散度定理

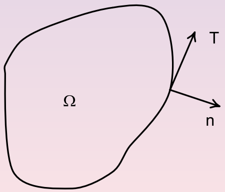
- Green公式,联系平面有界区域内的二重积分与区域边界曲线上的曲线积分;
- Gauss公式, 联系空间有界区域内的三重积分与区域边界闭曲面上曲面积分;
- 在$\mathbb{R}^n$空间中的有界区域是否也有类似的结果?

散度定理—$n = 2$时Green公式

平面有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$,边界闭曲线为$\partial\Omega$, $P(x,y)$和$Q(x,y)$是连续偏导数的二元函数,则Green公式是

$$\int\int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

记$\partial\Omega$的单位切向量(逆时针方向)为$\overrightarrow{T} = (\alpha, \beta)$,单位外法向量$\overrightarrow{n} = (\beta, -\alpha)$(见图).



散度定理—$n=2$时Green公式

由$dx=\alpha ds, dy=\beta ds$, 其中$ds$表示$\partial\Omega$的弧长元素,

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= \int_{\partial\Omega}(P(x,y)\alpha+Q(x,y)\beta)ds\\ &= \int_{\partial\Omega}(Q,-P)\cdot\vec{n}\,ds.\end{aligned}$$

特别,若记$\vec{w}=(Q,-P)$,则

$$\int\int_\Omega div\,\vec{w}\,dxdy=\int_{\partial\Omega}\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds.$$

散度定理—$n=3$时Gauss公式

有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$,边界闭曲面为$\partial\Omega$,
$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$有一阶连续偏导数, 则Gauss公式是

$$\int\int\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\int\int_{\partial\Omega}(P\alpha+Q\beta+R\gamma)ds$$

其中$\overrightarrow{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$是边界曲面$\partial\Omega$的单位外法向量.
记$\overrightarrow{w}=(P,Q,R)$,则Gauss公式可以写成

$$\int\int\int_{\Omega} div\,\overrightarrow{w}\,dxdydz=\int\int_{\partial\Omega}\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}\,ds$$

散度定理

Green公式和Gauss公式有相同的形式,把它推广到一般形式:
散度定理: Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界区域,边界为$\partial\Omega$, $\overrightarrow{n}$是边界$\partial\Omega$上的单位外法向量, $\overrightarrow{w}$是Ω内的具有一阶连续偏导数的向量函数. 则

$$\int_{\Omega} div\,\overrightarrow{w}\,dV = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}\,dS.$$

Green公式

Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界区域，边界为$\partial\Omega$，$\overrightarrow{n}$是边界上的单位外法向量，u和v在Ω有二阶连续的偏导数.取$\overrightarrow{w}=u\nabla v$，利用$div\,\overrightarrow{w}=u\triangle v+\nabla u\nabla v$，我们有(第一Green公式):

$$\int_\Omega u\triangle v dV=\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}dS-\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dV. \tag{1}$$

交换函数u与v类似可得

$$\int_\Omega v\triangle u dV=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}dS-\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dV. \tag{2}$$

(1)和(2)相减可得(第二Green公式):

$$\int_\Omega (v\triangle u-u\triangle v)dV=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}\right)dS. \tag{3}$$

基本解的定义

定义: L是一个线性微分算子, M_0是$\mathbb{R}^n$中的一个固定点,M是$\mathbb{R}^n$中的点. 把方程$Lu = \delta(M - M_0)$的解$U(M, M_0)$称为方程$Lu = f(M)$或$Lu = 0$的基本解.

基本解的定义

例. 求三维Laplace方程的基本解.

解. 取$M_0=(x_0,y_0,z_0)$, $M=(x,y,z)$,基本解$U(M,M_0)$为方程

$$-\triangle U=-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)=\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0) \quad (4)$$

的解.引进以$M_0=(x_0,y_0,z_0)$为中心的极坐标:

$$x=x_0+r\cos\theta\cos\varphi,\ y=y_0+r\cos\theta\sin\varphi,\ z=z_0+r\sin\theta,$$

求方程(4)的仅仅与r有关的解$U(r)$(与θ和φ无关)满足

$$-\triangle U=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=\delta(r),$$

基本解的定义

当$r>0$时,由$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$得$U(r)=A+\frac{B}{r}$,其中$A$和$B$是任意常数.

