

$$X(\omega) = \frac{1}{b+j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

因此

$$Y(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)} \quad (4.128)$$

为了确定输出 $y(t)$ ，我们希望获得 $Y(\omega)$ 的逆变换，用部分分式展开式展开 $Y(\omega)$ 来求取是最简单的方法。我们将看到，这样的方法对计算许多傅里叶逆变换，包括计算由微分方程描述的 LTI 系统频率响应时所出现的傅里叶逆变换，都是极其有用的。在 4.11 节中，我们以较长的篇幅讨论这个问题。在附录中，我们研究部分分式展开的一般方法。本例中，将描述部分分式展开的基本思想。

首先，假设 $b \neq a$ ，这时可用以下形式表达 $Y(\omega)$ ，

$$Y(\omega) = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega} \quad (4.129)$$

这里 A 和 B 是要确定的常数。使式 (4.128) 和 (4.129) 右边相等，得

$$\frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega} = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}$$

或

$$A(b+j\omega) + B(a+j\omega) = 1 \quad (4.130)$$

因为此式必须对所有的 ω 值都成立，所以式 (4.130) 左边 ω 的系数必须是零，其余项之和必须为 1，即

$$A+B=0$$

$$Ab+Ba=1$$

解这个方程组，得

$$A = \frac{1}{b-a} = -B$$

因此

$$Y(\omega) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega} \right] \quad (4.131)$$

在附录中，我们要介绍一种较有效但又是等价的一般部分分式展开方法。

式 (4.131) 右边两项中每一项的逆变换可通过观察得出，并利用 4.6.1 节的线性性质，有

$$y(t) = \frac{1}{b-a} [e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)]$$

如果 $b=a$ ，式 (4.131) 部分分式展开无效。然而，对这种情况，

$$Y(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

把它看作

$$\frac{1}{(a+j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right]$$

利用式 (4.107) 给出的微分性质的对偶性，则

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

因此

$$y(t) = te^{-at}u(t)$$

例4.21 假设现在考虑具有以下冲激响应的 LTI 系统

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

并考虑输入

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

式中

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

则

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-3}^3 2\pi a_k \delta(\omega - 2\pi k)$$

这样

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \sum_{k=-3}^3 2\pi a_k H(2\pi k) \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \sum_{k=-3}^3 \left(\frac{2\pi a_k}{1 + j2\pi k} \right) \delta(\omega - 2\pi k)$$

把 $Y(\omega)$ 转换成傅里叶级数表达式, 可得

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 \left(\frac{a_k}{1 + j2\pi k} \right) e^{j2\pi kt}$$

这与例4.2获得的响应是一致的(见式(4.24)和(4.25))。

4.7.1 周期卷积

例4.21是把卷积性质用于一个周期信号与一个非周期信号的卷积。如果两个信号都是周期的, 则卷积积分不收敛。这说明, 具有周期冲激响应的 LTI 系统是不稳定的, 且没有有限值频率响应。然而, 具有相等周期的周期信号的卷积形式有时是有用的, 这种卷积称为周期卷积。两个具有共同周期 T_0 的信号 $\tilde{x}_1(t)$ 和 $\tilde{x}_2(t)$ 的周期卷积定义为

$$\tilde{y}(t) = \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau) \tilde{x}_2(t - \tau) d\tau \quad (4.132)$$

这个运算类似通常的卷积(有时称为非周期卷积)。如图4.29所示, 我们看到, 就像非周期卷积一样, 周期卷积也包括 $\tilde{x}_1(\tau)$ 与反褶、时移后的 $\tilde{x}_2(\tau)$ 相乘。但在这种情况下, 乘积是在单一周期上的积分。当 t 变化时, $\tilde{x}_2(t - \tau)$ 的一个周期移出积分区间, 下一个周期移入。如 t 变化了 T_0 , 则周期信号 $\tilde{x}_2(t - \tau)$ 将已时移整整一个周期, 因此看起来完全像时移之前所作的那样。由此可推论, 周期卷积的结果是周期信号 $\tilde{y}(t)$ 。此外, 如习题3.12所示,

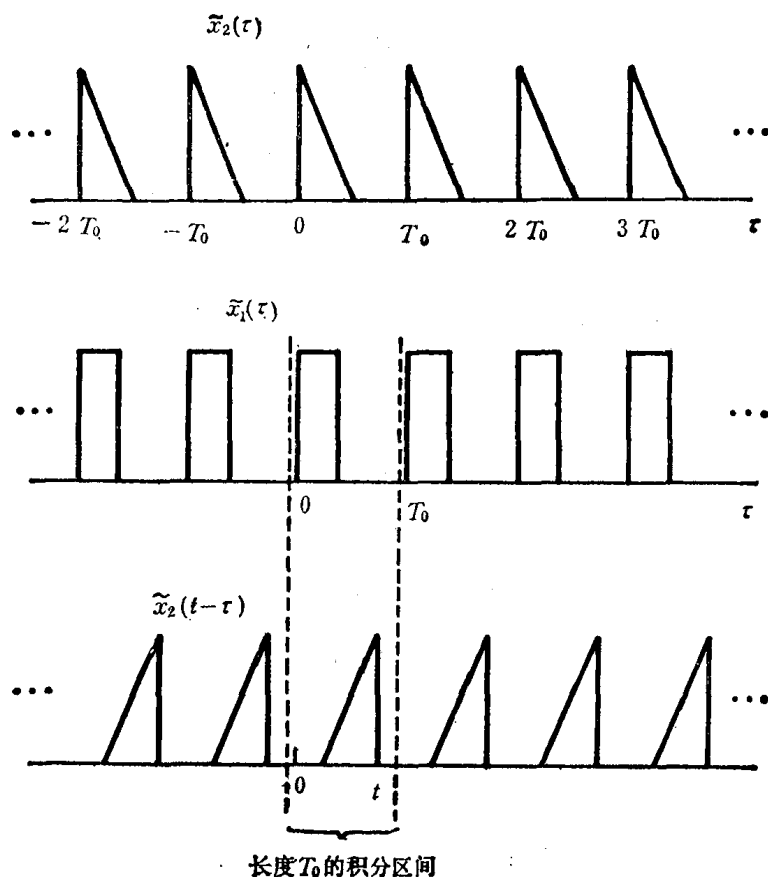


图4.29 两个连续时间周期信号的周期卷积

周期卷积的结果不取决于式(4.132)积分中选取哪一个长度 T_0 的区间。又由习题4.16, 如果 $\{a_k\}$ 、 $\{b_k\}$ 和 $\{c_k\}$ 分别表示 $\tilde{x}_1(t)$ 、 $\tilde{x}_2(t)$ 和 $\tilde{y}(t)$ 的傅里叶级数系数, 则

$$c_k = T_0 a_k b_k \quad (4.133)$$

这是周期卷积的卷积性质的对应式。

4.8 调制性质

卷积性质说明时域中的卷积对应频域中的乘积。由于时域和频域的对偶性, 可以预期对偶性质 (即在时域中的乘积对应频域中的卷积) 也存在。具体为

$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * P(\omega)] \quad (4.134)$$

这可通过卷积性质并利用4.6.6节的对偶关系来证明, 或者以类似推导卷积性质的步骤直接利用傅里叶变换关系, 也可证明这一结论。

一个信号与另一个信号相乘, 可认为是用一个信号去变换或调制另一个信号的幅度。因此, 两个信号的乘积常称为幅度调制。由于这个原因, 式(4.134)称为调制性质。在第7章、第8章将要看到, 这个性质有若干非常重要的应用。为了阐明式(4.134)并提出在随后几章中将要讨论的一些应用, 我们考虑几个例子。

例4.22 设 $s(t)$ 是这样一个信号, 其频谱 $S(\omega)$ 如图4.30(a)所示。又考虑信号 $p(t)$ 由下

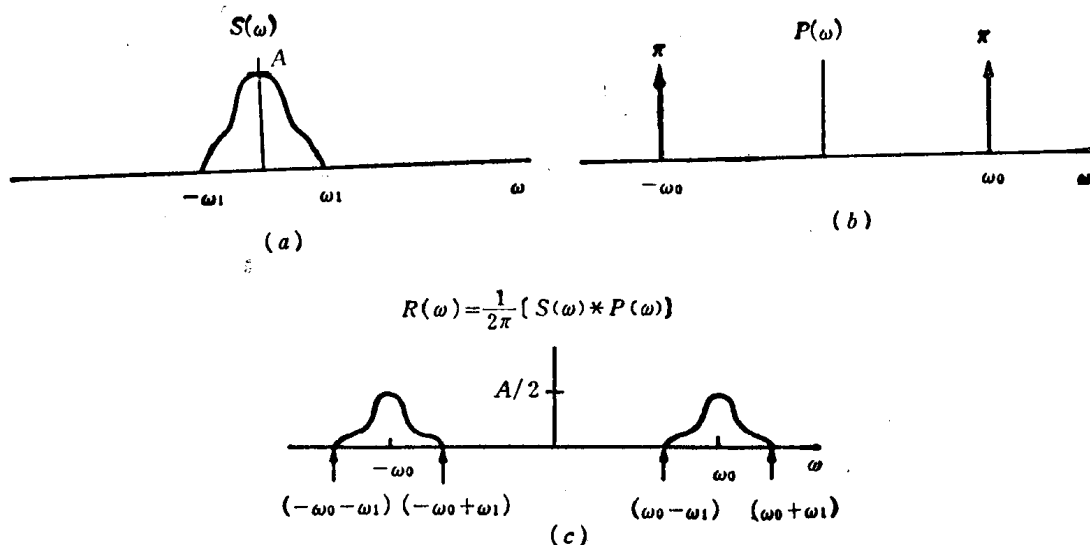


图 4.30 例 4.22 中调制性质的利用

式规定

$$p(t) = \cos \omega_0 t$$

于是

$$P(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

如图 4.30(b) 所示。 $r(t) = s(t)p(t)$ 的频谱 $R(\omega)$ 通过式 (4.134) 获得, 为

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{2} S(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (4.135)$$

www.blogoil.com

如图 4.30(c) 所描绘。这里我们假设 $\omega_0 > \omega_1$, 因而 $R(\omega)$ 的两个非零部分不重叠。由此可见, $r(t)$ 的频谱由 $S(\omega)$ 的两个被平移且经过比例尺改变的形式之和所组成。

由式 (4.135) 和图 4.30 可清楚看出: 当我们用正弦信号乘以 $s(t)$ 时, 虽然信息被平移到较高的频率上, 但信号 $s(t)$ 中所有的信息均被保存。这个事实形成了正弦幅度调制系统的基础。在下一个例子中, 我们会看到怎样从幅度调制信号 $r(t)$ 中恢复原来的信号 $s(t)$ 。

例 4.23 现在考虑由例 4.22 获得的 $r(t)$, 并设

$$g(t) = r(t)p(t)$$

这里还是 $p(t) = \cos \omega_0 t$, 于是, $R(\omega)$ 、 $P(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 如图 4.31 所示。

由图 4.31(c) 和傅里叶变换的线性, 我们看到 $g(t)$ 是 $\frac{1}{2}s(t)$ 与只在较高频率(集中在 $\pm 2\omega_0$ 附近)有非零频谱的信号之和。于是, 假设我们把信号 $g(t)$ 作为具有频率响应 $H(\omega)$ 的 LTI 系统的输入, $H(\omega)$ 在低频(比如说, $|\omega| < \omega_1$) 时是常数, 在高频($|\omega| > \omega_0$) 时为零。则此系统的输出将具有 $H(\omega)G(\omega)$ 的频谱。由于 $H(\omega)$ 的特定选择, $H(\omega)G(\omega)$ 将是 $S(\omega)$ 经比例尺改变的复制品, 因此输出本身将是 $s(t)$ 经比例尺改变后的形式。在第 7 章研究幅度调制的基本原理时, 再详细地阐述这个概念。

例 4.24 再考虑由两个信号的积定义的信号 $r(t)$:

$$r(t) = s(t)p(t)$$

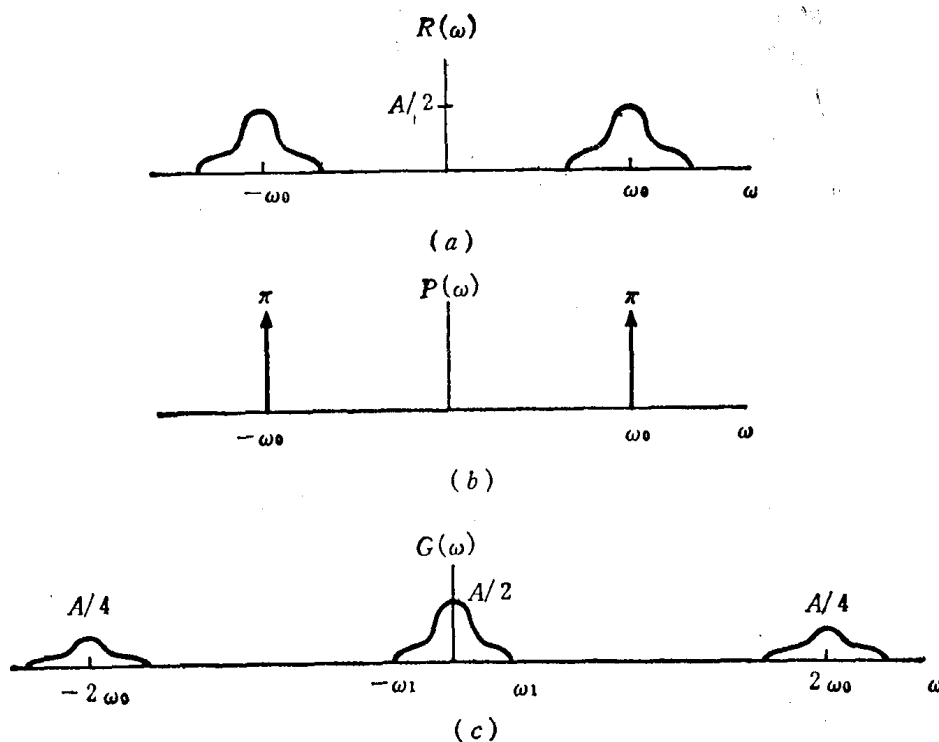


图4.31 例4.23中所考虑信号的频谱

现在取 $p(t)$ 为周期冲激串

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

www.blogoil.com (4.136)

如图4.32所示, 我们看到 $r(t)$ 是一个冲激串, 冲激的幅度等于在相距长度为 T 的时间间隔上 $s(t)$ 的抽样值, 即

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\delta(t - kT) \end{aligned}$$

回顾一下例4.15, 周期冲激串 $p(t)$ 的频谱本身是周期冲激串, 具体为

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

因此, 由调制性质

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * P(\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned}$$

即如图4.33(c)所示, $R(\omega)$ 由周期重复的 $S(\omega)$ 的复制品组成, $2\pi/T \gg \omega_1$, 以便 $R(\omega)$ 的非零部分不重叠。从此图我们看到, 与前例一样, 如果 $r(t)$ 作为输入加至一个 LTI 系统, 此

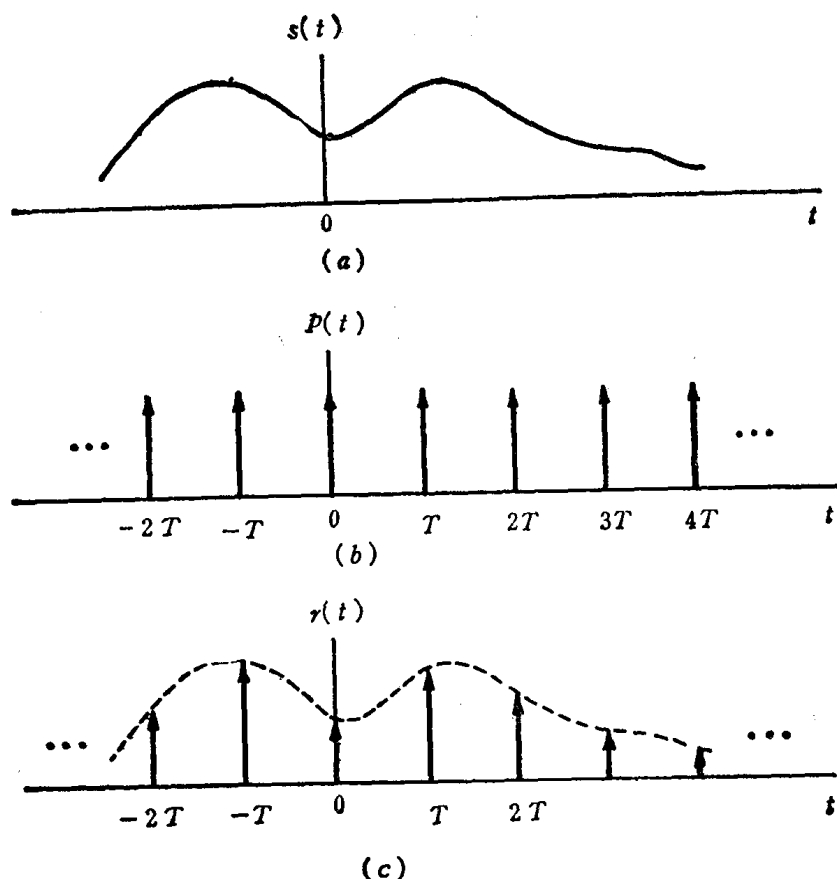


图4.32 信号 $s(t)$ 和周期冲激串的乘积

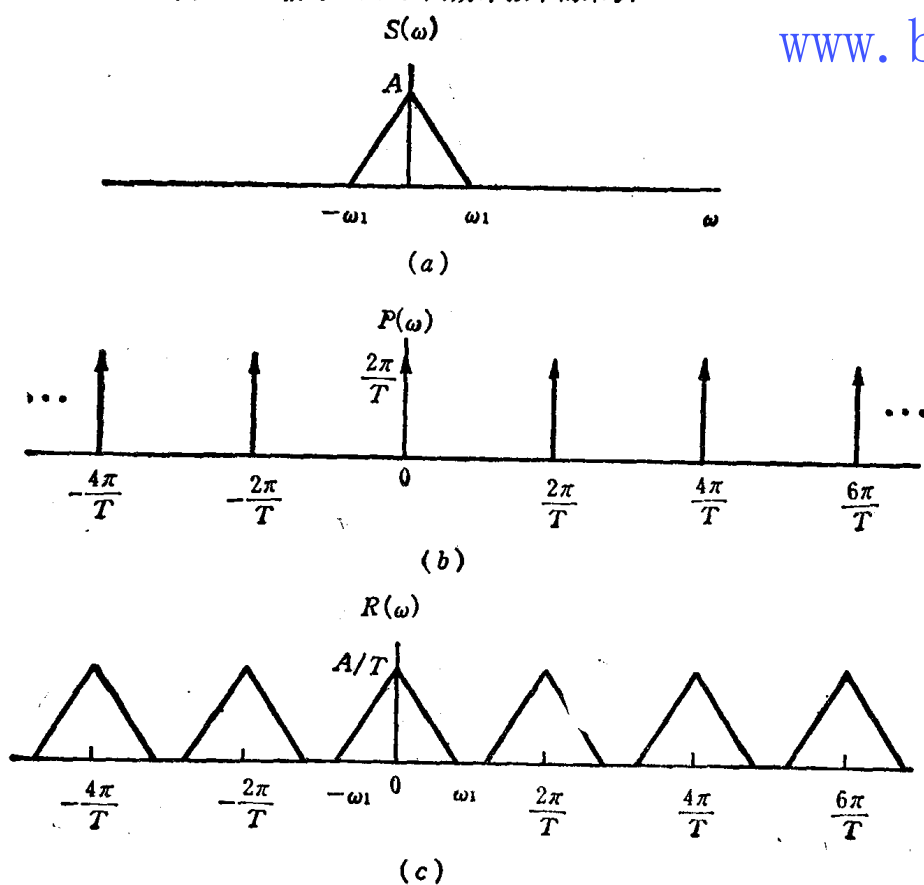


图4.33 信号与周期冲激串相乘在频域中的结果

www.blogoil.com

系统的频率响应对 $|\omega| < \omega_1$ 是常数, 对较高频率是零, 则系统的输出与 $s(t)$ 成正比。这是抽样的基本思想。在第8章, 我们将在一定的深度上研究这个例子的含义。

