《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙 江 大 学 数 学 系

前　言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一, 为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法, 我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章, 除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用, 用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求, 用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求; 内容提要部分给出相关内容的精讲, 供学生复习参考之用; 习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社, 2008 年) 的附后练习题为主, 这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果, 其中第一章和第六章由薛儒英编写, 第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写, 王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容, 最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助, 得到浙江大学数学系各位老师的大力支持, 在此表示感谢。

目　录

1　预备知识 **2**

1.1　一些常用的常微分方程的求解 2

1.2　Sturm-Liouville 本征值 (或固有值) 问题 16

2　方程的导出和定解问题 **21**

2.1　基本要求与内容提要 21

2.2　习题解答 23

3　行波法 **29**

3.1　基本要求与内容提要 29

3.2　习题解答 33

4　分离变量法 **42**

4.1　基本要求与内容提要 42

4.2　习题解答 43

5　积分变换法 **66**

5.1　基本要求与内容提要 66

5.2　习题解答 68

6　Green 函数法 **83**

6.1　基本要求与内容提要 83

6.2　习题解答 84

第 6 章　Green 函数法

§6.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

(1). 理解第一格林公式和第二格林公式;

(2). 了解 Laplace 方程的基本解;

(3). 了解 Laplace 方程第一边值问题格林函数的定义，能用格林函数来表示 Laplace 方程第一边值问题的解;

(4). 会用镜像法来求解某些特殊区域上 Laplace 方程第一边值问题的格林函数。

二. 内容提要

(1). Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega, \overrightarrow{n}$ 是边界上的单位外法向量, u 和 v 在 Ω 有二阶连续的偏导数。则第一 $Green$ 公式:

$$\iiint_{\Omega} u\triangle v dV = \iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}dS - \iiint_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v dV.$$

第二 $Green$ 公式:

$$\iiint_{\Omega}(v\triangle u - u\triangle v)dV = \iint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\right)dS.$$

Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega, \overrightarrow{n}$ 是边界上的单位外法向量, u 和 v 在 Ω 有二阶连续的偏导数。则第一 $Green$ 公式:

$$\iint_{\Omega} u\triangle v dV = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}ds - \iint_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v dV.$$

第二 $Green$ 公式:

$$\iint_{\Omega}(v\triangle u - u\triangle v)dV = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}\right)ds.$$

(2). 三维 Laplace 方程的基本解为 $(M_0(x,y,z), M(\xi,\eta,\zeta))$

$$\Gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

二维 Laplace 方程的基本解为 $(M_0(x,y), M(\xi,\eta))$

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

(3). Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega$, $M_0(x,y,z), M(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 称满足

$$\triangle_M G = \delta(M-M_0),\ M\in\Omega;\ G=0,\ M\in\partial\Omega$$

的解 $G(M,M_0)$ 是三维 Laplace 方程第一边值条件的 Green 函数. 对于三维 Laplace 方程第一边值问题

$$\triangle u = f(M),\ M\in\Omega;\ u=\varphi(M),\ M\in\partial\Omega$$

的解可表示为

$$u(M_0)=\int\int_{\partial\Omega}\varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\vec{n}}dS_M+\int\int\int_{\Omega}G(M,M_0)f(M)dV_M.$$

Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个 (有界) 区域, 边界为 $\partial\Omega$, $M_0(x,y), M(\xi,\eta)\in\Omega$, 称满足

$$\triangle_M G=\delta(M-M_0),\ M\in\Omega;\ G=0,\ M\in\partial\Omega$$

的解 $G(M,M_0)$ 是二维 Laplace 方程第一边值条件的 Green 函数. 对于二维 Laplace 方程第一边值问题

$$\triangle u = f(M),\ M\in\Omega;\ u=\varphi(M),\ M\in\partial\Omega$$

的解可表示为

$$u(M_0)=\int_{\partial\Omega}\varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\vec{n}}ds_M+\int\int_{\Omega}G(M,M_0)f(M)dV_M.$$

§6.2 习题解答

习题 6.1 设 D 是以光滑曲线 L 为边界的二维的有界区域，函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 以及它们所有的一阶偏导数在闭区域 $D+L$ 上连续，在 D 内有二阶的连续偏导数。试证明：

(1) $\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\int\int_D u\Delta v d\sigma+\int\int_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma$

(2) $\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\int_D(u\Delta v-v\Delta u)d\sigma$

(3) $u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_L[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}(\ln\frac{1}{r_{MM_0}})]ds_M$
$\qquad -\frac{1}{2\pi}\int\int_D\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u d\sigma_M$

解 首先讨论一下 Green 公式。平面上有界区域 D, 边界闭曲线为 L, $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是有连续偏导数的二元函数, 则 Green 公式是

$$\int\int_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=\int_L u(x,y)dx+v(x,y)dy \tag{6.1}$$