我们下面适当选取A和B使得它在$r=0$点还能满足方程. 在球$D_\epsilon=\{M:|M-M_0|<\epsilon\}$上用第二Green公式(u=U, v=1)

$$-\iiint_{D_\epsilon}\triangle U dV=\iiint_{D_\epsilon}\delta(M-M_0)dV=1,$$

$$-\iiint_{D_\epsilon}\triangle U dS=-\iint_{S_\epsilon}\frac{\partial U}{\partial\overrightarrow{n}}dS=-\iint_{S_\epsilon}\frac{dU}{dr}dS$$

$$=-\iint_{S_\epsilon}\frac{B}{r^2}dS=4\pi B,$$

因此$B=\frac{1}{4\pi}$.为简单记$A=0$,基本解是$U=\frac{1}{4\pi r}$,即

$$U(M,M_0)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

基本解的定义

类似地,我们可以得到二维Laplace方程的基本解为

$$U(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Green函数的定义

定义: 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个有界区域, 边界为S, $M_0 \in \Omega$. 称满足

$$-\triangle_M G = \delta(M - M_0),\ M \in \Omega;\ G = 0,\ M \in S$$

的解$G(M, M_0)$是Laplace方程满足Dirichlet边值条件的Green函数.

Green函数的性质

性质： Green函数具有对称性，即$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$.

证明 注意到

$$-\triangle_M G(M,M_1)=\delta(M-M_1),\ M\in\Omega;\ G(M,M_1)=0\ M\in S,$$

$$-\triangle_M G(M,M_2)=\delta(M-M_2),\ M\in\Omega;\ G(M,M_2)=0\ M\in S.$$

取$u(M)=G(M,M_1)$, $v(M)=G(M,M_2)$. 第二Green公式得

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S \left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial \overrightarrow{n}} - G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial \overrightarrow{n}}\right] dS \\
&= \int_\Omega [G(M,M_1)\triangle_M G(M,M_2) - G(M,M_2)\triangle_M G(M,M_1)]\, dV \\
&= \int_\Omega [G(M,M_1)\delta(M,M_2) - G(M,M_2)\delta(M,M_1)]\, dV \\
&= G(M_2,M_1) - G(M_1,M_2).
\end{aligned}$$

Green函数法—Poisson方程的Dirichlet问题

定理: 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个有界区域, 边界为S, $M_0 \in \Omega$, $G(M, M_0)$是Laplace方程满足Dirichlet边值条件的Green函数,则

$$-\triangle u = f(M),\ M \in \Omega;\ u = \varphi(M),\ M \in S$$

的解可表示为

$$u(M_0) = \int_S \varphi(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \overrightarrow{n}} dS_M + \int_\Omega G(M, M_0) f(M) dV_M.$$

Green函数法—Poisson方程的Dirichlet问题

证明. 对于$M_0 \in \Omega$,由第二Green公式

$$
\begin{aligned}
u(M_0) &= \int_\Omega \delta(M-M_0)u(M)dV_M = -\int_\Omega u(M)\triangle_M G(M,M_0)dV_M \\
&= -\int_\Omega G(M,M_0)\triangle_M u(M)dV_M \\
&\quad -\int_S \left[u(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \vec{n}} - G(M,M_0)\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}}\right] dS_M \\
&= \int_\Omega G(M,M_0)f(M)dV_M - \int_S \varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \vec{n}} dS_M
\end{aligned}
$$

如何求Green函数?

设Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个有界区域, 边界为S,讨论Poisson方程的Dirichlet问题

$$-\triangle u = f(M),\ M \in \Omega;\ u = \varphi(M),\ M \in S.$$

我们只要求出Laplace方程的Green函数, 即

$$-\triangle_M G(M, M_0) = \delta(M - M_0),\ M \in \Omega;\ G(M, M_0) = 0,\ M \in S$$

的解. 记$U(M, M_0)$是Laplace方程的基本解,

$$(\text{当}\, n = 3 \text{时}\, U(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}},$$
$$\text{当}\, n = 2 \text{时}\, U(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln r_{MM_0})$$

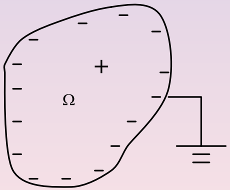
$u(M) = G(M, M_0) - U(M, M_0)$,则

$$-\triangle u = 0,\ M \in \Omega;\ u = -U(M, M_0),\ M \in S.$$

因此,我们只要找一个在边界S取值为$-U(M, M_0)$的调和函数$u(M)$, $G(M, M_0) = u(M) + U(M, M_0)$.

