预习情况

- **42**人已完成；**38**人正在看；**5**人未完成
- **1**）**38**人正确，**17**人错误
- **2**）**40**人正确，**13**人错误
- **3**）（答案写反了）**36**人正确，**17**人错误

- **48**人完成；**4**人正在看
- **1**）**36**人正确；**16**人错误
- **3**）**42**人正确；**10**人错误

第5章 线性动态电路的正弦稳态分析

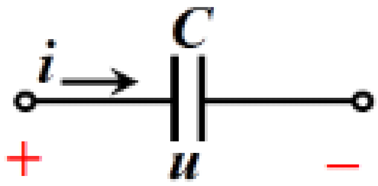
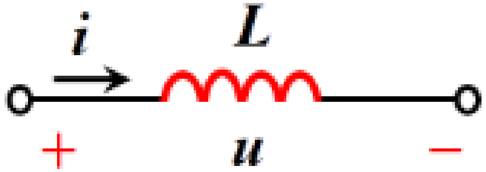
5.1 正弦交流电路的相量分析法

5.2 谐振

5.3 互感

5.4 三相交流电路

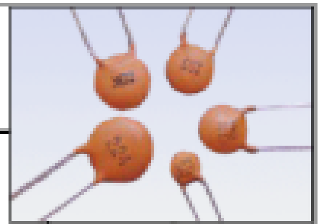
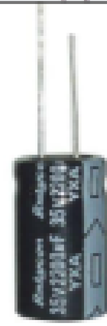
电容元件与电感元件

	电容 C	电感 L
变量	电压 u； 电荷 q	电流 i； 磁链 Ψ
电路符号		
元件特性	$q = Cu$	$\Psi = Li$
伏安特性	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
功率能量	$W_C = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{1}{2C}q^2$	$W_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2L}\Psi^2$

(1) 元件方程是同一类型；动态元件、记忆功能

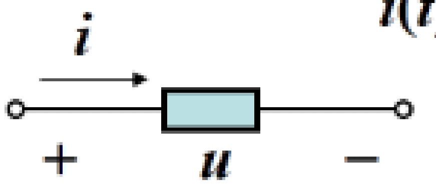
(2) C 和 L 称为对偶元件，Ψ、q 等称为对偶元素

(3) C (L)串并联公式

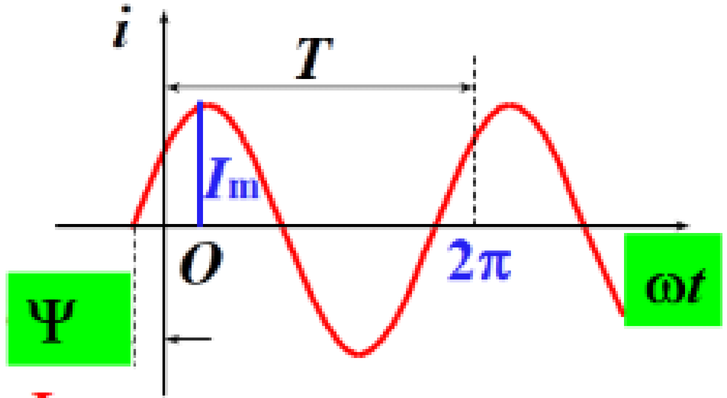




5.1.1 正弦量和相量

一、正弦量的三要素



$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi)$$



(1) 幅值 (*amplitude*) (振幅、 最大值) I_m

(2) 角频率(*angular frequency*) ω

$$\omega=\frac{\mathrm{d}(\omega t+\psi)}{\mathrm{d}t} \qquad \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

