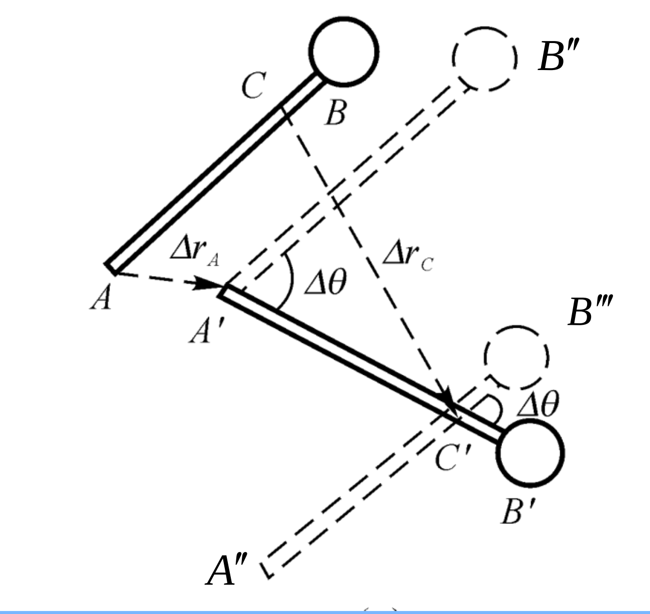
3-5 刚体的平面运动

定义：刚体内所有质点的运动都平行于某一平面。

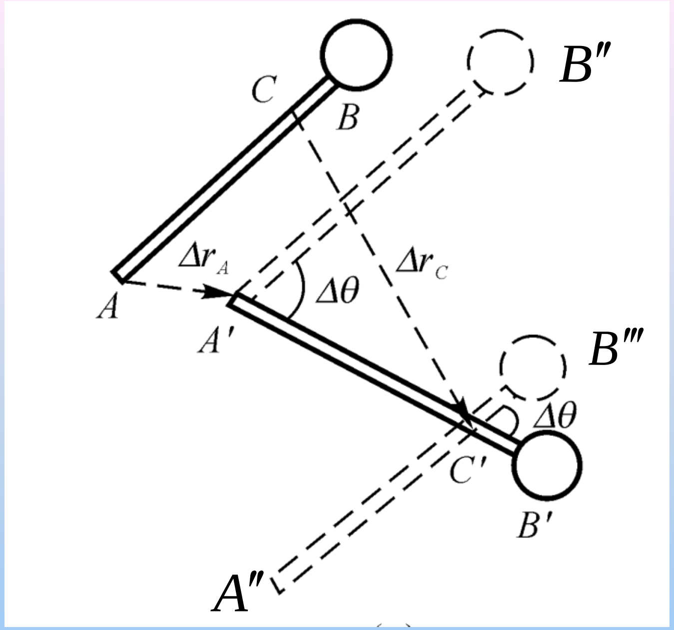
一、刚体平面运动的运动学



$$\text{刚体平面运动}\begin{cases}\text{随质心的平动}\\ \text{绕质心轴的转动}\end{cases}$$

1、以A为基点：

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$



2、以C为基点：

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$ $$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

