微积分II综合复习题

浙江大学数学学院　薛儒英

1.（8分）设$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $x\in(0,2\pi)$，又设$f(0)=f(2\pi)=0$，将f延拓成$\mathbb{R}$ 上以2π 为周期的周期函数，仍记为$f(x)$。试将$f(x)$展开成Fourier级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$。进一步计算级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的和。

解: 由公式及周期函数的积分性质

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=0;\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)d(\frac{1}{n}\sin nx)\\
&= \frac{1}{2n\pi}(\pi-x)\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nxdx=0;\ n=1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

1.（8分）设$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $x\in(0,2\pi)$，又设$f(0)=f(2\pi)=0$，将f延拓成$\mathcal{R}$ 上以2π为周期的周期函数，仍记为$f(x)$。试将$f(x)$展开成Fourier级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$。进一步计算级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的和。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)d(-\frac{1}{n}\cos nx) \\
&= -\frac{1}{2n\pi}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nxdx = \frac{1}{n};\ n=1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

从而$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$; 由函数$f(x)$满足Dirichlet条件，

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n} = \frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = f(1) = \frac{\pi-1}{2}.
$$

2.（7分）(1)求幂级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数; (2) 求级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$的和;

解: (1). 幂级数$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$的收敛域为$[-1,1]$; 记

$$S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$$

$S(0)=0$. 当$x\in(-1,1)$时(为什么？)

$$S'(x)=\left(\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}\right)'=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1};$$

$$S'(0)=0,S''(x)=\left(\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n x^{n-2}=\frac{1}{1+x};$$

从而$S'(x)=S'(x)-S'(0)=\int_0^x S''(x)dx=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$;

$$
\begin{aligned}
S(x) &= S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x \ln(1+x)dx \\
&= x\ln(1+x)-\int_0^x \frac{x}{1+x}dx=(x+1)\ln(1+x)-x;
\end{aligned}
$$

由于$S(x)$在区间$[-1,1]$上连续，由连续性

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-} S(x)=\lim_{x\to 1^-}[(x+1)\ln(1+x)-x]=2\ln 2-1;$$

$$S(-1)=\lim_{x\to(-1)^+} S(x)=\lim_{x\to(-1)^+}[(x+1)\ln(1+x)-x]=1;$$

从而和函数为

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}=S(x)=\begin{cases}(x+1)\ln(1+x)-x, x\in(-1,1]\\ 1, x=-1\end{cases}$$

(2). $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=S(1)=2\ln 2-1.$

3. (5分)设$\{a_n\}$是一个严格单调递减的正数数列，证明无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n+1}{n}$ 条件收敛。

证明: • $\frac{a_n+1}{n}\geq\frac{1}{n}$且级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，由正项级数的比较判别法知：无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n+1}{n}$不是绝对收敛的；

• $\frac{a_n+1}{n}\geq 0$、$\{\frac{a_n+1}{n}\}$单调递减且$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+1}{n}=0$, 由交错级数的莱布尼兹判别法，无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n+1}{n}$是收敛的；

从而，无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n+1}{n}$ 条件收敛。

4.(5分)证明：直角坐标系$Oxyz$中的向量场$\vec{u}(x,y,z)=\{yz,xz,xy\}$是一个无旋场。

证明:向量场$\vec{u}$的旋度

$$
\begin{aligned}
rot\,\vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \\
&= (x-x)\vec{i}-(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=\vec{0};
\end{aligned}
$$

所以向量场$\vec{u}(x,y,z)=\{yz,xz,xy\}$是一个无旋场。

5. （7分）设S为上半单位球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取内侧为正侧，计算第二型曲面积分$\iint_S dydz+dzdx+dxdy$.

解法1: 取$S_1: z=0\,(x^2+y^2\leq 1)$(上侧)，由曲面$S$与$S_1$所围立体为$\Omega$。则$S\cup S_1$ 是立体Ω边界曲面的内侧. 由高斯定理，

$$\iint_S+\iint_{S_1} dydz+dzdx+dxdy=\iint_{S\cup S_1} dydz+dzdx+dxdy$$

$$=\ -\iiint_\Omega\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]dV=-\iiint_\Omega 0dV=0;$$

利用投影法，

$$\iint_{S_1} dydz=0,\ \iint_{S_1} dzdx=0,\ \iint_{S_1} dxdy=\iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy=\pi;$$

从而

$$\iint_S dydz+dzdx+dxdy=-\iint_{S_1} dydz+dzdx+dxdy=-\pi.$$

5. （7分）设S为上半单位球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取内侧为正侧，计算第二型曲面积分$\iint_S dydz+dzdx+dxdy$.