4.9 傅里叶性质、基本傅里叶变换和傅里叶级数对的表格

在前三节和习题中, 我们已经考虑了傅里叶变换的一些重要性质。这些在表4.1中加以总结。如在4.6节开始所讨论的, 这些性质中有许多具有傅里叶级数的对应式, 并在表4.2中加以总结。在大多数情况下, 利用4.5节的讨论(在那里傅里叶级数是并入傅里叶变换的范围内的), 这些性质可直接根据表4.1中对应的性质中推出。然而在某些情况中, 如卷积性质或帕斯维尔关系, 当变换性质适用于非周期信号和傅里叶变换时, 它对周期信号和傅里叶级数是无用的, 尽管修改过的变形是有用的。

表4.1 傅里叶变换性质

非 周 期 信 号	傅 里 叶 变 换
$x(t)$	$X(\omega)$
$y(t)$	$Y(\omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega) Y(\omega)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$x(t)$ 实函数	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \operatorname{Re}\{X(\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-\omega)\} \\ \operatorname{Im}\{X(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-\omega)\} \\ X(\omega) = X(-\omega) \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$

$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$	$[x(t) \text{ 实函数}]$	$\text{Re}\{X(\omega)\}$
$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$	$[x(t) \text{ 实函数}]$	$j\text{Im}\{X(\omega)\}$
对	偶	性
$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-juv} dv$		
$g(t) \xleftrightarrow{F} f(\omega)$		
$f(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi g(-\omega)$		
非 周 期 信 号 帕 斯 维 尔 关 系		
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) ^2 d\omega$		

最后,在表4.3中,把许多基本的和重要的傅里叶变换对列成表。在应用傅里叶分析方法研究信号和系统时,我们会经常遇到其中的许多变换对。所有这些变换对,除了表中最后一个之外,都在前面几节中作为例子考虑过。最后一个在习题4.19中考虑。

表4.2 傅里叶级数性质

周 期 信 号	傅 里 叶 级 数 系 数
$\left. \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\} \text{周期为 } T_0 \text{ 的周期信号}$	a_k b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(2\pi/T_0)t_0}$
$e^{jM(2\pi/T_0)t} x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a_{-k}^*
$x(-t)$	a_{-k}
$x(at), a > 0$ (周期为 $\frac{T_0}{a}$ 的周期信号)	a_k
$\int_{T_0} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T_0 a_k b_k$
$x(t) y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j^k \frac{2\pi}{T_0} a_k$
$\int_{-\infty}^t x(t) dt$ (仅当 $a_0 = 0$ 才是有限值和周期的)	$\left(\frac{1}{jk \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)} \right) a_k$

(续表4.2)

周 期 信 号	傅 里 叶 级 数 系 数
$x(t)$ 实函数	$a_k = a_{-k}^*$ $\operatorname{Re}\{a_k\} = \operatorname{Re}\{a_{-k}\}$ $\operatorname{Im}\{a_k\} = -\operatorname{Im}\{a_{-k}\}$ $ a_k = a_{-k} $ $\angle a_k = -\angle a_{-k}$
$x_e(t) = E_v\{x(t)\}$ [$x(t)$ 实函数]	$\operatorname{Re}\{a_k\}$
$x_o(t) = O_d\{x(t)\}$ [$x(t)$ 实函数]	$j\operatorname{Im}\{a_k\}$

周期信号帕斯维尔关系

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

表4.3 基 本 傅 里 叶 变 换 对

信 号	傅 里 叶 变 换	傅 里 叶 级 数 系 数 (如果是周期性的)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, 其他
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, 其他
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, 其他
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$ (对 $T_0 > 0$ 的任何选择都有这个傅里叶级数表达式)
周期矩形波 $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$ 和 $x(t + T_0) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sinc} k \omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$ $= \frac{\operatorname{sinc} k \omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ 对所有 k
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—

(续表4.3)

信 号	傅 里 叶 变 换	傅 里 叶 级 数 系 数 (如果是周期性的)
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	—

4.10 连续时间傅里叶变换的极坐标表示

4.10.1 傅里叶变换的幅度和相位

前几节中,我们对傅里叶变换的性质已有一些深刻的认识,并得出了一些方法。采取这些方法,可有效地把傅里叶分析的方法用于研究信号与系统。由综合方程(4.60)可知,从信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 可恢复这个信号。因此可推论, $X(\omega)$ 必然包含 $x(t)$ 的所有信息。通过分析 $x(t)$ 各种可能的性质(实、偶、时移的等等)如何呈现为 $X(\omega)$ 的对应性质,对于信息是怎样嵌入 $X(\omega)$ 已有了一定的认识。本节讨论傅里叶变换的极坐标表示。通过讨论,我们将进一步认识傅里叶变换的特性。

$X(\omega)$ 的极坐标或幅度—相位表达式为

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)} \quad (4.137)$$

由综合方程(4.60),可以认为 $X(\omega)$ 使我们能把信号 $x(t)$ 分解成不同频率周期复指数之和。事实上,以前已描述过, $|X(\omega)|^2$ 可解释为 $x(t)$ 的能量密度谱,即 $|X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$ 可看作位于 ω 和 $\omega+d\omega$ 之间频带中信号 $x(t)$ 的一部分能量。

$|X(\omega)|$ 提供有关组成 $x(t)$ 的复指数相对幅度的数据,而 $\angle X(\omega)$ 提供有关这些复指数相对相位的数据。即使幅度函数保持不变,我们也能得到看起来非常不同的信号,这取决于这个相位函数是什么样的。例如,再考虑图 4.3 描述的例子。在这种情况下,船碰到三个波串的迭加,其中每一个都可以被模拟为正弦信号。它们之和的幅度取决于三个正弦波的相对相位(当然,也取决于它们的幅度),可以相当小,也可以非常大。因此,对于船来说,相位的含义是十分重要的。为了较详细地了解相位的作用,考虑信号

$$\begin{aligned} x(t) = & 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) \\ & + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3) \end{aligned} \quad (4.138)$$

在图4.4中,画出了 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ 情况下的 $x(t)$ 。图4.34描绘了对这种情况和对 ϕ_i 为其他

几种选取时的 $x(t)$ 。如图所示, 产生的信号依 ϕ_i 的值, 可有显著的不同。

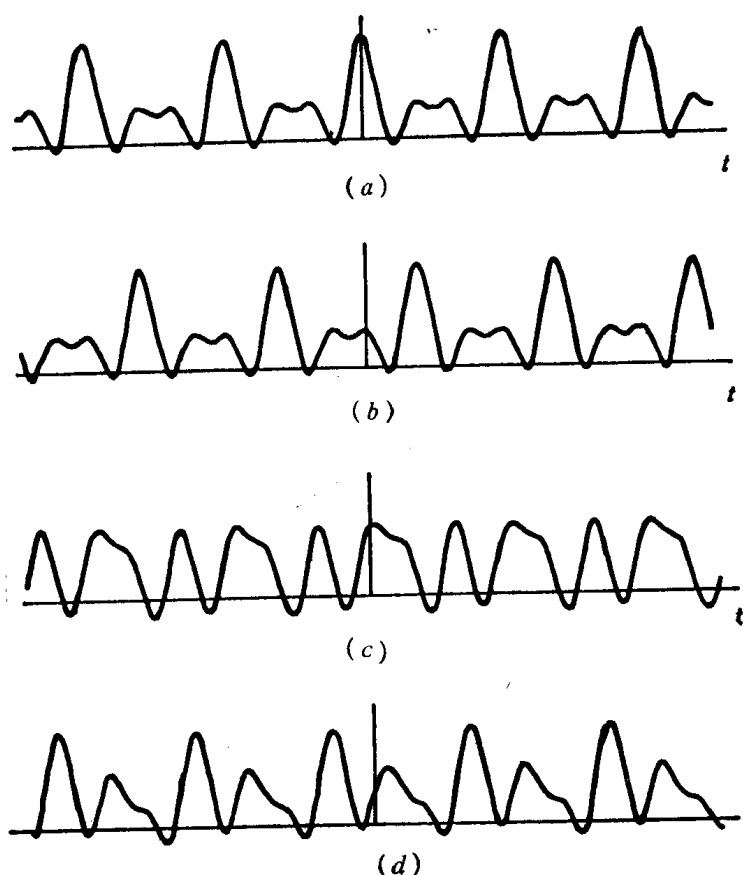


图4.34 式(4.138)中对相角 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 几种不同选择时给出的信号 $x(t)$: (a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$; (b) $\phi_1 = 4$ 弧度, $\phi_2 = 8$ 弧度, $\phi_3 = 12$ 弧度; (c) $\phi_1 = 6$ 弧度, $\phi_2 = -2.7$ 弧度, $\phi_3 = 0.93$ 弧度; (d) $\phi_1 = 1.2$ 弧度, $\phi_2 = 4.1$ 弧度, $\phi_3 = -7.02$ 弧度

由此可见, $X(\omega)$ 相位的变化导致信号 $x(t)$ 时域特性的变化。在某些例子中, 相位失真也许是重要的, 而在另一些例子中, 相位失真也许是不重要的。例如, 考虑人的听觉系统, 如果 $X(\omega)$ 对应语音的一个单音(例如一个元音)信号的傅里叶变换, 则即使由于 $X(\omega)$ 相位变化使信号失真, 人们仍能辨认这个声音。例如, 如果所产生的声信号的傅里叶变换为 $|X(\omega)|$ (即一个信号具有零相位和相同的幅度函数), 声音仍能辨认。另一方面, 虽然轻微的相位失真(例如影响单音的那些失真)不导致可理解程度的下降, 但语言相位的严重失真却必然导致可理解程度的下降。例如, 如果 $x(t)$ 是一个句子的录音, 则信号 $x(-t)$ 代表倒向放音句子。由表4.1我们知道

$$F\{x(-t)\} = X(-\omega)$$

这里 $X(\omega)$ 是 $x(t)$ 的傅里叶变换。而且, 由于 $x(t)$ 是实函数, 所以 $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$, $\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$ 。即倒放音句子的频谱与原句频谱有相同的幅度函数, 差别只在相位上, 这里存在一个相反的符号。很清楚, 这个相位变化对录音的可辨认性有显著的影响。

说明相位影响和重要性的第二个例子是在研究图像中发现的。黑白图像可认为是具有两个独立变量的信号 $x(t_1, t_2)$ 。这里 t_1 表示图像上一点的水平座标, t_2 是垂直座标。 $x(t_1, t_2)$ 是在点 (t_1, t_2) 上的图像亮度。虽然本书不详细研究两个独立变量的信号, 但给出了在几种情况下将采用它们(即图像)的例子, 因为这些例子可使要研究的一些概念形象化。在目前的

范围里，为了讨论图像相位的影响，需要引进具有两个独立变量信号的傅里叶分析。就我们的目的来说，不需要对这个课题作详细的研究，但能简单地观察到，二维傅里叶分析的方法非常类似我们为单个独立变量信号导出的方法。明确地说，在二维中，把信号 $x(t_1, t_2)$ 分解为在两个不同的方向、可能以不同速率振荡的复指数的乘积之和（积分），即信号的形式为

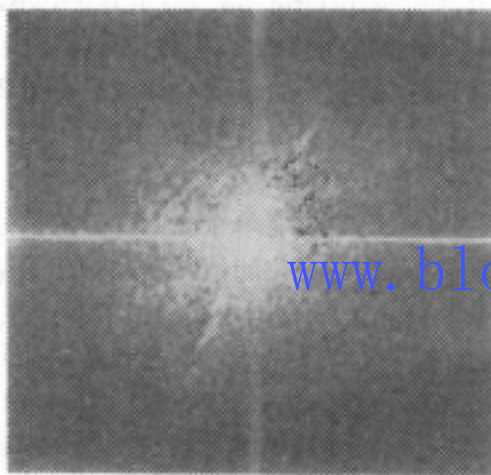
$$e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}$$

这个分解的结果是二维傅里叶变换 $X(\omega_1, \omega_2)$ 它包含怎样由这些基本信号构成信号 $x(t_1, t_2)$ 的信息。习题4.26谈到了二维傅里叶分析的几个基本方面。

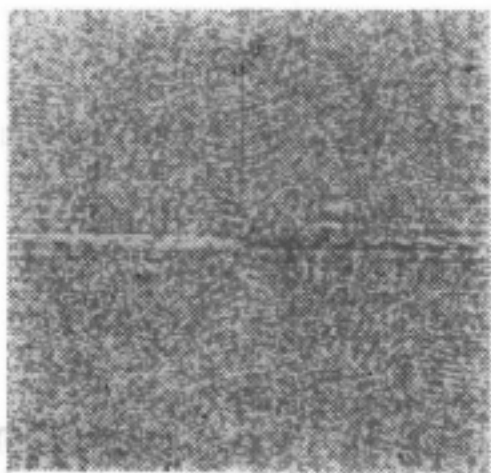
回到图像相位的问题上。我们注意到，在观看图像时，对人眼来说最重要的信息包含在图像边缘中和较高对比的区域中。从直观上说，图像中最大和最小亮度区域，是不同频率复指数的相位相同的地方。因此，期望一张图像的傅里叶变换的相位能包含这个图像中的许多信息似乎是行得通的，特别是相位应当记录了有关边缘的信息。为了证实这个可能性，在图4.35(a)中，重复显示了图4.2中傅里叶的照片。在图4.35(b)中，我们示出了傅里叶变换的幅度。这张图的水平轴是 ω_1 ，垂直轴是 ω_2 ，图像在点 (ω_1, ω_2) 的亮度与图4.35(a)的图像变换 $x(\omega_1, \omega_2)$ 的幅度成比例。类似地，变换的相位如图4.35(c)所示，图4.35(d)是使



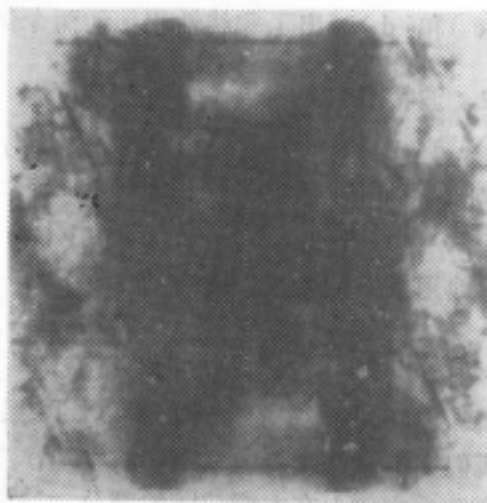
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

图4.35 (a)傅里叶的照片; (b)(a)的二维傅里叶变换幅度; (c)(a)的傅里叶变换相位; (d)图像的傅里叶变换具有图(b)的幅度和等于零的相位; (e)图像的傅里叶变换具有等于1的幅度和图(c)的相位; (f)图像的傅里叶变换具有图(c)的相位和等于图2.2图像的变换的幅度

$X(\omega_1, \omega_2)$ 的相位[图4.35(c)]为0(不改变它的幅度)时的逆变换。在图4.35(e)中, 是使 $X(\omega_1, \omega_2)$ 的幅度等于1, 但相位保持不变时的逆变换。最后, 我们用图4.35(c)的相位和完全不同图像的变换的幅度(具体是按图2.2所示的图像!)组成一个函数, 通过把这种函数逆变换, 得到的图像画于图4.35(f)中。这些图清楚地表明相位在显示图像时的重要作用。

回过头来再看具有单个独立变量的信号, 这种信号存在一个很容易想象的特殊形式的相位失真。这是线性相位的情况, 此时在频率 ω 上的相移是 ω 的线性函数。特别是, 如果用加上 $\alpha\omega$ 来修改 $\angle X(\omega)$, 则由式(4.137), 产生的傅里叶变换是 $X(\omega)e^{j\alpha\omega}$; 由时移性质(4.85), 所产生的信号是 $x(t+\alpha)$ 。即它仅是原信号的时移形式。在这种情况下, 不同频率处复指数的相位平移, 使得这些信号在时间 $t+\alpha$ 处的相对相位, 与原信号在时间 t 处相对相位一致。因此, 当这些指数迭加时, 我们得到时间移位了的 $x(t)$ 。如果相移是 ω 的非线性函数, 则每个复指数将以相对相位改变的方式而平移。当这些指数迭加时, 得到一个看起来与 $x(t)$ 也许大不相同的信号, 这就是在图4.34中所描绘的。图4.34(b)是线性相位的一例, 而图4.34(c)和(d)画出了非线性相移的两个例子。

4.10.2 波特图

在4.7节中我们看到, 具有频率响应 $H(\omega)$ 的LTI系统的输入和输出傅里叶变换是由下式联系的

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

或等价地用极坐标表示, 就有

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)| \quad (4.139)$$

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega) \quad (4.140)$$

由于式(4.139)是乘积的形式, 所以LTI系统频率响应的幅度有时称为系统的增益。

我们在本章和接着的几章中将发现, 当利用频域方法研究LTI系统时, 用图形表示傅里叶变换较为方便。在本章较前的部分, 我们用图形表示 $X(\omega)$, 它由 ω 的函数 $|X(\omega)|$ 和 $\angle X(\omega)$ 两个图形组成。虽然这种表达式很有用, 而且事实上在本书中广泛使用, 对LTI系统

