第5章　线性动态电路的正弦稳态分析

5.1　正弦交流电路的相量分析法

5.2　谐振

5.3　互感

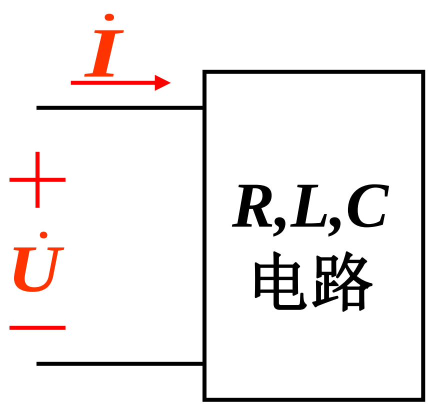
5.4　三相交流电路

5.2 *LC* 谐振电路

谐振(*resonance*)是正弦电路在特定条件下所产生的一种特殊物理现象，作为电路计算没有新内容，主要分析谐振电路的特点。

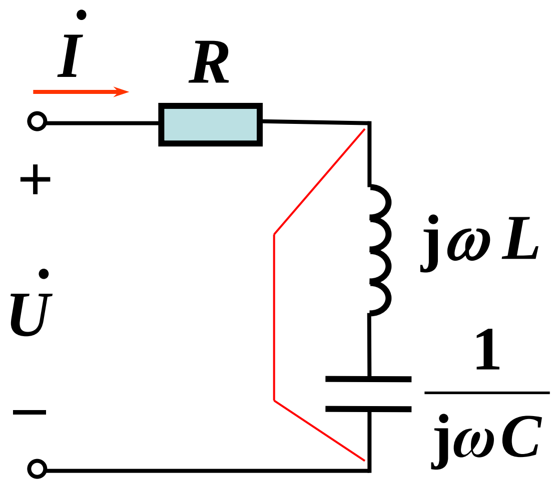
一、 谐振的定义

含有*L*、*C*的电路，当电路中端口电压、电流同相时，称电路发生了谐振。



二、*RLC*串联电路的谐振

1、谐振条件



电路发生谐振→电压、电流同相→

入端阻抗 $Z=R+jX$, 有$X=0$, 即$Z=R$为纯电阻。

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L + X_C)$$

$$= R + jX$$

当$\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$时，电路发生谐振

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

谐振角频率 (*resonant angular frequency*)

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

谐振频率 (*resonant frequency*) 电路固有

$$\boxed{T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振周期 (*resonant period*)

2、使*RLC*串联电路发生谐振的方法

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

（1）. *L C* 不变，改变 电源ω

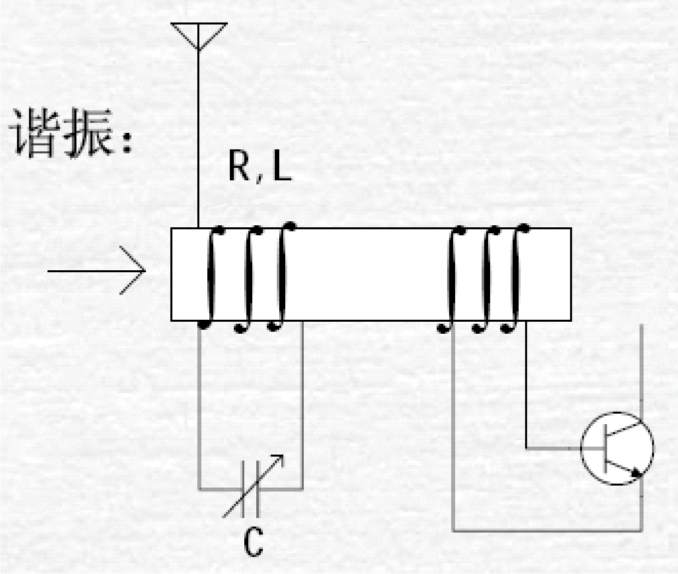
ω_0由电路本身的参数决定，一个 *R L C* 串联电路只能有一个对应的ω_0，当外加频率等于谐振频率时，电路发生谐振。

（2）. 电源频率不变，改变 *L* 或 *C*（常改变*C*）。

通常收音机选台，

即选择不同频率的信号，

就采用改变*C*使电路达到谐振。



3、*RLC*串联电路谐振时的特点

(1). $\dot{U}$与$\dot{I}$同相.

