《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙 江 大 学 数 学 系

前 言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一，为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法，我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章，除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用，用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求，用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求；内容提要部分给出相关内容的精讲，供学生复习参考之用；习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社，2008 年) 的附后练习题为主，这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果，其中第一章和第六章由薛儒英编写，第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写，王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容，最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助，得到浙江大学数学系各位老师的大力支持，在此表示感谢。

目　录

第 5 章　积分变换法

§5.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 理解 Fourier 变换与 Fourier 逆变换的定义与基本性质，会求常用函数的 Fourier 变换与逆变换；

2. 会用 Fourier 变换法求解定解问题；

3. * 理解 Laplace 变换与 Laplace 逆变换的定义与基本性质，会求常用函数的 Laplace 变换与逆变换；

4. * 会用 Laplace 变换法求解定解问题。

二. 内容提要

1. Fourier 变换的定义

函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt,$$

函数 $g(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换为

$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 分段光滑且绝对可积 (即满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$), 则有 Fourier 反演公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right]e^{i\lambda x}d\lambda,$$

即

$$F^{-1}[F[f]] = f(x).$$

2. Fourier 变换的性质

(1). **线性性质**　a_1 和 a_2 是二个（复）常数，则

$$F[a_1f_1 + a_2f_2](\lambda) = a_1F_1(\lambda) + a_2F_2(\lambda),$$

$$F^{-1}[a_1F_1 + a_2F_2](x) = a_1f_1(x) + a_2f_2(x).$$

(2). **平移性质**　设 a 是一个常数，则

$$F[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}F[f(x)](\lambda),\ F[f(x)e^{iax}](\lambda) = F[f](\lambda - a).$$

(3). **伸缩性质**　对于 $a \neq 0$, 有

$$F[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}F[f](\frac{\lambda}{a}).$$

(4). **乘项式性质**

$$F[xf(x)](\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}F[f](\lambda).$$

(5). **微分性质**　函数 f 的一阶导数 f' 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点, 且 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, 则

$$F[f'(x)](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda).$$

(6). **积分性质**

$$F[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi](\lambda) = -\frac{i}{\lambda}F[f](\lambda).$$

(7). **对称性质**

$$F^{-1}[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi}F[f](-\lambda).$$

(8). **卷积性质**　积分

$$(f_1(t) \star f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau$$

称为函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积.

卷积定理: 假设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 连续, 分段光滑且绝对可积分, 记 $F_1(\lambda) = \mathcal{F}[f_1](\lambda)$ 和 $F_2(\lambda) = \mathcal{F}[f_2](\lambda)$, 则

$$\mathcal{F}[f_1 \star f_2] = F_1(\lambda)F_2(\lambda)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\lambda)F_2(\lambda)] = (f_1 \star f_2)(x).$$

3. *Lapalce 变换的定义

设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义且积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在 s 的某一区域内收敛, 则

$$L[f(t)](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

称为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换. 若 $F(p)$ 是函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换, 则称 $f(t)$ 为 $F(p)$ 的 Laplace 逆变换, 记为 $f(t) = L^{-1}[F(p)](t)$, 它可以利用 (复变函数) 积分

$$L^{-1}[F(p)](t) = \frac{i}{2\pi}\int_{p-i\infty}^{p+i\infty} F(s)e^{st}ds,$$

来计算。

4. *Laplace 变换的性质

(1). **线性性质**　a_1 和 a_2 是二个（复）常数，则

$$L[a_1f_1+a_2f_2](p)=a_1F_1(p)+a_2F_2(p),$$

$$L^{-1}[a_1F_1+a_2F_2](t)=a_1f_1(t)+a_2f_2(t).$$

(2). **微分性质**

$$L[f^{(n)}(t)](p)=p^nL[f(t)](p)-f^{n-1}(0)-pf^{n-2}(0)-\cdots-p^{n-1}f(0).$$

(3). **卷积性质**　函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 定义在区间 $(0,+\infty)$ 上，则积分

