1.5 逻辑代数

一、逻辑运算定律，常用公式及运算规则

逻辑运算中，只有逻辑“加”、逻辑“乘”和求“反”运算，没有减法和除法运算

1. 基本运算定律

- **0-1律** $A+0=A$ $A\cdot 1=A$
  $A+1=1$ $A\cdot 0=0$
- **重叠律** $A+A=A$ $A\cdot A=A$
- **互补律** $A+\overline{A}=1$ $A\cdot\overline{A}=0$
- **否定之否定律** $A=\overline{\overline{A}}$

- 交换律 $A+B=B+A \quad A\cdot B=B\cdot A$
- 结合律

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

- 分配律

$$A+B\cdot C=(A+B)(A+C) \quad A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

- 摩根定律 $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B} \quad \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} \quad \overline{A\cdot B\cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

也可扩展到多个变量

上述定律可以用真值表进行证明等式成立。后四个定律也可用前四个进行证明成立。

例：用真值表证明摩根定律 $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ 及 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$。

证：

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AB	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

证明： $A(B+C)=AB+AC$

证：

A	B	C	B+C	A（B+C）	AB	AC	AB+AC
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

已证明 $A(B+C)=AB+AC$

例：证明分配律A+BC=(A+B)(A+C)。

证：A+BC=A(1+B+C)+BC　　0-1律

=A+AB+AC+BC　　分配律

=AA+AB+AC+BC　　重叠律

=A(A+B)+C(A+B)　　分配律

=(A+B)(A+C)　　分配律

例 证明“异或求反等于同或”，

即求证 $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=AB+\overline{A}\,\overline{B}$

证明：根据反演律

左边= $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A\overline{B}}\cdot\overline{\overline{A}B}=(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$

$=\overline{A}A+AB+\overline{A}\,\overline{B}+B\overline{B}=AB+\overline{A}\,\overline{B}$ =右边

2. 常用公式

- $A+\overline{A}\cdot B=A+B$ $A+AB=A$

证：由分配律可证明成立

$$左式=A+\overline{A}\cdot B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B=右式$$

$$左式=A+AB=A(1+B)=A=右式$$

- $A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C=A\cdot B+\overline{A}\cdot C$ （冗余律）

证：$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$

$=AB+\overline{A}C+\overline{A}BC+ABC$

$=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)$

$=AB+\overline{A}C$

推论：

$$A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F=A\cdot B+\overline{A}\cdot C$$

证：

$$A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F$$

$$=A\cdot B+\overline{A}\cdot C+BC+BCDEF$$

$$=A\cdot B+\overline{A}\cdot C+BC(1+DEF)$$

$$=A\cdot B+\overline{A}\cdot C+BC$$

$$=A\cdot B+\overline{A}\cdot C$$

- $A\oplus B=\overline{A\odot B}$ $\qquad A\odot B=\overline{A\oplus B}$

3. 运算规则

- **代入规则：**

在任何含有变量A的等式中，如果用另一个逻辑等式F代替所有的变量A，则代替后的等式仍然成立。

$$A+\overline{A}B=A+B$$ 用$A=C+D+E$代入

$$(C+D+E)+(\overline{C+D+E})B=C+D+E+B$$

等式显然成立。

➢ 反演规则：

将一个逻辑函数中的“0”换“1”，“1”换“0”，“·”换“+”，“+”换“·”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，则变换后的函数是原函数的反函数。(保持原来的运算顺序)

这里的运算顺序是：先括号→逻辑乘→逻辑加。

例：

$$Z = \overline{A}\,\overline{B} + CD$$

$$\overline{Z} = (A+B)\cdot(\overline{C}+\overline{D})$$

其实就是反演律（摩根定律）的应用。

用反演律求：

$$\overline{Z} = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + CD} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cdot\overline{CD}$$

$$= (A+B)\cdot(\overline{C}+\overline{D})$$

例：　$Z=(A\cdot\overline{B}+\overline{BCD})\cdot\overline{E}$

解：由反演规则得

$$\overline{Z}=(\overline{A}+B)\cdot BCD+E$$

在此应注意，非号下面的组合变量（如此地的**BCD**）看成是一个子函数**Z**，在求反函数时这**Z**不变。

利用反演规则可以直接求出反函数。

➢ 对偶规则：

将一个表达式中的“0”换“1”，“1”换“0”、“·”换“+”，“+”换“·”，得到的新表达式Z′称为Z的对偶式。如果两个逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。

