几个例子

例. 求解固有值问题

$$u'' + \lambda u = 0\,(0 < x < \ell),\ u(0) = u(\ell) = 0.$$

解. 当$\lambda < 0$时，方程的通解为$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

$$u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = C_1 + C_2 = 0,$$
$$u(\ell) = 0 \Rightarrow u(\ell) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0.$$

$$\text{由}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0,\ u \equiv 0,$

$\Rightarrow$当$\lambda < 0$时固有值问题只有零解。

几个例子

当$\lambda = 0$时，方程的通解为

$$u(x) = C_1 + C_2 x$$

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow u(0) = C_1 = 0, \\ u(\ell) = 0 &\Rightarrow u(\ell) = C_1 + C_2\ell = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0,\ u \equiv 0,$$

$\Rightarrow$当$\lambda = 0$时固有值问题只有零解。

几个例子

当$\lambda > 0$时，方程的通解为$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$.

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = C_2 = 0, \\ u(\ell) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\ell) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2 = 0,\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

(找非零解$C_1 \neq 0$) $\Rightarrow C_2 = 0, \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0, C_1$任意

$$\Rightarrow C_2 = 0, C_1\text{任意}, \lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$$

$\Rightarrow$ 当$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$时，非零解$u_k(x) = C_k \sin(\frac{k\pi x}{\ell}), k = 1, 2, \cdots$

C_k为任何不等于零的常数。

几个例子

综述: 固有值问题

$$u'' + \lambda u = 0\,(0 < x < \ell),\; u(0) = u(\ell) = 0.$$

有固有值$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$，相应的固有函数是$u_k(x) = C_k \sin(\frac{k\pi x}{\ell})$，其中$k = 1, 2, \cdots$。

几个例子

- 有无穷多个固有值$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty$.
- 相应于每个固有值 λ_k $(k = 1, 2, \cdots)$ 的所有固有函数组成一维的线性空间，记为 $\phi_k(x) = \sin(\frac{k\pi x}{\ell})$ 是这个线性空间的基，则$\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$相互正交，即

$$\int_0^{\ell} \phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0, \ k \neq n, \\ \frac{\ell}{2} \neq 0, \ k = n \end{cases}$$

- (广义Fourier级数)若函数$f(x) \in L^2[0, \ell]$ (即满足$\int_0^{\ell} |f(x)|^2 dx < +\infty$的函数),则存在常数$A_k$使得

$$f(x) = A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x) + \cdots + A_k\phi_k(x) + \cdots$$

$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\phi_k(x)dx$， $k = 1, 2, \cdots$。

几个例子

例. 求解固有值问题

$$u'' + \lambda u = 0\,(0 < x < \ell),\ u'(0) = u'(\ell) = 0.$$

解. 当$\lambda < 0$时，通解为$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\sqrt{-\lambda} - C_2\sqrt{-\lambda} = 0, \\ C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$\Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow \lambda < 0$时固有值问题只有零解。

几个例子

当$\lambda = 0$时，通解为$u(x) = C_1 + C_2 x$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow u'(0) = C_2 = 0,$$

$$u'(\ell) = 0 \Rightarrow u'(\ell) = C_2 \ell = 0.$$

$\Rightarrow C_2 = 0$而C_1可以取任意值,
$\Rightarrow \lambda = 0$时有非零解(固有函数)$u_0(x) = C_0$, $\lambda_0 = 0$是相应的固有值。

几个例子

当$\lambda > 0$时，通解为$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$.

$$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(0) = \sqrt{\lambda} C_1 = 0, \\ u'(\ell) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\ell) - C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

$$(\text{非零解}) \Rightarrow C_1 = 0, C_2\text{任意}, \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, u_k(x) = C_k \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$$

几个例子

当$\lambda > 0$时，通解为$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$.

$$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(0) = \sqrt{\lambda} C_1 = 0, \\ u'(\ell) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\ell) - C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

$$(\text{非零解}) \Rightarrow C_1 = 0, C_2\text{任意}, \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, u_k(x) = C_k \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$$