分析也具有很大价值,但式(4.139)和(4.140)对这个表示法提出了改进。具体说,如果我们已经把 $\angle H(\omega)$ 和 $\angle X(\omega)$ 画成 ω 的函数,则把两个图上的对应点相加,就能够获得 $\angle Y(\omega)$ 。同样,如果作出了 $\lg|H(\omega)|$ 和 $\lg|X(\omega)|$,可由它们相加而获得 $\lg|Y(\omega)|$ 。幅度函数对数表达式常用来简化分析LTI系统的图解计算。例如,因为LTI系统级联的频率响应是各项频率响应的乘积,所以只要把组成系统的每一项对应图相加,就能获得整个频率响应的对数函数幅度和相位图。

刚才描述的最为广泛熟悉的图形表示法就是波特图。在这种表示中, $\angle H(\omega)$ 和 $20\lg|H(\omega)|$ 被绘成频率的函数。而后者与对数幅度成比例,称为以分贝(缩写dB)表示的幅度。于是,0dB对应 $|H(\omega)|$ 的值等于1,20dB等价于 $|H(\omega)|=10$, -20dB对应于 $|H(\omega)|=0.1$, 40dB为 $|H(\omega)|=100$ 等等。注意,1dB近似于 $|H(\omega)|=1.12$, 6dB近似于 $|H(\omega)|=2$,也是很有用的。典型的波特图如图4.36所示。在这些波特图中,对 ω 通常使用对数刻度。这不仅在感兴趣的频率范围较大时,使我们可获得合适的分辨率,而且如果频率刻度经比例尺改变时,可保持特定响应曲线的形状不变(见习题4.46)。并且在下两节将看到,对数频率刻度的使用,极大地简化了由微分方程描述的LTI系统曲线的作图。还要注意,在图4.36中,只对正 ω 作出了幅度和相位曲线。正如在4.6节中讨论的,如果 $h(t)$ 是实函数,则 $|H(\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\angle H(\omega)$ 是 ω 的奇函数。由于这一点,负 ω 时的图是多余的,并且立刻可以根据正 ω 时的图来获得。

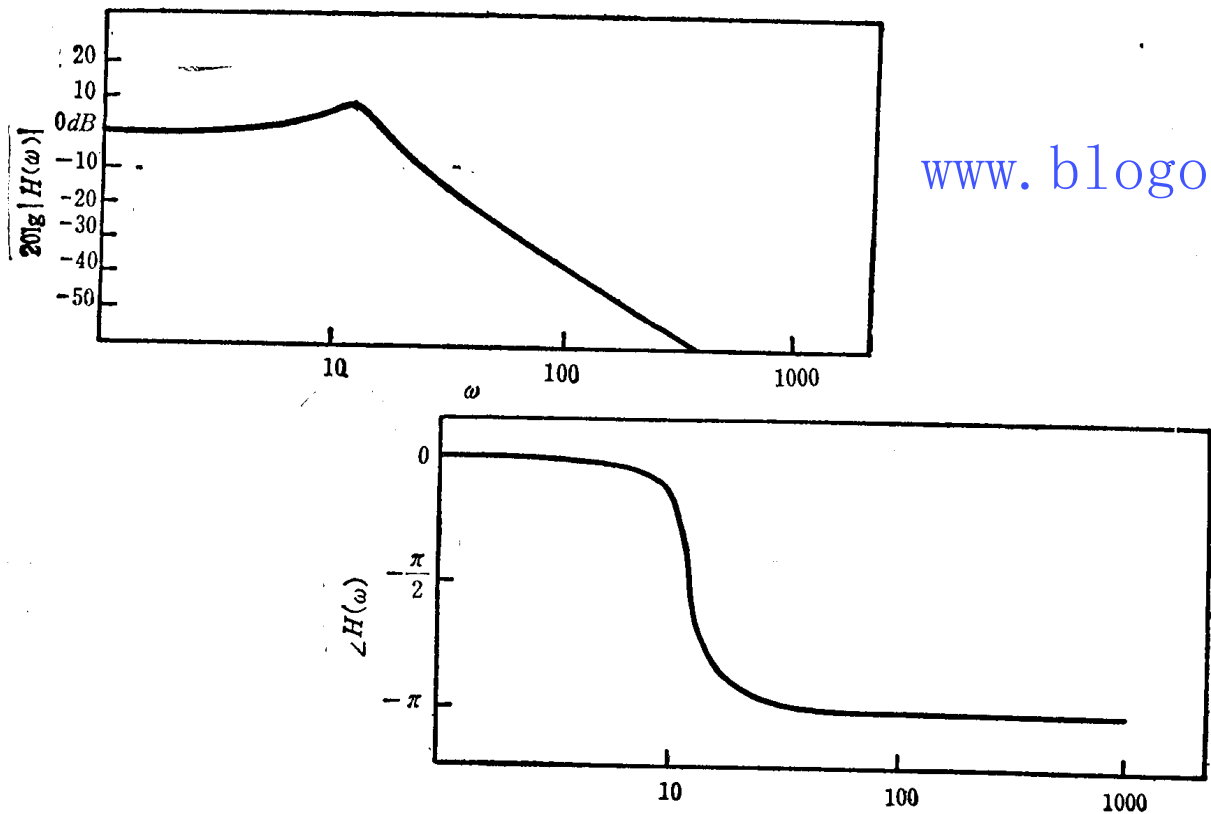


图4.36 典型的波特图(注意 ω 是利用对数刻度标的)

当继续研究信号和系统分析的方法时,我们将遇到把 $|X(\omega)|$ 画在线性刻度上较方便的大量情况;我们也将发现,在许多地方把 $|X(\omega)|$ 画作 $\lg|X(\omega)|$ 更好。例如,在第6到第8章中,我们碰到幅度函数在不同频率范围上是零而在其他范围上是1的LTI系统。因为

$\lg(0) = -\infty$, 所以对这类系统, 波特图不怎么有用, 而 $|X(\omega)|$ 的线性刻度要方便得多。另一方面, 在下面两节中, 将考虑波特图具有很大价值的一类系统。此外, 因为对数扩展了较小的 $|X(\omega)|$ 值的刻度, 所以波特图在显示零附近频率响应的细节时常常是有用的。由于这些原因, 我们对傅里叶变换的幅度介绍了线性和对数两种图形表示, 并将在适当时选用其中一种。

4.11 由线性常系数微分方程表征的系统的频率响应

4.11.1 由微分方程表征的 LTI 系统频率响应和冲激响应的计算

我们在 3.5 节和 3.6 节讨论过, 一类特别重要和有用的连续时间 LTI 系统, 是输入和输出满足以下线性常系数微分方程的系统

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (4.141)$$

本节考虑确定这样一种 LTI 系统频率响应的问题, 原则上可采用第 3 章的方法解如式 (4.141) 这类方程, 来完成这一工作。明确地说, 可采用那种步骤先确定 LTI 系统的冲激响应, 然后通过取冲激响应的傅里叶变换, 来获得频率响应。然而, 由前几节讨论过的傅里叶变换的性质, 有一个简单而直接得多的步骤来获得频率响应。一旦以此获得频率响应, 冲激响应就可用逆变换确定。我们将看到, 对于计算冲激响应, 从而对于表征及计算由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统的响应来说, 部分分式展开法使这一步骤成为极其有用的方法。

为了略述在前段中提到的步骤, 考虑由式 (4.141) 表征的 LTI 系统。由卷积的性质知道

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

或等价地

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.142)$$

式中 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ 和 $H(\omega)$ 分别是输入 $x(t)$ 、输出 $y(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。当然, 我们假设这三个傅里叶变换都存在。其次, 考虑对式 (4.141) 的两边应用傅里叶变换, 得到

$$F\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = F\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \quad (4.143)$$

由线性性质 (4.83), 此式变为

$$\sum_{k=0}^N a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^M b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \quad (4.144)$$

由微分性质 (4.87),

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

或等价地,

$$Y(\omega) \left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] = X(\omega) \left[\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right]$$

于是, 由式 (4.142),

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k} \quad (4.145)$$

由式(4.145)我们观察到, $H(\omega)$ 是一个有理函数, 即它是 $j\omega$ 的多项式之比。分子多项式的系数与式(4.141)右边的系数相同, 分母多项式的系数与式(4.141)左边的系数相同。于是我们看到, 对于由式(4.141)表征的LTI系统来说, 式(4.145)所给出的频率响应能通过观察来直接写出。

例4.25 考虑初始静止的LTI系统由下式表征,

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (4.146)$$

其中 $a > 0$ 。由式(4.145), 频率响应是

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (4.147)$$

与例4.7比较, 我们看到式(4.147)是 $e^{-at}u(t)$ 的傅里叶变换。于是系统的冲激响应判定为

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

例4.26 考虑初始静止由以下微分方程表征的LTI系统,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

由式(4.145), 频率响应是

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} \quad (4.148)$$

为了确定相应的冲激响应, 需要求 $H(\omega)$ 的逆变换, 这可利用部分分式展开方法达到。这个方法在例4.20中用过, 并在附录中详细讨论(尤其是在例A.1中, 作出详细的计算)。首先把式(4.148)右边的分母分解为较低阶项的乘积

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \quad (4.149)$$

接着, 利用附录中研究的部分分式展开方法, 获得 $H(\omega)$ 的表达式为

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}$$

通过观察, 各项的逆变换可判定为

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

使用例4.26中获得傅里叶逆变换的步骤, 在求带有 $j\omega$ 的多项式之比的逆变换中一般是有用的。我们可以用式(4.145)来确定由线性常系数微分方程描述的任何LTI系统的频率响应, 然后可通过部分分式展开计算冲激响应。通过部分分式展开, 把频率响应化为每一项通过观察都可判定其逆变换的形式。此外, 如果这种系统的输入信号的傅里叶变换 $X(\omega)$ 也是 $j\omega$ 的多项式之比, 则 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ 也是 $j\omega$ 的多项式之比。在这种情况下, 可用相同的方法来解微分方程, 即找出对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 。这一点在下例中描述。

例4.27 考虑例4.26的系统, 设输入是

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

于是, 利用式(4.149)有

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) \\ &= \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] \\ &= \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} \end{aligned} \quad (4.150)$$

如附录中推导的, 在这种情况下, 找出以下形式的部分分式展开表达式

$$Y(\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3} \quad (4.151)$$

这里 A_{11} 、 A_{12} 和 A_{21} 是要确定的常数。在附录例 A.2 中, 应用部分分式展开方法确定这些系数, 得到的值为

$$A_{11} = \frac{1}{4}, \quad A_{12} = \frac{1}{2}, \quad A_{21} = -\frac{1}{4}$$

于是,

$$Y(\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3} \quad (4.152)$$

再通过观察, 得到式(4.152)中每一项的傅里叶逆变换。第一和第三项与我们在前面两例中遇到的形式相同, 而第二项的逆变换可由表4.2得到, 或如例4.20那样, 通过把式(4.107)的微分性质对偶性应用到 $1/(j\omega + 1)$ 上可获得。这样, 得到式(4.152)的逆变换为

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t)$$

由此例和前面的例子可见, 应用傅里叶分析的方法, 可使由微分方程表征的LTI系统的有关问题, 简化为代数的基本问题。这个重要的事实在本章末尾的许多习题中得到进一步描述。

4.11.2 级联和并联形式结构

在3.6节中, 对由微分方程表征的LTI系统的实现, 描述了几种实现方法。这些实现方法由三种基本网络元件: 加法器、系数乘法器和积分器互连组成, 并能直接用运算放大器实现。除了3.6节讨论的实现结构之外, 还有另外两种非常重要和使用广泛的结构, 现在我们借助傅里叶分析可以描述这两种结构。

对线性常系数微分方程表征的LTI系统, 考虑式(4.145)的频率响应。通过首先把分子、分母分解成一阶项的乘积:

$$H(\omega) = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (\lambda_k + j\omega)}{a_N \prod_{k=1}^N (\nu_k + j\omega)} \quad (4.153)$$

然后就能获得称为级联结构的形式。上式的 λ_k 和 ν_k 可以是复数; 然而如果是复数, 则它们以复共轭成对出现。通过把含有复共轭 λ_k 或 ν_k 的两个一阶项相乘, 我们得到具有实数系数的二阶项。例如,

$$(\lambda + j\omega)(\lambda^* + j\omega) = |\lambda|^2 + 2\text{Re}\{\lambda\}j\omega + (j\omega)^2$$

因此, 假设分子中有 P 个共轭对, 分母中有 Q 个共轭对, $H(\omega)$ 能写成具有实数系数的一阶

项和二阶项的多项式乘积之比^①：

$$H(\omega) = \frac{b_M \prod_{k=1}^P [\beta_{0k} + \beta_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2] \prod_{k=1}^{M-2P} (\lambda_k + j\omega)}{a_N \prod_{k=1}^Q [\alpha_{0k} + \alpha_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2] \prod_{k=1}^{N-2Q} (\nu_k + j\omega)} \quad (4.154)$$

式(4.154)说明，由线性常系数微分方程描述的任何LTI系统的频率响应，可写成一阶和二阶项的积。这就表明，这样的LTI系统能用一阶或二阶系统的级联实现。由于这个原因，一阶和二阶系统在线性系统的分析和综合中，起着极其重要的作用。在下一节，要详细讨论它们的性质。

下面描述级联结构的形式。为方便起见，考虑 N 是偶数， $M=N$ ，且把 $H(\omega)$ 表示成仅有二阶项的乘积：

$$H(\omega) = \frac{b_N}{a_N} \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2}{\alpha_{0k} + \alpha_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2} \quad (4.155)$$

这对应于把式(4.154)分子和分母中余下的一阶项成对相乘在一起。

有了式(4.155)形式的 $H(\omega)$ ，我们就能用 $N/2$ 个二阶系统的级联实现具有这种频率响应的LTI系统，每个二阶系统都能用下列微分方程的形式描述

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_{1k} \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_{0k} y(t) = \beta_{0k} x(t) + \beta_{1k} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (4.156)$$

在3.6节中，我们已看到怎样利用加法器、系数乘法器和积分器实现这种微分方程。在图4.37中，描绘了六阶系统的级联实现，对式(4.156)形式的每一个子系统，采用的是直接形式Ⅱ的实现方法(图3.36)。注意，对已给的 $H(\omega)$ ，级联的结构决不是唯一的。例如，在式(4.154)的相乘项中，二阶分子多项式和分母多项式是任意配成的，一阶项也是任意配成的。习题4.50和4.51包含的描述级联结构的例子，也指明了一个具有给定有理频率响应的LTI系统，其级联结构的选择具有灵活性。

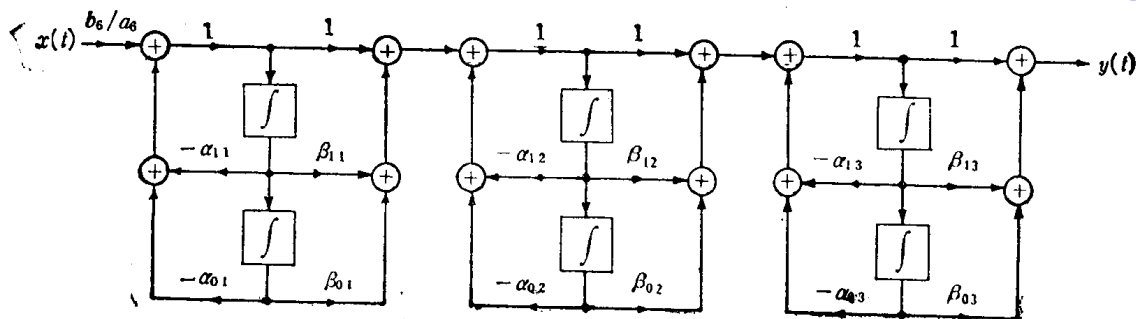


图4.37 各个二阶子系统用直接形式Ⅱ实现的级联结构

现在我们描述的第二种实现方法，是并联形式的结构，这种结构通过把式(4.145)，或等价地把式(4.153)中的 $H(\omega)$ 以部分分式展开来获得。为了简便起见，假设式(4.153)中的所有 ν_k 不相同，且 $M=N$ 。在这种情况下，部分分式展开得到

$$H(\omega) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\nu_k + j\omega} \quad (4.157)$$

又为了得到仅含有实系数的实现，可把包含复共轭 ν_k 的项成对地加在一起得

$$H(\omega) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^Q \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}(j\omega)}{\alpha_{0k} + \alpha_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2} + \sum_{l=1}^{N-2Q} \frac{A_l}{\nu_l + j\omega} \quad (4.158)$$

这样，利用式(4.158)，可用对应于式(4.158)中每一项频率响应的LTI系统的并联，来实

^①在式(4.154)中，我们已重编了余下实数 λ_k 和 ν_k 的号码，因此乘积分别变为由1至 $M-2P$ 和 $N-2Q$ 。

现具有频率响应 $H(\omega)$ 的 LTI 系统。为了描述并联结构, 考虑 N 是偶数, 且 $H(\omega)$ 表示成只含二阶项之和的情况:

$$H(\omega) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^{N/2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}(j\omega)}{\alpha_{0k} + \alpha_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2} \quad (4.159)$$

这相当于把式(4.158)中余下的一阶项成对地加在一起。图4.38描述了六阶系统并联形式的实现方法, 在这个系统中, 对式(4.159)中的每一项, 用了图3.36的直接形式 II 实现。并联结构的另一些例子, 在习题4.50和4.51中考虑。