$$f_1(t)\star f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

卷积定理: 假设 $F_1(p)=L[f_1](p)$ 和 $F_2(p)=L[f_2](p)$，则

$$L[f_1(t)\star f_2(t)](p)=F_1(p)F_2(p)$$

$$L^{-1}[F_1(p)F_2(p)](t)=f_1(t)\star f_2(t).$$

5. 积分变换法的基本思想

积分变换法的基本思想是，用可逆的积分

$$F(p)=\int k(x,p)f(x)dx \tag{5.1}$$

把函数类 A 中的函数 $f(x)$ 变换到另外一个函数类 B 中的函数 $F(p)$, $F(p)$ 称为函数 $f(x)$ 的像函数，$f(x)$ 称为函数 $F(p)$ 的像原函数，$k(x,p)$ 称为积分变换核。在上述积分变换 (5.1) 下，原来的偏微分方程可以减少自变量的个数，直至变成一个常微分方程；原来的常微分方程可以变成代数方程，从而使得在函数类 B 中的运算简化。对于定解问题，找出在函数类 B 中的一个解，再经过逆变换得到在函数类 A 中所示求的解。

§5.2　习题解答

习题 5.1 *求下列函数的 Fourier 变换：*

(1) $f(x)=\begin{cases}|x| & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin\lambda_0 x & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$

(3) $f(x)=\sin x e^{-a|x|}\qquad (a>0)$

(4) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax}\cos bx & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ *其中* $a,b>0$.

解　(1) 直接利用定义得

$$\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_{-a}^{a}|x|e^{-i\lambda x}dx=\int_{-a}^{0}-xe^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}xe^{-i\lambda x}dx\\
&= \int_{0}^{a}xe^{i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}xe^{-i\lambda x}dx\\
&= 2\int_{0}^{a}x\cos\lambda x dx\\
&= \frac{2a}{\lambda}\sin\lambda a+\frac{2}{\lambda^2}\cos\lambda a-\frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

(2) 由定义

$$\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_{-a}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx=\int_{-a}^{0}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= -\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{i\lambda x}dx+\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= -2i\int_{0}^{a}\sin\lambda_0 x\sin\lambda x dx\\
&= i\int_{0}^{a}\left[\cos(\lambda_0+\lambda)x-\cos(\lambda_0-\lambda)x\right]dx\\
&= i\frac{\sin(\lambda_0+\lambda)a}{\lambda_0+\lambda}-i\frac{\sin(\lambda_0-\lambda)a}{\lambda_0-\lambda}.
\end{aligned}$$

(3) 方法一: 直接由定义，有

$$\begin{aligned}
F[f(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(\mathrm{e}^{[a+(1-\lambda)i]x}-\mathrm{e}^{[a-(1+\lambda)i]x}\right)dx\right.\\
&\quad \left.+\int_{0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{[-a+(1-\lambda)i]x}-\mathrm{e}^{[-a-(1+\lambda)i]x}\right)dx\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{a+(1-\lambda)i}-\frac{1}{a-(1+\lambda)i}+\frac{-1}{-a+(1-\lambda)i}-\frac{-1}{-a-(1+\lambda)i}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{2a}{a^2+(1-\lambda)^2}-\frac{2a}{a^2+(1+\lambda)^2}\right]\\
&= \frac{-4i\lambda a}{[a^2+(1-\lambda)^2][a^2+(1+\lambda)^2]}.
\end{aligned}$$

方法二: 由定义

$$F[\mathrm{e}^{-a|x|}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a-i\lambda}+\frac{-1}{-a-i\lambda} \\ &= \frac{2a}{a^2+\lambda^2}. \end{aligned}$$

再由 Fourier 变换的线性性质和位移性质，得

$$\begin{aligned} F[\sin x\mathrm{e}^{-a|x|}] &= F\left[\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})\mathrm{e}^{-a|x|}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left(F[\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-a|x|}]-F[\mathrm{e}^{-ix}\mathrm{e}^{-a|x|}]\right) \\ &= -ia\left(\frac{1}{a^2+(\lambda-1)^2}-\frac{1}{a^2+(\lambda+1)^2}\right) \\ &= \frac{-4i\lambda a}{[a^2+(\lambda+1)^2][a^2+(\lambda-1)^2]} \end{aligned}$$

