# 《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙 江 大 学 数 学 系

# 前 言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一，为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法，我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章，除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用，用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求，用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求；内容提要部分给出相关内容的精讲，供学生复习参考之用；习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社，2008 年) 的附后练习题为主，这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果，其中第一章和第六章由薛儒英编写，第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写，王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容，最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助，得到浙江大学数学系各位老师的大力支持，在此表示感谢。

# 目　录

# 第 4 章　分离变量法

## §4.1　基本要求与内容提要

**一. 基本要求**

1. 了解分离变量法的思想，熟悉用分离变量法求解定解问题的步骤；

2. 会用分离变量法求解一维齐次波动方程和热传导方程以及二维 Laplace 方程带有齐次边界条件的定解问题；

3. 会用本征函数 (又称固有函数或特征函数) 法求解非齐次方程带有齐次边界条件的定解问题；

4. 会将定解问题中的非齐次边界条件齐次化，并且求解相相应的定解问题；

5. 了解本征值 (又称固有值或特征值) 问题在分离变量法中的意义与作用，会求解常用的本征值问题.

**二. 内容提要**

1. 分离变量法的思想与适用范围

分离变量法的主要思路：把求解偏微分方程转化为求解常微分方程, 且把未知函数按固有函数展开表示成 Fourier 级数；主要理论基础：线性偏微分方程的叠加原理和本征值问题的相关理论；主要缺点为：对方程以及的求解区域有较强限制，一般要求是常系数的线性偏微分方程，区域一般要求为区间，矩形区域，圆域，柱域，球域等。

2. 用分离变量法求解定解问题的一般步骤

(1). 求出满足齐次方程和 (部分) 齐次边界条件的且可变量分离的所有非零解，把偏微分方程的定解问题化为常微分方程的定解问题；

(2). 求解本征问题，确定所有的本征值以及本征函数；

(3). 交本征值代入其它的常微分方程且求解，所求得的解与本征函数相乘得到满足齐次方程和 (部分) 齐次边界条件的所有非零解的可变量分离解；

(4). 利用线性叠加原理，将由 (3) 所得的所有变量分离解叠加起来成为一个级数形式解 (它含有可数多个可任意取值的常数)，只要适当选取其中的任意常数使它满足定解问题中的初始条件和其它的边界条件，就得到了定解问题的解。

3. 求解带有非齐次方程和 (部分) 齐次边界条件的定解问题的本征函数法

(1). 先考虑一个由相应的齐次方程和 (部分) 齐次边界条件组成的定解问题，求出相应定解问题的本征函数系；

(2). 把原定解问题中的条件未知函数，非齐次项，初始条件以及其余的边界条件按本征函数展开并且把它们代入定解问题，得到一个非齐次常微分方程的定解问题；

(3). 利用常微分方程知识求解非齐次常微分方程的定解问题，将所得的解代入未知函数的展开式，即得原定解问题的解。

4. 非齐次边界条件的处理

有些定解问题中所给的齐次边界条件不足以保证本征值问题有可数多个本征值以及可数多个本征函数，这时必须首先找未知函数的一个适当替换，将部分非齐次的边界条件化为齐次边界条件，然后再根据具体情况用分离变量法或按本征函数 (特征) 展法来求解。在大多数情况下找到的替换往往只能把非齐次的边界条件化为齐次边界条

件，而方程可能还是非齐次偏微分方程，这时我们用本征函数（特征）展法来求解新的定解问题。在某些特殊的情况下，我们可以找到一个替换不仅能把非齐次的边界条件化为齐次边界条件，而且也能把方程化为一个齐次偏微分方程，这时可以直接用分离变量法来求解新的定解问题，例如考虑定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A,\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\ell} = B, \\ u(x,t)|_{t=0} = 0, 0 < x < \ell \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, 0 < x < \ell. \end{cases}$$

其中 $A$ 和 $B$ 为给定的常数。我们取函数

$$w(x,t) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + (\frac{A\ell}{2a^2} + \frac{B}{\ell})x$$

则

$$w|_{x=0} = 0,\ w|_{x=\ell} = B.$$

记 $U(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ U|_{x=0} = 0,\ U|_{x=\ell} = 0, \\ U(x,t)|_{t=0} = \frac{A}{2a^2}x^2 - (\frac{A\ell}{2a^2} + \frac{B}{\ell})x, 0 < x < \ell \\ \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0, 0 < x < \ell. \end{cases}$$

这样我们只要直接利用分离变量法求出一个齐次边界条件齐次方程的初边值问题的解即可。

## §4.2 习题解答

**习题 4.1** 求解下列本征问题:

$$(1).\quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$(2).\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$(3).\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 & (h > 0\text{常数}) \end{cases}$$

$$(4).\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(2\pi),\ X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

**解 (1):** (a) 当 $\lambda \le 0$ 时，可以验证没有非零解。所以 $\lambda \le 0$ 不是本征值。

(b) 当 $\lambda > 0$ 时，通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件，可知 $A = 0, B\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. 为使有非零解，易知此题本征值为

$$\lambda = (\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l})^2, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

