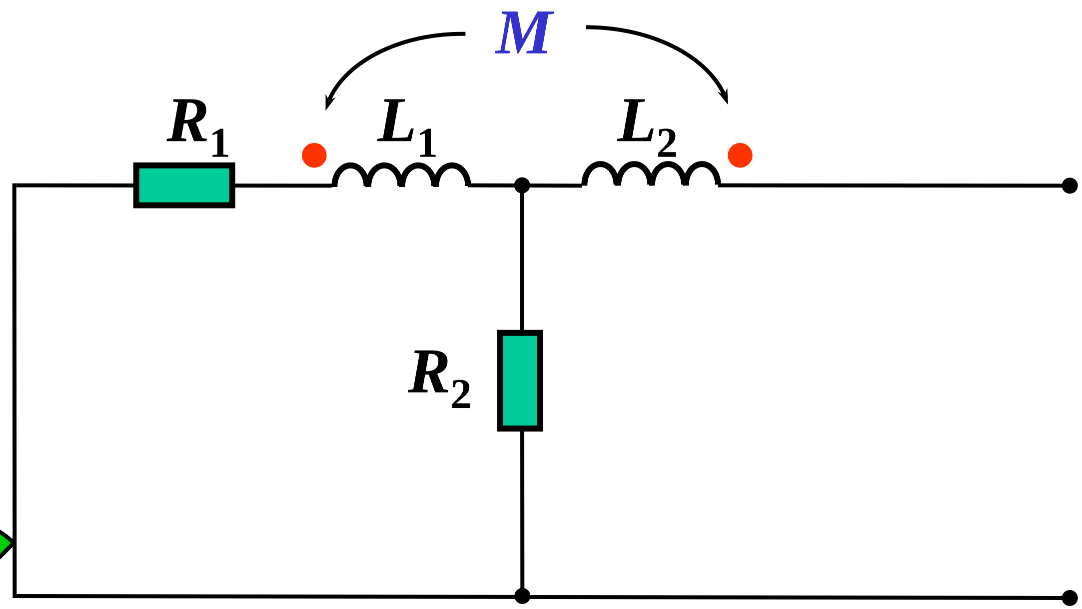


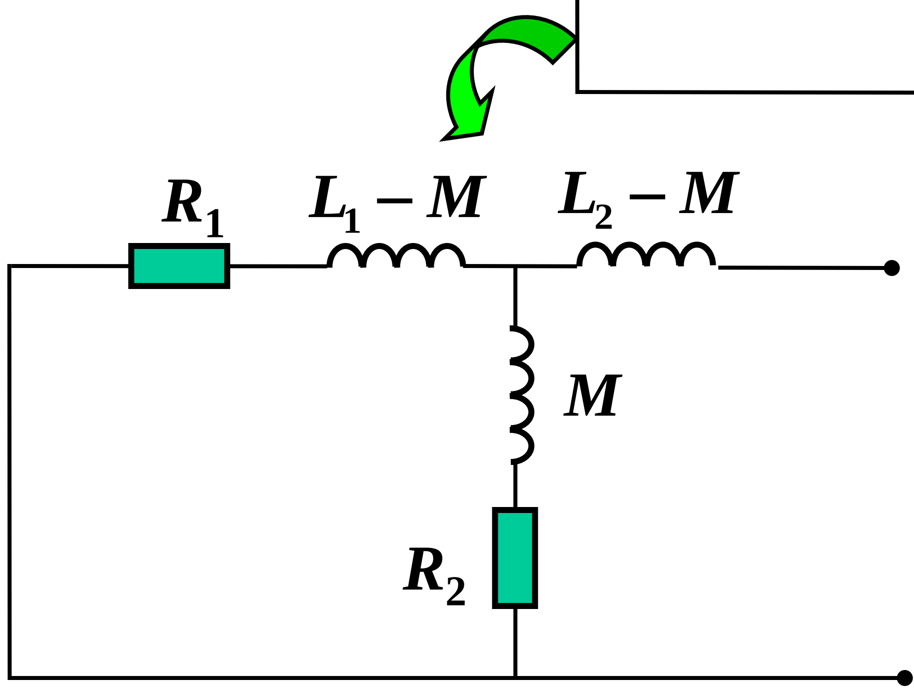
（1）加压求流：列回路电流方程

$$\begin{cases}(R_1+R_2+j\omega L_1)\dot{I}_a+R_2\dot{I}_b+j\omega M\,\dot{I}_b=0\\(R_2+j\omega L_2)\dot{I}_b+R_2\dot{I}_a+j\omega M\,\dot{I}_a=\dot{U}_0\end{cases}$$

$$\dot{I}_0=\dot{I}_b=\frac{\dot{U}_0}{3+j7.5},\quad Z_i=\frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0}=3+j7.5=8.08\angle 68.2^\circ\Omega$$

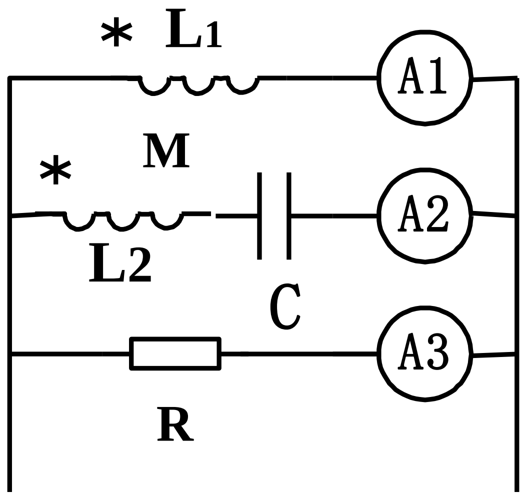
（2）去耦等效:



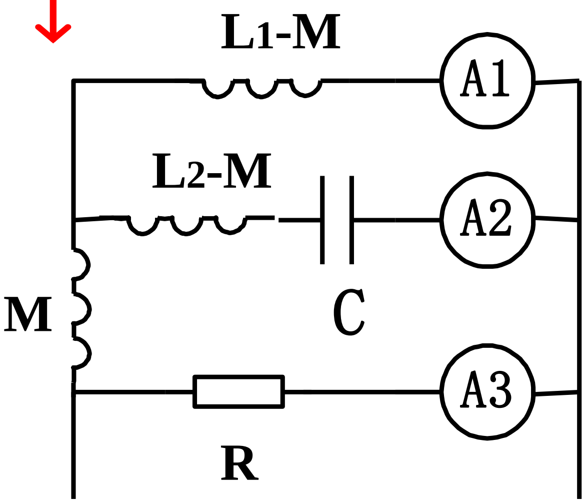


$$
\begin{aligned}
Z_i &= j\omega(L_2 - M) \\
&+ \frac{[R_1 + j\omega(L_1 - M)](R_2 + j\omega M)}{R_1 + j\omega(L_1 - M) + R_2 + j\omega M} \\
&= j5 + \frac{(6+j5)(6+j5)}{(6+j5)+(6+j5)} \\
&= j5 + \frac{6+j5}{2} = j5 + 3 + j2.5 \\
&= 3 + j7.5 = 8.08\angle 68.2^\circ\,\Omega
\end{aligned}
$$