(4) 由定义

$$\begin{aligned} F[f(x)] &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\mathrm{e}^{ibx}+\mathrm{e}^{-ibx}}{2}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{[-a+(b-\lambda)i]x}+\mathrm{e}^{[-a-(b+\lambda)i]x}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-a+(b-\lambda)i}+\frac{-1}{-a-(b+\lambda)i}\right] \\ &= \frac{a+\lambda i}{(a+\lambda i)^2+b^2}. \end{aligned}$$

习题 5.2 利用 *Fourier* 变换的性质，求下列函数的 *Fourier* 变换：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$

(2) $f(x)=xe^{-a|x|}\quad (a>0)$

(3) $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$

(4) $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}$.

解　(1) 令 $g(x)=\begin{cases} 1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$. 由定义

$$F[g(x)]=\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda x}dx=\frac{-1}{i\lambda}(e^{-i\lambda a}-e^{i\lambda a})=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}$$

由 Fourier 变换的乘子性质，得

$$F[f(x)] = F[x^2g(x)]=i^2\frac{d^2}{d\lambda^2}F[g](\lambda)=-\frac{d}{d\lambda}(\frac{2a\cos\lambda a}{\lambda}-\frac{2\sin\lambda a}{\lambda^2})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2a^2\sin\lambda a}{\lambda}+\frac{2a\cos\lambda a}{\lambda^2}+\frac{2a\cos\lambda a}{\lambda^2}-\frac{4\sin\lambda a}{\lambda^3}\\
&= \frac{2a^2\sin\lambda a}{\lambda}+\frac{4a\cos\lambda a}{\lambda^2}-\frac{4\sin\lambda a}{\lambda^3}
\end{aligned}
$$

(2) 由定义

$$
\begin{aligned}
F[\mathrm{e}^{-a|x|}] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-i\lambda x}dx\\
&= \frac{1}{a-i\lambda}+\frac{-1}{-a-i\lambda}\\
&= \frac{2a}{a^2+\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

再由 Fourier 变换乘子性质，得

$$
F[f(x)]=F[x\mathrm{e}^{-a|x|}]=i\frac{d}{d\lambda}F[\mathrm{e}^{-a|x|}](\lambda)=\frac{-4a\lambda i}{(a^2+\lambda^2)^2}
$$

(3) 设 $F[f(x)]=\hat{f}(\lambda)$, 下面证明 Fourier 变换的对称性质, 即 $F^{-1}[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda)$.
证明如下

$$
F^{-1}[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i(-\lambda)x}dx=\frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\lambda).
$$

因此, $F[f](\lambda)=2\pi F^{-1}[f(x)](-\lambda)$. 由上题可知 $F[\mathrm{e}^{-a|x|}]=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$, 于是 $F^{-1}[\frac{1}{a^2+x^2}](\lambda)=\frac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{2a}$. 所以 $F[f](\lambda)=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}$.

(4) 由 Fourier 变换乘子性质及上题结果，有

$$
\begin{aligned}
F[f(x)] &= F\left[x\frac{1}{a^2+x^2}\right]=i\frac{d}{d\lambda}F\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right](\lambda)\\
&= i\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\lambda|}\right)\\
&= \begin{cases} -i\pi e^{-a\lambda} & \lambda>0\\ i\pi e^{a\lambda} & \lambda<0\\ \text{不存在} & \lambda=0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

习题 5.3 若记 $F[f]=F(\lambda)$, 证明
$F[f(x)\cos\omega x]=\frac{1}{2}(F(\lambda-\omega)+F(\lambda+\omega))$
$F[f(x)\sin\omega x]=\frac{1}{2i}(F(\lambda-\omega)-F(\lambda+\omega))$.