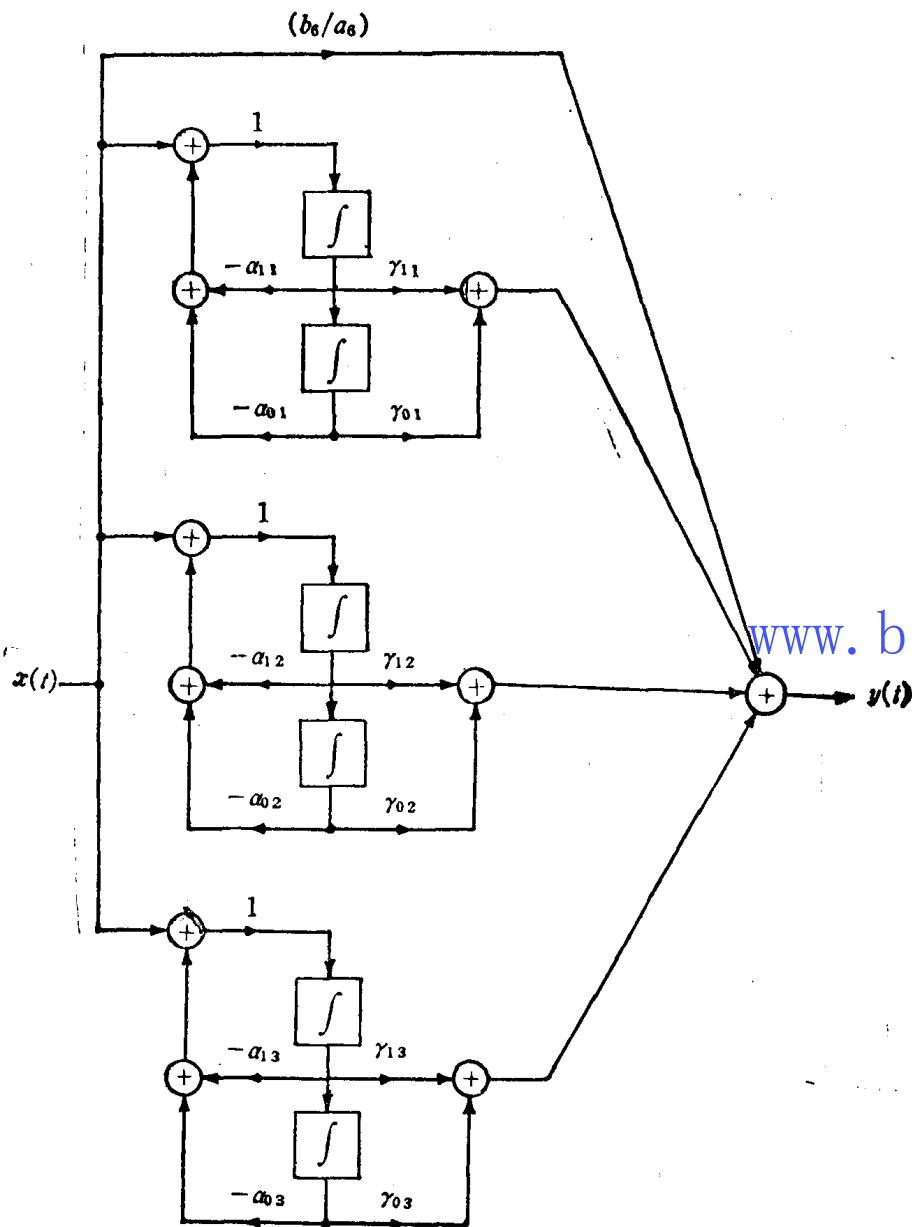


图4.38 各个二阶子系统用直接形式 II 实现的并联型结构

从本节和3.6节的讨论可见, 对由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统的实现, 存在许多可供选择的的可能结构。这些结构在理论上提供了同一给定的频率响应的实现。从这个意义上说, 所有这些结构都是等价的。但有一个不可避免的事实, 即在实际实现中, 对应不同结构, 其运行性能是不一样的。例如, 在任何实际系统中, 不可能使结构中的系数具有所需的精确数值, 即这些系数实际上在整个时间内, 例如由于温度变化, 可能有漂移。这就引起一个实

现对参数变化的敏感性问题,不同的结构一般有不同的灵敏度。虽然本书中将不讨论这个课题,但是我们研究的分析方法,对灵敏度和有关问题的考察提供了基础,这些问题在LTI系统实现的结构选择中是很重要的^①。

在本节中,我们看到,傅里叶变换的性质极大地便利了由线性常系数微分方程表征的LTI系统的分析。实际上,这些性质把许多必需的计算化为简单的代数计算。然而,要特别注意,不是所有由线性常系数微分方程描述的LTI系统都有频率响应。例如,如果考虑例4.25中 $a < 0$ 的情况,则由式(4.146)和初始静止假设所规定的系统,其冲激响应仍然是 $e^{-a}u(t)$ 。但在这情况中, $h(t)$ 不是绝对可积,而且 $H(\omega)$ 不存在。于是,式(4.147)的频率响应表达式,或更一般地,式(4.145)的频率响应表达式,只有当系统有频率响应时(即当它的冲激响应是绝对可积,或等价地当系统是稳定时),才能得出LTI系统的频率响应。因此,无论何时对由微分方程描述的LTI系统考虑使用傅里叶分析方法时,无疑将假设系统有频率响应。当然,这是可以通过计算冲激响应看其是否绝对可积来检查的。在第9章中,我们将研究非常类似这里描述过的方法,它既能用于稳定系统,也能用于不稳定系统。

4.12 一阶和二阶系统

我们在前一节看到,一阶和二阶系统代表基本的结构单元。由这些基本的结构单元,能构成具有较高阶频率响应系统的并联或级联的实现。本节较详细地研究这些基本系统的性质。

4.12.1 一阶系统

一阶系统的微分方程通常表达为以下形式:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (4.160)$$

式中 τ 是系数,其重要性即将说明。一阶系统对应的频率响应是

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \quad (4.161)$$

冲激响应是

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (4.162)$$

这如图4.39(a)所示。此外,系统的阶跃响应由下式给出:

$$s(t) = h(t) * u(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t) \quad (4.163)$$

这如图4.39(b)所示。参数 τ 称为系统的时间常数,它控制一阶系统响应的速率。例如,像图4.39描绘的,在 $t = \tau$ 时,冲激响应为 $t = 0$ 时值的 $1/e$ 倍,阶跃响应为离终值的 $1/e$ 。因此,当 τ 减少时,冲激响应衰减更迅速,阶跃响应上升时间变得更短,即阶跃响应趋向其终值上升得更快。

图4.40画出了式(4.161)频率响应的波特图。这里我们使用 ω 的对数坐标,画出作为 ω 函数 $H(\omega)$ 的对数幅度和角度。此图中说明了利用对数频率坐标的另一个优点,即我们能

^①我们希望感兴趣的读者去查看S.J. Mason和H.J. Zimmermann的Electronic Circuits, Signals, and Systems (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1960)中对敏感性课题的简单一般介绍,并查看A.V. Oppenheim和R.W. Schaffer的Digital Signal Processing (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975)中对敏感性和实现的结构选择中出现的若干其他问题的讨论。虽然Digital Signal Processing的论述集中在离散时间系统,但书里介绍和讨论的一般概念也与连续时间系统的实现有关。

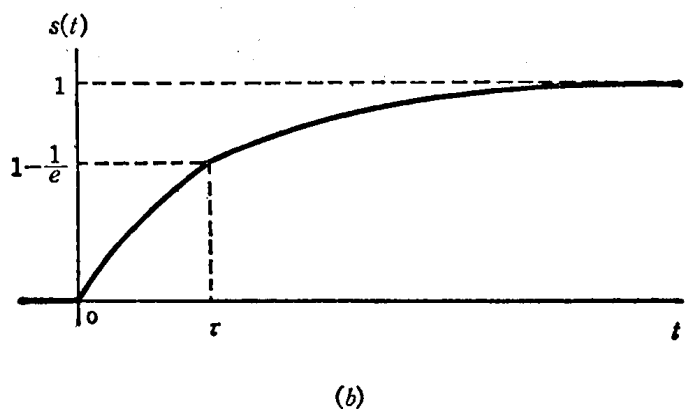
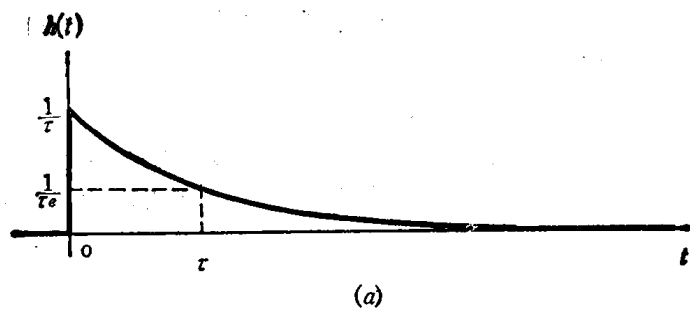


图4.39 (a)一阶系统的冲激响应；(b)一阶系统的阶跃响应

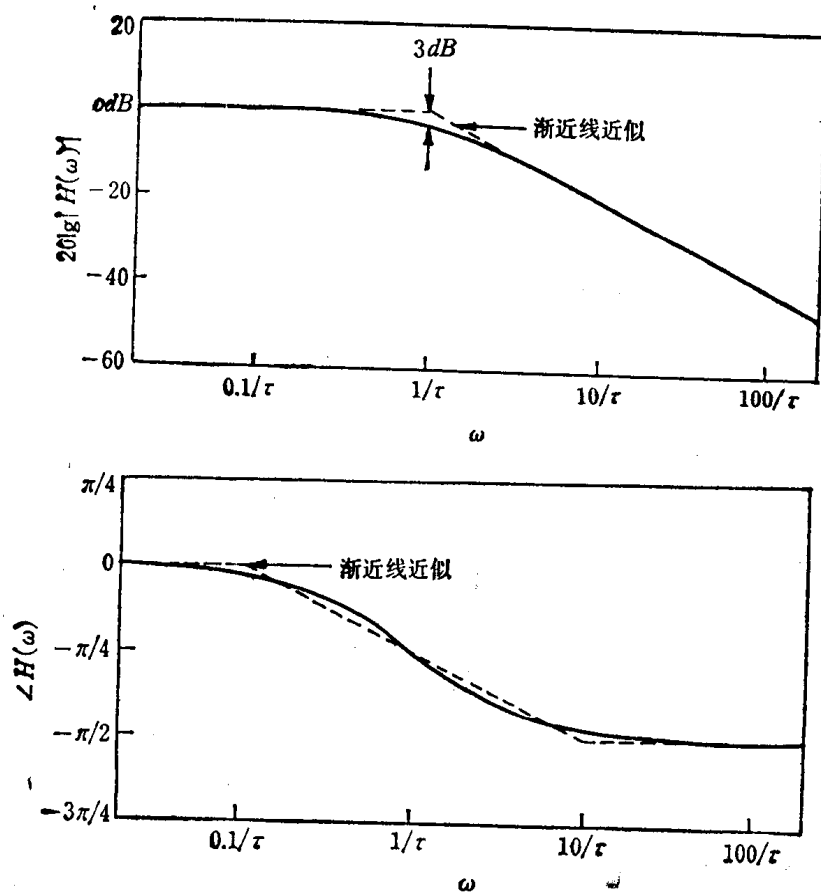


图4.40 一阶系统的波特图

较容易地获得实用的一阶系统近似波特图。为了弄清这一点，首先研究频率响应的对数幅度图。明确说，由式(4.161)得

$$20\lg|H(\omega)| = -10\lg[(\omega\tau)^2 + 1] \quad (4.164)$$

从此式可看到，对 $\omega\tau \ll 1$ ，对数幅度近似为零，而对 $\omega\tau \gg 1$ ，对数幅度近似为 $\lg \omega$ 的线性函数。即，

$$20\lg|H(\omega)| \simeq 0, \text{ 对 } \omega \ll 1/\tau \quad (4.165a)$$

$$20\lg|H(\omega)| \simeq -20\lg(\omega\tau) \\ = -20\lg\omega - 20\lg\tau, \text{ 对 } \omega \gg 1/\tau \quad (4.165b)$$

换句话说，对一阶系统，对数幅度的低频和高频渐近线是直线。低频渐近线[由式(4.165a)给出]就是 $0dB$ 线，而高频渐近线[由式(4.165b)规定]对应每10倍(即 ω 变化10倍) $|H(\omega)|$ 衰减 $20dB$ 。这有时称为“每10倍频 $20dB$ ”渐近线。

注意，式(4.165)中给出的两条渐近线，其近似值在点 $\lg \omega = -\lg \tau$ 处，即等价地在 $\omega = 1/\tau$ 处相等。用图形表示，指的是两条直线渐近线在 $\omega = 1/\tau$ 处相交。这提出了对数幅度曲线的直线近似，即在 $\omega \leq 1/\tau$ 时， $20\lg|H(\omega)|$ 的近似值为 0；在 $\omega \geq 1/\tau$ 时，由式(4.165b)给出。这种近似也在图4.40中作出(如虚线)，近似线斜率变化点正好是在 $\omega = 1/\tau$ 处。由于这个原因，这点常称为转折频率。还要注意，在 $\omega = 1/\tau$ 处，式(4.164)中对数里的两项 $(\omega\tau)^2$ 和 1 相等。这样，在这点幅度的实际值是

$$20\lg\left|H\left(\frac{1}{\tau}\right)\right| = -10\lg 2 \approx -3dB \quad (4.166)$$

因此，点 $\omega = 1/\tau$ 有时称为 $3dB$ 点。由图4.40看到，在直线近似波特图中，只有在转折频率附近才存在明显的误差。因此，如果要作更准确的波特图，只需修改转折频率附近的近似值。

对 $\angle H(\omega)$ 也能获得有用的直线近似。具体地：

$$\angle H(\omega) = \text{tg}^{-1}(-\omega\tau) \simeq \begin{cases} 0, & \omega \leq \frac{0.1}{\tau} \\ -\frac{\pi}{4}[\lg(\omega\tau) + 1], & \frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau} \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \geq \frac{10}{\tau} \end{cases} \quad (4.167)$$

注意，这个近似值作为 ω 的函数，在下列的范围中线性下降(由 0 到 $-\pi/2$)，

$$\frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau}$$

同样地，在 $\omega \ll 1/\tau$ 时， $\angle H(\omega)$ 的正确渐近值是零，而在 $\omega \gg 1/\tau$ 时， $\angle H(\omega)$ 的正确渐近值是 $-\frac{\pi}{2}$ ；而且，在转折频率 $\omega = 1/\tau$ 处， $\angle H(\omega)$ 的近似值与实际值是一致的。在这一点

$$\angle H\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (4.168)$$

这个渐近近似线也在图4.40中作出。由图可见，如果需要，我们可怎样修正直线近似，以得到更准确的 $\angle H(\omega)$ 图。

由这个一阶系统，我们又能看到时间和频率之间的倒数关系。当使 τ 较小时，就加速了系统的时间响应[即 $h(t)$ 更加朝原点压缩]。同时转折频率变大[即因为在较宽的频率范围上， $|H(\omega)| \approx 1$ ，所以 $H(\omega)$ 变得更宽]。这也可通过把冲激响应与 τ 相乘，并观察

$\tau h(t)$ 和 $H(\omega)$ 之间的关系看出

$$\tau h(t) = e^{-t/\tau} u(t), \quad H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

这样, $\tau h(t)$ 是 t/τ 的函数, $H(\omega)$ 是 $\omega\tau$ 的函数。由此可见, 改变 τ 实际上与时间和频率比例尺的改变是等价的。

4.12.2 二阶系统

二阶系统的线性常系数微分方程是

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad (4.169)$$

这种类型的方程出现在许多物理系统中, 包括 RLC 线路和机械系统。例如图 4.41 所描绘的系统, 由弹簧、质量块和阻尼器或缓冲器组成。输入是施加的力 $x(t)$, 输出是质量块离开弹簧平衡位置 (在这个位置弹簧不存在恢复力) 的位移 $y(t)$ 。这个系统的运动方程是

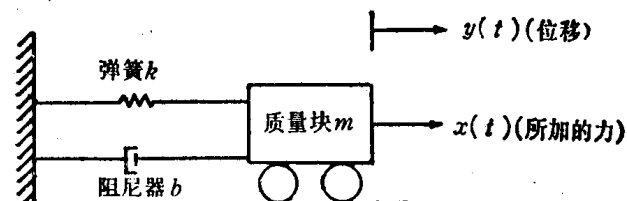


图 4.41 由系在可移质量块和固定支撑物上的弹簧和阻尼器组成的二阶系统

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - k y(t) - b \frac{dy(t)}{dt}$$

或

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dy(t)}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right) y(t) = \frac{1}{m} x(t)$$

上式与式(4.169)比较, 我们看到, 如果规定

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (4.170)$$

则 [除了 $x(t)$ 的比例系数 k] 图 4.41 系统的运动方程化为式(4.169)。

式(4.169)二阶系统的频率响应是

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (4.171)$$

把 $H(\omega)$ 的分母因式分解, 得

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

式中

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4.172)$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

在 $\zeta \neq 1$ 时, c_1 和 c_2 是不同的。我们可用部分分式展开得到

$$H(\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2} \quad (4.173)$$

这里

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (4.174)$$

在这种情况下，可立即得到这个系统的冲激响应为

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \quad (4.175)$$

如果 $\zeta = 1$ ，则 $c_1 = c_2 = -\omega_n$ ，且

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2} \quad (4.176)$$

由表4.1可求出，这种情况的冲激响应是

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \quad (4.177)$$

注意，由式(4.172)、(4.174)、(4.175)和(4.177)，可以看到， $h(t)/\omega_n$ 是 $\omega_n t$ 的函数。此外，式(4.171)可重写为

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

由此式可见，频率响应是 ω/ω_n 的函数。这样， ω_n 的变化本质上与时间和频率的比例尺改变是一致的。

参数 ζ 称为阻尼系数，参数 ω_n 称为无阻尼自然频率。当我们较详细地研究二阶系统的冲激响应和阶跃响应时，这个术语的含义变得更清楚。首先，由式(4.172)可看到，对 $0 < \zeta < 1$ ， c_1 和 c_2 是复数，式(4.175)的冲激响应可重写为以下形式

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\omega_n e^{-\zeta \omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \{ \exp[j(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t] - \exp[-j(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t] \} u(t) \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)] u(t) \end{aligned} \quad (4.178)$$

于是，在 $0 < \zeta < 1$ 时，二阶系统有阻尼振荡性质的冲激响应，在这种情况下时，系统称为欠阻尼。如果 $\zeta > 1$ ， c_1 和 c_2 都是实数，冲激响应是两个衰减指数之差，在这种情况下，系统称为过阻尼。当 $c_1 = c_2$ ， $\zeta = 1$ 时，称为临界阻尼。具有不同 ζ 值的二阶系统的冲激响应（乘以 $1/\omega_n$ ）与 t 的关系，如图4.42(a)所示。

在 $\zeta \neq 1$ 时，二阶系统的阶跃响应可由式(4.175)计算，得出表达式

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left\{ 1 + M \left[\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2} \right] \right\} u(t) \quad (4.179)$$

对 $\zeta = 1$ ，可用式(4.177)获得

$$s(t) = [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}] u(t) \quad (4.180)$$

二阶系统对不同 ζ 值的阶跃响应与 t 的关系，如图4.42(b)所示。由此图看到，在欠阻尼的情况下，阶跃响应显示了过冲（即阶跃响应超过它的终值）和减幅振荡（即振荡状态）。对 $\zeta = 1$ ，阶跃响应具有最快的响应（即最短的上升时间），且可能没有过冲。如 ζ 增加超过1，响应变得较慢，这可由式(4.172)和(4.179)看出。随着 ζ 增加， c_1 的数值变得较小，而 c_2 的数值增加。因此，虽然 $e^{c_2 t}$ 的时间常数 $1/|c_2|$ 减小，但 $e^{c_1 t}$ 的时间常数 $1/|c_1|$ 增加。正是这个原因，导致了大的 ζ 值有慢的响应。以弹簧阻尼器为例，当增加阻尼系数 b 的数值

