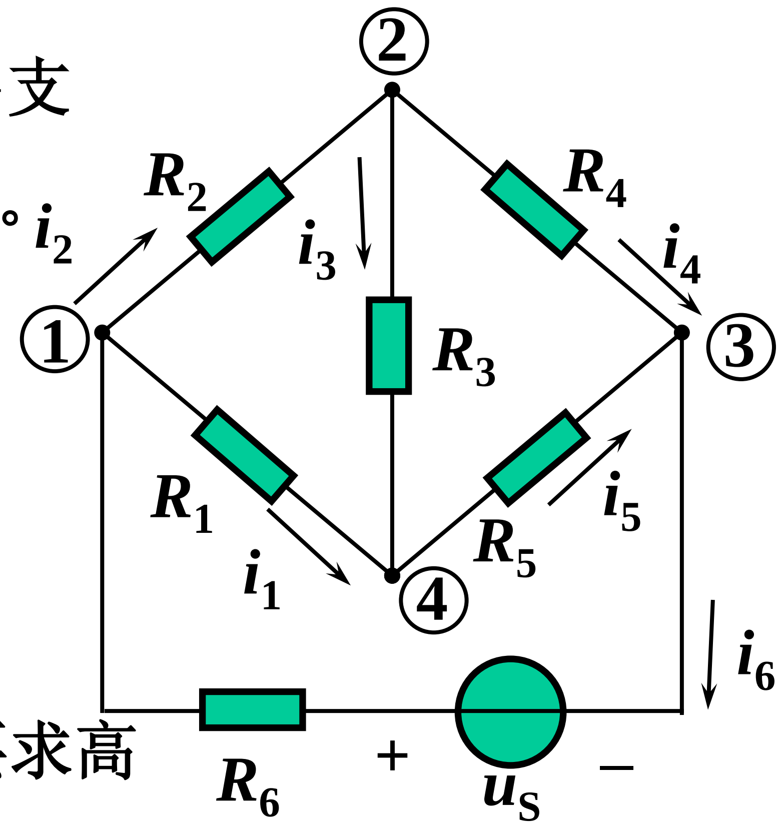
第4章　电路分析方法与电路定理

第4章　电路分析方法与电路定理

4.3 电路定理

✦ 问题的提出

求图示电路中支路电流$i_1 \sim i_6$（各支路电压与电流采用关联参考方向）。



用支路法求解电路。支路数：b=6

问题：

方程数多（12个方程）

复杂电路难以手工计算

计算机的存储能力与计算能力要求高

有必要寻找减少列写方程数量的方法。

基础
- 电路的连接关系——KCL，KVL定律
- 元件特性——约束关系

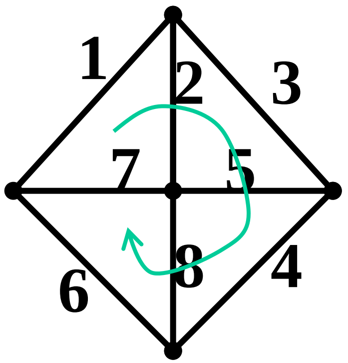
§ 4.2.0 回路、树、割集

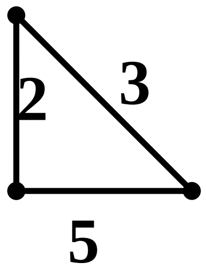
一. 回路

回路L是连通图G的一个子图。

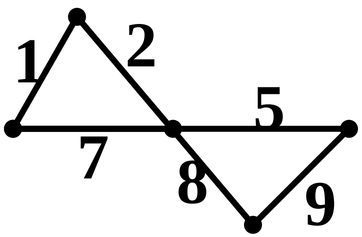
具有下述性质

(1)连通;
(2)每个节点关联支路数恰好为2。





回路

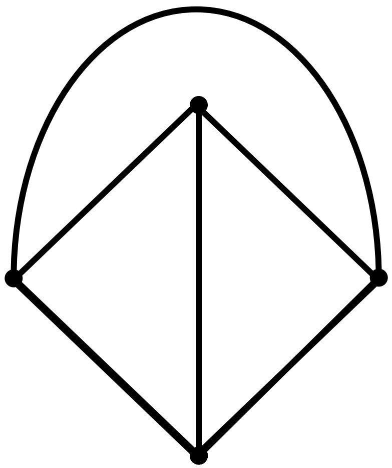


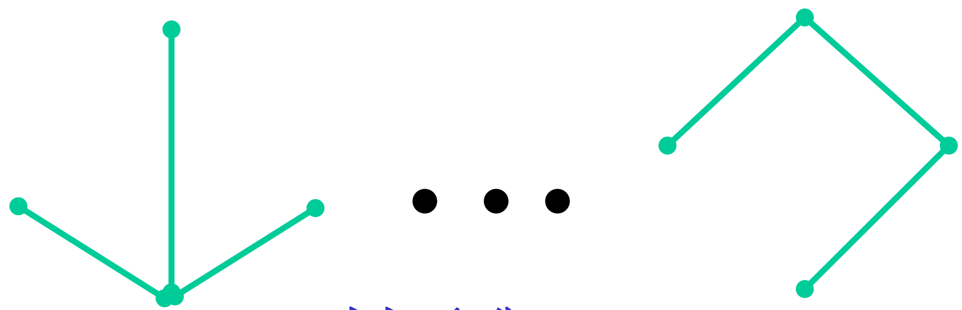
不是回路

二．树 （Tree）

树T是连通图G的一个子图，具有下述性质：

(1)连通；
(2)包含G的所有节点；
(3)不包含回路。





树不唯一

16个

树支：属于树的支路

连支：属于G而不属于T的支路

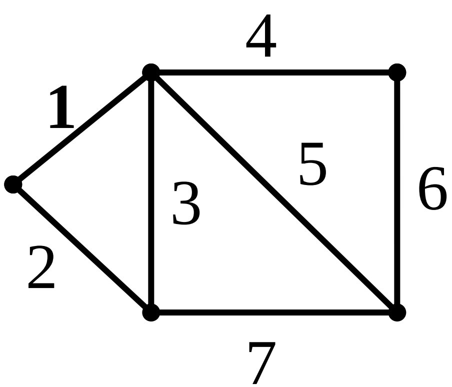
三．基本回路（单连支回路）

独立的KVL

图G包含n个接点，b条支路，则：

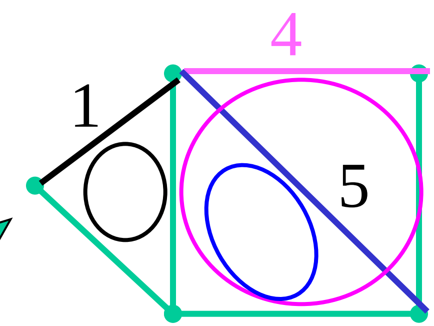
树支数 $b_t = n-1$　　　　连支数 $b_l = b-(n-1)$

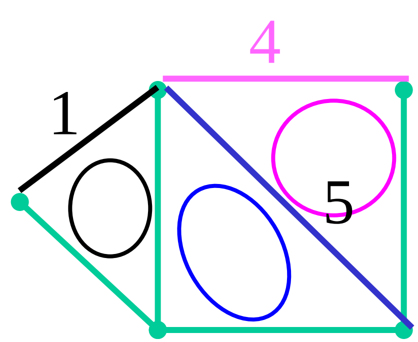
单连支回路（基本回路）　　基本回路数=连支数=$b-(n-1)$



树支数 4

连支数 3





单连支回路 $\longrightarrow$ 独立回路

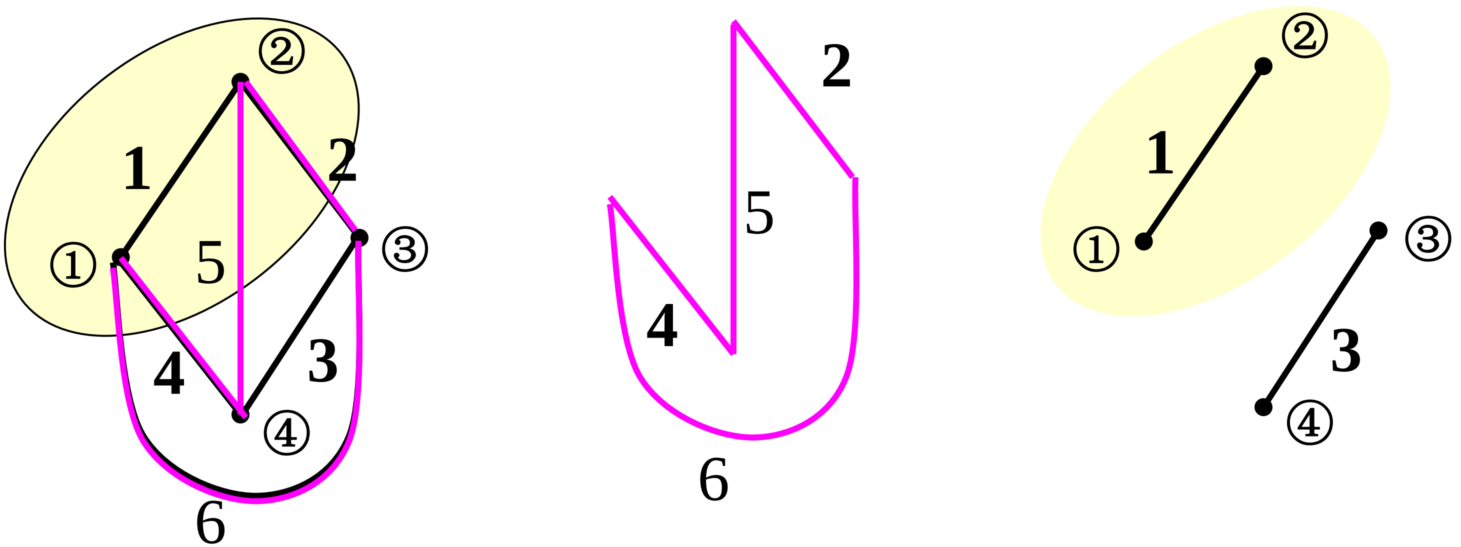
单连支回路 $\longleftarrow$ 独立回路

四. 割集 Q（Cut set ）

割集Q是连通图G中一个支路的集合，具有下述性质：

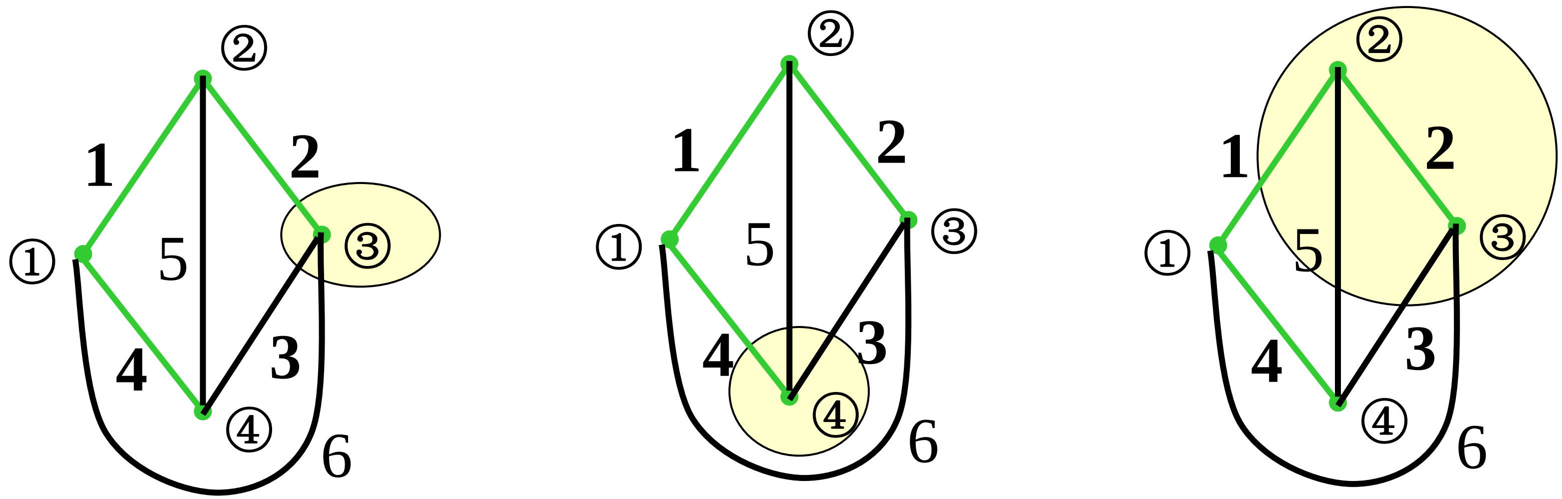