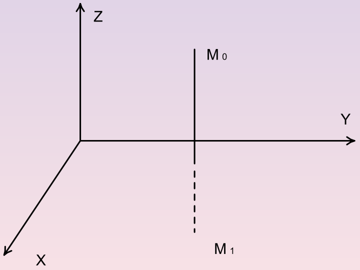
Green函数的物理意义

如果我们在M_0点放置一个单位正电荷,那么在边界S的内侧有感应的负电荷,在边界S的外侧有感应的正电荷.如果我们把Ω接地,那么在边界S上只有有感应的负电荷.在M_0点的单位正电荷引起的电位为$U(M, M_0)$,感应的负电荷产生的电位为$u(M)$, 因此,Green函数$G(M, M_0)$是由M_0点的单位正电荷和它的感应负电荷产生共同在M点所产生的电位强度(见图).



半空间上的Green函数

$\Omega = \{(x, y, z) : z > 0\}$, $S = \{(x, y, z) : z = 0\}$.在$M_0(x_0, y_0, z_0)$放置一个单位正电荷,取$M_0$关于xoy平面的对称点$M_1(x_0, y_0, -z_0)$且在$M_1$点放置一个单位负电荷,它们产生的电位在xoy平面上相互抵消,即M_1点的单位负电荷所起的作用与M_0点单位正电荷的感应电荷所起的作用一样(见图)



半空间上的Green函数

M_0点单位正电荷引起的电位强度为$\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$,感应电荷引起(即M_1单位负电荷所起)的电位强度为$-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}}$,从而上半平面的Green函数为

$$
\begin{aligned}
G(M, M_0) &= \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi r_{MM_1}} \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.
\end{aligned}
$$

半空间上的Green函数

例. 求解$-\triangle u = f(x,y,z),\ z>0;\ u(x,y,0)=\varphi(x,y).$

解. 对于区域$\Omega=\{(x,y,z):\ z>0\}$, 有$\overrightarrow{n}=(0,0,-1)$,从而

$$\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n}} = -\frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{z_0}{2\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}.$$

$$u(x_0,y_0,z_0)=\int_\Omega G(M,M_0)f(M)dV_M-\int_S \varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \overrightarrow{n}}dS_M$$

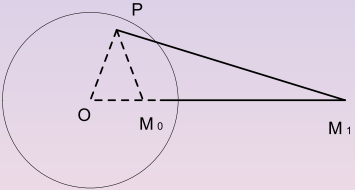
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{z>0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)f(x,y,z)dxdydz$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\frac{z_0\varphi(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}dxdy.$$

球域上的Green函数

$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$,
$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.取$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, 连接$OM_0$并延长到$OM_1$使得$OM_0 \cdot OM_1 = R^2$(称$M_1$和$M_0$是关于半径为$R$的球面对称点)(见图).



对于球面S上的任意点$P \in S$,$\triangle OM_1P \backsim \triangle OM_0P$, 从而

$$\frac{PM_0}{PM_1} = \frac{OM_0}{R}, \ \forall P \in S.$$

球域上的Green函数

若我们在$M_0(x_0, y_0, z_0)$放置一个单位正电荷,在M_1点放置电量为$-q$的负电荷,则它们在$p \in S$处产生的电位强度为

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{q}{r_{PM_1}}\right],$$

特别,当我们取$q = \frac{R}{M_0}$(它是一个常数)时,对任意的$P \in S$它们产生的电位强度为零,即M_1点的负电荷所起的作用与M_0点单位正电荷的感应电荷所起的作用一样.从而我们得到球域上的Green函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_{OM_0}}\frac{1}{r_{MM_1}}\right].$$

球域上的Green函数

若$M_0=(x_0,y_0,z_0)$,那么

$$M_1(x_1,y_1,z_1)=\frac{r_{OM_1}}{r_{OM_0}}=\left(\frac{x_0R}{x_0^2+y_0^2+z_0^2},\frac{y_0R}{x_0^2+y_0^2+z_0^2},\frac{z_0R}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\right),$$

$$\begin{aligned}G(M,M_0)\quad&=\quad\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.\\&\left.-\frac{R}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}\right]\end{aligned}$$