第一篇　　力学

力学的研究对象是机械运动。

机械运动：物体在空间的位置随时间的变化过程。

力学分为运动学、动力学和静力学。

运动学 —— 描述物体的运动状态。

动力学 —— 探求物体运动的原因。

本篇分别讨论质点力学、刚体力学和相对论力学。

第一章　　质点运动学

质点运动学：研究物体的运动状态，如：位置、速度、加速度。

1-1　质点 参照系

一、质点： 具有一定质量, 没有(忽略)大小和形状的理想化模型。

物体：大小、形状、质量

任何物体都有一定的大小和形状。但在某些问题中，物体的大小和形状并不重要，可以忽略，可看成一个只有质量、没有大小和形状的理想的点，这样的物体可称为质点。

说明

1）质点是一种理性模型，并不真实存在。

2）质点突出了物体的两个根本性质：a)具有质量

b)占据位置

3)一个物体能否看成质点是有条件的、相对的。

例：地球绕太阳公转：　地球→质点

地球半径　<<　日地距离

6.4×10^3 km　　　1.5×10^8 km

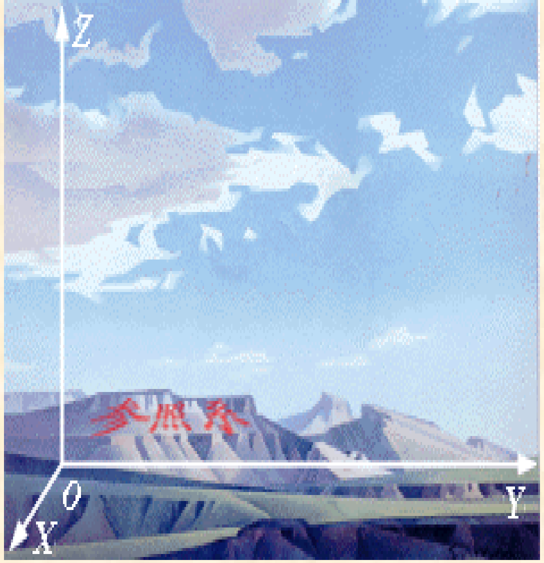
地球自转：　　地球≠质点

两种情形下的物体运动时可看成质点：

- 本身相对于参考物很小
- 平动的物体 (代表点)

二、参照系、坐标系

宇宙中的一切物体都在运动，没有绝对静止的物体，这叫运动的绝对性。



运动本身的绝对性 — 运动是永恒的
运动描述的相对性 — 不同参考系得到的运动形式不同。

为了描述一个物体的机械运动，必须选另一个物体作参照物，被选作参照的物体称为参照系。

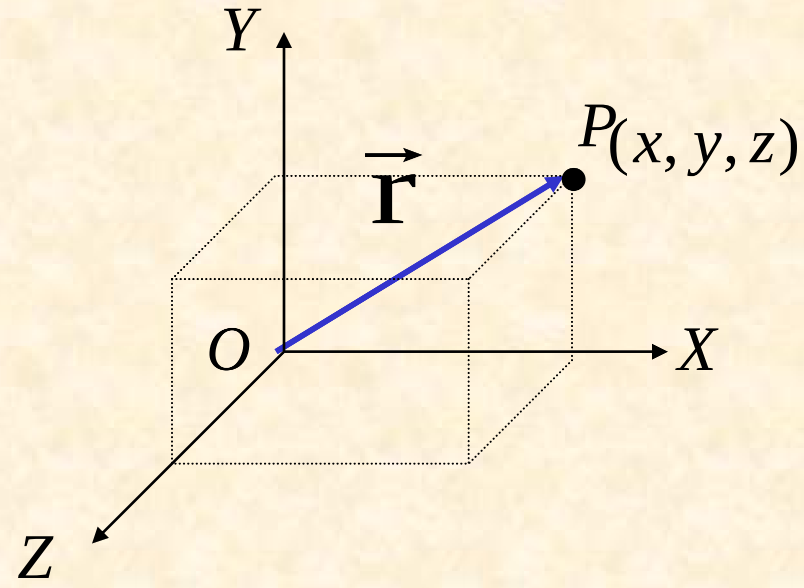
只有参照系不能定量地描述物体的位置。所以要在参照系上固定一个坐标系。这样就可定量描述物体的位置。