(1) 把Q 中全部支路移去，将图分成两个分离部分；

(2) 保留Q 中的一条支路，其于都移去， G还是连通的。



Q_1: { 2 , 5 , 4 , 6 }

五. 基本割集（单树支割集）

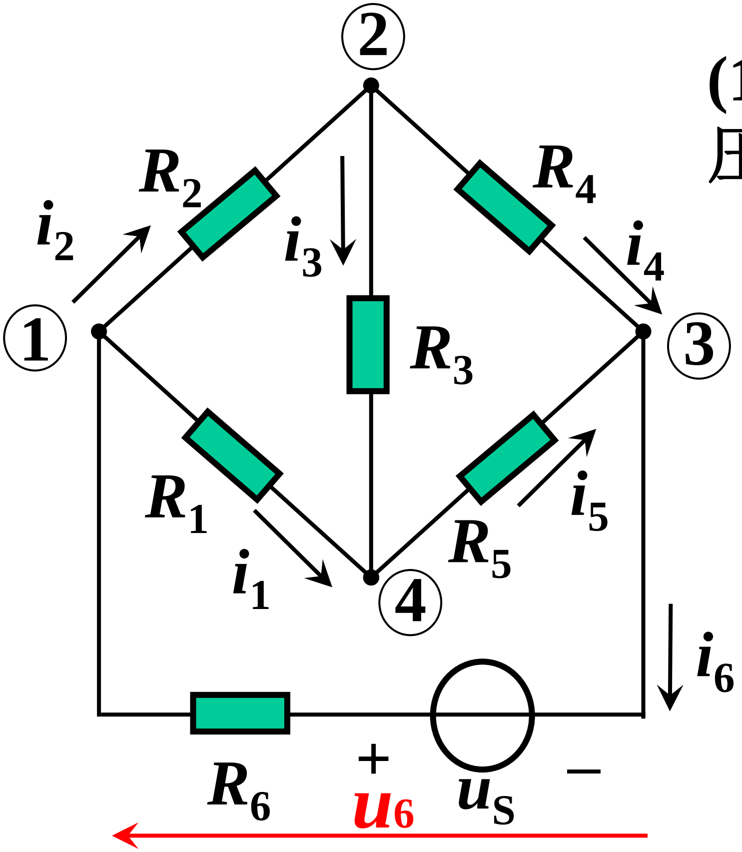


Q_1: { 2 , 3 , 6 } **Q_2: { 3 , 5 , 4}** **Q_3: { 1 , 5 ,3 , 6 }**

单树支割集 $\longrightarrow$ 独立割集 ⇒ **独立的KCL**

单树支割集 $\not\longleftarrow$ 独立割集

4.2.1 支路电流法（*Branch Current Method*）



(1)标定支路电流 $i_1\sim i_6$参考方向；支路电压$u_1\sim u_6$的参考方向与电流的方向一致（图中未标出）。并写出元件的伏安关系

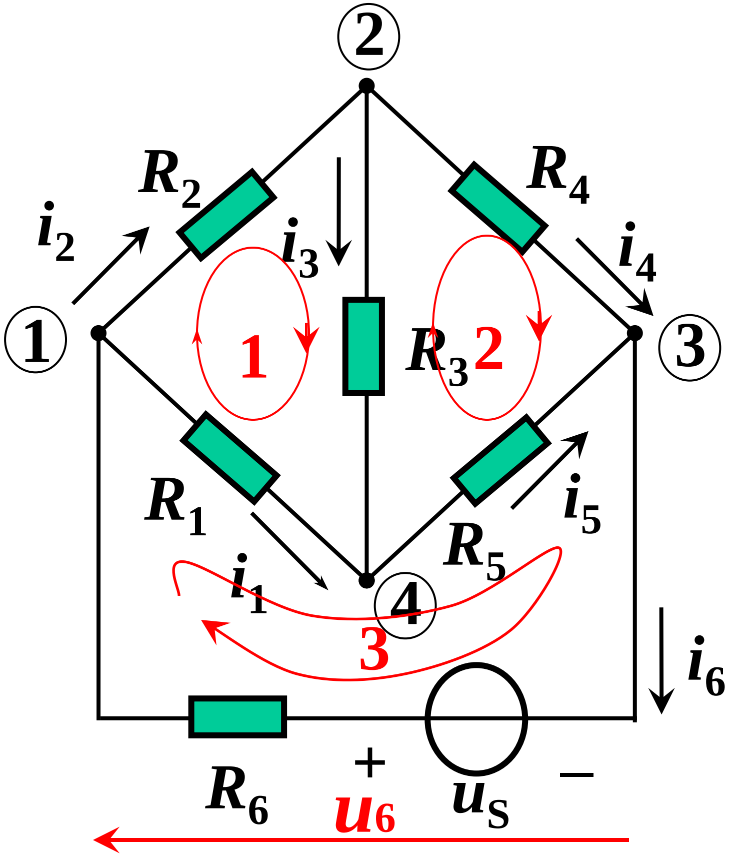
$$\left.\begin{aligned} &u_1=R_1i_1,\quad u_2=R_2i_2,\quad u_3=R_3i_3,\\ &u_4=R_4i_4,\quad u_5=R_5i_5,\quad u_6=-u_S+R_6i_6 \end{aligned}\right\}\ (1)$$

(2) 对节点，根据KCL列方程

(出为正，进为负)

$$\left.\begin{aligned} &\text{节点 1：}\ i_1+i_2-i_6=0\\ &\text{节点 2：}\ -i_2+i_3+i_4=0\\ &\text{节点 3：}\ -i_4-i_5+i_6=0\\ &\text{节点 4：}\ -i_1-i_3+i_5=0 \end{aligned}\right\}\ (2)\qquad 0=0$$

独立方程数为$n-1=4-1=3$个



(3) 选定图示的3个回路，由KVL，列写关于支路电压的方程。

$$\left.\begin{aligned} &\text{回路1：} -u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ &\text{回路2：} -u_3 + u_4 - u_5 = 0 \\ &\text{回路3：} \quad u_1 + u_5 + u_6 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