例 原式 $Z = A\cdot\overline{B} + A\cdot(C+0)$

对偶式 $Z' = (A+\overline{B})\cdot[A+(C\cdot 1)]$

注意求对偶式时变量及其上反号应保留不变。

➢ 反演规则：

将一个逻辑函数中的“0”换“1”，“1”换“0”，“·” 换“+”，“+”换“·”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，则变换后的函数是原函数的反函数。

对偶规则的用处：当证明了某逻辑函数等号两边的表达式已相等，则求得两边各自的对偶式也必然相等，即利用对偶规则可证明恒等式。比如P56的运算定律中左、右两式就互为对偶式，所以如果左边等式已证明成立，则右边等式也必然成立。

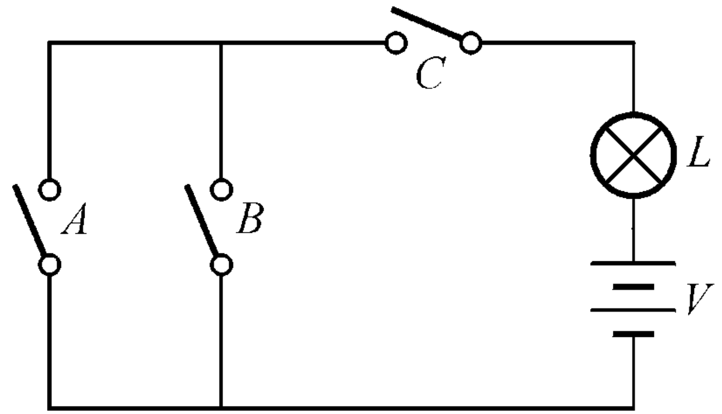
$$A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$$

三、逻辑函数的表示方法及标准表达式

1. 逻辑问题的五种表示方法

(1)真值表表示

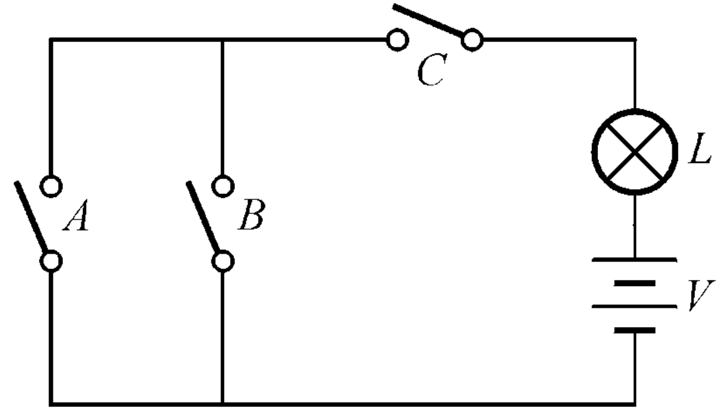
A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



令开关合上为“1”，断开为“0”；灯亮时为“1”，暗为“0”。

(2)函数式表示

开关A和C合上，或B和C合上，或A、B、C都合上时灯亮，所以有函数式



$$L = f(A,B,C) = AC + BC + ABC$$

$$= (A+B)C$$

或者从真值表得出：

$$L = f(A,B,C)$$

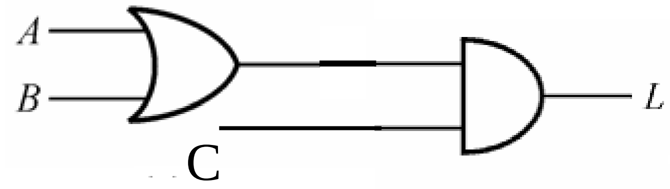
$$= \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

$$= AC + BC + ABC$$

$$= (A+B)C$$

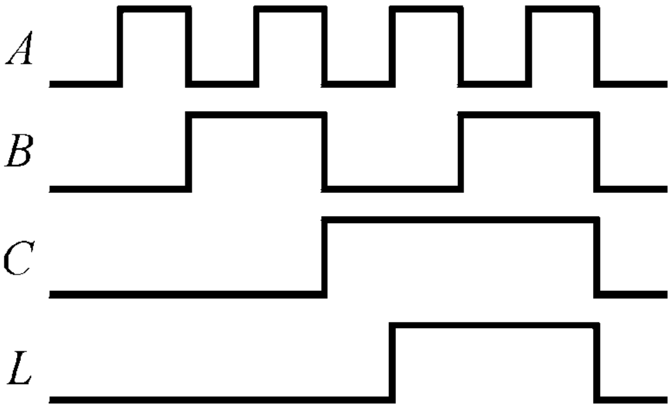
A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(3)逻辑图表示