几个例子

综述：固有值问题

$$u'' + \lambda u = 0\,(0 < x < \ell),\ u'(0) = u'(\ell) = 0.$$

- 有固有值$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, k = 0, 1, 2, \cdots$。
- 固有函数是$u_k(x) = C_k \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$，$k = 0, 1, 2, \cdots$。
- 有无穷多个固有值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty.$$

几个例子

- 相应于每个固有值 λ_k 的所有固有函数组成一维的线性空间，记为 $\phi_k(x)=\cos(\frac{k\pi x}{\ell})$ 是这个线性空间的基，其中$k=0,1,2,\cdots$。则$\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$相互正交，

$$\int_0^\ell \phi_k(x)\phi_n(x)dx=\begin{cases}0,\ k\neq n,\\ \frac{\ell}{2},\ k=n\geq 1\\ \ell,\ k=n=0\end{cases}$$

- (广义Fourier级数)若函数$f(x)\in L^2[0,\ell]$(即$\int_0^\ell |f(x)|^2dx<+\infty$), 则

$$f(x)=A_0\phi_0(x)+A_1\phi_1(x)+A_2\phi_2(x)+\cdots+A_k\phi_k(x)+\cdots$$

$$A_0=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)dx,\ A_k=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\phi_k(x)dx\,(k=1,2,\cdots).$$

Sturm-Liouville 固有值问题

二阶线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases} [p(x)y']' + [-q(x) + \lambda s(x)]y = 0,\ a \le x \le b, \\ Ky(a) + Ly'(a) = 0,\ My(b) + Ny'(b) = 0 \end{cases}$$

其中 $p(x), q(x)$ 和 $s(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续函数，$p(x)$ 是可微的且 $p(x) > 0$和 $s(x) > 0$，λ 是一个参数，K, L, M 和 N 为给定的常数满足

$$K^2 + L^2 \neq 0,\ M^2 + N^2 \neq 0.$$

—-称为**Sturm-Liouville 固有值问题** (也称为**Sturm-Liouville 特征值问题**)。

主要关心: 当参数λ 取哪些值（称为**固有值或特征值**）时，S-L固有值问题有非零解（称为**固有函数或特征函数**）。

Sturm-Liouville 固有值问题

- Sturm-Liouville 固有值问题有无限多个固有值，$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty$.
- 每个固有值 λ_k 的所有固有函数组成一个一维的线性空间，记为 $\phi_k(x)$ 是这个线性空间的基，则 $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 在权 $s(x)$ 下正交，

$$\int_a^b s(x)\phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0, \ k \neq n, \\ \delta_k \neq 0, \ k = n \end{cases}$$

其中$\delta_k = \int_a^b s(x)\phi_k^2(x)dx \neq 0$.

- (广义Fourier级数)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上L^2可积(即满足$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$),则

$$f(x) = C_0\phi_0(x) + C_1\phi_1(x) + \cdots + C_k\phi_k(x)(x) + \cdots$$

其中$C_k = \frac{1}{\delta_k}\int_a^b s(x)f(x)\phi_k(x)dx$.

分离变量法

- 求解有界区域上（线性偏微分方程）定解问题的最基本,最常用的方法;
- 理论基础： 线性偏微分方程的叠加原理和Sturm-Liouville固有值问题;
- 主要思路： 把偏微分方程转化为求解常微分方程,把未知函数按固有函数展开表示成广义Fourier级数;
- 主要缺点： 对方程的求解区域有限制，区域要求为区间，矩形区域，圆域，柱域，球域等。

一维波动方程的自由振动

长为ℓ的两端固定的弦的自由振动,可以归纳为下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=\ell} = 0, \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), 0 < x < \ell. \end{cases}$$

其中$\phi(x)$和$\psi(x)$分别表示弦的初始位移和初始速度。
定解问题的数学特点是：**方程和边界条件都是齐次线性的，** 只有初始条件是非齐次的。