本征函数为

$$X(x) = \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

**解 (2):** (a) 当 $\lambda < 0$ 时，不是本征值。

(b) 当 $\lambda = 0$ 时，通解为 $X(x) = Cx + D$, 由边界条件，知 $C = 0$. 故可解得 $X(x) = D$. $\lambda = 0$ 是本征值。

(c) 当 $\lambda > 0$ 时，

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件，易知 $B = 0, A\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. 所以本征值为

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

本征函数为

$$X_0(x) = 1, \;\; X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

**解 (3)**：(A) 当 $\lambda \le 0$, 不是本征值.

(B) 当 $\lambda > 0$ 时, $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. 由边界条件知

$$A = 0, \quad B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

为使 $B \ne 0$, 必须

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

令 $x = \sqrt{\lambda}l$, 得方程

$$\tan x = -\frac{x}{lh}, \quad x > 0.$$

以上方程由无穷多个解 $\mu_n$, 且在每个周期 $(n\pi - \frac{1}{2}\pi, n\pi + \frac{1}{2}\pi), (n = 1, 2, \cdots)$ 都有一个. 因此本征值和本征函数可记为

$$\lambda_n = (\frac{\mu_n}{l})^2, \; X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

**解 (4):** (A) 当 $\lambda < 0$, 不是本征值.

(B) 当 $\lambda = 0$, $X(x) = 1$, 故 $\lambda_0 = 0$ 是本征值.

(C) w 当 $\lambda > 0$, $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. 由边界条件知

$$\begin{cases} A(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) + B\sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0, \\ -A\sin\sqrt{\lambda}2\pi + B(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) = 0. \end{cases}$$

为使 $A \neq 0$ 或 $B \neq 0$, 须 $\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 = 0$, 即 $\sin\sqrt{\lambda_n}2\pi = 0$. 因此本征值和本征函数为

$$\lambda_n = n^2,\ X_n = \cos nx,\ \sin nx, (n = 1, 2, \cdots).$$

**习题 4.2** 试用分离变量法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \sin\frac{3\pi x}{l} & (0 \leq x \leq l) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \end{cases}$$

**解:** (i) 设 $u = X(x)T(t)$ ，代入方程得

$$X(x)T''(t) = a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

或

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0$$

(ii) 解下列本征值问题,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

可得

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ (n = 1, 2, \cdots)$$

故

$$T_n(t) = a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l}, (n = 1, 2, \cdots)$$

(iii) 则解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l},$$

由初始条件得

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l} = \sin\frac{3\pi x}{l} \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l} = x(l-x) \end{aligned}$$

所以可解得

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n\neq 3 \end{cases} \\ B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{4}{al}(\frac{l}{n\pi})^4(1-(-1)^n) \end{aligned}$$

则

$$u(x,t) = \cos\frac{3a\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{al}(\frac{l}{n\pi})^4(1-(-1)^n)\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

**习题 4.3** 试用分离变量法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l, t>0) \\ u|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0 & (t\geq 0) \\ u|_{t=0} = \sin\frac{3\pi x}{l} & (0\leq x\leq l) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) & \end{cases}$$

**解:** (i) 设 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程得

$$X(x)T''(t) = a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

或

$$X''(x)+\lambda X(x) = 0, \quad T''(t)+\lambda a^2T(t) = 0$$

(ii) 解下列本征值问题,

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x) = 0 & (0<x<l) \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 & \end{cases}$$

得

$$\lambda_n = [\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l}]^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l},\ (n=1,2,\cdots)$$

故

$$T_n(t) = a_n\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l} + b_n\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l}, (n=1,2,\cdots)$$

(iii) 设

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l} + B_n\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi at}{l}]\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

由初始条件，可解得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}dx, \quad B_n = \frac{2}{a(n-\frac{1}{2})\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}dx.$$

**习题 4.4** 设有长为 $l$ 的均匀细杆，侧面绝热，内部没有热源，其初始温度分布为 $u|_{t=0} = Ax$, 两端温度 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, 求此细杆上的温度分布。

**解:** 此细杆中的热传导方程的定解问题为

$$\begin{cases} u_t = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = Ax & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

用分离变量法可解.

(i) 设

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入方程得

$$X(x)T'(t) = a^2T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

或

$$T'(t) + \lambda a^2T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

(ii) 解本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

得

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ (n = 1, 2, \cdots)$$

则

$$T_n(t) = a_n e^{\lambda_n a^2 t}, (n = 1, 2, \cdots)$$

(iii) 解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n\pi t}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

由初始条件，得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l Ax\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2Al}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Al}{n\pi}(-1)^{n+1} e^{-\frac{a^2 n\pi t}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

**习题 4.5** 试解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ u|_{t=0} = x^2 y(x-a)(y-b) \end{cases}$$

**解:** 用分离变量法解,

(i) 设 $U(x,y,t) = V(x,y)T(t)$, 代入方程得

$$V(x,y)T'(t) = k^2 T(t)(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2})$$

即

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V(x,y) = 0, \tag{4.1}$$

$$T'(t) + k^2\lambda T(t) = 0,$$

(ii) 再设 $V(x,y) = X(x)Y(y)$, 代入 4.1 中, 得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + \lambda Y}{Y} = -\mu$$