(2). 入端阻抗*Z*为纯电阻且最小。

(3). 电流*I*达到最大值$I_0=U/R$ (*U*一定)。

(4). *LC*上串联总电压为零，即LC相当于短路，电源电压全加在电阻上

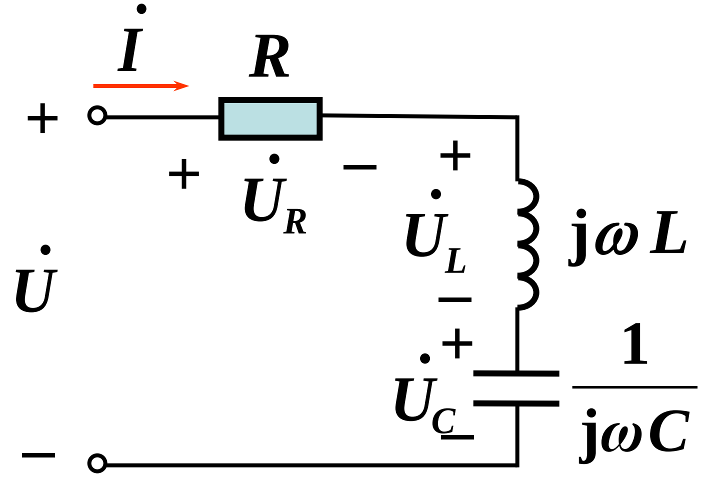
串联谐振又称电压谐振。

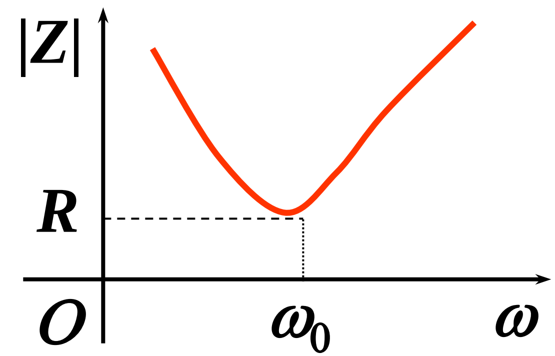
(5). 功率

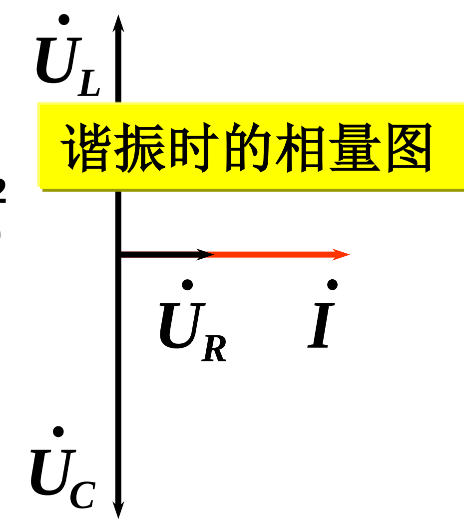
$P=RI_0^2=U^2/R$，电阻功率达到最大。

$$Q=Q_L+Q_C=0,\ Q_L=\omega_0 L I_0^2,\ Q_C=-\frac{1}{\omega_0 C}I_0^2$$

即*L*与*C*交换能量，与电源间无能量交换。







谐振时的相量图

三、特性阻抗和品质因数

1. 特性阻抗 (*characteristic impedance*) ρ

谐振时的感抗或容抗

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

单位：Ω

与谐振频率无关，仅由电路参数决定。

2. 品质因数(*quality factor*)*Q*

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

无量纲

它是说明谐振电路性能的一个指标，同样仅由电路的参数决定。

品质因数的意义：

(a) 电压关系：

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{\omega_0 L I_0}{R I_0}=\frac{U_{L0}}{U}=\frac{U_{C0}}{U}$$

谐振时电感电压U_{L0}(或电容电压U_{C0})与电源电压之比。

表明谐振时的电压放大倍数。　　　即　$U_{L0}=U_{C0}=QU$

例：　某收音机 C=150pF，L=250mH，R=20Ω

$$\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}=1290\ \Omega \qquad Q=\frac{\rho}{R}=65$$