例4. 图示电路 $L_2 = M = 10mH, L_1 = 40mH, R = 500\Omega, U = 100V$，当 $\omega = 10^4 1/s$ 时，C的大小使电路发生并联谐振。求电容C和各电流表读数。



解： 电路去耦如图,



并联支路等效阻抗

方法1：按定义求

$$j\omega M + \frac{j\omega(L_1 - M)\, j(\omega L_2 - \omega M - \frac{1}{\omega C})}{j\omega(L_1 - 2M + L_2 - \frac{1}{\omega C})} \longrightarrow \infty$$

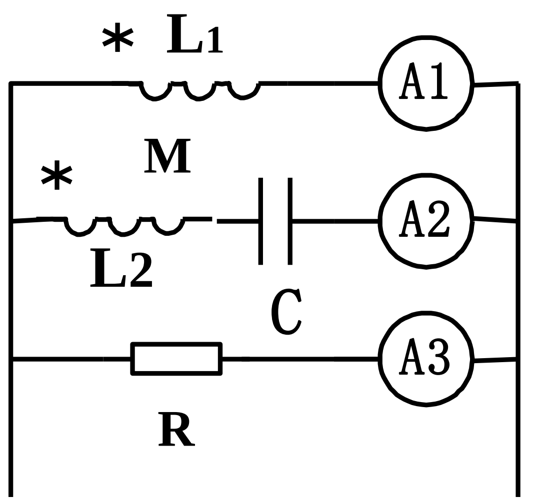
方法2：反推

假设发生并联谐振，则耦合电感与C串联，容抗与阻抗相等

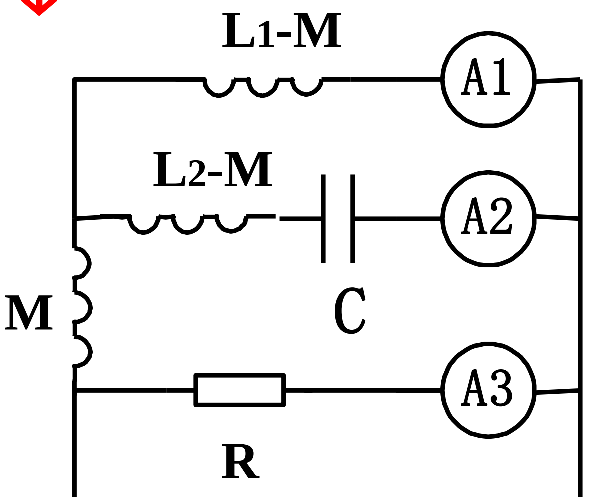
并联谐振时 $j\omega(L_1 - M) + j\omega(L_2 - M) - j\dfrac{1}{\omega C} = 0$

$$j300 - j\frac{1}{C}10^{-4} = 0$$

例4. 图示电路 $L_2 = M = 10mH, L_1 = 40mH, R = 500\Omega, U = 100V$，当 $\omega = 10^4 1/s$ 时，C的大小使电路发生并联谐振。求电容C和各电流表读数。



↓



解： 电路去耦如图, 并联谐振时

$$j\omega(L_1 - M) + j\omega(L_2 - M) - j\frac{1}{\omega C} = 0$$

$$j300 - j\frac{1}{C}10^{-4} = 0$$

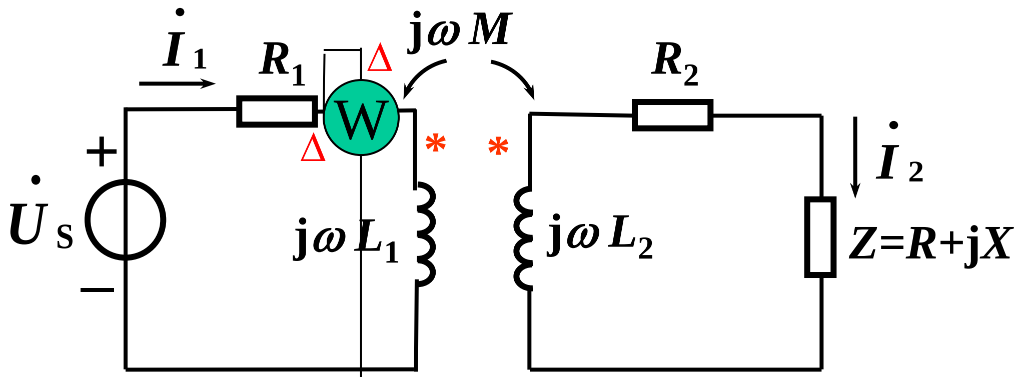
得： $$C = \frac{1}{3}10^{-6}F = \frac{1}{3}\mu F$$

电流表读数

$$A_3 = \frac{U}{R} = 0.2A, \quad A_2 = \frac{U}{\omega(L_2 - M) - \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{3}A,$$

$$A_1 = \frac{U}{\omega(L_1 - M)} = \frac{1}{3}A$$

例5. 空心变压器：



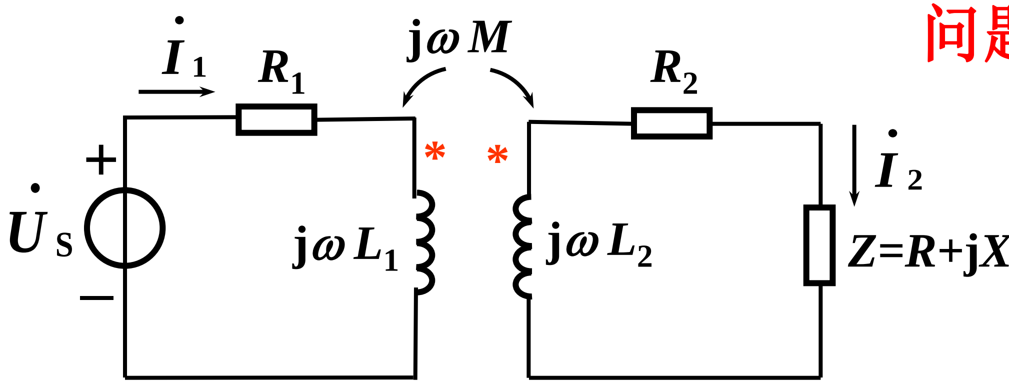
问题1：放置两块瓦特表，分别测量L_1和L_2的功率，读数为多少？

L_1的功率 $$\mathrm{Re}\left\{\left(j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2\right)\dot{I}_1^*\right\}$$

L_2的功率 $$\mathrm{Re}\left\{\left(j\omega L_2\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1\right)\dot{I}_2^*\right\}$$

大小相等，符号相反。表示L_1吸收的有功功率与L_2发出的有功功率相等

例5. 空心变压器：



问题2：如何快速求I_1和I_2？

$$\begin{cases} (R_1+j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_S \\ -j\omega M\dot{I}_1 + (R_2+j\omega L_2+Z)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

假设：$Z_{11}=R_1+j\omega L_1$

$Z_{22}=R_2+j\omega L_2+Z$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

$$\boxed{Z_{in}=\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1}=Z_{11}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