$$L = f(A, B, C) = AC + BC + ABC$$
$$= (A + B)C$$

(4)波形图表示



A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(5)卡诺图表示

后一节中介绍。

1.5.2 逻辑函数的代数法化简

同一个逻辑函数有多种形式的表示:

$$L = f(A,B,C) = A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$= AC + BC$$ “与-或”表达式

$$= (A+B)C$$ “或-与”表达式

$$= \overline{\overline{A+B}+\overline{C}}$$ “或非-或非”表达式

$$= \overline{\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}}$$ “与或非”表达式

$$= \overline{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}$$ “与非-与非”表达式

其中第一种表达式是基本形式，其它式子都可由它变换而来。

- 逻辑函数的化简就是使一个最初的逻辑函数经过化简后得到式中的“与”项、“或”项项数最少，而每项中的变量数也最少，从而使组成的逻辑电路最简（门数和每门的输入端数最少）。

一、逻辑函数的代数法化简

- 代数法化简依据逻辑代数的定律、常用公式和运算规则进行。
- 采用的方法有：吸收法、配项法、合并法、消去法、冗余法。

化简下列函数为最简的“与-或”表达式：

例1.5.1

$$L = f(A,B,C) = AB + BD + ABC$$

化简

$$L = f(A,B,C) = AB + BD + ABC = AB(1+C) + BD = AB + BD$$

例1.5.2 $L = f(A,B,C,D) = A + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}CD + \overline{C}E + \overline{D}E$

化简 $L = f(A,B,C,D) = A + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}CD + \overline{C}E + \overline{D}E$

$$= A(1+\overline{B}\,\overline{C}) + \overline{A}CD + \overline{C}E + \overline{D}E$$

$$= A + CD + \overline{C}E + \overline{D}E$$

$$= A + CD + E(\overline{C} + \overline{D})$$

$$= A + CD + E\overline{CD}$$

$$= A + CD + E$$

例1.5.3

$$L = f(A,B,C,D,E,F) = A + AB + \overline{A}C + BD + ACEF + \overline{B}E + DEF$$

化简

$$L = f(A,B,C,D,E,F) = A + AB + \overline{A}C + BD + ACEF + \overline{B}E + DEF$$

$$= A(1 + B + CEF) + \overline{A}C + BD + \overline{B}E + DEF$$

$$= A + C + BD + \overline{B}E + DEF$$

$$= A + C + BD + \overline{B}E$$

例1.5.4

$$L = f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B} + BC + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

化简

$$L = f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B} + BC + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= \overline{A}(\overline{B} + \overline{C} + \overline{C}\,\overline{D}) + BC$$

$$= \overline{A}(\overline{B} + \overline{C}) + BC$$

$$= \overline{A}\,\overline{BC} + BC$$

$$= \overline{A} + BC$$

例1.5.5

$Z_1(A,B,C,D)=ABC\overline{D}+ABD+BC\overline{D}+ABC+BD+B\overline{C}$

化简

$$
\begin{aligned}
Z_1(A,B,C,D) &= ABC\overline{D}+ABD+BC\overline{D}+ABC+BD+B\overline{C} \\
&= B(AC\overline{D}+AD+C\overline{D}+AC+D+\overline{C}) \\
&= B(AC\overline{D}+D+C\overline{D}+AC+\overline{C}) \\
&= B(AC\overline{D}+D+C+AC+\overline{C}) \\
&= B
\end{aligned}
$$

该式子在提出公共变量**B**之后，应用了吸收法和消去法使式子达到最简。

例1.5.6

$Z_2(A,B,C,D)=AB+A\overline{B}+\overline{A}C+BD+ACEF+\overline{B}EF+DEFG$

化简

$$
\begin{aligned}
&Z_2(A,B,C,D)\\
&=AB+A\overline{B}+\overline{A}C+BD+ACEF+\overline{B}EF+DEFG\\
&=A(B+\overline{B}+CEF)+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF+DEFG\\
&=A+\overline{A}C+BD+\overline{B}EF\\
&=A+C+BD+\overline{B}EF
\end{aligned}
$$

