《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙 江 大 学 数 学 系

前　言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一，为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法，我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章，除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用，用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求，用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求；内容提要部分给出相关内容的精讲，供学生复习参考之用；习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社，2008 年) 的附后练习题为主，这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果，其中第一章和第六章由薛儒英编写，第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写，王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容，最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助，得到浙江大学数学系各位老师的大力支持，在此表示感谢。

目　录

第 1 章　预备知识

大多数读者认为《偏微分方程》是一门较难学习的课程，这其中主要有二方面的原因：原因之一是学习偏微分方程需要读者已经掌握且能灵活运用较多的现代数学知识，特别需要熟练掌握多元函数微积分知识、Fourier 级数理论以及常微分方程理论等等，需要初步了解复变函数、特殊函数理论以及广义函数理论等等；原因之二是不同与常微分方程理论有统一的处理方法 (如常微分方程理论中讨论解的存在性以及惟一性的毕卡存在惟一性定理、研究解性质的各种稳定性理论以及技巧、线性常微分方程解的结构理论以及求解方法等等)，偏微分方程的研究还没有建立统一的理论体系和处理方法，已有的各种求解方法基本只适用于某类特殊的偏微分方程，研究方法需要根据所研究偏微分方程的不同而有所改变。

§1.1　一些常用的常微分方程的求解

在这里我们仅仅对学习后面几章内容所必需的一些常微分方程作简单的介绍，需要了解常微分方程更多内容的读者可以查阅常微分方程的专门教材。

一. 一阶线性常微分方程

一阶线性常微分方程的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $I=(a,b)$ 上已知的连续函数。它的通解可表示为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

其中式中的不定积分 $\int p(x)dx$ 表示函数 $p(x)$ 的某一个原函数。一阶线性常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解可表示为

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\right).$$

二. 常系数齐次线性常微分方程

常系数齐次线性微分方程是

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0,$$

与它相对应的特征方程是

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0.$$

如果 μ 是特征方程的一个 k 重**实特征根**, 则下列函数

$$e^{\mu x}, xe^{\mu x}, \cdots, x^{k-1}e^{\mu x}$$

是齐次常系数线性微分方程的 k 个 (线性无关) 解; 如果 $\mu = \alpha + \beta i$ 是特征方程的一个 k 重**复特征根**(这时, $\alpha - \beta i$ 肯定也是特征方程的一个 k 重复特征根), 则与这对共轭的 k 重 (复) 特征根 $\alpha \pm \beta i$ 相对应的 $2k$ 个线性无关的实解是

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

它们恰好是

$$e^{(\alpha\pm\beta)x}, xe^{(\alpha\pm\beta)x}, \cdots, x^{k-1}e^{(\alpha\pm\beta)x}$$

的实部与虚部。

从上面我们可知, 若 μ 是常系数线性微分方程所对应的特征方程的一个 k 重特征根, 那么我们可以构造出常系数线性微分方程对应于特征根 μ 的 k 个解。由线性代数的理论可知, 一个 n 阶特征方程刚好有 n 个特征根 (按重数计算), 因此我们利用上面的方法刚好能构造常系数线性微分方程的 n 个解。容易证明这 n 个解是线性无关的, 这样我们就得到 n 阶常系数线性微分方程解。

习题 1.1 *试求方程 $y'' + 5y' + 4y = 0$ 的通解.*

解 所给方程的特征方程 $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ 有两个不同的实根 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$. 因此 $y_1 = e^{-4x}$ 和 $y_2 = e^{-x}$ 构成基本解组, 故通解为

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

习题 1.2 *求解下面的初值问题 $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.*

解 所给方程的特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1 = 0$ 的根 $2 \pm i$, 因此, 其通解为

$$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

而

$$y'(x) = 2e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{2x}(-c_1\sin x + c_2\cos x),$$

由初值条件

$$y(0) = c_1 = 1,\ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 5$$

得 $c_2 = 3$, 这样所求的解为

$$y = e^{2x}(\cos x + 3\sin x).$$

习题 1.3 *试求方程 $y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解.*

解 所给方程的特征方程

$$\lambda^6-2\lambda^5+4\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda^2+1)^2(\lambda^2-2\lambda+2)=0$$

有共轭的 (二重) 复特征根 $\lambda_1=\lambda_2=i$ 和 $\lambda_3=\lambda_4=-i$; 共轭的 (一重) 复特征根 $\lambda_5=1+i$ 和 $\lambda_6=1-i$. 因此

$$\cos x,\ x\cos x,\ \sin x,\ x\sin x,\ e^x\cos x,\ e^x\sin x$$

构成基本解组, 故通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3e^x)\cos x+(C_4+C_5x+C_6e^x)\sin x,$$