数学处理方法

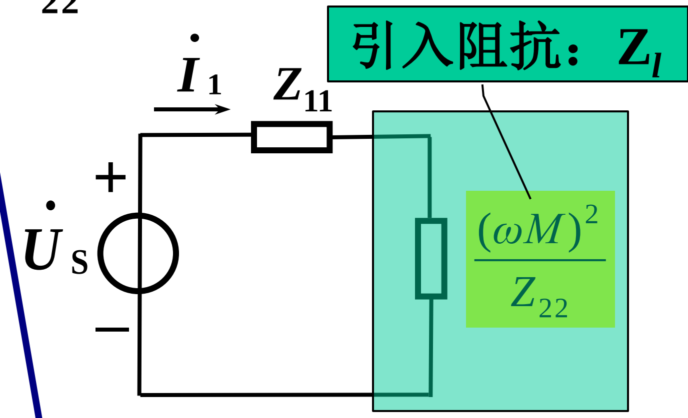
$$\dot{I}_2=\frac{j\omega M\dot{U}_S}{\left(Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}\right)Z_{22}}=\frac{j\omega M\dot{U}_S}{Z_{11}}\bullet\frac{1}{Z_{22}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{11}}}$$

原边的等效电路

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

假设：$Z_{11}=R_1+j\omega L_1$；$Z_{22}=R_2+j\omega L_2+Z$

$$Z_l=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\frac{\omega^2M^2}{R_{22}+jX_{22}}=\frac{\omega^2M^2R_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}-j\frac{\omega^2M^2X_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}=R_l+jX_l$$



$Z_l=R_l+jX_l$：副边对原边的引入阻抗。

恒为正，即消耗在付边电路的功率是靠原边供给的。

负号反映了付边的感性阻抗反映到原边为一个容性阻抗

工程处理方法

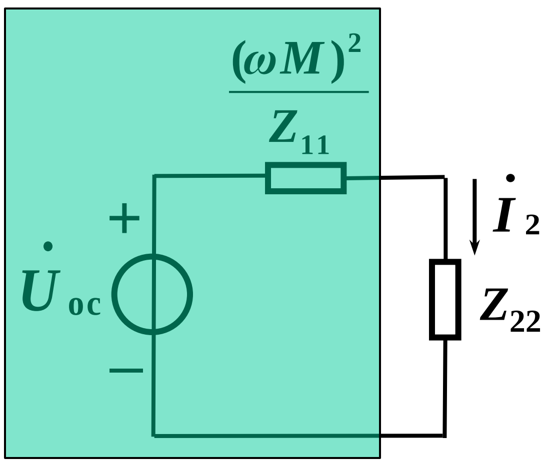
当$\dot{I}_2=0$，即副边开路 $Z_{in}=Z_{11}$

由于互感，电源需提供更大的I_1

互感两个线圈中的有功功率性质相反

副边的等效电路

$$\dot{I}_2=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{U}_S}{(Z_{11}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}})Z_{22}}=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{U}_S}{Z_{11}}\bullet\frac{1}{Z_{22}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}}$$



$$\dot{U}_{oc}=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{U}_S}{Z_{11}}$$ —副边开路时，原边电流在副边产生的互感电压。

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$$ —原边对副边的引入阻抗。

副边吸收的功率：

$$\dot{I}_2=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}\qquad\therefore\qquad I_2=\frac{\omega MI_1}{\sqrt{R_{22}^2+X_{22}^2}}$$

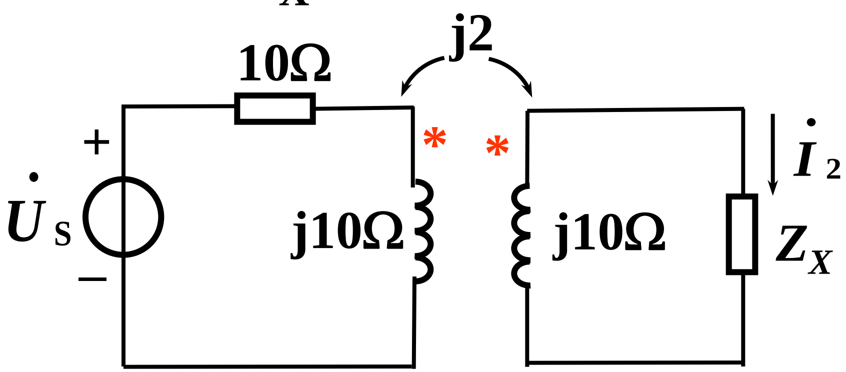
$$I_2^{\ 2}R_{22}=\frac{\omega^2M^2I_1^{\ 2}}{R_{22}^2+X_{22}^2}R_{22}$$

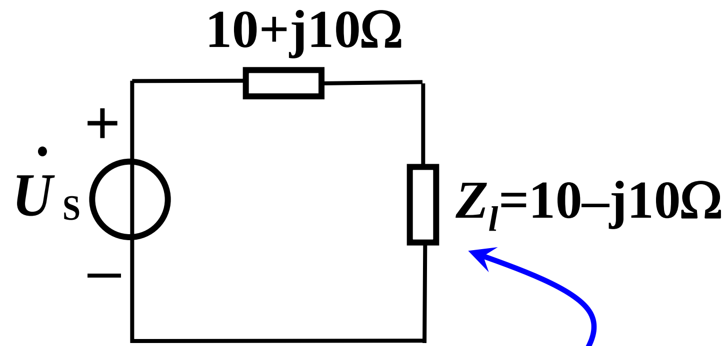
变压器传输效率：

$$\eta=\frac{I_2^{\ 2}R_{22}}{U_sI_1\cos\varphi}\times 100\%$$

例6. 已知 U_S=20 V , 原边引入阻抗 Z_l=10–j10Ω.

求: Z_X 并求负载获得的有功功率.





解: $Z_l=\dfrac{\omega^2M^2}{Z_{22}}=\dfrac{4}{Z_X+\mathrm{j}10}=10-j10$

$\therefore Z_X=\dfrac{4}{10-j10}-j10=\dfrac{4\times(10+j10)}{200}-j10$

$=0.2+j0.2-j10=0.2-\mathrm{j}9.8\Omega$

此时负载获得的功率: $P=P_{R引}=(\dfrac{20}{10+10})^2R_l=10\ \mathrm{W}$

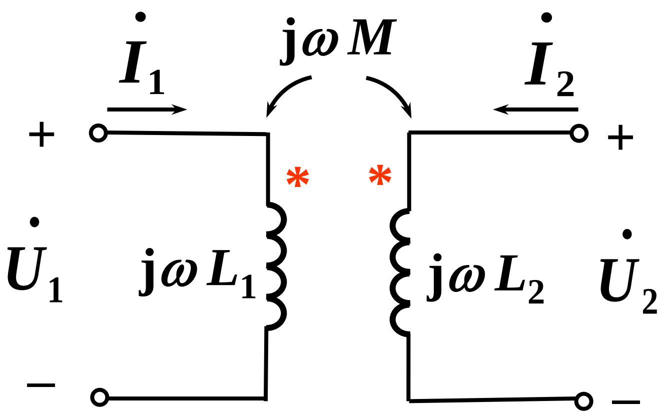
这是最佳匹配:

