线代 2017最新版

12元

浙江大学 2016－2017 学年秋学期

《 线性代数(甲) 》课程期末试卷

课程号： 821T0050 ，开课学院： 数学科学学院

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带 笔 入场

考试日期：2017 年 1 月 17 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：学号：__________所属院系：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

符号提示：

设 A 是 n 阶矩阵

1. $|A|$ 表示 A 的行列式，　2. A^* 表示 A 的伴随矩阵，　3. $r(A)$ 表示 A 的秩，

4. A^{-1} 表示 A 的逆矩阵，5. A^T 表示 A 的转置矩阵，　6. $tr(A)$ 表示 A 的迹，

7. E 表示单位矩阵，　8. $\|x\|$ 表示 n 维实向量 x 在常用内积下的长度.

一.解答题(本大题共 85 分)

1.(本题 10 分)计算行列式 $\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$.

2. (本题 15 分)已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 而且 $A^{-1}+E$ 可逆,如果矩阵 X 满足 $A^{-1}XA + XA + 2E = 0$, 求矩阵 X.

3. (本题 15 分)解线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{array}\right]$$

4. (本题 15 分) (1).设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求矩阵 $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值,

(2).已知 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$, 求 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{pmatrix}$ 的特征值.

$\begin{vmatrix} a_1 1 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. (本题 15 分)已知 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 为实可逆矩阵,其中 A_1,A_2 分别为 $p\times n,(n-p)\times n$ 矩阵,

(1).求二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^T\left(A_1^TA_1-A_2^TA_2\right)X$ 的正惯性指数和负惯性指数,

(2).求证矩阵 $A_1^TA_1-A_2^TA_2$ 可逆.

6. (本题 15 分) 设 $\mathrm{R}[x]$ 是实系数多项式全体，定义其上的内积函数如下：

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)g(x)dx,\qquad \forall f(x),g(x)\in \mathrm{R}[x].$$

(1).请将 $1,x,x^2,x^3$ 改造成为正交多项式组.

(2).请将多项式 $4x^3+3x^2+2x+1$ 用上述正交多项式组线性表示.

二.证明题(本大题 15 分)

7.(本题 8 分)设 A 是 n 阶实矩阵,如果对于任意实 n 维向量 x，都有 $\|Ax\|=\|x\|$,则 A 是正交矩阵.

8.(本题 7 分) 设 E_r、E_s 分别是 r 阶和 s 阶单位矩阵，a 为非零常数，A、B 分别为 $r\times s$ 和 $s\times r$ 矩阵.

(1).试求矩阵 U,W,X,Y 使得

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aE_r & A \\ O & Y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} E_r & W \\ O & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aE_r & A \\ B & E_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U & O \\ B & E_s \end{pmatrix}.$$

(2).等式 $a^s\left|aE_r-AB\right|=a^r\left|aE_s-BA\right|$ 是否成立？请尽量详细地说明理由.

<参考解答>

一. 解答题.

1.解. 依任一行展开后，利用和差化积公式得

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)\right\}.$$

2. 解.首先依题设等式有$\left(A^{-1}+E\right)X=-2A^{-1}$,

又$|A|^{3-1}=|A^*|=1\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$,

如果$|A|=-1$,可推得 $A^{-1}+E=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$为不可逆矩阵,矛盾!

所以$|A|=1$,因此

$$A^{-1}+E=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix},-2A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&-2&0\\-2&-2&-2\end{pmatrix}.$$

$$得\ X=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-\frac{1}{2}&-1&0\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}.$$

3.解计算系数行列式：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$,

(1)依克拉姆法则，当a,b,c互不相同时,方程组有唯一组解,解为

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},y=\frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},z=\frac{(d-a)(d-c)}{(c-a)(c-b)},$$

(2).当a,b,c,d中仅有两个不同时,并且$a\neq b$或者$a\neq c$或者$b\neq c$,则解依赖一个参数,例

如在 $d=a\neq b=c$ 的情形下通解为 $x=1, y=\dfrac{a-c}{b-d}k, z=k$，其中 k 任意数，

如果 $a=b=c=d$，则解为 $x=1-k_1-k_2, y=k_1, z=k_2$，其中 k_1,k_2 为任意数，

如果在 a,b,c 中两个是不相同的且 d 不等于它们中任何一个，或者 $a=b=c\neq d$ 时则方程组无解.

4. 解:(1). $\left|\lambda E_{2n}-C\right|=\begin{vmatrix}\lambda E_n & -A\\ -A & \lambda E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n-A & -A\\ \lambda E_n-A & \lambda E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n-A & -A\\ 0 & \lambda E_n+A\end{vmatrix}$

$=\left|\lambda E_n-A\right|\cdot\left|\lambda E_n+A\right|$

所以 C 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n$.