证明　(1) 因为 $\cos\omega x=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}$, 由 Fourier 变换的线性性质, 有

$$
F[f(x)\cos\omega x]=\frac{1}{2}\left\{F[f(x)e^{i\omega x}]+F[f(x)e^{-i\omega x}]\right\}
$$

又由 Fourier 变换的位移性质，有

$$
\begin{aligned}
F[f(x)e^{i\omega x}] &= F(\lambda-\omega)\\
F[f(x)e^{-i\omega x}] &= F(\lambda+\omega).
\end{aligned}
$$

于是

$$F[f(x)\cos\omega x] = \frac{1}{2}\left(F(\lambda-\omega)+F(\lambda+\omega)\right).$$

(2) 因为 $\sin\omega x = \frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}$, 由 Fourier 变换的线性性质和位移性质, 有

$$\begin{aligned} F[f(x)\sin\omega x] &= \frac{1}{2i}\left\{F[f(x)e^{i\omega x}]-F[f(x)e^{-i\omega x}]\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\left(F(\lambda-\omega)-F(\lambda+\omega)\right). \end{aligned}$$

习题 5.4 *设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分段连续且绝对可积, 设 $g(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, 证明 $F[g]=\frac{1}{i\lambda}F[f]$.*

说明 若是通常意义下的 Fourier 变换则有问题, 例如取 $f(x)=e^{-|x|}$, 则 f 连续且绝对可积, 但 $g(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 不绝对可积, 且当 $x\to+\infty$ 时极限不为 0.

解 当 $g(x)$ 绝对可积时, 由 $g'(x)=f(x)$ 以及 Fourier 变换的微分性质可得

$$F[f]=F[g']=i\lambda f[g],$$

从而我们有 $F[g]=\frac{1}{i\lambda}F[f]$.

习题 5.5 *求下列函数的 Fourier 逆变换:*

(1) $F(\lambda)=e^{-(a^2\lambda^2+ib\lambda+c)t}$ $(a,b,c$ 常数, 参数 $t>0)$

(2) $F(\lambda)=e^{-|\lambda|y}$ (参数 $y>0$)

解 (1) 由定义

$$f(x)=F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2\lambda^2+ib\lambda+c)t}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

令 $\lambda=-\mu$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2\mu^2-ib\mu+c)t}e^{-i\mu x}d\mu=\frac{1}{2\pi}e^{-ct}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\mu^2t+ib\mu t}e^{-i\mu x}d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-ct}F[e^{-a^2\mu^2t}e^{ibt\mu}](x). \end{aligned}$$

由 Fourier 变换的平移性质, 有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-ct}F[e^{-a^2t\mu^2}](x-bt).$$

由例 3 知 $F[e^{-a^2t\mu^2}]=(\frac{\pi}{a^2t})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$. 因此,

$$f(x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-ct}e^{-\frac{(x-bt)^2}{4a^2t}}.$$

(2) 由定义

$$f(x) = F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\lambda|y}e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda y+i\lambda x}d\lambda + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y+i\lambda x}d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{y+ix} - \frac{1}{-y+ix}\right)\\
&= \frac{y}{(x^2+y^2)\pi}.
\end{aligned}
$$

习题 5.6 *求下列函数的广义 Fourier 变换:*

(1) $\delta(x-x_0)$　　*(2)* $e^{i\lambda_0 x}$

(3) $\cos\lambda_0 x$　　*(4)* $\sin^2\lambda_0 x$

解　(1) 因

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F[\delta(x-x_0)]\varphi(\lambda)d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda\ |_{x=x_0}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x_0}d\lambda.
\end{aligned}
$$

所以

$$F[\delta(x-x_0)] = e^{-i\lambda x_0}.$$

(2) 因

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F[e^{i\lambda_0 x}](\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_0 x}F[\varphi(\lambda)](x)dx\\
&= 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi(\lambda)](x)e^{i\lambda_0 x}dx\\
&= 2\pi F^{-1}\left[F[\varphi(\lambda)]\right]|_{\lambda=\lambda_0} = 2\pi\varphi(\lambda_0)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\lambda-\lambda_0)\varphi(\lambda)d\lambda.
\end{aligned}
$$