一维波动方程的自由振动

第一步： 求出满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和边界条件$u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=\ell} = 0$,且可分解为 $u(x,t) = X(x)T(t)$（分离变量）的所有非零解。

$$\text{方程} \Rightarrow X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

其中 $-\lambda$ 为常数。

$$\Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

把 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入边界条件$\Rightarrow X(0)T(t) = 0, X(\ell)T(t) = 0$,$X(x)$和$T(t)$ 满足

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,(0 < x < \ell) \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

一维波动方程的自由振动

第二步： 求出固有值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\,(0<x<\ell),\ X(0)=X(\ell)=0.$$

的所有固有值和相应的固有函数。

当 $\lambda<0$ **时**，方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$通解为

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

其中 C_1 和 C_2 为常数.

$$X(0)=X(\ell)=0\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}\ell}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}=0.\end{cases}$$

$\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0\Rightarrow$固有值问题在$\lambda<0$范围内不存在固有值和固有函数。

一维波动方程的自由振动

固有值问题$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0\,(0<x<\ell), \\ X(0)=X(\ell)=0. \end{cases}$

当 $\lambda=0$ 时，方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$通解为

$$X(x)=C_1x+C_2$$

$$X(0)=X(\ell)=0 \Rightarrow C_2=0,\ C_1\ell+C_2=0 \Rightarrow C_1=C_2=0$$

$\Rightarrow X(x)\equiv 0 \Rightarrow \lambda=0$不是固有值。

一维波动方程的自由振动

固有值问题$X''(x)+\lambda X(x)=0\,(0<x<\ell)$, $X(0)=X(\ell)=0$.
当 $\lambda>0$ **时**，方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$ 通解为

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x \\ X(0) &= X(\ell)=0 \Rightarrow C_1=0,\ C_1\cos\sqrt{\lambda}\ell + C_2\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0. \end{aligned}$$

解得 $C_1=0$, $C_2\sin\sqrt{\lambda}\ell=0$.为保证有非零解$\Rightarrow C_2\neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\ell=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell=n\pi, (n=1,2,3,\cdots)$。因此$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 时固有值问题有非零解（固有函数）

$$X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ n=1,2,3,\cdots.$$

一维波动方程的自由振动

第一步和第二步综述:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0\,(0<x<\ell) \\ X(0)=X(\ell)=0, \end{cases} \qquad T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0$$

- $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}(n=1,2,3,\cdots)$
- 固有值问题非零解$X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ n=1,2,3,\cdots.$
- $T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi at}{\ell},\ n=1,2,3,\cdots$
- 可分离变量的所有非零解（即满足第一步要求的分离变量解）为

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{\ell}+B_n\sin\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

其中$n=1,2,3,\cdots,A_n=a_nC_n,\ B_n=b_nC_n$。

一维波动方程的自由振动

第三步: 解的叠加，求出满足初边值问题的解。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < \ell, \; t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \; u(x,t)|_{x=\ell} = 0, \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), 0 < x < \ell. \end{cases}$$

线性方程的叠加原理边界条件的齐次性$\Rightarrow$ 级数（只要级数收敛）

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \end{aligned}$$

满足方程和边界条件。选取 A_n 和 B_n 使得它满足初始条件:

一维波动方程的自由振动

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \phi(x),\ 0<x<\ell \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x),\ 0<x<\ell. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x)\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{\ell} + B_n\sin\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

一维波动方程的自由振动的一个例子

例. 用分离变量法求解

$$\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 0,\ 0 < x < 2\pi, t > 0 \\ v_x(0,t) = 0,\ v(2\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = -10\cos(\frac{x}{4}),\ v_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

解 **第一步:** $v(x,t) = X(x)T(t)$代入方程

$$\Rightarrow X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda,$$

代入边界条件$\Rightarrow X'(0)T(t) = 0, X(2\pi)T(t) = 0$,$X(x)$和$T(t)$ 满足

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,(0 < x < 2\pi) \\ X'(0) = X(2\pi) = 0 \end{cases} \quad T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0.$$

