浙江大学 07-08 学年春夏学期期末考试试卷

一、填空题（每空格 3 分，共 24 分）

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，则 $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}x & a_{11}x+a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}x & a_{21}x+a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32}x & a_{31}x+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ ________________.

2. 设 4 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $(A^*)^* =$ ________________________.

3. 设 V 是实数域 R 上的全体 4×4 阶反对称矩阵所成的线性空间，即

$V=\left\{A=(a_{ij})_{4\times4} \mid A^T=-A, a_{ij}\in R\right\}$，写出 V 的一组基________________________

V 的维数是__________________， 设 4 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，写出 A 在上面这组基下的坐标是________________________.

4. 设 A 是 3 阶矩阵，且 $|A|=0$, $A_{11}=1$, $A_{22}=2$，$A_{33}=-4$，则 A^* 的特征值是

$\lambda_1^* =$ ________，$\lambda_2^* =$ ________，$\lambda_3^* =$ ________.

二、 计算题（本大题共 61 分， 其中第 1 题至第 4 题，每小题 12 分，第 5 题 13 分）

1. 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 2^5-2 & 2^4-2 & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^5-3 & 3^4-3 & 3^3-3 & 3^2-3 \\ 4^5-4 & 4^4-4 & 4^3-4 & 4^2-4 \\ 5^5-5 & 5^4-5 & 5^3-5 & 5^2-5 \end{vmatrix}$

2. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$

问（1）a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

（2）a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多解？并用基础解系来表示它的全部解.

3. 已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，

$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，求$a,b$的值，并写出$\beta_3$由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示的表示式(只需写出一种表示式).

4. 设A,B都是 3 阶实可逆矩阵，A的特征值是$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}$，这里$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是互不相同的正数，若$B$的特征值是-5，1，7，$B=(A^{-1})^2-6A$，求$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，并写出与$A,A^{-1},B$相似的对角矩阵.

5. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$，

(1) 写出二次型的矩阵A；

(2)用正交线性替换$X=QY$，化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形;

(3) 求实对称矩阵B，使得$A=B^3$.

三、证明题(本大题共 15 分，其中第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分)

1. 设A是实对称矩阵，B是正定矩阵，求证：AB的特征值全是实数.

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $m\times t$ 矩阵，$r(B)=t$，令 $C=(A,B)_{m\times(n+t)}$，$X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(r)}$为齐次线性方程组$CX=0$的一个基础解系，设$X^{(i)}=\begin{pmatrix}X_0^{(i)}\\X_1^{(i)}\end{pmatrix}$，这里$X_0^{(i)}$是$X^{(i)}$的前$n$个元素，$X_1^{(i)}$是$X^{(i)}$的后$t$个元素($i=1,2,\cdots,r$)，求证：$X_0^{(1)},X_0^{(2)},\cdots,X_0^{(r)}$线性无关.

线性代数期中自测题答案

一、是非题（判别下列命题是否正确；本大题共 5 个小题，每小题 2 分，满分 10 分）：

1. 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A) < n-1$，则其伴随阵 $A^* = 0$。

答：对。（因为 $r(A) < n-1$，所以任一个 n 阶子式都等于 0，进而 $A^* = 0$）

2. 若 $n \times s$ 矩阵 A 和 $s \times n$ 矩阵 B 满足 $AB = 0$，则 $r(A) + r(B) \le s$。

答：对。（这是课本例题）

3. 初等矩阵都是可逆阵，并且其逆阵都是它们本身。

答：错。（如 $\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$）

4. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^T = -A$，则对任意的列向量 $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$，均有 $X^T AX = 0$。

