第四章 级数

§4.1 复数项级数与幂级数

1. 复数列的极限 设$\{z_n\}(n=1,2,...)$为一复数列, 其中$z_n=a_n+ib_n$, 又设$z=a+ib$为一确定的复数. 如果任意给定$\varepsilon>0$, 相应地能找到一个正数$N(\varepsilon)$, 使$|z_n - z|<\varepsilon$在$n>N$时成立, 则 z 称为复数列$\{z_n\}$当$n\to\infty$时的极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

如果复数序列$\{z_n\}$不收敛，则称$\{z_n\}$发散

$$\exists\, \varepsilon_0>0,\ \forall\, N,\ \exists\, n,\quad s.t.\ |z_n - z|>\varepsilon_0$$

定理一 复数列$\{z_n = a_n + i\, b_n\}(n=1,2,\ldots)$收敛于$z_0 = a + ib$的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

[证] 必要性 如果$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$,则对于任意给定的$\varepsilon>0$,就能找到一个正数N, 当$n>N$时,

$$|(a_n + ib_n) - (a + ib)| < \varepsilon$$

则 $|a_n - a| \le |(a_n - a) + i(b_n - b)| < \varepsilon$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

同理$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

充分性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

则任给ε,存在N,当$n > N$时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$|z_n - z_0| = |(a_n - a) + i(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0.$

定理二（柯西收敛准则）复数序列$\{z_n\}(n=1,2,...)$收敛的充分必要条件是

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ \text{当} n > N \text{时有} |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.\ (p = 1, 2, \cdots)$$

2. 级数 设$\{z_n\}=\{a_n+ib_n\}(n=1,2,...)$为一复数列, 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为无穷级数, 其最前面n项的和$S_n=z_1+z_2+...+z_n$称为级数的部分和. 如果部分和数列$\{S_n\}$收敛,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$称为收敛, 并且极限$\lim_{n\to\infty} S_n = S$称为级数的和. 如果数列$\{S_n\}$不收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$称为发散.

定理三 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的充要条件是

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

[证] 因$S_n = z_1+z_2+\ldots+z_n$

$$= (a_1+a_2+\ldots+a_n) + i(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \sigma_n+i\tau_n,$$

其中$\sigma_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $\tau_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$分别为

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和

由定理一, $\{S_n\}$有极限存在的充要条件是$\{\sigma_n\}$

和$\{\tau_n\}$的极限存在, 即级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

定理三将复数项级数的收敛问题转化为实数项级数的收敛问题.

而由实数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{和} \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

立即可得$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，从而推出复数项级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0.$

定理四 如果$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$也收敛,且不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$$ 成立

[证] 由于$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,

而$|a_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $|b_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$及$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$都收敛,因而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也都收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$是收敛的.

而又因 $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|z_k|$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k| \text{ 或 } \left|\sum_{k=1}^{\infty}z_k\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$$

如果$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$<u>绝对收敛</u>.

非绝对收敛的收敛级数称为<u>条件收敛</u>级数.

由于$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le|a_n|+|b_n|$,因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|,$$

所以当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也绝对收敛

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛的充要条件是

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 的各项都是非负的实数，所以它的收敛

也可用正项级数的判定法来判.

例1 下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

$$1)\ z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}};\qquad 2)\ z_n=n\cos in$$

[解] 1） 因 $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n},\qquad b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1,\qquad \lim_{n\to\infty}b_n=0$$

数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$收敛, 且有$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1.$

2) 由于 $z_n=n\cos in=n\operatorname{ch} n$,因此, 当$n\to\infty$时, $z_n\to\infty$. 所 以z_n发散.

例2 下列级数是否收敛? 是否绝对收敛?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$

[解] 1) 因 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

故原级数发散.

2) 因 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}$，由正项级数的比值收敛判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$

收敛, 故原级数收敛, 且为绝对收敛.

3) 因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛,故原级数收敛.

但因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛, 所以原级数非绝对收敛.

复函数序列与复函数项级数

定义: 设$\{f_n(z)\}(n=1,2,\ldots)$为定义在区域D复变函数序列, $f(z)$是定义在D上的一个函数.

如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon,z)$, 使得 $n>N$时, 有 $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$

则称复函数序列 $\{f_n(z)\}$ 的极限为$f(z)$

定义: 设$\{f_n(z)\}(n=1,2,\ldots)$为定义在区域D复变函数序列

称$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$,为函数项级数,

它的前 n 项之和 $S_n(z)=f_1(z)+\cdots+f_n(z)$ 为部分和函数

如果对于D内的某一点z_0, 极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z_0) = S(z_0)$$

存在, 则称复变函数项级数在z_0收敛，而$S(z_0)$称为它的和

如果级数在D内处处收敛，则它的和一定是z的一个函数

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

$S(z)$称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$的和函数

当$f_n(z)=c_{n-1}(z-a)^{n-1}$或$f_n(z)=c_{n-1}z^{n-1}$时，就得到函数项级数的特殊情形：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 +$$

$$+\cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

或 $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

这种级数称为幂级数.

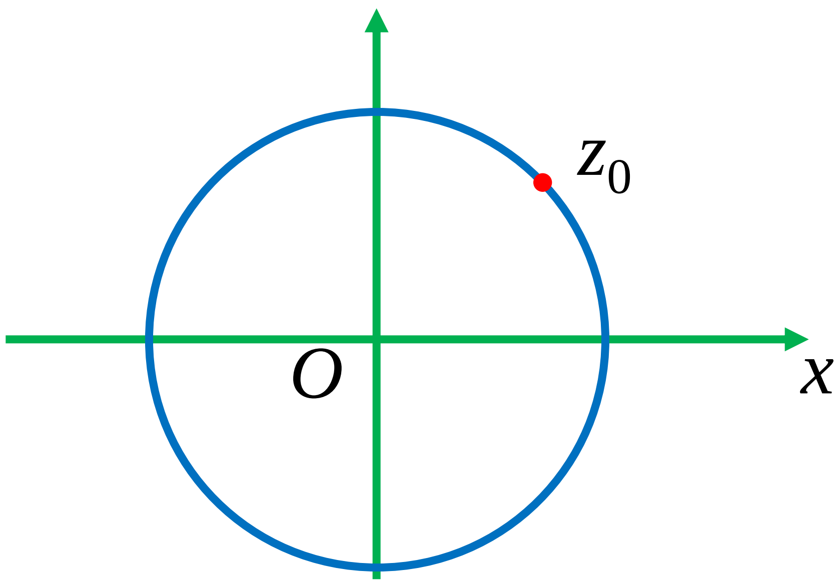
定理一 (阿贝尔Abel定理)

(1) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛,

则对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z, 级数必绝对收敛,

(2) 如果在 $z = z_0$ 级数发散,

则对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z, 级数必发散.



[证]（1）因 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0,$

则存在M使对所有的n有 $|c_n z_0^n| < M$

如果 $|z| < |z_0|$，则 $\frac{|z|}{|z_0|} = q < 1,$ 而

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$$

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$为公比小于1的等比级数,故收敛

因此$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < \sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$亦收敛

从而级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$是绝对收敛的.