即

$$X'' + \mu X = 0, \quad Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0,$$

由边界条件得

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$$

解 $X(x), Y(y)$ 的本征值问题得

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \ (n = 1, 2, \cdots) \\ \lambda - \mu_n &= \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b}, \ (m = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

所以

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$$

$$T_{m,n} = Ce^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

则

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{4}{l^2}\int_0^a\int_0^b x^2(x-a)(y-b)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}dxdy \\ &= \frac{16a^3b^3}{n^3m^3\pi^6}[(-1)^m - 1][2(-1)^n + 1] \end{aligned}$$

**习题 4.6** 试用分离变量法求解定解问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 1 + \cos\frac{3\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

**解:** 设 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 由前面解法知, (i)

$$X(x)T''(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

(ii) 解本征值问题,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0 < x < l) \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

得

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2},\ X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l},\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}, (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

以及

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_0 = 1, A_3 = 1, A_n = 0, (n \neq 3, 0),\ B_n = 0$$

**习题 4.7** 用分离变量法解下列边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,y) = u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x)u(x,b) = 0, f(0) = f(a) = 0 \end{cases}$$

**解:** 设 $u(x,y) = X(x)Y(y)$, 代入方程得 $X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$, 则

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

即

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$$

解本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(a) = 0$$

得

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2},\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, (n = 1, 2, \cdots)$$

这样

$$Y(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

所以,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}]\sin\frac{n\pi x}{a}$$

其中

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \\ A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{e^{-\frac{2n\pi b}{a}}}{1 - e^{-\frac{2n\pi b}{a}}}\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx, \\ B_n &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2n\pi b}{a}}}\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \end{aligned}$$

整理即得

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{sh\frac{n\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

其中

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

**习题 4.8** 试用分离变量法解求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 3\sin 2\pi x, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

**解:** 设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程中得

$$T''(t)X(x) + 2T'(t)X(x) = X''(x)T(t)$$

即

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2T'}{T} = -\lambda X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + 2T' + \lambda T = 0$$

解本征值问题

$$X''+\lambda X=0,\quad X(0)=X(1)=0$$

得

$$\lambda_n=n^2\pi^2,\ X_n(x)=\sin n\pi x,\ (n=1,2,\cdots)$$

则

$$T(t)=e^{-t}(A_n\cos t\sqrt{\lambda_n-1}+B_n\sin t\sqrt{\lambda_n-1})$$

最后

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-t}(A_n\cos t\sqrt{\lambda_n-1}+B_n\sin t\sqrt{\lambda_n-1}]\sin n\pi x.$$

由初始条件,

$$A_2=3,A_n=0,(n\neq 2);B_2=\frac{3}{\sqrt{4\pi^2-1}},B_n=0,(n\neq 2)$$

即

$$u(x,t)=e^{-t}[3\cos t\sqrt{4\pi^2-1}+\frac{3}{\sqrt{4\pi^2-1}}\sin t\sqrt{4\pi^2-1}]\sin 2\pi x$$

**习题 4.9** 求解定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+bshx & (0<x<l,t>0)\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0 & (t\geq 0)\\ u|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0\end{cases}$$

其中 $b$ 为常数。

**解**:因为非齐次项不含 $t$, 可设

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$$

其中

$$a^2w''+bshx=0,\quad w(0)=w(l)=0$$

则可解得

$$w(x)=\frac{b}{a^2}(\frac{x}{l}shl-shx-l+x)$$

故

$$\begin{cases}\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0)\\ v|_{x=0}=0,v|_{x=l}=0 & (t\geq 0)\\ v|_{t=0}=-w(x),\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=0\end{cases}$$

解得

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n=-\frac{2}{l}\int_0^l w(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=2[\frac{l}{n\pi}-shl(\frac{1}{\pi}-\frac{n\pi}{n^2\pi^2+l^2})(-1)^{n+1}]$$

**习题 4.10** 求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin\omega t & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其中 $A, \omega$ 为常数。

**解**：由相应的齐次方程的解知，可将解 $u(x,t)$ 和非齐次项可特征函数系展开，即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l},\ A\sin\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2Al}{n\pi}(1 - (-1)^n) \sin\omega t$$

代入方程，可得

$$T_n''(t) + a^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t), \quad T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0$$

求其解，可得

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{2l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l} d\tau \\ &= \frac{2Al^2}{an^2\pi^2}[1 - (-1)^n] \frac{1}{\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{l^2}} (\omega \sin\frac{an\pi t}{l} - \frac{n\pi}{l} \sin\omega t) \end{aligned}$$

**习题 4.11** 求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = A, u|_{x=l} = B & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = g(x), \end{cases}$$

**解**：因为非齐次项与 $t$ 无关，故可设

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

其中

$$a^2 w''(x) + f(x) = 0, \quad w(0) = A, w(l) = B$$

解得

$$w(x) = (1 - \frac{x}{l})A + \frac{x}{l}B + \frac{x}{la^2} \int_0^l \int_0^y f(\xi) d\xi dy - \frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(\xi) d\xi dy$$