$Z_l=Z_{11}^*$,

$P=\dfrac{U_S{}^2}{4R}=10\ \mathrm{W}$

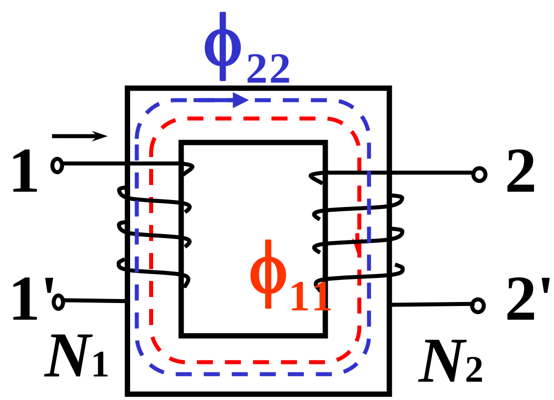
5.3. 4 全耦合变压器和理想变压器

1.全耦合变压器 (*transformer*)



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 & （1） \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 & （2） \end{cases}$$

全耦合时 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ，$k = 1$



由（2）得：$\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2}{\mathrm{j}\omega M}$ 代入（1）

$$\dot{U}_1 = \frac{L_1}{M}(\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2) + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 = \frac{L_1}{M}\dot{U}_2$$

$$= \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\dot{U}_2 = \frac{M}{L_2}\dot{U}_2 = \frac{N_1}{N_2}\dot{U}_2 = n\dot{U}_2$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_{11} + \phi_{22}$$

$M \propto N_1 N_2$ （$L \propto N^2$）

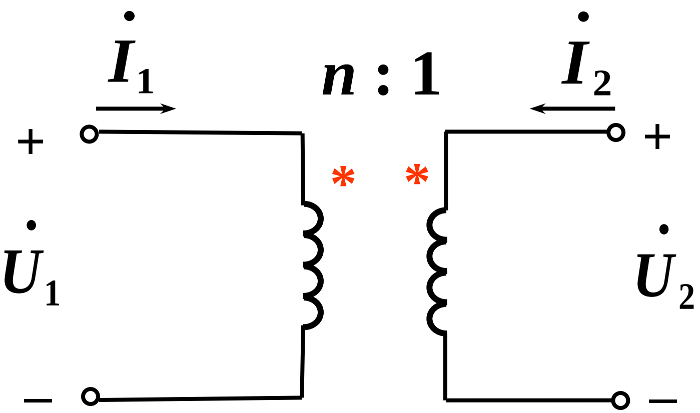
全耦合变压器的电压、电流关系：

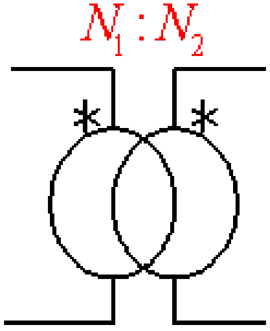
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2}{j\omega M} = \dfrac{1}{j\omega Mn}\dot{U}_1 - \dfrac{j\omega L_2}{j\omega M}\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

2. 理想变压器 (*ideal transformer*)：

L_1, M, $L_2 \to \infty$，L_1/L_2 比值不变 (磁导率$\mu \to \infty$)，则有

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$





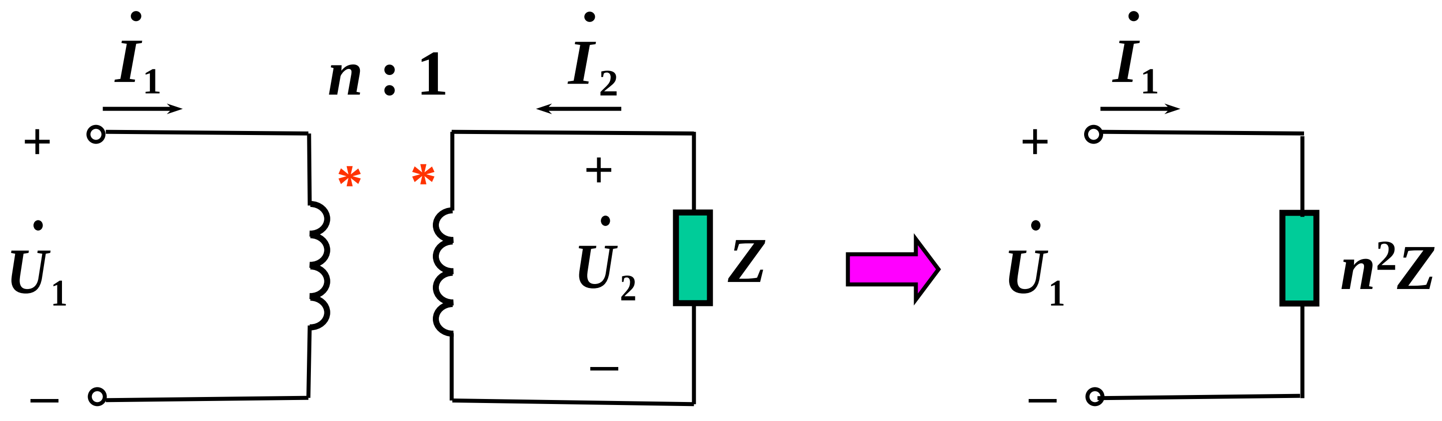
理想变压器的元件特性

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

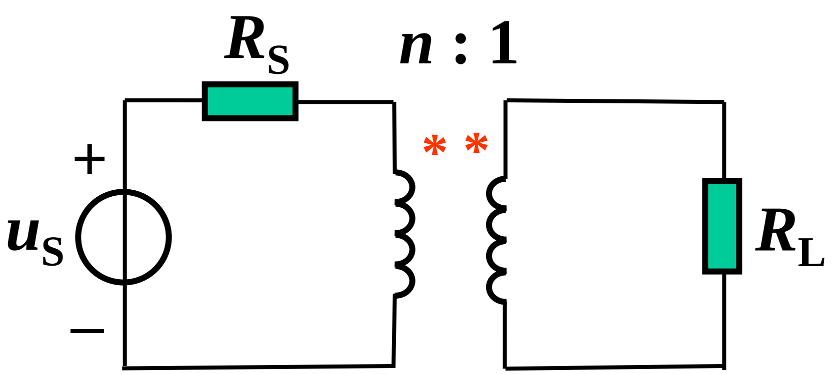
理想变压器的性质：

(a) 阻抗变换性质

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{n\dot{U}_2}{-1/n\dot{I}_2}=n^2\left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right)=n^2Z$$



例1. 已知电源内阻R_S=1kΩ，负载电阻R_L=10Ω。为使R_L上获得最大功率，求理想变压器的变比n。



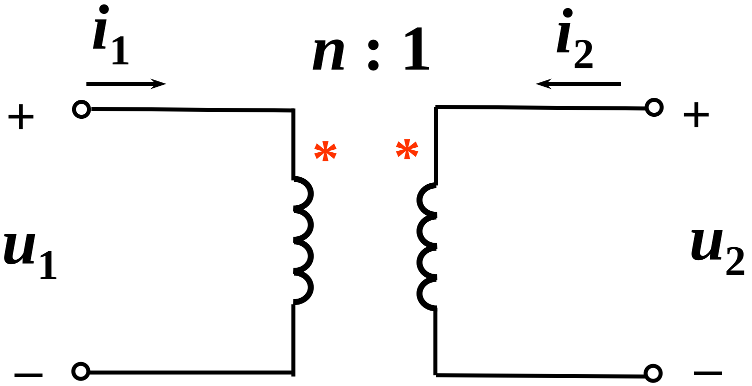
当 $n^2R_L=R_S$时匹配，即

$\therefore$ n^2=100， n=10 .