(2) 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$发散,且如果$|z|>|z_0|$

用反证法,设级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$反而收敛,则根据

前面的结论可导出$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$收敛,与所设矛盾.

因此只能是$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$发散

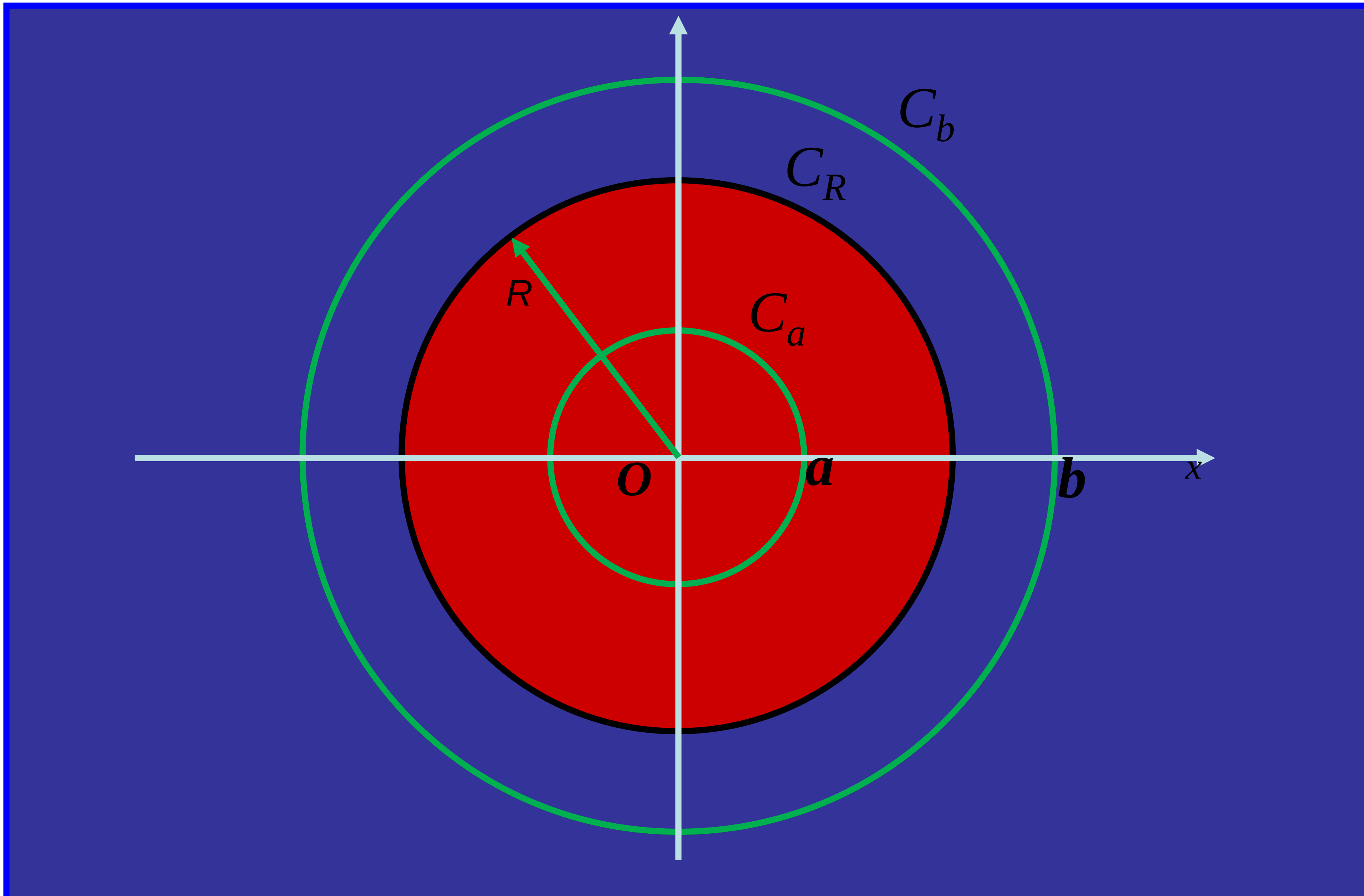
收敛圆和**收敛半径**　利用阿贝尔定理, 可以定出幂级数的收敛范围, 对一个幂级数来说, 它的收敛情况有三种:

i）对所有的正实数都是收敛的. 这时, 根据阿贝尔定理可知级数在复平面内处处绝对收敛.

ii）对所有的正实数除z=0外都是发散的. 这时, 级数在复平面内除原点外处处发散.

iii）既存在使级数收敛的正实数, 也存在使级数发散的正实数. 设$z=a$（正实数）时, 级数收敛, $z=b$（正实数）时，级数发散.

显然$a<b$，将收敛域染成红色，发散域为蓝色.



当a由小逐渐变大时，C_a必定逐渐接近一个以原点为中心，R为半径的圆周C_R．在C_R的内部都是红色，外部都是蓝色．这个红蓝两色的分界圆周C_R称为幂级数的收敛圆．在收敛圆的外部，级数发散．收敛圆的内部，级数绝对收敛．收敛圆的半径R称为收敛半径．所以幂级数的收敛范围是以原点为中心的圆域．对幂级数来说，收敛范围是以$z=a$为中心的圆域．在收敛圆周上是否收敛，则不一定．

例1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围与和函数.

[解]级数实际上是等比级数, 部分和为

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^n}{1-z}, (z \neq 1)$$

（1） 当$|z|<1$时,由于$\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$,从而有$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-z}$,

即$|z|<1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$收敛,和函数为$\dfrac{1}{1-z}$,

（2） 当$|z|\geq 1$时,由于$n\to\infty$时z^n不趋于零,级数发散.

收敛范围为$|z|<1$,在此范围内绝对收敛,并有

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

收敛半径的求法

定理：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$的系数为$C_n$，下列极限之一存在：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = R, \qquad (2)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} = R$$

则 R 就是该幂级数的收敛半径。

证明：(1) 可以利用实变量级数中正项级数的D'Alembert方法

由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}z^{n+1}}{C_n z^n}\right| = \frac{|z|}{R}$，所以当 $|z|<R$时，$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n|$收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$在圆$|z|<R$ 内收敛

再证当$|z|>R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$发散

可以使用反证法，假设在圆外存在某一点z_0，使得$\sum C_n z_0^n$收敛

存在某一点$z_1, R<|z_1|<|z_0|$, 并且$\sum|C_n||z_1|^n$ 收敛

然后 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|C_{n+1}||z_1^{n+1}|}{|C_n||z_1^n|}=|z_1|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|C_{n+1}|}{|C_n|}=|z_1||\dfrac{1}{R}|>1$

产生矛盾

(2) 略

例2 求下列幂级数的收敛半径

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^3}$ (并讨论在收敛圆周上的情形);

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 z=0,2 时的情形);

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$

[解] 1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^3=1$,

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^3}}=1$

所以收敛半径 $R=1$，也就是原级数在圆$|z|=1$内收敛，在圆周外发散．在圆周$|z|=1$ 上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{z^n}{n^3}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 是收敛的，因为这是一个 p 级数，$p=3>1$，所以原级数在收敛圆上是处处收敛的.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，即 $R=1$.