一维波动方程的自由振动的一个例子

第二步: 讨论固有值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<2\pi \\ X'(0)=0,\ X(2\pi)=0 \end{cases}$

当 $\lambda<0$ **时**, 方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$通解为

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

其中 C_1 和 C_2 为常数.

$$X'(0)=0\Rightarrow\sqrt{-\lambda}C_1-\sqrt{-\lambda}C_2=0$$
$$X(2\pi)=0\Rightarrow C_1e^{2\sqrt{-\lambda}\pi}+C_2e^{-2\sqrt{-\lambda}\pi}=0.$$

$\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$

一维波动方程的自由振动的一个例子

第二步: 讨论固有值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<2\pi \\ X'(0)=0,\ X(2\pi)=0 \end{cases}$

当 $\lambda<0$ **时**，方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$通解为

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

其中 C_1 和 C_2 为常数.

$$X'(0)=0\Rightarrow\sqrt{-\lambda}C_1-\sqrt{-\lambda}C_2=0$$
$$X(2\pi)=0\Rightarrow C_1e^{2\sqrt{-\lambda}\pi}+C_2e^{-2\sqrt{-\lambda}\pi}=0.$$

$\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$

一维波动方程的自由振动的一个例子

固有值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0\,(0<x<2\pi), \\ X'(0)=X(2\pi)=0. \end{cases}$

当 $\lambda=0$ **时**，方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$通解为

$$X(x)=C_1x+C_2$$

$$X'(0)=X(2\pi)=0\Rightarrow C_1=0,\ 2\pi C_1+C_2=0\Rightarrow C_1=C_2=0$$

$\Rightarrow X(x)\equiv 0\Rightarrow \lambda=0$不是固有值。

一维波动方程的自由振动的一个例子

固有值问题$X''(x)+\lambda X(x)=0\,(0<x<2\pi),\ X'(0)=X(2\pi)=0.$
当 $\lambda>0$ **时**，方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$ 通解为

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$X'(0)=X(\ell)=0\Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}=0,\ C_1\cos 2\pi\sqrt{\lambda}+C_2\sin 2\pi\sqrt{\lambda}=0.$$

解得 $C_2=0,\ C_1\cos 2\pi\sqrt{\lambda}=0.$为保证有非零解$\Rightarrow C_1\neq 0\Rightarrow$ $\cos 2\pi\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow 2\pi\sqrt{\lambda}=(n-1/2)\pi,(n=1,2,3,\cdots)$。因此$\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)}{4}\right)^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 时固有值问题有非零解（固有函数）

$$X_n(x)=c_n\cos\frac{(2n-1)x}{4},\ n=1,2,3,\cdots.$$

一维波动方程的自由振动的一个例子

第一步和第二步综述:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,(0 < x < 2\pi) \\ X'(0) = X(2\pi) = 0, \end{cases} \qquad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{4}\right)^2$时$(n = 1, 2, 3, \cdots)$
- 固有值问题非零解$X_n(x) = c_n \cos\frac{(2n-1)x}{4},\ n = 1, 2, 3, \cdots$.
- $T_n(t) = a_n \cos\frac{(2n-1)t}{2} + b_n \sin\frac{(2n-1)t}{2},\ n = 1, 2, 3, \cdots$
- 可分离变量的所有非零解（即满足第一步要求的分离变量解）为

$$v_n(x,t) = [A_n \cos\frac{(2n-1)t}{2} + B_n \sin\frac{(2n-1)t}{2}] \cos\frac{(2n-1)x}{4},$$

其中$n = 1, 2, 3, \cdots, A_n = a_n C_n,\ B_n = b_n C_n$。

一维波动方程的自由振动的一个例子

定解问题: $\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 0,\ 0 < x < 2\pi,\ t > 0 \\ v_x(0,t) = 0,\ v(2\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = -10\cos(\frac{x}{4}),\ v_t(x,0) = 0. \end{cases}$

