1　2014–2015 学年冬学期（回忆）

一、　(1) 利用变换 $\zeta = x - \sin x + y$, $\eta = x + \sin x - y$ 化简方程

$$u_{xx} + 2\cos x\, u_{xy} - \sin^2 x\, u_{yy} - \sin x\, u_y = 0.$$

(2) 求出上述方程的解，并证明，在条件

$$u\big|_{y=\sin x} = -2x, \qquad u_y\big|_{y=\sin x} = x$$

下，上述方程的解 $u(x, y)$ 满足 $u\big|_{y=\sin x+2} = 0$.

(1) 解：求导并代入方程，注意

$$u_{xx} = (1 - \cos x)^2 u_{\zeta\zeta} + 2\sin^2 x\, u_{\zeta\eta} + (1 + \cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x\,(u_\zeta + u_\eta),$$

可将原方程化简为

$$u_{\zeta\eta} = 0.$$

(2) 证明：由 (1)，变换后方程的通解为 $u(\zeta, \eta) = F(\zeta) + G(\eta)$，其中 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ 是任意函数. 所以

$$u(x, y) = F(x - \sin x + y) + G(x + \sin x - y).$$

由题中条件，

$$\begin{aligned} u\big|_{y=\sin x} &= F(x) + G(x) = -2x, \\ u_y\big|_{y=\sin x} &= F'(x) - G'(x) = x,\ \text{即}\ F(x) - G(x) = \tfrac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

解得

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - x, \qquad G(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 - x.$$

代入 $u(x, y)$，化简得

$$\boxed{u(x, y) = -2x - x(\sin x - y).}$$

所以 $u\big|_{y=\sin x+2} = -2x - x\cdot(-2) = 0$, 得证.

二、 用分离变量法求解问题：

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=1} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \cos \pi x + 2\cos 2\pi x. \end{cases}$$

解：令 $v(x,t) = \mathrm{e}^t u(x,t)$，则 v 满足

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ v_x\big|_{x=0} = 0, \quad v_x\big|_{x=1} = 0 \\ v\big|_{t=0} = \cos \pi x + 2\cos 2\pi x. \end{cases}$$

记 $v(x,t) = X(x)T(t)$, 由方程，可设

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda.$$

结合边值条件，$X(x)$ 满足本征问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad X_n = c_n \cos n\pi x. \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

此时 $T(t)$ 满足 $T'(t) + n^2\pi^2 T(t) = 0$, 解得

$$T_n = a_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}.$$

所以

$$v(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x \right].$$

由

$$v\big|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos n\pi x \right] = \cos \pi x + 2\cos 2\pi x,$$

可求得

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = 2, \qquad A_k = 0 \quad (k = 0, 3, 4, 5, \dots).$$

所以

$$v(x,t) = \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \cos \pi x + 2\mathrm{e}^{-4\pi^2 t} \cos 2\pi x,$$

$$\boxed{u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} v = \mathrm{e}^{-(\pi^2+1)t} \cos \pi x + 2\mathrm{e}^{(-4\pi^2+1)t} \cos 2\pi x.}$$

三、 用分离变量法求解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\mathrm{e}^{-2x}\sin y & x>0,\ 0<y<\pi \\ u\big|_{x=0}=0, \quad u(x,y)\ 有界 \\ u\big|_{y=0}=0, \quad u\big|_{y=\pi}=1 \end{cases}$$

解：令 $v(x,t)=u(x,t)-y/\pi$，则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=\mathrm{e}^{-2x}\sin y & x>0,\ 0<y<\pi \\ v\big|_{x=0}=-y/\pi, \quad v(x,y)\ 有界 \\ v\big|_{y=0}=0, \quad v\big|_{y=\pi}=0 \end{cases}$$

考察得，$v(x,y)$ 关于 y 有本征函数

$$Y_n=c_n\sin ny \quad (n=1,2,3,\dots).$$

设

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n(x)\sin xy,$$

代入方程及边界条件，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n''(x)-n^2C_n(x)\right)\sin ny=\mathrm{e}^{-2x}\sin y,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}C_n(0)=-y/\pi.$$

所以

$$C_1''(x)-C_1(x)=\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C_k''(x)-n^2C_k(x)=0 \quad (k\geq 2),$$

$$C_n(0)=-\frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi y\sin y\,\mathrm{d}y}{\int_0^\pi \sin^2 ny\,\mathrm{d}y}=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi y\sin ny\,\mathrm{d}y=\frac{2(-1)^n}{n\pi} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

解 $C_1(x)$, 得

$$C_1(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$$

由有界性，$c_1=0$; 又由 $C_1(0)=c_2+\frac{1}{3}=-2/\pi$, $c_2=-(2/\pi+1/3)$. 所以

$$C_1(x)=-\left(\tfrac{2}{\pi}+\tfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-x}+\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}.$$

解 $C_k(x)$ $(k\geq 2)$ 并结合条件，得

$$C_k(x)=\frac{2(-1)^n}{n\pi}\mathrm{e}^{-kx} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