在收敛圆$|z-1|=1$ 上，当 $z=0$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$，级数收敛；当 $z=2$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散. 这个例子表明，在收敛圆周上即有级数的收敛点,也有级数的发散点.

3) 因为 $c_n = \cos in = \operatorname{ch} n = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n})$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}} = e$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$

幂级数的运算和性质 复变幂级数也能进行有理运算. 设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, R=r_1, \qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n, R=r_2$$

在以原点为中心，r_1,r_2中较小的一个为半径的圆内, 这两个幂级数可以象多项式那样进行相加, 相减, 相乘, 所得到的幂级数的和函数分别就是$f(z)$与$g(z)$的和, 差与积.

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \qquad |z| < R,$$

$$f(z) g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n$$

$$|z| < R. \qquad R = \min(r_1, r_2)$$

复合运算

如果当$|z|<r$时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，又设在$|z|<R$内$g(z)$解析且满足$|g(z)|<r$，则当$|z|<R$时，

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n.$$

例 4 把函数 $\frac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的幂级数，其中 a 与 b 是不相等的复常数.

[解] 把函数 $\frac{1}{z-b}$ 写成如下形式:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{-1}{b-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}$$

$$= \frac{-1}{b-a} - \frac{(z-a)}{(b-a)^2} - \frac{(z-a)^2}{(b-a)^3} - \cdots - \frac{(z-a)^n}{(b-a)^n} - \cdots$$

收敛半径为 $R=|b-a|$

定理　设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$的收敛半径为 R，

则

1) 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 是收敛圆 $|z-a|<R$ 内的解析函数.

2) $f(z)$在收敛圆内的导数可将其幂函数逐项求导得到，即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$

3）$f(z)$在收敛圆内可以逐项积分，即

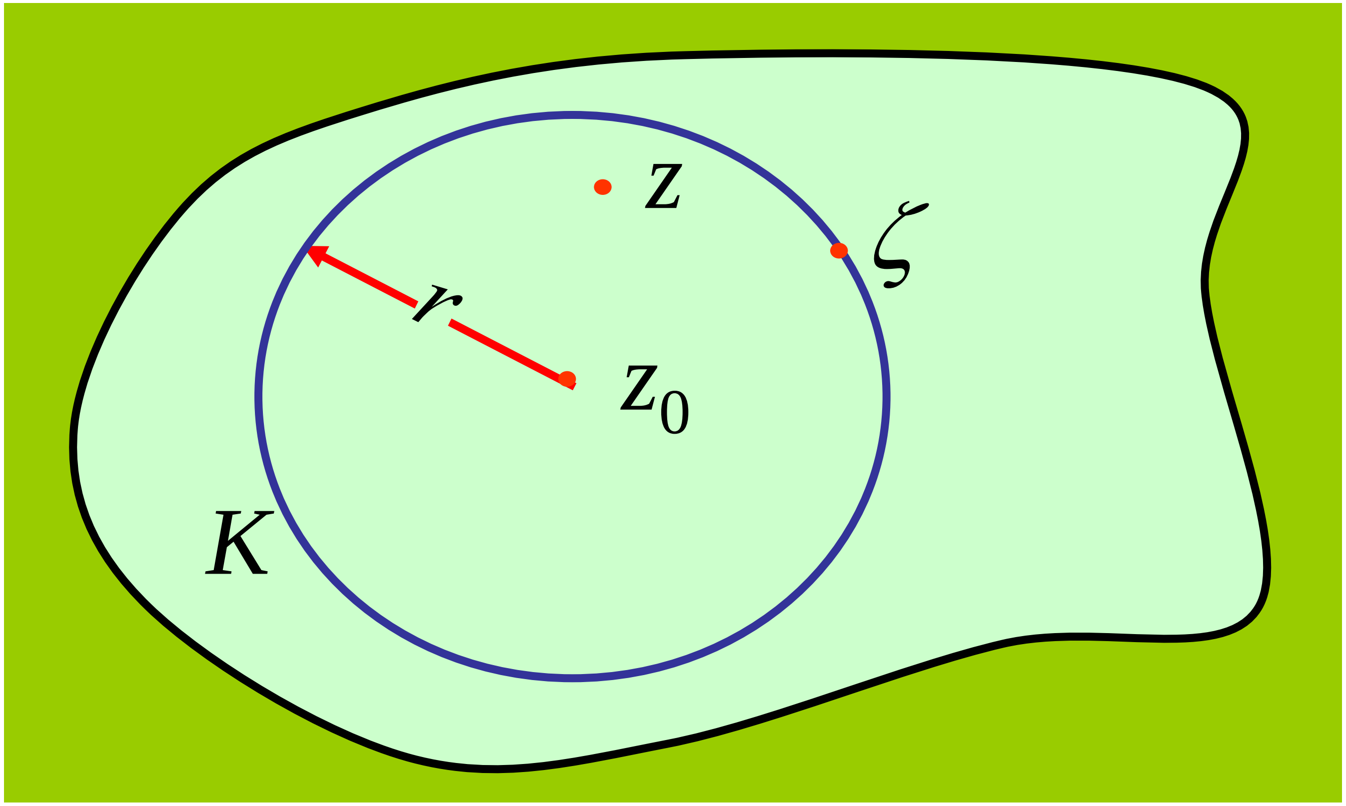
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z,\quad C \in |z-a| < R$$

或

$$\int_a^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

§3 泰勒级数

设函数 $f(z)$在区域D内解析，而$|\zeta-z_0|=r$为D内以z_0为中心的任何一个圆周，它与它的内部全含于D，把它记作K，又设z为K内任一点.



按柯西积分公式, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

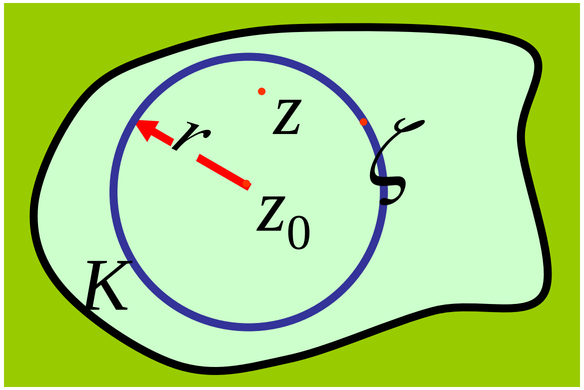
且 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

由于积分变量ζ取在圆周K上,点z在K的内部,

所以$\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$, $$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

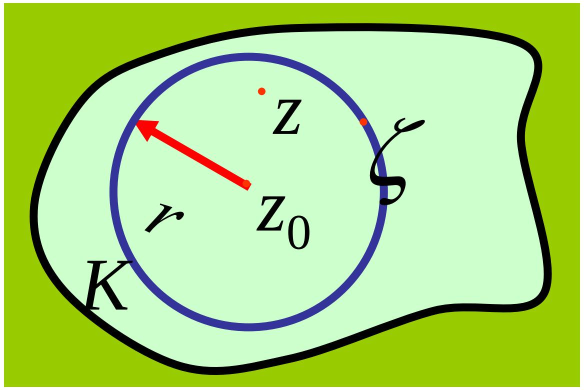
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta.$$



由解析函数高阶导数公式,上式可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z)\quad \text{其中}$$

$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]d\zeta$$



如果能证明 $\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0$ 在 K 内成立,则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

在 K 内成立, 即 $f(z)$ 可在 K 内用幂级数表达.