又因为此时 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0 & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = g(x) - w(x), \end{cases}$$

求解上述 Dirichlet 边值问题, 得

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l [g(x) - w(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

**习题 4.12** 求解圆环的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = 0, \\ u(r_1,\theta) = f(\theta), \\ u(r_2,\theta) = g(\theta) \end{cases}$$

**解**：设

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

代入方程得

$$\Theta(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{1}{r^2}\Theta'' R = 0$$

整理得

$$\frac{r^2 R + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

求解特征值问题

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

得

$$\lambda_n = n^2, \;\; \Theta_n = a_n \cos n\pi\theta + b_n \sin n\pi\theta, \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

再解 $R(r)$ 的方程

$$r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$$

得

$$R_0(r) = a_0 \ln r + b_0, \, R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

所以解 $u$ 可以表示成

$$u(r,\theta) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\pi\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\pi\theta]$$

再由边值条件，可得

$$
\begin{aligned}
A_0 \ln r_1 + B_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \\
A_0 \ln r_2 + B_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \\
A_n {r_1}^n + B_n {r_1}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\pi\theta d\theta \\
A_n {r_2}^n + B_n {r_2}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\pi\theta d\theta \\
C_n {r_1}^n + D_n {r_1}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\pi\theta d\theta \\
C_n {r_2}^n + D_n {r_2}^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\pi\theta d\theta
\end{aligned}
$$

**习题 4.13** 在平面极坐标系中将二维波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta})$$

进行变量分离，写出相应的常微分方程。

**解**：设

$$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

代入方程，得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

故

$$
\begin{aligned}
&T'' - a^2\lambda T = 0, \\
&\frac{r^2R'' + rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu
\end{aligned}
$$

整理上面第二式，得

$$
\begin{aligned}
&r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + \mu)R = 0, \\
&\Theta'' + \mu\Theta = 0
\end{aligned}
$$

**习题 4.14** 利用 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的级数表达式证明：

$$
\begin{aligned}
&J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \\
&J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x
\end{aligned}
$$

由此并利用 $J_\nu(x)$ 的递推公式，说明阶数为奇数一半的 *Bessel* 函数都能用初等函数表示。

**解**：由递推公式知，设，

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

其中，

$$a_0 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+1)}$$

当 $k$ 为偶数时，

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+1)} = \frac{a_{k-4}}{(k-2)k(k+1)(k-1)} = \cdots = \frac{(-1)^{k/2} a_0}{(k+1)!}$$

所以，计算 $a_{2k}$，得

$$a_{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

所以，

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

则

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

其中，

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-1)}$$

所以，

$$a_{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

则

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

**习题 4.15** 用 $J_0(\alpha x)$ 和 $J_1(\alpha x)$ 表示 $J_4(\alpha x)$.

**解**：

$$\begin{aligned}
J_2(x) &= \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x),\quad J_3(x) = \frac{4J_2(x)}{x} - J_1(x), \\
J_4(x) &= \frac{6J_3(x)}{x} - J_2(x) = (\frac{24}{x^2} - 1)J_2(x) - \frac{6J_1(x)}{x} \\
&= (\frac{48}{x^2} - 2 - \frac{6}{x})J_1(x) - (\frac{24}{x^2} - 1)J_0(x)
\end{aligned}$$

所以，

$$J_4(\alpha x) = (\frac{48}{\alpha^2 x^2} - 2 - \frac{6}{\alpha x})J_1(\alpha x) - (\frac{24}{\alpha^2 x^2} - 1)J_0(\alpha x)$$

**习题 4.16** 利用 $J_\nu(x)$ 的级数展开式证明递推公式 $(3.3.17a)$.

**解:**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^\nu J_\nu(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^\nu}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2\nu+2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^\nu(\nu+k)}{k!(\nu+k)\Gamma(\nu+k)}(\frac{x}{2})^{\nu+\nu-1+2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^\nu}{k!\Gamma(\nu-1+k+1)}(\frac{x}{2})^{\nu-1+2k} \\
&= x^\nu J_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

**习题 4.17** 求证 $\int J_3(x)dx = -\frac{4}{x}J_1(x) + J_0(x) + C$.

**证明:** 由公式 $(3.3.18)_b$ 可知

$$\int J_3(x)dx = \int J_1(x)dx - 2J_2(x) + C$$

再由 $(3.3.18)_a$ 知

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)$$

以及 $(3.3.17)_b$, 得

$$J_0(x) = -\int J_1(x)dx + C$$

代入 (4.2) 中, 即得

$$\int J_3(x)dx = -\frac{4}{x}J_1(x) + J_0(x) + C$$

**习题 4.18** 计算下列积分:

$$(1). \int x^3 J_0(x)dx,\ (2). \int x^2 J_1(x)dx,\ (3). \int J_0(\sqrt{x})dx$$

**解:**

$$\begin{aligned}
\int x^3 J_0(x)dx &= \int x^2(xJ_1)'dx = x^3J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)dx + C \\
&= x^3J_1(x) - 2x^2J_2(x) + C = x^3J_1(x) - 2x^2[\frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)] + C \\
&= (x^3-4x)J_1(x) + 2x^2J_0(x) + C. \\
\int x^2 J_1(x)dx &= x^2J_2(x) + C = 2xJ_1(x) - x^2J_0(x) + C \\
\int J_0(\sqrt{x})dx &= \int J_0(y)2ydy = 2yJ_1(y) + C = 2\sqrt{x}J_1(\sqrt{x}) + C
\end{aligned}$$

