参考答案

浙江大学 2017 - 2018 学年 春夏 学期

《 微积分（甲）II 》课程期中考试试卷

课程号：821T0020，开课学院：数学科学学院

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打 √），允许带 笔 入场

考试日期：2018 年 5 月 3 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：＿＿＿＿＿＿ 学号：＿＿＿＿＿＿ 所属院系：＿＿＿＿＿＿

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

一、（每题 7 分，共 21 分）

1. 求过直线L_1: $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$的平面π，使它平行于直线$L_2$: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

$$\vec{n}=(1,-1,-1)\ (=\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2)$$

点 $(-1,0,1)\in L_1$

$$\pi:\quad x-y-z+2=0$$

$L_1:\begin{cases}x+z=0\\2x-y+2=0\end{cases}$ 考虑平面束：$2x-y+2+\lambda(x+z)=0$（漏了 $x+z=0$）

$\vec{n}=(2+\lambda,-1,\lambda)\perp\tau_2=(3,2,1)\Rightarrow 3(2+\lambda)-2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1$

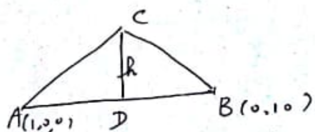
$\therefore\ \pi: x-y-z+2=0$ 即为所求

2. 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ 上一点 C 的坐标，使得以点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$和 C 为顶点的三角形面积最小. $C\ (2+t, 2+t, -t)$

$$S^2=\frac{1}{4}|\vec{AC}\times\vec{AB}|^2=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}(t+1)^2$$

$$t=-1\Rightarrow C(1,1,1)$$

或：



h 最小即可

$|AD|=\vec{AC}\cdot\vec{AB}^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$h^2=|AC|^2-\frac{1}{2}=3(t+1)^2+\frac{3}{2}\Rightarrow t=-1$

3. 设函数 $w=f(x,y)=\arctan\frac{x^3+y^3}{x-y}$，求证 $x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=\sin 2w$.

$$(x-y)\tan w=x^3+y^3$$

$$\tan w\,(dx-dy)+(x-y)\sec^2 w\,dw=3x^2dx+3y^2dy$$

$$(x-y)\sec^2 w\,dw=(3x^2-\tan w)\,dx+(3y^2+\tan w)\,dy$$

$$\therefore x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{x}{x-y}\cos^2 w(3x^2-\tan w)+\frac{y}{x-y}\cos^2 w(3y^2+\tan w)$$

$$=3\frac{\cos^2 w}{x-y}(x^3+y^3)+\frac{\sin w\cos w}{x-y}(y-x)$$

$$=3\cos^2 w\tan w-\sin w\cos w=\sin 2w\quad\#$$

二、　（每题 10 分，共 20 分）

4. 设有直线L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{\lambda}$ 和 L_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{\lambda^2}=\frac{z}{1}$，$\lambda$是常数.

[1] 如果L_1和L_2共面，求常数λ的值;

[2] 当L_1和L_2平行时，求L_1和L_2所确定的平面的方程;

[3] 当L_1和L_2平行时，求L_1绕z轴旋转而成的旋转曲面方程.

[1] $P_1(1,-1,1)\in L_1$，$P_2(-1,1,0)\in L_2$　$\vec{\tau}_1=(1,1,\lambda)$，$\vec{\tau}_2=(1,\lambda^2,1)$

L_1,L_2共面 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{P_1P_2},\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2]=0 \Rightarrow (\lambda-1)(2\lambda^2+\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda=1$

[2]. $\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{\tau}_1=(3,1,-4)$　L_1,L_2确定平面：$3x+y-4z+2=0$

[3]. L_1参数方程：$\begin{cases}x=1+t\\y=-1+t\\z=1+t\end{cases}$　绕z轴旋转面，半径$r=\sqrt{(1+t)^2+(-1+t)^2}=\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$　$\begin{cases}x=\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}\cos\theta\\y=\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}\sin\theta\\z=1+t\end{cases}$

消去 t,θ 得：$x^2+y^2=2(1+(z-1)^2)$

另外解法：过L_1的平面束$\begin{cases}x-y-2=0\\\lambda y-z+\lambda+1=0\end{cases}$：$K(x-y-2)+\lambda y-z+\lambda+1=0$

(可能漏了 $x-y-2=0$) 要求过L_2 则 (过P_2点且法向与$\vec{\tau}_2$垂直)

$\begin{cases}-4K+2\lambda+1=0\\(K,\lambda-K,-1)\cdot(1,\lambda^2,1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K=\frac{3}{4}\\\lambda=1\end{cases}$　这样一并得[1].[2].

5. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$

[1] 证明 $f(x,y)$ 在全平面内连续；

[2] 求 $\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$；

[3] 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

分段点 $(0,y_0)$，其它点由初等函数性质知$f(x,y)$连续

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to y_0\\x\neq 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to y_0}}\frac{\sin(xy)}{x}=y_0=f(0,y_0)$

$\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}y=y_0=f(0,y_0)$　∴[1]得证

[2]. 分段点的偏导要用定义，避免方法用级数　$\sin u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n+1}$　$\cos u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$，

$u=xy$，得 $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}y^{2n+1}$　∴ $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\sin(xy)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!}x^{2n-1}y^{2n+1}\xlongequal[2n=(2n+1)-1]{u=xy}y^2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n-1}\right)$

$=y^2\left[\frac{1}{u}(\cos u-1)-\frac{1}{u^2}(\sin u-u)\right]=\begin{cases}\frac{y}{x}\cos(xy)-\frac{1}{x^2}\sin(xy), & x\neq 0\\0 & x=0\end{cases}$

三、（每题 7 分，共 14 分）

6. 试把$f(x)=|x|$在$(-\pi,\pi)$内展开为傅里叶级数，并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.　$\begin{cases}a_0=\pi\\a_{2n-1}=-\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\end{cases}$

$x\in(-\pi,\pi)$，$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right)$

令 $x=0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

7. 已知 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，$y_n=x_{n+1}-x_n\ (n\geq 1)$.

[1] 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$收敛；　$y_n=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}\sim-\frac{1}{4}\frac{1}{n^{3/2}}$

[2] 证明$\{x_n\}$的极限存在；

[3] 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}$的收敛半径.

[2] $x_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}y_k$　收敛

[3] ∵ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\sim 2\sqrt{n}\quad(n\to\infty)$

∴ $R=1$.

四、（每题 7 分，共 14 分）

8. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$ 的和函数为 $S(x)$ $(|x|<+\infty)$，

试证明 $S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x$.

$$S''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}，\quad S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

$$\therefore S''+S'+S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

. 已知三个非零矢量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 任意两个都不共线，但 $\vec{b}+\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 共线，$\vec{b}+\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线，求这三个矢量的和.

$$\vec{b}+\vec{c}=k\vec{a} \qquad \Rightarrow \quad \vec{c}-\vec{a}=k\vec{a}+\lambda\vec{c}$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\lambda\vec{c}$$

$$\therefore (k+1)\vec{a}+(\lambda-1)\vec{c}=0$$

$$\Rightarrow k=-1，\lambda=1. \quad \Rightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

五、（每题 7 分，共 14 分）

10. 设可导函数 $f(x)$ 对任意的实数 x, y 恒满足

$$f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y).$$

且 $f'(0)=2$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式，并求 $f(x)$.

$e^{-x-y}f(x+y)=e^{-x}f(x)+e^{-y}f(y)$ 令 $g(t)=e^{-t}f(t)$ 则

$g(x+y)=g(x)+g(y) \Rightarrow \frac{g(x+y)-g(x)}{y}=\frac{g(y)-g(0)}{y}$，$g(0)=0$

令 $y\to 0$ 得 $g'(x)=g'(0)=-e^{-t}f(t)+e^{-t}f'(t)\big|_{t=0}=2.$ $\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=2\end{cases}$

$\therefore g(x)=2x+C$. $C=g(0)=0$ $\therefore g(x)=2x$

$f(x)=2xe^x$

11. 问 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？请给出你的判断并说明理由.

$f'_1(0,0)=f'_2(0,0)=0$

验证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-0x-0y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ (1)

$\because x^4+y^4\le (x^2+y^2)^2$

$\therefore \frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}\le (x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}\to 0$ $(\rho\to 0)$

故 (1) 式成立. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微

六、（第12题7分，第13题10分，共17分）

12 设函数 $f(x)=\arctan(x-1)-\arctan(x+1)$，其中 $x\in(-\infty,+\infty)$.

[1] 求 $f'(x)$;

[2] 将 $f(x)$ 展开为关于x 的幂级数，并求出收敛半径;

[3] 求 $f^{(n)}(0)$.