如信号电压10mV , 电感上电压650mV 这是所要的。

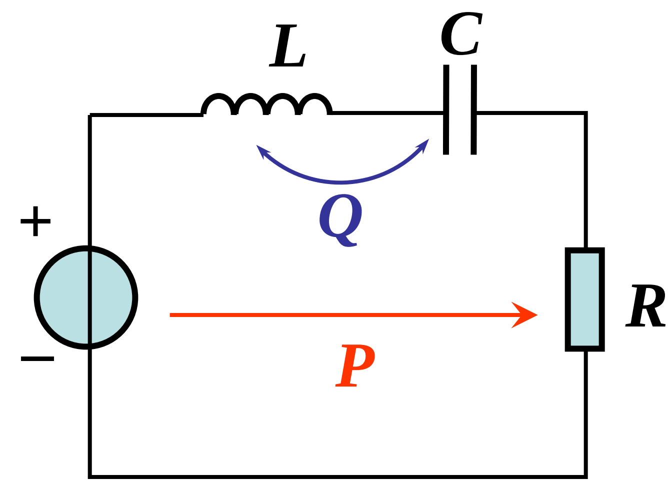
但是在电力系统中，由于电源电压本身比较高，一旦发生谐振，会因过电压而击穿绝缘损坏设备。应尽量避免。

(b) 功率关系：

电源发出功率：无功 $Q = UI_0 \sin\varphi = 0$

有功 $P = UI_0 \cos\varphi = RI_0^2$

电源不向电路输送无功。电感中的无功与电容中的无功大小相等，互相补偿，彼此进行能量交换。



$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L I_0^2}{R I_0^2} = \frac{Q_{L0}}{P} = \frac{|Q_{C0}|}{P}$$

$$= \frac{\text{谐振时电感(或电容)中无功功率的绝对值}}{\text{谐振时电阻消耗的有功功率}}$$

(c) 能量关系：

电场能量和磁场能量周期振荡相互转换，总值恒定。无能量传给电源，也不从电源吸收能量。

$$w_{总}=\frac{1}{2}LI_{m0}^{2}=\frac{1}{2}CU_{Cm0}^{2}=\frac{1}{2}CQ^{2}U_{m}^{2}$$

与 Q^2 成正比

品质因数越大，总的能量就越大，振荡程度就越剧烈。

Q是反映谐振回路中电磁振荡程度的量，一般讲在要求发生谐振的回路中总希望尽可能提高Q值。

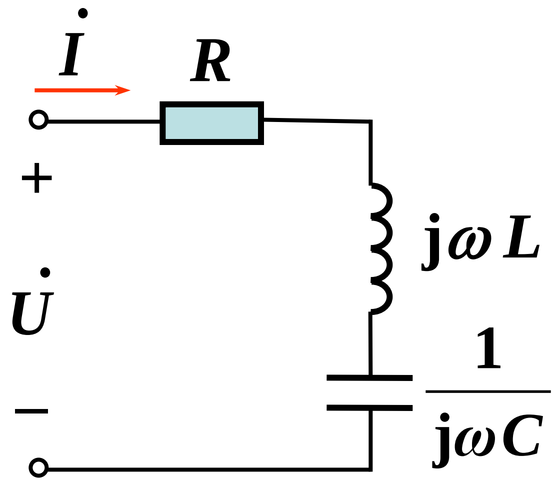
$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\omega_0\cdot\frac{LI_0^2}{RI_0^2}=2\pi\cdot\frac{LI_0^2}{RI_0^2T_0}$$

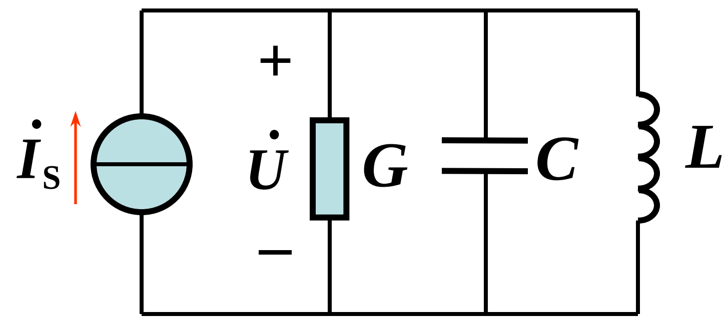
$$=2\pi\,\frac{\text{谐振时电路中电磁场的总储能}}{\text{谐振时一周期内电路消耗的能量}}$$