(b) 功率性质：

理想变压器的特性方程为代数关系，因此无记忆作用。

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

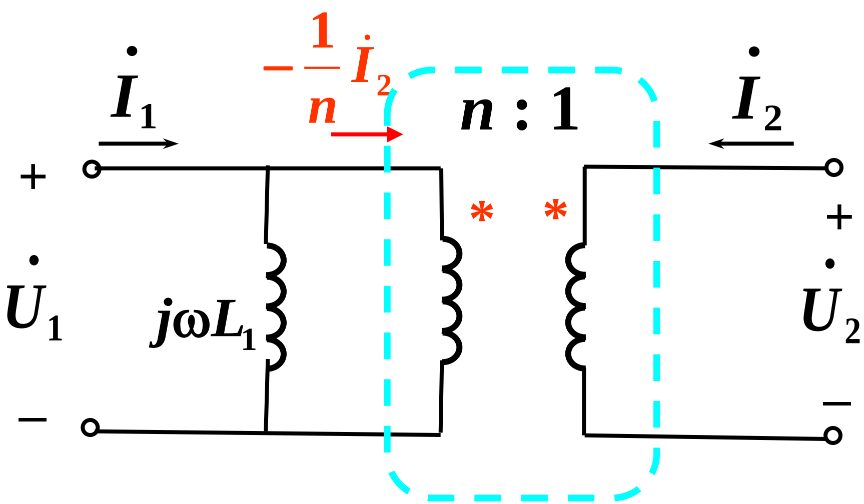


$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + \frac{1}{n} u_1 \times (-n i_1) = 0$$

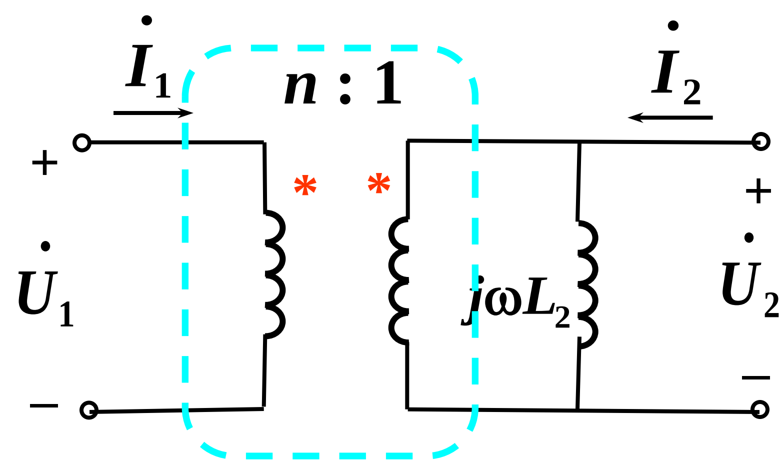
由此可以看出，理想变压器既不储能，也不耗能，在电路中只起传递信号和能量的作用。

全耦合变压器的电路模型:

$$
\begin{cases}
\dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\
\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2}{j\omega M} = \dfrac{1}{j\omega Mn}\dot{U}_1 - \dfrac{j\omega L_2}{j\omega M}\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2
\end{cases}
$$

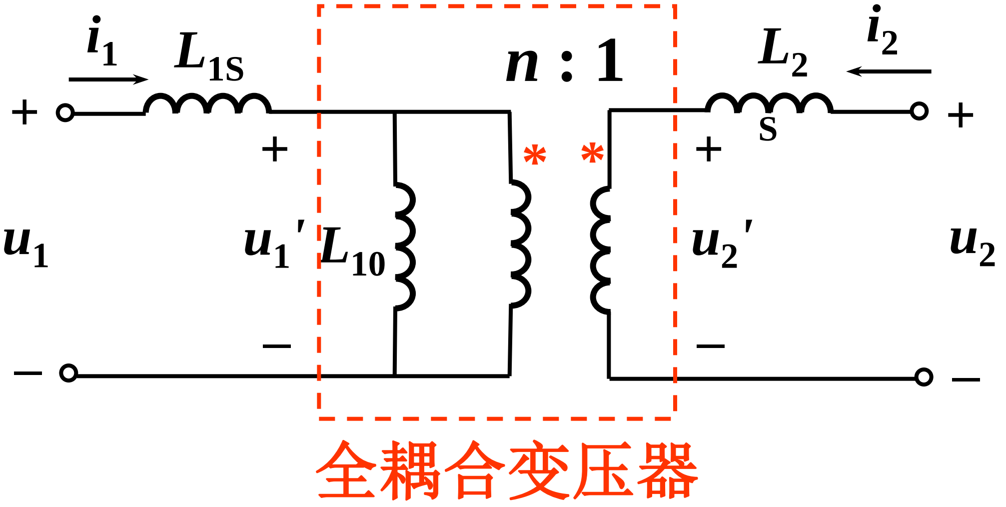


理想变压器



理想变压器

由此得无损非全耦合变压器的电路模型：



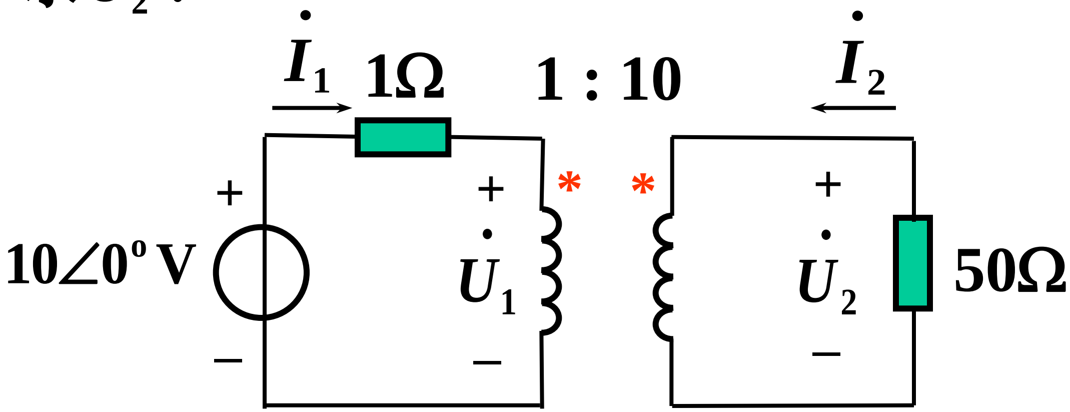
L_{1S}, L_{2S}：漏电感

(*leakage inductance*)

$$\begin{cases} u_1 = L_{1S}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{10}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_{1S}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_1' \\ u_2 = L_{2S}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{20}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_{2S}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u_2' \end{cases}$$

全耦合部分

例2. 求$\dot{U}_2$.