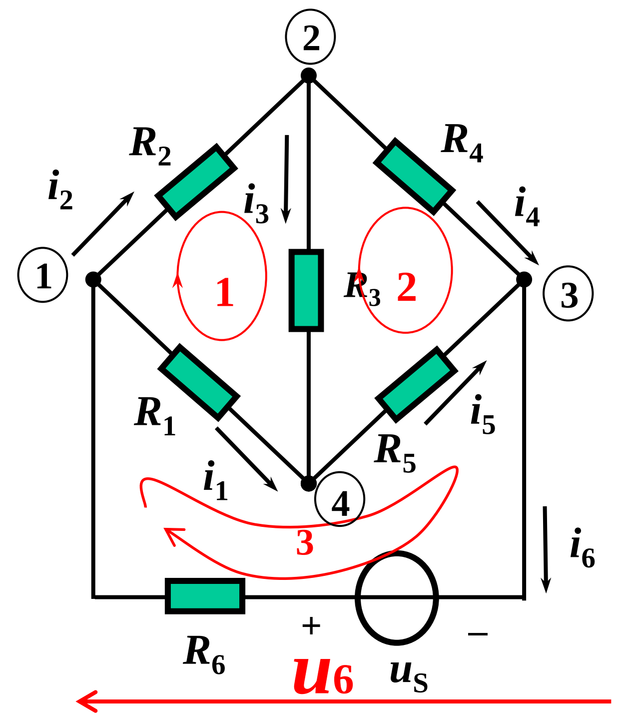
可以检验，式(3)的3个方程是独立的，即所选的回路是独立的。

独立回路：独立方程所对应的回路。

支路法（2b法）

$u_1 = R_1 i_1$，　$u_2 = R_2 i_2$，　$u_3 = R_3 i_3$，

$u_4 = R_4 i_4$，　$u_5 = R_5 i_5$，　$u_6 = -u_S + R_6 i_6$



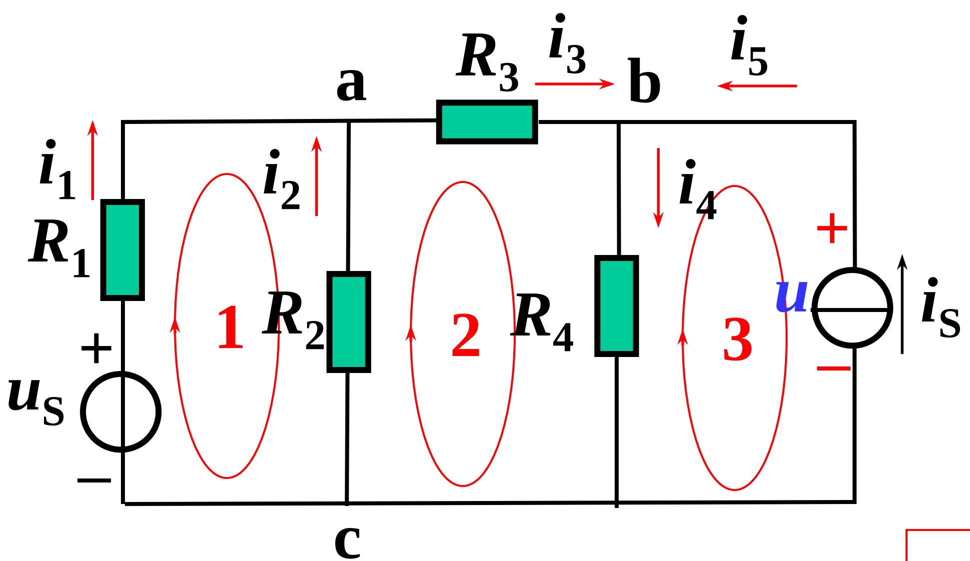
支路电流法:

$$\begin{cases}
\left.\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ -i_4 - i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{KCL} \\[2ex]
\left.\begin{aligned} -R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 &= 0 \\ -R_3 i_3 + R_4 i_4 - R_5 i_5 &= 0 \\ R_1 i_1 + R_5 i_5 + R_6 i_6 - u_S &= 0 \end{aligned}\right\} \text{KVL}
\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{回路1：}\ -u_1 + u_2 + u_3 &= 0 \\ \text{回路2：}\ -u_3 + u_4 - u_5 &= 0 \\ \text{回路3：}\ u_1 + u_5 + u_6 &= 0 \end{aligned}\right\} (3)$$

* 支路电压法？

例1.　列写如图电路的支路电流方程(含理想电流源支路)。



$b=5,\ n=3$

解：KCL方程：

$$\begin{cases} -i_1-i_2+i_3=0 & (1) \\ -i_3+i_4-i_5=0 & (2) \end{cases}$$

KVL方程：

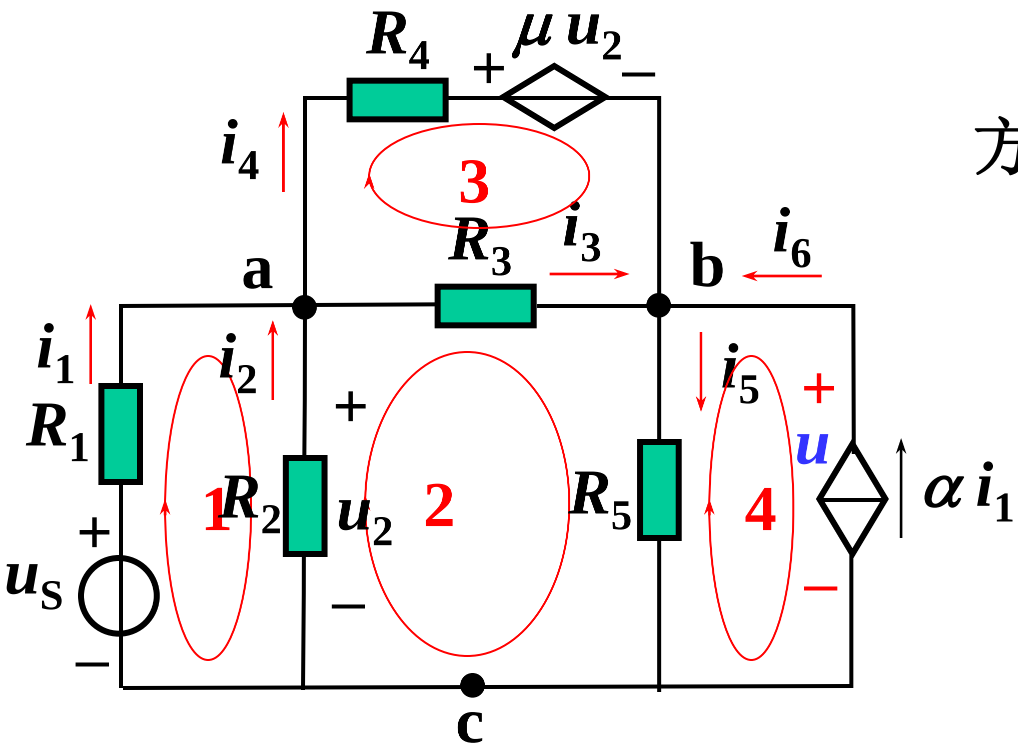
$$\begin{cases} R_1 i_1 - R_2 i_2 = u_S & (3) \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0 & (4) \\ -R_4 i_4 + u = 0 & (5) \\ i_5 = i_S & (6) \end{cases}$$

方法2

- 理想电流源的处理：由于$i_5 = i_S$，变量数少1。
- 可少选一个回路，即去掉方程(5)。

方法1

例2. 列写下图所示含受控源电路的支路电流方程。



方程列写分两步：

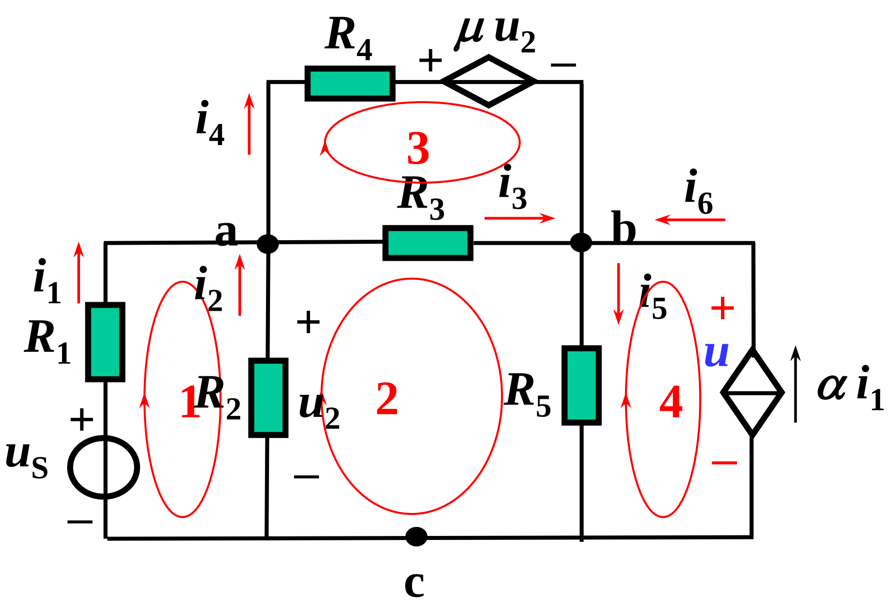
(1) 先将受控源看作独立源列方程；

(2) 将控制量用未知量表示，并代入(1)中所列的方程，消去中间变量。

解：

KCL方程：

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0 & (1) \\ -i_3 - i_4 + i_5 - i_6 = 0 & (2) \end{cases}$$



KVL方程：

$$\begin{cases} R_1 i_1 - R_2 i_2 = u_S & (3) \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_5 i_5 = 0 & (4) \\ R_3 i_3 - R_4 i_4 = \mu u_2 & (5) \\ R_5 i_5 = u & (6) \end{cases}$$

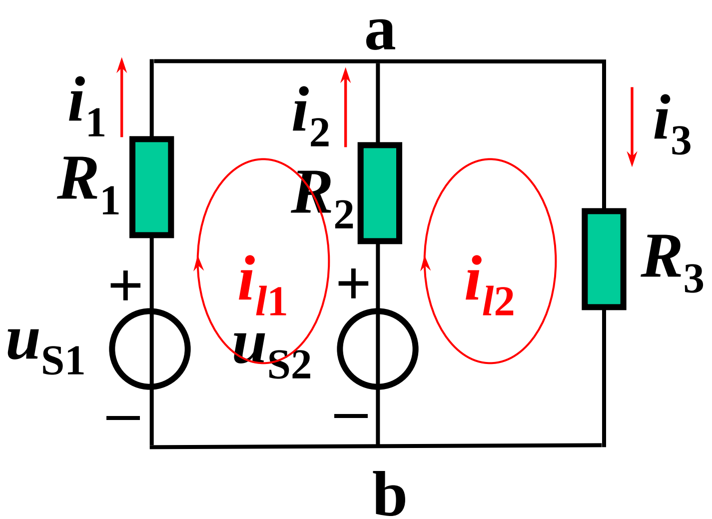
补充方程：

$$\begin{cases} i_6 = \alpha i_1 & (7) \\ u_2 = -R_2 i_2 & (8) \end{cases}$$

另一方法：去掉方程(6)。

4.2.2 回路电流法 (loop current method)