维持一定量的振荡所消耗的能量愈小，则振荡电路的“品质”愈好。

四、*RLC*并联电路的谐振

1. 简单 *G*、*C*、*L* 并联电路

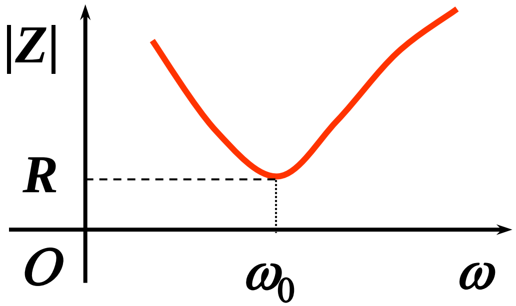


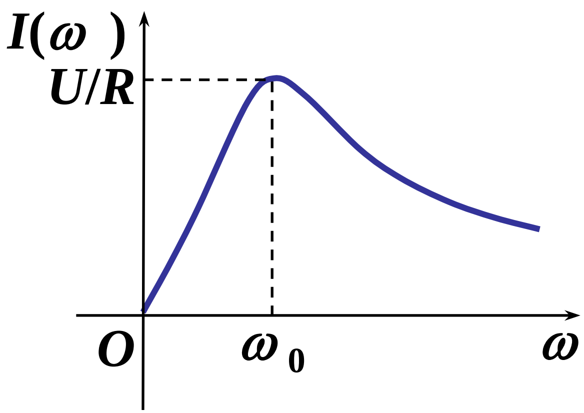


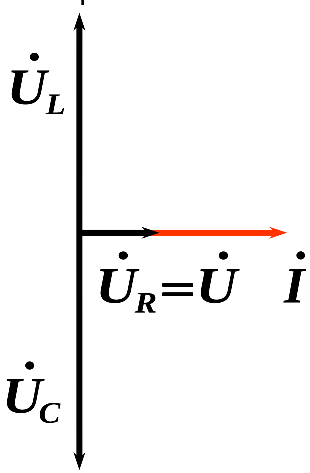
对偶：

<u>***RLC*** 串联</u>	<u>***GCL*** 并联</u>
$Z=R+\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})$	$Y=G+\mathrm{j}(\omega C-\dfrac{1}{\omega L})$
$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

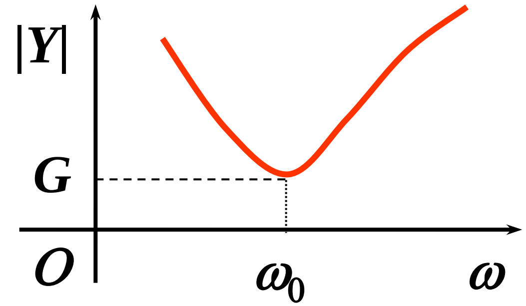
RLC 串联

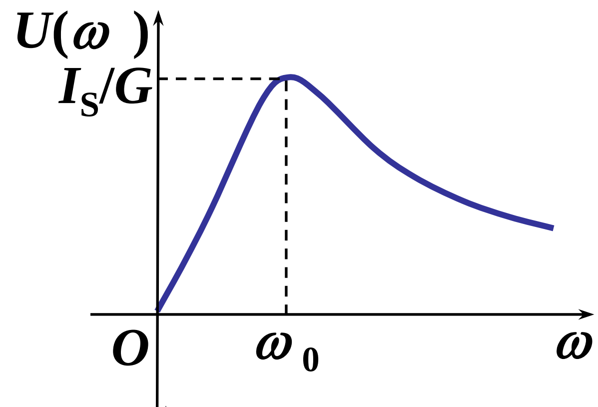


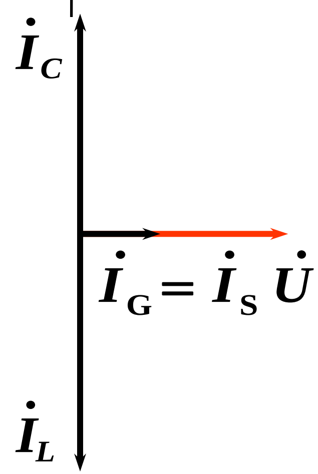




GCL 并联







<u>*RLC* 串联</u>

电压谐振

$$U_L(\omega_0)=U_C(\omega_0)=QU$$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 RC}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