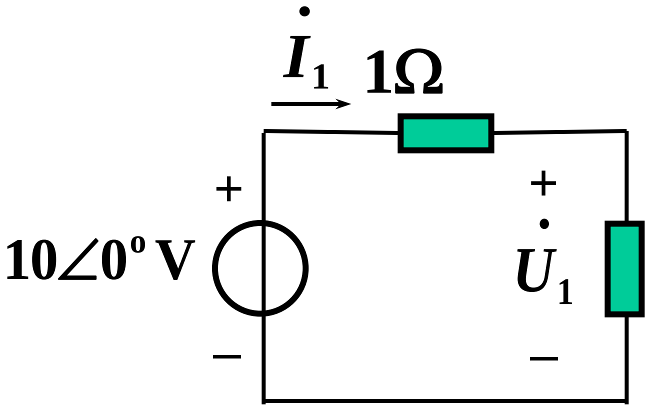


方法1：列方程

$$\begin{cases} 1\times \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 10\angle 0^{\circ} \\ 50\dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\ \dot{U}_1 = \dfrac{1}{10}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -10\dot{I}_2 \end{cases}$$

解得 $\Rightarrow$ $\dot{U}_2 = 33.33\angle 0^{\circ}\text{ V}$

方法2：阻抗变换



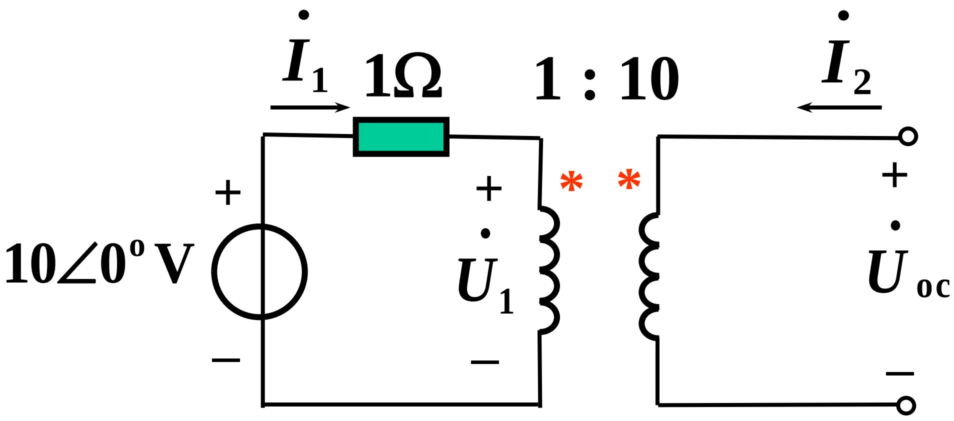
$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times 50 = \frac{1}{2}\Omega$$

$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0^{\circ}}{1+1/2} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}\angle 0^{\circ}\,\text{V}$$