$f(0)=-\frac{\pi}{2}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}-\frac{1}{1+(x+1)^2}=\frac{4x}{(1+(x-1)^2)(1+(x+1)^2)}$$

$$=\frac{4x}{4+x^4}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^4}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}x^{4n+1}$$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+2)}x^{4n+2}$$

$f(0)=-\frac{\pi}{2}$

$f^{(4n+2)}(0)=\frac{(-1)^n}{4^n(4n+2)}\cdot(4n+2)!$. 其余 $f^{(K)}(0)=0$

$K\neq 4n+2,\ 0$

13. 已知 $u_n\in R$ 且 $u_n>0$.

[1] 设常数 $p>0$，若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛，试证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n^{\frac{1}{2}+p}}$ 收敛；

[2] 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^{\frac{5}{3}}$ 收敛，试证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛；

[3] 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^{1+\frac{2017}{2018}}$ 收敛，试证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛；

[4] 若 r 为常数 $(0<r<1)$，且正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^{1+r}$，收敛，试证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛．

利用平均值不等式：

$$a_1a_2\cdots a_n\leq\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}\ .\ (a_k>0)$$

$$\Rightarrow ab\leq\frac{m}{m+n}a^{\frac{m+n}{m}}+\frac{n}{m+n}b^{\frac{m+n}{n}}$$

$$=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\ .\quad \frac{1}{p}=\frac{m}{m+n},\ \frac{1}{q}=\frac{n}{m+n}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

[1]: $\frac{u_n}{n^{\frac{1}{2}+p}}\leq\frac{1}{2}\left(u_n^2+\frac{1}{n^{1+2p}}\right)$

[2]. $m=3,\ n=2$. $\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\frac{3}{5}u_n^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{5}{2}}$

[3] $m=2018$, $n=2017$. $\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\frac{2018}{2018+2017}u_n^{1+\frac{2017}{2018}}+\frac{2017}{2018+2017}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1+\frac{2018}{2017}}$

[4]. 不妨设 $u_n<1$ $\exists\, m>n\geq 2,\ r\geq\frac{n}{m}$

$\Rightarrow\sum u_n^{\frac{m+n}{m}}$ 收敛. $\Rightarrow$

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}<\frac{m}{m+n}u_n^{\frac{m+n}{m}}+\frac{n}{m+n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{m+n}{n}}$$ 得证

2017-2018学年春夏学期微积分甲下期中考试参考答案

一

1 解法一 由已知可取所求平面的法矢量 $\vec{n}=\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}$
$=(1,2,-1)\times(3,2,1)=(4,-4,-4)\parallel(1,-1,-1)$，点 $(-1,0,1)$ 在平面上，故所求平面方程为 $(x+1)-y-(z-1)=0$ 或 $x-y-z+2=0$；

解法二

直线 L_1 的一般式方程可写为 $\begin{cases}2x-y+2=0\\ y+2z-2=0\end{cases}$，

设所求平面 Σ 的方程为 $\lambda(2x-y+2)+u(y+2z-2)=0$，其法矢量 $\vec{n}=\{2\lambda,u-\lambda,2u\}$，平面 $\Sigma\parallel l_2$，则 $\vec{n}\perp\vec{s}\triangleq(3,2,1)$，即得 $3(2\lambda)+2(u-\lambda)+2u=0$ 或 $\frac{\lambda}{u}=-1$，故所求平面 Σ 为 $(2x-y+2)-(y+2z-2)=0$ 或 $x-y-z+2=0$.

2. 解法一 已知直线的参数方程可写为 $x=2+t,\ y=2+t,\ z=-t$，设点 C 的坐标为 $(2+t,2+t,-t)$，则 $\vec{AC}=(1+t,2+t,-t)$，$\vec{AB}=(-1,1,0)$，由计算可得 $\vec{AC}\times\vec{AB}=(t,t,2t+3)$，记所求面积为 S，则
$$S^2=\frac{1}{4}|\vec{AC}\times\vec{AB}|^2=\frac{1}{4}[t^2+t^2+(2t+3)^2]=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}(t+1)^2,$$
所以当 $t=-1$ 时，三角形面积最小，所求点 C 的坐标为 $(1,1,1)$；

解法二

显然当 A, B, C 所在平面与已知直线垂直时，它们所构成的三角形的面积最小，$\vec{AB}=(-1,1,0)$，

过点 A, B 的直线为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$，即 $\begin{cases}x+y-1=0\\ z=0\end{cases}$，则过此直线的平面束方程为 $\lambda(x+y-1)+uz=0$，其法向量 $\vec{n}=\{\lambda,\lambda,u\}$，而已知直线方向向量 $\vec{\tau}=\{1,1,-1\}$，由 $\vec{n}\parallel\vec{\tau}$ 可得 $\frac{\lambda}{1}=\frac{\lambda}{1}=\frac{u}{-1}$，由此得 $\frac{\lambda}{u}=-1$，相应的平面为 $x+y-1-z=0$.
所求点 C 为此平面与已知直线的交点，把已知直线的参数式 $x=2+t,\ y=2+t,\ z=-t$ 代入平面方程，可得 $t=-1$，C 点坐标为 $(1,1,1)$.