第三步: $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos\frac{(2n-1)t}{2} + B_n \sin\frac{(2n-1)t}{2}]\cos\frac{(2n-1)x}{4}$,满足方程以及边值条件,选取$A_n$及$B_n$使满足初值条件,

$$v(x,0) = -10\cos(\frac{x}{4}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n-1)x}{4} = -10\cos\frac{x}{4},$$

$$v_t(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(2n-1)}{2}\cos\frac{(2n-1)x}{4} = 0.$$

解得$A_1 = -10,\ A_n = 0(n = 2,3,\cdots),\ B_n = 0(n = 1,2,\cdots)$.

$$\Rightarrow v(x,t) = -10\cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{x}{4}).$$

无热源的有界杆的热传导问题

考虑长度为ℓ,侧面绝热且自身不产生热量，一端温度恒为零而另一端绝热的有界杆,它的温度分布状况可归结为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < \ell, \ t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), 0 < x < \ell. \end{cases}$$

其中$\phi(x)$是它的初始温度。

无热源的有界杆的热传导问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < \ell, \ t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = 0, \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), 0 < x < \ell. \end{cases}$$

第一步： 求出满足齐次方程和齐次边界条件的可写为 $u(x,t) = X(x)T(t)$（分离变量）的所有非零解。$u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入齐次方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

函数 $X(x)$ 和 $T(t)$ 分别满足

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

$u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入边界条件 $u(x,t)|_{x=0} = 0, \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=\ell} = 0$

$$\Rightarrow X(0)T(t) = 0, \ X'(\ell)T(t) = 0, \ \Rightarrow X(0) = X'(\ell) = 0$$

无热源的有界杆的热传导问题

由此函数 $X(x)$ 和 $T(t)$ 分别满足

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(\ell) = 0. \end{cases} \qquad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

无热源的有界杆的热传导问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(\ell) = 0. \end{cases} \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

第二步: 求出固有值问题$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = X'(\ell) = 0$的所有的固有值和固有函数。

- 当 $\lambda < 0$ 时，通解为$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$
$$X'(\ell) = 0 \Rightarrow C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0.$$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$只有零解。

无热源的有界杆的热传导问题

固有值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X'(\ell) = 0.$$

- 当 $\lambda = 0$时，通解为$X(x) = C_1 x + C_2$,

$X(0) = X'(\ell) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,\ C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$

固有值问题只有零解。

无热源的有界杆的热传导问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases} \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- 当 $\lambda > 0$ 时，通解为$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$
$$X'(\ell) = 0 \Rightarrow -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\ell + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\ell = 0.$$

$\Rightarrow C_1 = 0, C_2 \cos\sqrt{\lambda}\ell = 0 (C_2 \neq 0) \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\ell = 0$
$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell = (n - 1/2)\pi, (n = 1, 2, 3, \cdots)$。

▷ $\lambda_n = \frac{(n-1/2)^2\pi^2}{\ell^2}$

▷ $X_n(x) = C_n \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}$,

▷ $T_n(t) = a_n e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t}$,

无热源的有界杆的热传导问题

▷ $X_n(x) = C_n \sin \frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}$,

▷ $T_n(t) = a_n e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2 a^2}{\ell^2} t}$,

齐次方程和边界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \end{cases}$$

的所有可能的可变量分离的非零解:

▷ $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2 a^2}{\ell^2} t} \sin \frac{(n-1/2)\pi x}{\ell} (n = 1, 2, 3, \cdots)$

无热源的有界杆的热传导问题

$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}$

第三步: 叠加原理和边界条件的齐次性质

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}$$

满足齐次方程以及边界条件.找到适当的A_n 使得它能满足初始条件

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell} = \phi(x),$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x)\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}dx,\ n = 1,2,3,\cdots$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