解法2: $S: z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x^2+y^2\le 1)$内侧的单位法向量为

$$\vec{n}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=-\frac{\{x,y,z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\{x,y,z\}$$

从而, 转化为第一型曲面积分, $D=\{x^2+y^2\le 1\}$,

$$\iint_S dydz+dzdx+dxdy=-\iint_S(x+y+z)dS;$$

$S: z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,((x,y)\in D)$得$dS=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$,

$$\begin{aligned}\iint_S dydz+dzdx+dxdy&=-\iint_S(x+y+z)dS\\ =\ &-\iint_D\frac{x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=-\iint_D\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy\\ =\ &-\iint_D dxdy=-\pi.\end{aligned}$$

6.(10分) 设$R > 0$. (1). 设$D_1 = \{x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$,
计算二重积分$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy$;

(2). 设$D_2 = \{(x, y) : 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\}$,
计算$\lim_{R\to+\infty} \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy$, 由此求出$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解: (1). $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le R\}$,

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_{D_1} e^{-r^2} \cdot rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R re^{-r^2} dr = \frac{\pi(1 - e^{-R^2})}{4};$$

(2). 记$D_3=\{x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$，由二重积分的性质

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy \le \iint_{D_3} e^{-x^2-y^2}dxdy;$$

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4}=\frac{\pi}{4};$$

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_3} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi(1-e^{-2R^2})}{4}=\frac{\pi}{4};$$

由极限的夹逼准则得$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$;

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R dy\int_0^R e^{-x^2-y^2}dx$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2,$$

得$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.(10分)设$f(u,v)$在平面$\mathbb{R}^2$上有连续的一阶偏导数，对$x\in\mathbb{R}$有$f(x,x^2)=2018$。又设对$x\in\mathbb{R}$，$f_1'(x,x^2)=x$。
(1). 当$t\neq 0$时求$f_2'(t,t^2)$; (2). 求$f_2'(0,0)$;

解: (1). $f(x,x^2)=2018$关于x求导数得:

$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=0 \implies x+2xf_2'(x,x^2)=0$$

当$t\neq 0$时$f_2'(t,t^2)=-\frac{1}{2}$;

(2). $f(u,v)$有连续的一阶偏导数, 由连续的定义

$$f_2'(0,0)=\lim_{t\to 0} f_2'(t,t^2)=\lim_{t\to 0}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

8. (7分)设$f(u,v)$在点(x_0,y_0)处可微，$\vec{\ell_1}$、$\vec{\ell_2}$、$\vec{\ell_3}$、$\vec{\ell_4}$ 为平面上四个互异的单位向量，且满足$\sum_{n=1}^{4}\vec{\ell_n}=(0,0)$.
求$\sum_{n=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell_n}}(x_0,y_0)$.

解: 由在点(x_0,y_0)处可微得

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell_n}}(x_0,y_0)=grad\, f(x_0,y_0)\cdot\vec{\ell_n}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell_n}}(x_0,y_0)=\sum_{n=1}^{4}grad\, f(x_0,y_0)\cdot\vec{\ell_n}=grad\, f(x_0,y_0)\cdot\sum_{n=1}^{4}\vec{\ell_n}=0.$$

9.(8分)设Γ为抛物线$2x=\pi y^2$上从点$O(0,0)$到点$B(\frac{\pi}{2},1)$的有向弧段，计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy.$$

解法1： $\Gamma:\ x=\frac{\pi}{2}y^2,\ y=y,\ y:\ 0\to 1;$

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Gamma (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy \\
&= \int_0^1 \left(\pi y^5-y^2\cos\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)\right)d\left(\frac{\pi}{2}y^2\right) \\
&\quad + \int_0^1 \left(1-2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)+\frac{3}{4}\pi^2y^6\right)dy \\
&= \int_0^1 \left(1+\frac{7}{4}\pi^2y^6-\pi y^3\cos\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)-2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)\right)dy
\end{aligned}$$

