3 2013–2014 学年冬学期

$u = v + w(x)$

$w''(x) + x = 0$

$w(0) = 2 \Rightarrow w = -\frac{1}{6}x^3 + 2$

一、（20 分）用反射法（对称延拓法）求解下列初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x & x \geq 0,\ t > 0 \\ u\big|_{x=0} = 2 & \\ u\big|_{t=0} = -\frac{1}{6}x^3 + 2\cos x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

想办法把 x 处理掉

$\Leftrightarrow$ ~~$u_x|_{x=0} = 0$~~ 不等于

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{t=0} = 2\cos x - 2, \quad v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

奇延拓：$v = \frac{1}{2}[\Phi(x-t) + \Phi(x+t)]$

$$\begin{cases} - - - - & x \geq t \\ - - - & x < t \end{cases}$$

二、（20 分）已知在极坐标 (r, θ) 下有

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

其中 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$. 试用分离变量法求解下列边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 \geq 4 \\ u\big|_{x^2+y^2=4} = xy + 2y^2 & \\ |u(x, y)| < +\infty & x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$\cancel{c_n r^n} + d_n r^{-n}$

三、（20 分）对于给定的初始条件 $g(x)$，试求出控制函数 $f(x)$ 使得初边值问题

换汤不换药

受迫振动，

只不过 $F(t,x)$ 的傅立叶展开

要分情况

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t, x) & 0 \leq x \leq 2,\ t > 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=2} = 0 & \\ u\big|_{t=0} = g(x) & \end{cases}$$

的解 $u(t, x)$ 当 $t \geq 4$ 时满足 $u(t, x) = 0$. 其中

$$F(t, x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

四、（20 分）

(1) 试写出函数 $f(x)$ 的傅里叶变换.

(2) 记函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的傅里叶变换为 $g(\lambda)$. 求证 $g(\lambda)$ 满足方程

$$\frac{dg}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2}g = 0, \qquad g(0) = \sqrt{\pi},$$

并利用上述微分方程证明 $g(\lambda) = \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2}$.

乘子性：$\frac{1}{i}F[xf(x)] = \frac{dg}{d\lambda}$

微分性：

$i\lambda F[f] = F[f']$

$f' = -2xe^{-x^2}$

$\therefore \frac{\lambda}{2}g = -\frac{i}{2}F[-2xf]$

$= iF[xf]$

(3) 利用傅里叶变换求解

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0 & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x). & \end{cases}$$

$\hat{u} = \hat{\varphi}e^{(2i\lambda - \lambda^2)t}$

卷积 一眼看不出，强行求

现在看得出，哈哈！

$e^{-\lambda^2 t} \cdot e^{2i\lambda t} \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{(x+2t)^2}{4t}}$

$\hat{\varphi} \xrightarrow{F^{-1}} = \varphi$

$\therefore u = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{(x-\xi+2t)}{4t}}$

五、（20 分）

$b = \cos t \quad c = -\sin^2 t$

$ac = 1 > 0$

$\therefore$ 双曲型

(1) 试求出方程

$$u_{tt} + 2\cos t u_{tx} - \sin^2 t u_{xx} - \sin t u_x = x - \sin t$$

的标准型，并指出它是椭圆型、抛物线型还是双曲线型方程.

:

$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

$\cos t \pm 1$

$\sin t - t = c_1$

$\sin t + t = c_2$

$x - \sin t - t$

(2) 求解上述方程满足初值条件

$$u\big|_{t=0} = -\frac{1}{8}x^3, \qquad u_t\big|_{t=0} = -\frac{3}{8}x^3$$

的解.

$u|_{t=0} = u_{\xi=\eta=x} = -\frac{1}{8}x^3$

$u_t|_{t=0} = -2u_\xi|_{\xi=\eta=x} = -\frac{3}{8}x^3$

先用 ξ, η 表解出，换回 x 和 t

再代初值

$\Rightarrow u = -\frac{1}{16}((x - \sin t)^2 - t^2)(2(x - \sin$

浙江大学13-14学年冬学期《偏微分方程》期末考试解答

一．（20分）用反射波法（对称延拓法）求解下列初值问题

$u=v+p(x)$.

$$\begin{cases} p''(x)+x=0 \\ p(0)=2 \end{cases}$$

特殊根法

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+x, x\geq 0, t>0 \\ u|_{x=0}=2 \\ u|_{t=0}=-\frac{1}{6}x^3+2\cos x, u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解. 取$w(x)=-\frac{1}{6}x^3+2$，令$v=u-w$,则