答：对。（这是因为 $X^T AX$ 是一个书，而且 $X^T AX = (X^T AX)^T = X^T A^T X = -X^T AX$ ）

5. 非齐次线性方程组 $AX = b$ 有唯一解，则 $X = A^{-1}b$。

答：错。（这是因为 A 未必是方阵）

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，满分 20 分）：

1. 若 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ __$\frac{1}{2}$__ 。

2. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随阵 A^* 的秩为__0___。

3 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times p$ 矩阵，且 $AB = 0$，则 B 的秩的取值范围是__$0 \le r(B) \le \min\{n-r, p\}$__ 。

4. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2i & -1 & 0 \\ 0 & 2i & -1 \end{bmatrix}, i = \sqrt{-1}$，则 $(A+2E)^{-1}(A-2E) =$ __$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 8i & -3 & 0 \\ 4 & 8i & -3 \end{pmatrix}$__ 。

5. 若 n 阶方阵 A, B 均可逆，$AXB = C$，则 $X =$ __$A^{-1}CB^{-1}$__ 。

三、证明： A 是 $m \times n$ 矩阵，则 $r(AA^T) = r(A)$。(满分 10 分)

证：$r(AA^T)\le r(A)$显然成立。

下面只需证明$r(AA^T)\ge r(A)$，即$m-r(AA^T)\le m-r(A)=m-r(A^T)$。

$\forall X_0\in N(AA^T)$，我们有$(AA^T)X_0=0$，进而可得

$0=X_0^T(AA^T)X_0=(X_0^TA)(A^TX_0)=(A^TX_0)^T(A^TX_0)$。

所以$A^TX_0=0$，即$X_0\in N(A^T)$。

所以$N(AA^T)\subseteq N(A^T)$。从而$m-r(AA^T)=\dim N(AA^T)\le\dim N(A^T)=m-r(A^T)$

。

所以$r(AA^T)=r(A)$。

四、（1）设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}3 & -2 & & & \\ -1 & 3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 3 & -2 \\ & & & -1 & 3\end{vmatrix}$$

试建立递推关系，并求D_n。

解：因为

$$D_n=\begin{vmatrix}3 & -2 & & & \\ -1 & 3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 3 & -2 \\ & & & -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{2n-1}\begin{vmatrix}3 & -2 & & & \\ -1 & 3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 3 & 0 \\ & & & -1 & -2\end{vmatrix}_{n-1}+3D_{n-1}=3D_{n-1}-2D_{n-2}$$

所以$S_{n-1}=D_n-D_{n-1}=2(D_{n-1}-D_{n-2})=2S_{n-2}$，进而有

$D_n-D_{n-1}=S_{n-1}=2^{n-2}S_1=2^{n-2}(D_2-D_1)=2^n$。

所以$D_n=2^{n+1}-1$。

（2）设 $P=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},AP=PQ$，求 A^{100}。(满分 10 分)

解：因为 $P=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，显然 P 可逆且 $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。因为 $AP=PQ$，所以

$A=PQP^{-1}$。

所以 $A^{100}=PQ^{100}P^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2^{101}-2\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{bmatrix}$。

五、当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2-2x_3=-1\\-x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=-1\\-x_1-x_2+x_3=2\end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解。(满分 10 分)

答：略。

六、设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\1&7&6\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\1&-1\end{bmatrix}$，求 X 使得 $\begin{bmatrix}0&B\\A&0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}C\\0\end{bmatrix}$。(满分 10 分)

解：因为 $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\1&7&6\end{bmatrix}$，所以 A,B 均可逆，且有

$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{7}{3}&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-3&-2&1\end{bmatrix}$。

所以 $\begin{bmatrix}0&B\\A&0\end{bmatrix}$ 可逆且有 $\begin{bmatrix}0&B\\A&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&A^{-1}\\B^{-1}&0\end{bmatrix}$。

所以 $X=\begin{bmatrix}0 & B\\ A & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}C\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A^{-1}\\ B^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ B^{-1}C\end{bmatrix}=$（下略）。

七、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，证明：当 $m>n$ 时，齐次线性方程组 $ABX=0$ 必有非零解。(满分 10 分)

