第四讲 复变函数的积分（续）

Monday, October 15, 2018   7:33 AM

上周作业本在最后排，请自行领取

本周作业本请交至讲台

解析函数的高阶导数.

- 解析函数可以任意次求导.
- Thm: 解析函数 $f(z)$ 的高阶导数值: $f^{(n)}(z)$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

C为任意一条绕z的正向简单闭曲线

证明: "$n=1$" $\quad f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

$\|(?)$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$$f(z+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \times \frac{1}{\Delta z} \oint_C \left(\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)} - \frac{1}{\zeta - z} \right) f(\zeta) d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta$$

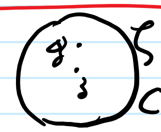
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right)d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{|2\pi i|}\oint_C |f(\zeta)| \times \frac{|\Delta z|}{|(\zeta-z-\Delta z)||(\zeta-z)|^2}|d\zeta|$$

不妨假设 C：$|\zeta-z|=d$，$|\Delta z|<\frac{d}{2}$



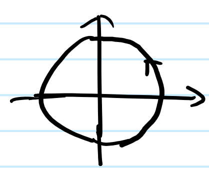
$|f(\zeta)|\leq M$，$|\zeta-z-\Delta z| \geq |\zeta-z|-|\Delta z| > \frac{d}{2}$，

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_C M \times \frac{|\Delta z|}{\frac{d}{2}\times d^2}ds$$

$$\leq \frac{M}{\pi d^3}\times 2\pi d \times |\Delta z| \longrightarrow 0 \quad (\Delta z \to 0)$$

例：$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz$，$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$，

其中 C：$|z|=r>1$.



由：$f^{(4)}(z_0)=\frac{4!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^5}dz$

所以：
$$\oint \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{4!}(\cos\pi z)^{(4)}\Big|_{z=1}$$

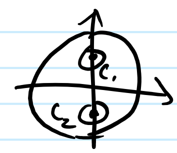
$$=\frac{2\pi i}{4!}\times \pi^4\cos\pi$$

$$=-\frac{\pi^5}{12}i$$

$$\oint \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint \frac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\boxed{\frac{e^z}{(z+i)^2}}}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$



$$= \underbrace{\frac{2\pi i}{1!}\times\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}}_{I_1} + \underbrace{\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^z}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i}}_{I_2}$$

$$\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)' = \frac{e^z}{(z+i)^2} - 2\frac{e^z}{(z+i)^3}$$

$$= \frac{(z+i-2)e^z}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{2i(1+i)e^i}{-8i} = -\frac{(1+i)}{4}e^i$$

$$\therefore\ 2\pi i\times\left(-\frac{i+1}{4}\right)e^i = \frac{\pi}{2}(1-i)e^i.$$

同理，可以计算 I_2.

$$I_1+I_2 = i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

高阶导数的模.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \qquad , |f(z)|\le M$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\times M\times\frac{1}{R^{n+1}}\times 2\pi R$$

$$= \frac{n!\,M}{\quad}$$

$$= \frac{n!\,M}{R^n}.$$

Liouville定理：有界的整函数必定是常数.

代数学基本定理：n阶多项式：$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$,
$(a_n \neq 0)$
至少存在复数域中的一个根.

假设 $P_n(z)$ 在复数域中无根.

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)} \text{ 是解析函数,}$$

$|z| \leq M$

$$\lim_{z\to\infty} \left|\frac{1}{P_n(z)}\right| = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|P_n(z)|}$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|z|^n} \times \left(\frac{1}{a_0 z^{-n} + \cdots + a_n}\right) \to 0$$

$|f(z)|$ 在整个复平面上有界.

$$\frac{1}{P_n(z)} = C \quad (\text{矛盾})$$

第四章. 级数

幂级数（函数项级数）
数项级数

Def: $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $z_n = a_n + i b_n$,

$\forall \varepsilon>0, \exists N$, s.t. 当 $m, n>N$ 时,

$$|z_m - z_n| < \varepsilon$$

则: $\{z_n\}$ 收敛的. Cauchy 序列

数项级数:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

如果 $\{S_n\}$ 收敛, 则: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛

$\{S_n\}$ 发散, 则 - — 发散.

Thm: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛充要条件: $\{S_n\}$ 是一个 Cauchy 序列.

$\forall \varepsilon>0, \exists N$, $m>p>N$ 时,

$$|S_m - S_p| < \varepsilon.$$

即: $\left|\sum_{n=p+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = ?$$

Thm $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛 充要条件: $\sum a_n$, $\sum b_n$ 收敛.

其中 $z_n = a_n + i b_n$.

Def: 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 收敛. , 则称 $\sum z_n$ 绝对收敛.

如果级数 $\sum z_n$ 收敛, 但 $\sum |z_n|$ 发散的.

则 $\sum z_n$ 条件收敛

$$\sum^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n} + i \frac{1}{n^2}\right]$$

$\sum \frac{1}{n}$ 发散

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2}\right],\quad \sum\frac{1}{n}\text{ 发散.}$$

$$\sum\left|\qquad\qquad\right|\text{ 发散}$$

判定法则：（实）

正项级数. 1°：部分和有上界.

2°：比较法.

如果 $0<a_n\le b_n$

$\sum b_n$ 收敛, $\Rightarrow$: $\sum a_n$ 收敛.

$\sum a_n$ 发散 $\Rightarrow$: $\sum b_n$ 发散.

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\ell$. 则：同收敛.

（ℓ 有界）

两个标准级数. 几何级数 $\sum r^n$, $|r|<1$, 收敛.

$|r|\ge 1$. 发散.

p 级数 $\sum\frac{1}{n^p}$. $p>1$, 收敛

$p\le 1$ 发散.

$\sum\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

例. D'Alembert 判别法. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q=\begin{cases}<1, & \text{收敛}\\ >1, & \text{发散}\\ =1, & \text{讨论.}\end{cases}$

Cauchy 判别法. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q=\begin{cases}<1, & \text{收敛}\\ >1, & \text{发散}\\ =1, & \text{讨论.}\end{cases}$

参照p级数：Raabe判别法：

$\sum a_n$ 正项级数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q$.

$$\begin{cases} q>1, & \text{收敛.} \\ q<1, & \text{发散.} \\ q=1, & \text{讨论} \end{cases}$$

变号级数：

1°: Dirichlet: $\{a_n\}\downarrow 0$, $\sum b_n$ 部分和一致有界:

则: $\sum a_n b_n$ 收敛.

2°: Abel 判别法: $\{a_n\}\downarrow A$, $\sum b_n$ 收敛.

则: $\sum a_n b_n$ 收敛.

3°: 交错级数: $\sum(-1)^n a_n$, $a_n \downarrow 0$.

$\Downarrow$

收敛

作业: P_{82} 12 (1)(3)(5)(7). 14.

P_{114}: 1 (1), (2).