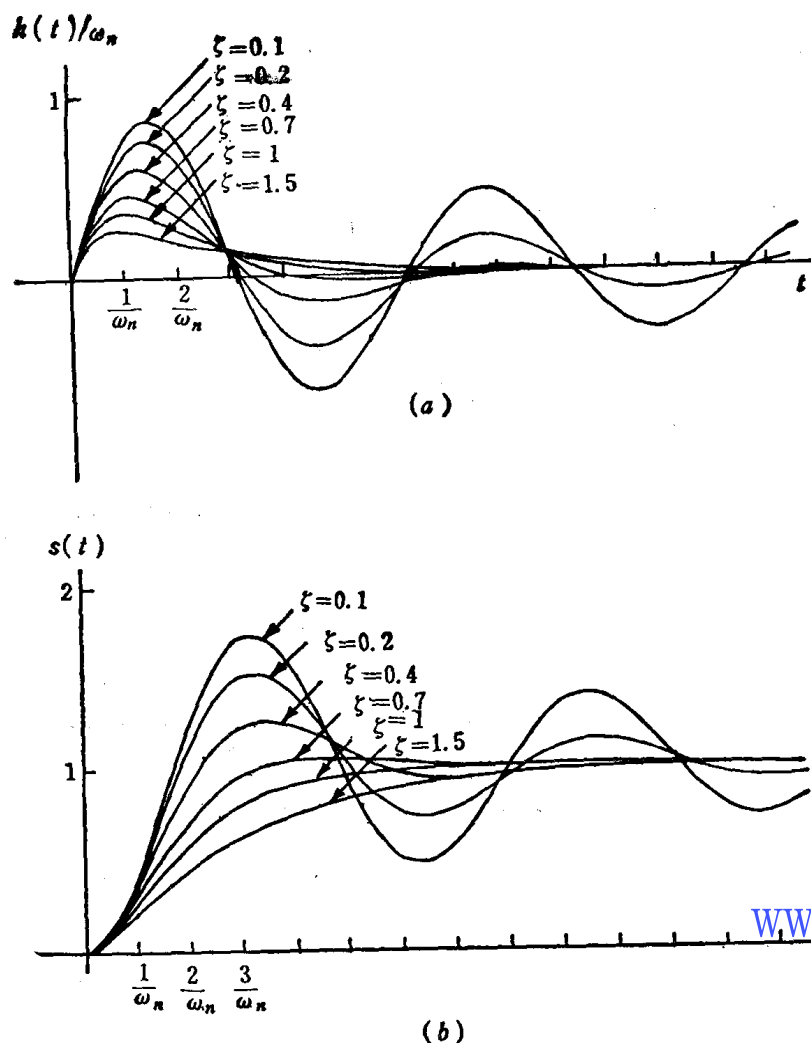


图4.42 具有不同阻尼系数 ζ 值的二阶系统: (a) 冲激响应, (b) 阶跃响应

超过式(4.170)中 ζ 等于1的临界值时,质量块的运动变得越来越缓慢。最后应注意,正如我们说过的, ω_n 的值实际上控制响应 $h(t)$ 和 $s(t)$ 的时间比例尺度。例如,在欠阻尼情况下, ω_n 越大,作为 t 的函数的冲激响应越压缩,而且在 $h(t)$ 和 $s(t)$ 中振荡的频率越高。事实上,由式(4.178)可见, $h(t)$ 和 $s(t)$ 振荡的频率是 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$, 它的确随 ω_n 的增加而增加。然而注意,这个频率显然依赖于阻尼系数,除了在 $\zeta=0$ 的无阻尼情况外,它不等于(事实上小于) ω_n 。因此,对弹簧阻尼器的例子,我们得出结论:当没有阻尼器存在时,质量块振荡的速率等于 ω_n ; 当包括阻尼器时,振荡频率减小。

在图4.43中,对于几个 ζ 值画出了式(4.171)给出的频率响应的波特图。在这里,我们利用对数频率刻度,画出了作为 ω 的函数 $20\lg|H(\omega)|$ 和 $\angle H(\omega)$ 。类似一阶的情况,对数频率刻度导致了对数幅度的线性高频渐近线和线性低频渐近线。明确地说,由式(4.171)有

$$20\lg|H(\omega)| = -10\lg\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\} \quad (4.181)$$

由这个表达式可推出,

$$20\lg|H(\omega)| \simeq 0, \text{ 对 } \omega \ll \omega_n \quad (4.182a)$$

$$20\lg|H(\omega)| \simeq -40\lg \frac{\omega}{\omega_n}$$

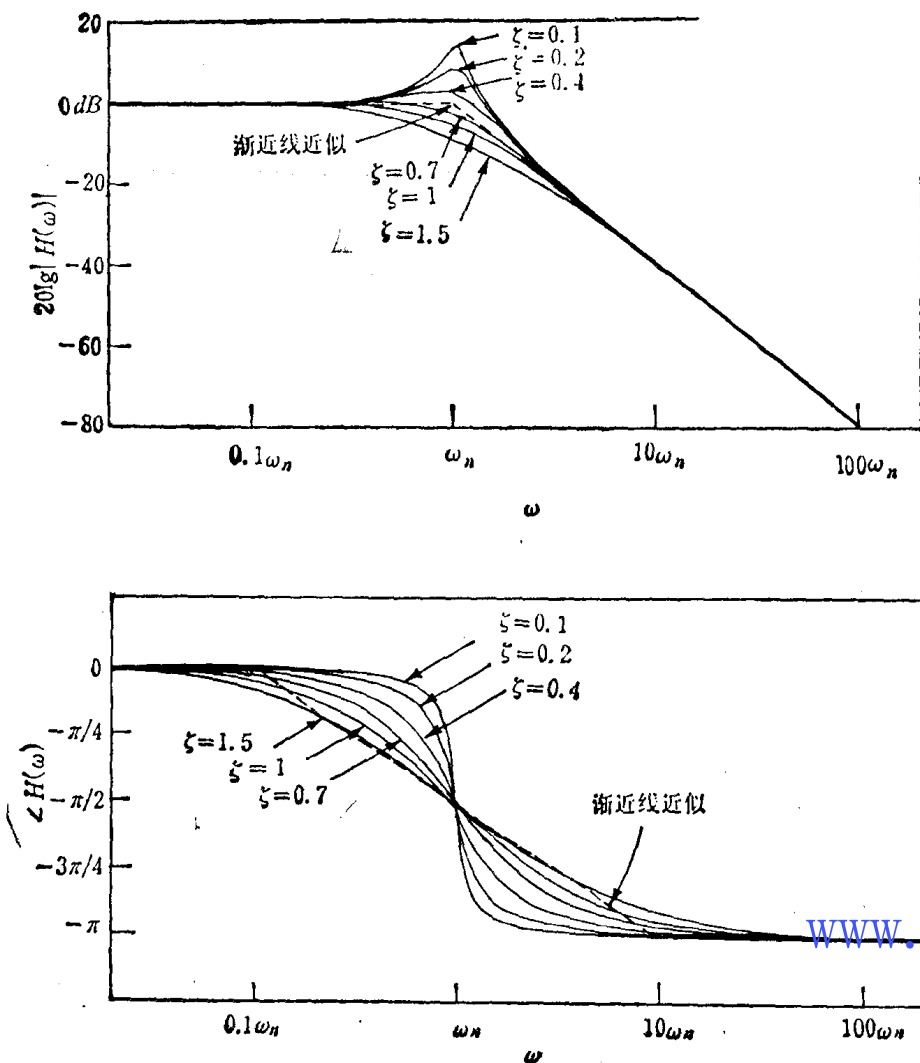


图4.43 具有几个不同阻尼系数 ζ 值的二阶系统的波特图

$$= -40\lg \omega + 40\lg \omega_n,$$

对 $\omega \gg \omega_n$

(4.182b)

因此，对数幅度的低频渐近线是 0dB 线，而高频渐近线(由式 4.182 b 给出)有每 10 倍频 -40 dB 的斜率。即 ω 每增加 10 倍， $|H(\omega)|$ 衰减 40 dB。还要注意，两条渐近线在 $\omega = \omega_n$ 点相交。这样，对 $\omega \leq \omega_n$ ，利用式 (4.182 a) 给出的近似；对 $\omega \geq \omega_n$ ，利用式 (4.182 b) 的直线，我们能获得对数幅度的直线近似。由于这个原因， ω_n 称为二阶系统的转折频率，这个近似也画在图 4.43 中(作为虚线)。

对 $\angle H(\omega)$ 我们也能获得直线近似，它的准确表达式可由式 (4.171) 获得，为

$$\angle H(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right) \quad (4.183)$$

对 $\angle H(\omega)$ 的近似是

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \leq 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2} \left[\lg \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right] & 0.1\omega_n \leq \omega \leq 10\omega_n \\ -\pi & \omega \geq 10\omega_n \end{cases} \quad (4.184)$$

它也画在图4.43中。注意，在转折频率 $\omega = \omega_n$ 处，近似的值和实际的值也相等。这里

$$\angle H(\omega_n) = -\frac{\pi}{2}$$

重要的是，观察到对二阶系统获得的渐近近似不取决于 ξ ，而 $|H(\omega)|$ 和 $\angle H(\omega)$ 的实际曲线却依赖于 ξ 。这样，要获得准确的曲线，尤其是在转折频率 $\omega = \omega_n$ 附近，必须考虑这一差异。可通过修改近似值，使其更接近实际曲线。这种差异对小的 ξ 值最明显。特别是注意到对于这种情况，实际的对数幅度在 $\omega = \omega_n$ 附近有峰。事实上，利用式(4.181)简单的计算，可证明对 $\xi < \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ ， $|H(\omega)|$ 在

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (4.185)$$

处有最大值。这个值是

$$|H(\omega_{max})| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.186)$$

然而，对 $\xi > 0.707$ ，当 ω 从零增加时， $H(\omega)$ 单调减小。 $H(\omega)$ 可能有峰，在设计 RLC 线路时是极其重要的。在某些应用中，人们也许要设计这样一种线路，它在某个给定的频率上频率响应的幅度有一个尖锐的峰，从而对在窄带频率范围内的正弦信号能提供较大的放大倍数。这种线路的品质因数 Q 被定义为峰尖锐度的度量标准。对于用式(4.169)形式的方程描述的二阶线路， Q 通常取作

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

www.blogoil.com

由图4.43和式(4.186)可见，此定义有这样特有的性质：系统的阻尼越小， $|H(\omega)|$ 的峰越尖锐。

在上节及在本节的开始，我们曾指出一阶和二阶系统可用来作为具有有理频率响应更复杂 LTI 系统的基本构成单元。它的一个推论是本节所给出的波特图，实际上提供了构成任意有理频率响应的波特图所需要的全部信息。特别是在本节中，我们已描述了由式(4.161)和(4.171)给出的频率响应波特图。同时，利用关系

$$20\lg|H(\omega)| = -20\lg \left| \frac{1}{H(\omega)} \right|$$

和

$$\angle[H(\omega)] = -\angle\left(\frac{1}{H(\omega)}\right)$$

由图4.40和4.43，易获得以下两式

$$H(\omega) = 1 + j\omega\tau$$

和

$$H(\omega) = 1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$

的波特图。此外，因为有理频率响应可分解为一阶项和二阶项的乘积，其波特图可通过把每一项的图形相加获得。例如，考虑

$$H(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}$$

$H(\omega)$ 的两个一阶因子的波特图如图 4.44(a)、(b) 所示, 而 $H(\omega)$ 的波特图画在图 4.44(c) 中。这里 $H(\omega)$ 的波特图和渐近近似都是通过两个一阶因子的对应曲线相加而获得的。以这种方式构成波特图的其他例子, 在习题 4.45 中考虑。

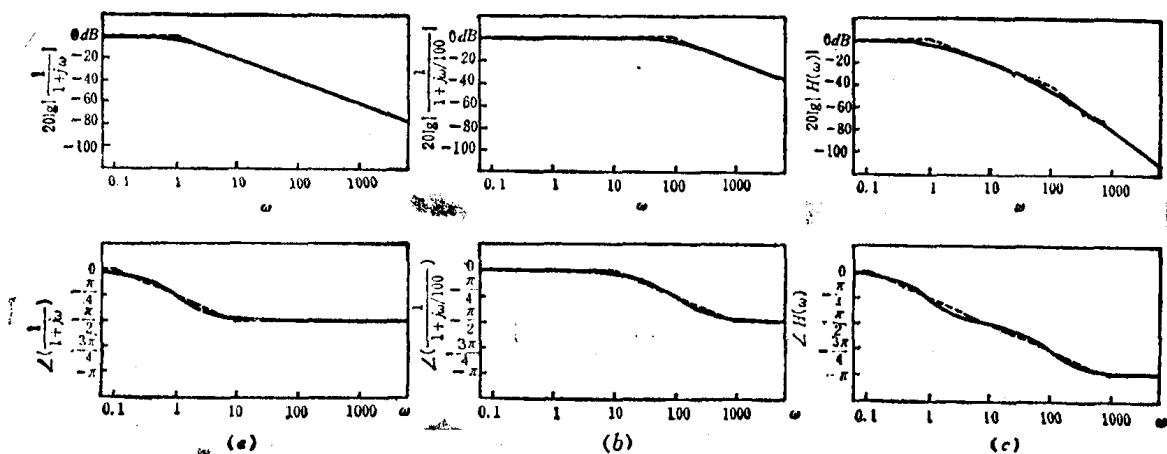


图 4.44 由一阶因子的频率响应波特图构成较高阶频率响应的波特图: (a) $1/(1+j\omega)$ 的波特图; (b) $1/(1+j\omega/100)$ 的波特图; (c) $H(\omega) = 1/((1+j\omega)(1+j\omega/100))$ 的波特图

最后, 注意在一阶系统的讨论中, 我们局限于 $\tau > 0$ 的取值, 对二阶系统, 只分析了 $\xi > 0$ 和 $\omega_n^2 > 0$ 的情况。检查这些参数是否负值并不困难, 这时对应的冲激响应不绝对可积。在本节中, 我们局限于注意稳定的一阶和二阶系统, 而它们的频率响应是定义的。

4.13 小 结

在本章, 我们阐述了连续时间信号与系统的傅里叶分析方法。如 4.1 和 4.2 节所讨论的, 使用傅里叶分析的主要原因之一是, 复指数信号是连续时间 LTI 系统的特征函数, 即如果输入 LTI 系统的是一个复指数, 则输出是同样的复指数, 只是用复常数改变了比例尺。复指数另一个重要的性质, 是大量的信号可表达为这些基本信号的加权和或加权积分。在本章中, 我们把注意力集中在周期复指数集上, 利用这些信号, 讨论了周期信号的傅里叶级数表示式和非周期信号的傅里叶变换表达式, 并详细地描述了这些表达式之间的关系。

傅里叶变换具有许多重要的性质, 这些性质描述了信号不同的特性怎样反映在它们的变换中, 其中有两个性质在信号与系统的研究中特别重要。第一个是卷积性质, 它导致了用频率响应来描述 LTI 系统。这种描述在 LTI 系统分析的频域法研究中起着主要作用。这些 LTI 系统, 在其他章节中要以更多的篇幅研究。具有极其重要含义的傅里叶变换的第二个性是调制性质, 它为在第 7、8 章要进一步研究的调制和抽样系统的频域分析打下了基础。

最后, 在本章中我们已经看到, 傅里叶分析法特别适合研究由线性常系数微分方程表征的 LTI 系统。特别是我们发现, 这种系统的频率响应可通过观察确定, 并且部分分式展开法能用来简化系统冲激响应的计算。由微分方程确定的 LTI 系统的频率响应形式, 也直接引导我们为实现这种 LTI 系统导出级联和并联结构。这些结构表明一阶和二阶系统所起的重要作用。我们以一定的篇幅讨论了这些基本系统的性质, 在此过程中, 为了显示 LTI 系统频率

响应的幅度和相位，利用了方便的图解表示法——波特图。

本章的目的是介绍和研究使用傅里叶分析方法的一些方便之处，评价在分析和理解连续时间信号与系统性质中频域的作用。第5章对离散时间导出一组类似的方法。在第6到第8章，将使用连续时间和离散时间傅里叶分析法研究滤波、调制和抽样的课题。

习 题

4.1. 试求以下信号的傅里叶级数表达式：

(a) e^{j200t} ;

(b) $\cos \frac{\pi(t-1)}{4}$;

(c) $\cos 4t + \sin 8t$;

(d) $\cos 4t + \sin 6t$;

(e) $x(t)$ 是周期为 2 的周期信号，而且

$$x(t) = e^{-t}, \quad -1 < t < 1]$$

(f) $x(t)$ 如图 P4.1(a) 所示;

(g) $x(t) = [1 + \cos 2\pi t] \left[\cos \left(10\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \right]$;

(h) $x(t)$ 是周期为 2 的周期信号，而且

$$x(t) = \begin{cases} (1-t) + \sin 2\pi t, & 0 < t < 1, \\ 1 + \sin 2\pi t, & 1 < t < 2, \end{cases}$$

(i) $x(t)$ 如图 P4.1(b) 所示;

(j) $x(t)$ 如图 P4.1(c) 所示;

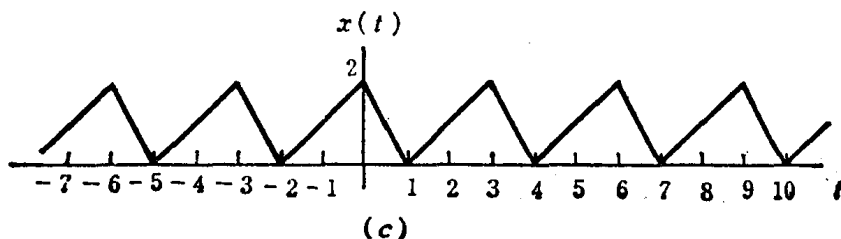
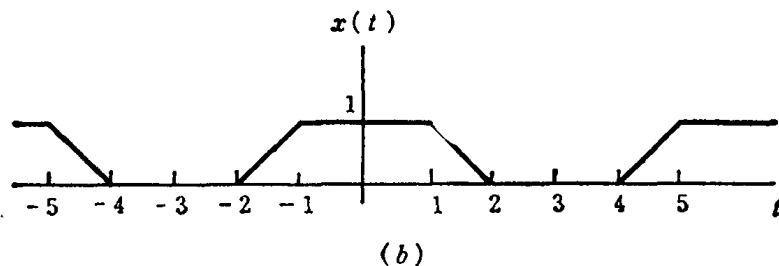
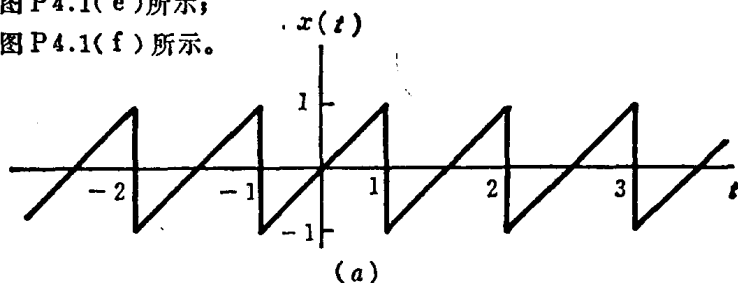
(k) $x(t)$ 如图 P4.1(d) 所示;

(l) $x(t)$ 是周期为 4 的周期信号，而且

$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & 2 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

(m) $x(t)$ 如图 P4.1(e) 所示;

(n) $x(t)$ 如图 P4.1(f) 所示。



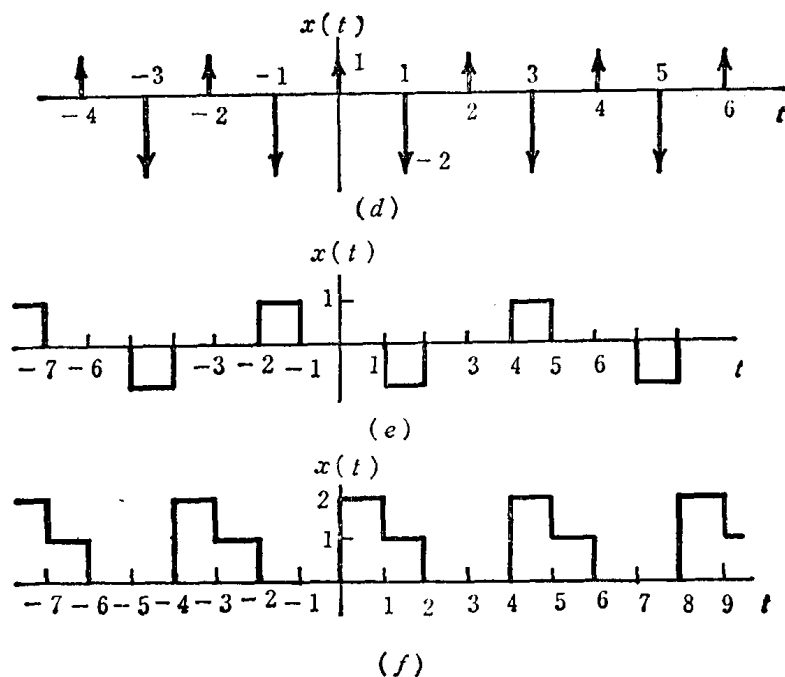


图 P4.1

4.2. 建立直流电源的方法之一,是把交流信号全波整流。即,使交流信号 $x(t)$ 通过一个系统,此系统的输出为 $y(t)=|x(t)|$ 。

(a) 如果 $x(t)=\cos t$, 试画出输入和输出波形。输入和输出的基本周期是什么?