所以

$$F[e^{i\lambda_0 x}] = 2\pi\delta(\lambda-\lambda_0).$$

(3) 因 $\cos\lambda_0 x = \frac{e^{i\lambda_0 x}+e^{-i\lambda_0 x}}{2}$, 由 Fourier 变换的线性性质及 (2), 得

$$
\begin{aligned}
F[\cos\lambda_0 x] &= \frac{1}{2}\left\{F[e^{i\lambda_0 x}] + F[e^{-i\lambda_0 x}]\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\lambda-\lambda_0) + 2\pi\delta(\lambda+\lambda_0)\right]\\
&= \pi\left[\delta(\lambda-\lambda_0)+\delta(\lambda+\lambda_0)\right].
\end{aligned}
$$

(4) 因 $\sin^2\lambda_0 x = \frac{1-\cos 2\lambda_0 x}{2}$, 由 Fourier 变换的线性性质和 (3), 得

$$
\begin{aligned}
F[\sin^2\lambda_0 x] &= \frac{1}{2}F[1] - \frac{1}{2}F[\cos 2\lambda_0 x]\\
&= \pi\delta(\lambda) - \frac{\pi}{2}\left[\delta(\lambda-2\lambda_0)+\delta(\lambda+2\lambda_0)\right].
\end{aligned}
$$

习题 5.7 利用 *Fourier* 变换求解下列定解问题:

(1) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \sin x \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$ 其中 a, b, c 为常数.

解 (1) 对方程和定解条件关于 x 作 Fourier 变换, 记

$$F[u] = \hat{u}(\lambda, t), \qquad F[\sin x] = \hat{\varphi}(\lambda).$$

利用 Fourier 变换的线性性质和微分性质, 得

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

由一阶线性常微分方程的解的表达式, 得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}.$$

对上式两边求反演, 因为

$$\begin{aligned} F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{e}^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{e}^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} F[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}](x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

所以

$$\hat{u}(\lambda, t) = F[\sin x] F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right].$$

利用卷积性质, 得

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

(2) 对方程和定解条件关于 x 作 Fourier 变换, 记

$$F[u] = \hat{u}(\lambda, t), \qquad F[\sin x] = \hat{\varphi}(\lambda), \qquad F[f] = \hat{f}(\lambda, t).$$

利用 Fourier 变换的线性性质和微分性质, 得

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2\hat{u} - bi\lambda\hat{u} - c\hat{u} = \hat{f} \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

由一阶线性常微分方程的解的表达式，得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)t}+\int_0^t\hat{f}(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)(t-\tau)}d\tau.$$

对上式两边求反演，由 5(1)

$$\begin{aligned}F^{-1}[\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)t}]&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct}e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}\\F^{-1}[\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-bi\lambda-c)(t-\tau)}]&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{c(t-\tau)}e^{-\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}.\end{aligned}$$

所以

$$\hat{u}(\lambda,t)=F[\varphi]F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct}e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}\right]+\int_0^tF[f]F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{c(t-\tau)}e^{-\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\tau.$$

利用卷积性质，得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2t}}d\xi\\&+\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{[x-\xi+b(t-\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi.\end{aligned}$$

习题 5.8 利用延拓方法与 *Fourier* 变换求解：

$$(1)\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\quad(0<x<+\infty,\ t>0)\\u|_{t=0}=\varphi(x)\qquad(0<x<+\infty)\\u|_{x=0}=0\qquad(t\ge0)\end{cases}$$

并验证上述边值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi\\&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.\end{aligned}$$

$$(2)\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\quad(0<x<+\infty,\ t>0)\\u|_{t=0}=\varphi(x)\qquad(0<x<+\infty)\\u_x|_{x=0}=0\qquad(t\ge0)\end{cases}$$

并验证上述边值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi\\&+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.\end{aligned}$$