单位： rad/s

(3) 初相位(*initial phase angle*) ψ

$(\omega t+\psi)$ 相位 $i(t)\big|_{t=0}=I_m\sin\psi$

初相位与时间起点有关，一般 $|\psi|\le\pi$

单选题

已知某正弦波初相位角为-30⁰，问，该正弦波的起点在时间轴的什么位置？

A 正半区域

B 负半区域

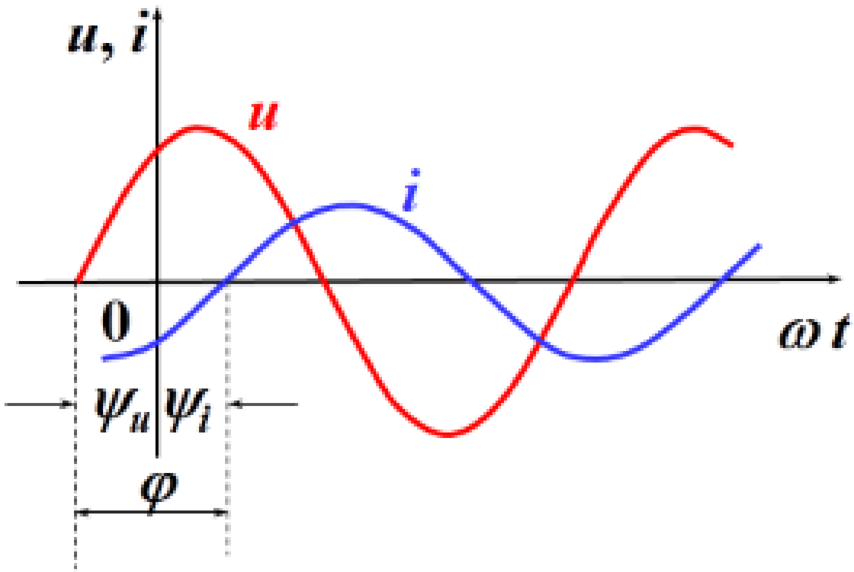
二、同频率正弦量的相位差 (*phase difference*)

设 $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$，$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$