3. 证法一（直接计算）. $\frac{\partial w}{\partial x}=1\Big/\left[1+\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)^2\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$
$=\frac{2x^3-3x^2y-y^3}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2}$，类似 $\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{2y^3-3y^2x-x^3}{(y-x)^2+(y^3+x^3)^2}$，左边 $=$
$x\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{2(x^4-y^4-x^3y+xy^3)}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2}$，注意到 $\tan w=\frac{x^3+y^3}{x-y}$，
右边 $=\sin 2w=\frac{2\tan w}{1+\tan^2 w}=2\left[(x^3+y^3)/(x-y)\right]\Big/\left[1+\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)^2\right]$
$=\frac{2(x^4-y^4-x^3y+xy^3)}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2}=$ 左边，故等式成立；

证法二（利用隐函数求导）

由已知得 $\tan w=\frac{x^3+y^3}{x-y}$ 或写成 $F(x,y,w)\triangleq(x-y)\tan w-(x^3+y^3)=0$，
把 $w=f(x,y)$ 看成由 $F(x,y,w)=0$ 所确定的隐函数，则
$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$，$\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$，余下略.

二

4（本题满分10分）解 直线 L_1 过定点 $P_1(1,-1,1)$，方向 $\vec{\tau_1}=(1,1,\lambda)$，直线 L_2 过定点 $P_2(-1,1,0)$，方向矢量 $\vec{\tau_2}=(1,\lambda^2,1)$，

(1) L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{P_1P_2}\ \vec{\tau_1}\ \vec{\tau_2}]=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda^2 & 1\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(2\lambda^2+\lambda+3)=0$，

由此得到唯一实根 $\lambda=1$；

(2) 由(1)可知当 L_1 和 L_2 共面时有 $\lambda=1$，而当 $\lambda=1$ 时 $\vec{\tau_1}=\vec{\tau_2}=(1,1,1)$，即有 $\vec{\tau_1}\parallel\vec{\tau_2}$，$L_1$ 和 L_2 所确定的平面既为由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\vec{\tau_1}$ 所确定的平面，取其法矢量 $\vec{\tau}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{\tau_1}=(-2,2,-1)\times(1,1,1)=(3,1,-4)$，又平面过点 $P_2(-1,1,0)$，故所求平面方程为 $3(x+1)+(y-1)-4z=0$ 或 $3x+y-4z+2=0$；

(3) 由(2)可知 L_1 和 L_2 平行时 $\lambda=1$，此时 L_1 的方程可写为 $\begin{cases}x=z\\ y=z-2\end{cases}$，

L_1 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为 $x^2+y^2=z^2+(z-2)^2$。

5（本题满分10分）解：(1) 当 $x\neq0$ 时，$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$，此时连续；当 $x=0$ 时，$f(0,y)=y$，

注意到 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy=0}}f(x,y)=0=f(0,0)$ 及 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq0}}\frac{\sin(xy)}{xy}y=1\times0=0$，

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续，下证 $f(x,y)$ 在点 $(0,y_0)$ 处也连续（这里 $y_0\in R$ 且 $y_0\neq0$）。

实际上有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x=0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}y=y_0=f(0,y_0)$，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq0}}f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq0}}\frac{\sin(xy)}{xy}y=1\times y_0=f(0,y_0)$$

合起来，对 $\forall y$，$f(x,y)$ 在 $(0,y)$ 处都连续，因此 $f(x,y)$ 在全平面内连续；

(2) 当 $x\neq0$ 时，$f(x,y)=\sin(xy)/x$，此时 $f_y'=\cos(xy)$，$f_y''=\frac{\partial}{\partial y}[\cos(xy)]=-x\sin(xy)$，

当 $x=0$ 时，$f(x,y)=y$，$f_y'=\frac{\partial}{\partial y}(y)=1$，$f_y''=\frac{\partial}{\partial y}(1)=0$；