基本思想： 假想每个回路中有一个回路电流。则各支路电流可用回路电流线性组合表示。

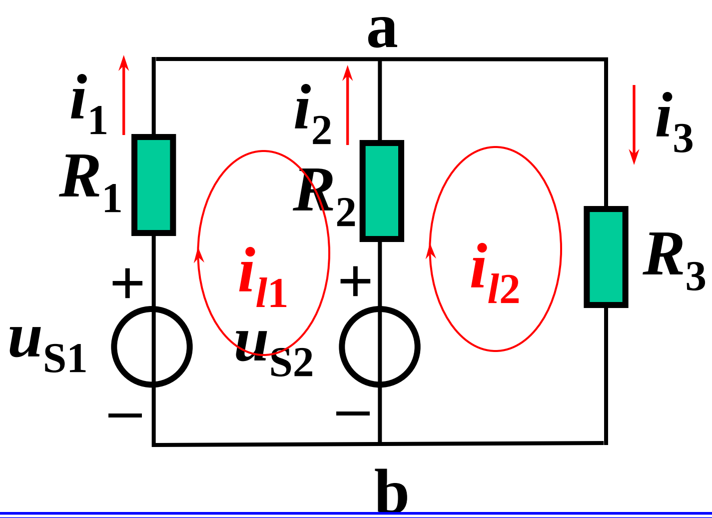


b=3，n=2。独立回路为$l=b-(n-1)=2$。选图示的两个独立回路，回路电流分别为i_{l1}、i_{l2}。支路电流$i_1= i_{l1}$，$i_2= i_{l2}- i_{l1}$，$i_3= i_{l2}$。

回路电流是在独立回路中闭合的，对每个相关节点均流进一次，流出一次，所以**KCL自动满足**。若以回路电流为未知量列方程来求解电路，**只需对独立回路列写KVL方程**。

<u>**回路电流法**</u>：以回路电流为未知量列写电路方程分析电路的方法。

独立方程数为$b-(n-1)$



$$\left.\begin{array}{l}\text{回路1：}\ R_1 i_{l1}+R_2(i_{l1}-i_{l2})-u_{S1}+u_{S2}=0\\ \text{回路2：}\ R_2(i_{l2}-i_{l1})+R_3 i_{l2}-u_{S2}=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(R_1+R_2)\,i_{l1}-R_2 i_{l2}=u_{S1}-u_{S2}\\ -R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)\,i_{l2}=u_{S2}\end{array}\right\}$$

标准形式回路方程：

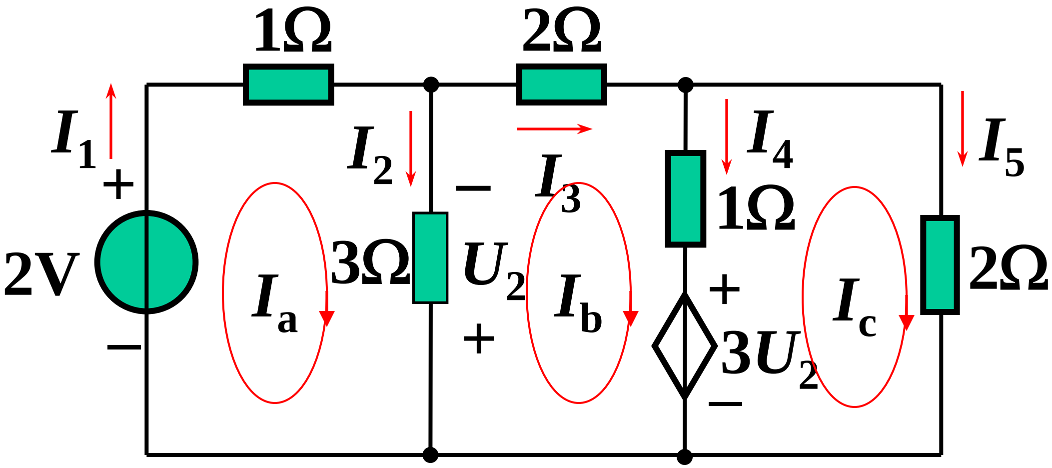
$$\left.\begin{array}{l}R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l2}=u_{Sl1}\\ R_{12}i_{l1}+R_{22}i_{l2}=u_{Sl2}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{12} & R_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{l1}\\ i_{l2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{sl1}\\ u_{sl2}\end{bmatrix}$$

R_{ii}自电阻： 该回路中的总电阻。始终为正。

R_{ij}互电阻： 两个回路公共的电阻。当两个回路电流流过此电阻的方向相同时，互电阻取正号；否则为负号。

U_{sli}回路中的等效电压源：回路i中所有电压源电压的代数和。 当电压源电压升方向与该回路方向一致时，取**正**号；反之取**负**号。

例1. 用回路法求含有受控电压源电路的各支路电流。



① 将VCVS看作独立源建立方程；

② 找出控制量和回路电流关系。

解：

① $\begin{cases} 4I_a-3I_b=2 \\ -3I_a+6I_b-I_c=-3U_2 \\ -I_b+3I_c=3U_2 \end{cases}$

② $U_2=3(I_b-I_a)$

将②代入①，得

③ $\begin{cases} 4I_a-3I_b=2 \\ -12I_a+15I_b-I_c=0 \\ 9I_a-10I_b+3I_c=0 \end{cases}$ 解得 $\Rightarrow$ $\begin{cases} I_a=1.19\text{A} \\ I_b=0.92\text{A} \\ I_c=-0.51\text{A} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

各支路电流为：

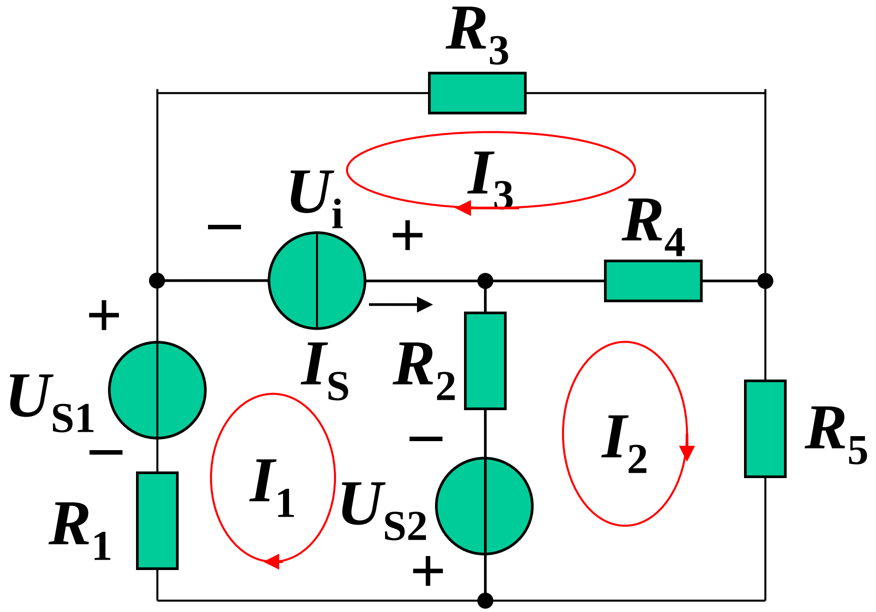
$I_1= I_a=1.19\text{A}$, $I_2= I_a- I_b=0.27\text{A}$, $I_3= I_b=0.92\text{A}$,

$I_4= I_b- I_c=1.43\text{A}$, $I_5= I_c=–0.52\text{A}$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3-9 & 6+9 & -1 \\ 0+9 & -1-9 & 3 \end{bmatrix}$$

校核： $1\times I_1+2I_3+2I_5=2.01$ $(\sum U_{R降}=\sum E_{升})$

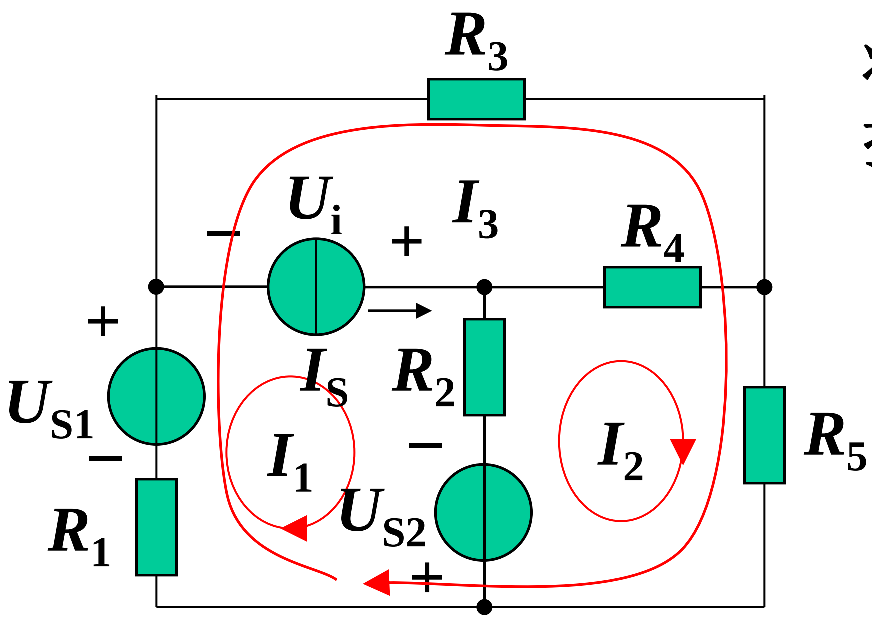
例2.　列写含有理想电流源支路的电路的回路电流方程。



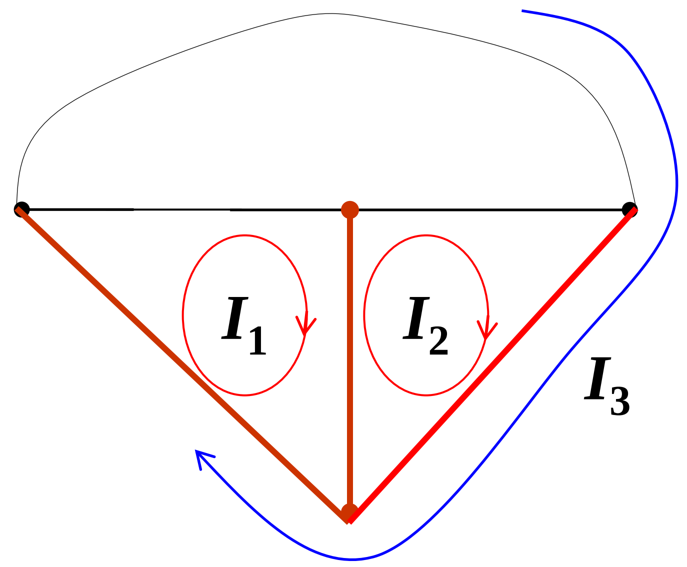
方法1：　引入电流源电压为变量，增加回路电流和电流源电流的关系方程。

$$
\begin{cases}
(R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_{S1}+U_{S2}+U_i \\
-R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2-R_4I_3=-U_{S2} \\
-R_4I_2+(R_3+R_4)I_3=-U_i \\
I_S=I_1-I_3
\end{cases}
$$