答的 $p(x)=-\frac{1}{6}x^3+2$ 附求

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}, x\geq 0, t>0 \\ v|_{x=0}=0 \\ v|_{t=0}=-2+2\cos x, v_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$ 奇 ……………………………… 5分

记$\phi(x)=\begin{cases} 2(\cos x-1), x\geq 0 \\ 2(1-cosx), x<0 \end{cases}$，考虑初值问题$\begin{cases} V_{tt}=V_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ V|_{t=0}=\phi(x), V_t|_{t=0}=0 \end{cases}$ 解得 ………… 10分

直接代式.

$$V(t,x)=\frac{1}{2}[\phi(x+t)+\phi(x-t)], x\geq 0, t>0.$$

从而有

$$v(t,x)=V(t,x)|_{x\geq 0,t>0}=\begin{cases} -4+2\cos(x+t)+2\cos(x-t), x\geq t\geq 0 \\ 2\cos(x+t)-2cos(x-t), 0\leq x<t \end{cases}$$ …………… 15分

我们得解为

$$u(t,x)=v(t,x)+w(x)=\begin{cases} -\frac{1}{6}x^3-2+2\cos(x+t)+2\cos(x-t), x\geq t\geq 0 \\ -\frac{1}{6}x^3+2+2\cos(x+t)-2cos(x-t), 0\leq x<t \end{cases}$$ ……………20分

二. (20分)）已知在极坐标(r,θ)下有$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$其中$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 试用分离变量法求解下列边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, x^2+y^2\geq 4 \\ u|_{x^2+y^2=4}=xy+2y^2 \\ |u(x,y)|<+\infty, x^2+y^2\geq 4 \end{cases}$$

解. 记$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, $u(r,\theta)=u(x,y)$满足

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, r\geq 2 \\ u|_{r=2}=f(\theta)=4+2\sin 2\theta-4\cos 2\theta \\ |u|<+\infty, r\geq 2 \end{cases}$$

令$u(r,\theta)=R(r)H(\theta)$，由分离变量法得

$$\begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0 \\ H(0)=H(2\pi),\ H'(0)=H'(2\pi) \end{cases},\quad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0 \\ |R(r)|<+\infty \end{cases}$$ ……………………5分

讨论特征值问题得：

$\lambda_0=0$时，有非零解$H_0(\theta)=B_0$，$R_0(r)=C_0$，从而得$u_0(r,\theta)=a_0$，其中$a_0=B_0C_0$；

$\lambda_n=n^2(n=1,2,\cdots)$时，有非零解$H_n(\theta)=A_n\sin n\theta+B_n\cos n\theta$，$R_n(r)=C_nr^{-n}$，从而得$u_n(r,\theta)=r^{-n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$，其中$a_n=C_nB_n$，$b_n=C_nA_n$； ……………………10分

作

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}r^{-n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$ ……………………15分

由$u|_{r=2}=f(\theta)$得

r=2

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)=f(\theta)=4+2\sin 2\theta-4\cos 2\theta$$

即$a_0=4$，$a_2=-16$，$b_2=8$。解为

$$u=4+8r^{-2}(-2\cos 2\theta+\sin 2\theta)$$ ……………………20分

三．（20分）对于给定的初始条件$g(x)$，试求出控制函数$f(x)$使得初边值问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(t,x),\ 0\le x\le 2,\ t>0 \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0 \\ u|_{t=0}=g(x) \end{cases}$$

的解$u(t,x)$当$t\ge 4$时满足$u(t,x)=0$，其中$F(t,x)=\begin{cases} f(x),\ 0\le t\le 2 \\ 0,\ t>2 \end{cases}$.

解. 由边界条件知特征（本征）函数系为$\{\sin\frac{n\pi x}{2}\}_{n=1}^{+\infty}$. 按特征(本征）函数系展开得

$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{2}$

$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n\sin\frac{n\pi x}{2}$，其中$g_n=\int_0^2 g(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$

$F(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{2}$，其中$A_n(t)=\int_0^2F(t,x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{cases} B_n,\ 0\le t\le 2 \\ 0,\ t>2 \end{cases}$，✓

$B_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$ ……………………5分

代入初边值问题得

$$\begin{cases} T_n'(t)+\frac{n^2\pi^2}{4}T_n(t)=\begin{cases} B_n,\ 0\le t\le 2 \\ 0,\ t>2 \end{cases} \\ T_n(0)=g_n. \end{cases}$$ ……………………10分