证：因为 $m>n$，所以 $m>n\geq r(A)\geq r(AB)$。所以齐次线性方程组 $ABX=0$ 必有非零解。

八、（1）若 A，B 为 n 阶方阵，B 和 $A-I$ 都可逆，且 $(A-I)^{-1}=(B-I)^{T}$,则 A 可逆。

（2）设 A、B 为 n 阶方阵，$I-AB$ 可逆，证明：$I-BA$ 也可逆，且

$(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$。(满分 10 分)

证：（1）因为 $(A-I)^{-1}=(B-I)^{T}$，所以

$$I=(A-I)(A-I)^{-1}=(A-I)(B-I)^{T}=A(B-I)^{T}-(B-I)^{T}=A(B-I)^{T}-B^{T}+I,$$

即 $A(B-I)^{T}=B^{T}$。

因为 B 可逆，所以 A 可逆。

（2）因为

$$\begin{aligned}&(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A)=I+B(I-AB)^{-1}A-BA-BAB(I-AB)^{-1}A\\&=I-BA+(B-BAB)(I-AB)^{-1}A=I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A=I\end{aligned}$$

所以 $I-BA$ 也可逆，且 $(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$。

九、证明：若 A 为列满秩矩阵，则有 $r(AB)=r(B)$。(满分 10 分)

证：显然有 $r(AB)\leq r(B)$，下面只需证 $r(AB)\geq r(B)$，即 $n-r(AB)\leq n-r(B)$，这儿 n 为矩阵 B 的列数。

$\forall X_0\in N(AB)$，则有 $ABX_0=0$。因为 A 为列满秩矩阵，所以 $N(A)=0$。

所以 $BX_0=0$，即 $X_0\in N(B)$。所以 $N(AB)\subseteq N(B)$。从而

$$n-r(AB)=\dim N(AB)\leq \dim N(B)=n-r(B)。$$

所以 $r(AB)=r(B)$。

2009-2010 秋冬学期《线性代数 I》期中自测

1．计算题（每题 10 分）。

（1） 问 k_1, k_2 各取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - k_1 x_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2 \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？有解时求其解。

（2） 在线性空间 $\mathbb{R}^4$ 中，将向量 $\beta = (1,2,1,1)$ 表示成向量

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (1,1,-1,-1), \alpha_3 = (1,-1,1,-1), \alpha_4 = (1,-1,-1,1)$$

的线性组合。

（3） 在线性空间 $\mathbb{R}^3$，设 $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (1,3,t)$。

(a) 问 t 取何值时，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关？

(b) 问 t 取何值时，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关？

（4） 设 $\alpha_1 = (1,1,-1,-1), \alpha_2 = (1,2,0,3) \in \mathbb{R}^4$，试求 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 的一组单位正交基，并将这组单位正交基扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一组单位正交基。

（5） 求实线性空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中的向量组

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的一个极大无关组。

2．证明题（每题 10 分）。

（1） 设 P_1, P_2 是两个数域且 $P_1 \subseteq P_2$。证明：P_2 关于数的加法和乘法构成 P_1 上的线性空间。

（2） 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$ 的秩为 r_1，向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in V$ 的秩为 r_2，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的秩为 r_3，证明：

$$\min\{r_1, r_2\} \le r_3 \le r_1 + r_2。$$

（3） 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$ 是线性空间 V 的一组基，$f \in L(V,V)$。证明：f 是同构映射

当且仅当 $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m) \in V$ 也是线性空间 V 的一组基。

3．判断题（每题 5 分）。

（1） 方程个数小于未知量个数的线性方程组必有无穷多解。

（2） 任一个系数为实数的 n 元齐次线性方程组的解集都是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

（3） 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$ 线性相关，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in V$ 也线性相关，则存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 使得 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0, \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_m\beta_m = 0$ 同时成立。