(b) 如果 $x(t)=\cos t$, 试求输出 $y(t)$ 的傅里叶级数的系数。

(c) 输入信号直流分量的幅度是什么? 输出信号直流分量的幅度是什么?

4.3. 如在本章中已看到的那样,特征函数的概念在 LTI 系统的研究中,是一种极其重要的手段。这对于线性时变系统来说也是正确的。具体说,考虑具有输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的这样一个系统,如果

$$\phi(t) \longrightarrow \lambda \phi(t),$$

就说信号 $\phi(t)$ 是系统的特征函数。即如果

$$x(t)=\phi(t), \text{ 则 } y(t)=\lambda \phi(t),$$

这里复常数 λ 称为关于 $\phi(t)$ 的特征值。

(a) 假设能把本系统的输入 $x(t)$ 表达为特征函数 $\phi_k(t)$ 的线性组合,其中每一个有对应的特征值 λ_k ,

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi_k(t),$$

试用 $\{c_k\}$, $\{\phi_k(t)\}$ 和 $\{\lambda_k\}$ 表达系统的输出 $y(t)$ 。

(b) 考虑由微分方程表征的系统

$$y(t)=t^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + t \frac{dx(t)}{dt},$$

此系统是线性的吗? 此系统是时不变的吗?

(c) 试证明函数集

$$\phi_k(t)=t^k$$

是(b)中系统的特征函数。对每个 $\phi_k(t)$, 试求对应的特征值 λ_k 。

(d) 如果

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi,$$

试求此系统的输出。

4.4. (a) 考虑具有以下冲激响应的 LTI 系统

$$h(t) = e^{-4t}u(t)$$

对以下的每一个输入, 求输出 $y(t)$ 的傅里叶级数表达式。

(i) $x(t) = \cos 2\pi t;$

(ii) $x(t) = \sin 4\pi t + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right);$

(iii) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n);$

(iv) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n);$

(v) $x(t)$ 是图 P 4.4 中描绘的周期矩形波。

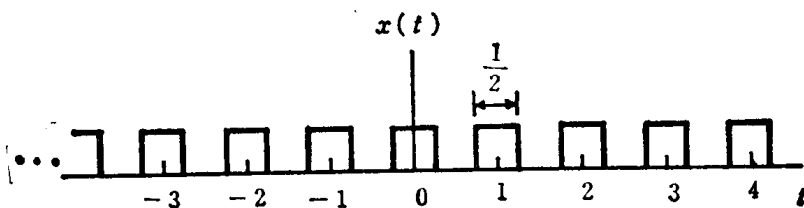


图 P 4.4

(b) 对下式重复(a),

$$h(t) = \begin{cases} \sin 2\pi t + \cos 4\pi t, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

(c) 对下式重复(a),

$$h(t) = e^{-4|t|}$$

4.5. 如我们已经看到的, 因为周期复指数是 LTI 系统的特征函数, 所以傅里叶分析的方法在研究连续时间 LTI 系统中很有价值。本题要证实以下的论述: 虽然某些 LTI 系统也许有另外的特征函数, 但复指数是每个 LTI 系统特征函数的唯一信号。

(a) 具有单位冲激响应 $h(t) = \delta(t)$ 的 LTI 系统的特征函数是什么? 有关的特征值是什么?

(b) 考虑具有单位冲激响应 $h(t) = \delta(t-T)$ 的 LTI 系统。求一个信号, 它不是 e^{st} 型而是具有特征值为 1 的特征函数。类似地, 求具有特征值为 1/2 和 2 的特征函数, 并且不是复指数。

提示: 可以找满足这些要求的冲激序列。

(c) 考虑一个稳定的 LTI 系统, 其冲激响应 $h(t)$ 是实偶函数。证明 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 是此系统的特征函数。

(d) 考虑具有冲激响应 $h(t) = u(t)$ 的 LTI 系统。设 $\phi(t)$ 是这个系统的特征函数, 并具有特征值 λ 。试求 $\phi(t)$ 必须满足的微分方程, 并解这个微分方程。此结果与上述几部分的结果一起, 应当能证明本题开始时所作论述的正确性。

4.6. 考虑信号

$$x(t) = \cos 2\pi t$$

因为 $x(t)$ 是基本周期为 1 的周期信号, 所以它也是周期为 N 的周期信号, 这里 N 是任意正整数。

如果我们把 $x(t)$ 看作是周期为 3 的周期信号, $x(t)$ 的傅里叶级数系数是什么?

4.7. 如果

$$\int_a^b u(t)v^*(t)dt = 0, \quad (\text{P4.7-1})$$

则可以说 $u(t)$ 和 $v(t)$ 两个时间函数在区间 (a, b) 上是正交的。

此外, 如果

$$\int_a^b |u(t)|^2 dt = 1 = \int_a^b |v(t)|^2 dt$$

则可以说两个函数被归一化, 因此称为归一化正交。如果在函数集 $\{\phi_k(t)\}$ 中每一对函数都是正交的 (归一化正交的), 则函数集 $\{\phi_k(t)\}$ 被称为正交 (归一化正交) 集。

(a) 考虑图 P 4.7 所示的信号对 $u(t)$ 和 $v(t)$ 。试求每一对在区间 $(0, 4)$ 上是否是正交的?

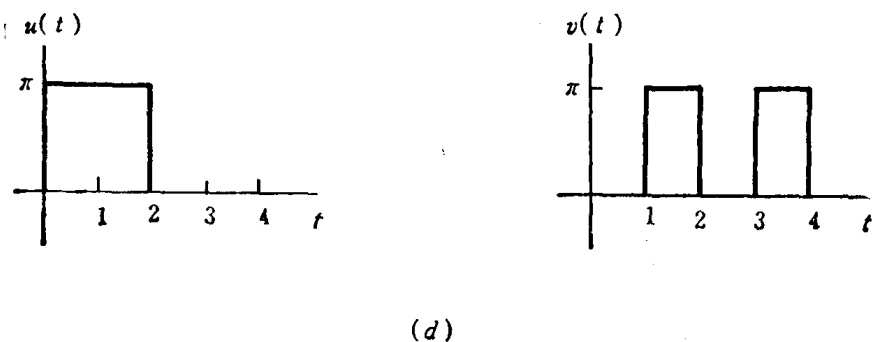
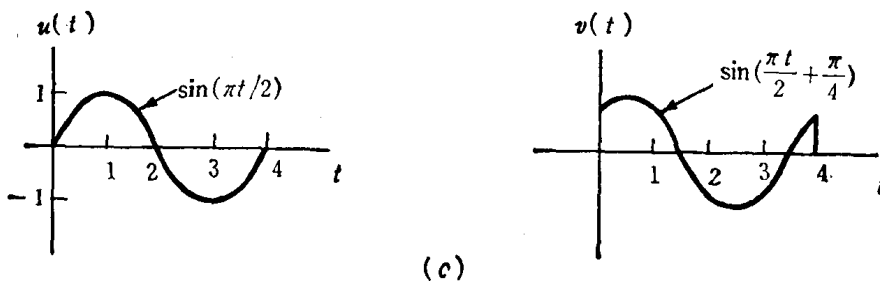
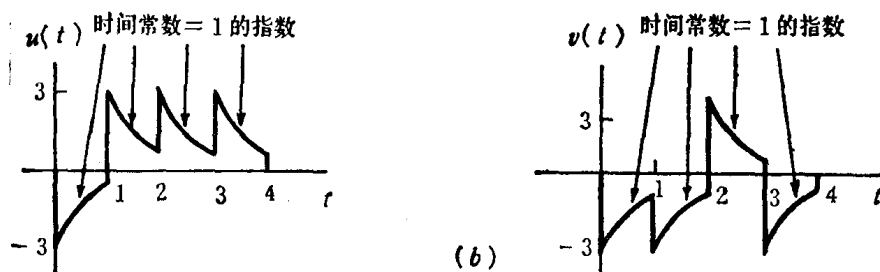
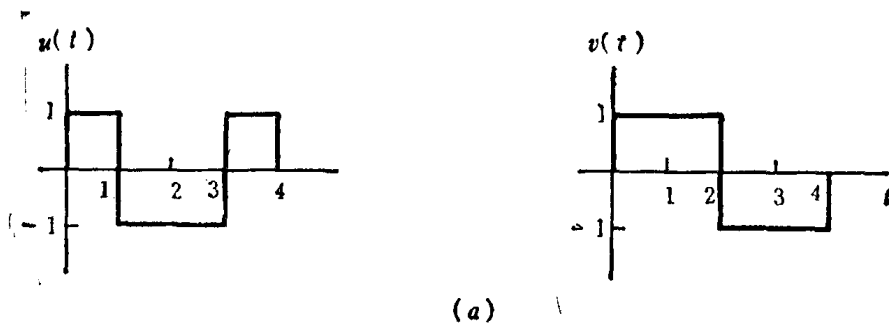


图 P 4.7

(b) 函数 $\sin m\omega_0 t$ 和 $\sin n\omega_0 t$ 在区间 $(0, T)$ 上 (这里 $T=2\pi/\omega_0$) 是正交的吗? 它们是归一化正交的吗?

(c) 对函数 $\phi_m(t)$ 和 $\phi_n(t)$ 重复(b)。这里

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} [\cos k\omega_0 t + \sin k\omega_0 t]$$

(d) 证明函数集 $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ 在长度 $T=2\pi/\omega_0$ 的任何区间上是正交的。它们也是归一化正交的吗?

(e) 设 $x(t)$ 为任意信号, 并设 $x_o(t)$ 和 $x_e(t)$ 分别是 $x(t)$ 的奇部和偶部。证明: 对任何 T , 在区间 $(-T, T)$ 上, $x_o(t)$ 和 $x_e(t)$ 是正交的。

(f) 证明: 如果 $\{\phi_k(t)\}$ 是区间 (a, b) 上的正交信号集, 则集 $\{(1/\sqrt{A_k})\phi_k(t)\}$ 是归一化正交的, 这里

$$A_k = \int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt$$

(g) 设 $\{\phi_i(t)\}$ 是在区间 (a, b) 上归一化正交的信号集, 考虑以下形式的信号:

$$x(t) = \sum_i a_i \phi_i(t)$$

这里 a_i 是复常数。证明:

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt = \sum_i |a_i|^2$$

(h) 设 $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ 只有在 $0 \leq t \leq T$ 的时间间隔上是非零的, 并且在这个时间间隔上, 它们是归一化正交的。设 L_i 表示具有以下冲激响应的 LTI 系统。

$$h_i(t) = \phi_i(T-t) \quad (\text{P4.7-2})$$

证明: 如果把 $\phi_j(t)$ 加到这个系统, 若 $i=j$, 则在时间 T 时输出为 1; 若 $i \neq j$, 则在时间 T 时输出为 0。具有式 (P4.7-2) 给出的冲激响应的系统, 在习题 3.27 和 3.28 中, 称为信号 $\phi_i(t)$ 的匹配滤波器。

4.8. 本题的目的是要证明: 用傅里叶级数或更一般地用任何正交函数集的线性组合来表达任意周期信号, 在计算上是有效的, 且实际上要获得对信号^①好的近似时很有用。

特别地, 设 $\{\phi_i(t)\}$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 是在区间 $a \leq t \leq b$ 上归一化正交的函数集, 设 $x(t)$ 是给定的信号。考虑在区间 $a \leq t \leq b$ 上, $x(t)$ 可近似表示为

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{i=-N}^{+N} a_i \phi_i(t) \quad (\text{P4.8-1})$$

这里 a_i 是常数 (一般是复数)。为了度量 $x(t)$ 和级数近似 $\hat{x}_N(t)$ 之间的偏差, 考虑由下式定义的误差

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t) \quad (\text{P4.8-2})$$

一种合理而广泛使用的度量近似精度准则是误差信号在感兴趣区间上的能量, 即, 在 $a \leq t \leq b$ 的区间上, 平方误差幅度的积分

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt \quad (\text{P4.8-3})$$

(a) 证明: 通过选择

$$a_i = \int_a^b x(t) \phi_i^*(t) dt \quad (\text{P4.8-4})$$

可使 E 为最小。

提示: 利用式 (P4.8-1)~(P4.8-3), 用 a_i 、 $\phi_i(t)$ 和 $x(t)$ 表达 E , 然后用直角坐标把 a_i 表达为 $a_i = b_i + jc_i$, 证明由式 (P4.8-4) 给出的 a_i 满足方程

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

^① 见习题 4.7 对正交和归一化正交函数的定义。

(b) 如果 $\{\phi_i(t)\}$ 是正交的但不是归一化正交的, 具有

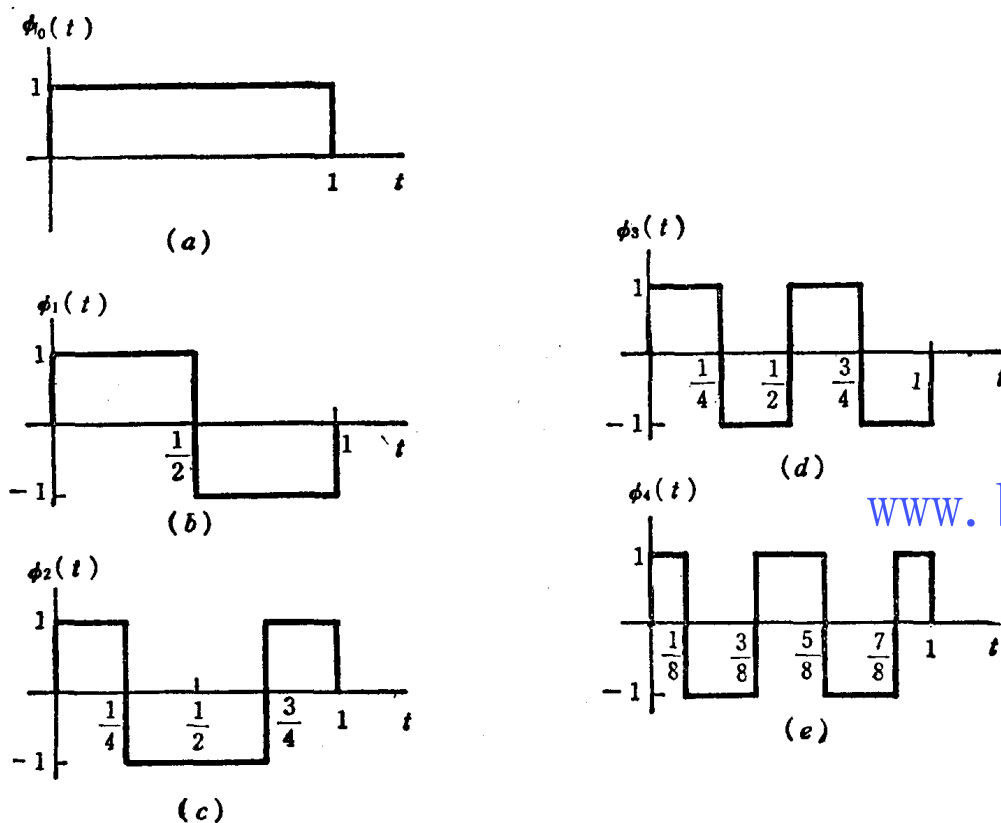
$$A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 dt$$

则(a)的结果会怎样变化?

(c) 设 $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, 并选择长度 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的任何区间。证明: 使E最小的 a_i 由式(4.45)给出。

(d) 沃尔什函数集是经常使用的归一化正交函数集(见习题3.27), 最初的五个沃尔什函数 $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, \dots , $\phi_4(t)$, 如图P4.8所示。这里已经标明了时间刻度, 以便在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上, ϕ_i 是非零的且是归一化正交的。设 $x(t) = \sin \pi t$, 求出 $x(t)$ 的近似表示为

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^4 a_i \phi_i(t)$$



图P4.8

使得

$$\int_0^1 |\hat{x}(t) - x(t)|^2 dt$$

为最小。

(e) 证明: 如果 a_i 像式(P4.8-4)那样选择, 则式(P4.8-1)中的 $\hat{x}_N(t)$ 和式(P4.8-2)中的 $e_N(t)$ 是正交的。

(a)和(b)的结果是极其重要的, 因为它证明了每个系数 a_i 与所有其他的 $a_j (i \neq j)$ 无关。这样, 如果把更多的项加到近似式上[即, 如果计算近似式 $\hat{x}_{N+1}(t)$], 前面求出的 $\phi_i(t)$, $i=1, \dots, N$ 的系数将不变。与此不同, 我们考虑另一种类型的级数展开, 即多项式泰勒级数。 e^t 的无穷泰勒级数由 $e^t = 1 + t + \dots + t^n/n! + \dots$ 给出。但正如将证明的, 当我们考虑有限项的多项式级数和式(P4.8-3)的误差准则时, 得到的是一个非常不同的结果。

特别地, 设 $\phi_0(t)=1$, $\phi_1(t)=t$, $\phi_2(t)=t^2$ 等等。

(f) 在 $0 \leq t \leq 1$ 区间上, $\phi_i(t)$ 是正交的吗?