伯努利

解得

$$T_n(t)=\begin{cases} (g_n-\frac{4B_n}{n^2\pi^2})e^{-\frac{n^2\pi^2t}{4}}+\frac{4B_n}{n^2\pi^2},\ 0\le t\le 2 \\ (g_n-\frac{4B_n}{n^2\pi^2}+\frac{4B_n}{n^2\pi^2}e^{-\frac{n^2\pi^2}{2}})e^{-\frac{n^2\pi^2t}{4}},\ t>2 \end{cases}$$ ……………………15分

t>2

$y=e^{-\int\frac{n^2\pi^2}{4}dt}\left[\int B_n e^{\int\frac{n^2\pi^2}{4}dt}dt+c\right]$ $\quad$ $y=C e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}$

由$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{2}=0\,(t\geq 4)$得到$T_n(t)=0\,(t\geq 4)$，即满足

$$B_n=\frac{g_n n^2\pi^2}{4(1-e^{\frac{n^2\pi^2}{2}})}$$

得到唯一的函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g_n n^2\pi^2}{4(1-e^{\frac{n^2\pi^2}{2}})}\sin\frac{n\pi x}{2},\ 其中g_n=\int_0^2 g(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx. \quad \text{……………………20分}$$

四. (20分)(1). 试写出函数$f(x)$的傅里叶变换；

(2). 记函数$f(x)=e^{-x^2}$的傅里叶变换为$g(\lambda)$，求证$g(\lambda)$满足微分方程：

$$\frac{dg}{d\lambda}+\frac{\lambda}{2}g=0,\ g(0)=\sqrt{\pi};$$

并利用上述微分方程证明：$g(\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$；

(3). 利用傅里叶变换法求解：

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=0,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

解. (1). 省略。 ……………………………………………………………………5分

(2). $g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx$，显然有$g(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. 由分部积分法，

$$\frac{dg}{d\lambda}=-i\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{de^{-x^2}}{dx}e^{-i\lambda x}dx=-\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=-\frac{\lambda}{2}g(\lambda). \quad \text{……10分}$$

(3). 记$\hat{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}dx$, $\hat{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\lambda x}dx$,利用傅里叶变换性质得

$$\hat{u}_t+(\lambda^2-2i\lambda)\hat{u}=0,\ \hat{u}|_{t=0}=\hat{\varphi}(\lambda),$$

解得

$$\hat{u}(t,\lambda)=\hat{\varphi}\,e^{-(\lambda^2-2i\lambda)t}. \quad \text{……15分}$$

$= \hat{\varphi}\cdot e^{2i\lambda t}\cdot e^{-\lambda^2 t}$

$\varphi(x+2t)$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

?

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-(\lambda^2-2i\lambda)t}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\lambda^2-2i\lambda)t}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{e^{-x}}{2\pi e^t\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}e^{-i\xi(-\frac{x}{\sqrt{t}})}d\xi=\frac{e^{-(x+t)}}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

从而得

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-(x-\xi+t)}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi. \quad \text{……20分}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi+2t)\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$

五. (20分)(1). 试求出方程

$$u_{tt}+2\cos t u_{tx}-\sin^2 t u_{xx}-\sin t u_x=x-\sin t,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$$

的标准型，并指出它是椭圆型、抛物型还是双曲型方程；

(2). 求解上述方程满足初值条件$u|_{t=0}=-\frac{1}{8}x^3$, $u_t|_{t=0}=-\frac{3}{8}x^2$的解。

解. 方程是一个双曲型方程； ……………………………………………5分

$e^{-\lambda^2 t}$

特征方程为$(dx)^2-2\cos t dx\,dt-\sin^2 t(dt)^2=0$, 得特征线为

$$x-\sin t-t=C_1,\ x-\sin t+t=C_2.$$

作变换

$$\xi=x-\sin t-t,\ \eta=x-\sin t+t,\ u(\xi,\eta)=u(t,x).$$ 10分

则原方程为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{8}(\xi+\eta)$$ 15分

解得

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{16}\xi\eta(\xi+\eta)+F(\xi)+G(\eta),$$

其中是$F(\xi)$, $G(\eta)$二个可微的任意函数。原方程的通解为

$$u(t,x)=-\frac{1}{8}(x-\sin t)^2+\frac{1}{8}t^2(x-\sin t)+F(x-\sin t-t)+G(x-\sin t+t).$$

由初值条件$u|_{t=0}=-\frac{1}{8}x^3$, $u_t|_{t=0}=-\frac{3}{8}x^2$得

$$-\frac{1}{8}x^3+F(x)+G(x)=-\frac{1}{8}x^3,\ \frac{3}{8}x^2+2F'(x)=\frac{3}{8}x^2,$$

解得$F(x)=C$, $G(x)=-C$. 得到解为

$$u(t,x)=-\frac{1}{8}(x-\sin t)^2+\frac{1}{8}t^2(x-\sin t).$$ 20分