令 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{r}=q$， q 与积分变量 ζ 无关, 且 $0\le q<1$.

K含于D, $f(z)$ 在D内解析, 在K上连续, 在K上有界, 因此在K上存在正实数 M 使$|f(z)|\leq M$.

$$|R_N(z)|\leq \frac{1}{2\pi}\oint_K \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| \mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n\right] \mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r=\frac{Mq^N}{1-q}\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

因此, 下面的公式在K内成立: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

称为$f(z)$在z_0的泰勒展开式, 它右端的级数称为 $f(z)$在z_0处的泰勒级数.

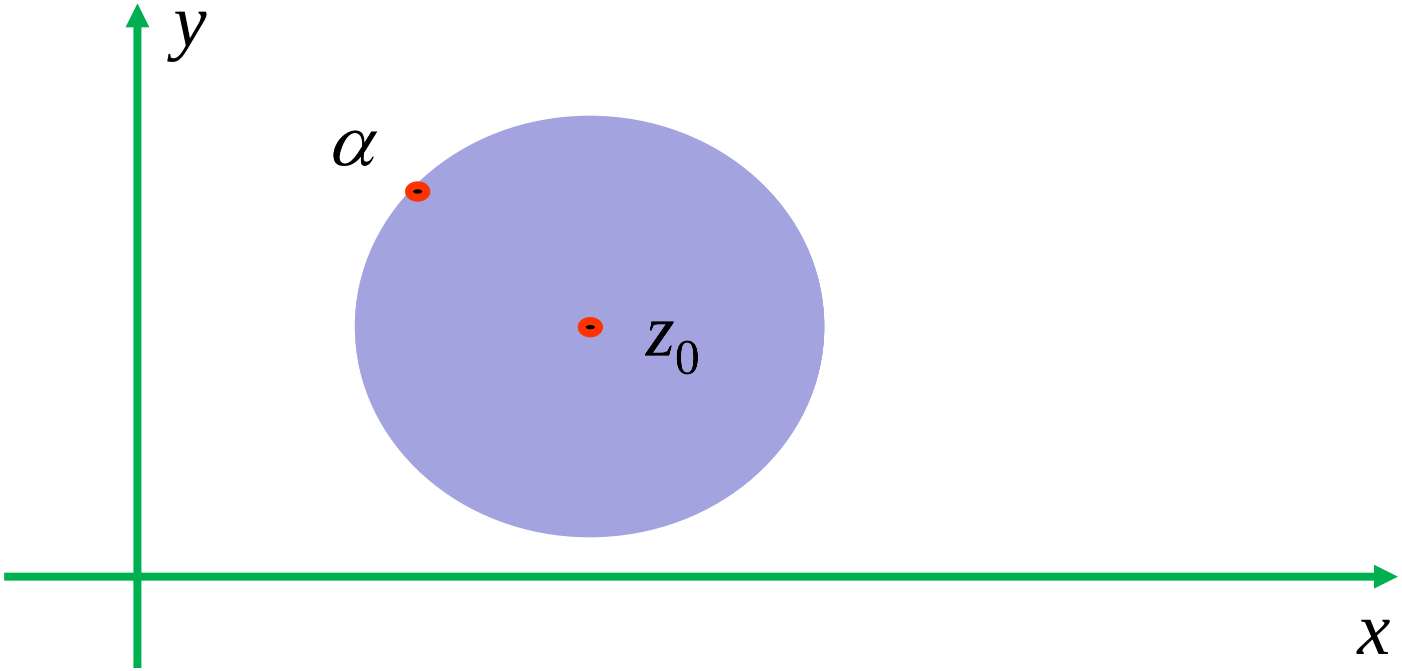
圆周K的半径可以任意增大, 只要K在D内. 所以, 如果z_0到D的边界上各点的最短距离为d, 则 $f(z)$在z_0的泰勒展开式在圆域 $|z-z_0|<d$ 内成立.

定理(泰勒展开定理) 设 $f(z)$在区域D内解析, z_0为D内的一点, d为z_0到D的边界上各点的最短距离, 则当$|z-z_0|<d$ 时,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ 成立,其中}$$

$$c_n=\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), n=0,1,2,\cdots.$$

注: 如果 $f(z)$在z_0解析, 则使 $f(z)$在z_0的泰勒展开式成立的圆域的半径 R等于从z_0到 $f(z)$的距z_0最近一个奇点 α 的距离, 即$R=|\alpha-z_0|$.



任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数,因而是唯一的.

利用泰勒展开式,我们可以直接通过计算系数:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

把 $f(z)$在z_0展开成幂级数,这被称作直接展开法

例如, 求 e^z 在 $z = 0$处的泰勒展开式, 由于$(e^z)^{(n)} = e^z$, $(e^z)^{(n)}|_{z=0} = 1$ (n=0,1,2,...)， 故有

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \qquad |z| < +\infty$$

因为e^z在复平面内处处解析, 上式在复平面内处处成立, 收敛半径为$+\infty$.

同样, 可求得$\sin z$与$\cos z$在z=0的泰勒展开式:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad |z| < +\infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad |z| < +\infty$$

除直接法外, 也可以借助一些已知函数的展开式, 利用幂级数的运算性质和分析性质, 以唯一性为依据来得出一个函数的泰勒展开式, 此方法称为间接展开法. 例如$\sin z$在$z=0$的泰勒展开式也可以用间接展开法得出:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < +\infty$$

例1 把函数 $1/(1+z)^2$ 展开成z的幂级数.

[解] 由于函数有一奇点$z=-1$, 而在$|z|<1$内处处解析, 所以可在$|z|<1$内展开成z的幂级数.