(3) (i) 当 $x\neq0$ 时，$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$，此时

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]=\frac{xy\cos(xy)-\sin(xy)}{x^2},$$

(ii) 当 $x=0$ 时，考察 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{\sin(y\Delta x)}{\Delta x}-y}{\Delta x}$，

下对 y 分两种情形讨论，

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$，

而当 $y\neq0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\sin(y\Delta x)-y\Delta x}{(\Delta x)^2\cdot y^2}\cdot y^2$

注意到 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\sin(y\Delta x)-y\Delta x}{(\Delta x\cdot y)^2}\xlongequal{令 y\Delta x=u}\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin u-u}{u^2}\xlongequal{洛必达法则}0$，

于是 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=0\cdot y^2=0$，

合起来，有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\frac{xy\cos(xy)-\sin(xy)}{x^2} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$。

三.

6. 解 $b_n=0$，$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\pi$，

$n\geq1$ 时，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx\xlongequal{分部积分法}\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$，

或写为 $a_n=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$，

于是 $f(x)=|x|$ 的傅里叶展开式为

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos3x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]\quad(-\pi<x<\pi),$$

在上式中令 $x=0$ 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。

7 解：(1) $y_n=x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$，

于是 $(-y_n)\sim\frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\ (n\to\infty)$，且 $-y_n>0$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

故正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-y_n)$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛；

(2) 显然 $x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_1+\sum\limits_{k=1}^{n}y_k$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$，

由(1)知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在；

(3) 方法一　由(2)可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right)$ 存在，从而有

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\sim2\sqrt{n}\ (n\to+\infty)$，现记 $b_n=1\Big/\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}=1$，故所求幂级数收敛半径为1；

方法二，记 $b_n=1\Big/\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=1-\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，

易知 $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\le1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$，即所求幂级数收敛半径为1.

四.

8. 证明：当 $|x|<+\infty$ 时，$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，则

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}\ (|x|<+\infty)$，$S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}\ (|x|<+\infty)$，

于是 $S''(x)+S'(x)+S(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}\right]=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=e^x$.

9. 由已知可得：$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{0}$，$(\vec{b}+\vec{a})\times\vec{c}=\vec{0}$，

从而有 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{0}$ 及 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=\vec{0}$，

即 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 既与 $\vec{a}$ 共线，又与 $\vec{c}$ 共线，而 $\vec{a}$，$\vec{c}$ 不共线，

故 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 必为零向量，即 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

五

10. 首先对原恒等式令 $y=0$，可得 $f(x)=f(x)+e^xf(0)$，即 $f(0)=0$，

往下提供两种方法，

方法一　对 $f(x+y)=e^yf(x)+e^xf(y)$ 两边关于 y 求偏导，可得

$f'(x+y)=e^yf(x)+e^xf'(y)$，再令 $y=0$，可得

$f'(x)=f(x)+e^xf'(0)$，又 $f'(0)=2$，故 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式

为 $f'(x)=f(x)+2e^x$，

对上式两边同乘以 e^{-x}，可得 $[e^{-x}f(x)]_x'=2$，

从而 $e^{-x}f(x)=2x+C$（C 为待定常数），又已得 $f(0)=0$，

故 $C=0$，$e^{-x}f(x)=2x$ 或 $f(x)=2xe^x$；

方法二　对 $f(x+y)=e^yf(x)+e^xf(y)$ 两边分别关于 x，y 求偏导

可得：

$f'(x+y)=e^yf'(x)+e^xf(y)$，

$f'(x+y)=e^yf(x)+e^xf'(y)$，

故 $e^yf'(x)+e^xf(y)=e^yf(x)+e^xf'(y)$，

或写成 $e^{-x}[f'(x)-f(x)]=e^{-y}[f'(y)-f(y)]$，

上式对任意 $x,y\in R$ 都成立，故必有 $e^{-x}[f'(x)-f(x)]=k$，

令 $x=0$，可得常数 $k=f'(0)-f(0)=2-0=2$，于是 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 关系式为

$f'(x)-f(x)=2e^x$，进而 $f(x)=2xe^x$（推导过程详见方法一）.

11解：$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，理由见下面.