推导过程如下：

$$Q=\frac{U_L}{U}=\frac{U_C}{U}$$

$$=\frac{I\omega_0 L}{IR}=\frac{1}{R\omega_0 L}$$

<u>*GCL* 并联</u>

电流谐振

$$I_L(\omega_0)=I_C(\omega_0)=QI_S$$

$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 GL}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

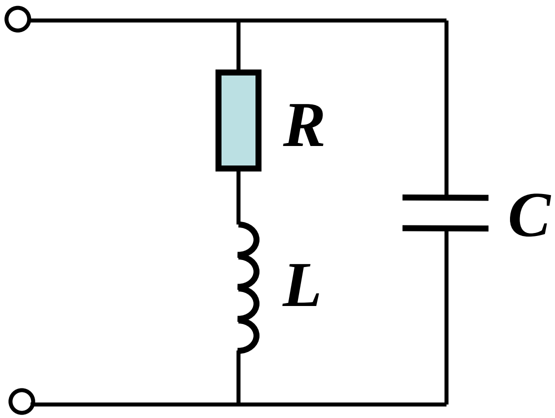
互为倒数

$$Q=\frac{I_L}{I_S}=\frac{I_C}{I_S}$$

$$=\frac{U/\omega_0 L}{U/R}=\frac{\omega_0 C}{G}$$

2. 电感线圈与电容并联

上面讨论的电流谐振现象实际上是不可能得到的，因为电感线圈总是存在电阻的，于是电路就变成了混联，谐振现象也就较为复杂。



$$Y = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2})$$

$$= G + \mathrm{j}B$$

谐振时 B=0，即 $\omega_0 C - \dfrac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0$

求得 $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - (\dfrac{R}{L})^2}}$ 由电路参数决定。

此电路参数发生谐振是有条件的，参数不合适可能不会发生谐振。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{L})^2}$$

在电路参数一定时，改变电源频率是否能达到谐振，要由下列条件决定：

当 $\frac{1}{LC} > (\frac{R}{L})^2$，即 $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$时，可以发生谐振

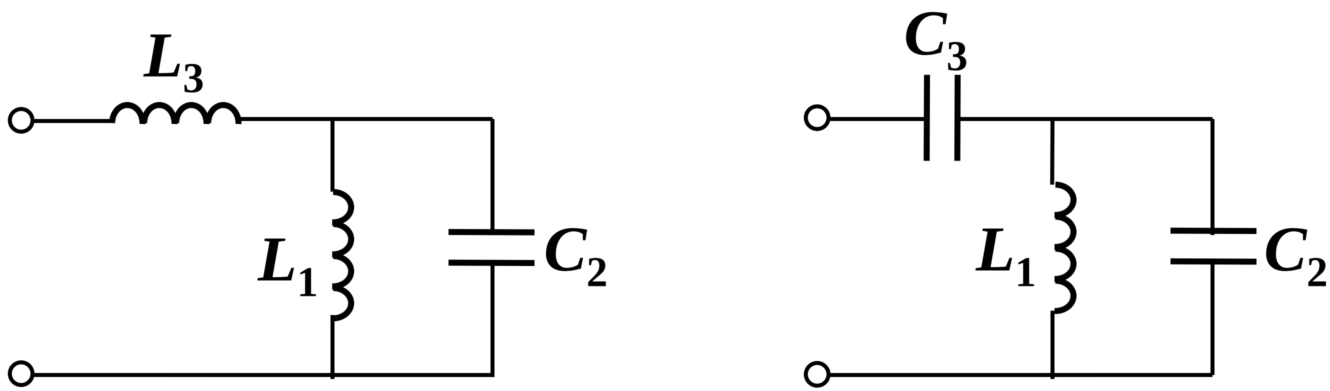
当 $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$时，不会发生谐振，因ω_0是虚数。