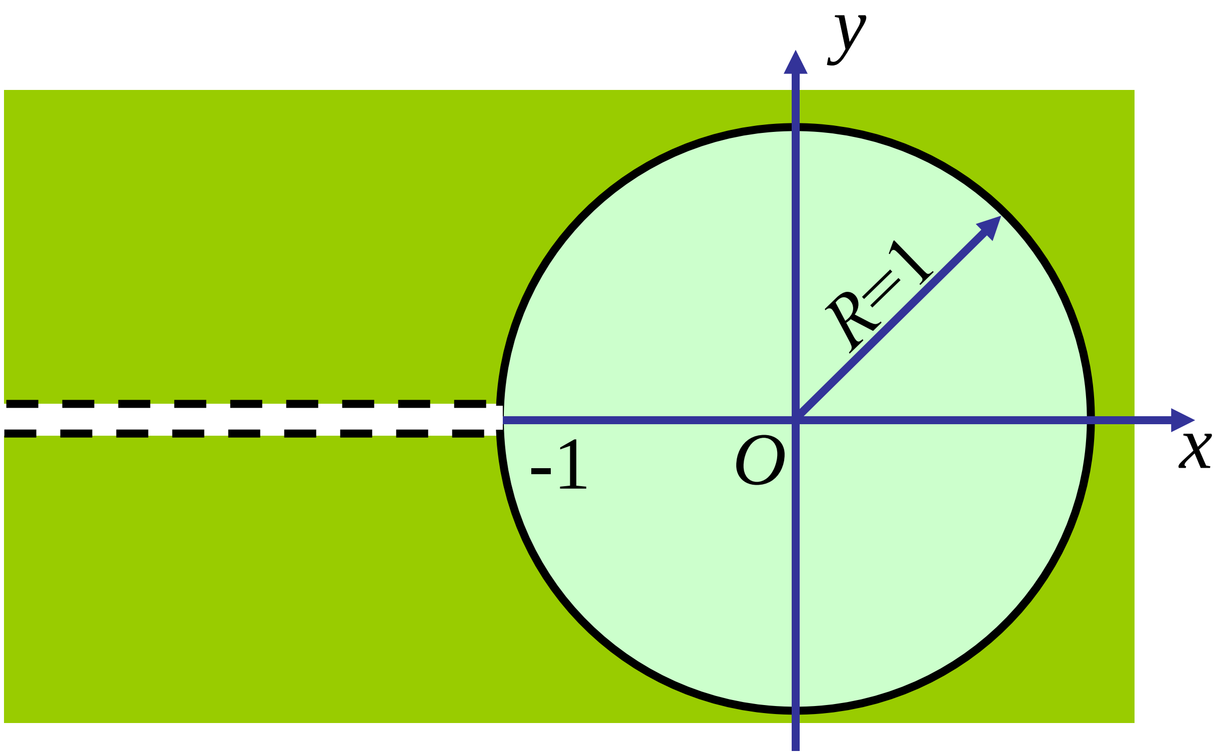
因为 $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, \quad |z| < 1.$

将上式两边求导得

$$\frac{1}{(1+z)^2}=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots,\quad |z|<1.$$

例2 求对数函数的主值ln(1+z)在z=0处的幂级数展开式.

[解] ln(1+z)在从-1向左沿负实轴剪开的平面内是解析的, -1是它的奇点, 所以可在|z|<1展开为z的幂级数.



因为$[\ln(1+z)]' = \dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$，逐项积分得

$$\int_0^z \frac{1}{1+\xi}\,\mathrm{d}\xi = z - \int_0^z \xi\,\mathrm{d}\xi + \cdots + \int_0^z (-1)^n \xi^n\,\mathrm{d}\xi + \cdots,$$

即 $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z|<1.$

推论1:

$\boxed{\text{函数}f(z)\text{在}z_0\text{解析} \Leftrightarrow}$

$\boxed{f(z)\text{在}z_0\text{的某邻域内可展开为}z-z_0\text{的幂级数}}$

$\boxed{\text{函数}f(z)\text{在区域}D\text{解析} \Leftrightarrow}$

$\boxed{f(z)\text{在}D\text{内任一点处可展开为}z-z_0\text{的幂级数}}$

注：函数$f(z)$在区域D解析的等价条件：

(1)函数$f(z)$在区域D内可导；

(2)u,v在区域D内可微，且满足$C-R$条件，

(3)函数$f(z)$在区域D内连续且积分与路径无关；

(4)函数$f(z)$在区域D内可展开为幂级数

推论2：设函数$f(z)$在区域D解析，$z_0 \in D, R = dist(z_0, \partial D)$

则$f(z)$在$|z - z_0| < R$内可展开为z_0的幂级数

推论3:幂级数的和函数在其收敛圆周上至少有一个奇点.

(即使幂级数在其收敛圆周上处处收敛)

例如：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=f(z)$ 在$|z|\le 1$上绝对收敛，

但 $f'(z)=1+\frac{z}{2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n}+\cdots \quad (|z|<1)$,

当z沿实轴从单位圆内部趋近于1时：$f'(z)\to\infty$

即$z=1$是一个奇点。

推论4: 设函数$f(z)$在z_0解析，且有Taylor展开式:$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$,

α是$f(z)$的距z_0最近的一个奇点，则$R=|\alpha-z_0|$为其收敛半径。

例如：$f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$, 则其收敛半径$R=2$;

$f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-i)^n$,则其收敛半径$R=\sqrt{5}$.

在实变函数中有些不易理解的问题, 一到复变函数中就成为显然的事情, 例如在实数范围内, 展开式

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

的成立必须受$|x|<1$的限制, 这一点往往使人难以理解, 因为上式左端的函数对任何实数都是确定的而且是可导的. 而如果把函数中的x换成z, 在复平面内来看函数

$$\frac{1}{1+z^2}= 1-z^2+z^4-\ldots$$

它有两个奇点$\pm i$, 而这两个奇点都在此函数的展开式的收敛圆周上, 所以这个级数的收敛半径只能等于1. 因此, 即使我们只关心z的实数值, 但复平面上的奇点形成了限制.

解析函数零点孤立性 （解析函数的性质）

定义 设函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 处的值为零，则称 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的零点。

定义 设函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 处的值为零，在 z_0 的某个去心邻域 $D(z_0,\delta)=\{z;0<|z-z_0|<\delta\}$ 内处处不为零，则称 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的孤立零点。

定义 设解析函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 某个邻域 $D(z_0,\delta)=\{z;|z-z_0|<\delta\}$ 内可以表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0 处解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$，$m\geq 1$，则称 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点。当 $m=1$ 时，称为单零点.

定理: 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析,并且存在一列两两不相同的零点$\{z_n\}(z_n\neq 0)$收敛于z_0, 则 $f(z)$ 在 D 内恒为0

推论: 不恒为零的解析函数的零点必定是孤立零点

推论: 设函数 $f(z)$和 $g(z)$在D内解析,并且存在一列两两不相同的零点$\{z_n\}(z_n\neq 0)$收敛于z_0, 有$f(z_n)=g(z_n)$, 则在 D 内恒有 $f(z) = g(z)$