9.(8分)设Γ为抛物线$2x=\pi y^2$上从点$O(0,0)$到点$B(\frac{\pi}{2},1)$的有向弧段，计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\left(1+\frac{7}{4}\pi^2y^6-\pi y^3\cos\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)-2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)\right)dy \\
&= 1+\frac{1}{4}\pi^2-\int_0^1\left(\pi y^3\cos\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)+2y\sin\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)\right)dy(\text{取}\frac{\pi}{2}y^2=t) \\
&= 1+\frac{1}{4}\pi^2-\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}(t\cos t+\sin t)dt \\
&= 1+\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{\pi}t\sin t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi^2;
\end{aligned}$$

9.(8分)设Γ为抛物线$2x=\pi y^2$上从点$O(0,0)$到点$B(\frac{\pi}{2},1)$的有向弧段，计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy.$$

解法2: $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$, $Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$. 在单连通区域$\mathbb{R}^2$ 内

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\frac{\partial P}{\partial x};$$

从而第二型曲线积分与路径无关；取原函数

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y (1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=y-y^2\sin x+x^2y^3.$$

由牛顿—莱布尼兹定理

$$\int_\Gamma (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=u\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)}=\frac{\pi^2}{4}.$$

10.(8分) 设V为$\mathbb{R}^3$中锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围的有界闭区域（锥体），计算三重积分$\iiint_V(\sqrt{x^2+y^2}+z)dxdydz$.

解法1: (投影法) $V=\{(x,y)\in D,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$,

$$D=\{x^2+y^2\le 1\}=\{(r,\theta):\ 0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1\};$$

$$\begin{aligned}
&\iiint_V(\sqrt{x^2+y^2}+z)dxdydz\\
=\ &\iint_D dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1(\sqrt{x^2+y^2}+z)dz\\
=\ &\iint_D\left[\sqrt{x^2+y^2}-\frac{3}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\right]dxdy\\
=\ &\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left[r-\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{2}\right]\cdot rdr=\frac{5\pi}{12}.
\end{aligned}$$

10.(8分)设V为$\mathbb{R}^3$中锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围的有界闭区域（锥体）计算三重积分$\iiint_V(\sqrt{x^2+y^2}+z)dxdydz$.

解法2:(截面法)$V=\{0\le z\le 1,(x,y)\in D_z\}$,

$$D_z=\{x^2+y^2\le z^2\}=\{(r,\theta):\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le z\};$$

$$\begin{aligned}
&\iiint_V(\sqrt{x^2+y^2}+z)dxdydz\\
=&\int_0^1 dz\iint_{D_z}(\sqrt{x^2+y^2}+z)dxdy\\
=&\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z(r+z)\cdot rdr\\
=&\int_0^1\frac{5\pi}{3}z^3dz=\frac{5\pi}{12}.
\end{aligned}$$

11.(7分)设有一抛物面Σ：$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,(0\le z\le 1)$，已知面密度为$z+\frac{1}{2}$，求其质量$m$.

解: $m=\iint_\Sigma\left(z+\frac{1}{2}\right)dS$; Σ : $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(x,y)\in D$,

$$D=\{x^2+y^2\le 2\}=\{(r,\theta):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{2}\},$$

$$dS=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy,$$

$$\begin{aligned}
m &= \iint_\Sigma\left(z+\frac{1}{2}\right)dS\\
&= \iint_D\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r^2+1)^{3/2}\cdot rdr=\frac{9\sqrt{3}-1}{5}\pi.
\end{aligned}$$

12.(5分)设D为平面上的一个有界闭区域，$u(x,y)$在D上连续，在D的内部每点处存在偏导数，$u|_{\partial D}=0$, 且满足$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u$。证明：$\forall (x,y)\in D$, $u(x,y)=0$.