(g) 考虑在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上, $x(t)=e^t$ 的近似表示为

$$\hat{x}_0(t)=a_0\phi_0(t)$$

求在区间上使误差信号能量最小的 a_0 值。

(h) 现在要用泰勒级数的两项 $\hat{x}_1(t)=a_0+a_1t$ 来近似 e^t 。求 a_0 和 a_1 的最佳值。

[提示: 用 a_0 和 a_1 计算 E , 然后解联立方程

$$\frac{\partial E}{\partial a_0}=0 \text{ 和 } \frac{\partial E}{\partial a_1}=0,$$

注意 a_0 的解答已不同于它在 (g) 中的值, 在 (g) 中级数只有一项。此外, 当增加级数的项数时, 系数及所有其他的量不断变化。因此我们可看到利用正交项在函数展开中所具的优点。]

4.9. 设 $x(t)$ 是周期信号, 具有基本周期 T_0 和傅里叶级数系数 a_n 。考虑以下每个信号。对每个信号傅里叶级数系数都能像表 4.2 那样用 a_n 表达。试证明: 表 4.2 的表达式对以下的每个信号都是正确的。

(a) $x(t-t_0)$;

(b) $x(-t)$;

(c) $x^*(t)$;

(d) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, (在本题设 $a_0=0$);

(e) $\frac{dx(t)}{dt}$;

(f) $x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (在本题要求出信号的周期)。

4.10. 正如我们在课本中讨论过的, 傅里叶分析的由来可在数学物理的一些问题中找到。特别是, 傅里叶的这一工作是通过研究热扩散得到启发的。本题描述傅里叶级数怎样进入这个研究。

考虑在地表面下给定深度处作为时间函数的温度确定问题。这里假设地表温度是给定的时间函数 $T(t)$, 周期为 1 (这里时间的单位是一年)。设 $T(x, t)$ 表示在时间 t 、地表下深度为 x 处的温度。这个函数服从热扩散方程

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (\text{P 4.10-1})$$

具有附加条件

$$T(0, t) = T(t), \quad (\text{P 4.10-2})$$

k 是地球的热扩散常数 ($k > 0$)。假设用傅里叶级数把 $T(t)$ 展开为

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn2\pi t} \quad (\text{P 4.10-3})$$

类似地, 假设用傅里叶级数在任何给定深度 x 处对 t 展开 $T(x, t)$ 为

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x) e^{jn2\pi t} \quad (\text{P 4.10-4})$$

这里傅里叶系数 $b_n(x)$ 取决于深度 x 。

(a) 利用式 (P 4.10-1) ~ (P 4.10-4) 证明: $b_n(x)$ 满足微分方程

$$\frac{d^2 b_n(x)}{dx^2} = -\frac{4\pi^2 n^2}{k^2} b_n(x) \quad (\text{P 4.10-5a})$$

具有辅助条件

$$b_n(0) = a_n \quad (\text{P 4.10-5b})$$

因为式 (P 4.10-5a) 是二阶方程, 所以需要第二个辅助条件。根据物理原理可论证: 在地表深处, 由于地表面起伏产生的温度变化将消失。即

① 此题选自 A. Sommerfeld, Partial Differential Equations in Physics (New York: Academic Press, 1949), pp. 68--71.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = \text{常数}$$

(P 4.10-5c)

(b) 证明: 式 (P 4.10-5) 的解是

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|} (1+j)x/k], & n \geq 0, \\ a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|} (1-j)x/k], & n \leq 0. \end{cases}$$

(c) 因而, 在深度 x 处, 温度的波动是地表面温度波动被阻尼与被相移了的形式。为了更清楚地说明这一点, 设

$$T(t) = a_0 + a_1 \sin 2\pi t$$

(a_0 代表年平均温度)。在一年的周期内, 对

$$x = k\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$a_0 = 2, a_1 = 1$, 画出 $T(t)$ 和 $T(x, t)$ 的简图。注意在这个深度, 不仅温度波动明显地被阻尼, 而且由于相移, 以致冬天最暖而夏天最冷。这就正确解释了建造菜窖的原因。

4.11. 考虑如图 P 4.11 所示的闭合围线。正如已描述过的, 可把此曲线看作是由变长度旋转矢量的顶部描出。设 $r(\theta)$ 表示矢量长度, 它是角度 θ 的函数, 则 $r(\theta)$ 是关于 θ 的周期信号, 周期为 2π , 因此有傅里叶级数表达式。设 $\{a_k\}$ 表示 $r(\theta)$ 的傅里叶系数。

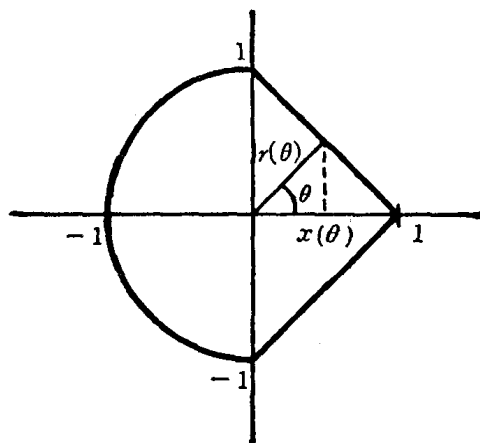


图 P 4.11

(a) 现考虑矢量 $r(\theta)$ 在 x 轴上的投影 $x(\theta)$ (如图所示)。试用 a_k 表示 $x(\theta)$ 的傅里叶系数。

(b) 考虑系数序列

$$b_k = a_k e^{jk\pi/4}$$

在平面上画出对应此系数序列的图。

(c) 如果

$$b_k = a_k \delta[k]$$

重复(b)。

(d) 在平面上作图, 使得 $r(\theta)$ 不是常数, 但具有以下性质之一:

- (i) $r(\theta)$ 是偶函数;
- (ii) $r(\theta)$ 的基本周期是 π ;
- (iii) $r(\theta)$ 的基本周期是 $\pi/2$ 。

4.12. (a) 如果具有周期 T 的连续时间周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数表达式为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}, \quad (\text{P 4.12-1})$$

对每个偶整数 $k, a_k = 0$, 则称 $x(t)$ 是奇谐波函数。

(i) 证明: 如果 $x(t)$ 是奇谐波函数, 则

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (\text{P4.12-2})$$

(ii) 证明: 如果 $x(t)$ 满足方程 (P4.12-2), 则它是奇谐波函数。

(b) 假设 $x(t)$ 是周期为 2 的奇谐波周期信号

$$x(t) = t, \quad 0 < t < 1,$$

画出 $x(t)$ 并求出它的傅里叶级数系数。

(c) 类似地, 可定义偶谐波函数为: 在式 (P4.12-1) 中对奇整数 k , $a_k = 0$ 的函数。对这样的信号, T 是基本周期吗? 为什么?

(d) 更一般地, 试证明如果满足以下两个条件之一:

1. a_1 或 a_{-1} 是非零的;

2. 有两个无公约数的, 使 a_k 和 a_l 都非零的整数 k 和 l 。

则 T 是式 (P4.12-1) 中 $x(t)$ 的基本周期。

4.13. 设 $x(t)$ 是实的周期信号, 具有式 (4.20) 给出的正弦-余弦型傅里叶级数表达式

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t] \quad (\text{P4.13-1})$$

(a) 求 $x(t)$ 偶部和奇部的指数傅里叶级数表达式。即用式 (P4.13-1) 的系数表示系数 a_k 和 β_k , 以便

$$E_v\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$O_d\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}$$

(b) (a) 中的 α_k 和 α_{-k} 之间具有什么关系? β_k 和 β_{-k} 之间具有什么关系?

(c) 假设图 P4.13 所示的信号 $x(t)$ 和 $z(t)$ 有正弦-余弦级数表达式:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - C_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) \right]$$

$$z(t) = d_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - F_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) \right]$$

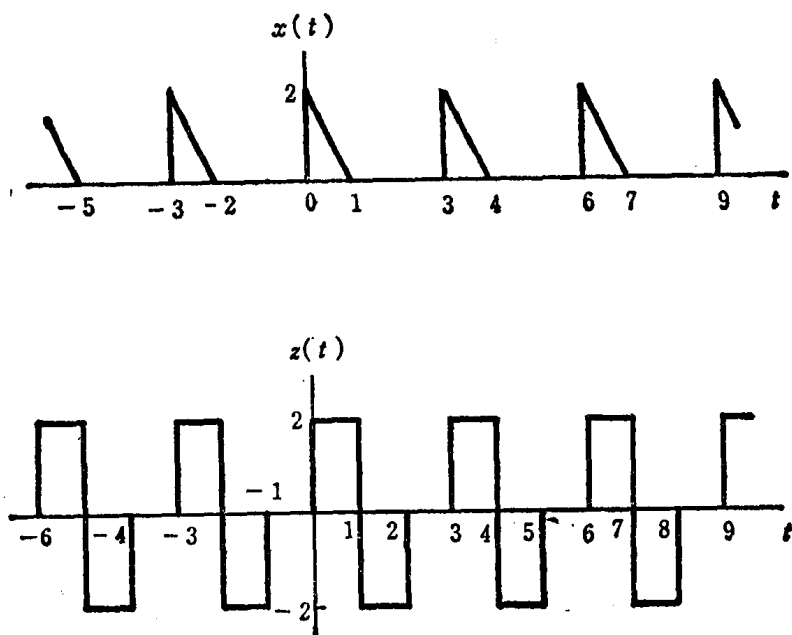


图 P4.13

试画出信号

$$y(t) = 4(a_0 + d_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[B_k + \frac{1}{2} E_k \right] \cos\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) + F_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) \right\}$$

4.14. 本题要得出连续时间傅里叶变换两个重要性质——调制性质和帕斯维尔定理的傅里叶级数对应式。设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是周期为 T_0 的连续时间周期信号，傅里叶级数表达式由下式给出：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \quad (\text{P4.14-1})$$

(a) 证明：信号

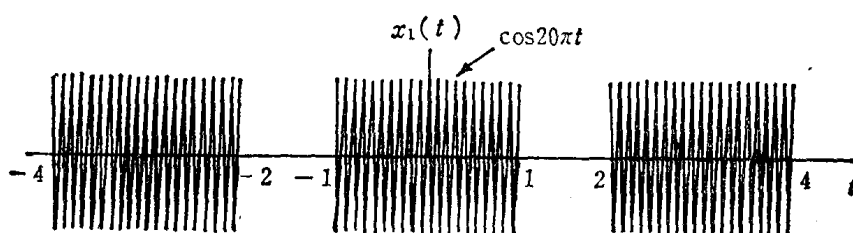
$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

的傅里叶级数系数由离散卷积

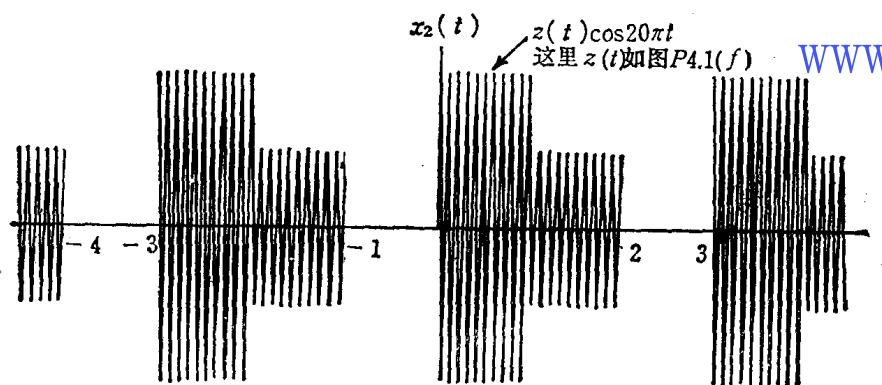
$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$$

给出。

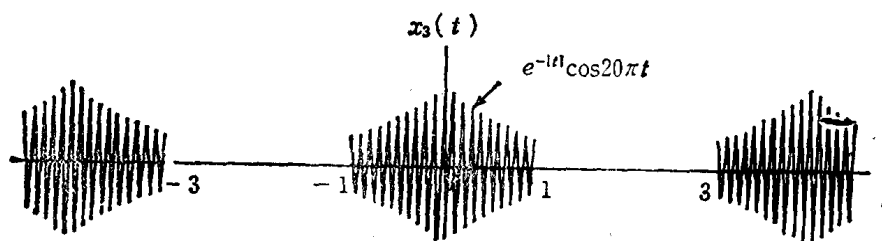
(b) 用 (a) 的结果，计算图 P4.14 所示信号 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的傅里叶级数系数。



(a)



(b)



(c)

图 P4.14

(c) 假设式 (P4.14-1) 中的 $y(t)$ 等于 $x^*(t)$ ，用 a_k 表示式 (P4.14-1) 中的 b_k 。利用 (a) 的结果证明周期信号的帕斯维尔定理，即证明

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

4.15. 假设有一个周期连续时间信号是 LTI 系统的输入, 信号 $x(t)$ 有傅里叶级数表达式

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\pi/4)t}$$

这里, α 是 0 和 1 之间的实数。系统的频率响应由下式给出

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W, \\ 0, & |\omega| > W. \end{cases}$$

为了使系统的输出至少为 $x(t)$ 的每个周期平均能量的 90%, W 必须多大?

4.16. 在课本和习题 3.12 中, 我们定义了具有相同周期 T_0 的两个周期信号 $\tilde{x}_1(t)$ 和 $\tilde{x}_2(t)$ 的周期卷积。具体地, 这些信号的周期卷积被定义为

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \tilde{x}_1(t) * \tilde{x}_2(t) \\ &= \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau) \tilde{x}_2(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{P 4.16-1})$$

如习题 3.12 所证明的, 在式 (P 4.16-1) 中积分可用长度 T_0 的任何区间, $\tilde{y}(t)$ 也是具有周期 T_0 的周期信号。

(a) 如果 $\tilde{x}_1(t)$ 、 $\tilde{x}_2(t)$ 和 $\tilde{y}(t)$ 分别有傅里叶级数表达式

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T_0)t} \\ \tilde{x}_2(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk(2\pi/T_0)t} \\ \tilde{y}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk(2\pi/T_0)t} \end{aligned}$$

证明

$$c_k = T_0 a_k b_k$$

(b) 考虑图 P 4.16—1 所示的周期信号 $\tilde{x}(t)$,

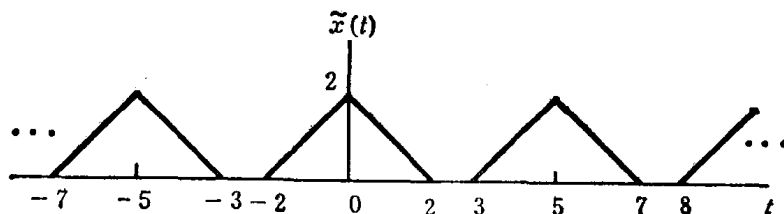


图 P 4.16—1

此信号是另一个周期信号 $\tilde{z}(t)$ 与其本身周期卷积的结果。求 $\tilde{z}(t)$, 然后利用 (a) 求 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数表达式。

(c) 现在假设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是如图 P 4.16—2(a) 和 (b) 所示的有限时宽信号。考虑由 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 周期重复形式组成周期信号 $\tilde{x}_1(t)$ 和 $\tilde{x}_2(t)$, 如图 P 4.16—2(c) 对 $\tilde{x}_1(t)$ 的描绘。设 $y(t)$ 是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 通常的非周期卷积

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t),$$

设 $\tilde{y}(t)$ 是 $\tilde{x}_1(t)$ 和 $\tilde{x}_2(t)$ 的周期卷积

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}_1(t) * \tilde{x}_2(t),$$

证明: 如果 T_0 足够大, 就完全可从 $\tilde{y}(t)$ 的一个周期恢复 $y(t)$, 即

$$y(t) = \begin{cases} \tilde{y}(t), & |t| \leq \frac{T_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{2}. \end{cases}$$

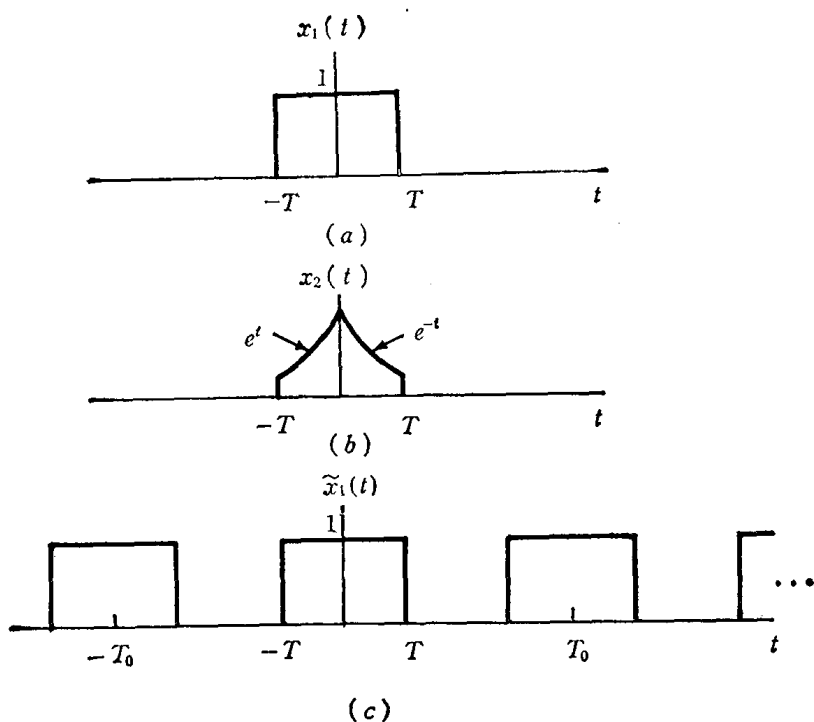


图 P 4.16-2

(d) 设 $T=1$, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别如图 P 4.16-2 的 (a) 和 (b)。利用 (a) 和 (c) 的结果, 求出 $y(t)=x_1(t)*x_2(t)$ 的表达式。

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk(2\pi/T_0)t}, & |t| \leq \frac{T_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{2}. \end{cases}$$

www.blogoil.com

4.17. 计算以下每个信号的傅里叶变换:

- (a) $[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t] u(t)$, $\alpha > 0$;
- (b) $e^{2+it} u(-t+1)$;
- (c) $e^{-3it} \sin 2t$;
- (d) $e^{-3it} [u(t+2) - u(t-3)]$;
- (e) $x(t)$ 如图 P 4.17(a);

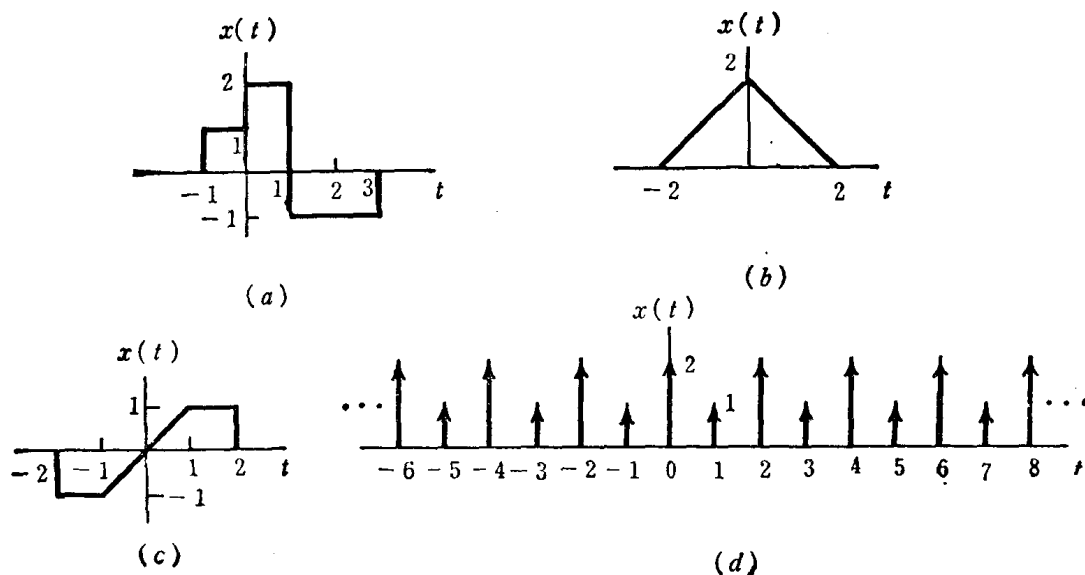


图 P 4.17

(f) $u_1(t) + 2\delta(3-2t)$;

(g) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$

(h) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT), |\alpha| < 1$;

(i) $[te^{-2t} \sin 4t]u(t)$;

(j) $\sin t + \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$;

(k) $\frac{\sin \pi t}{\pi t} - \frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$;

(l) $x(t)$ 如图 P 4.17(b);

(m) $x(t)$ 如图 P 4.17(c);

(n) $x(t)$ 如图 P 4.17(d);

(o) $x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(p) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$.