其中 $C_1,\cdots,C_6$ 任意 (实或复) 常数。

三. 常系数非齐次线性常微分方程

常系数非齐次线性方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x),$$

其中 $p_1,\cdots,p_n$ 是 n 个已知的常数, $f(x)$ 是已知的函数。

由非齐次线性方程解的结构定理, 求解非齐次线性方程的解只须设法求出它的齐次线性方程的解 (这是一个常系数齐次线性微分方程, 它的求解见上) 和非齐次线性方程的一个特解。当非齐次项 $f(x)$ 是某些特殊函数时, 即 $f(x)$ 具有

$$P_m(x)e^{\alpha x};\ P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x;\ P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

形式时 (其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 阶多项式, α 和 β 是给定的实常数), 我们可以用待定系数法来构造一个特解; 当非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时, 要求非齐次线性方程的一个特解有时是非常困难的, 常用的方法是**常数变易法**。

(I). $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$, 其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 阶多项式

这时我们的常系数线性微分方程是

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=P_m(x)e^{\alpha x}.$$

定理: (1) 如果 α 不是特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

的特征根, 则常系数线性微分方程有一个特解

$$y=Q_m(x)e^{\alpha x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的一个待定的 m 阶多项式。

(2) 如果 α 是特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

的 k 重特征根, 则常系数线性微分方程有一个特解

$$y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的一个待定的 m 阶多项式。

习题 1.4 *求方程 $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$ 的一个特解.*

解 这里 $f(x) = 3x + 1$ 是一个一次多项式, 即 $\alpha = 0$ 和 $P_1(x) = 3x + 1$, 而 $\alpha = 0$ 不是特征方程

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

的特征根。这样我们有特解 $y(x) = Ax + B$, 其中 A 和 B 待定. 由于 $y' = A$ 和 $y'' = 0$, 代入方程得

$$3A + 4(Ax + B) = 3x + 2.$$

要使这等式成立必须有 $4A = 3$ 和 $3A + 4B = 2$ 成立. 由此得到 $A = \frac{3}{4}$ 和 $B = -\frac{1}{16}$. 因此, 这个特解为

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}.$$

(II). $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ **或** $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$**, 其中** $P_m(x)$ **是** m **阶多项式**

当系数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是实数时，我们先求出

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

的一个特解, 记为 $y = u(x) + iv(x)$ 其中 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是实部与虚部。把 $y = u(x) + iv(x)$ 代入常系数线性微分方程，分开实部与虚部得

$$L[u + iv] = L[u] + iL[v] = Re\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\} + Im\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\},$$

比较它的实部与虚部得

$$L[u] = Re\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\}$$

和

$$L[v] = Im\{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\}.$$

因此，若实系数常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

有一个特解 $y = u(x) + iv(x)$, 则它的实部 $u(x)$ 与虚部 $v(x)$ 分别是实系数常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

和实系数常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的特解。

习题 1.5 确定方程 $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ 的通解.

解 所给方程的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ 有特征根 $1\pm 2i$. 相应齐次线性方程的通解为

$$C_1e^x\sin 2x+C_2e^x\cos 2x.$$

注意到 $e^x\sin 2x=Im\{e^{(1+2i)x}\}$. 先讨论方程

$$y"-2y'+5y=e^{(1+2i)x}$$

的特解。$\mu=1+2i$ 是特征根。这样对应的方程有特解 $y=Axe^{(1+2i)x}$, 代入方程 $y''-2y'+5y=e^{(1+2i)x}$ 解得 $A=-\frac{i}{4}$, 特解

$$y=\frac{i}{4}xe^{(1+2i)x}=\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{i}{4}x\cos 2x.$$

方程 $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ 的一个特解是 $-\frac{1}{4}x\cos 2x$, 通解是

$$C_1e^x\sin 2x+C_2e^x\cos 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

(III). 非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时 — 变动任意常数法

当非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时，要求非齐次线性方程的一个特解有时是非常困难的，常用的方法是**变动任意常数法**。