（4） 设 V 是一个欧氏空间，$f: V \to V$ 是一个映射。如果 $\forall \alpha, \beta \in V$，有 $(f(\alpha), f(\beta)) = (\alpha, \beta)$，则 $f \in L(V, V)$。

2009-2010 I

1 10

1 k_1, k_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - k_1 x_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-k_1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{pmatrix}$$

$k_1 = 2, k_2 \neq 1$

$k_1 \neq 2$ $\cdots$

$k_1 = 2, k_2 = 1$ $\cdots$

2 $\mathbb{R}^4$ $\beta = (1,2,1,1)$

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (1,1,-1,-1), \alpha_3 = (1,-1,1,-1), \alpha_4 = (1,-1,-1,1)$$

$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4\alpha_4$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ $\cdots$

$\cdots$ $\beta = \cdots$

3 $\mathbb{R}^3$ $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (1,3,t)$

(a) t $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(b) t $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

$t \neq 5$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$t=5$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

4 $\alpha_1=(1,1,-1,-1),\alpha_2=(1,2,0,3)\in\mathbb{R}^4$ $L(\alpha_1,\alpha_2)$

$\mathbb{R}^4$

$(\alpha_1,\alpha_2)=0$ $L(\alpha_1,\alpha_2)$ $\cdots$ α_1,α_2

α_1,α_2 Schmidt

$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ $(X,\alpha_1)=0,(X,\alpha_2)=0$ $\cdots$ $\cdots$

X_1,X_2 Schmidt $\cdots$

$L(\alpha_1,\alpha_2)$ $\cdots$ $\mathbb{R}^4$ $\cdots$

5 $\mathbb{R}^{2\times2}$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}-2&4\\1&2\end{pmatrix}$$

A_1,A_2,A_3,A_4 $\mathbb{R}^{2\times2}$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\2\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ A_1,A_2,A_3,A_4

2 10

1 P_1,P_2 $P_1\subseteq P_2$ P_2 P_1

P_1,P_2 $P_1\subseteq P_2$ $\forall\lambda\in P_1,\forall a\in P_2$ $\lambda a\in P_2$

$P_1\times P_2$ P_2

$\cdots$ P_2

P_1

2 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in V$ r_1 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\in V$ r_2

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ r_3

$$\min\{r_1, r_2\} \le r_3 \le r_1 + r_2$$

3 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$ V $f \in L(V, V)$ f

$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m) \in V$ V

$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m) \in V$ V f

$\dim V = m$ f f

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$ V $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$

$\dim V = m$ f f

$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m) \in V$ $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m) \in V$

V

3 5

1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

2 n $\mathbb{R}^n$

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ n

$0 \in W$ $\forall \alpha, \beta \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\alpha + \beta \in W, \lambda\alpha \in W$

W $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$

3 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in V$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0, \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_m\beta_m = 0$

$$\alpha_1 = \beta_1 = (1,0), \alpha_2 = \beta_2 = (0,1), \alpha_3 = (1,1), \beta_3 = (1,2) \in \mathbb{R}^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0$ $-\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$