方法2：选取独立回路时，使理想电流源支路仅仅属于一个回路, 该回路电流即 I_S。



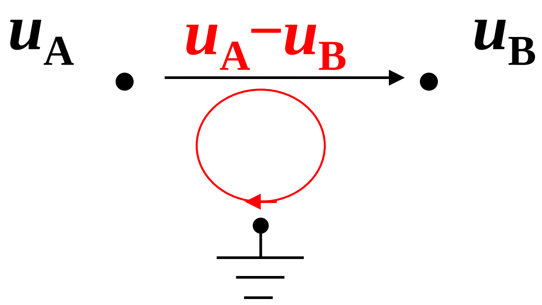
将理想电流源选作连支，
按单连支回路列写回路方程



$$\begin{cases} I_1 = I_S \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_4 + R_5) I_2 + R_5 I_3 = -U_{S2} \\ R_1 I_1 + R_5 I_2 + (R_1 + R_3 + R_5) I_3 = U_{S1} \end{cases}$$

4.2.3 节点电压法 (node voltage method)

任意选择参考点：其它节点与参考点的电压差即是节点电压(位)，方向为从独立节点指向参考节点。



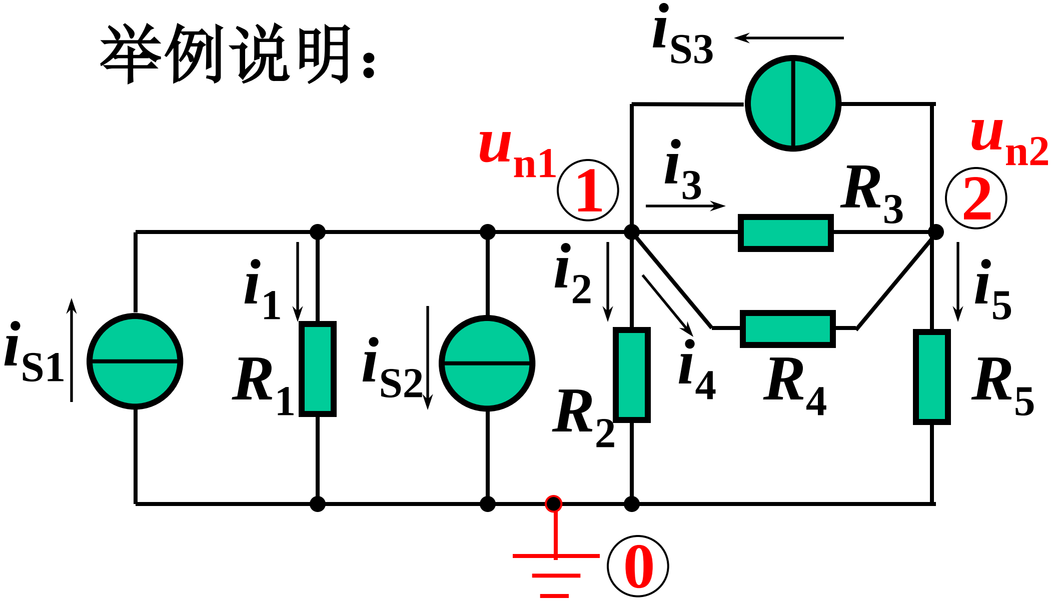
$$(u_A - u_B) + u_B - u_A = 0$$

KVL自动满足

<u>节点电压法</u>：以节点电压为未知量列写电路方程分析电路的方法。

可见，节点电压法的独立方程数为$(n-1)$个。与支路电流法相比，方程数可减少$b-(n-1)$个。

举例说明：



(1) 选定参考节点，标明其余n-1个独立节点的电压

(2) 列KCL方程：

$$\sum i_{R出}=\sum i_{S入}$$

$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3+i_4=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -i_3-i_4+i_5=-i_{S3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n1}}{R_1}+\dfrac{u_{n2}}{R_2}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}-\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}+\dfrac{u_{n2}}{R_5}=-i_{S3} \end{cases}$$

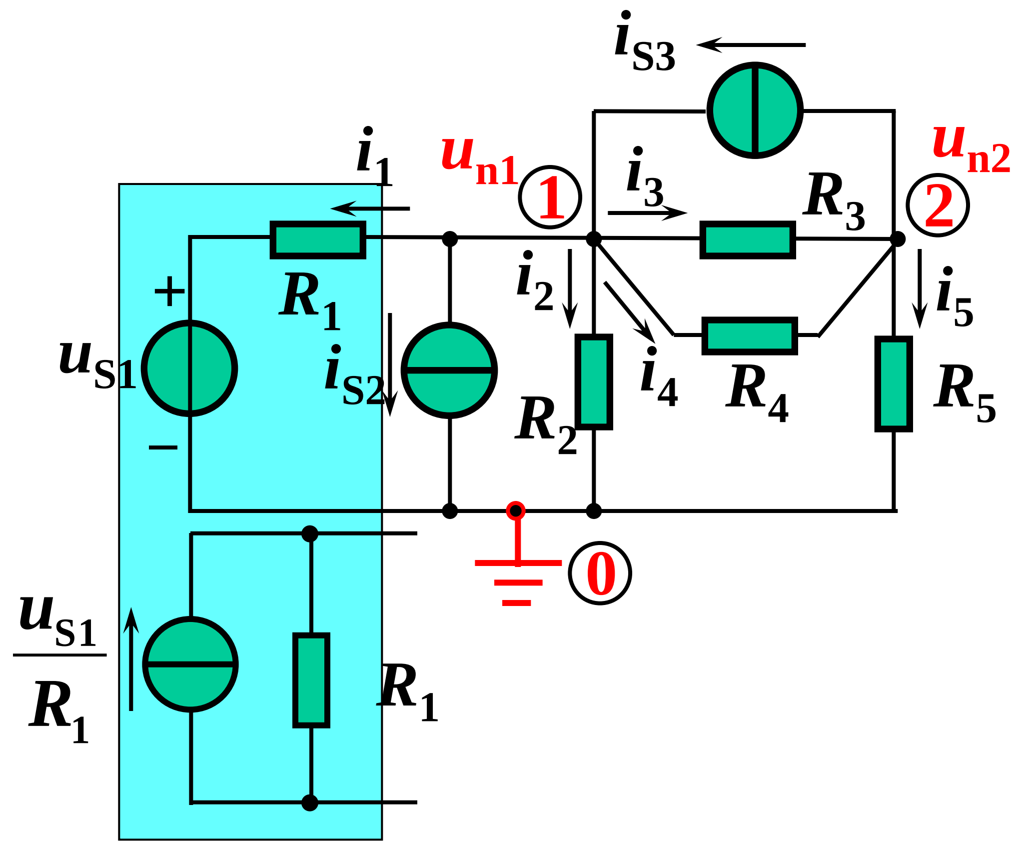
* 自电导总为正，互电导总为负。

* 流入节点的电流源为正，流出为负。

$$\begin{cases} \underline{\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)}u_{n1}-\underline{\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)}u_{n2}=\underline{i_{S1}-i_{S2}+i_{S3}} \\ -\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)u_{n2}=-i_{S3} \end{cases}$$

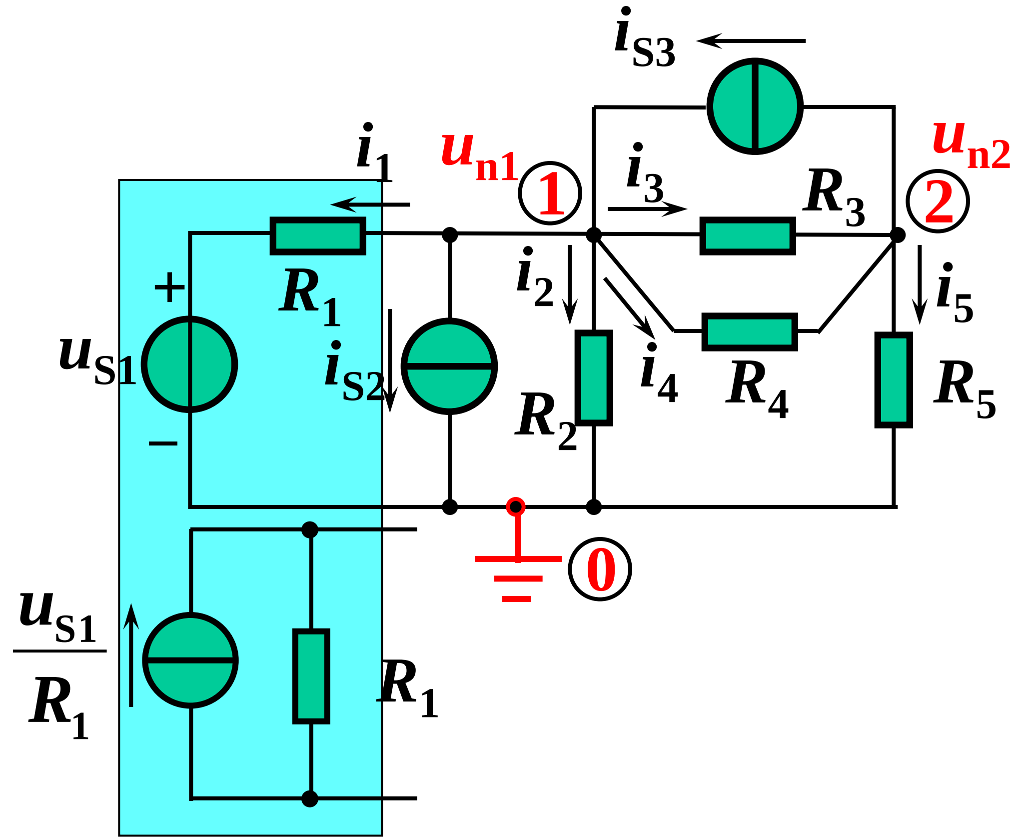
节点的等效电流源

若电路中含电压源与电阻串联的支路：



$$\begin{cases} \dfrac{u_{n1}-u_{S1}}{R_1}+\dfrac{u_{n2}}{R_2}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}=-i_{S2}+i_{S3} \\ -\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}-\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}+\dfrac{u_{n2}}{R_5}=-i_{S3} \end{cases}$$