证明: 分为2步. 第一步,先证明在z_0 的邻域内成立

由于$f(z)$在D内解析, 存在z_0的某个邻域$D(z_0,r)=\{z \mid, |z-z_0|<r\}$

在该邻域内， $f(z)$可以展开成幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$

先证明 $C_n\equiv 0, \ \forall n\geq 0.$

反证法 假设第一个不为0的是第 k 个系数，即 $C_0 = \cdots = C_{k-1} = 0, C_k \neq 0$

此时有 $f(z) = C_k(z-z_0)^k + C_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots$

$$= (z-z_0)^k [C_k + C_{k+1}(z-z_0) + \cdots]$$

$$= (z-z_0)^k \psi(z)$$

其中 $\psi(z)$ 在 $D(z_0, r)$ 内解析且 $\psi(z_0) \neq 0.$

由 $\psi(z)$ 的连续性，可以知道存在某个领域 $D(z_0, \delta) \subset D(z_0, r)$，

使得 $\psi(z) \neq 0, \ \forall z \in D(z_0, \delta)$

$\Rightarrow$

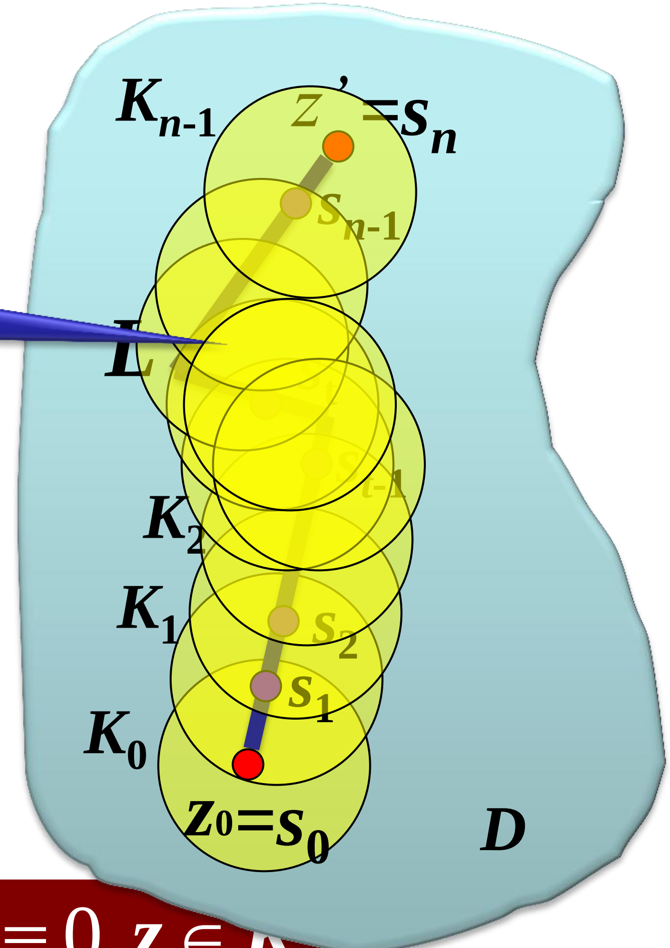
$f(z)$ 在 $D(z_0, \delta)$ 内只有一个零点 z_0，这与条件矛盾。所以 $f(z) \equiv 0.$

$\forall\, z' \in D$ 作连接z及z'的折线$L \subseteq D$

$d = \inf\{|\alpha-\beta| : \alpha\in L, \beta\in\partial D\}>0$

在L上依次取一串点

$z_0=s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n=z'$,



使$|s_t-s_{t-1}|<R(0<R<d).t=1,2,\cdots,n$

作圆$K_t:|z-s_t|<R, t=0,1,\cdots, n$

考察在圆$K_0:|z-a_0|<R$

①$f(z)\in A(K_0)$,②在K_0内,$z_n\to a, f(z_n)=0$, $\xRightarrow{\text{第一步}}$ $f(z)\equiv 0, z\in K_0$

$\xRightarrow{\text{第一步}} f(z)\equiv 0, z\in K_1 \xRightarrow{\text{第一步}} f(z)\equiv 0, z\in K_2 \xRightarrow{\text{第一步}} \cdots$

$\xRightarrow{\text{第一步}} f(z)\equiv 0, z\in K_{n-1} \Rightarrow f(z')=0.$ $\xRightarrow{\forall b\in D} f(z)\equiv 0, z\in D$

注一：零点的孤立性是解析函数有别于实可微函数的又一重要性质

例如：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$x=0,\ x_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 均是 $f(x)$ 的零点。其中 0 是聚点 不是孤立点

注二：一切在实轴上成立的恒等式

如

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1,\ \ ch^2 z-sh^2 z=1$$

在 Z 平面内都成立

定理 不恒为零的解析函数 $f(z)$ 以 z_0 为其m级零点的充要条件是

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ \text{且}\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

证明：必要性 "$\Rightarrow$"

根据定义，可知存在z_0的某个邻域$D(z_0,\delta)$，使得

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

且 $\psi(z)$在z_0处解析，$\psi(z_0)\neq 0$. 所以$\psi(z)$可以展开成幂级数

$$\psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots,\quad |z-z_0|<\delta$$

所以$f(z)$ 在$|z-z_0|<\delta$ 中的Taylor 展开式为：

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z_0)+(z-z_0)^{m+1}\psi'(z_0)+\cdots,$$

所以 $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0;$

$$f^{(m)}(z_0)=m!\times\psi(z_0)\neq 0.$$

充分性“$\Leftarrow$”

因为$f(z)$ 在z_0点解析，由$Taylor$ 定理可知，$f(z)$可以在z_0邻域展成Taylor级数，由于$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$,

因 $f(z)=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$

$$=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right]$$

$$=(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z)=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots$满足

$\psi(z_0)\neq 0$

由定义知 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点。

例：考察函数$f(z)$=z-sinz在原点z=0的性质

解：$f(z)$=z-sinz $= z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

$$= z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n-2} = z^3 \varphi(z) \text{ 且 } \varphi(0) = \frac{1}{3!} \neq 0$$

例: 求函数$f(z)$=sin(z)-1的全部零点，并指出它们的阶.

解：令$f(z)$=sin(z)-1=0,　得其全部零点为：

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z \qquad f'(z_k) = \cos(z_k) = 0,$$

$$f''(z_k) = -\sin(z_k) \neq 0.$$

z_k是函数$f(z)=sin(z)-1$的二阶零点。

§4 洛朗级数

一个以z_0为中心的圆域内解析的函数 $f(z)$, 可以在该圆域内展开成z-z_0的幂级数. 如果 $f(z)$在z_0处不解析, 则在z_0的邻域内就不能用z-z_0的幂级数来表示. 但是这种情况在实际问题中却经常遇到. 因此, 在本节中将讨论在以 z_0为中心的圆环域内的解析函数的级数表示法.

讨论下列形式的级数:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots (\text{正幂项部分})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots (\text{负幂项部分})$$

只有正幂项和负幂项都收敛才认为原级数收敛于它们的和. 正幂项是一幂级数, 设其收敛半径为 R_2:

对负幂项, 如果令$\zeta=(z-z_0)^{-1}$, 就得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n = c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^2 + \cdots,$$

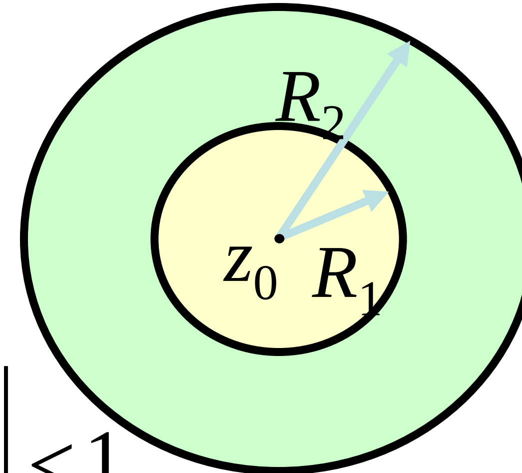
这是ζ的幂级数, 设收敛半径为R: $|\xi| < R \Rightarrow |z-z_0| > \dfrac{1}{R} \triangleq R_1$

则当$|z-z_0|>R_1$时, 即$|\zeta|<R$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ 收敛。

因此, 只有在$R_1<|z-z_0|<R_2$的圆环域, 原级数才收敛.