当电路发生谐振时，电路相当于一个电阻：

$$Z(\omega_0) = R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} = \frac{L}{RC}$$

五、串并联电路的谐振

讨论由纯电感和纯电容所构成的串并联电路：



(a)　　　　　　　　(b)

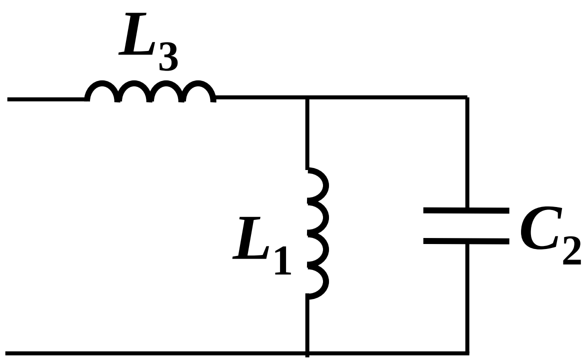
上述电路既可以发生串联谐振(**Z**=0)，又可以发生并联谐振(**Z**=∞)。可通过求入端阻抗来确定串、并联谐振频率。

对(a)电路，L_1、C_2并联，在低频时呈感性。随着频率增加，在某一角频率ω_1下发生并联谐振。$\omega>\omega_1$时，并联部分呈容性，在某一角频率ω_2下可与L_3发生串联谐振。

(a)

$$Z(\omega)=\mathrm{j}\omega L_3+\frac{\mathrm{j}\omega L_1\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\right)}{\mathrm{j}\omega L_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}=\mathrm{j}\left(\omega L_3-\frac{\omega L_1}{\omega^2 L_1C_2-1}\right)$$

$$=\mathrm{j}\frac{\omega^3 L_1L_3C_2-\omega(L_1+L_3)}{\omega^2 L_1C_2-1}$$



$Z(w)=0$分子为零：

$$\omega_2=0 \quad (舍去)$$

$$\boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{L_1+L_3}{L_1L_3C_2}} \quad (串联谐振)}$$

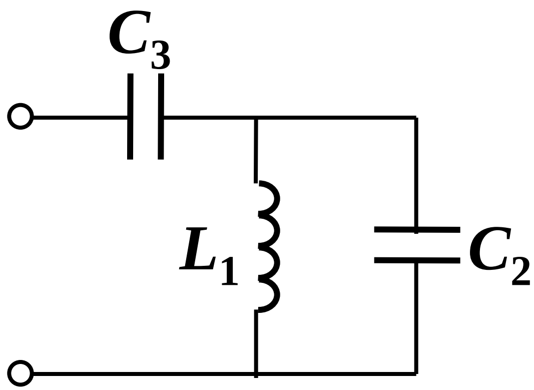
$Y(\omega)=0$，即分母为零，有：

$$\omega_1^2 L_1C_2-1=0$$

$$\boxed{\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_2}} \quad (并联谐振)}$$

可见，$\omega_1<\omega_2$。先发生并联谐振，再发生串联谐振

对(b)电路可作类似定性分析。L_1、C_2并联，在低频时呈感性。在某一角频率ω_1下可与C_3发生串联谐振。$\omega>\omega_1$时，随着频率增加，并联部分可由感性变为容性，在某一角频率ω_2下发生并联谐振。



(b)

$$Z(\omega_1)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\frac{\mathrm{j}\omega L_1\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{\mathrm{j}\omega L_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\frac{\mathrm{j}\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_2}$$

$$=-\mathrm{j}\frac{1-\omega^2 L_1(C_2+C_3)}{\omega C_3(1-\omega^2 L_1 C_2)}$$

$$\boxed{\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1(C_2+C_3)}}}$$ 串联谐振

$$\boxed{\omega_2=\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}}$$ 并联谐振

$$\boxed{\omega_1<\omega_2}$$ 先发生串联谐振，再发生并联谐振

作业5.1/5.2

- 12，14，15，16　正弦电路
- 18，22，24　功率
- 25，27，29　谐振