坐标系

- 直角坐标系(x,y,z),
- 球坐标系(r,θ,φ),
- 极坐标系(ρ,θ),
- 自然坐标系(l,t,n)

参照系和坐标系的选择是任意的。

1-2 位置矢量 位移



一、位置矢量（位矢或矢径）

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$ ------ 矢量形式

位矢 (大小、方向)

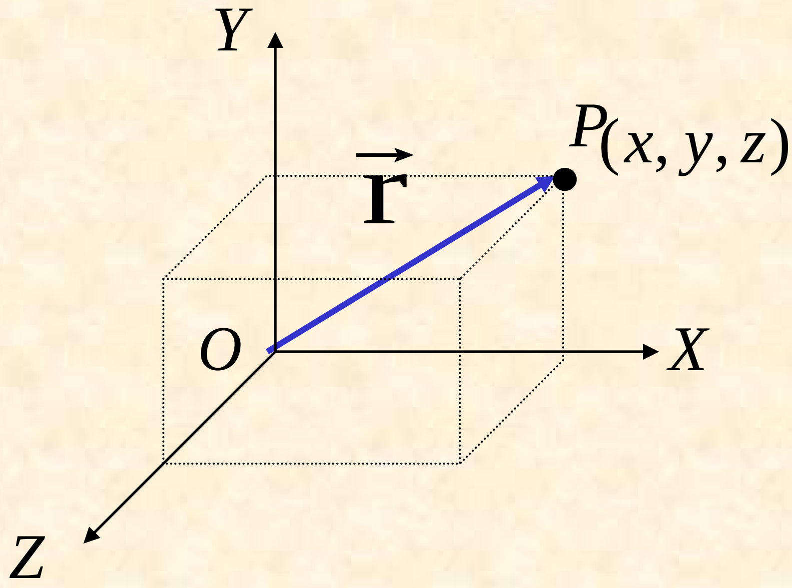
大小： $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向 : (方向余弦)