半径为 a的薄圆盘，上下两面绝热，薄圆盘边缘的温度为 $\psi(x,y)$, 内部不产生热量,经过一段时间后，薄圆盘的温度达到平衡，求温度分布 $u(x,y)$?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x^2+y^2\le a^2, \\ |u(x,y)|<+\infty,\ \ x^2+y^2\le a^2, \\ u(x,y)=\psi(x,y),\ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ |u(x,y)| < +\infty, \ \ x^2 + y^2 \le a^2, \\ u(x,y) = \psi(x,y), \ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

引进极坐标$x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta,$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = u(x,y), \ \phi(\theta) = \psi(a\cos\theta, a\sin\theta),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ 0 < r < a, \ 0 \le \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| < +\infty, \ 0 < r < a, \ 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \ \ 0 < r < a, \ 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(r,\theta)|_{r=a} = \phi(\theta). \end{cases}$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

研究 $\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, 0 < r < a, 0 \le \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| < +\infty, u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \\ u(r,\theta)|_{r=a} = \phi(\theta). \end{cases}$

第一步： 求出满足齐次方程和条件 $|u(r,\theta)| < +\infty$以及$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)$的可写为 $u(r,\theta) = R(r)H(\theta)$（分离变量）的所有非零解。 $u(r,\theta) = R(r)H(\theta)$ 代入齐次方程

$$\Rightarrow (rR'(r) + r^2R''(r))H(\theta) + H''(\theta)R(r) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{H''(\theta)}{H(\theta)} = -\frac{rR'(r)+r^2R''(r)}{R(r)} = -\lambda,$$

函数 $R(r)$ 和 $H(\theta)$分别满足

$$H''(\theta) + \lambda H(\theta) = 0, r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$R(r)$ 和 $H(\theta)$分别满足什么边界条件?

$$\begin{aligned}
u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi) &\Rightarrow R(r)H(\theta)=R(r)H(\theta+2\pi)\\
&\Rightarrow H(\theta)=H(2\pi+\theta),\\
|u(r,\theta)|<+\infty &\Rightarrow R(r)H(\theta)<+\infty\Rightarrow|R(r)|<+\infty.
\end{aligned}$$

因此函数 $R(r)$ 和 $H(\theta)$ 分别满足

$$\begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0,\\ H(\theta)=H(2\pi+\theta),\end{cases}\quad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ 0\le r\le a\\ |R(r)|\text{有界},\ 0\le r\le a.\end{cases}$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0, \\ H(\theta)=H(2\pi+\theta), \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ 0\le r\le a \\ |R(r)|有界,\ 0\le r\le a. \end{cases}$$

第二步: 求出固有值问题$H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0, H(\theta)=H(2\pi+\theta)$的所有的固有值和固有函数。

- 当 $\lambda<0$ 时，通解为$H(\theta)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}\theta}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$.由条件$H(\theta)=H(2\pi+\theta)$

$$\Rightarrow C_1(1-e^{2\pi\sqrt{-\lambda}})e^{\sqrt{-\lambda}\theta}+C_2(1-e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}})e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}=0$$
$$\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow H(\theta)=0\Rightarrow 只有零解$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0, \\ H(\theta)=H(2\pi+\theta), \end{cases} \quad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ 0\le r\le a \\ |R(r)|\text{有界},\ 0\le r\le a. \end{cases}$$

- 当 $\lambda=0$ 时，通解为$H(\theta)=C_1\theta+C_2$,由条件 $H(\theta)=H(2\pi+\theta)\Rightarrow 2\pi C_1=0\Rightarrow C_1=0,C_2$ 为任意。固有值问题有固有值$\lambda_0=0$,固有函数$H_0(\theta)=C_0$,其中 C_0 为任意非零常数。

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

求出固有值问题$H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0,\ H(\theta)=H(2\pi+\theta)$的所有的固有值和固有函数。