解 (1) 将 $u(x,t),\varphi(x),f(x,t)$ 关于 x 作奇延拓, 即令

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= \begin{cases} u(x,t) & x \geq 0 \\ -u(-x,t) & x < 0 \end{cases} \\
\Phi(x) &= \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \\
F_1(x,t) &= \begin{cases} f(x,t) & x \geq 0 \\ -f(-x,t) & x < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

不难验证 $U(x,t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx} + F_1(x,t) & (-\infty < x < +\infty,\ t > 0) \\ U|_{t=0} = \Phi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

由一维热传导方程解的表达式, 得

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi.
\end{aligned}$$

这个 $U(x,t)$ 限制在 $x \geq 0$ 上就是原问题的解. 下面确定 $u(x,t)$ 的表达式. 当 $x \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0}-\varphi(-\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_{-\infty}^{0}-f(-\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right. \\
&\qquad \left.+\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^{+\infty}-\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_0^{+\infty}-f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right. \\
&\qquad \left.+\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty} f(\xi,\tau)\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi.$$

(2) 将 $u(x,t),\varphi(x),f(x,t)$ 关于 x 作偶延拓，即令

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= \begin{cases} u(x,t) & x\geq 0 \\ u(-x,t) & x<0 \end{cases} \\
\Phi(x) &= \begin{cases} \varphi(x) & x\geq 0 \\ \varphi(-x) & x<0 \end{cases} \\
F_1(x,t) &= \begin{cases} f(x,t) & x\geq 0 \\ f(-x,t) & x<0. \end{cases}
\end{aligned}$$

不难验证 $U(x,t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx}+F_1(x,t) & (-\infty<x<+\infty,\ t>0) \\ U|_{t=0} = \Phi(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

由一维热传导方程解的表达式，得

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi.
\end{aligned}$$

这个 $U(x,t)$ 限制在 $x\geq 0$ 上就是原问题的解. 下面确定 $u(x,t)$ 的表达式. 当 $x\geq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\varphi(-\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_{-\infty}^{0}f(-\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right. \\
&\qquad \left.+\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \quad + \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\xi \Bigg\} \\
= & \quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\} d\xi \\
& + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right\} d\xi.
\end{aligned}
$$

习题 5.9 求下列热传导方程的混合问题的解

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < +\infty,\ t > 0) \\
u|_{t=0} = 0 & (0 < x < +\infty) \\
u_x|_{x=0} = \sin\omega t & (t \geq 0)
\end{cases}
$$

解　令 $v = u - x\sin\omega t$, 则

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + x\omega\cos\omega t, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
$$

原方程变为

$$
\begin{cases}
\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - x\omega\cos\omega t & (0 < x < +\infty,\ t > 0) \\
v|_{t=0} = 0 & (0 < x < +\infty) \\
v_x|_{x=0} = 0 & (t \geq 0)
\end{cases}
$$

由 8(2) 可知上述方程的解为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} (-\xi\omega\cos\omega t) \\
& \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right\} d\xi.
\end{aligned}
$$

因此，原方程的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & x\sin\omega t - \frac{\omega\cos\omega t}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} \xi \\
& \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right\} d\xi.
\end{aligned}
$$

习题 5.10 求下列函数的 *Laplace* 变换 (其中 $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$)

(1). $f(t) = e^{-2t}u(t)$,

(2). $f(t) = \sin t\cos t u(t)$,

(3). $f(t) = ch\omega t\, u(t)$, (ω 为实常数)

(4). $f(t) = e^{-\lambda t} sh\omega t\, u(t)$, ($\lambda$, ω 为实常数).