该例应用了合并法和冗余项法使式子化成最简。

例1.5.7 化简

$$Z_3(A,B,C,D) = ACE + \overline{A}BE + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + BE\overline{C} + DE\overline{C} + \overline{A}E$$

$$= E(AC + \overline{A}B + B\overline{C} + D\overline{C} + \overline{A}) + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E(AC + \overline{A} + B\overline{C} + D\overline{C}) + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E(\overline{A} + C + B\overline{C} + D\overline{C}) + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E(\overline{A} + C + B + D) + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E(\overline{A} + \overline{\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{D}}) + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E\overline{A} + E\overline{\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{D}} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E\overline{A} + E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

$$= E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

例1.5.8 化简

$$L = f(A,B,C) = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$L = f(A,B,C) = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= A\overline{B}(C+\overline{C}) + (A+\overline{A})B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= \overline{B}C(A+1) + A\overline{C}(B+\overline{B}) + \overline{A}B(\overline{C}+1)$$

$$= \overline{B}C + A\overline{C} + \overline{A}B$$

代数法化简无固定步骤可遵循，具有一 定的试探性。对最后的化简结果，有时难以肯定是合理的，它在很大程度上取决于设计者对逻辑代数的熟悉程度。

在逻辑代数中不存在减法和除法，不能移项。

例 $A(A+B)=A$

但 $A+B\neq 1$

例 $\overline{A}B+A\overline{B}+AB=A+B+AB$

但 $\overline{A}B+A\overline{B}\neq A+B$

二. 逻辑函数式的最小项之和表达式

$$
\begin{aligned}
L &= f(A,B,C) \\
&= \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC \\
&= AC + BC + ABC \\
&= AC + BC
\end{aligned}
$$

标准“与-或”表达式

标准“与-或”表达式也称最小项之和表达式，具有如下特征：

(1)每个“与”项都包含了函数的三个变量A、B、C。

(2)A、B、C三个变量以原变量或者以反变量的形式在“与”项中出现一次，且仅出现一次。

凡符合上述特征的“与”项都是最小项。

当一个函数具有n个变量时，函数应有2^n个最小项，其最小项是n个变量的一个“与”项。

十进制数	变量取值			相对应的最小项及其编写符号 $m_i(i=0\sim7)$							
	A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
				$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

- **最小项的性质**

(1)输入变量的任何一组取值，仅对应于一个最小项的值为1。利用这种特性可给每个最小项编号m_i，比如最小项$A\bar{B}C$，它只在$A\bar{B}C$取值101时，最小项的值才为1，这个“101”二进制数对应的十进制数为“5”→就是下标i，故最小项就用编号m_5表示。同理可得$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$=m_0、$\bar{A}B\bar{C}$=m_2、……表中可得8个最小项的编号。

十进制数	变量取值			相对应的最小项及其编写符号 m_i(i=0~7)							
	A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
				$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

(2)任何二个最小项相与，结果一定为0。 $m_i m_j = 0$

(3)全部最小项的和，结果为1。 $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$

标准的“与-或”表达式可表示为：

$$L=f(A,B,C)=\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$$

$$=m_3+m_5+m_7=\sum m(3,5,7)$$

十进制数	变量取值			相对应的最小项及其编写符号 m_i(i=0~7)							
	A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
				$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

逻辑函数的最大项之积表达式

最大项之积表达式又称为标准“或-与”表达式。

$$L=f(A,B,C)=\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$$

$$=m_3+m_5+m_7=\sum m(3,5,7)$$

$$\overline{L}=f(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

$$=\sum m(0,1,2,4,6)$$

两边同时求反，并用摩根定律后

$$L=f(A,B,C)=(A+B+C)(A+B+\overline{C})$$

$$(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

“或”项中的变量个数和函数中的变量数相同，变量同样可以是原变量，也可以是反变量。这样一个“或”项又称为最大项。

变量取值和最大项间关系

最大项	使最大项为0的变量取值 A　　B　　C	最大项编号 M_i
$A+B+C$	0　　0　　0	M_0
$A+B+\overline{C}$	0　　0　　1	M_1
$A+\overline{B}+C$	0　　1　　0	M_2
$A+\overline{B}+\overline{C}$	0　　1　　1	M_3
$\overline{A}+B+C$	1　　0　　0	M_4
$\overline{A}+B+\overline{C}$	1　　0　　1	M_5
$\overline{A}+\overline{B}+C$	1　　1　　0	M_6
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	1　　1　　1	M_7