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

1-2 位置矢量 位移

一、位置矢量（位矢或矢径）



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

质点位置随时间的变化

------ 运动方程

在运动方程中，消去t得 $f(x, y, z)=0$

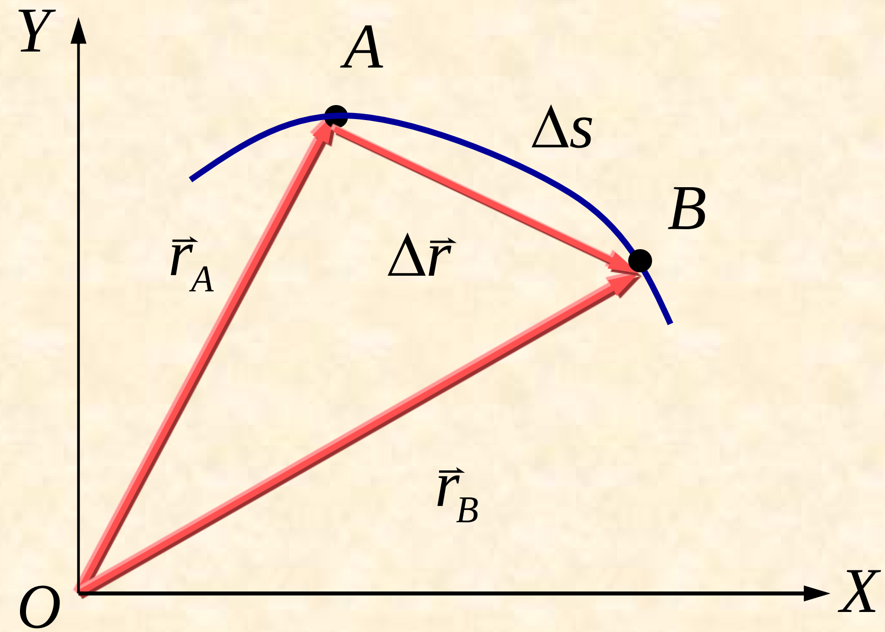
此方程称为质点的<u>轨道方程</u>。

二、位移(矢量)：

t时刻，A点位矢为 $\vec{r}_A$

t+Δt时刻在B点位矢为 $\vec{r}_B$

A→ B 位矢的增量叫质点在Δ t时间内的位移。



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

位移是矢量：大小和方向

• 路程与位移的区别

路程是标量, 是Δ t内走过的轨道的长度;而位移是矢量, 其大小是质点实际移动的直线距离， 当Δ t→0时，

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$$

位移 $\Delta\vec{r}$: 物体位置的变化 矢量

路程 ΔS : 物体经历的路程 标量

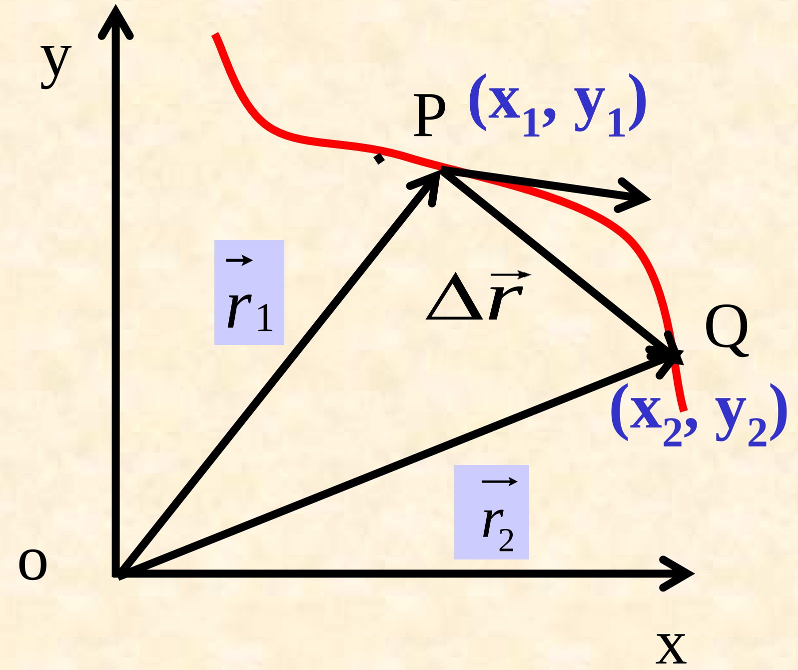
1-3 速度与速率

$t \qquad \vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$

$t + \Delta t \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(t + \Delta t)$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$$



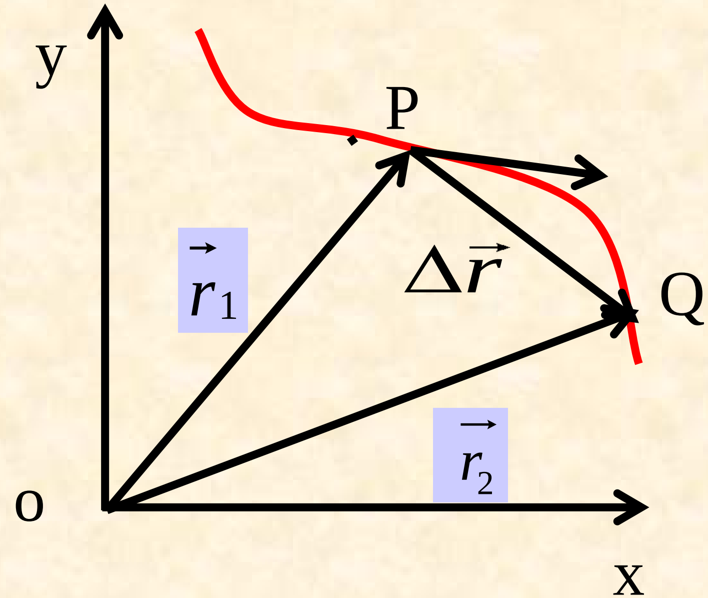
平均速度 $\quad \overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ 矢量：大小和方向