$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 = (0, \lambda_3) \neq 0$

4 V $f:V\to V$ $\forall \alpha,\beta\in V$

$(f(\alpha), f(\beta))=(\alpha,\beta)$ $f\in L(V,V)$

$\forall \alpha,\beta\in V$ $(f(\alpha), f(\beta))=(\alpha,\beta)$

$\forall \alpha,\beta\in V, \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\left(f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta), f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)\right)\\
=&\left(f(\alpha+\beta), f(\alpha+\beta)\right)-\left(f(\alpha+\beta), f(\alpha)\right)-\left(f(\alpha+\beta), f(\beta)\right)\\
&-\left(f(\alpha), f(\alpha+\beta)\right)+\left(f(\alpha), f(\alpha)\right)+\left(f(\alpha), f(\beta)\right)\\
&-\left(f(\beta), f(\alpha+\beta)\right)+\left(f(\beta), f(\alpha)\right)+\left(f(\beta), f(\beta)\right)\\
=&\left(\alpha+\beta,\alpha+\beta\right)-\left(\alpha+\beta,\alpha\right)-\left(\alpha+\beta,\beta\right)\\
&-\left(\alpha,\alpha+\beta\right)+\left(\alpha,\alpha\right)+\left(\alpha,\beta\right)-\left(\beta,\alpha+\beta\right)+\left(\beta,\alpha\right)+\left(\beta,\beta\right)\\
=&\left((\alpha+\beta)-\alpha-\beta,(\alpha+\beta)-\alpha-\beta\right)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(f(\lambda\alpha)-\lambda f(\alpha), f(\lambda\alpha)-\lambda f(\alpha)\right)\\
=&\left(f(\lambda\alpha), f(\lambda\alpha)\right)-\lambda\left(f(\lambda\alpha), f(\alpha)\right)-\lambda\left(f(\alpha), f(\lambda\alpha)\right)+\lambda^2\left(f(\alpha), f(\alpha)\right)\\
=&\left(\lambda\alpha,\lambda\alpha\right)-\lambda\left(\lambda\alpha,\alpha\right)-\lambda\left(\alpha,\lambda\alpha\right)+\lambda^2\left(\alpha,\alpha\right)=0
\end{aligned}$$

$\forall \alpha,\beta\in V, \forall\lambda\in\mathbb{R}$ $f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)=0, f(\lambda\alpha)-\lambda f(\alpha)=0$

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta), f(\lambda\alpha)=\lambda f(\alpha)$

$f\in L(V,V)$

浙江大学 2015－2016 学年秋学期

《线性代数》期中考试模拟试卷参考答案

1．设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$都是三维列向量，记矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，且$|\boldsymbol{A}|=2$，若矩阵$\boldsymbol{B}=(7\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)$，求行列式$|\boldsymbol{B}|$．（12 分）

解法一：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}7 & 2 & 8\\ 1 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore |\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}7 & 2 & 8\\ 1 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=2\times 100=200$$

解法二：

设$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$

$$|\boldsymbol{B}|=2\times\left|\boldsymbol{\beta}_1, \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_1-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2\right|=5\times\left|7\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3\right|$$

$$=5\times|7\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=-100\times|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$=100\times|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=200$$

解法三：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}| &=|7\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=|7\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&\quad+|\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=7|\boldsymbol{\alpha}_1, 6\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=7|\boldsymbol{\alpha}_1, 6\boldsymbol{\alpha}_2, 4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|+7|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&\quad+|\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1, 8\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=7|\boldsymbol{\alpha}_1, 6\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3|+7|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_2|+|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, 8\boldsymbol{\alpha}_1| \quad +|\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1, 3\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=(126-28+8-6)|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=100\times|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=200\end{aligned}$$

2．求$2n$阶行列式$\boldsymbol{D}_{2n}=\begin{vmatrix}2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4\end{vmatrix}$的通项公式．（12 分）

解：

$$D_{2n}=2^n\begin{vmatrix}2&1&0&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&0&0&&0&0\\0&1&2&1&0&&0&0\\0&0&1&2&1&&0&0\\0&0&0&1&2&&0&0\\\vdots&&&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&0&&2&1\\0&0&0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}\quad 令\begin{vmatrix}2&1&0&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&0&0&&0&0\\0&1&2&1&0&&0&0\\0&0&1&2&1&&0&0\\0&0&0&1&2&&0&0\\\vdots&&&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&0&&2&1\\0&0&0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{A_{2n}}$$

将 $\boldsymbol{A_{2n}}$ 按第一行展开，得 $\boldsymbol{A_{2n}}=2\boldsymbol{A_{2n-1}}-\boldsymbol{A_{2n-2}}$

$\therefore \boldsymbol{A_{2n}}-\boldsymbol{A_{2n-1}}=\boldsymbol{A_{2n-1}}-\boldsymbol{A_{2n-2}}$