如果已知某一个 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关解，利用变动任意常数法我们可以求出相应的 n 阶非齐次线性微分方程的特解 (注意，在前面我们仅仅能求解某些具特殊非齐次项的非齐次线性微分方程的特解)，我们以二阶线性方程为例来说明。考虑

$$y"+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x), \tag{1.1}$$

假设已知相应的齐次线性微分方程 $y"+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ 的二个线性无关解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，则齐次线性微分方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$。由线性微分方程的解结构定理知，如果能找到非齐次线性微分方程 (1.1) 的一个特解，那么方程 (1.1) 就能得到所有解。下面我们利用变动任意常数法来求出一个特解，我们希望找一个具特殊形式的特解：

$$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x) \tag{1.2}$$

其中 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是二个待定的函数。

$$y'=u_1(x)y_1'(x)+u_2(x)y_2'(x)+u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)$$

由于把 (1.2) 代入方程 (1.1) 只得到一个关系式，而我们有二个待定函数，这样可以再另外增加一个限制关系式，我们取

$$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0. \tag{1.3}$$

在条件 (1.3) 下有

$$y'=u_1(x)y_1'(x)+u_2(x)y_2'(x),$$

$$y" = u_1(x)y"_1(x) + u_2(x)y"_2(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x),$$

代入方程 (1.1) 得

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{1.4}$$

从 (1.3) 和 (1.4) 中解得

$$u_1'(x) = \varphi_1(x),\ u_2'(x) = \varphi_2(x).$$

积分得到

$$u_1(x) = \int \varphi_1(x)dx,\ u_2(x) = \int \varphi_2(x)dx,$$

我们可经取到特解

$$y = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx.$$

习题 1.6 *求解* $y" + y = f(x)$.

解 显然, 方程 $y" + y = 0$ 有二个线性无关解 $y_1(x) = \sin x$ 以及 $y_2(x) = \cos x$. 用变动任意常数法找特解 $y = u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x$, 求导得

$$y' = u_1(x)\cos x - u_2(x)\sin x + u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x$$

取条件

$$u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = 0 \tag{1.5}$$

把

$$y" = u_1'(x)\cos x - u_2'(x)\sin x - u_1(x)\sin x - u_2(x)\cos x$$

代入方程得

$$u_1'(x)\cos x - u_2'(x)\sin x = f(x). \tag{1.6}$$

从 (1.5) 和 (1.6) 中解得

$$u_1'(x) = f(x)\cos x,\ u_2'(x) = -f(x)\sin x,$$

我们取 $u_1(x) = \int_0^x f(x)\cos x dx$, $u_2(x) = -\int_0^x f(x)\sin x dx$ 得到特解

$$y = \int_0^x f(s)\sin(x-s)ds.$$

(IV). 非齐次项 $f(x)$ 是一般函数时 — 齐次化方法

用变动任意常数法来求解常微分方程的一个特解一般来说较繁琐, 对于**常系数**的非齐次线性常微分方程来说, 我们可以用**齐次化方法**来求特解. 但是特别需要注意的是, 对变系数的非齐次线性常微分方程来说, 齐次化方法可能不再适用。

齐次化方法是一种应用非常广泛的方法, 它的主要想法是**把非齐次（常系数）线性方程的求解转化为齐次（常系数）线性方程的求解.** 下面通过具体的例子来说明。

习题 1.7 讨论一阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' + py = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

记 $w(x,\tau)$ 为问题

$$\begin{cases} w' + pw = 0,\ t > 0 \\ w(t)|_{t=0} = f(\tau). \end{cases} \tag{1.8}$$

的解, 即 $w = w(t,\tau) = f(\tau)e^{-pt}$, 则

$$y = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)e^{-p(t-\tau)}d\tau$$

为原方程的解. 事实上, 由

$$y|_{t=0} = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau|_{t=0} = \int_0^0 w(0-\tau,\tau)d\tau = 0$$

知 y 满足初始条件; 由

$$\frac{dy}{dt} = w(t-t,t)d + \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau,\tau)d\tau$$

知 y 满足

$$y' + py = f(t) + \int_0^t \left(\frac{dw}{dt} + pw\right)(t-\tau,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t 0d\tau = f(t).$$

习题 1.8 讨论二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0,\ y'(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 p 和 q 是二个常数。
记 $w(t,\tau)$ 为问题

$$\begin{cases} w'' + pw' + qw = 0,\ t > 0 \\ w|_{t=0} = 0,\ w'(t)|_{t=0} = f(\tau). \end{cases} \tag{1.10}$$

的解, 则

$$y = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau$$

为原方程的解. 事实上, 由

$$\frac{dy}{dt} = w(0,t)d + \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau,\tau)d\tau$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = w'(0,t)d + \int_0^t \frac{d^2}{dt^2}w(t-\tau,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t \frac{d^2}{dt^2}w(t-\tau,\tau)d\tau$$