平均速率 $\quad \bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 标量：大小

注意：平均速度和平均速率的区别。

令 $\Delta t \to 0$，

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



称为瞬时速度（速度）

瞬时速度的大小：（即瞬时速率）

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} \neq \frac{dr}{dt}$$

瞬时速率

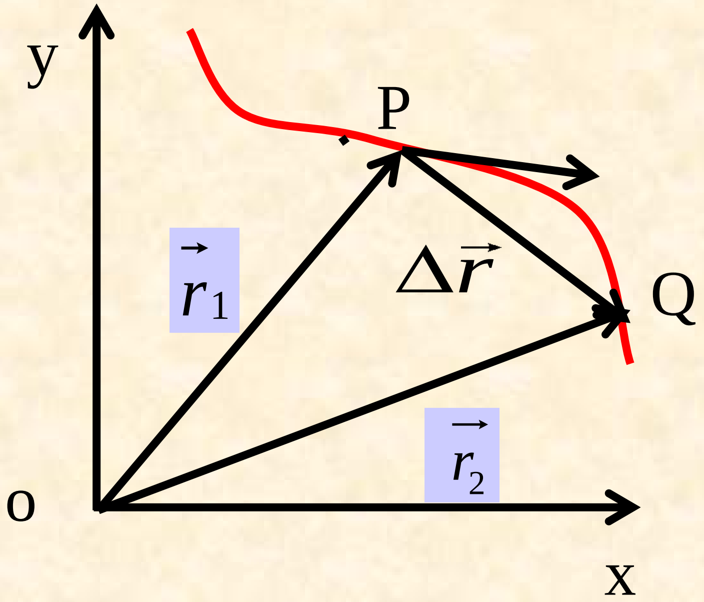
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

令$\Delta t \to 0$,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



称为瞬时速度（速度）

瞬时速度的大小：

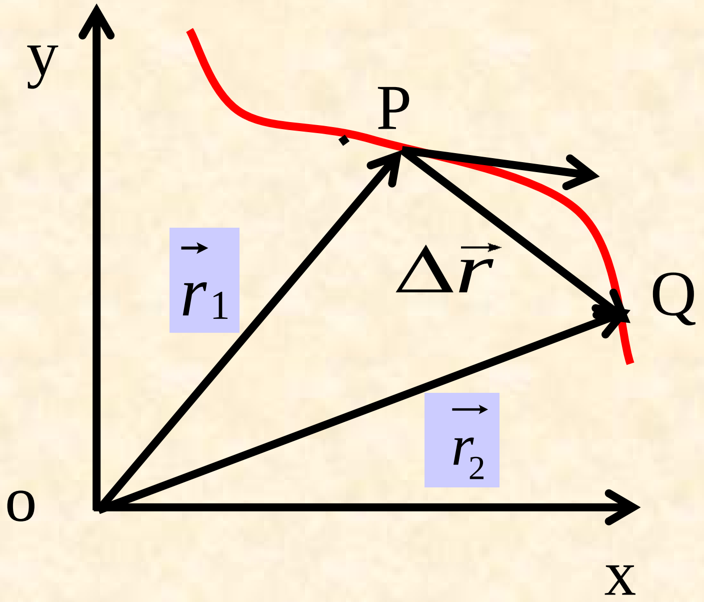
（即瞬时速率）

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

瞬时速度的大小：



$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

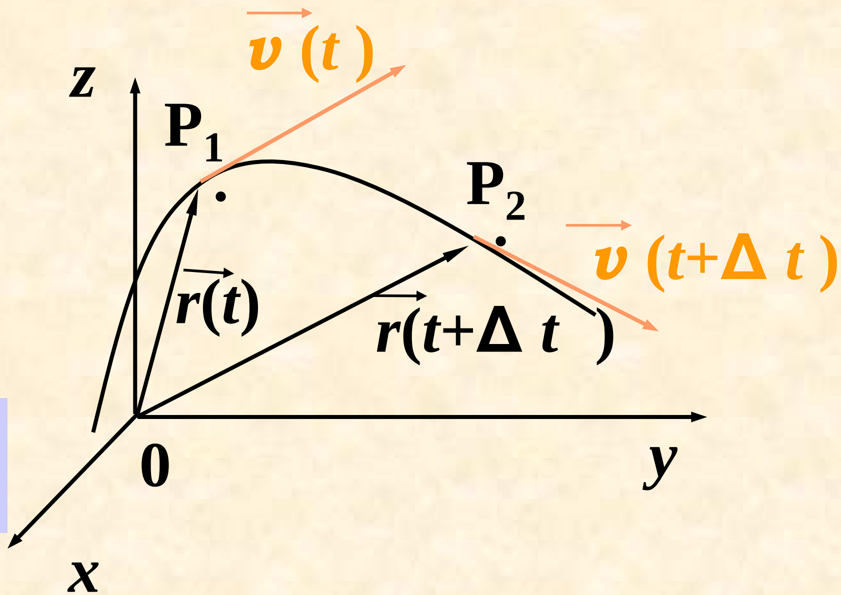
瞬时速度的方向：

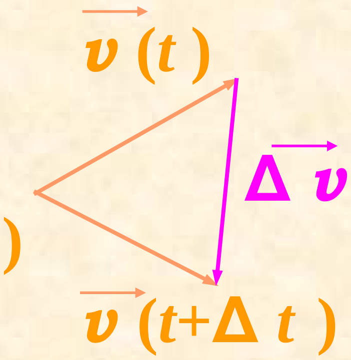
$\Delta t \to 0$ $\Delta\vec{r} \to$ P点的切线方向。