例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n} \qquad (a\text{与}b\text{为复常数})$$



中的负幂项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$，当$\left|\frac{a}{z}\right|<1$，

即$|z|>|a|$时收敛，而正幂项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$则当

$|z|<|b|$时收敛．所以当$|a|<|b|$时，原级数在圆环域$|a|<|z|<|b|$收敛；当$|a|>|b|$时，原级数处处发散．

幂级数在收敛圆内的许多性质, 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots,$$

在收敛圆环域内也具有. 例如, 可以证明, 上述级数在收敛域内其和函数是解析的, 而且可以逐项求积和逐项求导.

问题：在圆环域内解析的函数是否一定能够展开成幂级数?

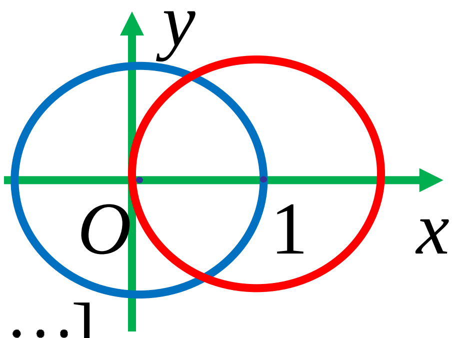
函数$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在$z=0$及$z=1$都不解析,但在圆环域

$0<|z|<1$及$0<|z-1|<1$内都是解析的.先研究$0<|z|<1$的情形:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots.$$

由此可见, $f(z)$在$0<|z|<1$内是可以展开为z的幂级数.

其次,在圆环域:0<|z-1|<1内也可以展开为z-1的幂级数:



$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-(1-z)}\right]$$

$$=\frac{1}{1-z}[1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots]$$

$$=(1-z)^{-1}+1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots\cdots+(1-z)^{n-1}+\cdots$$

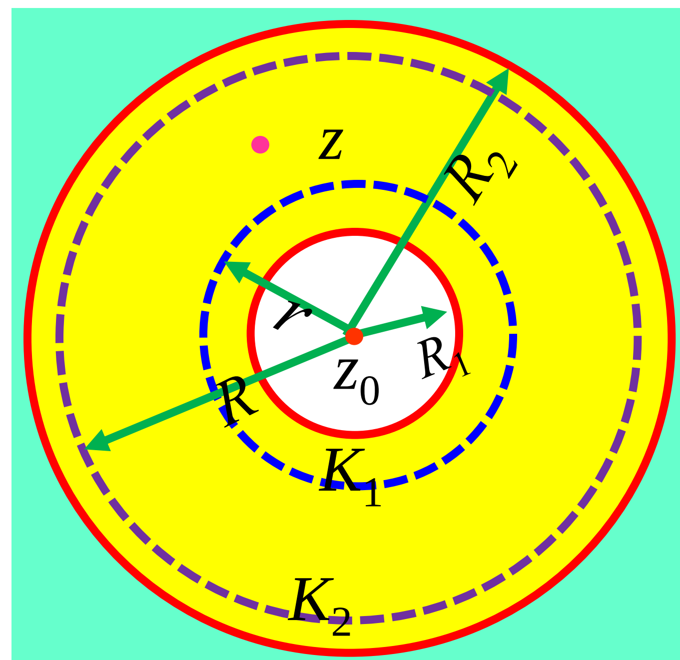
定理 设 $f(z)$在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$内解析, 则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{其中}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

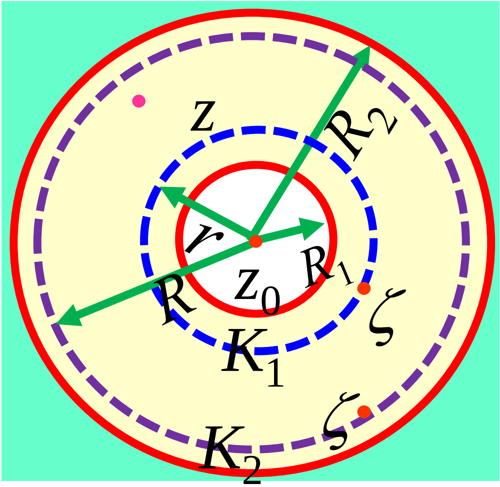
C为在圆环域内绕z_0的任何一条正向简单闭曲线.

[证] 设z为圆环域内的任一点, 在圆环域内作以z_0为中心的正向圆周K_1与K_2, K_2的半径R大于K_1的半径r, 且使z在K_1与K_2之间.



由柯西积分公式得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$



对第一个积分, ζ在K_2上, z在K_2内, $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1.$

和泰勒展开式一样, 可以推得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right](z-z_0)^n$$

第二个积分 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$.由于$\zeta$在$K_1$上,

点z在K_1的外部, $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1.$ 因此 $\dfrac{1}{\zeta-z}=-\dfrac{1}{z-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n},$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}+R_N(z),$$

其中 $R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}f(\zeta)}{(z-z_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta.$

令 $q=\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{r}{|z-z_0|}$， 则 $0<q<1$，因此有

$$|R_N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

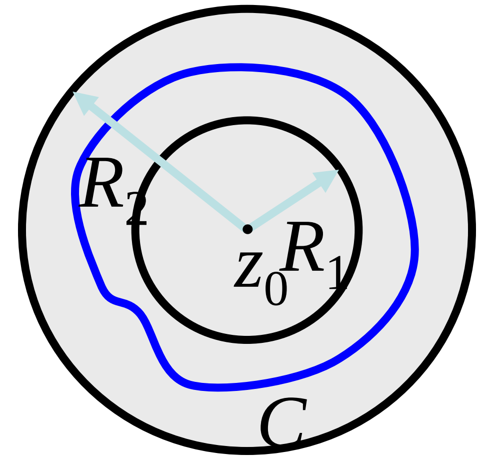
$$\le\frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M_1}{r}q^n\cdot 2\pi r=\frac{M_1q^N}{1-q}.$$ M_1是$|f(z)|$在K_1上的最大值.

因为$\lim\limits_{N\to\infty}q^N\to 0$， 所以$\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0$.

因此 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,1,2,\cdots);$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=1,2,\cdots).$$



如果在圆环域内取绕z_0的任何一条正向简单闭曲线C, 则根据闭路变形原理, 这两个式子可用一个式子来表示:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

于是 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

称为函数$f(z)$在以z_0为中心的圆环域: $R_1<|z-z_0|<R_2$内的洛朗(Laurent)展开式, 它右端的级数称为$f(z)$在此圆环域内的洛朗级数.