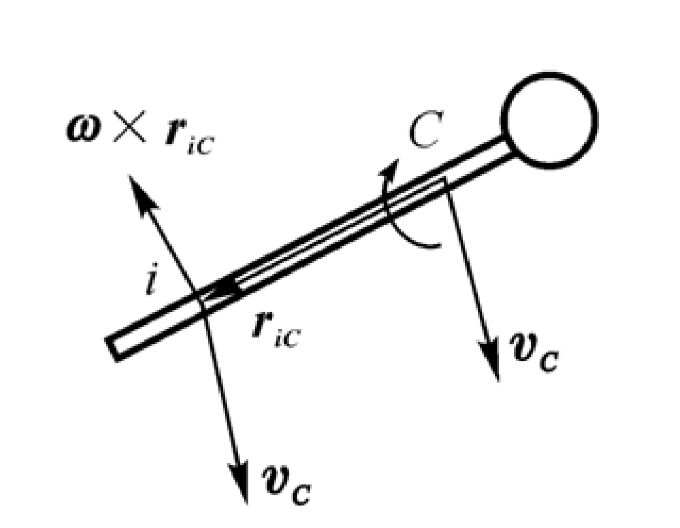
说明：1）线量: 若选取的基点不同，则

$$\vec{v}_A \neq \vec{v}_c$$ $$\vec{a}_A \neq \vec{a}_c$$

2）角量: $\because \Delta\theta$相同$\therefore \vec{\omega}$和$\vec{\beta}$相同

以质心为基点最为方便

结论： 刚体平面运动的速度和加速度与基点选择有关，而转动的角速度和角加速度与基点的选择无关。



刚体上任一点的速度（相对于惯性系的）：

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{转} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ic}$$

刚体上任一点的加速度等于质心的加速度加上相对质心的加速度：

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{\beta} \times \vec{r}_{ic} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{ic}$$

二、刚体平面运动的基本动力学方程

刚体平面运动
$$\begin{cases} \text{质心的平动} & \sum \vec{F}_{外} = m\vec{a}_C \\ \text{绕质心的转动} & \sum M_C = J_C \beta \end{cases}$$

平动 $\begin{cases} F_x = ma_{Cx} \\ F_y = ma_{Cy} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} F_t = ma_{Ct} \\ F_n = ma_{Cn} \end{cases}$

二、刚体平面运动的基本动力学方程

对于非惯性系,质心轴的转动定律:

$$\sum M_C = J_C \beta$$ 也成立.

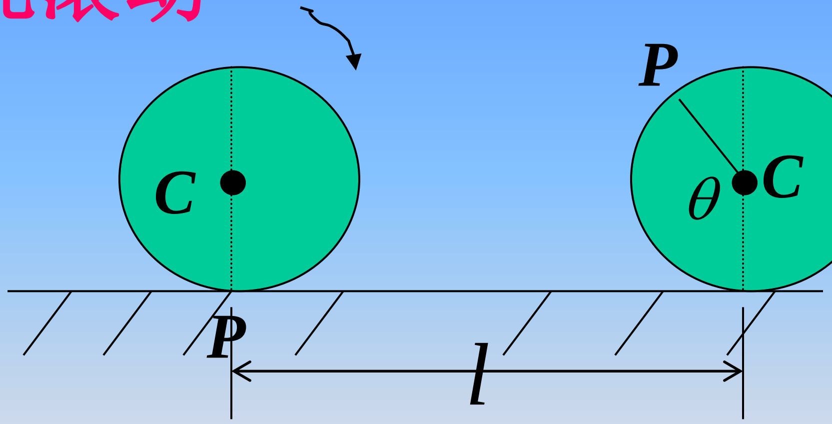
因为刚体的惯性力的方向通过质心轴,

惯性力对质心轴的力矩为零。

刚体平面运动的动能: $$E_K = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$$

三、刚体平面运动中的纯滚动

1、纯滚动的主要特征：



①在滚动中接触点P始终是相对 静止的，没有滑动。 **P**点的线速度始终为零。

$$l = R\theta \quad \frac{dl}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

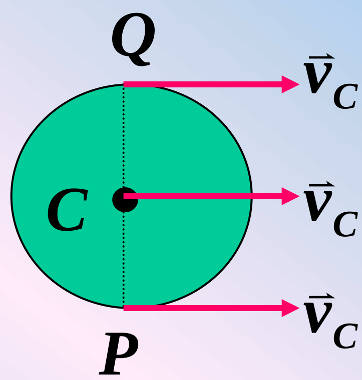
②发生在**P**点的摩擦力为静摩擦力(**0~f$_{max}$**),不做功。

③ $v_C = R\omega$， $a_C = R\beta$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{pc}$$