记 L 的单位切向量 (逆时针方向) 为 $\overrightarrow{T}=(\alpha,\beta)$, 单位外法向量 $\vec{n}=(\beta,-\alpha)$(见图 1). 由 $dx=\alpha ds$,$dy=\beta ds$, 其中 ds 表示 L 的弧长元素,

$$\begin{aligned}\int\int_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma &= \int_L(u(x,y)\alpha+v(x,y)\beta)ds\\ &= \int_{\partial\Omega}(v,-u)\cdot\vec{n}ds.\end{aligned}$$

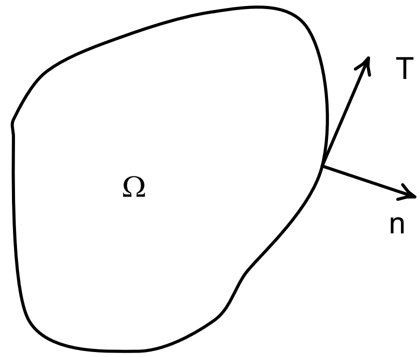

图 1

特别, 若记 $\overrightarrow{w}=(v,-u)$, 则

$$\int\int_D div\overrightarrow{w}d\sigma=\int_L\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}ds. \tag{6.2}$$

下面我们利用公式 (6.2) 来求解习题 1。

(1). 取 $\overrightarrow{w}=u\ grad\,v$ 代入公式 (6.2) 得

$$\int_D div(u\ grad\,v)d\sigma=\int_L u\,gradv\cdot\overrightarrow{n}ds,$$

计算得

$$\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\int\int_D u\Delta v d\sigma+\int\int_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma. \tag{6.3}$$

(2). 交换 (6.3) 中函数 u 与 v 的位置得

$$\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\int_D v\Delta u d\sigma+\int\int_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma. \tag{6.4}$$

上式与 (6.3) 式相减得

$$\int_L(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\int_D(u\Delta v-v\Delta u)d\sigma.$$

(3). 对于 $M_0(x,y)\in D$, 记 K_ϵ 为以 M_0 为中心, ϵ 为半径的圆盘。取

$$u(M)=u(\xi,\eta),\ v=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}},$$

其中 $r_{M_0M}=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$。由 (2) 中的结论得

$$\begin{aligned}&\int\int_{D-K_\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta u d\sigma\\&=\int_{L+\partial K_\epsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds.\end{aligned} \tag{6.5}$$

在 ∂K_ϵ 上有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=\frac{1}{2\pi\epsilon},$$

所以有

$$\int_{\partial K_\epsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)ds=\frac{1}{2\pi\epsilon}\int_{\partial K_\epsilon}uds=u(\bar{\xi},\bar{\eta}),$$

其中 $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ 是 ∂K_ϵ 上的一个点，令 $\epsilon\to 0^+$ 利用函数 u 的连续性得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial K_\epsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)ds=u(M_0) \tag{6.6}$$

再由函数 u 在 D 内有二阶的连续偏导数得

$$\left|\int_{\partial K_\epsilon}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}ds\right|\le\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\epsilon}\left|\int_{\partial K_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial n}ds\right|\le\epsilon\ln\frac{1}{\epsilon}\max_{D}|grad\,u|$$

令 $\epsilon\to 0^+$ 得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial K_\epsilon}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0 \tag{6.7}$$

由函数 u 在 D 内有二阶的连续偏导数得，当 $\epsilon\to 0^+$ 时广义积分

$$\int\int_{D-K_\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta ud\sigma$$

收敛，即

$$\int\int_{D-K_\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta ud\sigma=-\frac{1}{2\pi}\int\int_{D}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Delta ud\sigma. \tag{6.8}$$

在 (6.5) 中令 $\epsilon\to 0^+$，利用 (6.6), (6.7) 和 (6.8) 得

$$\begin{aligned}u(M_0)\ &=\ \frac{1}{2\pi}\int_L[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n_M}-u(M)\frac{\partial}{\partial n_M}(\ln\frac{1}{r_{MM_0}})]ds_M\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\int\int_D\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta ud\sigma_M.\end{aligned}$$

习题 6.2 试证明：在二维的情况下调和函数的表达式为

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_L[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r})]ds$$

其中 L 为一条封闭的光滑曲线，M_0 为 L 所围的区域中的任意一点。

解 在习题 1(3) 中取 u 为调和函数即得。

习题 6.3 在半平面 $y>0$ 内求解 *Laplace* 方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$，其边界条件为

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & 当x<0时\\ u_0 & 当x\ge 0时.\end{cases}$$

解 考虑区域 $D \in \mathbb{R}^2$ 上的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y) \quad (x,y) \in D \\ u|_L = \varphi(x,y) \end{cases}$$

取 Green 函数 $G(x,y;\xi,\eta)$ 为

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g(x,y;\xi,\eta)$$

其中 $g(x,y;\xi,\eta)$ 为定解问题

$$\begin{cases} \Delta g = f(x,y) \quad (\xi,\eta) \in D \\ g|_{(\xi,\eta)\in L} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}|_{(\xi,\eta)\in L} \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x,y) = -\int_L \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds - \int\int_D G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\sigma. \tag{6.9}$$