知

$$y|_{t=0} = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau|_{t=0} = \int_0^0 w(0-\tau,\tau)d\tau = 0$$

$$y'|_{t=0} = \int_0^t \frac{d}{dt}w(t-\tau,\tau)d\tau|_{t=0} = \int_0^0 \frac{d}{dt}w(0-\tau,\tau)d\tau = 0$$

及

$$y'' + py' + qy = f(t) + \int_0^t \left(\frac{d^2w}{dt^2} + p\frac{dw}{dt} + q\right)(t-\tau,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t 0d\tau = f(t).$$

对于高阶常系数的非齐次线性方程也有类似的齐次化原理, 在常微分方程理论中, 一般用常数变易法来求高阶常系数的非齐次线性方程的解, 实际上我们用齐次化方法来求解可能更容易, 下面我们给出一个简单的例子来说明。

习题 1.9 求下列初值问题

$$\begin{cases} y'' + \beta^2 y = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = A,\ y'(t)|_{t=0} = B. \end{cases} \tag{1.11}$$

解 把初值问题分解为

$$(I)\begin{cases} u'' + \beta^2 u = 0,\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = A,\ y'(t)|_{t=0} = B. \end{cases} \tag{1.12}$$

和

$$(II)\begin{cases} h'' + \beta^2 h = f(t),\ t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0,\ y'(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

则我们有 $y = u + h$. 对于初值问题 (I), 它是一个二阶常系数齐次线性方程, 它的解是

$$u = \frac{B}{\beta}\sin\beta t + A\cos\beta t.$$

对于初值问题 (II) 我们用齐次化方法来讨论. 记 $w(t,\tau)$ 为齐次方程

$$\begin{cases} w'' + \beta^2 w = 0,\ t > 0 \\ w(t)|_{t=0} = 0,\ w'(t)|_{t=0} = f(\tau). \end{cases}$$

的解, 即

$$w(t,\tau) = \frac{f(\tau)}{\beta}\sin\beta t.$$

由齐次化原理得

$$h = \int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau = \frac{1}{\beta}\int_0^t f(\tau)\sin\beta(t-\tau)d\tau.$$

因此

$$y = \frac{B}{\beta}\sin\beta t + A\cos\beta t + \frac{1}{\beta}\int_0^t f(\tau)\sin\beta(t-\tau)d\tau.$$

四. 欧拉方程

n 阶欧拉方程的一般形式是

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + xp_{n-1}y' + p_n y = f(x),$$

其中 $p_1, \cdots, p_n$ 是给定的常数，$f(x)$ 是已知的函数。欧拉方程的**求解关键**是引进自变量变换 $x = e^t$(当讨论 $x < 0$ 时引进自变量变换 $x = -e^t$)，函数 y 作为自变量 t 的函数满足一个 n 阶常系数线性微分方程。具体如下：

记 $y = y(x) = y(t)$,$x = e^t$ 利用复合函数的求导法则，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx}) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx}) = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

即我们有

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt};\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

类似地，

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}, \cdots.$$

代入 n 阶欧拉方程

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + xp_{n-1}y' + p_n y = f(x)$$

得一个 n 阶常系数线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 y' + a_n y = f(e^t).$$

习题 1.10 *求解方程* $x^2y'' + xy' = 6\ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

解 记 $y = y(x) = y(t)$, $x = e^t$ 利用复合函数的求导法则，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx}) = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}.$$

代入二阶欧拉方程 $x^2y'' + xy' = 6\ln x - \frac{1}{x}$ 得 $y = y(t)$ 满足

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6t - e^{-t}.$$

解得

$$y = C_1 + C_2 t + t^3 - e^{-t} = C_1 + C_2\ln x + (\ln x)^3 - \frac{1}{x}.$$

习题 1.11 求方程 $x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{x}(\ln x)^2$, $x>0$.
解 记 $y=y(x)=y(t)$,$x=e^t$ 利用复合函数的求导法则,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=e^t\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx})=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{d^2x}.$$

代入 2 阶欧拉方程 $x^2y''+xy'=6\ln x-\frac{1}{x}$ 得 $y=y(t)$ 满足

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=t^2e^{-t}.$$

解得

$$y=(C_1+C_2t+\frac{1}{12}t^3)e^{-t}=(C_1+C_2\ln x+\frac{1}{12}(\ln x)^3)/x.$$

五. 幂级数解法

对于常系数的齐次线性微分方程, 我们可以转化为求解它的特征方程的根的代数方程问题, 但对于线性变系数方程就没有类似的过程。除了一些特殊的方程, 一般的变系数线性方程要求用幂级数技巧。