➢ 最大项的性质

(1)任何一组变量取值，仅对应一个最大项的值为0。

(2)任何二个最大项之和，其值为1。

(3)全部最大项之积，其值恒为0。

最大项	使最大项为0的变量取值 A B C	最大项编号 M_i
$A+B+C$	0 0 0	M_0
$A+B+\overline{C}$	0 0 1	M_1
$A+\overline{B}+C$	0 1 0	M_2
$A+\overline{B}+\overline{C}$	0 1 1	M_3
$\overline{A}+B+C$	1 0 0	M_4
$\overline{A}+B+\overline{C}$	1 0 1	M_5
$\overline{A}+\overline{B}+C$	1 1 0	M_6
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	1 1 1	M_7

最大项之积式又可写成如下形式：

$$L = f(A,B,C)$$
$$= (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$$
$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_6 = \prod M(0,1,2,4,6)$$

最大项和最小项是逻辑函数的二种不同形式，描述的是同一逻辑问题，实际上是一种互补的表示方法。因为 $M_i = \overline{m_i}$

A B C	最小项m	最大项M
0 0 0	$m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$M_0 = A+B+C$
0 0 1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$	$M_1 = A+B+\overline{C}$
0 1 0	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$	$M_2 = A+\overline{B}+C$

例：将与或形式表示的逻辑函数转化为：最小项之和和最大项之积形式。

$$L = f(A,B,C) = AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$L = f(A,B,C) = AB + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$= AB(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

$$= m_0 + m_6 + m_7 = \sum m(0,6,7)$$

最小项之和

$$L = f(A,B,C) = \overline{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

用取值为“0”最小项之和的非求得

$$= \overline{\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C}$$

$$= \overline{\bar{A}\bar{B}C} \cdot \overline{\bar{A}B\bar{C}} \cdot \overline{\bar{A}BC} \cdot \overline{A\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{A\bar{B}C}$$

$$= (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$

$$= M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 = \Pi M(1,2,3,4,5)$$

最大项之积

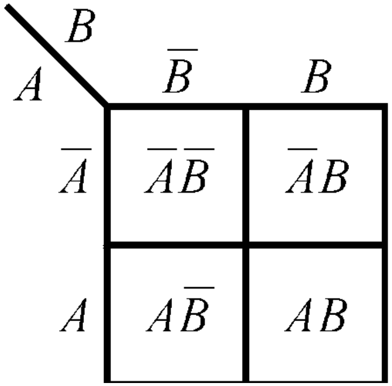
1.5.3 逻辑函数的卡诺图法化简

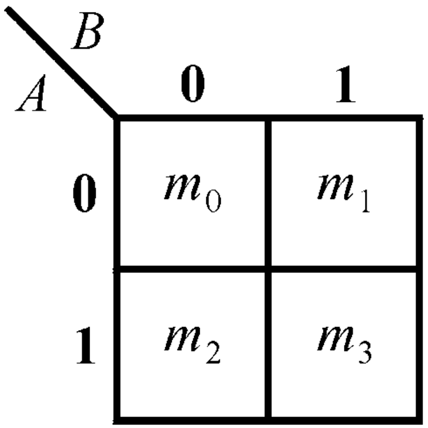
一、卡诺图：

用方格图来描述逻辑函数，由于该方法由卡诺首先提出，所以把方格图称为卡诺图。

- 它由2^n个小方块组成的方块图组成。$n \geq 2$
- 每个小方块代表一个最小项。
- 而且相邻二个小方块所代表的二个最小项仅差一个变 量不同，其它相同。(逻辑上称相邻性)

二变量卡诺图





- 它由2^n个小方块组成的方块图组成。 $n \geq 2$
- 每个小方块代表一个最小项。
- 而且相邻二个小方块所代表的二个最小项仅差一个变 量不同，其它相同。(逻辑上称相邻性)