解: 利用格林公式

$$
\begin{aligned}
& \iint_D 2u^2 dxdy = \iint_D 2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \\
= & \iint_D \left(\frac{\partial u^2}{\partial x}-\frac{\partial(-u^2)}{\partial y}\right) dxdy \\
= & \oint_{\partial D} -u^2 dx + u^2 dy = 0,
\end{aligned}
$$

从而

$$\iint_D 2u^2 dxdy = 0 \implies u(x,y)=0, \forall (x,y)\in D.$$

13.(5分)设$u(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数，$F(s,t)$有连续的一阶偏导数，且$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 有$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)=0$。对$\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$有$\left(\frac{\partial F}{\partial s}(s,t),\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)\right)\neq(0,0)$。证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

解: 对$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)=0$关于$x$、$y$分别求导，

$$\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$$

由$\left(\frac{\partial F}{\partial s},\frac{\partial F}{\partial t}\right)\neq(0,0)$，

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{vmatrix}=0,\iff\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

14.(8分)设$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是一个给定的单位向量，C是平面$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=1$ 上的一条分段光滑的简单闭曲线，所围有界区域D的面积为A，设C 正向与单位向量$\vec{n}$符合右手法则。证明：

$$\oint_C (z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz=2A.$$

证明： 利用斯托克斯公式，

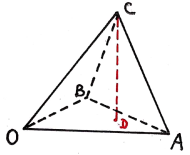
$$\oint_C (z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz$$

$$=\iint_D \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z\cos\beta-y\cos\gamma) & (x\cos\gamma-z\cos\alpha) & (y\cos\alpha-x\cos\beta) \end{vmatrix}$$

$$=\iint_D 2\cos\alpha dydz+2\cos\beta dzdx+2\cos\gamma dxdy$$

$$=\iint_D 2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=\iint_D 2dS=2A.$$

1. 已知四面体OABC顶点$O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，$B(0,-1,2)$，$C(2,1,0)$，求四面体OABC的体积及顶点C在O、A、B三点所决定的平面上投影点D的坐标。



解：$\overrightarrow{OA}=\{1,2,3\}$,

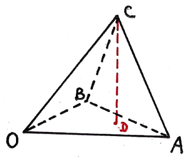
$\overrightarrow{OB}=\{0,-1,2\}$,

$\overrightarrow{OC}=\{2,1,0\}$,

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\2&1&0\end{vmatrix}\right\|=2;$$

方法1. 记$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$

$=\{\lambda,2\lambda-\mu,3\lambda+2\mu\}$,



则$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=\{-2+\lambda,-1+2\lambda-\mu,3\lambda+2\mu\}$;

由$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OB}$得

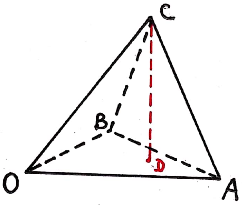
$$\begin{aligned}0 &= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=-4+14\lambda+4\mu;\\ 0 &= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OB}=1+4\lambda+5\mu;\end{aligned}$$

解得

$$\lambda=\frac{4}{9},\ \mu=-\frac{5}{9},\ \overrightarrow{OD}=\{\frac{4}{9},\frac{13}{9},\frac{2}{9}\};$$

从而$D(\frac{4}{9},\frac{13}{9},\frac{2}{9})$.

方法2：



$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=\{7,-2,-1\};\\ \overrightarrow{DC} &= \left(\overrightarrow{OC}\right)_{\vec{n}}\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(\overrightarrow{OC}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\\ &= \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{2}{9}\vec{n}=\{\frac{14}{9},\frac{-4}{9},\frac{-2}{9}\};\end{aligned}$$

从而由$C(2,1,0)$得$D(\frac{4}{9},\frac{13}{9},\frac{2}{9})$.

2. 设圆C为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+z=a$的交线，a为正实数。求圆C在xoy平面上的投影曲线，并求圆C的圆心及半径。

解法1：圆$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+z=a, \end{cases}$ 消去z 得投影柱面

$$x^2+y^2+(a-x)^2=a^2 \Longrightarrow (x-\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{4}a^2;$$

圆C在xoy平面上的投影曲线为（椭圆曲线）

$$L:\begin{cases} (x-\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{4}a^2, \\ z=0, \end{cases} ;$$

圆C的圆心投影点为$(\frac{1}{2}a,0)$, 得圆C的圆心为$(\frac{1}{2}a,0,\frac{1}{2}a)$; 注意到点$(0,0,a)$在圆$C$上，从而半径为

$$R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

2. 设圆C为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+z=a$的交线，a为正实数。求圆C在xoy平面上的投影曲线，并求圆C的圆心及半径。

解法2：圆C：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+z=a, \end{cases}$，解得$M_1(0,0,a)$在圆$C$上；