定理: 设二阶线性微分方程 $y"+p(x)y'+q(x)y=0$ 中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x-x_0|<R$ 内都可以表示成关于 $(x-x_0)$ 的收敛幂级数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_))^n,\ q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n.$$

则方程在区间 $|x-x_0|<R$ 内有形如

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{1.14}$$

的两个线性无关解。级数 (1.14) 的系数可以将其代入方程通过比较系数方法得到。

习题 1.12 用幂级数方法求解 $Airy$ 方程

$$y"=xy,\ (-\infty<x<+\infty) \tag{1.15}$$

解 由定理, 我们可设方程 (1.15) 有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ (-\infty<x<+\infty).$$

对它关于 x 逐项求导, 代入方程并调整求和指标 (令 $c_{-1}=0$) 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}x^n.$$

比较等式两边的系数, 我们得到下面的递推关系式

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1}, \ (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

由此不难得到

$$\begin{aligned}
c_2 &= c_5 = \cdots = c_{3n+2} = \cdots = 0;\\
c_3 &= \frac{c_0}{3\cdot 2}, c_6 = \frac{c_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \cdots,\\
c_{3n} &= \frac{c_0}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \cdots;\\
c_4 &= \frac{c_1}{4\cdot 3}, c_7 = \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}, \cdots,\\
c_{3n+1} &= \frac{c_1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}, \cdots.
\end{aligned}$$

所以, 我们得到 Airy 方程 1.15 的幂级数解

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}\right]\\
&= c_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\right]
\end{aligned}$$

容易验证, 这个幂级数解对任何 x 都是收敛的. 并且, 它是方程 (1.15) 的通解, 其中 c_0 和 c_1 是任意常数.

习题 1.13 *求解 α 阶 Legendre 方程*

$$(1-x^2)y" - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \tag{1.16}$$

其中 $\alpha > -1$ 是实数.

解 注意到 Legendre 方程的仅有两个奇点是 $x = \pm 1$. 我们将 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 代入方程可得下面的递推关系式

$$c_{m+2} = -\frac{(\alpha-m)(\alpha+m-1)}{(m+1)(m+2)} c_m \tag{1.17}$$

对 $m \geq 0$ 成立.

对于任意的常数 c_0 和 c_1, 由 (1.17) 得到

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} c_0,\\
c_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} c_1,\\
c_4 &= \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} c_0,\\
c_5 &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} c_1.
\end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}c_0. \tag{1.18}$$

和

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}c_1. \tag{1.19}$$

或

$$c_{2m} = (-1)^m a_{2m} c_0 \text{和} c_{2m+1} = (-1)^m a_{2m+1} c_1,$$

其中 a_{2m} 和 a_{2m+1} 分别记 1.18 和 1.19 中的分式. 这样我们得到 α 阶 Legendre 多项式的两个线性无关解

$$y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m} \text{和} y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1}. \tag{1.20}$$

我们取 $\alpha = n$, 一个非负整数. 如果 $\alpha = n$ 是偶数, 则当 $2m > n$ 时, 从式 (1.19) 得 $a_{2m} = 0$. 在这种情形,$y_1(x)$ 是一个 n 次的多项式,y_2 是一个无穷级数. 如果 $\alpha = n$ 是奇数, 从 (1.19) 知当 $2m+1 > n$ 时 $a_{2m+1} = 0$. 在这种情形 y_2 是一个 n 次多项式,y_1 是一个无穷级数. 这样, 在任何一种情形, 方程的两个解 (1.20) 中的一个是多项式, 而另一个是无穷级数. 通过对任意常数 c_0(n 为偶数) 和 c_1(n 为奇数) 的适当选取,n 阶 Legendre 方程

$$(1-x^2)y" - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{1.21}$$

的 n 次多项式解记为 $P_n(x)$ 并称之为 n 次 Legendre 多项式. 如果 $P_n(x)$ 中 x^n 的系数为 $(2n)!/[2^n(n!)^2]$. 我们可以把它写为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \tag{1.22}$$

, 其中 $N = [n/2]$ 记 $n/2$ 的整数部分.Legendre 多项式的前 6 项分别可写为

$$\begin{array}{ll} P_0(x) \equiv 1, & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \end{array} \tag{1.23}$$

定理：设二阶线性微分方程 $x^2y" + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x| < R$ 内都可以表示成关于 x 的收敛幂级数

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,\ q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