2、纯滚动中的瞬时轴研究方法：

轮子的平动

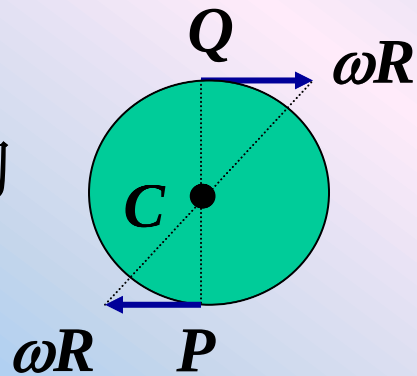


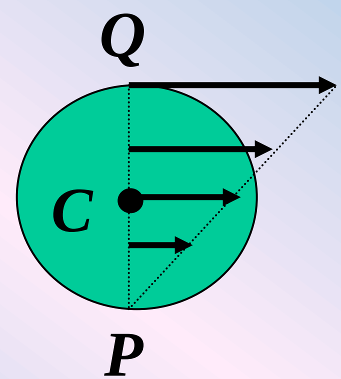
$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ic}$$

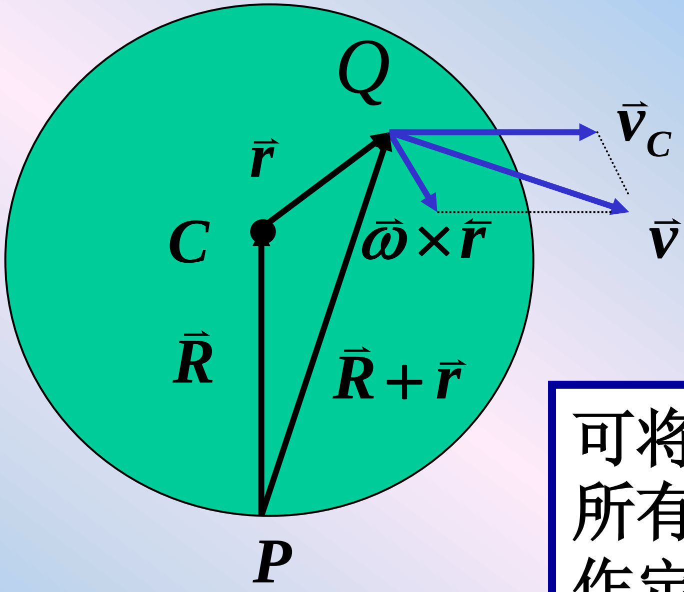
$$\vec{v}_Q = 2\vec{v}_c$$

$$\vec{v}_P = 0$$

绕质心的转动







$$\vec{v}=\vec{v}_C+\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{\omega}\times\vec{R}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$
$$=\vec{\omega}\times(\vec{R}+\vec{r})$$