设$M_2(x,y,z)\in C$，$d=M_1M_2=\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}$. 下面求$M_2(x,y,z)\in C$时$d$的极值，即函数 $d^2=x^2+y^2+(z-a)^2$在条件

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,\ x+z-a=0$$

下的极值；引进拉格朗日函数
$L(x,y,z,\lambda,\mu)=$
$x^2+y^2+(z-a)^2+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)+\mu(x+z-a)$;

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x+\mu=0; & \frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y=0; \\ \frac{\partial L}{\partial z}=2(z-a)+2\lambda z+\mu=0; & \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-a^2=0; \\ \frac{\partial L}{\partial \mu}=x+z-a=0; & \end{cases}$$

解得拉格朗日函数的驻点为$(0,0,a,0,0)$及$(a,0,0,-2,2a)$;

2. 设圆C为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+z=a$的交线，a为正实数。求圆C在xoy平面上的投影曲线，并求圆C的圆心及半径。

拉格朗日函数的驻点为$(0,0,a,0,0)$及$(a,0,0,-2,2a)$; 由实际意义知，$M_2(a,0,0)$时$d_{最大}=\sqrt{2}a$; 从而得圆C的圆心为$(\frac{1}{2}a,0,\frac{1}{2}a)$（$M_1$ 与M_2 的中点），半径为$R=\frac{1}{2}d=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

3. 求曲面$S: z = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3$上平行于平面$\pi: 2x + y + z = 0$ 的切平面方程。

解：设切点$M(x_0, y_0, z_0)$,

$$S: F(x, y, z) = z - x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 3 = 0;$$

曲面在M处法向量为$\vec{n_1} = \{-2x_0, -\frac{1}{2}y_0, 1\}$；平面$\pi$的法向量为$\vec{n_2} = \{2, 1, 1\}$. 由切平面平行于平面$\pi$ 以及$M \in S$得

$$\frac{-2x_0}{2} = \frac{-\frac{1}{2}y_0}{1} = \frac{1}{1},\ z_0 - x_0^2 - \frac{1}{4}y_0^2 - 3 = 0;$$

解得$x_0 = -1, y_0 = -2, z_0 = 5$, $\vec{n_1} = \{2, 1, 1\}$, 切平面方程为

$$2(x+1) + (y+2) + (z-5) = 0 \Longleftrightarrow 2x + y + z = 1.$$

4. 设$z=z(x,y)$是由$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1+\sqrt{3}$所确定的隐函数，求$z=z(x,y)$在$P(1,1,1)$处的全微分。

解法1：同时求微分

$$
\begin{aligned}
& d(xyz)+d\sqrt{x^2+y^2+z^2}=d(1+\sqrt{3}) \\
\Longrightarrow\quad & yzdx+xzdy+xydz+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}d(x^2+y^2+z^2)=0 \\
\Longrightarrow\quad & yzdx+xzdy+xydz+\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0
\end{aligned}
$$

取$(x,y,z)=(1,1,1)$得

$$dx+dy+dz+\frac{1}{\sqrt{3}}(dx+dy+dz)=0\Longrightarrow dz|_{(1,1,1)}=-dx-dy.$$

4. 设$z=z(x,y)$是由$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1+\sqrt{3}$所确定的隐函数，求$z=z(x,y)$在$P(1,1,1)$处的全微分。

解法2：关于x求导（注意$z=z(x,y)$)

$$\frac{\partial(xyz)}{\partial x}+\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{\partial(1+\sqrt{3})}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow\qquad yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}=0$$

$$\Longrightarrow\qquad yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

取$(x,y,z)=(1,1,1)$得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{3}}(1+\frac{\partial z}{\partial x})=0\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1,1)}=-1.$$

类似，$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1,1)}=-1$；从而

$$dz|_{(1,1,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1,1)}dy=-dx-dy.$$