且 $p(0)=0$. 则方程在区间 $0<|x|<R$ 内有形如

$$y(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1.24}$$

的两个线性无关解 (广义幂级数解), 其中 $a_0\neq 0$。级数 (1.24) 的系数可以将其代入方程通过比较系数方法得到。

习题 1.14 *求 0 阶 Bessel 方程 $x^2y"+xy'+x^2y=0$ 的广义幂级数解.*

解 设方程有广义幂级数解

$$y(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

由

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)a_nx^{n+c-1},$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)(c+n-1)a_nx^{n+c-2},$$

把它代入方程可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c+2}=0.$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)a_nx^{n+c}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+c}=0.$$

比较系数可得

$$x^c\text{前的系数}: c(c-1)a_0+ca_0=0\Rightarrow c^2a_0=0, \tag{1.25}$$

$$x^{c+1}\text{前的系数}: (c+1)ca_1+(1+c)a_1=0\Rightarrow (c+1)^2a_1=0, \tag{1.26}$$

$$x^{c+n}\text{前的系数}(n\geq 2): (n+c)(n+c-1)a_n+(n+c)a_n+a_{n-2}=0\Rightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n_c)^2} \tag{1.27}$$

由于 $a_0\neq 0$, 由第一式我们看到 $c=0$, 再由第二知 $a_1=0$, 由第三式递推得对奇数 n 有 $a_n=0$; 如果 n 是偶数, 则

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2},\ c_4=-\frac{c_0}{4^2}=\frac{c_0}{2^2\cdot 4^2}.\ \cdots.$$

一般可以写为

$$c_{2n}=\frac{(-1)^nc_0}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}=\frac{(-1)^nc_0}{2^{2n}(n!)^2}.$$

如果我们取 $c_0=1$, 我们得到称之为**第一类的** 0 **阶** Bessel **函数**的数学中最重要的一个特殊函数

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{1.28}$$

习题 1.15 *求 1/2 阶 Bessel 方程 $x^2y"+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ 的广义幂级数解.*

解 设方程有广义幂级数解

$$y(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

由

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)a_nx^{n+c-1},$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(c+n)(c+n-1)a_nx^{n+c-2},$$

把它代入方程可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+c)(n+c-1)a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+c-\frac{1}{4})a_nx^{n+c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c+2}=0.$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+c)^2-\frac{1}{4}])a_nx^{n+c}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+c}=0.$$

比较系数可得

$$x^c\text{前的系数}:(c^2-\frac{1}{4})a_0=0, \tag{1.29}$$

$$x^{c+1}\text{前的系数}:[(c+1)^2-\frac{1}{4}]a_1=0, \tag{1.30}$$

$$x^{c+n}\text{前的系数}(n\geq 2):[(n+c)^{-}\frac{1}{4}]a_n+a_{n-2}=0. \tag{1.31}$$

由于 $a_0\neq 0$, 由第一式我们看到 $c=\pm\frac{1}{2}$, 再由第二知 $a_1=0$, 由第三式递推得对奇数 n 有 $a_n=0$; 下面我们计算 $n=2k$ 是偶数时 a_n 的值。

如果 $c=\frac{1}{2}$, 则由

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+1)}\Rightarrow a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(2k+1)!}.$$

我们得到一个解

$$y_1=a_0x^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0}{(2k+1)!}x^{2k}=a_0\frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

其中 a_0 是一个任意常数。

如果 $c=-\frac{1}{2}$, 则由

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k-1)}\Rightarrow a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(2k)!}.$$

我们得到一个解

$$y_2=a_0x^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0}{(2k)!}x^{2k}=a_0\frac{\cos x}{\sqrt{x}},$$

其中 a_0 是一个任意常数。因此方程的通解为

$$y=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

§1.2 Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题

在用变量分离方法求解某些偏微分方程时, 需要我们求解下列形式的二阶线性常微分方程

$$a_1(x)y''+a_2(x)y'+[a_3(x)+\lambda]y=0 \tag{1.32}$$

其中 $a_1(x), a_2(x)$ 和 $a_3(x)$ 是给定区间 I 上的连续函数, $a_1(x)\neq 0$, λ 是给定的常数。取 $p(x)=exp[\int\frac{a_2}{a_1}dx]$, 在方程两边同乘 $p(x)$ 可把方程 (1.32) 表示为得

$$[p(x)y']'+[-q(x)+\lambda s(x)]y=0, \tag{1.33}$$

其中 $q(x)=-a_3(x)/a_1(x)$, $s(x)=p(x)/a_1(x)$。我们把方程 (1.33) 称为 **Sturm-Liouville 方程**。当我们在区间 $[a,b]$ 上考虑方程 (1.33) 时, 可对它加上边值条件

$$Ky(a)+Ly'(a)=0,\ My(b)+Ny'(b)=0,$$

其中 K, L, M 和 N 为给定的常数, 它们满足

$$K^2+L^2\neq 0,\ M^2+N^2\neq 0.$$

这样我们得到二阶线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases}[p(x)y']'+[-q(x)+\lambda s(x)]y=0,\ a\leq x\leq b,\\ Ky(a)+Ly'(a)=0,\ My(b)+Ny'(b)=0\end{cases} \tag{1.34}$$

