习题八

1. (1) $H_0: \mu \le 15000$, $H_1: \mu > 15000$

(2). 令 $Z = \dfrac{\bar{X}-15000}{1500/\sqrt{100}} = \dfrac{\bar{X}-15000}{150}$

拒绝域 $W = \{Z \ge z_{0.05} = 1.645\}$

(3) $z = \dfrac{\bar{x}-15000}{150} = \dfrac{15525-15000}{150} = 3.5$

$P_- = 1-\Phi(z) = 1-\Phi(3.5) = 0.000233$

(4) ∵ $P_- < \alpha = 0.05$, ∴ 拒绝 H_0, 从而认为该厂的显像管平均寿命显著高于规定的标准.

3. (1) 拒绝域 $W = \left\{|Z| = \left|\dfrac{\bar{X}-1}{1/\sqrt{16}}\right| \ge z_{0.025} = 1.96\right\}$.

犯第二类错误的概率为 $\cancel{P(|Z|<1.96|\mu=2)}$. $P(|Z|<1.96 \mid \mu=2)$

当 $\mu=2$ 时, $\bar{X} \sim N(2, \frac{1}{16})$,

$\therefore P(|Z|<1.96 \mid \mu=2) = P(|4(\bar{X}-1)|<1.96 \mid \mu=2)$

$= P(|\bar{X}-1|<0.49 \mid \mu=2) = P(0.51<\bar{X}<1.49 \mid \mu=2)$

$= \Phi\left(\dfrac{1.49-2}{1/4}\right) - \Phi\left(\dfrac{0.51-2}{1/4}\right) = \Phi(-2.04) - \Phi(-5.96)$

$= \Phi(5.96) - \Phi(2.04) \approx 1 - 0.9793 = 0.0207$

年　月　日　　　　星期　　天气

(2). 令 $\chi^2=15S^2$，则拒绝域 $W=\{\chi^2\geq\chi^2_{0.05}(15)\}$

$=\{15S^2\geq 24.996\}$

在 $\sigma^2=4$ 时，$\frac{15S^2}{4}\sim\chi^2(15)$

∴ 第二类错误概率为：

$P(15S^2<24.996\mid\sigma^2=4)=P(\frac{15S^2}{4}<6.249\mid\sigma^2=4)=P(\chi^2(15)<6.249)$

$=0.024745$　　~~$P(\chi^2(15)<6.249)$~~

(3). (1)中 $z=4(\bar{x}-1)=2.16$

$P=2[1-\Phi(2.16)]=0.0308$

(2)中 $\chi_0^2=15S^2=15\times1.44=21.6$

$P=P(\chi^2(15)>21.6)=0.1187$

6. 令 X_i, Y_i 分别表示第 i 人服药前体重和服药后体重.

令 $D_i=X_i-Y_i$. 假设 $D_i\sim N(\mu_D,\sigma_D^2)$，$\sigma_D$ 未知. 检验：

$H_0: \mu_D\leq0$　　　$H_1: \mu_D>0$

检验统计量 $T=\frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{10}}$，拒绝域 $W=\{T>t_{0.05}(9)\}$

$=\{T>1.8331\}$.

年　月　日　　　　　　　　星期　　天气

计得 $\bar{d}=3$, $S_D=2.9814$, $T=3.181981>1.8331$

∴拒绝 H_0，从而认为减肥效果显著.

(或由于 $P=1-\Phi(3.181981)=0.000731<\alpha=0.05$)

13.(1) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$　　$H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

拒绝域 $W=\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq F_{0.025}(7,8)\text{ 或 }\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq F_{0.975}(7,8)\right\}$

$=\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 4.529\text{ 或 }\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq 0.204\right\}$.

计得 $\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.919$. 由于 $0.204<\frac{S_1^2}{S_2^2}<4.529$. 不拒绝 H_0,

即认为两个方差没有显著差异.

(2). $H_0: \mu_1\geq\mu_2$,　　$H_1: \mu_1<\mu_2$.

拒绝域 $W=\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}}\leq -t_{0.05}(8+9-2)\right\}=\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}}\leq -1.7531\right\}$

计得: $\bar{x}=2.375$, $\bar{y}=3.5556$, $S_W=\sqrt{\frac{7S_1^2+8S_2^2}{15}}=1.6350$

∵ $\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}}=-1.4860>-1.7531$　∴不拒绝 H_0

即甲给药的并不显著小于乙.

18. H_0: $X \sim \pi(\lambda)$，λ未知

λ的极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \bar{x} = 3.078$

$$\hat{p}_i = P(X=i) = e^{-\hat{\lambda}} \frac{\hat{\lambda}^i}{i!}, \quad i=0,7$$

$$\hat{p}_8 = 1 - \sum_{i=0}^{7} \hat{p}_i$$

乘客数	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
实际频数 n_i	5	12	18	21	16	13	0	3	2
H_0下 $\hat{p}_i$	0.046062	0.141767	0.218164	0.22382	0.172217	0.106009	0.054379	0.023909	0.013674
H_0下 $n\hat{p}_i$	4.145535	12.75904	19.63474	20.14379	15.49953	9.540819	4.894087	2.151845	1.230627

16.90457

8.276558

$$\chi^2 = \left(\sum \frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}\right) - 90 = 2.74051 < \chi^2_{0.05}(6-1-1) = 9.48773$$

∴不拒绝H_0，认为数据来自泊松分布总体.

19. $H_0: X \sim Exp(\frac{1}{10})$

$p_1 = P_{H_0}(0 \le X \le 5) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$, $p_2 = P_{H_0}(5 < X \le 10) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}$

$p_3 = P_{H_0}(10 < X \le 20) = e^{-1} - e^{-2}$, $p_4 = P_{H_0}(20 < X \le 30) = e^{-2} - e^{-3}$

$p_5 = P_{H_0}(X > 30) = e^{-3}$

等候时间X	$0 \le X \le 5$	$5 < X \le 10$	$10 < X \le 20$	$20 < X \le 30$	$X > 30$
实际频数	30	28	20	15	7
理论频数 np_i	39.34693	23.86512	23.25442	8.554821	4.978707

合并 13.53353

$$\chi^2 = \sum \frac{n_i^2}{np_i} - 100 = 8.6888 > \chi^2_{0.05}(3) = 7.8147$$

拒绝H_0，不认为X服从均值为10的指数分布.