若电路中含电压源与电阻串联的支路：



整理，并记$G_k=1/R_k$，得

等效电流源

$$
\begin{cases}
(G_1+G_2+G_3+G_4)u_{n1}-(G_3+G_4)\,u_{n2} = G_1\,u_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \\
-(G_3+G_4)\,u_{n1} + (G_1+G_2+G_3+G_4)u_{n2} = -i_{S3}
\end{cases}
$$

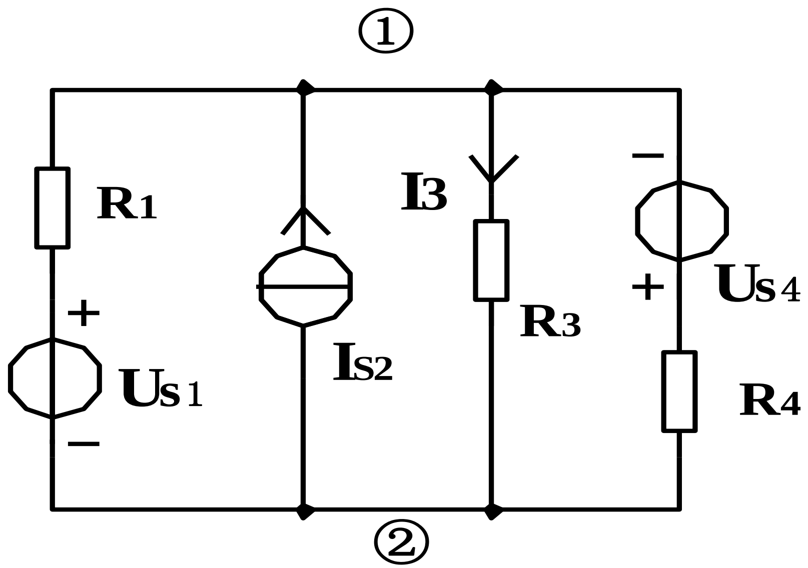
齐尔曼定理

当电路只包含两个节点时，

若设节点2为参考节点，则节点

1的电压表达式可由节点法直接

列写为：

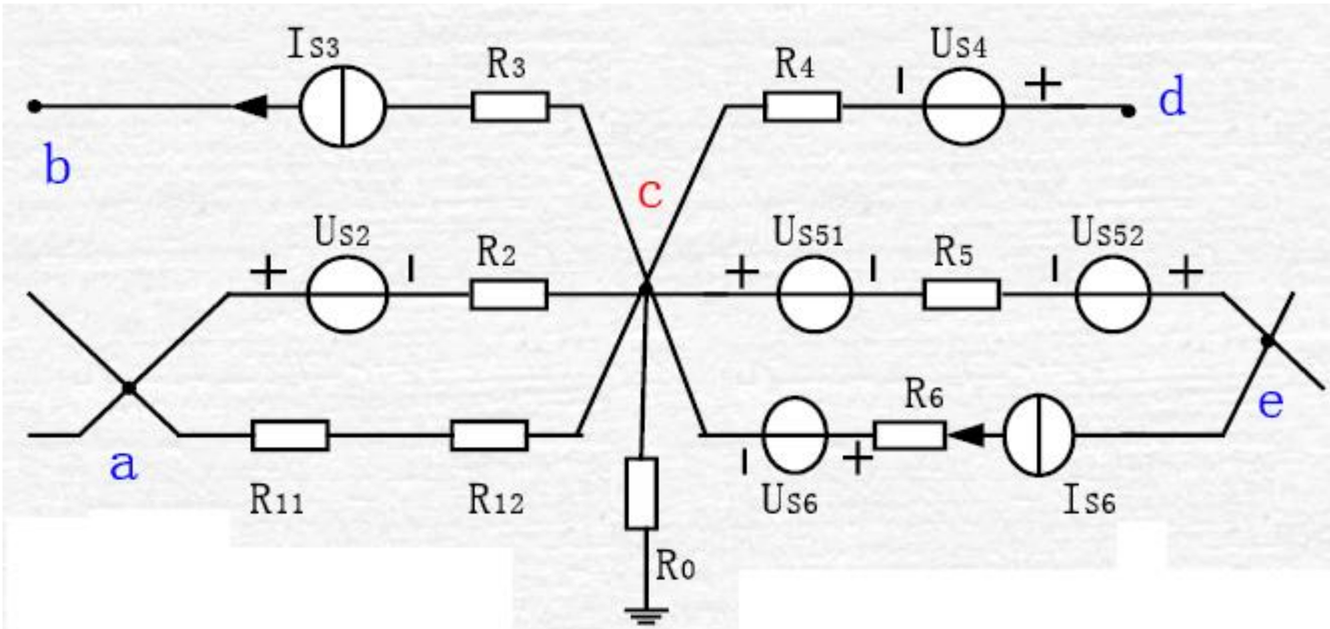


$$U_1=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}-\dfrac{U_{S4}}{R_4}+I_{S2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}$$

一般表达式：

$$U_N=\frac{\sum(\pm U_{Sj}\times G_j\pm I_{Si})}{\sum G_K}$$

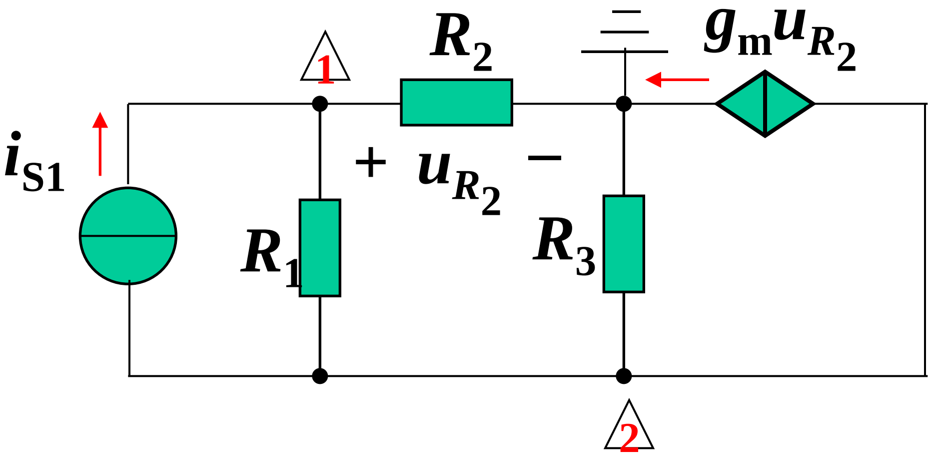
例2.



$$U_c\left(\cancel{\frac{1}{R_{11}}+\frac{1}{R_{12}}}+\frac{1}{R_2}+\cancel{\frac{1}{R_3}}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\cancel{\frac{1}{R_6}}+\frac{1}{R_0}\right)-U_a\left(\cancel{\frac{1}{R_{11}}+\frac{1}{R_{12}}}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\cancel{-U_b\frac{1}{R_3}}-U_d\frac{1}{R_4}-U_e\left(\frac{1}{R_5}+\cancel{\frac{1}{R_6}}\right)=-\frac{U_{s2}}{R_4}-I_{s3}-\frac{U_{s4}}{R_4}+\frac{-U_{s51}+U_{s52}}{R_5}+I_{s6}\cancel{-\frac{U_{s6}}{R_6}}$$

例3. 列写下图含VCCS电路的节点电压方程。



(1) 把受控源当作独立源

(2) 用节点电压表示控制量。

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1} - \dfrac{1}{R_1}u_{n2} = i_{S1} \\
-\dfrac{1}{R_1}u_{n1} + \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}\right)u_{n2} = -g_m u_{R_2} - i_{s1} \\
u_{R_2} = u_{n1}
\end{cases}
$$

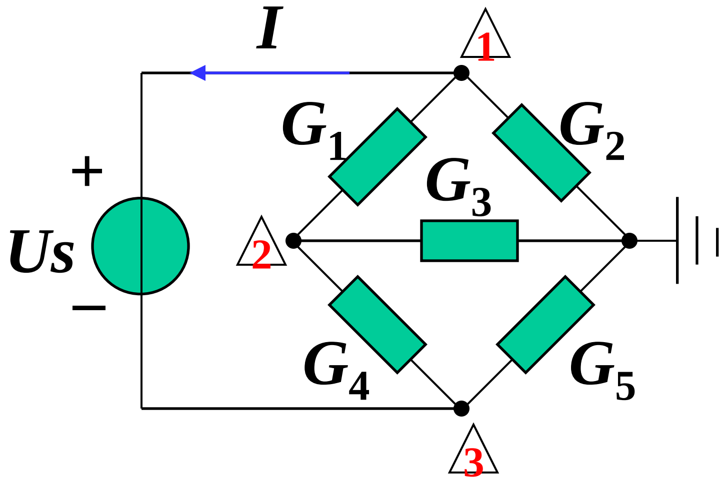
$$\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_1}+\frac{u_{n1}}{R_2}=i_{S1}$$

$$\frac{u_{n2}-u_{n1}}{R_1}+\frac{u_{n2}}{R_3}=-g_m u_{R_2}-i_{s1}$$

* 当电路含受控源时，系数矩阵一般不再为对称阵

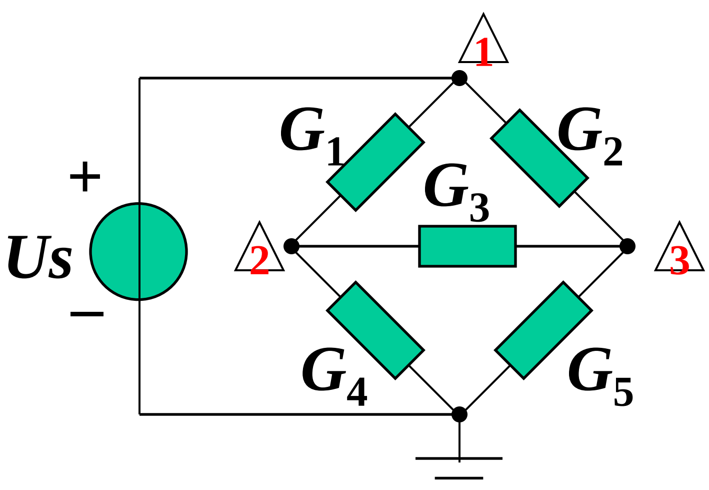
例4. 试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。