速度方向:轨道曲线的切线方向，并指向前进方向。

注意：瞬时速度与平均速度的区别。

1-4 加速度





加速度 — 速度随时间的变化率

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$$

平均加速度：

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度：

（加速度）

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

方向：$\Delta t\to 0$时速度增量的极限方向，在曲线运动中，总是指向曲线的凹侧。

直角坐标系中的表示：

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

瞬时加速度大小：

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

注意：瞬时加速度与平均加速度的区别

例1、用矢量表示二维运动，设 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$ **(m)**

求（1）质点在t=1-2s的位移和平均速度;(2)t=2s时质点的速度和加速度;（3）轨迹方程

解：$\vec{r}(2)=4\vec{i}-2\vec{j}$ $\quad\quad$ $\vec{r}(1)=2\vec{i}+\vec{j}$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(2)-\vec{r}(1)=2\vec{i}-3\vec{j}(\mathrm{m})$$

$$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=2\vec{i}-3\vec{j}(\mathrm{m/s})$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j} \quad t=2 \quad \vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}(\mathrm{m/s})$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}(\mathrm{m/s^2}) \quad \begin{cases} x=2t \\ y=2-t^2 \end{cases}$$

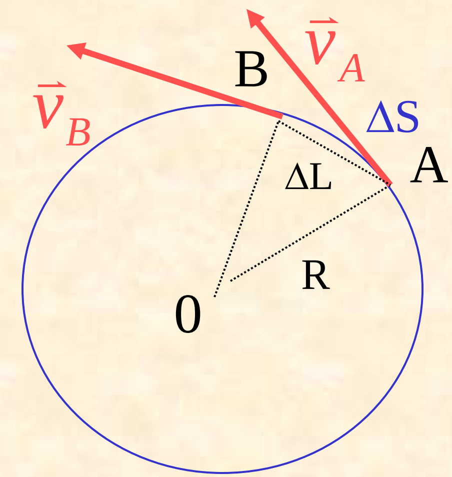
轨迹方程 $y=2-\dfrac{x^2}{4}$

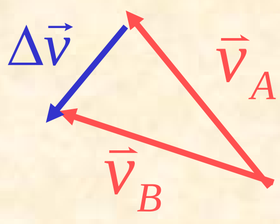
1-5 切向加速度和法向加速度

一、圆周运动

轨道曲线为圆，平面曲线运动的重要特例

1) 匀速(率)圆周运动 （任一时刻 速率 v = 常量）





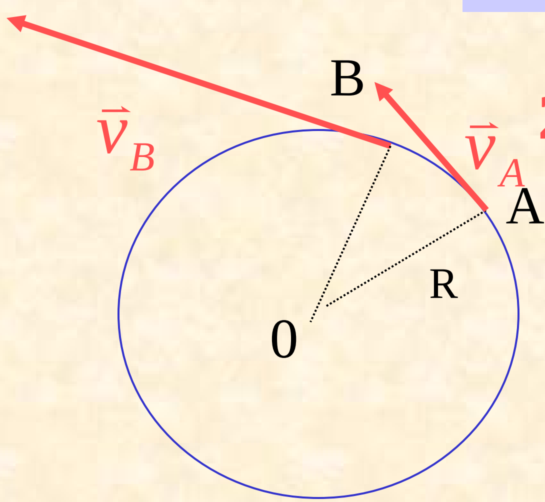
$$a=|\vec{a}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

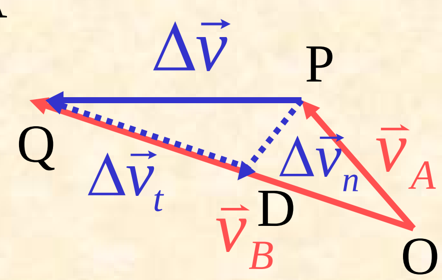
$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{\Delta L}{R}\qquad \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{R}\frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$\vec{a}$ 的大小：$a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\dfrac{v}{R}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta L}{\Delta t}=\dfrac{v}{R}\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{v^2}{R}$