因为$f(x,0)=x^{\frac{4}{3}}$，于是$f_x'(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$，类似$f_y'(0,0)=0$

注意到 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

往下提供三种解法

解法一 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}\xlongequal{x=\rho\cos\theta,\,x=\rho\sin\theta}\lim\limits_{\rho\to0^+}\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$

因为 $0\leqslant\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\leqslant\sqrt{2}\rho^{\frac{1}{3}}\to0$（当$\rho\to0^+$时），

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，即$f(x,y)$在$(0,0)$处可微；

解法二 首先注意到 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$及$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

其次，当$x\neq0$且$y\neq0$时，注意到 $\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt[6]{\frac{x^8}{(x^2+y^2)^3}+\frac{2x^4y^4}{(x^2+y^2)^3}+\frac{y^8}{(x^2+y^2)^3}}$

易证 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\neq0}}\frac{x^8}{(x^2+y^2)^3}=0$，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\neq0且y\neq0}}\frac{2x^4y^4}{(x^2+y^2)^3}=0$且$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y\neq0}}\frac{y^8}{(x^2+y^2)^3}=0$，

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，即$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

六 解法三 本题也可先证$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$在$(0,0)$点都连续从而f在$(0,0)$可微（此处细节略）.

12 解 (1) $f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}-\frac{1}{1+(x+1)^2}=\frac{4x}{x^4+4}$；

(2) $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=-\frac{\pi}{2}+\int_0^x(\arctan\frac{t^2}{2})'dt$

$=-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x^2}{2}$，

而$\arctan u=\int_0^u\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^u\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m t^{2m}dt=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}u^{2m+1}$，$|u|<1$，

从而$f(x)=-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x^2}{2}=-\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)2^{2m+1}}x^{4m+2}$，$|x|<\sqrt{2}$，

收敛半径为$\sqrt{2}$；

(3) 由$f(x)$展开式的唯一性可知 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n$，$(n=0,1,2,\cdots)$，

或写为$f^{(n)}(0)=n!\,a_n$，$n=0,1,2,\cdots$

于是 $f^{(n)}(0)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & n=0,\\ \frac{(-1)^m(4m+2)!}{(2m+1)2^{2m+1}}, & n=4m+2\ (m=0,1,2,\cdots),\\ 0 & n\neq0且n\neq4m+2\ (m=0,1,2,\cdots).\end{cases}$

13（本题满分10分）.

证明 (1) 因为$\frac{u_n}{n^{\frac{1}{2}+p}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{1+2p}}+u_n^2\right)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2p}}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$均收敛，故由比较判别法可知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^{\frac{1}{2}+p}}$收敛；

(2) 利用基本不等式 $x_1x_2\cdots x_n\leq\frac{1}{n}(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n)$，

（这里$x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$），可以得到

$\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\cdot u_n^{\frac{1}{3}}\cdot u_n^{\frac{1}{3}}\cdot u_n^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^{\frac{5}{4}}}+3u_n^{\frac{5}{3}}\right)$，

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{\frac{5}{3}}$都收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$收敛；

(3)，与(2)类似，也利用基本不等式可得

$\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt[4034]{n}}\cdots\frac{1}{\sqrt[4034]{n}}}_{2017个}\Big)\Big(\underbrace{u_n^{\frac{1}{2018}}\cdots u_n^{\frac{1}{2018}}}_{2018个}\Big)$

$\leq\frac{1}{2017+2018}\left(\frac{2017}{n^{\frac{2017+2018}{2\times2017}}}+2018\,u_n^{\frac{2017+2018}{2018}}\right)$，

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{1+\frac{2017}{2018}}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2017+2018}{2\times2017}}}$都收敛，故由比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$收敛；

(4) 首先，我们指出，利用与(3)类似的方法，容易证明比(3)更广泛的如下结论：

对任意正整数 m（m 与 n 无关），若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1+\frac{m}{m+1}}$ 收敛，则有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

---------(*)

当 $0<r<1$ 时，显然总存在正整数 m，使 $r \leq \frac{m}{m+1}$（或 $m \geq \frac{r}{1-r}$），

当 $r=\frac{m}{m+1}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1+r}$ 收敛即为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1+\frac{m}{m+1}}$ 收敛，

而由结论(*)可得此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

当 $0<r<\frac{m}{m+1}$ 时，$1+r<1+\frac{m}{m+1}$，

由已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1+r}$ 收敛可知 $u_n \to 0\ (n\to+\infty)$，从而 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^{1+\frac{m}{m+1}}}{u_n^{1+r}}=0$，

由比较判别法的极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1+\frac{m}{m+1}}$ 收敛，

同样，由结论(*)可得此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛，综上所述，对 $0<r<1$ 时，命题都成立。

[注：若仅仅已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，推不出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

反例 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^{\frac{3}{4}}}$]