方法1:以电压源电流为变量，增加一个节点电压与电压源间的关系



$$\begin{cases} (G_1+G_2)U_1-G_1U_2+I=0 \\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3=0 \\ -G_4U_2+(G_4+G_5)U_3-I=0 \\ U_1-U_3=U_S \end{cases}$$

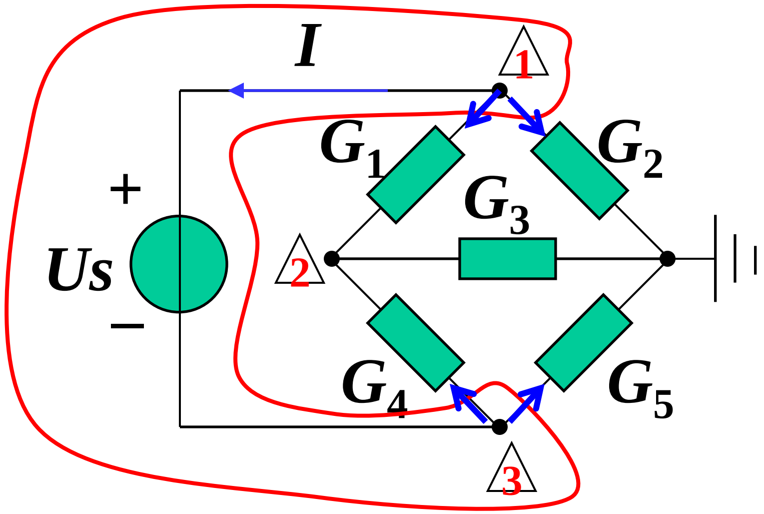
方法2： 选择合适的参考点



$$\begin{cases} U_1=U_S \\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_3U_3=0 \\ -G_2U_1-G_3U_2+(G_2+G_3+G_5)U_3=0 \end{cases}$$

例5. 试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。

方法1:以电压源电流为变量，增加一个节点电压与电压源间的关系



$$\begin{cases}(G_1+G_2)U_1-G_1U_2+I=0\\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3=0\\ -G_4U_2+(G_4+G_5)U_3-I=0\\ U_1-U_3=U_S\end{cases}$$

方法3： 设置超节点（Supernode）

$$\begin{cases}(G_1+G_2)U_1-G_1U_2\text{-}G_4U_2+(G_4+G_5)U_3=0\\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3=0\\ U_1-U_3=U_S\end{cases}$$

$$G_1(U_1\text{-}U_2)+G_2U_1+G_4(U_3\text{-}U_2)+G_5U_3=0$$

作业

2、4、6为交叉线

- 等效变换

  4.2，4，5，8，11*
- 支路法

  4.12，13
- 回路法

  4.15，16，18
- 节点法

  4.19，21，22，23

  4.24，25

只列写方程，三阶以上不求解

- 定理

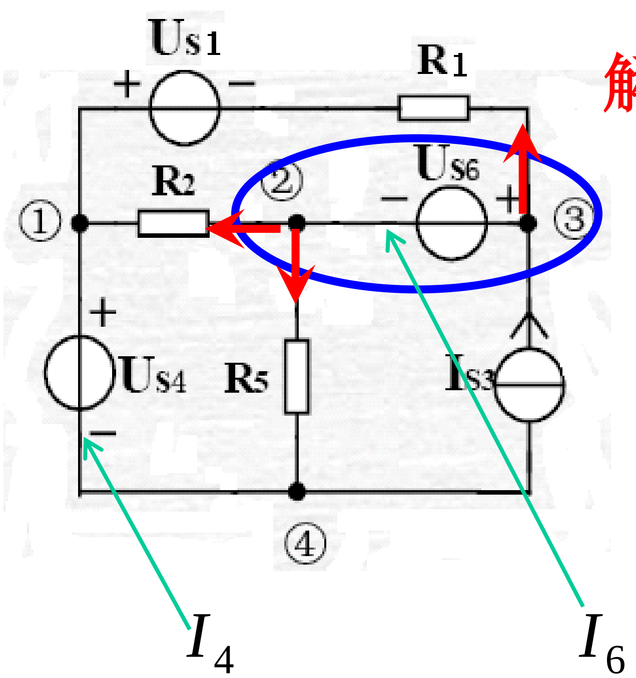
  4.27，30，31，32*

  4.35，36，37，38，39

  ~~4.41，42，43，44，47~~

特勒根（普通班略）

例6. 已知电路如图所示,求各支路电流。



解:

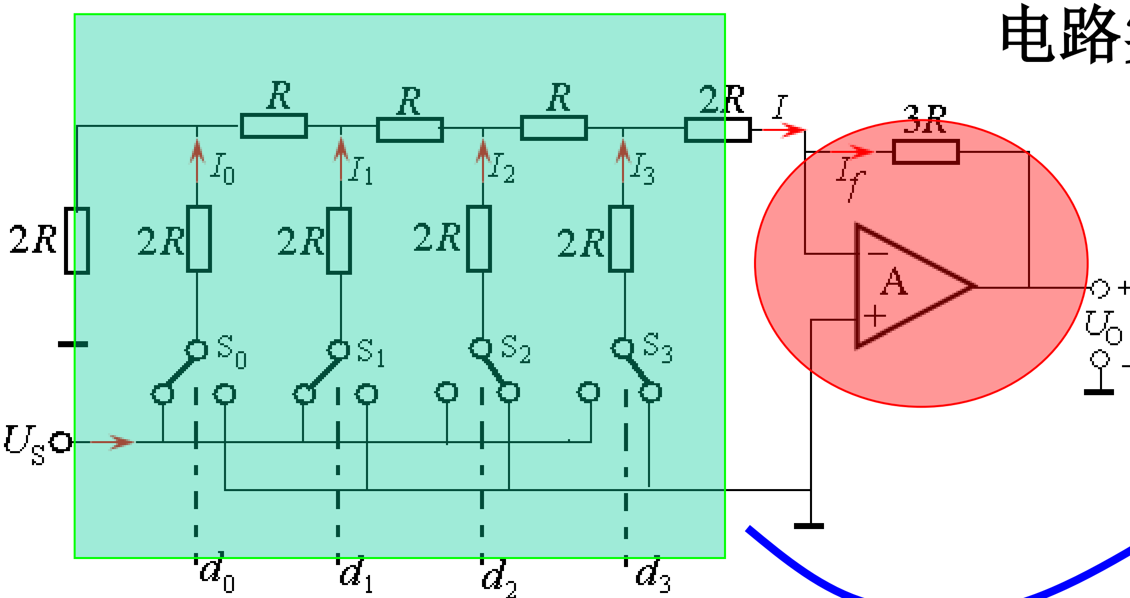
$$\underbrace{\frac{U_2-U_1}{R_2}}_{I_2}+\underbrace{\frac{U_2}{R_5}}_{I_5}-I_{s3}+\underbrace{\frac{U_3-U_1+U_{s1}}{R_1}}_{I_1}=0$$