4.18. 以下是连续时间信号的傅里叶变换, 试求对应每个变换的连续时间信号:

(a) $X(\omega) = \frac{2 \sin[3(\omega - 2\pi)]}{(\omega - 2\pi)}$;

(b) $X(\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right)$;

(c) $X(\omega)$ 的幅度和相位由图 P 4.18(a) 给定;

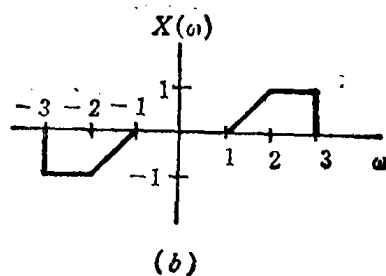
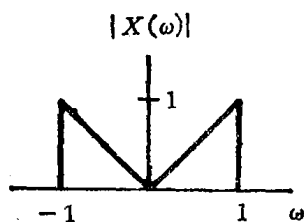
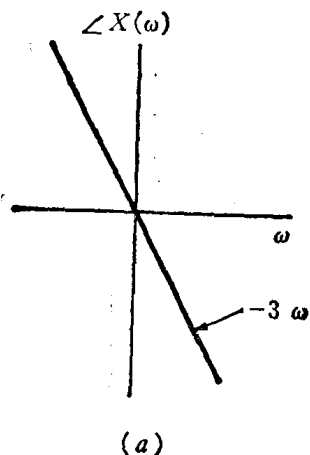


图 P 4.18

(d) $X(\omega) = 2[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$

(e) $X(\omega)$ 如图 P 4.18(b)。

4.19. 利用傅里叶变换的性质, 用归纳法证明

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

的傅里叶变换是

$$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

4.20. 人们常常要确定由实验得到的信号的傅里叶变换。这种信号由一系列测量值或由示波器上的

图形得出。一方面对这种已知的信号，没有闭合的解析表达式。另一方面，人们也许要计算用闭合式严格定义信号的傅里叶变换，但其傅里叶变换很复杂，或变换的计算实际上是不可能的。然而，在以上两种情况中，人们能用数值方法来获得任何所需精度的傅里叶变换的近似。在(a)中略述了这样的一种方法，它以被变换信号分段多项式近似为基础。

(a) 如果要变换的函数 $x(t)$ 足够光滑，则 $x(t)$ 可少用几个多项式分段来近似。以下的讨论，只考虑一阶多项式；可用一种简单的方式推广到较高阶的多项式。图 P 4.20—1 表明了函数 $x(t)$ 和直线段函数 $\Phi(t)$ (点 t_i 表示直线段的起点和终点)。

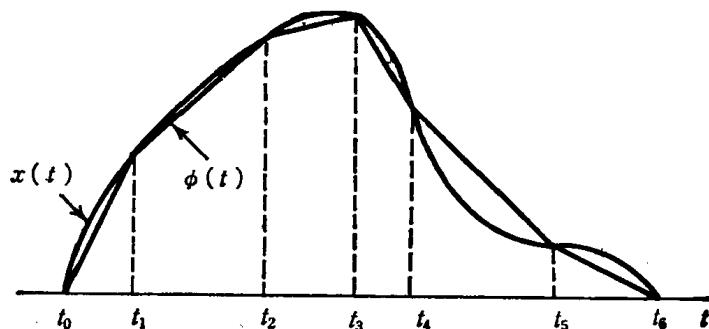


图 P 4.20—1

因为 $\Phi(t) \simeq x(t)$ ，所以 $\Phi(\omega) \simeq X(\omega)$ 。

试通过计算变换 $\Phi(\omega)$ ，证明：

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \sum_i k_i e^{-j\omega t_i}$$

用时间瞬间 t_0, t_1, t_2, \dots ，以及在这些时间上 $x(t)$ 的值来确定 k_i 。

(b) 设 $x(t)$ 是如图 P 4.20—2 所示的梯形。

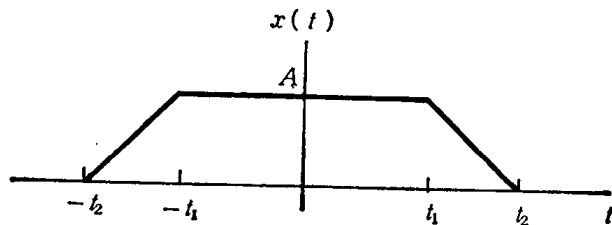


图 P 4.20—2

因为 $x(t)$ 已由直线段组成，所以不必再作近似。试求这种情况下的 $X(\omega)$ 。

(c) 假设我们要用数值方法计算信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。已知信号 $x(t)$ 是时间受限的。即

$$x(t) = 0, |t| > T,$$

而且，假设选择 t_i 彼此充分接近，使一阶多项式近似 $\phi(t)$ 足够准确，以保证绝对误差 $|x(t) - \phi(t)|$ 小于某个常数 ϵ (对 $|t| < T$)，即

$$E(t) = |x(t) - \phi(t)| \leq \epsilon, |t| < T$$

[提示：因为 $x(t)$ 是时间限定的，对 $|t| > T$ ， $E(t) = 0$] 试证明：傅里叶变换近似表示 $\Phi(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 的误差能量小于 $4\pi T \epsilon^2$ ，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega) - \Phi(\omega)|^2 d\omega \leq 4\pi T \epsilon^2$$

4.21. (a) 设 $x(t)$ 是实奇信号，试证明： $X(\omega) = F\{x(t)\}$ 是纯虚的和奇的函数。

(b) 如果 $x(-t) = x^*(t)$ ，则信号 $x(t)$ 的傅里叶变换有什么性质？

(c) 考虑输入 $x(t)$ 和输出

$$y(t) = \text{Re}\{x(t)\}$$

的系统。试用 $x(t)$ 的傅里叶变换表示 $y(t)$ 的傅里叶变换。

(d) 证明: 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个任意的信号, 分别具有傅里叶变换 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega$$

此结果是帕斯维尔定理的推广。

(e) 设 $x(t)$ 是一给定信号, 具有傅里叶变换 $X(\omega)$, 定义信号

$$f(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

(i) 假设

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

的值是什么?

(ii) $f(\omega/4)$ 的傅里叶逆变换是什么?

(f) 试导出调制性质

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * Y(\omega)]$$

(g) 试证明: 如果连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$ 是实的, 则系统对 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 的响应由下式给出,

$$y(t) = \text{Re}\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}\}$$

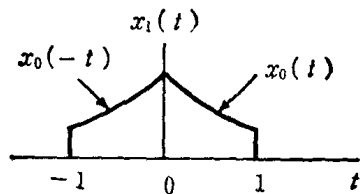
这里 $H(\omega)$ 是系统的频率响应。

4.22. 考虑信号

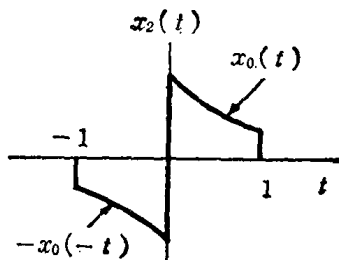
$$x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

www.blogoil.com

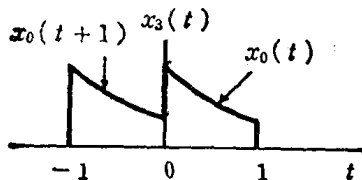
试确定图 P4.22 中每个信号的傅里叶变换。



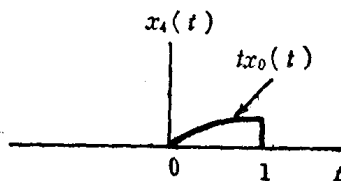
(a)



(b)



(c)



(d)

图 P4.22

显然, 只要计算 $x_0(t)$ 的傅里叶变换, 然后利用傅里叶变换的性质就能求出。

4.23. 一个实的、连续时间函数 $x(t)$ 有傅里叶变换 $X(\omega)$, $X(\omega)$ 的幅度服从以下的关系:

$$\ln|X(\omega)| = -|\omega|$$

如果已知 $x(t)$ 是:

- (a) 时间的偶函数;
- (b) 时间的奇函数;

求 $x(t)$ 。

4.24. (a) 求图 P4.24 所示实信号中哪一些 (如果有的话) 具有满足以下各点之一的傅里叶变换,

- (i) $\operatorname{Re}\{X(\omega)\} = 0$;
- (ii) $\operatorname{Im}\{X(\omega)\} = 0$;
- (iii) 有一个实数 α , 使 $e^{j\alpha\omega}X(\omega)$ 是实函数;
- (iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega = 0$;
- (v) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(\omega) d\omega = 0$;
- (vi) $X(\omega)$ 是周期性的。

(b) 构成一个具有性质 (i)、(iv) 和 (v), 而不具有其他性质的信号。

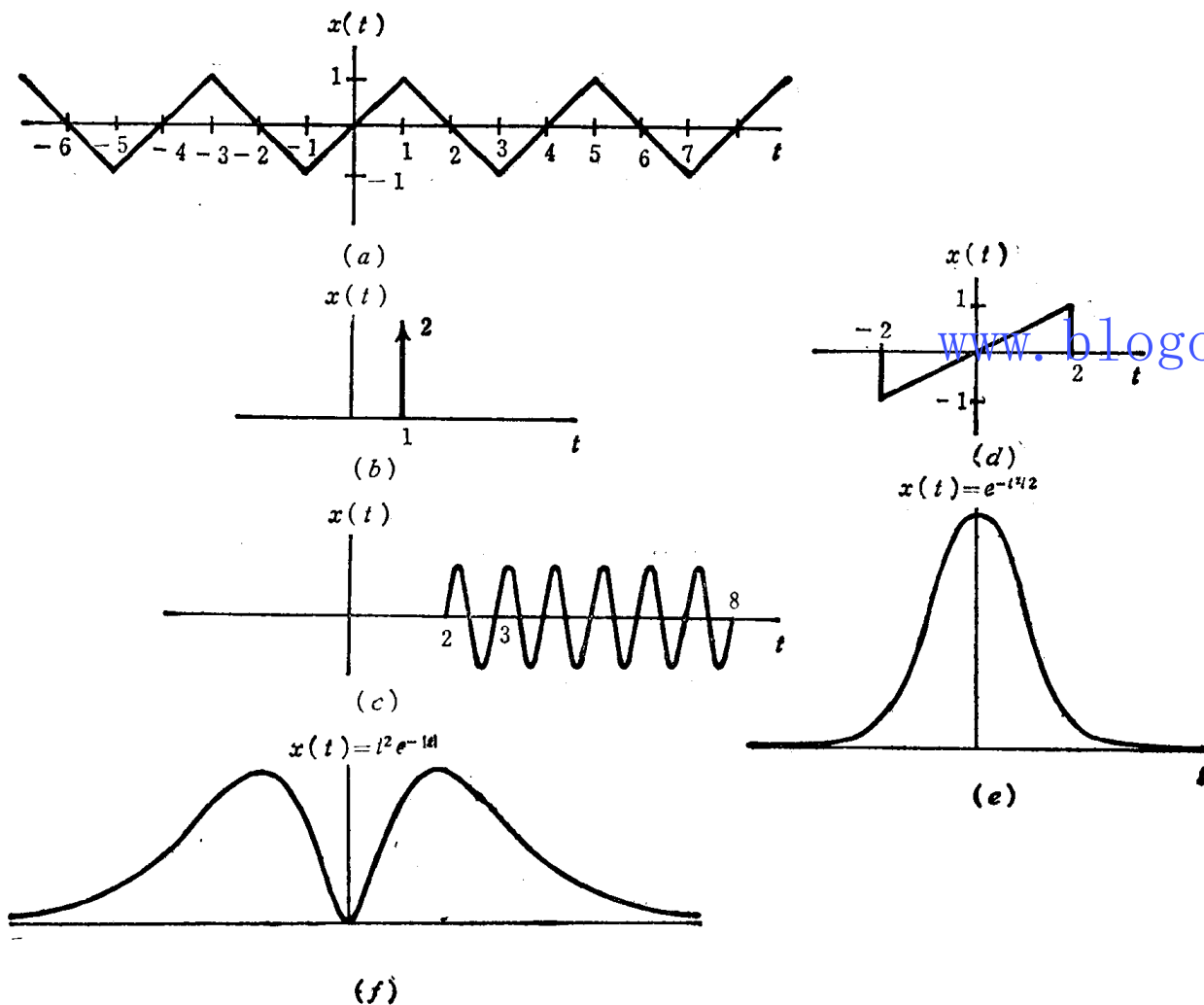


图 P4.24

4.25. 设 $X(\omega)$ 表示图 P4.25 所示信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。

- (a) 求 $\angle X(\omega)$;
- (b) 求 $X(0)$;

(c) 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega$;

(d) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$;

(e) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$;

(f) 画出 $\text{Re}\{X(\omega)\}$ 的傅里叶逆变换。

注意: 进行所有以上计算时, 不应直接计算 $X(\omega)$ 。

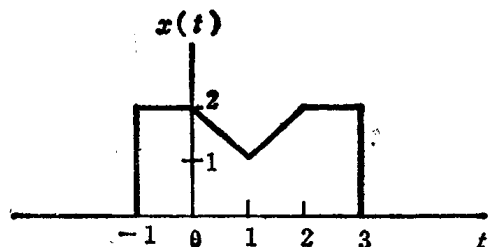


图 P 4.25

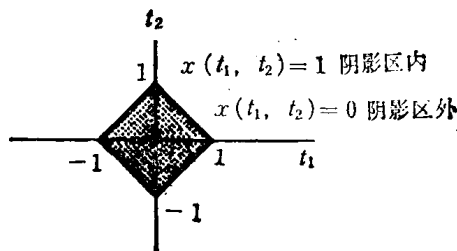


图 P 4.26—1

4.26. 如课本中叙述过的, 傅里叶分析的方法可以推广到具有两个独立变量的信号。这些方法与其一维对应式在其他应用中一样, 在图像处理一些应用中起着重要的作用。本题介绍二维傅里叶分析的一些基本概念。

设 $x(t_1, t_2)$ 是依赖于两个独立变量 t_1 和 t_2 的信号。 $x(t_1, t_2)$ 的二维傅里叶变换定义为

$$X(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1, t_2) e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

(a) 试证明: 这个二重积分可作为两个相继的一维傅里叶变换来积分, 首先把 t_2 看作固定而对 t_1 积分, 然后再对 t_2 积分。

(b) 利用(a)的结果求逆变换, 即用 $X(\omega_1, \omega_2)$ 表达 $x(t_1, t_2)$ 。

www.blogoil.com

(c) 求以下信号的二维傅里叶变换:

(i) $x(t_1, t_2) = e^{-t_1 + 2t_2} u(t_1 - 1) u(2 - t_2)$;

(ii) $x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1| - |t_2|}, & \text{如果 } -1 < t_1 \leq 1 \text{ 和 } -1 \leq t_2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$

(iii) $x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1| - |t_2|}, & \text{如果 } 0 \leq t_1 \leq 1 \text{ 和 } 0 \leq t_2 \leq 1 \text{ (或都成立)}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$

(iv) $x(t_1, t_2)$ 如图 P 4.26—1 所示;

(v) $e^{-|t_1 + t_2| - |t_1 - t_2|}$ 。

(d) 求信号 $x(t_1, t_2)$, 它的二维傅里叶变换是

$$X(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{4 + j\omega} \delta(\omega_2 - 2\omega_1)$$

(e) 设 $x(t_1, t_2)$ 和 $h(t_1, t_2)$ 是两个信号, 具有二维傅里叶变换 $X(\omega_1, \omega_2)$ 和 $H(\omega_1, \omega_2)$ 。试用 $X(\omega_1, \omega_2)$ 和 $H(\omega_1, \omega_2)$ 求以下信号的傅里叶变换:

(i) $x(t_1 - T_1, t_2 - T_2)$;

(ii) $x(at_1, bt_2)$;

(iii) $y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_1, \tau_2) h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$ 。

(f) 正如可以定义二维傅里叶变换一样, 也可以考虑具有两个独立变量周期信号的二维傅里叶级数。具体地, 考虑满足以下方程的信号

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) &= x(t_1 + T_1, t_2) \\ &= x(t_1, t_2 + T_2), \text{ 对所有 } t_1, t_2 \end{aligned}$$