$$\dot{U}_2 = n\dot{U}_1 = 10\,\dot{U}_1$$

$$= 33.33\angle 0^{\circ}\,\text{V}$$

方法3：戴维南等效



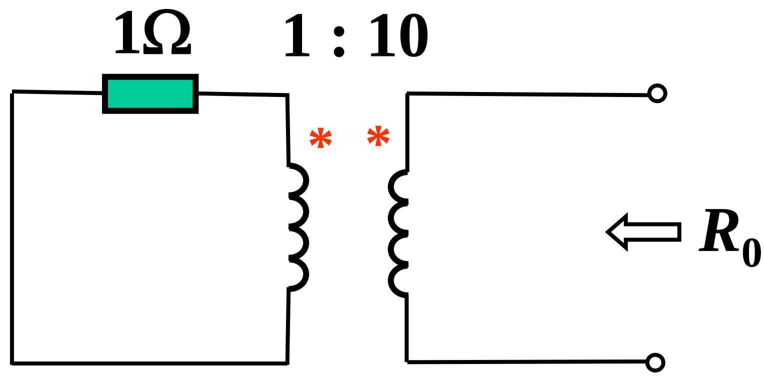
求$\dot{U}_{oc}$：

$$\because \dot{I}_2 = 0, \quad \therefore \dot{I}_1 = 0$$

$$\dot{U}_{oc} = 10\dot{U}_1 = 10\dot{U}_S$$

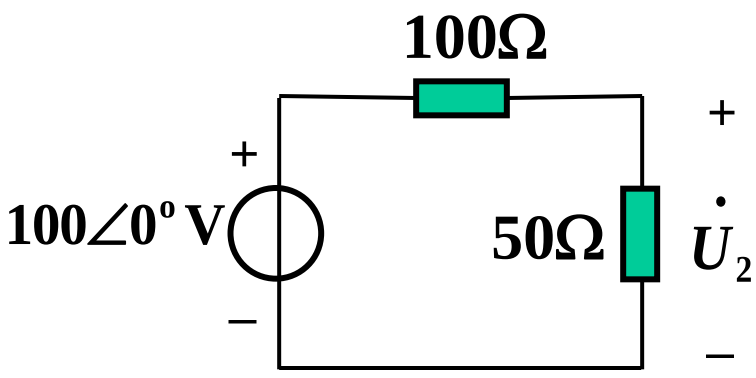
$$= 100\angle 0^{\circ}\,\text{V}$$

求R_0：



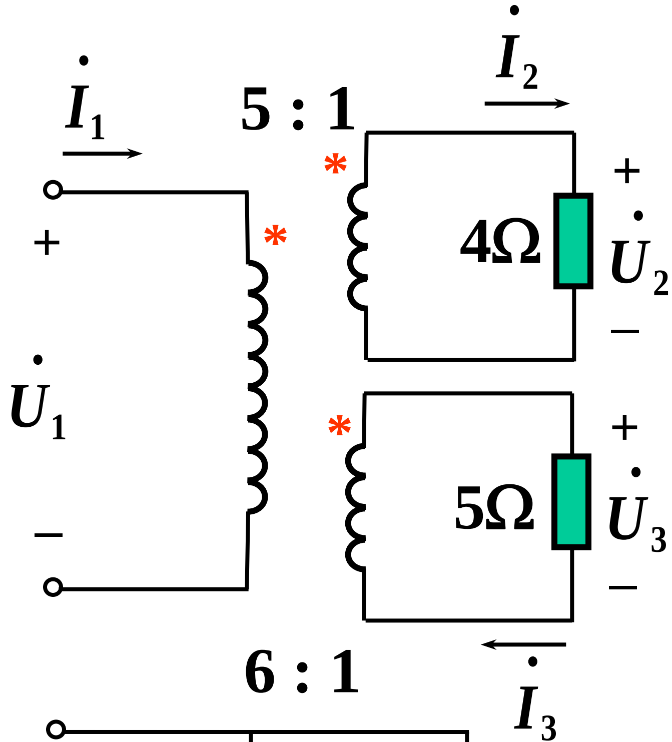
$R_0 = 10^2 \times 1 = 100\Omega$

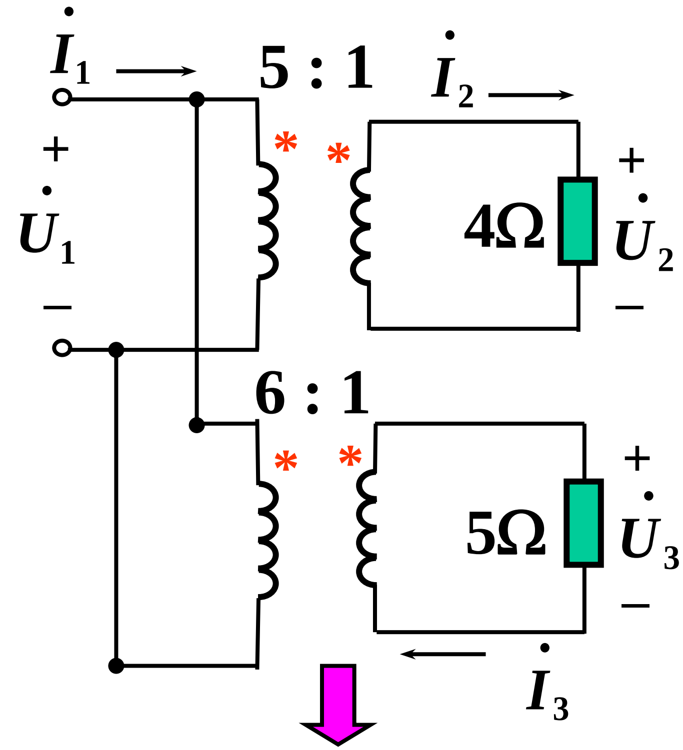
戴维南等效电路：

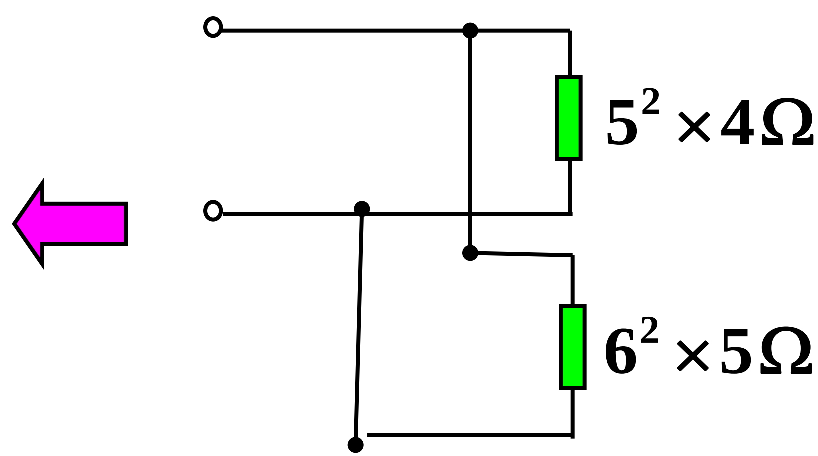


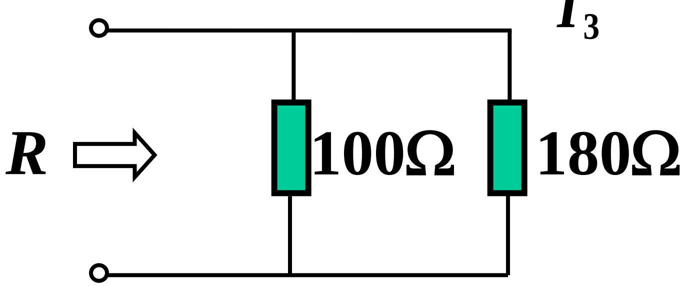
$$\dot{U}_2 = \frac{100\angle 0^{\circ}}{100+50} \times 50 = 33.33\angle 0^{\circ}\ \mathrm{V}$$

例3. 理想变压器副边有两个线圈，变比分别为5:1和6:1。求原边等效电阻R。



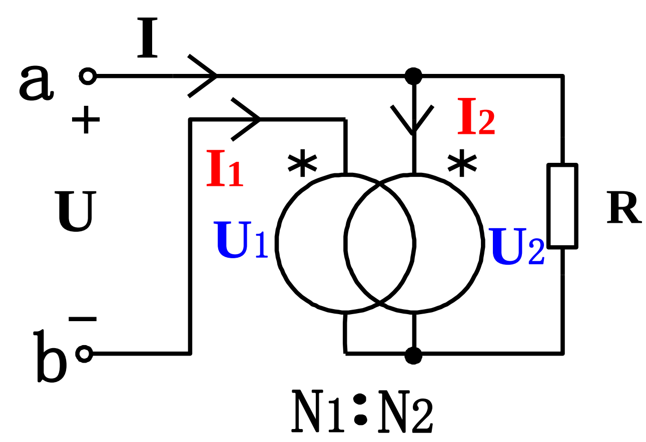






$$\therefore\ R = 100 \,//\, 180 = 64.3\Omega$$

6.13 图示电路，理想变压器原边和副边的匝数分别为N1和N2，求a-b端的入端电阻.



解：　入端电阻 $Z_i = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

$$\dot{U} = \dot{U}_2 - \dot{U}_1 = (1-\frac{N_1}{N_2})\dot{U}_2$$

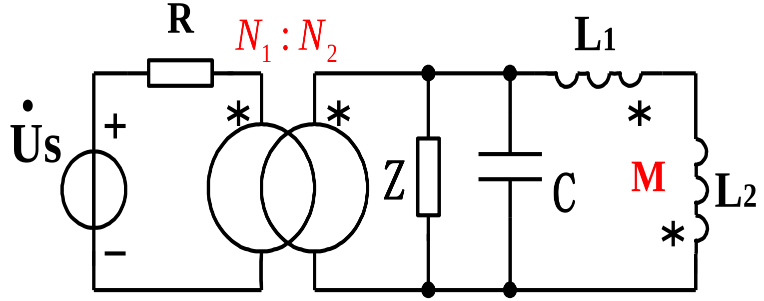
$$\dot{I} = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{R} = -\dot{I}_1\frac{N_1}{N_2} + \frac{\dot{U}_2}{R} = \dot{I}\frac{N_1}{N_2} + \frac{\dot{U}_2}{R}$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\dot{I} = \frac{1}{1-\frac{N_1}{N_2}}\frac{\dot{U}_2}{R}$$

$$Z_i = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{(1-\frac{N_1}{N_2})\dot{U}_2}{\frac{1}{1-\frac{N_1}{N_2}}\frac{\dot{U}_2}{R}} = (1-\frac{N_1}{N_2})^2 R$$

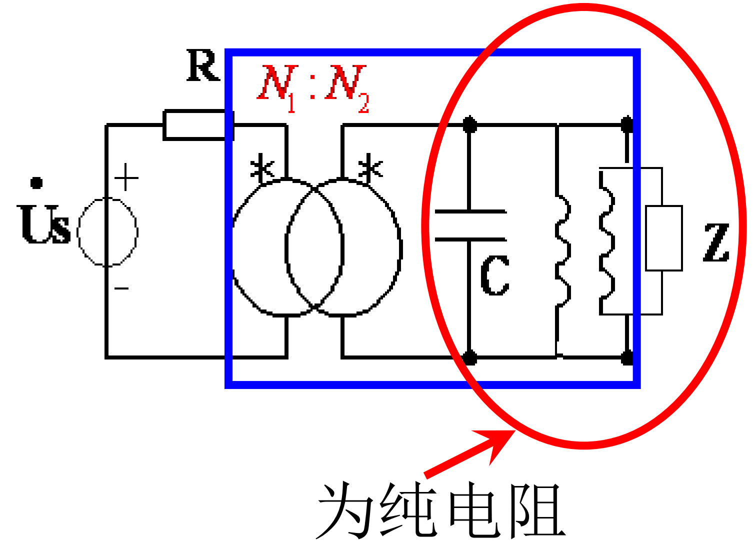
6.15 图示电路， $Z=100\angle 36.9^0, R=5\Omega, \omega L_1=\omega L_2=160\Omega, \omega M=90\Omega,$ $\dot{U}_S=10\angle 0^0 V.$ 为使负载Z获得最大有功功率, 问电容容抗Xc和理想变压器的匝数 $N_1:N_2$ 比为多少, 并求最大功率P。