▶ 当 $\lambda>0$ 时，通解为$H(\theta)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\theta+C_2\sin\sqrt{\lambda}\theta$,由条件$H(\theta)=H(2\pi+\theta)\Rightarrow\lambda=n^2(n=1,2,3,\cdots)$,$C_1$ 和 C_2 为任意非零常数.固有值和固有函数

$$\lambda=n^2,\ H_n(\theta)=C_n\cos(n\theta)+D_n\sin(n\theta),\ n=1,2,3,\cdots.$$

综合: 固有值问题$H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0,\ H(\theta)=H(2\pi+\theta)$的所有的固有值和固有函数:

- 固有值$\lambda_n=n^2(n=0,1,2,3,\cdots)$
- 固有函数$H_n(\theta)=C_n\cos(n\theta)+D_n\sin(n\theta)\ (n=0,1,2,3,\cdots)$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0, \\ H(\theta)=H(2\pi+\theta), \end{cases} \quad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ 0\le r\le a \\ |R(r)|\text{有界},\ 0\le r\le a. \end{cases}$$

对$\lambda_n=n^2(n=0,1,2,3,\cdots)$，$H(\theta)$有非零解

$$H_n(\theta)=C_n\cos(n\theta)+D_n\sin(n\theta),$$

这时$R(r)$是否仍有非零解?

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0,\ 0\le r\le a \\ |R(r)|\text{有界},\ 0\le r\le a. \end{cases}$$

是一个 **欧拉方程**.作变换$r=e^t,R(r)=R(t)$,

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0\Rightarrow R''(t)-n^2R(t)=0$$

$$\Rightarrow\quad R_n(t)=\begin{cases} a_0+b_0t,\ n=0 \\ a_ne^{nt}+b_ne^{-nt},\ n=1,2,\cdots \end{cases}$$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} H''(\theta)+\lambda H(\theta)=0, \\ H(\theta)=H(2\pi+\theta), \end{cases} \quad \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ 0\le r\le a \\ |R(r)|\text{有界},\ 0\le r\le a. \end{cases}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0 \Rightarrow R''(t)-n^2R(t)=0$$

$$\Rightarrow \quad R_n(r)=\begin{cases} a_0+b_0\ln r,\ n=0 \\ a_nr^n+b_nr^{-n},\ n=1,2,\cdots \end{cases}$$

由 $|R(r)|<+\infty \Rightarrow R_n(r)=a_nr^n,\ n=0,1,2,\cdots,$

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,\ 0 < r < a,\ 0 \le \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| < +\infty,\ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \\ u(r,\theta)|_{r=a} = \phi(\theta). \end{cases}$$

当$\lambda_n = n^2(n = 0, 1, 2, \cdots)$时，

$$H_n(\theta) = C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta),\ R_n(r) = a_n r^n,$$

综述: 满足齐次方程和条件 $|u(r,\theta)| < +\infty$以及$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)$的所有可分离变量的非零解

$$u_n(r,\theta) = r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)),\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

其中 A_n 和 B_n 是任意不同时为非零的常数。

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ 0 < r < a, \ 0 \leq \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| < +\infty, \ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi), \\ u(r,\theta)|_{r=a} = \phi(\theta). \end{cases}$$

第三步：解的叠加，求出满足边值问题的解。线性方程的叠加原理以及条件 $|u(r,\theta)| < +\infty$以及$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)$的可加性,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)), \end{aligned}$$

满足方程和 $|u(r,\theta)| < +\infty$以及$u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)$条件。选取 A_n 和 B_n 使得它满足条件 $u(a,\theta) = \phi(\theta)$,

圆域内的拉普拉斯(Laplace)方程

条件 $u(a,\theta)=\phi(\theta)\Rightarrow$,

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)\right)=\phi(\theta),$$

上式说明系数 a^nA_n 和 a^nB_n 为函数 $\phi(\theta)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上 Fourier 展开式的系数,

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)d\theta$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\sin(n\theta))d\theta$$

其中 $n=1,2,\cdots$,把 A_n 和 B_n 代入得到边值问题的解。