$\vec{a}$ 的方向：当 $\Delta t\to 0$，$\Delta\vec{v}\perp\vec{v}_A$ 沿半径指向圆心 — 向心加速度

2) 变速圆周运动





$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A=\Delta\vec{v}_n+\Delta\vec{v}_t$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

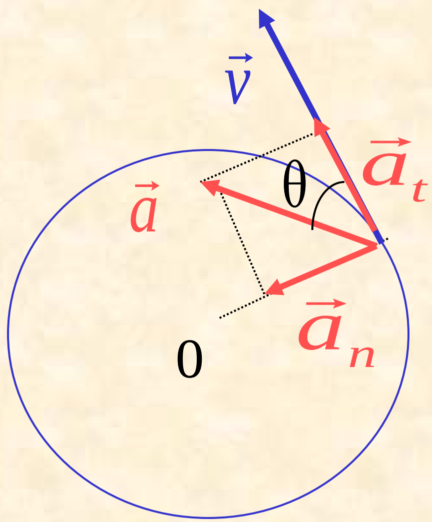
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n+\Delta\vec{v}_t}{\Delta t}=\vec{a}_n+\vec{a}_t$$

法向加速度（向心加速度） $\vec{a}_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}$ 大小: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

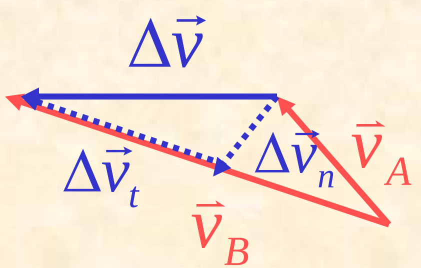
它反映了质点速度方向的变化。

切向加速度 $\vec{a}_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t}$ 大小: $a_t = |\vec{a}_t| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{|\Delta \vec{v}_t|}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

$\Delta \vec{v}_t$ 的极限方向与 $\vec{v}_A$ 一致 (切线方向) 反映了质点速率的变化。



$$|\Delta \vec{v}_t| = |\vec{v}_B| - |\vec{v}_A| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\lim} \Delta v$$



总加速度 $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

大小: $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}$

$\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角 θ $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_n}{a_t}$

二、平面曲线运动

平面曲线——在无穷小范围内可看成曲率半径为ρ的**圆周曲线**

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t \qquad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

法向加速度（指向曲率中心） $\vec{a}_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$ $\quad a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ 改变速度方向

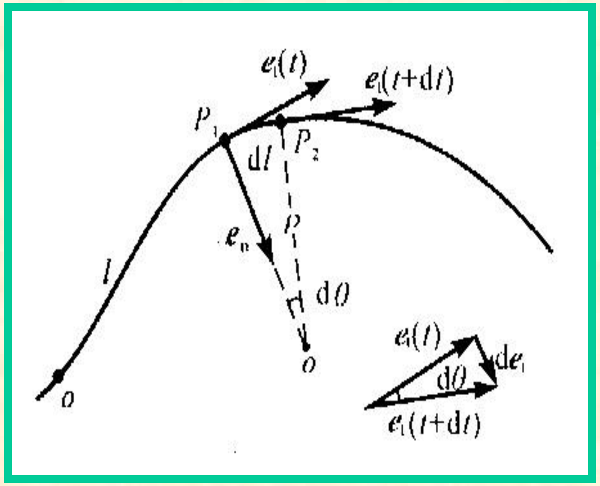
切问加速度（指向$\vec{v}$的方向） $\vec{a}_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t}$ $\quad a_t = \dfrac{dv}{dt}$ 改变速度大小