解：负载端看进去的等效阻抗电路如图b所示，

$$Y_{LC}=-j\left(\frac{1}{\omega(L_1+L_2+2M)}-\omega C\right)$$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{100}\angle -36.9^0=\frac{1}{125}-j\frac{3}{500}$$



要获得最大功率，电源端和负载端须分别满足匹配条件。

$$Y_{LC}=-j\left(\frac{1}{\omega(L_1+L_2+2M)}-\omega C\right)$$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{100}\angle-36.9^0=\frac{1}{125}-j\frac{3}{500}$$

$$\left(\frac{1}{500}-\frac{1}{X_C}\right)=-\frac{3}{500} \rightarrow \quad X_C=125$$

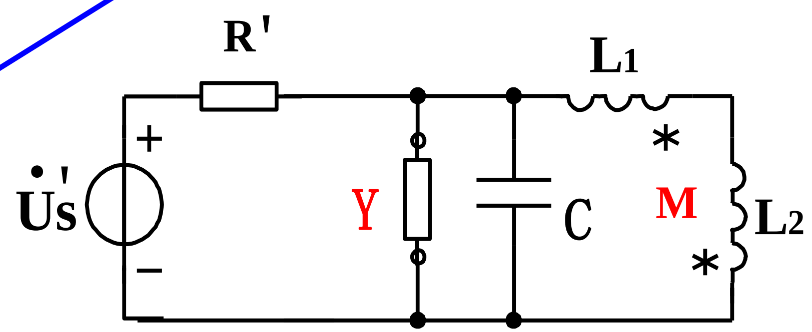
$$\frac{N_1}{N_2}=\sqrt{\frac{5}{125}}=0.2$$

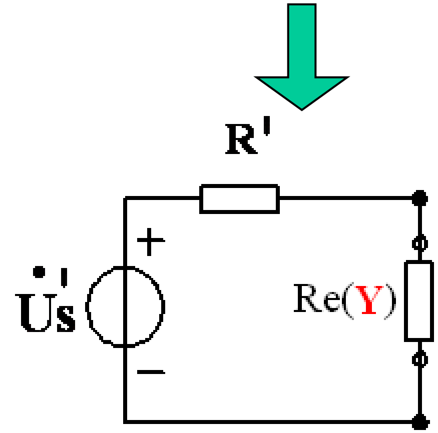
开路电压：$\dot{U}_s{}'=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)U_s=50\angle0^\circ$

$$R'=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 R=5^2\times5=125$$

最大功率：

$$P_{\max}=\frac{U_s'^2}{4R_Z}=\frac{50^2}{4\times125}=5W$$

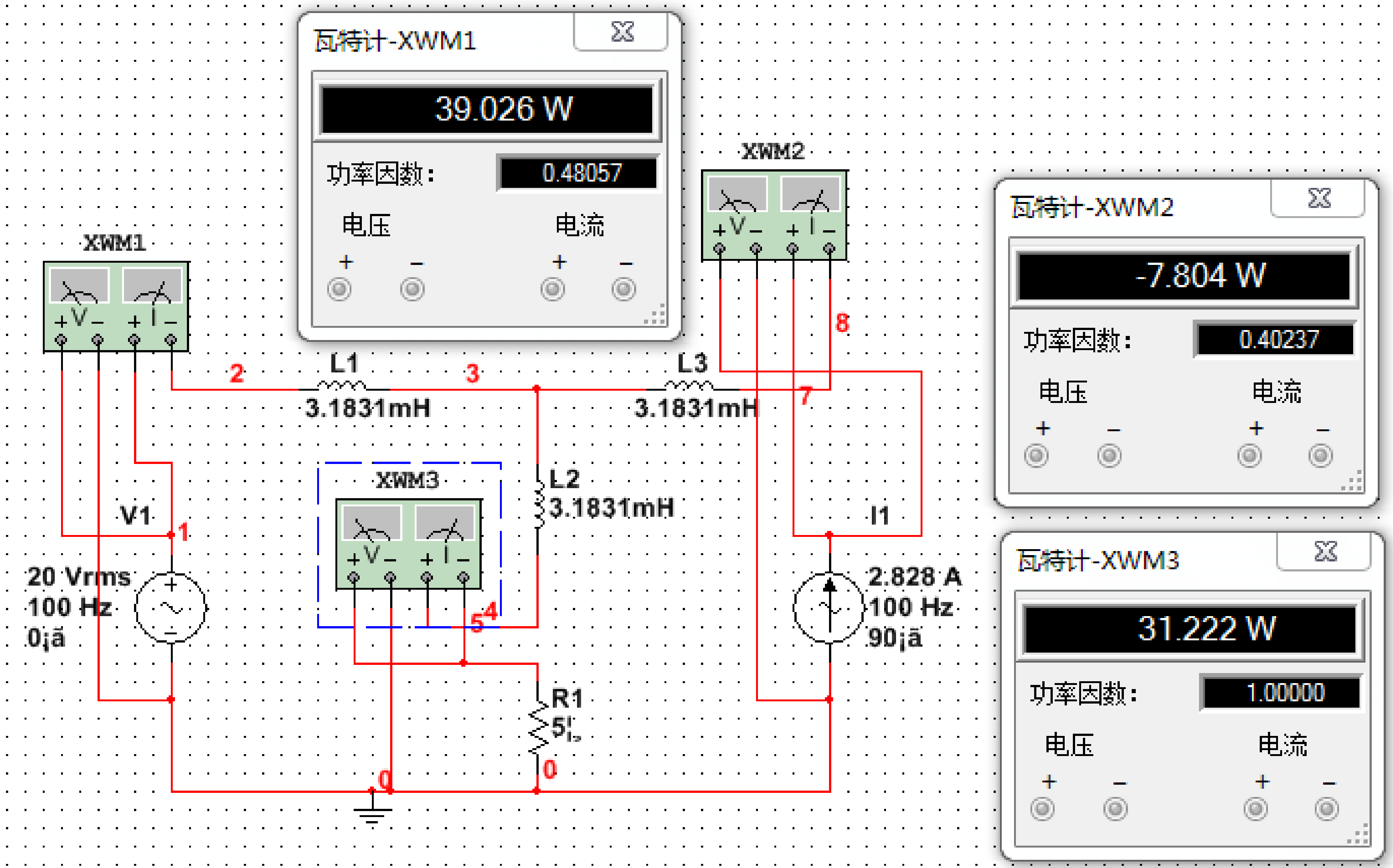




作业

- 5.3－4，5，6，10，11*，13，15

互感的有功功率≠0



瓦特计-XWM1
39.026 W
功率因数：
0.48057
电压
电流
XWM1
XWM2
XWM3
L1
3.1831mH
L2
3.1831mH
L3
3.1831mH
V1
20 Vrms
100 Hz
0¡ã
I1
2.828 A
100 Hz
90¡ã
R1
5¦¸
瓦特计-XWM2
-7.804 W
功率因数：
0.40237
电压
电流
瓦特计-XWM3
31.222 W
功率因数：
1.00000
电压
电流