所以

$$\boxed{\begin{aligned} &v(x,t)=\left[-\left(\tfrac{2}{\pi}+\tfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-x}+\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}\right]\sin y+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n\pi}\mathrm{e}^{-ny}\sin ny\right), \\ &u(x,t)=v(x,t)+y/\pi=\dots. \end{aligned}}$$

四、 (1) 求 $\varphi(t)$, 使 $v(x,t)=\varphi(t)\sin x$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt}-4v_{xx}=t\sin x \\ v_x\big|_{x=0}=\sin 2t+\frac{1}{4}t. \end{cases}$$

(2) 用延拓法求以下问题中的 $u(x,t)$:

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=t\sin x & x>0\ \ t>0 \\ u_x\big|_{x=0}=\sin 2t+\frac{1}{4}t \\ u\big|_{t=0}=\sin x,\quad u_t\big|_{t=0}=\frac{9}{4}\sin x. \end{cases}$$

解:

(1) $\varphi(x)=v_x\big|_{x=0}=\sin 2t+\frac{1}{4}t.$

(2) 令 $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$, 则 $w(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}-4w_{xx}=0 & x>0\ \ t>0 \\ w_x\big|_{x=0}=0 \\ w\big|_{t=0}=\sin x,\quad w_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

对 x 作偶延拓，得

$$\begin{cases} W_{tt}-4W_{xx}=0 & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ W\big|_{t=0}=\Phi(x),\quad W_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$$

其中

$$W(x,t)=\begin{cases} w(x,t) & x\ge 0, \\ w(-x,t) & x<0, \end{cases}\qquad \Phi(x)=\begin{cases} \sin x & x\ge 0, \\ -\sin x & x<0. \end{cases}$$

易得

$$W(x,t)=\frac{1}{2}\big[\Phi(x+2t)+\Phi(x-2t)\big].$$

所以

$$w(x,t)=\begin{cases} \cos x\sin 2t & 0<x<2t, \\ \sin x\cos 2t & 0<2t<x, \end{cases}$$

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)=\boxed{\begin{cases} (\cos x+\sin x)\sin 2t+\frac{1}{4}t\sin x & 0<x<2t, \\ \sin x(\cos 2t+\sin 2t)+\frac{1}{4}t\sin x & 0<2t<x. \end{cases}}$$

五、 (1) 求证

$$F\left[f'(x)\right](\lambda)=\mathrm{i}\lambda F\left[f(x)\right](\lambda).$$

(2) 若 $f(x)$ 满足 $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, 求证

$$F^{-1}\left[\mathrm{e}^{iax}f(x)\right](\lambda)=F^{-1}\left[f(x)\right](\lambda+a).$$

(3) 用傅立叶变换求解问题

$$\begin{cases} u_t+2u_x=\dfrac{1}{1+x^2} & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u\big|_{t=0}=\mathrm{e}^{-|x|}. \end{cases}$$

(1) 证明：

$$\begin{aligned} F\left[f'(x)\right](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}f(x) \\ &= f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \mathrm{i}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= F^{-1}\left[f(x)\right](\lambda+a). \end{aligned}$$

(2) 证明：

$$\begin{aligned} F^{-1}\left[\mathrm{e}^{iax}f(x)\right](\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iax}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+a)x}\,\mathrm{d}x \\ &= F^{-1}\left[f(x)\right](\lambda+a). \end{aligned}$$

(3) 解：方程与初值条件两边关于 x 作 Fourier 变换，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t}+2\mathrm{i}\lambda\hat{u}=\hat{f}(\lambda) \\ \hat{u}\big|_{t=0}=\hat{\varphi}(\lambda), \end{cases}$$

其中

$$\hat{u}(t;\lambda)=F\left[u(x,t)\right],\quad \hat{f}(\lambda)=F\left[1/(1+x^2)\right],\quad \hat{\varphi}(\lambda)=F\left[\mathrm{e}^{-|x|}\right].$$

解 $\hat{u}(t;\lambda)$, 得

$$\begin{aligned} \hat{u}(t;\lambda) &= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda t}\left[\hat{f}(\lambda)\int_0^t \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau+\hat{\varphi}(\lambda)\right] \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}\hat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda). \end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= F^{-1}\left[\hat{u}(t;\lambda)\right] \\
&= \int_0^t F^{-1}\left[e^{-2\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}\hat{f}(\lambda)\right]\mathrm{d}\tau + F^{-1}\left[\hat{\varphi}(\lambda)\right] \\
&= \int_0^t F^{-1}\left[\hat{f}(\lambda)\right](x-2t+2\tau)\,\mathrm{d}\tau + F^{-1}\left[\hat{\varphi}(\lambda)\right](x-2t) \\
&= \boxed{\int_0^t \frac{1}{1+(x-2t+2\tau)^2}\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{e}^{-|x-2t|}.}
\end{aligned}
$$