**习题 4.19** 将 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上展开为 $J_{1/2}(\lambda_n x)$ 的 $F$-$B$ 级数，其中 $\lambda_n$ 式 $J_{1/2}(\pi x)=0$ 的正根。

**解**：$J_{1/2}(\pi x)$ 的解为 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_{1/2}(\lambda_n x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_n &= \int_0^{\pi}x\sqrt{x}J_{1/2}(\lambda_n x)dx=\frac{2}{\pi^2J_{\frac{3}{2}}^2(\lambda_n\pi)}\int_0^{\lambda_n\pi}\frac{y^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}-1}(\lambda_n y)}{\lambda_n^{\frac{5}{2}}}dy\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda_nJ_{\frac{3}{2}}(\lambda_n\pi)}\end{aligned}$$

**习题 4.20** 将 $f(x)=4x-x^3$ 在 $(0,2)$ 上展开为 $J_1(\lambda_n x)$ 的 $F$-$B$ 级数，其中 $\lambda_n$ 式 $J_1(2x)=0$ 的正根。

**解**：$J_1(2x)$ 的解为 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_1(\lambda_n x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{4J_2^2(2\lambda_n)}\int_0^2x(4x-x^3)J_1(\lambda_n x)dx\\ &= \frac{1}{2J_2^2(\lambda_n2)}\int_0^{2\lambda_n}[\frac{4y^2}{\lambda_n^3}-\frac{y^4}{\lambda_n^5}]J_1(y)dy\\ &= \frac{8J_3(\lambda_n2)}{\lambda_n^2J_2^2(\lambda_n2)}\end{aligned}$$

**习题 4.21** 将 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上展开为 $J_0(\lambda_n x)$ 的 $F$-$B$ 级数，其中 $\lambda_n$ 式 $J_0(x)$ 的正零点。

**解**：$J_0(x)$ 的解为 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\lambda_n x)$$

其中

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\int_0^1x\ln xJ_0(\lambda_n x)dx\\ &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^{\lambda_n}y(\ln y-\ln\lambda_n)J_0(y)dx\\ &= \frac{-2}{\lambda_n^2J_1^2(\lambda_n)}\end{aligned}$$

**习题 4.22** 将 $f(x)=\begin{cases} x, 0<x<1, \\ 0, 1<x<2, \end{cases}$ 展开为 $J_1(\lambda_n x)$ 的 $F$-$B$ 级数，其中 $\lambda_n$ 是方程 $J_1'(2x)=0$ 的非负根。

**解**：设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} C_i J_1(\lambda_i x)$$

其中

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{2}{(4-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(2\lambda_i)}\int_0^1 x^2 J_1(\lambda_i x)dx \\ &= \frac{2J_2(\lambda_i)}{(4-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(2\lambda_i)\lambda_i} \end{aligned}$$

**习题 4.23** 将 $f(x)=x$ 在区间 $(0,3)$ 上展开为 $J_1(\lambda_n x)$ 的 $F$-$B$ 级数，其中 $\lambda_n$ 是 $J_1'(3x)$ 的非负根。

**解**：设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} C_i J_1(\lambda_i x)$$

其中

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{2}{(9-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(3\lambda_i)}\int_0^3 x^2 J_1(\lambda_i x)dx \\ &= \frac{18J_2(3\lambda_i)}{(9-\frac{1}{\lambda_i^2})J_1^2(3\lambda_i)\lambda_i} \end{aligned}$$

**习题 4.24** 证明 $P_n(-1)=(-1)^n, P_{2n-1}(0)=0, P_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

**证明**：由课本公式 (3.4.9) 知，当 $n$ 是奇数时，$P_n(0)=0$. 所以，$P_{2n-1}(0)=0$. 由 (3.4.12) 式和莱布尼兹公式，可知 $P_n(x)=x^n+(1-x^2)Q(x)$, $Q(x)$ 是多项式。所以，$P_n(-1)=(-1)^n$.

再由 (3.4.14),

$$2nP_{2n}(0)=-(2n-1)P_{2n-2}(0)$$

故

$$P_{2n}=-\frac{(2n-1)}{2n}P_{2n-2}(0)=\cdots=(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}P_0(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

**习题 4.25** 证明再替换 $x=\cos\theta$ 下, *Legendre* 方程可化为 $\frac{d^2y}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dy}{d\theta}+n(n+1)y=0$.