自然坐标系

法向单位矢量 $\vec{e}_n(t)$ 切向单位矢量 $\vec{e}_t(t)$

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\because \quad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_n = \frac{d\theta}{dS}\frac{dS}{dt}\,\vec{e}_n = \frac{1}{\rho}v\,\vec{e}_n$$



$$\therefore \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_n$$

三、圆周运动的角量描述

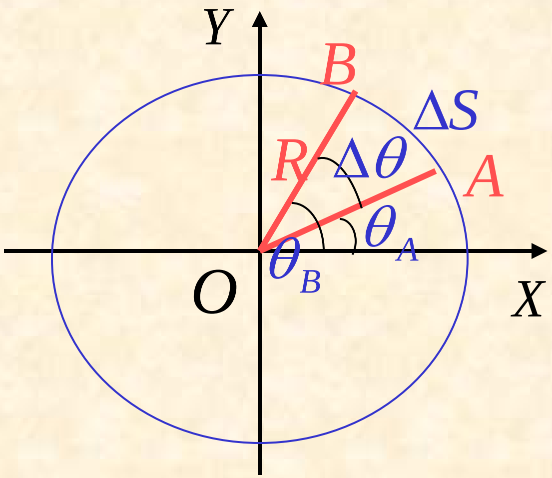
角坐标 θ

角位移 $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$

角速度 (角位移随时间的变化率)

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

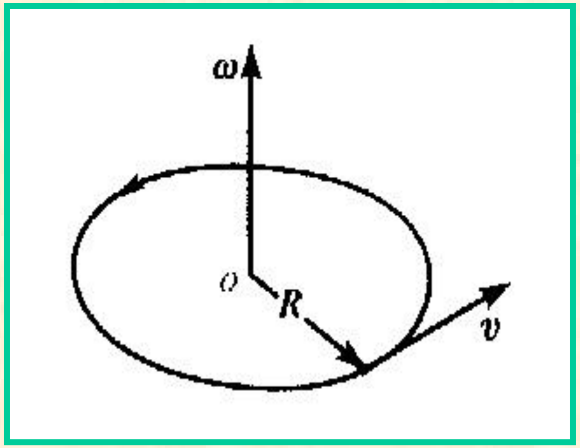
单位: 弧度/秒 (rad/s)



角速度矢量 $\vec{\omega}$

大小: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

方向: 与转动方向成右手螺旋关系



角加速度 （角速度随时间的变化率）

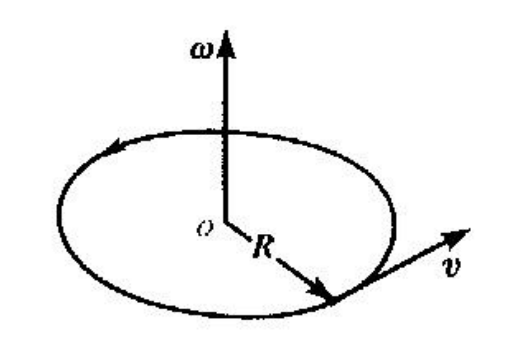
$$\omega = \omega(t)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ 单位： 弧度/秒^2 （rad/s^2）

四、角量和线量的关系

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$



$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\beta \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{cases}$$

角加速度矢量 $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$\vec{a}_t = \vec{\beta} \times \vec{R}$ $\quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$

$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$

圆周运动的角量描述只需一个独立坐标变量θ

圆周运动的角量描述 ← 比较 → 直线运动

角坐标 θ

角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

匀速圆周运动 $\theta = \theta_0 + \omega t$

匀加速圆周运动 $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2$

（角运动方程）

位置 x

位移 Δx

速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$

加速度 $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

匀速直线运动 $x = x_0 + v t$

匀加速直线运动 $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}a t^2$

（运动方程）

质点运动的问题分成两类：

(1)、已知运动方程$\vec{r}(t)$,求任一时刻的$\vec{v}$、$\vec{a}$，解题方法是求导；

(2)、已知$\vec{a}$及初始条件$\vec{r}_0$、$\vec{v}_0$求运动方程和$\vec{v}$,解题方法是积分。

例2、一质点在oxy平面内作曲线运动，其加速度是时间的函数。已知$a_x=2$, $a_y=36t^2$。设质点$t=0$时$r_0=0$,$v_0=0$。求：(1)此质点的运动方程；(2)此质点的轨道方程，(3)此质点的切向加速度。