一个在某圆环域内解析的函数展开为含有正,负幂项的级数是唯一的, 这个级数就是$f(z)$的洛朗级数.

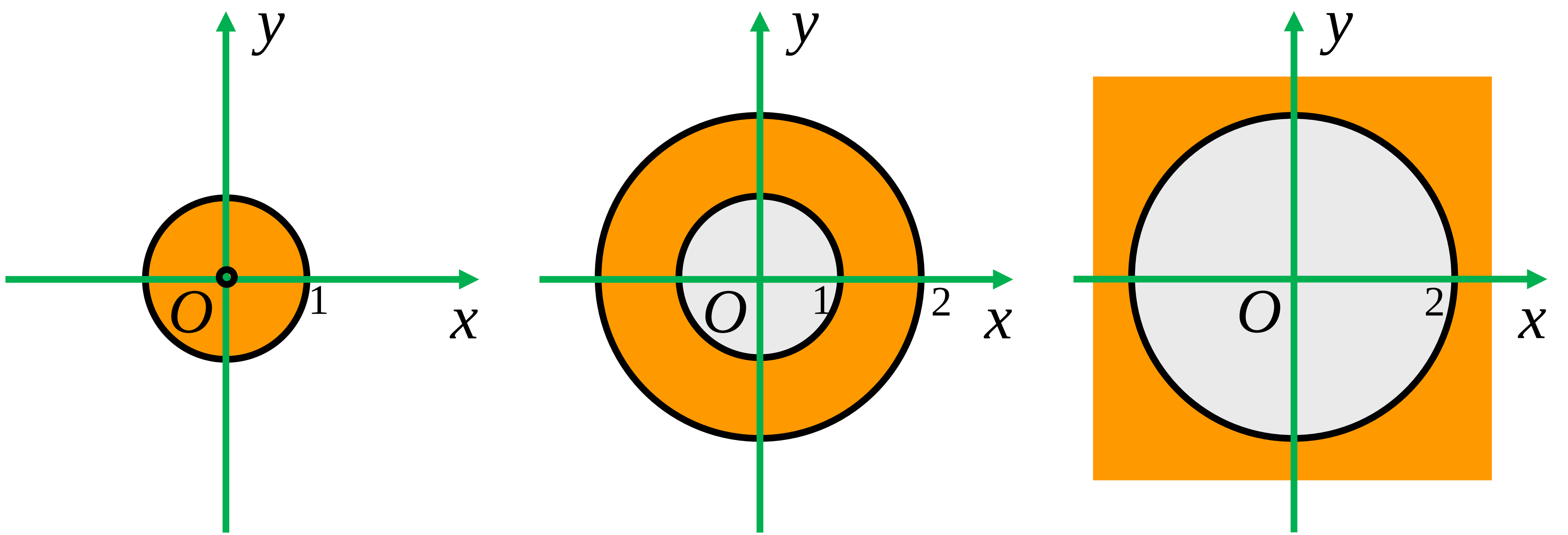
根据由正负整次幂项组成的级数的唯一性,一般可以用代数运算, 代换, 求导和积分等方法去展开, 以求得洛朗级数的展开式.

例1 把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在复平面上展开为 z 的幂级数。

解： 函数 $f(z)$ 在圆环域 i) $0<|z|<1$; ii) $1<|z|<2$;

iii) $2<|z|<+\infty$ 内是处处解析的, 应把 $f(z)$在

这些区域内展开成洛朗级数.



先把 $f(z)$用部分分式表示: $\quad f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$.

i)在$0<|z|<1$内 : $f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}=$

$$=(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots.$$

ii) 在$1<|z|<2$内: $f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}=$

$$=\frac{-1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots.$$

iii) 在2<|z|<+∞内: $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=$

$$=\frac{-1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)+\frac{1}{z}(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$$

例2 把函数 $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

[解] 因有 $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots)$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots \quad 0<|z|<+\infty.$$

注意: 一个函数 $f\,(z)$可以在奇点展开为洛朗级数，也可在非奇点展开。

函数可以在以z_0为中心的(由奇点隔开的)不同圆环域内解析, 因而在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式(包括泰勒展开式作为它的特例). 我们不要把这种情形与洛朗展开式的唯一性相混淆. 所谓洛朗展开式的唯一性, 是指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的.

例如在 $z=i$ 和$z=-i$处展开函数 $f(z)=\dfrac{1-2i}{z(z+i)}$为洛朗级数。

在复平面内有两个奇点: $z=0$与$z=-i$, 分别在以i为中心的圆周: $|z-i|=1$与$|z-i|=2$上.

因此, $f(z)$在以i为中心的圆环域(包括圆域)内的展开式有三个:1)在$|z-i|<1$中的泰勒展开式;

2)在$1<|z-i|<2$中的洛朗展开式;

3)在$2<|z-i|<+\infty$中的洛朗展开式;

在复平面内有一个奇点: $z=0$在以$-i$为中心的圆周:$|z+i|=1$上.

因此, $f(z)$在以$-i$为中心的圆环域内的展开式有二个:

1)在$0<|z+i|<1$中的洛朗展开式;

2)在$1<|z+i|<+\infty$中的洛朗展开式。

例：$\sin\dfrac{z}{z-1}$ 在 z 平面上只有奇点 $z=1$，且在去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 展成罗朗级数

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin(1+\frac{1}{z-1})=\sin 1\times\cos(\frac{1}{z-1})+\cos 1\times\sin(\frac{1}{z-1})$$

$$=\sin 1\times\left[1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}}+\cdots\right]$$

$$+\cos 1\times\left[\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}+\cdots\right]$$

特别的，当洛朗级数的系数公式

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$n = -1$时，有 $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i C_{-1}$

（即可利用Laurent系数计算积分）

其中C为圆环域$R_1<|z-z_0|<R_2$内的任何一条简单闭曲线，

$f(z)$ 在此圆环域内解析.

例 3　求积分$\mathrm{I} = \oint_{|z-z_0|=r} e^{\frac{1}{z-z_0}}(z-z_0)^{-3}dz$

解：　$f(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}}(z-z_0)^{-3}$在$0<|z-z_0|<+\infty$内解析，

其Laurent系数$C_{-1} = 0 \Rightarrow \mathrm{I} = 2\pi i C_{-1} = 0.$

例4 求积分$\mathrm{I}=\oint_{|z|=2}\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$.

解：由于$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ |z|<1$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^{-n}\ \left(1<|z|<+\infty\right)$$

$$\Rightarrow C_{-1}=1$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=2\pi i.$$

例 5 求积分 $\oint_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} \mathrm{d}z.$

解: 函数 $f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 在 1<|z|<+∞内解析, |z|=2 在此圆环域内，把它在圆环域内展开得

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\frac{-1}{1-\frac{1}{z}}=-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right).$$

故c_{-1}=-2，原式=$2\pi i c_{-1}=-4\pi i.$