可将轮子作纯滚动时某一瞬间的运动看成所有质量元绕通过P点且垂直于轮面的轴作定轴转动，通过P点的轴称为瞬时轴。

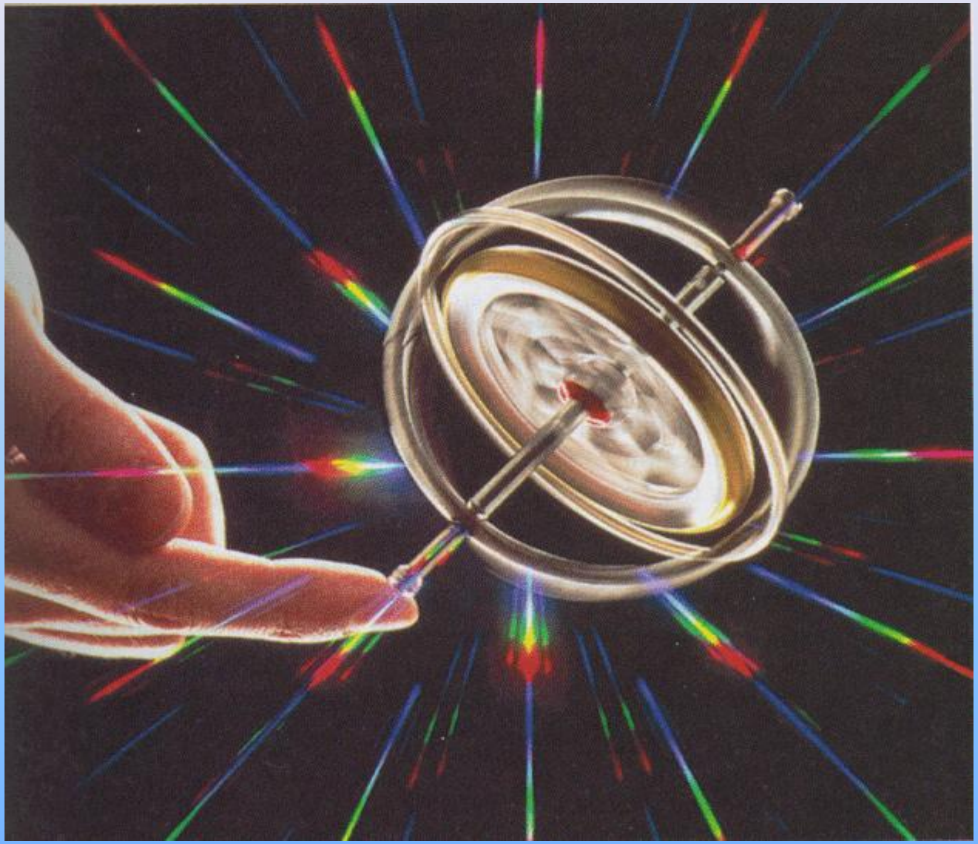
$$M_P=J_P\beta \qquad J_P=J_C+mR^2$$
$$a_C=\beta R$$

动能 $E_K=\dfrac{1}{2}J_P\omega^2$

用瞬时轴解题可以避开接触点的静摩擦力，有时很方便！

另外用瞬时轴求轮子上任一点的速度、加速度等线量也有优势。

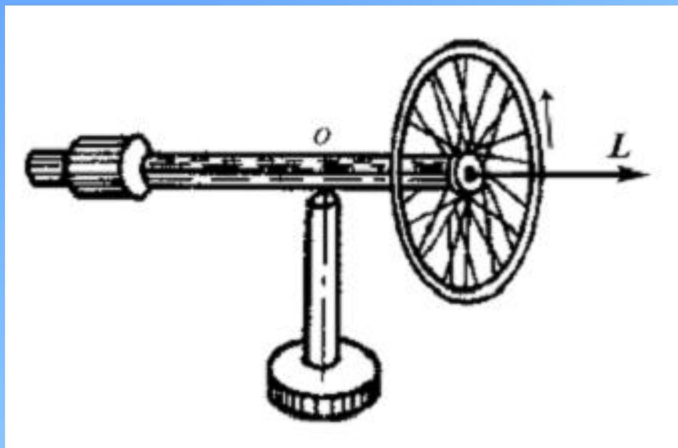
3-6 陀螺仪的定点运动（进动）



进动：高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。

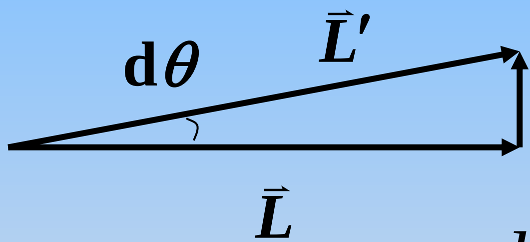
一、杠杆式回转仪

(回转仪)自转轴绕 z 轴转过 $d\theta$ $\rightarrow$ 进动(旋进)进动角速度 Ω



系统的角动量 $\vec{L}$ $\quad \vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad d\vec{L} = \vec{M}dt$$