三变量卡诺图

$A \backslash BC$	**00**	**01**	**11**	**10**
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- 它由2^n个小方块组成的方块图组成。 $n \geq 2$
- 每个小方块代表一个最小项。
- 而且相邻二个小方块所代表的二个最小项仅差一个变 量不同，其它相同。(逻辑上称相邻性)

四变量卡诺图

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

五变量卡诺图

$AB \backslash CDE$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

二、卡诺图表示逻辑函数

将一个表达式用标准的“与-或”表达式(最小项之和式)表示后，根据式中的最小项，在卡诺图的对应小方块中填上该最小项的值“1”后，便成了该函数的卡诺图了。

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

例： 将函数 $L\ (A,B,C)=AC+BC$ 用卡诺图表示出来。

解： 将函数化成最小项之和式：

$$L=f(A,B,C)=AC+BC$$

$$=\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC$$

画出三变量卡诺图，将三个最小项相应的小方格中填“1”,其它填“0”即可。

L: A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0

表示函数的值为1或0

例 将下列函数用卡诺图表示

$$L = f(A,B,C,D) = \overline{B}C + BCD + AC\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$$

L

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

注意：4变量的函数时，2个变量的一个与项占据4个方格，3变量与项占2个方格项，1个变量的与项应该占据8个小方格。

三、用卡诺图化简逻辑函数

卡诺图化简逻辑函数的依据是利用卡诺图中相邻方块所代表的最小项**相邻性**，用画包围圈的 方法把相邻的小方块合并成一个大方块，**消去变量**。

以四变量卡诺图为例，

m_0与m_1结合(画包围圈)，则

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

m_0与m_4结合(画包围圈)，则

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}=\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

m_1与m_3结合(画包围圈)，则

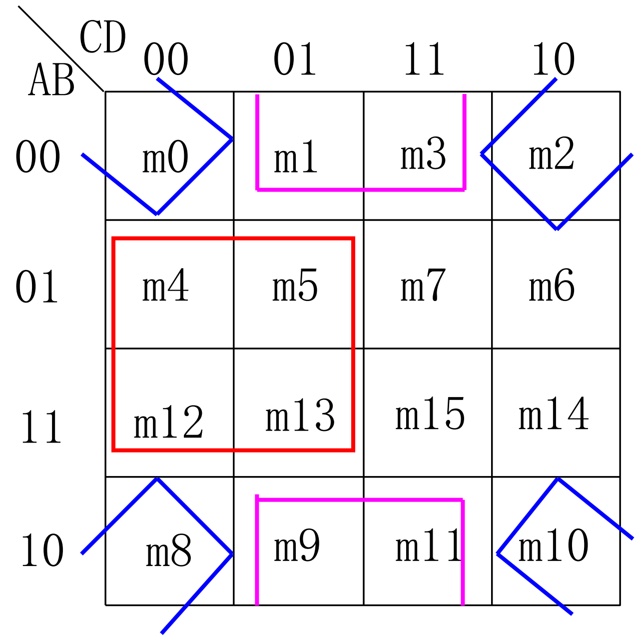
$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{B}CD=\overline{A}\,\overline{B}D$$

m_0与m_2结合(画包围圈)，则 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	m0	m1	m3	m2
01	m4	m5	m7	m6
11	m12	m13	m15	m14
10	m8	m9	m11	m10

$m_4m_5m_{12}m_{13}$结合，

$$m_4+m_5+m_{12}+m_{13}=B\overline{C}$$



$m_1m_3m_9m_{11}$结合，

$$m_1+m_3+m_9+m_{11}=\overline{B}D$$

$m_0m_2m_8m_{10}$结合，

$$m_0+m_2+m_8+m_{10}=\overline{B}\,\overline{D}$$

四变量全部十六个最小项包围在一起，结合成一项，其函数值为1。

结论：

- 包围小方格结合最小项时，其结果是消去包围圈中不同的变量，保留相同的变量。
- 画包围圈应将**2^n**个相邻小方块合并成一个大方块进行，得到的“与”项将消去**n**个变量。

【例】

用卡诺图化简函数

$$Z_1(A,B,C,D)=\sum m(1,3,4,5,6,7,9,12,14,15)$$

解： 画出四变量卡诺图，画包围圈后得到四项化简后的“与”项。

Z

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

$$Z_1(A,B,C,D)=$$

$$B\overline{D}+BC+\overline{A}D+\overline{B}\,\overline{C}D$$

【例】

用卡诺图化简函数

$$Z_2(A,B,C,D)=\bar{B}C+BCD+AC\bar{D}+\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{D}$$

