浙江大学 2006－2007 学年春季学期

《 微积分Ⅱ 》课程期末考试试卷

开课学院：理学院 考试形式：闭卷 考试时间：　 年　 月　 日 所需时间：120 分钟

考生姓名：________________学号：________________专业：________________

一、 填空题（每小题 5 分，满分 30 分）

1．直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{6}$ 在平面 $2x+y-2z-5=0$ 上的投影直线方程为

________________________.

2．数量场 $g(x,y,z)=ye^{x}+z^{2}$ 在 $P(1,\sqrt{3},0)$ 点的梯度为 $\vec{u}=$ ______________.

函数 $f(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{y^{2}+z^{2}})$ 在 P 点沿 $\vec{u}$ 的方向导数为___________.

3．设 $z=f(x,u),u=\varphi(3x,x+2y),\ f,\varphi$ 具有二阶连续偏导数，则

$\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}=$ ____.

4．设 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,x^{3}\le y\le 1\}$，则 $\iint\limits_{D}(x^{2}+xye^{x^{2}+y^{2}})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____________.

5．已知曲面 $xyz=1$ 与椭球面 $x^{2}+\dfrac{y^{2}}{3}+\dfrac{z^{2}}{9}=1$ 在第一卦限内相切，则切点坐标为

______________，公共切平面方程为__________________________.

6．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2}, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ x, & \dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases}$，$S(x)=\dfrac{a_{0}}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos n\pi x$ ，其中

$a_{n}=2\int_{0}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,\cdots$，则 $S(\frac{7}{2})=$ __________.

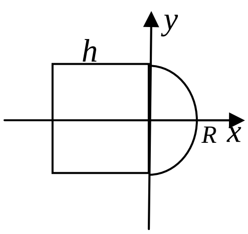
二、（满分 10 分）求直线 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\ 2x+y+z-2=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转曲面方程.

三、（满分 10 分）计算 $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\frac{\sqrt{x}}{2}}e^{-2y^{2}}\mathrm{d}y$.

四、 **(满分 15 分)** 已知 $z=z(x,y)$ 由方程 $yz^3+xe^z+1=0$ 确定，试求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

五、 （**满分 15 分**）设平面 π: $x+y=1$, $d(x,y,z)$ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 上的点 (x,y,z) 到平面 π 的距离，求 $d(x,y,z)$ 的最大，最小值 .

六、 **(满分 15 分)** 如图是一块密度为 ρ （常数）的薄板的平面图形（在一个半径为 R 的半圆直径上拼上一个矩形，矩形的另一边为 h）,已知平面图形的形心位于原点 (0, 0). 试求：1. 长度 h；2.薄板绕 x 轴旋转的转动惯量.



七、**(满分 5 分)** 求证:当 $t\ge 1$, $s\ge 0$ 时，成立不等式 $ts\le t\ln t-t+e^s$.

参考解答：

一．1．$\begin{cases}3x-4y+z=0\\2x+y-2z-5=0\end{cases}$；　　2. $\{\sqrt{3}e, e, 0\}$, $\frac{1}{2}$；

3. $2f''_{12}\varphi'_2+2f''_{22}\cdot(3\varphi'_1\cdot\varphi'_2+(\varphi'_2)^2)+2f'_2\cdot(3\varphi''_{12}+\varphi''_{22})$；　4. $\frac{2}{3}$;　　*6. $\frac{3}{8}$.(微 3)

5. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}\right)$,　$\sqrt{3}x+y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-3=0$;

设切点：(x_0, y_0, z_0)，法矢量 $\{y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0\}//\{x_0, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{9}\}$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{y_0z_0}=\frac{y_0}{3x_0z_0}=\frac{z_0}{9x_0y_0} \quad \Rightarrow \frac{x_0^2}{x_0y_0z}=\frac{y_0^2}{3x_0y_0z}=\frac{z_0^2}{9x_0y_0z}$$

$$\Rightarrow x_0^2=\frac{y_0^2}{3}=\frac{z_0^2}{9} \Rightarrow 3x_0^2=1 \Rightarrow x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}, y_0=1, z_0=\sqrt{3}$$

二．直线：$x=t, y=1-t, z=1-t$

曲面上点 $P(x,y,z)\to$ 直线上点 (x_0, y_0, z_0), $y_0=1-x_0, z_0=1-x_0$

$$x=x_0, y^2+z^2=y_0^2+z_0^2, \Rightarrow y^2+z^2=(1-x)^2+(1-x)^2$$

则旋转曲面方程：$y^2+z^2=2(1-x)^2$

三．$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{\sqrt{x}}{2}} e^{-2y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{4y^2}^1 e^{-2y^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2y^2}(1-4y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2y^2}\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}} y\,\mathrm{d}e^{-2y^2}=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2y^2}\mathrm{d}y+ye^{-2y^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

四．$z(0,1)=-1$,　$y\cdot 3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+e^z+xe^z\frac{\partial z}{\partial x}=0$,　　$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{1}{3e}$

$$y\cdot 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\cdot 6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2e^z\frac{\partial z}{\partial x}+xe^z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+xe^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \quad \therefore \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\frac{4}{9e^2}$$

五．$d(x, y, z)=\frac{1}{\sqrt{2}}|x+y-1|$

$$L=(x+y-1)^2+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1)$$

$$\begin{cases} L_x'=2(x+y-1)+\lambda+2\mu x=0 \\ L_y=2(x+y-1)+\lambda+2\mu y=0 \\ L_\lambda'=x+y+z=0 \\ L_z'=\lambda+\frac{1}{2}\mu z=0 \\ L_\mu'=x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1=0 \end{cases}$$

$\mu=0,\Rightarrow\lambda=0$ 无解

$\mu\neq 0,\Rightarrow y=x,\ z=-2x$

$3x^2=1$

$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ z=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$

最小距离: $d(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最大距离: $d(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

六．形心： $\bar{y}=0, \bar{x}=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_D xdxdy=0 \quad\Rightarrow\quad \iint\limits_D xdxdy=0$

即 $\int_{-h}^{0}\mathrm{d}x\int_{-R}^{R}x\mathrm{d}y+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\cos\theta\cdot r\ \mathrm{d}r=0$

$$2R\cdot(-\frac{1}{2}h^2)+2\cdot\frac{1}{3}R^3=0 \quad\Rightarrow\quad h=\sqrt{\frac{2}{3}}R$$

$$I_x=\iint\limits_D y^2dxdy=\int_{-h}^{0}\mathrm{d}x\int_{-R}^{R}y^2\mathrm{d}y+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin^2\theta\cdot r\ \mathrm{d}r=(\frac{2}{3}h+\frac{\pi}{8}R)R^3$$

七．设 $F(t,s)=t\ln t-t+e^s-ts,\qquad F(1,0)=0$

$F_s'(t,s)=e^s-t=0\ \Rightarrow t=e^s,\ s=\ln t.$

且对固定的 $t>1$， 当 $0<s<\ln t,\ F_s'(t,s)<0,$ 当 $s>\ln t,\ F_s'(t,s)>0,$

所以， $s=\ln t$ 取得最小值且为 0，则 $F(t,s)\leq 0$，即

$ts\leq t\ln t-t+e^s$