逆时针进动

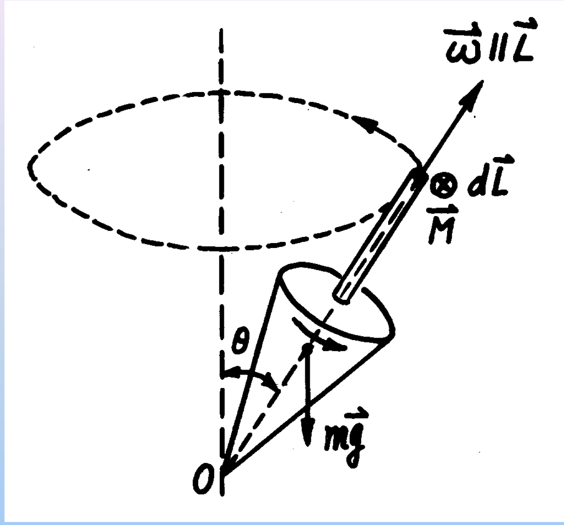
当 $\vec{M} \perp \vec{L}$ 时， $\quad d\vec{L} \perp \vec{L}$

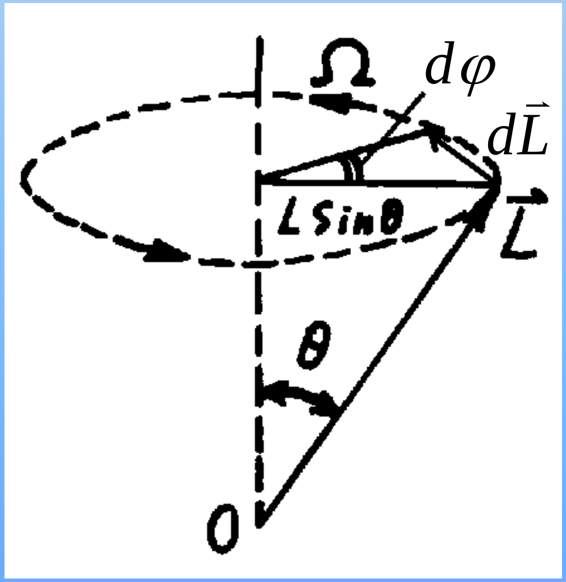
则 $\vec{L}$ 只改变方向不改变大小。

$$dL = Ld\theta = Mdt$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} \qquad \Omega << \omega$$

二、陀螺仪





$$\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L} \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

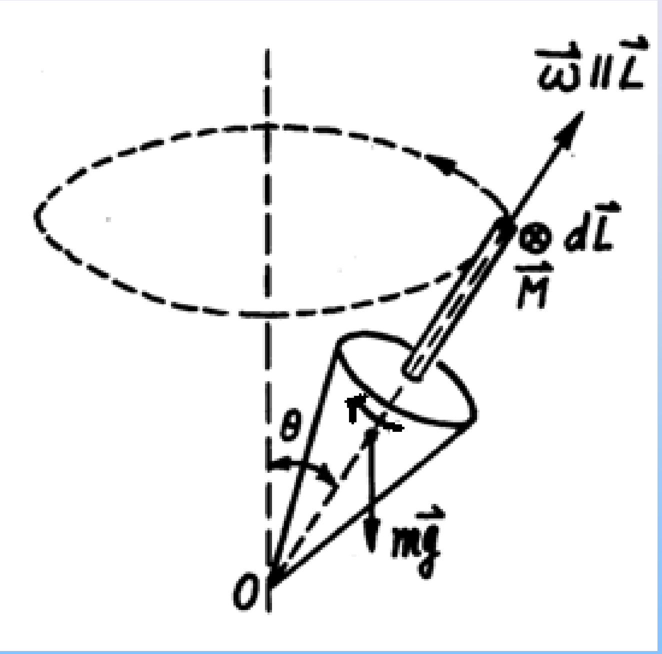
$$dL = L\sin\theta d\varphi = Mdt$$

$$M = mgr\sin\theta$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgr}{J\omega}$$