(2).因为 $A=\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$

$$\left|\lambda E_n-A\right|=\left|\lambda E_n-\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right|=\lambda^{n-2}\left|\lambda E_2-\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\right|$$

$$=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix}\lambda-\sum_{k=1}^{n}a_k^2 & -\sum_{k=1}^{n}a_k\\ -\sum_{k=1}^{n}a_k & \lambda-n\end{vmatrix}=\lambda^{n-2}(\lambda-n)\left(\lambda-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right),$$

$\begin{pmatrix}A\\1\end{pmatrix}(A\ 1)$

$\lambda-A^2\ DTA$

$-A\ \lambda\ k$

n

所以 A 特征值是 $0(n-2$ 重$), n, \sum_{k=1}^{n}a_k^2$.

5.(1)解.由假设及实二次型理论，存在正交矩阵 Q_1，使得

$Q_1^TA_1^TA_1Q_1=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p,0,\cdots,0\right)$，其中 $\lambda_k>0, k=1,2,\cdots p$.

设 $X=Q_1Y$.故得到 $f=Y^TQ_1^T\left(A_1^TA_1-A_2^TA_2\right)Q_1Y=YQ_1^TA_1^TA_1Q_1Y-Y^TQ_1^TA_2^TA_2Q_1Y$

$$=Y^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}Y-Y^TQ_1^TA_2^TA_2Q_1Y,$$

令 $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$,得到 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda y_2^2+\cdots+\lambda_p y_p^2-Y^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Y$,

存在正交矩阵 Q_2,使得

$$Q_2^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Q_2 = diag(0,\cdots,0,\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_n),\text{其中 }\lambda_k>0,k=p+1,\cdots,n.$$

令

$$Y=Q_2 Z, Q_2=(q_{ij})_{n\times n}, Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^T,$$

$$f(Z)=\lambda_1(q_{11}z_1+\cdots+q_{1n}z_n)^2+\cdots+\lambda_p(q_{p1}z_1+\cdots+q_{pn}z_n)^2-\lambda_{p+1}z_{p+1}^2-\cdots-\lambda_n z_n^2$$

因为 $\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \cdots & q_{pn} \end{pmatrix}$ 的秩为 p,所以有一个 p 阶子式不为 0,

不妨设 $\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \cdots & q_{pp} \end{vmatrix}\neq 0$,令

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1p} & q_{1,p+1} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \cdots & q_{pp} & q_{p,p+1} & \cdots & q_{pn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$f(W)=\lambda_1 w_1^2+\cdots+\lambda_p w_p^2-\lambda_{p+1}w_{p+1}^2-\cdots-\lambda_n w_n^2,$$

所以二次型 f 的正惯性指数是 p,负惯性指数是 $n-p$.

(2)解.因为正惯性指数 p + 负惯性指数 $n-p=n=r(A_1^T A_1-A_2^T A_2)$

所以矩阵 $A_1^T A_1-A_2^T A_2$ 可逆

6.

二.证明题.

7.证明.因为 $\|Ax\|=\|x\|$,所以有 $\|Ax\|^2=\|x\|^2$,即有

$$(Ax,Ax)=(x,x)\Rightarrow(Ax)^T(Ax)=x^T x\Rightarrow x^T A^T Ax=x^T x\Rightarrow x^T(A^T A-E)x=0,$$

又因为 $(A^T A-E)^T=A^T A-E$,所以 $A^T A-E$ 是实对称矩阵,

故 $A^T A-E=0$,有 $A^T A=E$,即 A 是正交矩阵.

8.利用分块矩阵的算法，直接验证。略具体过程

浙江大学 2016 - 2017 学年秋学期

《 线性代数(乙) 》课程期末试卷

课程号： 821T0060 ，开课学院： 数学科学学院

考试试卷：A 卷 √ 、B 卷（请在选定项上打 √ ）

考试形式：闭 √ 、开卷（请在选定项上打 √ ），允许带 笔 入场

考试日期：2017 年 1 月 17 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：学号：__________所属院系：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

符号提示：

设 A 是 n 阶矩阵

1. $|A|$ 表示 A 的行列式， 2. A^* 表示 A 的伴随矩阵， 3. $r(A)$ 表示 A 的秩，

4. A^{-1} 表示 A 的逆矩阵， 5. A^T 表示 A 的转置矩阵， 6. $tr(A)$ 表示 A 的迹，

7. E 表示单位矩阵， 8. $\|x\|$ 表示 n 维实向量 x 在常用内积下的长度.

一.解答题(本大题共 85 分)

1.(本题 10 分)设 $\prod_{i=1}^{n}(a_i-2)\neq 0$，求行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & a_2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & a_{n-1} & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & a_n \end{vmatrix}$ 的值.

2. (本题 15 分)已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，而且 $A^{-1}+E$ 可逆，如果矩阵 X 满足

$A^{-1}XA+XA+2E=0$，求矩阵 X.

3. (本题 15 分)解线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$

4. (本题 15 分) 设 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

(1).写出该二次型的矩阵 A，并判定 A 是否是正定的.

(2).求正交矩阵 U ,使得 $U^T AU$ 为对角阵.

(3).求该二次型的正惯性指数、负惯性指数及秩.