5. 求函数$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$的极值点。

解：$\begin{cases} f'_x=3x^2-8x+2y=0, \\ f'_y=2x-2y=0, \end{cases}$，得驻点为$(0,0)$、$(2,2)$;

$$f''_{xx}=6x-8,\ f''_{xy}=2,\ f''_{yy}=-2;$$

- 驻点$(0,0)$:

$$A=f''_{xx}(0,0)=-8,\ B=f''_{xy}(0,0)=2,\ C=f''_{yy}(0,0)=-2;$$

由$AC-B^2=12>0$且$A<0$得：$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点；

- 驻点$(2,2)$:

$$A=f''_{xx}(2,2)=4,\ B=f''_{xy}(2,2)=2,\ C=f''_{yy}(2,2)=-2;$$

由$AC-B^2=-12<0$得：$(2,2)$不是函数$f(x,y)$的极值点；

6. 设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases}-1, -\pi<x<0\\ 1, 0\le x\le \pi\end{cases}$，求$f(x)$以$2\pi$为周期的傅里叶级数，并利用展开式求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

解：$T=2\ell=2\pi \Longrightarrow \ell=\pi$;

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0, n=1,2,\cdots;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}, n=1,2,\cdots; \end{aligned}$$

从而$f(x)$的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}\sin nx;$$

6. 设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases}-1, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 \le x \le \pi\end{cases}$，求$f(x)$以$\pi$为周期的傅里叶级数，并利用展开式求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

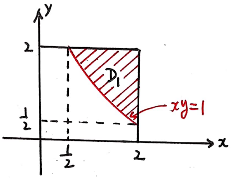
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \sin nx;$$

取$x=\frac{\pi}{2}$, 由Dirichlet定理

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4(-1)^j}{\pi(2j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2} \\
= \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{f(\frac{\pi}{2}+0)+f(\frac{\pi}{2}-0)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1; \\
& \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4};
\end{aligned}$$

7. 计算$\iint_D \max\{xy,1\}d\sigma$，其中

$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$。



解： 取$D_1=D\cap\{xy\ge 1\}$,

$D_2=D\cap\{xy\le 1\}$;

$$\iint_D \max\{xy,1\}d\sigma=\iint_{D_1}\max\{xy,1\}d\sigma+\iint_{D_2}\max\{xy,1\}d\sigma$$

$$=\iint_{D_1} xyd\sigma+\iint_{D_2} d\sigma$$

$$=\iint_{D_1} xyd\sigma+\iint_{D} d\sigma-\iint_{D_1} d\sigma$$

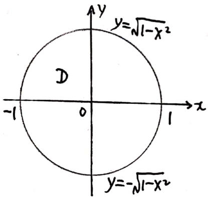
$$=\int_{1/2}^{2}dx\int_{1/x}^{2}(xy-1)dy+4=\frac{19}{4}+\ln 2;$$

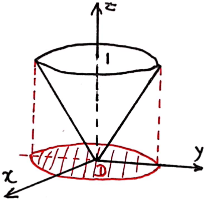
8. 计算$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$.

解：$\Omega = \{(x, y) \in D,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$,

$D = \{(x, y):\ -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$;

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz \\ &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz; \end{aligned}$$



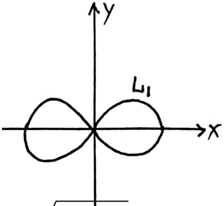


$$\Omega = \{0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{1}{\cos\varphi}\};$$

$$\Omega = \{0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{1}{\cos\varphi}\};$$

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz \\
&= \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r^3 \sin\varphi dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{4\cos^4\varphi} d\varphi = \frac{1}{6}(2\sqrt{2} - 1)\pi;
\end{aligned}$$

9. 设L为双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，a为正实数，求曲线积分$\oint_L |x|ds$。



解：由对称性

$$I=\oint_L |x|ds=4\oint_{L_1}|x|ds=4\int_{L_1}xds;$$

引进极坐标(r,θ),

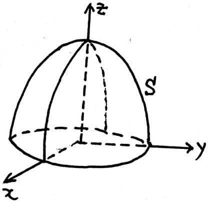
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\Longleftrightarrow r=a\sqrt{\cos 2\theta};$$

$$L_1:\ x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,\ y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta;$$

$$I\ =\ 4\int_{L_1}xds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}a^2.$$

10. 设S是半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$R>0$，计算曲面积分$I=\iint_S(x+y+z+1)^2dS$。



解：$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2+1+2xy+2yz+2xz+2x+2y+2z)dS$,

由对称性: $\iint_S(2xy+2yz+2xz+2x+2y)dS=0$;