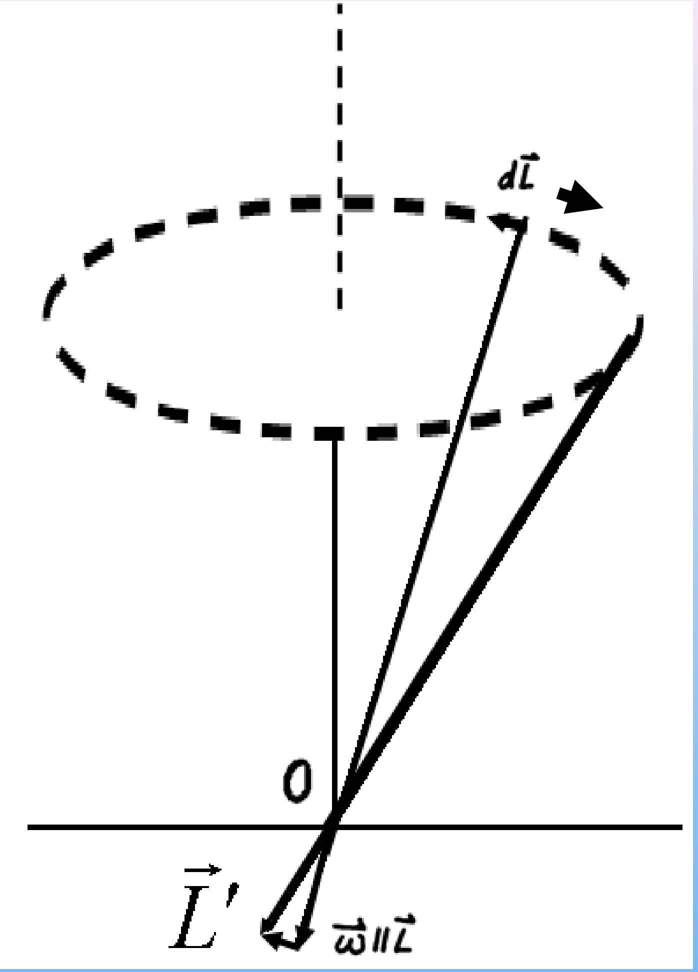
逆时针进动

二、陀螺仪



$$\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

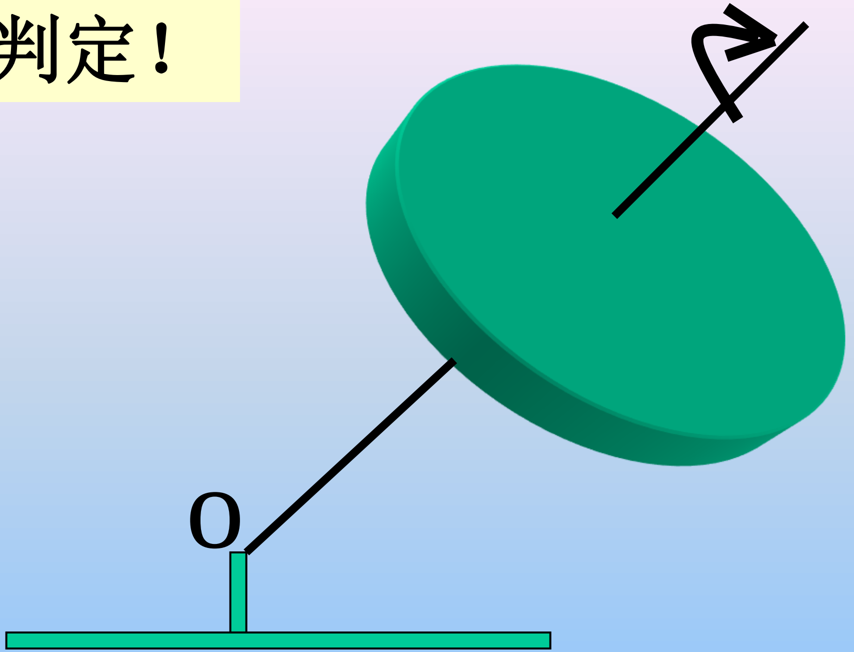


顺时针进动

重点掌握旋进方向的判定！

旋进角速度为

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$$



刚体力学

作业：

3 -29

-45

-47

-49