**证明**：在此变换下，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}(-\csc\theta)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\theta^2}\csc^2\theta+\frac{dy}{d\theta}\cot\theta\csc\theta$$

代入方程 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ 即可得证。

**习题 4.26** 利用 *Rodrigues* 公式及分布积分证明：

$$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=0,(k<n,\text{且 }k\text{ 为非负整数})$$

**证明**：证明只需注意，设

$$D_n(x)=(x^2-1)^n,$$

则当 $0\le m<n$ 时，

$$\frac{d^mD_n(x)}{dx^m}=(x^2-1)Q_m(x)$$

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的多项式，所以上式在 $-1,1$ 处为零。故若设 $C=\frac{1}{2^nn!}$，

$$\begin{aligned}\int_0^1x^kP_n(x)dx &= -Ck\int_0^1\frac{d^{n-1}D_n(x)}{dx^{n-1}}x^{k-1}dx\\ &= \cdots(-1)^kCk!\int_0^1\frac{d^{n-k}D_n(x)}{dx^{n-k}}dx\\ &= (-1)^kCk!\frac{d^{n-k-1}D_n(x)}{dx^{n-k-1}}\Big|_0^1=0\quad(\text{因为}n\ge k+1)\end{aligned}$$

**习题 4.27** 将函数 $f(x)=\begin{cases}0,-1<x\le 0,\\ x,0<x<1\end{cases}$ 展开为 $P_n(x)$ 的 *F-L* 级数。

**解**：

$$C_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^1xP_n(x)dx=\frac{1}{4}(k=0),\ \frac{1}{2}(k=1),\ \frac{5}{16}(k=2),\cdots$$

**习题 4.28** 将函数 $f(x)=\begin{cases}1,0<\theta x\le\frac{\pi}{2},\\ 0,\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}$ 展开为 $P_n(\cos\theta)$ 的 *F-L* 级数。

**解**：

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^1P_n(x)dx=\frac{1}{2}[P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)]=\frac{1}{2}(n=0),\ \frac{3}{4}(n=1),\ \cdots$$

**习题 4.29** 试证：当 $f(\theta)=\begin{cases}1,0<\theta\le\alpha\\ 0,\alpha<\theta<\pi\end{cases}$ 时，则有

$$f(\theta)=\frac{1-\cos\alpha}{2}P_0(\cos\theta)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)]P_n(\cos\alpha).$$

**证**：

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha P_0(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \frac{1-\cos\alpha}{2} \\
C_n &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\alpha P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \frac{2n+1}{2}\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx \quad (n\geq 1)
\end{aligned}
$$

由公式 $(3.3.13)_b$

$$
n\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx = P_n(x)x\mid_{\cos\alpha}^1 - \int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx - P_{n+1}(x)|_{\cos\alpha}^1
$$

再由公式 (3.4.14), 知

$$
xP_n(x) = \frac{(n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}}{2n+1}
$$

则

$$
(n+1)\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx = \frac{(n+1)[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]|_{\cos\alpha}^1}{2n+1}
$$

所以,

$$
\int_{\cos\alpha}^1 P_n(x)dx = \frac{P_{n-1}(\cos\alpha) - P_{n+1}(\cos\alpha)}{2n+1}
$$

因此,

$$
C_n = \frac{P_{n-1}(\cos\alpha) - P_{n+1}(\cos\alpha)}{2}
$$

**习题 4.30** 解定解问题

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) \\
u|_{r=0}\text{有界}, u|_{r=b} = 0 \\
u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(r)
\end{cases}
$$

**解**：设 $u(r,t) = R(r)T(t)$, 代入方程, 得

$$
\frac{T''}{a^2T} = \frac{rR''+R'}{rR} = -\lambda
$$

即

$$
T'' + a^2\lambda T = 0, \quad r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0
$$

解本征值问题

$$
\begin{cases}
r^2R'' + rR' + \lambda r^2R = 0, \\
R(b) = 0, R(0)\text{有界}
\end{cases}
$$

设 $\lambda = \beta^2$, 令 $x = \beta r, y(x) = R(r)$, 则得零阶的 Bessel 方程

$$
\begin{cases}
x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \\
y(\beta b) = 0, y(0)\text{有界}
\end{cases}
$$

所以，若设 $\xi_0^{(n)},(n=1,2,\cdots)$ 为 $J_0(x)$ 的正根，则

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \beta_n^2=(\frac{\xi_0^{(n)}}{b})^2,\\ R_n(r) &= J_0(\frac{\xi_0^{(n)}}{b}r)\quad (n=1,2\cdots)\end{aligned}$$

又

$$T_n(t)=a_n\cos a\beta_n t+b_n\sin a\beta_n t$$

所以，

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos a\beta_n t+B_n\sin a\beta_n t)J_0(\beta_n r)$$

其中，

$$\begin{aligned}&A_n=0,\\ &B_n=\frac{2}{a\beta_n b^2 J_1^2(\beta_n b)}\int_0^b rf(r)J_0(\beta_n r)dr\end{aligned}$$

**习题 4.31** 解定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r)+B\\ u|_{r=0}\text{有界},u|_{r=R}=0\\ u|_{t=0}=0,u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

**解**：由齐次化原理，可知若设 $w(r,t,\tau)$ 是下列问题的解

$$\begin{cases}w_{tt}=a^2(w_{rr}+\frac{1}{r}w_r)\\ w|_{r=0}\text{有界},w|_{r=R}=0\\ w|_{t=\tau}=0,w_t|_{t=\tau}=B\end{cases}$$