相位差 $\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i$

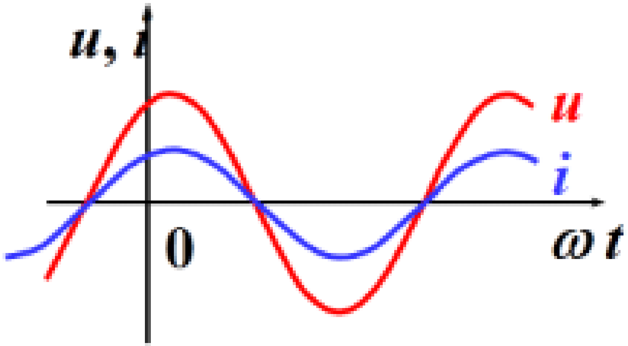
$\varphi>0$， u 领先(超前)i ，或i 落后(滞后) u

$\varphi<0$， i 领先(超前) u，或u 落后(滞后) i

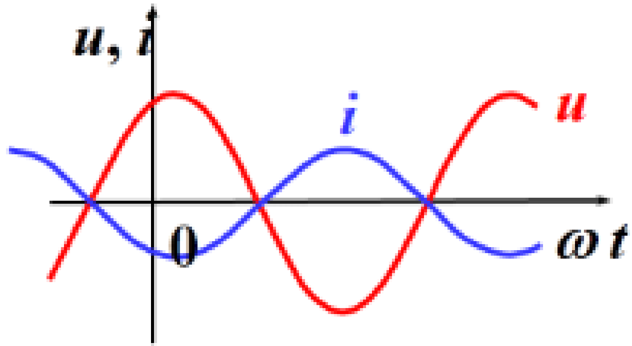


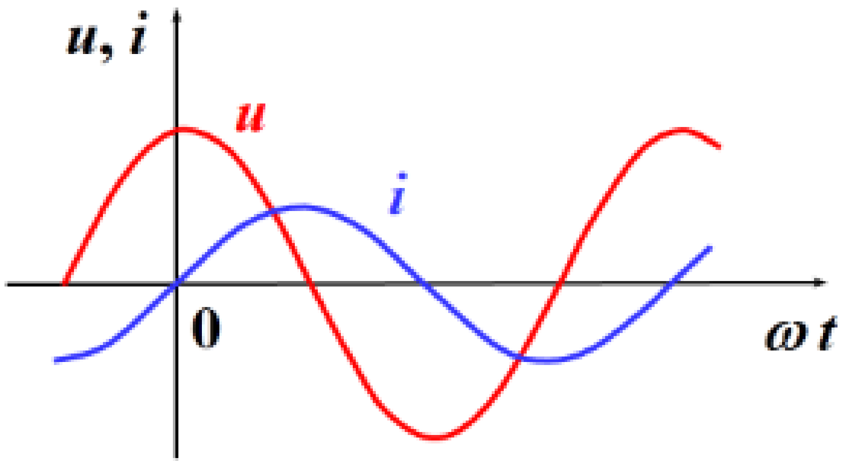
特殊相位关系：

$\varphi = 0$， 同相：



$\varphi = \pm\pi\ (\pm 180^\circ)$，反相：





$\varphi = 90^\circ$

u 领先 i 90°

或 i 落后 u 90°

不说 u 落后 i 270°

或 i 领先 u 270°

规定： $|\varphi| \le \pi\ (180^\circ)$

单选题

说明下列两个正弦量的相位关系

$$i_1 = 100\sin(\omega t - 45°)\text{A}$$

$$i_2 = 50\cos(\omega t + 10°)\text{A}$$

A i_1滞后i_2 55^0

B i_1超前i_2 55^0

C i_1滞后i_2 145^0

D i_1超前i_2 35^0

例：说明下列两个正弦量的相位关系

$$i_1 = 100\sin(\omega t - 45°)\mathrm{A}$$

$$i_2 = 50\cos(\omega t + 10°)\mathrm{A}$$

下列两个正弦量的相位关系又如何？

$$u_1 = 100\sin(314t - 45°)V$$

$$u_2 = 50\sin(628t - 45°)V$$

三、有效值(*effective value*)

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其大小工程上采用有效值来表示。

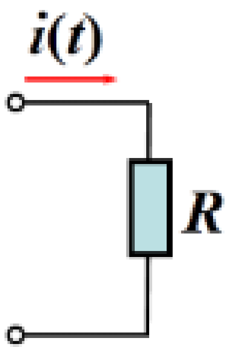
1. 周期电流、电压有效值(*effective value*)定义

电流有效值定义为：

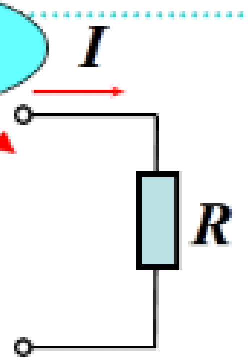
$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

有效值也称方均根值(*root-mean-square*，简记为 rms。)

热效应相当



$$W_1 = \int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$$



$$W_2 = I^2RT$$

$$W_1 = W_2$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

同理

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

2. 正弦电流、电压的有效值

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

设 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t}$$

$$\because \int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t=\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\,\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$\therefore\ I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$$

$$I_m=\sqrt{2}I$$

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$$

同理： $U=\dfrac{1}{\sqrt{2}}U_m$ 或 $U_m=\sqrt{2}U$

*注意 区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

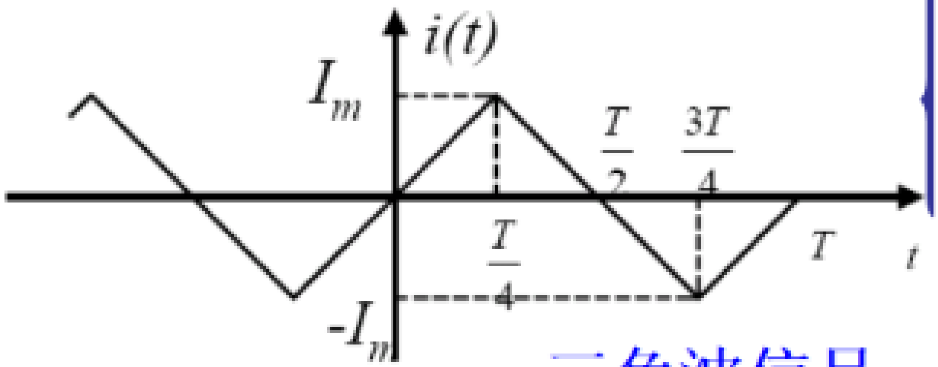
$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$$

工程上说的绝缘水平、耐压值指的是最大值。

设备铭牌额定值、电网的电压等级指得是有效值。如标准电压**220*V***，也是指供电电压的有效值。

测量中，电磁式交流电压、电流表读数均为有效值。

问题与讨论1



$$
\begin{cases}
i = \dfrac{I_m}{T/4} t & 0 \leqslant t \leqslant T/4 \\[2ex]
i = -\dfrac{I_m}{T/4}\left(t - \dfrac{T}{2}\right) & T/4 \leqslant t \leqslant T/2
\end{cases}
$$

三角波信号，其峰值与有效值间关系?

