第五讲 级数

Monday, October 22, 2018 7:43 AM

上周作业本在最后排，请自行领取。
本周作业本请交至讲台。

幂级数。

解析函数零点的孤立性。

零点，孤立零点，m级零点

令 $n-(m+1)=k$

$f(z)=(z-z_0)^m \sum_{n=m+1}^{+\infty} C_n (z-z_0)^{n-m} = (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} C_{m+k+1} (z-z_0)^k$

$(\text{若 } C_0=0)$

$\varphi(z)$ 且 $\varphi(z_0)\neq 0$

$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$

$=(z-z_0)\sum_{n=1}^{+\infty} C_n (z-z_0)^{n-1}$

Thm: $f(z)$ 在 D 内解析，如果存在一列两两不相等的零点 $z_n \to z_0$

则：$f(z)\equiv 0$ in D.

证明：假设 $f(z)$ 在 z_0 处展开为幂级数。$f(z)=(z-z_0)^m \varphi(z)$ $(\varphi(z_0)\neq 0)$

$=(z-z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (z-z_0)^k$

由于 $\varphi(z)$ 是解析 ⟹ 连续，应存在某个 z_0 的邻域 $D(z_0,\delta)$

$|\varphi(z)|>0$

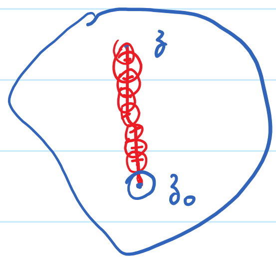
说明：$\varphi(z)$ 在 $D(z_0,\delta)$ 无零点。

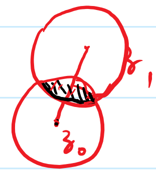
说明：$f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内无零点。

∴ z_0 是 $f(z)$ 的 m 级孤立零点。

与已知条件矛盾。

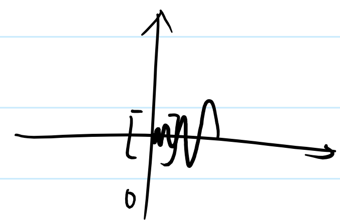
∴ $f(z)\equiv 0$ in $D(z_0,\delta)$ 内。





例: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$x = \frac{1}{n\pi}$



Thm: $f(z_0)=0$, $f(z)$ 解析, z_0 是 m 级零点

$\Longleftrightarrow$: $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots\cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$.

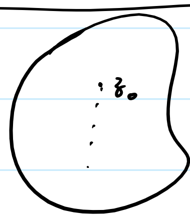
且 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

证明: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

Thm: 如果 $f(z)$, $g(z)$ 解析 in D, $z_n \to z_0$.

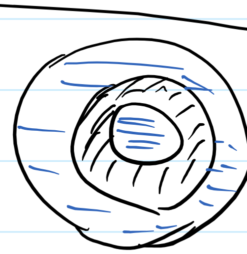
$\underline{f(z_n) = g(z_n)} \Rightarrow f(z) \equiv g(z)$. ✓

思考题



$|f(z_n) - g(z_n)| < \varepsilon$

$|f(z) - g(z)| < C\varepsilon$?



§ 洛朗级数.

幂级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

1°：正幂部分： $|z-z_0|<R_1$

2°：负幂部分： $(z-z_0)^{-n} = z^n$. $\quad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} z^k$.

$$|z|<R_2$$

$$\Rightarrow: \left|\frac{1}{z-z_0}\right|<R_2 \Rightarrow: |z-z_0|>\frac{1}{R_2}$$

两部分同时收敛：$\Rightarrow$： $\frac{1}{R_2}<|z-z_0|<R_1$ ：收敛环

例： $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{b^n}}$. $\quad (a>0,\ b>0)$.

$|z|<b$,

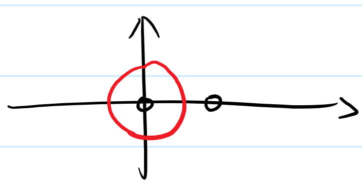
$|z|>a$.

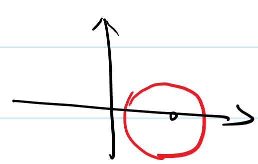
$a<|z|<b$. 收敛环.

Thm：双边幂级数在其收敛圆环上

(1)：和函数一定是解析的. (2) 逐项求导 (3) 逐项积分.

$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$





$0<|z|<1$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad (?)$$

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad (\checkmark)$$

$C_{-\infty} = \cdots = C_{-3} = C_{-2} = 0, \quad C_{-1} = 1. \quad C_0 = C_1 = \cdots = C_{\infty} = 1.$

$0 < |z-1| < 1$, $\quad f(z) = \frac{1}{z} + \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{= -(z-1)^{-1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-1)^n$

?

$$\frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-(z-1)\right)^n$$

Thm: $f(z)$ 在圆环上: $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析,

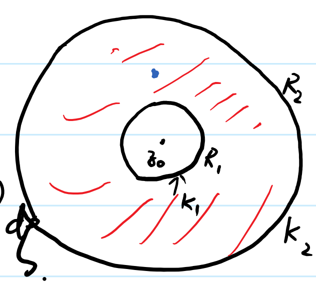
则: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$.

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \qquad (n = -\infty, \cdots, +\infty)$$

C:为任意一条闭曲线.

证明. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



由于: $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$. $\zeta \in K_2$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)\left[1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

$\zeta \in K_1$, $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} \times \boxed{\frac{1}{-1 + \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}}$$

$$= \frac{\quad}{z-z_0} \times \boxed{\frac{\quad}{-1+\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}}$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow: f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^n$$

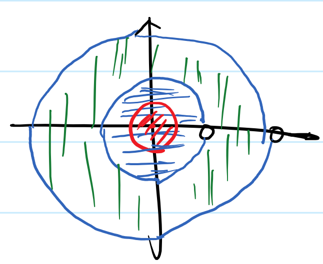
$$+ \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{1-j}} d\zeta \right) (z-z_0)^{-j}.$$

$$\triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n.$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta & n=0,1,2,\cdots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{1+n}} d\zeta. & n=-\infty,\cdots,-1. \end{cases}$$

称该级数为洛朗级数（Laurent）.

例: $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.



展开为 z 的幂级数.

1°: $|z|<1$ 内, $f(z) = \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{2-z}$

$$= \sum z^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n\right)$$

2°: $1<|z|<2$, $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$

$$= -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

3°: $|z|>2$, $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$

$$= -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) - \left(-\frac{1}{z}\right)\times\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right)$$

$f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展成 Laurent 级数.

$$f(z)= z^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right)$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\times\frac{1}{z} + \cdots$$

$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内展成 Laurent 级数.

$$\sin\frac{z}{z-1} = \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$= \sin 1 \underbrace{\cos\frac{1}{z-1}} + \cos 1 \sin\frac{1}{z-1}$$

$$= \sin 1\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^4+\cdots\right]$$

$$+\cos 1\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^5+\cdots\right]$$

$$\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}\cdots \qquad 0<|z|<1,$$

$$\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}-\cdots\cdots} \qquad 0<\left|\frac{1}{z}\right|<1,$$

即：$|z|>1$

P116: 12(1), 13(1)(4)(5)(7).