即$\boldsymbol{A_m}-\boldsymbol{A_{m-1}}=\boldsymbol{A_{m-1}}-\boldsymbol{A_{m-2}}=\cdots=\boldsymbol{A_2}-\boldsymbol{A_1}=1$

$\therefore \boldsymbol{A_m}=\boldsymbol{A_1}+\mathrm{m}=\mathrm{m}+1$

$\therefore \boldsymbol{A_{2n}}=2\mathrm{n}+1$

$\therefore \boldsymbol{D_{2n}}=2^{\mathrm{n}}\boldsymbol{A_{2n}}=(2\mathrm{n}+1)2^{\mathrm{n}}$.

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$，$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{BA}^{-1}=2\boldsymbol{AB}+12\boldsymbol{E}$，求$\boldsymbol{B}$. （16 分）

解：

$\because |\boldsymbol{A}|=2$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}=\frac{1}{2^4}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\frac{1}{8}\boldsymbol{E}$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\boldsymbol{A}=\frac{1}{4}\boldsymbol{E}\quad \therefore \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\quad \therefore \left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}=4\boldsymbol{A}$

原矩阵方程化为 $4\boldsymbol{ABA}^{-1}=2\boldsymbol{AB}+12\boldsymbol{E}$

两边右乘$\boldsymbol{A}$ ，得 $4\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{ABA}+12\boldsymbol{A}$

再两边左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $4\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{BA}+12\boldsymbol{E}$

$\therefore \boldsymbol{B}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=6\boldsymbol{E}$

$$\therefore \boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=6\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. λ取何值时，下面方程组有解？并求其解. （12 分）

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$$

解：

先计算方程组的系数行列式：

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3 & 3-2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1) .$$

当$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\lambda^2(\lambda-1)} \neq 0$，即$\lambda \neq 0$，1时方程组有唯一解 .

又知

$$\boldsymbol{D_1} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 9},$$

$$\boldsymbol{D_2} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ 3\lambda+3 & 3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda^3 + 12\lambda - 9},$$

$$\boldsymbol{D_3} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 2\lambda \\ 3\lambda+3 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{-4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda - 9},$$

从而此时原方程组的唯一解为：

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}}, \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{\lambda^3+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}}, \quad \boldsymbol{x_3 = \frac{-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}}.$$

当$\boldsymbol{\lambda} = 0$或 1 时，易知原方程组系数矩阵的秩为 2，而增广矩阵的秩为 3，故此时原方程组无解 .

5. $\boldsymbol{\alpha_1}=(a,\ 2,\ 10)^T$，$\boldsymbol{\alpha_2}=(-2,\ 1,\ 5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha_3}=(-1,\ 1,\ 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\ b,\ c)^T$，当$a,b,c$满足什么条件时，（16 分）

（1）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示，且唯一；（5 分）

（2）$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示；（5 分）

（3）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示，但不唯一；并求出一般表达式.（6 分）

解：

设有一组数k_1，k_2，k_3，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

该方程组的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-a-4.$

（1） 当$a\neq-4$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示唯一.

（2） 当$a=-4$ 时对增广矩阵作行的初等变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-c-1 \end{bmatrix}.$$

若$3b-c\neq1$，则秩$(\boldsymbol{A})\neq$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示 .