解 (1). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}e^{-2t}e^{-pt}dt=\frac{1}{2+p}\,(Rep>-2)$

(2). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}\sin t\cos te^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin 2te^{-pt}dt=\frac{1}{4i}\int_0^{+\infty}[e^{-(p-2i)t}-e^{-(p+2i)t}]dt=\frac{1}{p^2+4},\,(Rep>0)$

(3). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}ch\omega te^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[e^{(w-p)t}+e^{-(w+p)t}]dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{w+p}-\frac{1}{w-p}]=\frac{p}{p^2-w^2},\,Rep>|w|;$

(4). $L[f](p)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}sh\omega te^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}shwte^{-(\lambda+p)t}dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{w+p+\lambda}+\frac{1}{w-p-\lambda}]=-\frac{w}{(\lambda+p)^2-w^2},\,Rep>|w|+|\lambda|;$

习题 5.11 利用 *Laplace* 变换的性质求下列函数的 *Laplace* 变换

(1). $f(t)=t\sin wtu(t);$

(2). $f(t)=t\cos wtu(t);$

(3). $f(t)=e^{-\lambda t}\sin wtu(t);$

(4). $f(t)=e^{-\lambda t}\cos wtu(t);$

(5). $f(t)=\cos^2 tu(t);$

(6). $f(t)=t^2e^{9t}u(t).$

解 (1). $L[t\sin wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}L[\sin wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}[\frac{-w}{p^2+w^2}]=-\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}.$

(2). $L[t\cos wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}L[\cos wtu(t)](p)=-\frac{d}{dp}[\frac{p}{p^2+w^2}]=\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}.$

(3). $L[e^{-\lambda t}\sin wtu(t)](p)=L[\sin wtu(t)](p+\lambda)=-\frac{w}{(p+\lambda)^2+w^2}.$

(4). $L[e^{-\lambda t}\cos wtu(t)](p)=L[\cos wtu(t)](p+\lambda)=-\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+w^2}.$

(5). $L[\cos^2 tu(t)](p)=L[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}](p)=\frac{1}{2}L[1](p)+\frac{1}{2}L[\cos 2t](p)=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2(p^2+4)}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$

(6). $L[t^2e^{9t}u(t)](p)=\frac{d^2}{dp^2}L[e^{9t}u(t)](p)=\frac{d^2}{dp^2}[\frac{1}{p-9}]=\frac{2}{(p-9)^3}.$

习题 5.12 求证下列公式

(1). $L[\frac{d}{dx}(f\star g)]=pL[f\star g]=pL[f]\cdot L[g];$

(2). $pL[f]\cdot L[g]=L[f\star g']+g(0)L[f].$

证明 (1). 记 $h(x)=f\star g$, 由卷积定义得 $h(0)=0$, 利用微分性质以及卷积性质得

$$\begin{aligned}L[\frac{d}{dx}(f\star g)](p)&=L[h'(x)](p)=pL[h](p)-h(0)\\&=pL[f\star g](p)=pL[f]\cdot L[g].\end{aligned}$$

(2). 由 $f\star g(x)=\int_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi$ 得

$$\frac{d}{dx}f\star g(x)=\int_0^x f(\xi)g'(x-\xi)d\xi+g(0)f(x)=f\star g'+g(0)f(x).$$

利用微分性质以及卷积性质得

$$L[f\star g'](p)=L[\frac{d}{dx}f\star g(x)]-g(0)L[f(x)](p)=pL[f]\cdot L[g']-g(0)l[f].$$

习题 5.13 利用 *Laplace* 变换求解

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\,(-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\,(-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

并证明它的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

解 关于变量 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,p)=L[u(x,t)](p)$ 且不妨 $p>0$,

$$\begin{cases} a^2\frac{d^2U}{dx^2}=pU-\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty \\ \lim_{|x|\to\infty}U(x,p)=0. \end{cases}$$

常微分方程的通解为

$$U(x,p)=C_1e^{\sqrt{p}x/a}+C_2e^{-\sqrt{p}x/a}+\int_0^x\frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}}\left[e^{-\sqrt{p}(x-\xi)/a}-e^{\sqrt{p}(x-\xi)/a}\right]d\xi,$$

由条件 $\lim_{|x|\to\infty}U(x,p)=0$ 得

$$C_1=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}\xi/a}d\xi,$$

$$C_2=\int_{-\infty}^0\frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}\xi/a}d\xi.$$