其中 $p(x), q(x)$ 和 $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数, $p(x)$ 是可微的, 且 $p(x)>0$ 和 $s(x)>0$, λ 是一个参数, K, L, M 和 N 为给定的常数, 它们满足

$$K^2+L^2\neq 0,\ M^2+N^2\neq 0.$$

我们把边值问题 (1.34) 称为**Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题**。显然 $y\equiv 0$ 一定是 Sturm-Liouville 固有值问题的一个解 (称它为零解)。对于本征值 (或固有值) 问

题, 我们主要关心当参数 λ 取哪些值 (称为**固有值或特征值**) 时, Sturm-Liouville 固有值问题有非零解 (称为**固有函数或特征函数**)。求解固有值问题是指求出它的所有固有值以及相应的固有函数。我们先讨论几个简单的例子, 然后介绍有关 Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题的几个重要结论。

习题 1.16 *求解固有值问题*

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0,\ 0 < x < \ell, \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases}$$

解 当 $\lambda < 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u(0) = C_1 + C_2 = 0,\ u(\ell) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0.$$

注意到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} \neq 0$$

我们有 $C_1 = C_2 = 0$, $u \equiv 0$, 即当 $\lambda < 0$ 时固有值问题只有零解。

当 $\lambda = 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 + C_2 x$$

由条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u(0) = C_1 = 0,\ u(\ell) = C_1 + C_2\ell = 0.$$

我们有 $C_1 = C_2 = 0$,$u \equiv 0$, 即当 $\lambda = 0$ 时固有值问题只有零解。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

由条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u(0) = C_2 = 0,\ u(\ell) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

即必须满足有 $C_2 = 0$ 及 $C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$。由于 $\lambda > 0$ 及我们要求固有值问题的非零解, 必有 (若 $C_1 = 0$, 而 C_2 必须为零, 这样 $u \equiv 0$) $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, 即 $\lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, 其中 $k = 1, 2, \cdots$。因此当 $\lambda = \lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $k = 1, 2, \cdots$ 时, 固有值问题有非零解

$$u_k(x) = C_k \sin(\frac{k\pi x}{\ell})$$

其中 C_k 为任何不等于零的常数。这样，固有值问题有固有值 $\lambda=\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$，相应的固有函数是 $u_k(x)=C_k\sin(\frac{k\pi x}{\ell})$，其中 $k=1,2,\cdots$。

下面我们来讨论一下所得到的固有值和固有函数的性质：

(1). 固有值问题有无穷多个固有值

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots\to+\infty.$$

(2). 相应于每个固有值 λ_k $(k=1,2,\cdots)$ 的所有特征函数组成一维的线性空间，记为 $\phi_k(x)=\sin(\frac{k\pi x}{\ell})$ 是这个线性空间的基，则 $\{\phi(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 相互正交，即满足

$$\int_0^{\ell}\phi_k(x)\phi_n(x)dx=\begin{cases}0,\ k\neq n,\\ \frac{\ell}{2}\neq 0,\ k=n\end{cases}$$

(3). (广义 Fourier 级数) 若函数 $f(x)\in L^2[0,\ell]$(即满足 $\int_0^{\ell}|f(x)|^2dx<+\infty$ 的函数), 则存在常数 A_k 使得

$$f(x)=A_1\phi_1(x)+A_2\phi_2(x)+\cdots+A_k\phi_k(x)+\cdots$$

其中 $A_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\phi_k(x)dx$，$k=1,2,\cdots$。

习题 1.17 *求解固有值问题*

$$\begin{cases}u''+\lambda u=0,\ 0<x<\ell,\\ u'(0)=u'(\ell)=0.\end{cases}$$

解 当 $\lambda<0$ 时，方程的通解为

$$u(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由条件 $u'(0)=u'(\ell)=0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足，

$$u'(0)=C_1\sqrt{-\lambda}-C_2\sqrt{-\lambda}=0,\ u'(\ell)=C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell}-C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}=0.$$