利用 "镜像法" 求二维上半平面的 Green 函数为

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}}\right]$$

在 (6.9) 中取 L 为 x 轴, $\varphi(\xi,\eta) = u(\xi,0)$, $f(\xi,\eta) = 0$, 在 x 轴上有

$$\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}|_L = \frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta}|_{\eta=0} = -\frac{1}{\pi}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\int_L \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds \\ &= \frac{u_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi \\ &= \frac{u_0}{\pi}[\frac{\pi}{2} + \arctan(x/y)]. \end{aligned}$$

习题 6.4 *(1). 试作出上半圆域的 Green 函数;*

(2). 试作出上半球域的 Green 函数。

解 (1). 利用 "镜像法" 来求解。记圆域为 $B_R(O) = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2\}$, 上半圆域为 $B_R^+(O) = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2, y > 0\}$. 设 $P(x,y), Q(\xi,\eta) \in B_R^+(O)$, $P(x,y)$ 关于 $y=0$ 平面的对称点为 $P^-(x,-y)$, $P(x,y)$ 和 $P^-(x,-y)$ 关于圆域 $B_R(O)$ 的对称点分别为 P_* 和 P_*^-. 在 P 点放置一个单位正电荷, 在 P^- 点放置一个单位负电荷, 在 P_* 点放置 R/r_{OP} 单位负电荷, 在 P_*^- 点放置 R/r_{OP} 单位正电荷. 则

$$\begin{aligned} G(P,Q) &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{PQ}} - \ln\left(\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P_*Q}}\right)\right] \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{P^-Q}} - \ln\left(\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P_*^-Q}}\right)\right]. \end{aligned}$$

(2). 利用“镜像法”来求解。记球域为 $B_R(O)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2\}$, 上半圆域为 $B_R^+(O)=\{(x,y)|x^2+y^2+z^2\le R^2, z>0\}$. 设 $P(x,y,z), Q(\xi,\eta,\zeta)\in B_R^+(O)$, $P(x,y,z)$ 关于 $z=0$ 平面的对称点为 $P^-(x,y,-z)$, $P(x,y,z)$ 和 $P^-(x,y,-z)$ 关于圆域 $B_R(O)$ 的对称点分别为 P_* 和 P_*^-. 在 P 点放置一个单位正电荷, 在 P^- 点放置一个单位负电荷, 在 P_* 点放置 R/r_{OP} 个单位负电荷, 在 P_*^- 点放置 R/r_{OP} 个单位正电荷. 则

$$\begin{aligned} G(P,Q) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P_*Q}}\right)\\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{P^-Q}}-\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P_*^-Q}}\right). \end{aligned}$$

习题 6.5 *求证圆域 $x^2+y^2\le R^2$ 的 Green 函数为*

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{PQ}}-\ln\frac{R}{r}\frac{1}{r_{P^*Q}}\right],$$

其中 P^* 是 P 关于圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的反演点，并由此推出圆内第一边值问题的解表达式。

解 利用“镜像法”来求圆域 $x^2+y^2\le R^2$ 的 Green 函数。记圆域为 $B_R(O)=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$, 设 $P(x,y)\in B_R^+(O)$, $P(x,y)$ 关于圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的反演点为 P^*. 在 P 点放置一个单位正电荷, 在 P^* 点放置 R/r_{OP} 个单位负电荷. 则

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}-\ln\frac{R}{r_{OP}}\frac{1}{r_{P^*Q}}\right).$$

圆域内第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=u_{xx}+u_{yy}=f_1(x,y),\ x^2+y^2\le R^2\\ u=\varphi_1(x,y),\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

解的表达式为

$$u(x,y)=-\int_{x^2+y^2=R^2}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds-\int\int_{x^2+y^2\le R^2}f_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\sigma.$$

引进极坐标

$$\xi=r\cos\alpha,\eta=r\sin\alpha;x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,$$

记

$$f_1(\xi,\eta)=f(r,\alpha),\varphi_1(x,y)|_{x^2+y^2=R^2}=\varphi(\alpha),$$

则各点的坐标为 $P(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta), Q(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$, 以及 $P^*(R^2/\rho\cos\theta,R^2/\rho\sin\theta)$。直接计算得

$$\begin{aligned} G(x,y;\xi,\eta) &= -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{R^4+\rho^2r^2-2r\rho R^2\cos(\theta-\alpha)}{R^2(r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha))},\\ \frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}|_{r=R} &= \frac{\partial}{\partial r}G(x,y;\xi,\eta)|_{r=R}=-\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R(R^2+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\alpha))}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\int_{x^2+y^2=R^2}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}ds-\int\int_{x^2+y^2\le R^2}f_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\ln\frac{R^4+\rho^2r^2-2r\rho R^2\cos(\theta-\alpha)}{R^2(r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha))}rf(r,\alpha)d\alpha \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha. \end{aligned}$$