从而得到

$$U(x,p)=\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}(x-\xi)/a}d\xi+\int_{-\infty}^x\frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}(x-\xi)/a}d\xi.$$

利用 (查表) $L[\frac{1}{\sqrt{\pi t}e^{-a^2/(4t)}}=e^{-a\sqrt{p}}/\sqrt{p}$ 得

$$L^{-1}[\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{\pm\sqrt{p}(x-\xi)/a}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

因此,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_x^{+\infty}\varphi(\xi)L^{-1}\left[\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{\sqrt{p}(x-\xi)/a}\right]d\xi+\int_{-\infty}^x\varphi(\xi)L^{-1}\left[\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}(x-\xi)/a}\right]d\xi \\ &= \int_x^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_{-\infty}^x\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \end{aligned}$$

习题 5.14 利用 *Laplace* 变换求解下列混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\ (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u|_{t=0}=0,\ (-\infty<x<+\infty) \\ u|_{x=0}=U_0,\ (t\geq 0) \end{cases}$$

解 关于变量 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,p)=L[u(x,t)](p)$ 且不妨 $p>0$, $L[U_0]=U_0/p$,

$$\begin{cases} a^2\frac{d^2U}{dx^2}=pU, (-\infty<x<+\infty) \\ U|_{x=0}=U_0/p, \lim_{x\to+\infty}U=0 \end{cases}$$

解得

$$U(x,p)=\frac{U_0}{p}e^{-x\sqrt{p}/a}.$$

利用 (查表)

$$L[erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}})](p)=\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}},$$

其中

$$erfc(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-\eta^2}d\eta,$$

我们有

$$u(x,t)=L^{-1}[U(x,p)]=U_0erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

习题 5.15 利用 *Laplace* 变换求解下列定解问题

$$(1).\quad \begin{cases} \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=x^2y, (x>1,y>0) \\ u|_{y=0}=x^2, (x\geq1) \\ u|_{x=1}=\cos y, (y\geq0) \end{cases}$$

$$(2).\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, (0<x<\ell,t>0) \\ u|_{t=0}=u_0, (0<x<\ell) \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0,\ u|_{x=\ell}=u_1, (t\geq0) \end{cases}$$

解关于变量 y 作 Laplace 变换, 记 $U(x,p)=L[u(x,y)](p)$ 且不妨 $p>0$, $L[y]=-\frac{1}{p^2}$,

$$(1).\quad \begin{cases} p\frac{dU}{dx}=-\frac{x^2}{p^2}+2x, (x>1) \\ U|_{x=1}=L[\cos y](p). \end{cases}$$

解得

$$U(x,p)=\frac{1-x^3}{3p^3}+\frac{x^2-1}{p}+L[\cos y](p).$$

关于 p 作 Laplace 逆变换得到

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (1-x^3)L^{-1}[\frac{1}{3p^3}](y)+(x^2-1)L^{-1}[\frac{1}{p}](y)+L^{-1}[L[\cos y]] \\ &= \frac{y^2(1-x^3)}{6}+(x^2-1)+\cos y. \end{aligned}$$

(2). **解** 由条件可得 $u_0=u|_{x=0,t=0}=u_1$。

关于变量 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,p) = L[u(x,t)](p)$ 且不妨 $p > 0$, $L[u_0] = u_0/p$,

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2U}{dx^2} = pU - u_0, \ (0 < x < \ell) \\ \frac{dU}{dx}|_{x=0} = 0, \ U|_{x=\ell} = u_0/p. \end{cases}$$

通解为

$$U(x,p) = C_1 e^{x\sqrt{p}/a} + C_2 e^{-x\sqrt{p}/a} + \frac{u_0}{p},$$

由 $u_0 == u_1$ 以及

$$\frac{dU}{dx}|_{x=0} = 0, \ U|_{x=\ell} = u_0/p$$

得 $C_1 = C_2 = 0$, 即 $U(x,p) = u_0/p$. 关于 p 作 Laplace 逆变换得到 $u(x,t) = L^{-1}[u_0/p] = u_0$.