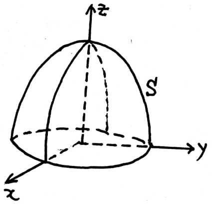
$$\begin{aligned} I &= \iint_S(x^2+y^2+z^2+1+2z)dS \\ &= \iint_S(x^2+y^2+z^2+1)dS+\iint_S 2zdS \\ &= \iint_S(R^2+1)dS+\iint_S 2zdS=(R^2+1)\cdot 2\pi R^2+\iint_S 2zdS \end{aligned}$$

$I = (R^2+1)\cdot 2\pi R^2 + \iint_S 2z dS;$

$S: \ z = \sqrt{R^2-x^2-y^2},$

$(x,y) \in D = \{x^2+y^2 \le R^2\},$

$dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy;$



$$\begin{aligned} I &= 2\pi(R^2+1)R^2 + \iint_D 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy \\ &= 2\pi(R^2+1)R^2 + \iint_D 2R dxdy = 2\pi R^2(R^2+R+1); \end{aligned}$$

11. 设在上半平面$D=\{(x,y):\ y>0\}$内，函数$f(x,y)$具有连续的一阶偏导数，且对任何$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明：对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L，都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0.$$

证明：在等式$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$二侧关于t求导

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y),$$

取$t=1$得

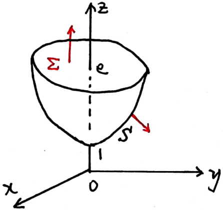
$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y);$$

在单连通区域D内$P(x,y)=yf(x,y)$，$Q(x,y)=-xf(x,y)$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2f(x,y)-xf_1'(x,y)-yf_2'(x,y)=0,$$

从而，$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

12. S是曲线$\begin{cases} z = e^y \\ x = 0 \end{cases}$ $(0 \le y \le 1)$围绕z轴旋转生成的旋转曲面、下侧，求$I = \iint_S 4xzdydz - 2yzdzdx + (x^2 - z^2)dxdy$.



解法1：旋转曲面

$S: z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} (1 \le z \le e)$、下侧；

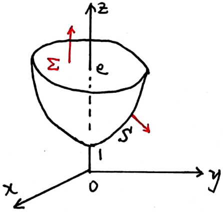
取$\Sigma: z = e(x^2 + y^2 \le 1)$、上侧；

由曲面S与Σ所围立体记为Ω.

由高斯公式及投影法

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S\cup\Sigma} - \iint_{\Sigma} 4xzdydz - 2yzdzdx + (x^2 - z^2)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (4z - 2z - 2z)dV - \left(0 + 0 + \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2 - e^2)dxdy\right) \\ &= e^2\pi - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\cos^2\theta \cdot rdr = e^2\pi - \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

12. S是曲线$\begin{cases} z = e^y \\ x = 0 \end{cases}$ $(0 \le y \le 1)$围绕z轴旋转生成的旋转曲面、下侧，求$I = \iint_S 4xzdydz - 2yzdzdx + (x^2 - z^2)dxdy$.



解法2：旋转曲面

$S: z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}(1 \le z \le e)$、下侧；

下侧单位法向量

$$\vec{n}^0 = \frac{\left\{xe^{\sqrt{x^2+y^2}}, ye^{\sqrt{x^2+y^2}}, -\sqrt{x^2+y^2} right\right\}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}};$$

$$I = \iint_S \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{(4x^2z-2y^2z)}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2 - z^2)}{\sqrt{1 + e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}} dS;$$

$$I=\iint_S \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{(4x^2z-2y^2z)}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2-z^2)}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}}dS;$$

$$S:\ z=e^{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\in D=\{x^2+y^2\leq 1\}$$

$$dS=\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}dxdy;$$

$$I=\iint_D\left[e^{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{(4x^2-2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}-x^2+e^{2\sqrt{x^2+y^2}}\right]dxdy;$$

利用

$$\iint_D \frac{x^2 e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \iint_D \frac{y^2 e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy,$$

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_D y^2 dxdy,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[e^{2\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + e^{2\sqrt{x^2+y^2}} \right] dxdy \\ &= \iint_D \left[e^{2r}(r+1) - \frac{1}{2}r \right] \cdot rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left[e^{2r}(r^2+r) - \frac{1}{2}r^2 \right] dr = e^2\pi - \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