则

$$u(r,t)=\int_0^t w(x,t-\tau)d\tau$$

就是原来问题的解。由 31 题的结果知，

$$w(x,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin a\beta_n(t-\tau)J_0(\beta_n r)$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{\xi^{(n)}}{R},\\ B_n &= \frac{2}{a\beta_n R^2 J_1^2(\beta_n R)}\int_0^R rBJ_0(\beta_n r)dr=\frac{2B}{aR\beta_n^2 J_1(\beta_n R)}\end{aligned}$$

而

$$\int_0^t \sin a\beta_n(t-\tau)d\tau = \frac{1-\cos a\beta_n t}{a\beta_n}$$

所以,

$$u(r,t) = \frac{2B}{a^2 R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos a\beta_n t)}{\beta_n^3 J_1(\beta_n R)}J_0(\beta_n r)$$

**习题 4.32** 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2\frac{1}{r}(ru_r)_r \\ u|_{r=l} = u_0, u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{t=0} = f(r) \end{cases}$$

**解**: 首先, 令 $v(r,t) = u(r,t) - u_0$, 则 $v(r,t)$ 满足齐次方程, 齐次边界条件。为解出 $v(r,t)$, 用分离变量法。设 $v(r,t) = R(r)T(t)$, 代入方程, 得

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{(rR')'}{rR} = -\lambda$$

即

$$T' + a^2\lambda T = 0, \quad r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0$$

解 $R(r)$ 的本征值问题

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, \\ R(b) = 0, R(0)\text{有界} \end{cases}$$

同 31 题的解的过程可知, 若设 $\xi_0^{(n)}$ 为 $J_0(x)$ 的正跟,

$$\lambda_n = \beta_n^2, \beta_n = \frac{\xi_0^{(n)}}{l}, (n=1,2,\cdots)$$
$$R_n(r) = J_0(\beta_n r)$$

则 $T_n(t) = a_n e^{-a^2\beta_n^2 t}$, 所以,

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\beta_n^2 t} J_0(\beta_n r)$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\beta_n l)}\int_0^l r[f(r)-u_0]J_0(\beta_n r)dr,\ u(r,t) = u_0 + v(r,t).$$

**习题 4.33** 求下列球内的 *Dirichlet* 问题的解:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \quad (\rho < a, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi) \\ u|_{\rho=a} = \cos^2\phi \end{cases}$$

**解**：观察边界条件，可知 $u$ 不依赖于 $\theta$，故设 $u(r,\theta,\phi)=R(\rho)H(\phi)$，代入方程，分离变量，得

$$(\rho^2R')'=\lambda R\frac{1}{\sin\phi}(\sin\phi H')'+\lambda H=0$$

对 $H(\phi)$ 的方程，令 $x=\cos\phi$，记 $y(x)=H(\phi)$，有 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$

故

$$\lambda_n=n(n+1),\quad H_n(\phi)==P_n(\cos\phi),(n=0,1,2,\cdots)$$

接着由 $R(\rho)$ 的方程和 $u$ 在 $\rho=0$ 有界，可解得

$$R_n=C_n\rho^n$$

因此

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\rho^nP_n(\cos\phi)$$

用比较系数法，知

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$

故由边界条件，

$$A_0=\frac{1}{3},A_2=\frac{2}{3a^2},A_n=0(n\neq 0,2)$$

$$u(\rho,\phi)=\frac{1}{3}+\frac{\rho^2}{a^2}\frac{2}{3}P_2(\cos\phi)=\frac{1}{3}+\frac{\rho^2}{a^2}(\cos\phi^2-\frac{1}{3})$$

**习题 4.34** 设高为 $l$ 半径为 $a$ 的圆柱体两底接地，而侧面充电到电势 $u_0$，求柱体内静电场的电势。

**解**：此定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0,\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=l}=0,\\ u|_{r=a}=u_0\end{cases}$$

用分离变量法解以上问题。首先，设 $u(r,z)=R(r)H(z)$，代入方程中，得

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{H''}{H}=\lambda$$

即

$$\begin{aligned}&r^2R''+rR'-\lambda r^2R=0,\\ &H''+\lambda H=0\end{aligned}$$

解 $H(z)$ 的本征值问题

$$\begin{cases}H''+\lambda H=0,\\ H(0)=0,H(h)=0\end{cases}$$

得

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{h^2}, \quad H_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{h} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

再解 $R(r)$ 的方程，令 $x = n\pi/lr, y(x) = R(r)$，得

$$x^2y'' + xy' - x^2y = 0,\ y(0)\text{有界}$$

其解是零阶第一类虚宗量 Bessel 函数 $I_0(x)$. 故

$$R_n(r) = a_nI_0(\frac{n\pi r}{l})$$

从而

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nI_0(\frac{n\pi r}{l})\sin\frac{n\pi z}{l}$$

其中

$$A_{\ n} = \frac{2}{I_0(\frac{n\pi a}{l})l}\int_0^l u_0\sin\frac{n\pi z}{l}dz = \frac{2u_0}{n\pi I_0(\frac{n\pi a}{l})}[(-1)^n - 1]$$