注意到

$$\begin{vmatrix}\sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda}\\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}\end{vmatrix}\neq 0$$

我们有 $C_1=C_2=0$, 即当 $\lambda<0$ 时固有值问题只有零解。

当 $\lambda=0$ 时，方程的通解为

$$u(x)=C_1+C_2x$$

由条件 $u'(0)=u'(\ell)=0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足，

$$u'(0)=C_2=0,\ u'(\ell)=C_2\ell=0.$$

我们有 $C_2=0$ 而 C_1 可以取任意值, 即当 $\lambda=0$ 时固有值问题有非零解 (固有函数)$u_0(x)=C_0$, $\lambda_0=0$ 是相应的固有值。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程的通解为

$$u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

由条件 $u'(0) = u'(\ell) = 0$ 知 C_1 和 C_2 必须满足,

$$u'(0) = \sqrt{\lambda}C_1 = 0,\ u'(\ell) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ell) - C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

即有 $C_1 = 0$ 及 $C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$。由于 $\lambda > 0$ 及我们要求固有值问题的非零解, 必有 $C_2 \neq 0$, 这样必有 $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, 即 $\lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, $k = 1, 2, \cdots$. 因此当 $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, 其中 $k = 1, 2, \cdots$ 时, 固有值问题也有非零解 (固有函数)

$$u_k(x) = C_k \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$$

其中 C_k 为任何不等于零的常数。这样, 固有值问题有固有值 $\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, 相应的固有函数是 $u_k(x) = C_k\cos(\frac{k\pi x}{\ell})$, 其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$。下面我们来讨论一下所得到的固有值和固有函数的性质：

(1). 固有值问题有无穷多个固有值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty.$$

(2). 相应于每个固有值 λ_k 的所有固有函数组成一维的线性空间, 记为 $\phi_k(x) = \cos(\frac{k\pi x}{\ell})$ 是这个线性空间的基, 其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$。则 $\{\phi(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 相互正交, 即

$$\int_0^{\ell} \phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0,\ k \neq n, \\ \frac{\ell}{2} \neq 0,\ k = n \end{cases}$$

(3). (广义 Fourier 级数) 若函数 $f(x) \in L^2[0, \ell]$(即 $\int_0^{\ell} |f(x)|^2 dx < +\infty$), 则存在常数 A_k 使得

$$f(x) = A_0\phi_0(x) + A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x) + \cdots + A_k\phi_k(x) + \cdots$$

其中 $A_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx, A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\phi_k(x)dx\,(k = 1, 2, \cdots)$.

上面我们讨论了二个具体的固有值问题, 求得了它们的固有值以及相应的固有值函数并给出了固有值和固有值函数的相关性质。下面我们说明对一般的 Sturm-Liouville 固有值问题：

$$\begin{cases} [p(x)y']' + [q(x) + \lambda s(x)]y = 0,\ a \leq x \leq b, \\ Ky(a) + Ly'(a) = 0,\ My(b) + Ny'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

也有类似的结论, 其中 $p(x), q(x)$ 和 $s(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续函数, $p(x)$ 是可微的, 且 $p(x) > 0$ 和 $s(x) > 0$, λ 是一个参数, K, L, M 和 N 为给定的常数, 它们满足

$$K^2 + L^2 \neq 0,\ M^2 + N^2 \neq 0.$$

由于一般 Sturm-Liouville 固有值问题中的常微分方程是一个变系数方程，习题 1.16 和习题 1.17 的讨论方法不再适用，但我们从理论上可以证明类似的性质仍成立：

定理：(1).Sturm-Liouville 固有值问题 1.35 有无限多个固有值，可以把它们排列如下

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty.$$

(2). 相应于每个固有值 λ_k 的所有固有函数组成一个一维的线性空间，记为 $\phi_k(x)$ 是这个线性空间的基，则 $\{\phi(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 在权 $s(x)$ 下正交，即

$$\int_a^b s(x)\phi_k(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0,\ k \neq n, \\ \delta_k \neq 0,\ k = n \end{cases}$$

其中 $\delta_k = \int_a^b s(x)\phi_k^2(x)dx \neq 0$.

(3). (广义 Fourier 级数) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 **Dirichlet(狄氏) 条件** (即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多只有有限个第一类间断点，且 $\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$)，则存在常数

$$C_k = \frac{1}{\delta_k}\int_a^b s(x)f(x)\phi_k(x)dx$$

使在 $f(x)$ 的连续点处有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\phi_k(x)(x),$$

在 $f(x)$ 的第一类间断点处有

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\phi_k(x).$$