5. (本题 15 分)已知 $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$,求一个 3×3 的矩阵 B ,使得 $r(B)=2$ 且 $r(AB)=1$.

6.(本 题 15 分) 设 $\alpha_1=[1,1,1,3]^T$, $\alpha_2=[1,3,-5,-1]^T$, $\alpha_3=[3,1,10,15]^T$, $\alpha_4=[2,6,-10,-2a]^T$,

这里 a 为待定系数.问:

(1).向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 当 a 取何值时线性相关?取何值时线性无关?

(2).当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时, α_4 能否经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?若能线性表示,请写出表达式.

(3). α_3 能否经 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表示?若能线性表示,请写出表达式.

二.证明题(本大题 15 分)

7.(本题 8 分)设 A 是 n 阶实矩阵,如果对于任意实 n 维向量 x ,都有 $\|Ax\|=\|x\|$,则 A 是正交矩阵.

\8.(本题 7 分) 若 A 为满足 $A^2+A+4E=O$ 的 n 阶方阵,证明对于每个整数 k ,矩阵 $A+kE$ 都可逆,且其逆都是 A 的多项式.

<解答提示>

一. 解答题.

1.解.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & a_2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & a_{n-1} & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2-a_1 & a_2-2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2-a_1 & 0 & \cdots & a_{n-1}-2 & 0 \\ 2-a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-2\sum_{i=2}^{n}\frac{2-a_1}{a_i-2} & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & a_2-2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n-2 \end{vmatrix}.$$

$$= \left(a_1-2\sum_{i=2}^{n}\frac{2-a_1}{a_i-2}\right)\prod_{i=2}^{n}(a_i-2)$$

2. 解.首先依题设等式有 $\left(A^{-1}+E\right)X=-2A^{-1}$,

又 $|A|^{3-1}=\left|A^*\right|=1\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$,

如果 $|A|=-1$,可推得 $A^{-1}+E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为不可逆矩阵,矛盾!

所以 $|A|=1$,因此

$$A^{-1}+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ -2A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

得 $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

3.解计算系数行列式：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$，

(1)依克拉姆法则，.当a,b,c互不相同时,方程组有唯一组解,解为

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},y=\frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},z=\frac{(d-a)(d-c)}{(c-a)(c-b)},$$

(2).当a,b,c,d中仅有两个不同时,并且$a\neq b$或者$a\neq c$或者$b\neq c$,则解依赖一个参数,例如在$d=a\neq b=c$的情形下通解为$x=1,y=\dfrac{a-c}{b-d}k,z=k$,其中$k$任意数,

如果$a=b=c=d$,则解为$x=1-k_1-k_2,y=k_1,z=k_2$,其中k_1,k_2为任意数,

如果在a,b,c中两个是不相同的且d不等于它们中任何一个.或者$a=b=c\neq d$时则方程组无解.

4. (1) $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$， 因一阶顺序主子式为0. 故非正定.

(2) 此为常规题目。解题略，过程叙述如下：求出矩阵的全部不同的特征值.针对每一个特征值解相应的特征线性方程组得基础解在必要时,利用施密特正交化过程化所得的线性无关的向量（实际上是特征向量）为一正交向量组.之后归一化. 以此拼成正交矩阵 U.

(3) 正的特征值的数目为正惯性指数，负的特征值数目为负惯性指数.秩为非零特征值的数目.具体过程略

5.此题答案不唯一. 可以如下计算. 令经过初等行变换可将 A 化为于是存在可逆矩阵 P 使得

$A=PC=P\begin{pmatrix}-1&3&-2\\0&-1&5\\0&0&0\end{pmatrix}$， 令$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$,则 B 的秩为 2 且

$$AB=PCB=P\begin{pmatrix}-1&3&-2\\0&-1&5\\0&0&0\end{pmatrix}B=P\begin{pmatrix}-1&17&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$.B 即为所求.

6.书中常规例子及习题题型，请参照教材.证明略

二.证明题.

7.证明.因为$\|Ax\|=\|x\|$,所以有$\|Ax\|^2=\|x\|^2$,即有

$$(Ax,Ax)=(x,x)\Rightarrow(Ax)^T(Ax)=x^Tx\Rightarrow x^TA^TAx=x^Tx\Rightarrow x^T\left(A^TA-E\right)x=0,$$

又因为$\left(A^TA-E\right)^T=A^TA-E$,所以$A^TA-E$是实对称矩阵,

故$A^TA-E=0$,有$A^TA=E$,即A是正交矩阵

8.对于任意实数 k.,由所给等式，配方得 $(A+kE)\left(A-(k-1)E\right)=\left(-k^2+k-4\right)E$。

因$-k^2+k-4<0$对于任意实数 k 均成立，上式可变形为:

$(A+kE)\left[\dfrac{1}{-k^2+k-4}\left(A-(k-1)E\right)\right]=E$. 因此，对于任意 k,.A+kE 可逆，其逆 $\dfrac{1}{-k^2+k-4}\left(A-(k-1)E\right)$为 A 的多项式