**习题 4.35** 一半径为 $a$ 的球，如果上半球面充电到电势 $u_1$，下半球面充电到电势 $u_2$，求球内电场中的电势。

**解**：观察此解与 $\theta$ 无关，于是得如下定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = (r^2u_r)_r + \frac{1}{\sin\phi}(\sin\phi u_\phi)_\phi = 0 \\ u|_{r=a} = f(\phi) = \begin{cases} u_1, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \\ u_2, \frac{\pi}{2} < \phi \le \pi \end{cases} \end{cases}$$

解得

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nr^nP_n(\cos\phi)$$

将边界条件代入，得到

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{a^n}\frac{2n+1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u_2P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi] \\ &= \frac{2n+1}{2a^n}[u_1\int_0^1 P_n(x)dx + u_2\int_{-1}^0 P_n(x)dx] \\ &= \frac{1}{2a^n}[(u_1-u_2)(P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)) + u_2(P_{n-1}(-1) - P_{n+1}(-1))] \end{aligned}$$

**习题 4.36** 求下列周期 $S$-$L$ 问题的本征值和本征函数：

(1). $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-1) = y(1), y'(-1) = y'(1) \end{cases}$ (2). $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$

**解 (1)**：$(i)$ 当 $\lambda<0$ 时，不是本征值。

$(ii)$ 当 $\lambda=0$ 时，$y=Ax+B$，则 $A=0, y=B$，所以 $\lambda=0$ 是本征值。

$(iii)$ 当 $\lambda>0$ 时，$y=A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}$. 代入边界条件，得

$$\begin{cases} B\sin\sqrt{\lambda}=0 \\ \sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}$$

所以，要得非零的 $A, B$，必须 $\sin\sqrt{\lambda}=0$. 也即 $\sqrt{\lambda}=n\pi, \lambda=n^2\pi^2, (n=1,2,\cdots)$. 此时，$y=A_n\cos n\pi x+B_n\sin n\pi x$.

**解 (2)**：(i) 易知，$\lambda=0$ 是本征值，此时 $y=C$.

(ii) 当 $\lambda>0$ 时，$y=A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}$. 代入边界条件，得

$$\begin{cases} A(1-\cos\pi\sqrt{\lambda})+B\sin\pi\sqrt{\lambda}=0 \\ A\sin\pi\sqrt{\lambda}+B(1-\cos\pi\sqrt{\lambda})=0 \end{cases}$$

要得非零的 $A, B$，必须 $1-\cos\pi\sqrt{\lambda}=0$，则 $\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi, \lambda_n=4n^2, (n=1,2,\cdots)$. 此时，$y_n(x)=A_n\cos(2n\pi x)+B_n\sin(2n\pi x)$.

**习题 4.37** 求下列 $SL$ 问题的本征值和本征函数：

$$(1).\begin{cases} y''+y'+(1+\lambda)y=0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases} \qquad (2).\begin{cases} y''+2y'+(1+\lambda)y=0 \\ y(0)=0, y'(1)=0 \end{cases}$$

**解 (1)**：设 $y=e^{\mu x}$，代入方程，得 $\mu=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}$.

(i) 当 $\lambda<-\frac{3}{4}$ 时 $y=e^{-x\frac{1}{2}}(Ae^{x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}}+Be^{-x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}})$. 代入边界条件，$A+B=0$，$Ae^{\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}}+Be^{-\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}}=0$，解得 $A=B=0$. 所以，此时，$\lambda$ 不是本征值。

(ii) 当 $\lambda=-\frac{3}{4}$ 时，$y(x)=e^{-x\frac{1}{2}}(Ax+B)$.

代入边界条件，$B=0, A=0$，所以，此时 $\lambda$ 不是本征值。

(iii) 当 $\lambda>-\frac{3}{4}$ 时，$y(x)=e^{-x\frac{1}{2}}[A\cos(x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda})+B\sin(x\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda})]$.

代入边界条件，$A=0, B\sin(\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda})=0$. 所以要使 $B\neq0$，须 $\frac{1}{2}\sqrt{-3-4\lambda}=n\pi, (n=1,2,\cdots)$. 故

$$\lambda_n=-\frac{3}{4}-n^2\pi^2, y_n=Be^{-\frac{x}{2}}\sin n\pi x \quad (n=1,2,\cdots)$$

**解 (2)**：设 $y=e^{\mu x}$，代入方程，得 $\mu=-1\pm\sqrt{-\lambda}$.

(i) 当 $\lambda<0$ 时，$y=e^{-x}(Ae^{x\sqrt{-\lambda}}+Be^{-x\sqrt{-\lambda}})$.

代入边界条件，$A+B=0$，$Ae^{\sqrt{-\lambda}}(\sqrt{-\lambda}-1)+Be^{-\sqrt{-\lambda}}(-\sqrt{-\lambda}-1)=0$，解得 $A=B=0$. 所以，此时，$\lambda$ 不是本征值。

(ii) 当 $\lambda=0$ 时，$y=e^{-x}(Ax+B)$. 代入边界条件，$B=0, A=0$，所以，此时 $\lambda$ 不是本征值。