（3） 当$a=-4$且$3b-c=1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多组解，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示不唯一.解得$k_1=t$，$k_2=-2t-b-1$，$k_3=2b+1$（t 为任意常数）.因此，有

$$\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(2b+1)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

6. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n 阶矩阵，且满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=n$，证明：$r(A)=r(B)$.（8 分）

解：

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AB}$

$\because r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=n$

$\therefore r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$

$\because r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=n$

$\therefore r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$

$\therefore r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

7. 设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$，其中$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{\beta}$是$n$维非零列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{\beta}$的转置，证明：当$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}=1$时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.（10 分）

解：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T\\&=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}(2-\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}^T\\&=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T\\&=\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$

假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则上式左乘以$\boldsymbol{A}^{-1}$，有

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ ，则$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}.$

据已知，有$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$，即 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{0}$，矛盾.故 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

8. 有$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}\neq\boldsymbol{0})$且$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t_i\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$，$\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{s}$，证明：如果$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$必定线性无关.（14 分）

证明：

用反证法，若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$线性相关，则

$$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\sum_{\mathrm{j}=1}^{s}\mathrm{s}_{\mathrm{j}}\alpha_j\text{ . 且至少有}s_k\neq 0$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t_i\sum_{\mathrm{j}=1}^{s}\mathrm{s}_{\mathrm{j}}\alpha_j$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}1+s_1t_1&\dots&s_1t_s\\\vdots&\ddots&\vdots\\s_st_1&\dots&1+s_st_s\end{pmatrix}$$

因为$\boldsymbol{\beta}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s$线性无关

$$\therefore(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\text{ 仅在}k_i=0(i=\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{s})\text{时成立}$$

$$\text{又}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}1+s_1t_1&\dots&s_1t_s\\\vdots&\ddots&\vdots\\s_st_1&\dots&1+s_st_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}$$

$$\therefore(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}1+s_1t_1&\dots&s_1t_s\\\vdots&\ddots&\vdots\\s_st_1&\dots&1+s_st_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\text{ 仅在}k_i=0(i=\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{s})\text{时成立}$$

$$\therefore\begin{vmatrix}1+s_1t_1&\dots&s_1t_s\\\vdots&\ddots&\vdots\\s_st_1&\dots&1+s_st_s\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}\text{ 否则}\begin{pmatrix}1+s_1t_1&\dots&s_1t_s\\\vdots&\ddots&\vdots\\s_st_1&\dots&1+s_st_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\text{有非零解。}$$

注意到

$$\begin{vmatrix}1+s_1t_1&\dots&s_1t_s\\\vdots&\ddots&\vdots\\s_st_1&\dots&1+s_st_s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&t_1&\cdots&t_s\\0&1+s_1t_1&\cdots&s_1t_s\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&s_st_1&\cdots&1+s_st_s\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_s \\ -s_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_s & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{s} s_i\alpha_i$$

所以

$$1+\sum_{i=1}^{s} s_i\alpha_i \neq 0，对\forall t_i \in R成立. \tag{1}$$

因为$\boldsymbol{\alpha_{s+1}} \neq \mathbf{0}$，而

$$\exists \mathrm{k}, \mathrm{s.t.}\, s_k \neq 0.$$

取

$$t_i=\begin{cases} -\frac{1}{s_k}, & \mathrm{i}=\mathrm{k} \\ 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{k} \end{cases}$$

则

$$1+\sum_{i=1}^{s} s_i\alpha_i = 0.$$

这与(1)矛盾.所以假设不成立

《线性代数》（甲）期中练习试卷

学号____________专业班级______________姓名_____________得分_____________

一、 填空题（每空格 3 分，共 36 分）

1．设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{bmatrix}$，记 A 的伴随矩阵为 A^*，则 $(A^*)^{-1}=$_____________。

2．4 阶行列式 D=$\begin{vmatrix}3&-2&0&1\\2&0&1&0\\2&1&0&0\\-7&5&3&4\end{vmatrix}$，则第四行各元素的代数余子式之和是

________________。

3．n 阶行列式 $|D|=\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&y\\y&x&0&\cdots&0&0\\0&y&x&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&y&x\end{vmatrix}$ 的值为________________。

4．设 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}),A=\alpha^T\beta$，则 $A=$____________________,

$A^n=$_____________________。

5．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&6&1&0\\0&-10&-2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$_________________________。