解：画出四变量卡诺图，结合最小项画包围圈。

Z

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

$$Z_2(A,B,C,D)$$

$$=AC+CD+\bar{B}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}$$

例 用卡诺图将下列函数化成最简与或表达式。

$$L = f(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}BC + \sum(7,10,13,14,15)$$

解：

Z

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	1

$$L = f(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}CD + ABD + AC\overline{D}$$

例　用卡诺图将下列函数化成最简与或表达式。

$$L = f(A,B,C,D) = ABC + ABD + A\overline{C}D + \overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}C + \overline{A}C\overline{D}$$

解：

Z

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$L = f(A,B,C,D) = A + \overline{D}$$

【例】

求Z (A， B， C)=A$\bar{B}$+BC+AC　的最简与-或表达式、最简与非-与非表达式、最简或与表达式。

解： 画出三变量卡诺图。

Z

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

包围“1”得原函数：

$$Z(A,B,C)=A\bar{B}+BC$$

利用反演规则，得最简与非-与非表达式：

$$Z(A,B,C)=\overline{\overline{A\bar{B}+BC}}=\overline{\overline{A\bar{B}}\cdot\overline{BC}}$$

包围“0”得反函数：$\bar{Z}(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}+B\bar{C}$

利用反演规则，得最简或与表达式：

$$Z(A,B,C)=\overline{\bar{A}\bar{B}+B\bar{C}}=(A+B)(\bar{B}+C)$$

➢卡诺图化简时的一般原则和规律

- 包围圈越大，消去变量越多，但只能对2^n个相邻小方块实施包围。
- 小方块可以被重复包围(利用的是重叠律)，但每一个包围圈至少应有一个小方块未曾被包围过。
- 包围卡诺图中“1”的小方块，得到原函数的最简“与-或”表达式，进而可得到最简的“与非-与非”表达式，可全部用“与非”门实现。
- 包围卡诺图中“0”的相邻小方块，得到最简的“与-或非”表达式，进而可得到“或-与”表达式，“或非-或非”表达式，可全部用“或-非”门组建电路。

四、具有约束条件的逻辑函数化简

在许多逻辑问题中，逻辑变量与逻辑结果之间存在着某种限制、制约和约束的关系。如十字路口交通信号控制灯和汽车通行之间的关系，红、绿、黄三只灯中不允许同时有二只或二只以上的灯亮。

令灯亮为“1”，暗 为“0”，机动车Z通行为“0”，停止为“1”。

A	B	C	Z	A	B	C	Z
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	×
0	1	0	0	1	1	0	×
0	1	1	×	1	1	1	×

其中$\bar{A}BC$、$A\bar{B}C$、$AB\bar{C}$、ABC 组合是不允许出现的，这些项的取值与函数的结果无关。所以，这些项称为无关项、约束项或任意项。

➢ 具有约束条件的逻辑函数的表示方法

方法1：

$$\begin{cases} Z = f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} \\ \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC = 0 \end{cases}$$

A	B	C	Z	A	B	C	Z
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	×
0	1	0	0	1	1	0	×
0	1	1	×	1	1	1	×

方法2：

$$Z=\sum m(1,4)+\sum d(3,5,6,7)$$

➢ 具有约束条件的逻辑函数化简

在具有约束条件的逻辑函数化简中，应当充分**利用约束项**。为使化简后函数最简，可把约束项作“1”处理，也可作“0”处理。

【例】

化简具有约束项的逻辑函数为最简的“与-或”表达式：

$Z=f(A,B,C,D)=\sum m(2,3,4,5,9,10,12,15)+\sum d(0,1,6,11,13)$

解： 画出四变量卡诺图，约束项代表的小方块用“×”表示。利用了m_{13}和m_{11}两个约束项后，得到最简的“与-或”式：

Z

AB \ CD	00	01	11	10
00	×	×	1	1
01	1	1	0	×
11	1	×	1	0
10	0	1	×	1

$$Z=B\overline{C}+\overline{B}C+AD$$

显然，这是将约束项m_{11}、m_{13}当作“1”，而m_0、m_1、m_6当作“0”处理了。