13. 在变力$\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭圆面$x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{6}z^2=1$上第一卦限上的点$P(a,b,c)$，问$a$、$b$、$c$取何值时力$\vec{F}$所做的功$W$最大，并求$W$的最大值。

解：直线OP：$x=at$, $y=bt$, $z=ct$, $t:0\to 1$;

$$\begin{aligned} W &= \int_{OP}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_{OP} yzdx+zxdy+xydz \\ &= \int_0^1 3abct^2dt=abc; \end{aligned}$$

我们要计算：当$a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{6}c^2=1$且$a>0$、$b>0$ 及$c>0$ 时求$W=abc$的最大值。引进拉格朗日函数

$$L(a,b,c,\lambda)=abc+\lambda(a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{6}c^2-1);$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a}=bc+2\lambda a=0, & \frac{\partial L}{\partial b}=ac+\frac{2}{3}\lambda b=0, \\ \frac{\partial L}{\partial c}=ab+\frac{1}{3}\lambda c=0, & \frac{\partial L}{\partial \lambda}=a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{6}c^2-1=0 \end{cases}$$

得拉格朗日函数的驻点$(a,b,c,\lambda)=(\frac{1}{\sqrt{3}},1,\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$. 结合实际问题，当$(a,b,c)=(\frac{1}{\sqrt{3}},1,\sqrt{2})$时$W$有最大值$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. 设P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，S在点P处的切平面与xoy平面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+3)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，Σ是椭球面S位于曲线C上方部分。

解：设点$P(x,y,z)$, 则

$$x^2+y^2+z^2-yz=1---------(1)$$

椭球面S在$P(x,y,z)$处的法向量为$\vec{n}=\{2x,2y-z,2z-y\}$, 由切平面与xoy平面垂直得

$$\vec{n}\cdot\vec{k}=0\Longrightarrow 2z-y=0-----------(2)$$

从而点P的轨迹为$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ 2z-y=0\end{cases}$. 点P的轨迹$C$在$xoy$平面上的投影曲线为$\begin{cases}x^2+\frac{3}{4}y^2=1\\ z=0\end{cases}$;

14. 设P为椭球面S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，S在点P处的切平面与xoy平面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分$I=\iint_\Sigma \frac{(x+3)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，$\Sigma$是椭球面S位于曲线C上方部分。

点P的轨迹C在xoy平面上的投影曲线为$\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$；

$$\Sigma: z=\frac{1}{2}y+\sqrt{1-x^2-\frac{3}{4}y^2}, (x,y)\in D=\{x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}\text{且}2z-y\ge 0;$$

$$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}dxdy;$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Sigma \frac{(x+3)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint_\Sigma \frac{(x+3)(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS \\ &= \iint_D (x+3)dxdy(\text{由对称性})=\iint_D 3dxdy=2\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

15. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty, +\infty)$内收敛，和函数$y(x)$满足:

$$y'' - 2xy' - 4y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(I) 证明$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$， n=1, 2, $\cdots$

(II) 求$y(x)$的表达式。

解：(I). 在$(-\infty, +\infty)$内$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$(其收敛半径为$R = +\infty$),

$$\begin{cases} y'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}; \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y'' - 2xy' - 4y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n - 4a_n\right] x^n \\ 0 = y(0) = a_0, \qquad 1 = y'(0) = a_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y'' - 2xy' - 4y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n\right] x^n \\ 0 = y(0) = a_0, \qquad 1 = y'(0) = a_1; \end{cases}$$

比较系数得

$$\begin{cases} (n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+4)a_n \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

(II) 由$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$，$a_0=0$推得

$$a_0=a_2=\cdots=a_{2k}=0, k=1,2,\cdots;$$

由$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$，$a_1=1$推得

$$a_3=\frac{2}{2}a_1,\ a_5=\frac{2}{4}a_3=\frac{2}{4}\frac{2}{2}a_1=\frac{1}{2!}a_1,$$
$$a_7=\frac{1}{3!}a_1,\cdots,a_{2k+1}=\frac{1}{k!},k=0,1,2\cdots;$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x+\frac{1}{1!}x^3+\frac{1}{2!}x^5+\frac{1}{3!}x^7+\cdots \\ &= x\left[1+\frac{1}{1!}x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\cdots\right]=xe^{x^2}; \end{aligned}$$