6．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&5\\3&-1&1\end{bmatrix}$，若存在非零矩阵 $B_{3\times2}$ 使得 $AB=O$，则 $t=$________。

7．设 A 为三阶方阵，$r(A)=2,\alpha_1,\alpha_2$ 为三元列向量，且是非齐次方程组 $AX=b$ 互异的解向量，则 $AX=b$ 的通解是________________________。

8．已知齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\end{cases}$ 只有零解，则 λ_______________。

9．设 n 阶方阵 A,B 满足关系式 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，且 $A^2=A,$ 则

$B^2=$__________________。

10．设 A 是 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

则 $r(AB)=$ ________________。

11．设矩阵 A 为 3 阶矩阵，$|A|=2,$ 则 $|(\frac{1}{12}A)^{-1}-3A^*|=$ __________ 。

（其中 A^* 是 A 的伴随矩阵）

二、　**选择题（每小题 3 分，共 15 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）**

1．设 A, B 均为 n(n>1)阶方阵，则下述命题正确的是

（A）$|-A|=-|A|$　　　　　　(B) $(AB)^2=A^2B^2$

(C) $B^2-A^2=(B-A)(B+A)$

(D) 若 A 可逆，且 $k\neq 0,$ 则 kA 可逆，且 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

【　　】

2．设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n-1$，则 $r(A^*)$ 为

（A）n　　(B) $n-1$　　(C) 1　　(D) 0

【　　】

3．已知 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=d\neq 0$，则 $\begin{vmatrix}3a_{11} & 4a_{11}-a_{12} & -a_{13}\\ 6a_{21} & 8a_{21}-2a_{22} & -2a_{23}\\ 3a_{31} & 4a_{31}-a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}=$

(A) 3d　　(B) 6d　　(C) –3d　　(D)-6d

【　　】

4．设线性方程组 $A_{m\times n}Z_{n\times 1}=b_{m\times 1}$，则

(A) m>n 时必有解　　　　（B）m=n 时必有唯一解

(C) m<n 时齐次方程组 $A_{m\times n}Z_{n\times 1}=0$ 必有非零解

(D) m=n 时齐次方程组 $A_{m\times n}Z_{n\times 1}=0$ 有唯一零解

【　　】

5．设向量组 I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则下列说法正确的是　【　　】

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关；

(B) 当$r > s$时，向量组 II 必线性相关；
(C) 当$r < s$时，向量组 I 必线性相关；
(D) 当$r > s$时，向量组 I 必线性相关.

三、（**12 分**）设有两组向量 $\alpha_1 = (1,0,2)^T, \alpha_2 = (1,-1,0)^T, \alpha_3 = (1,2,\lambda+1)^T$ 和 $\beta_1 = (1,0,1)^T, \beta_2 = (1,1,-1)^T, \beta_3 = (1,-1,1)^T$.

(1) 求实数λ，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$R^3$中的一组基,并求基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵 M;

(2) 已知ξ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,1,0)^T$，求$\xi$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标;

(3) 取$\lambda = 0$,求在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下有相同坐标的所有非零向量.

姓名___________

四、（7 分）设 $XB^{-1}=(A-C)^2$，其中 A,B,C 均为 3 阶方阵，且满足 $AB=E, BC=2E,$ 若

$$C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\4 & 6 & 8\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}，求 X 。$$

五、（10 分）设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=k\end{cases}$$

问方程组什么时候有解？什么时候无解？有解时，是有唯一解，还是有无穷多解？写出一般解的表达式。

六、(**9** 分)已知$\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,10,b,4)^T$，问

(1) a,b取何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?

(2) a,b取何值时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 写出此表示式.

七、(**6** 分)设三阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&1&2\end{bmatrix},$$

矩阵B满足$A^{-1}BA=2A+BA$, 求矩阵B.

姓名____________

八. 证明题: (本题 5 分)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 是 m 阶单位矩阵, $AB = E$. 求证: B 的列向量是线性无关的.