解：

$$(1)a_x=\frac{dv_x}{dt} \qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}$$

$$dv_x=2dt \qquad dv_y=36t^2dt$$

$$\int_0^{v_x}dv_x=\int_0^t 2dt \qquad \int_0^{v_y}dv_y=\int_0^t 36t^2dt$$

$$v_x=2t \qquad v_y=12t^3$$

$$\therefore \vec{v}=2t\vec{i}+12t^3\vec{j}\,(\mathrm{m/s})$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$dx = 2tdt \qquad dy = 12t^3dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t 2tdt \qquad \int_0^y dy = \int_0^t 12t^3dt$$

$$x = t^2 \qquad y = 3t^4$$

所以质点的运动方程为：

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t^4 \end{cases} \qquad \vec{r} = t^2\vec{i} + 3t^4\vec{j}$$

(2) 上式中消去t,得$y=3x^2$即为轨道方程。可知是抛物线。

$$(3)\because \quad v_x = 2t \qquad v_y = 12t^3$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 + 144t^6}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{8t \quad + 864t^5}{\sqrt{4t^2 + 144t^6}} = \frac{2 + 216t^4}{\sqrt{1 + 36t^4}}$$

若求法向加速度

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\sqrt{1 + 324t^4}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{24t^2}{\sqrt{1 + 36t^4}}$$

例3：一质点沿X轴运动，其加速度 *a* 与位置坐标 *x* 的关系为：$a=4+3x^2$ (SI)。若质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解：
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4+3x^2$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=4+3x^2$$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(4+3x^2)\mathrm{d}x$$

$$v=\sqrt{8x+2x^3}$$

例4：　一汽车沿半径为 50m 的圆形公路行驶，任一时刻汽车经过的路程 s=10+10t-0.5t^2 (SI)。求 t=5s 时，汽车的速率以及切向加速度、法向加速度和总加速度的大小。

解：

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = 10 - \mathrm{t}$$

t=5s时　$v = 5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

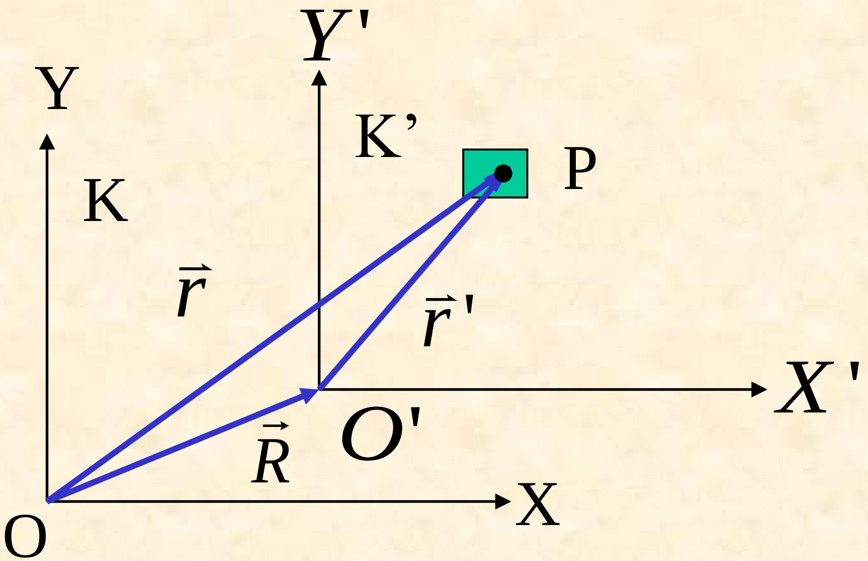
$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0.5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 1.1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

1-6 相对运动

研究的问题：在两个参考系中考察同一质点的运动



绝对运动 $\vec{r}$

相对运动 $\vec{r}\,'$

牵连运动 $\vec{R}$

$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

绝对速度＝相对速度＋牵连速度 ------ 速度合成定理

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0$$

绝对速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$　　绝对加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

相对速度 $\vec{v}'=\dfrac{d\vec{r}'}{dt}$　　相对加速度 $\vec{a}'=\dfrac{d\vec{v}'}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$

牵连速度 $\vec{u}=\dfrac{d\vec{R}}{dt}$　　牵连加速度 $\vec{a}_o=\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

(经典物理)

伽利略变换:

$$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{R}$$

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}$$

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_o$$

变换涉及不同参考系

特例：K’系相对于K系以恒定的速度u 沿X轴正向运动

$$x=x'+ut$$

$$y=y'$$

$$z=z'$$

$$v_x=v'_x+u$$

$$v_y=v'_y$$

$$v_z=v'_z$$

质点运动学

作业：

1-6

-7

-8

-17

质点运动学

作业：
1 -18
-20