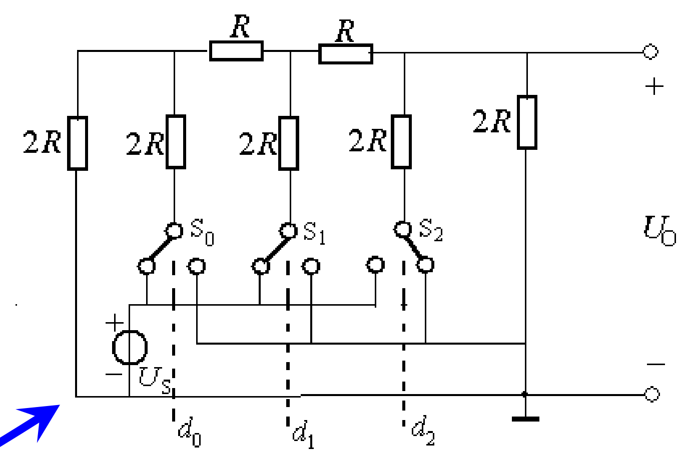
$$U_1=4V$$

$$U_3-U_2=U_{s6}$$

应用示例1：将数字量转换为模拟量称为数/模（D/A）转换。把四位二进制数（数字量）转换为十进制数（模拟量）的数/模变换电路如图所示。

电路实际为两部分，D/I和I/U

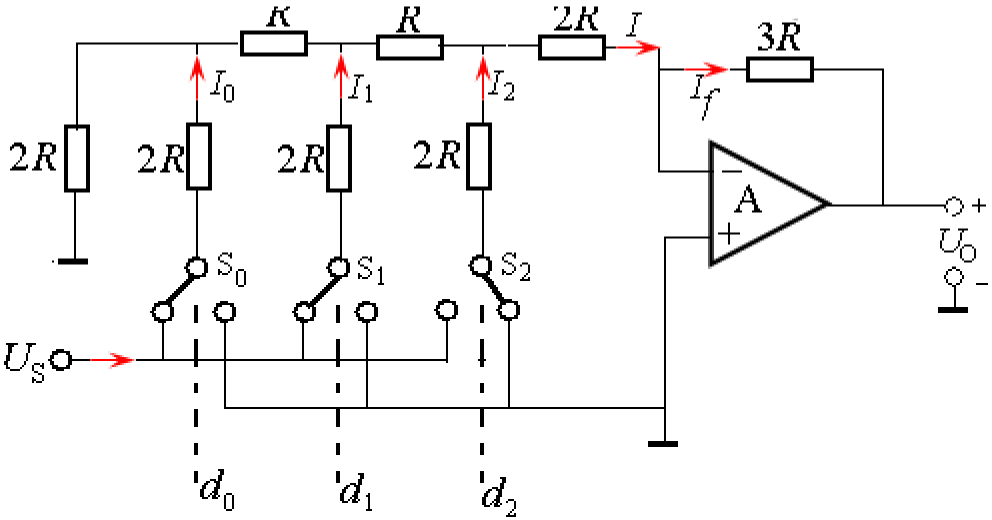


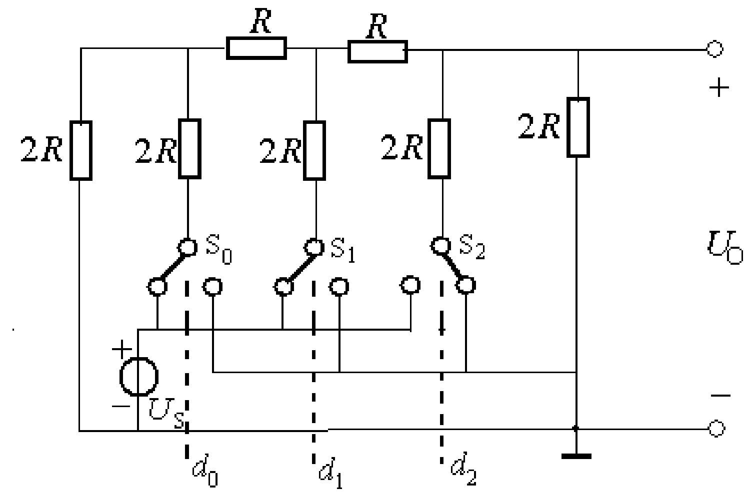


试证明，输出电压为：

$$U_0 = U_C = \frac{1}{2}U_S\frac{4d_2 + 2d_1 + d_0}{6} = \frac{1}{12}U_S(d_2 \times 2^2 + d_1 \times 2^1 + d_0 \times 2^0)$$

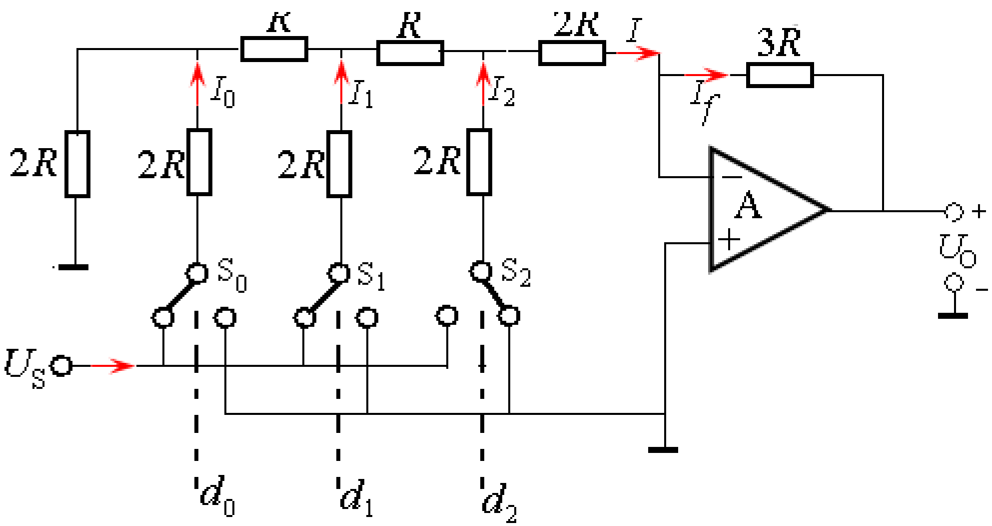
目前能力，我们只关心D/I部分−***R*-2*R*** **T**型电阻网络。（仅取3位**D/A**）

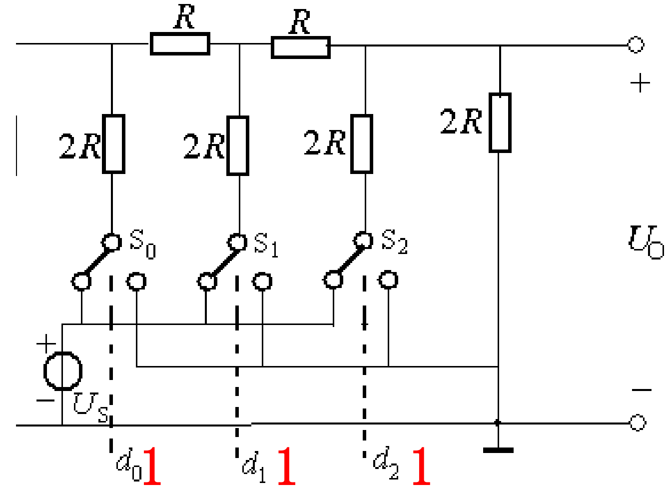




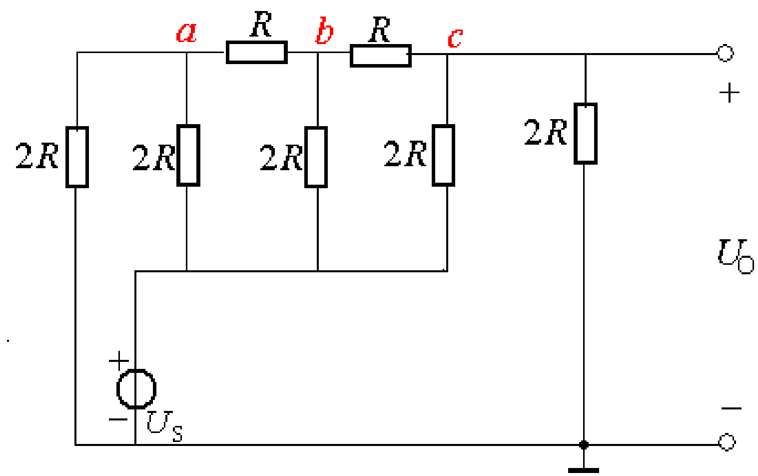
设十进制数为 k，则： $k = d_2 \times 2^2 + d_1 \times 2^1 + d_0 \times 2^0$

式中d_2、d_1、d_0为3位二进制数代码，取值为“0”或“1”（来自数字电路输出）。$S_2S_1S_0$为电子开关，当该位代码为“1”时，对应开关接通电源U_S；当该位代码为“0”时，则对应开关接地。已知R=1Ω。求U_0。





解： 假设输入*D*（二进制代码）为111开关均接通电源，如图所示，此时列写节点*a*、*b*、*c*的节点电压方程：

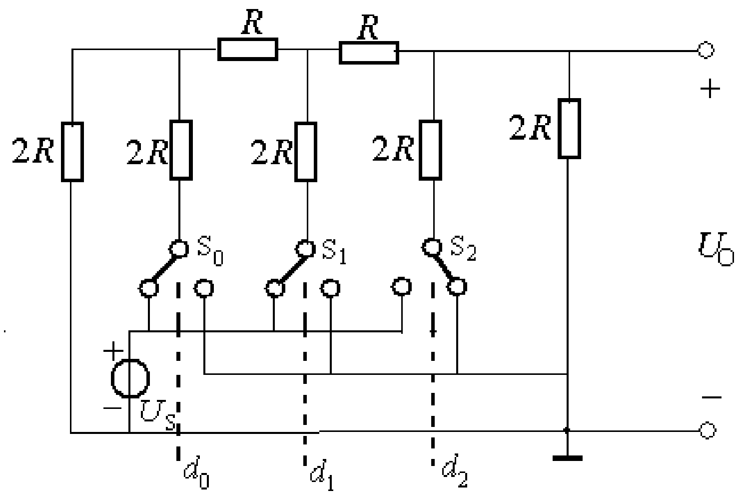


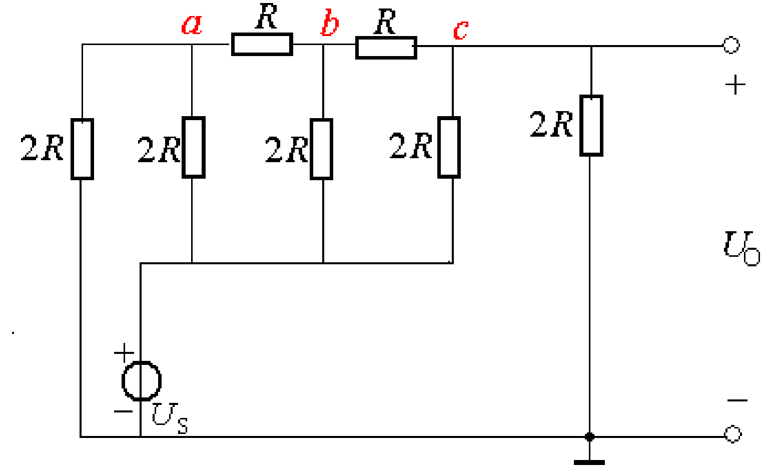
$$节点a:(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)U_a-U_b=\frac{1}{2}U_S$$

$$节点b:-U_a+(1+1+\frac{1}{2})U_b-U_C=\frac{1}{2}U_S$$

$$节点c:-U_b+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})U_c=\frac{1}{2}U_S$$

如果输入代码为000，则上述三个方程的右边均为0。





所以与输入代码相联系后的各节点电压方程：

$$\text{节点}a: 2U_a - U_b = d_0 \times \frac{1}{2}U_S$$

$$\text{节点}b: -U_a + \frac{5}{2}U_b - U_C = d_1 \times \frac{1}{2}U_S$$

$$\text{节点}c: -U_b + 2U_c = d_2 \times \frac{1}{2}U_S$$

解得节点*c*的电压为：

$$U_0 = U_C = \frac{1}{2}U_S \frac{4d_2 + 2d_1 + d_0}{6} = \frac{1}{12}U_S(d_2 \times 2^2 + d_1 \times 2^1 + d_0 \times 2^0)$$

取U_S=12V，则：

$$U_0 = U_C = (d_2 \times 2^2 + d_1 \times 2^1 + d_0 \times 2^0)$$

若输入二进制代码为“111”，则：

$$U_c = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 7$$

若输入二进制代码为“000”，则：

$$U_c = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$$