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{T}\left\{\int_0^{T/4}\left(\frac{I_m}{T/4}t\right)^2 dt + \int_{T/4}^{T/2}\left[-\frac{I_m}{T/4}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]^2 dt\right\}}$$

$$= \sqrt{I_m^2/3} = I_m/\sqrt{3} = 0.577 I_m$$

单选题

下述描述是否正确：

信号$u(t)$的有效值定义为 $U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$

A 正确

B 不正确

单选题

正方波的有效值U_{RMS}与幅值U_m之间的关系是

A 幅值为有效值的**1.414**倍

B $U_m<1.414U_{RMS}$

C $U_m>1.414U_{RMS}$

单选题

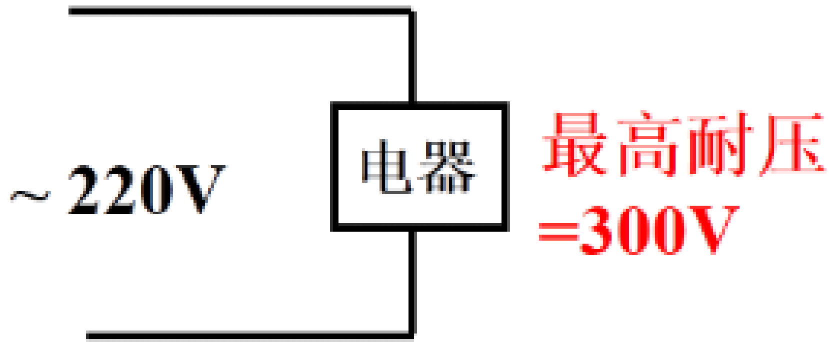
若购得一台耐压为 300V 的电器，是否可用于 220V 的线路上?

A 可以用

B 不可以用

问题与讨论2

若购得一台耐压为 300V 的电器，是否可用于 220V 的线路上?

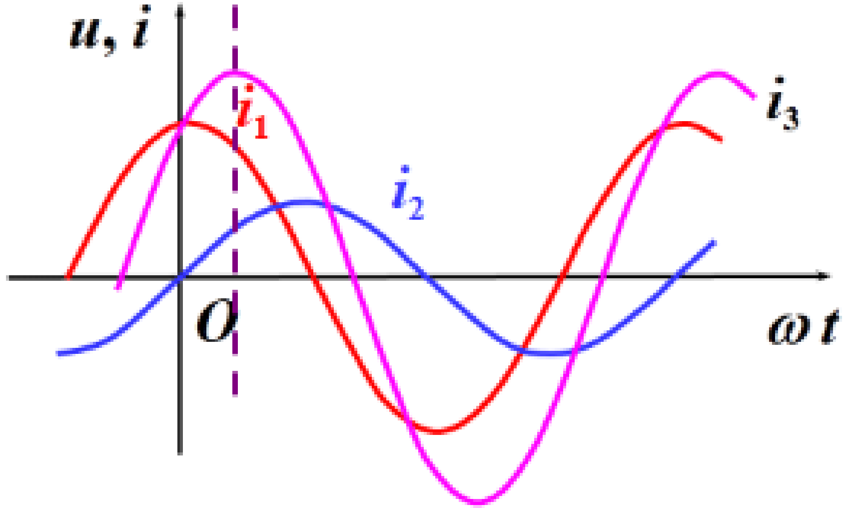


$$\text{电源电压}\begin{cases}\text{有效值 } U = 220\text{V} \\ \text{最大值 } U_m = \sqrt{2}\cdot 220\text{V} = 311\text{V}\end{cases}$$

电器最高耐压低于电源电压的最大值，所以不能用。

四、正弦量的相量表示

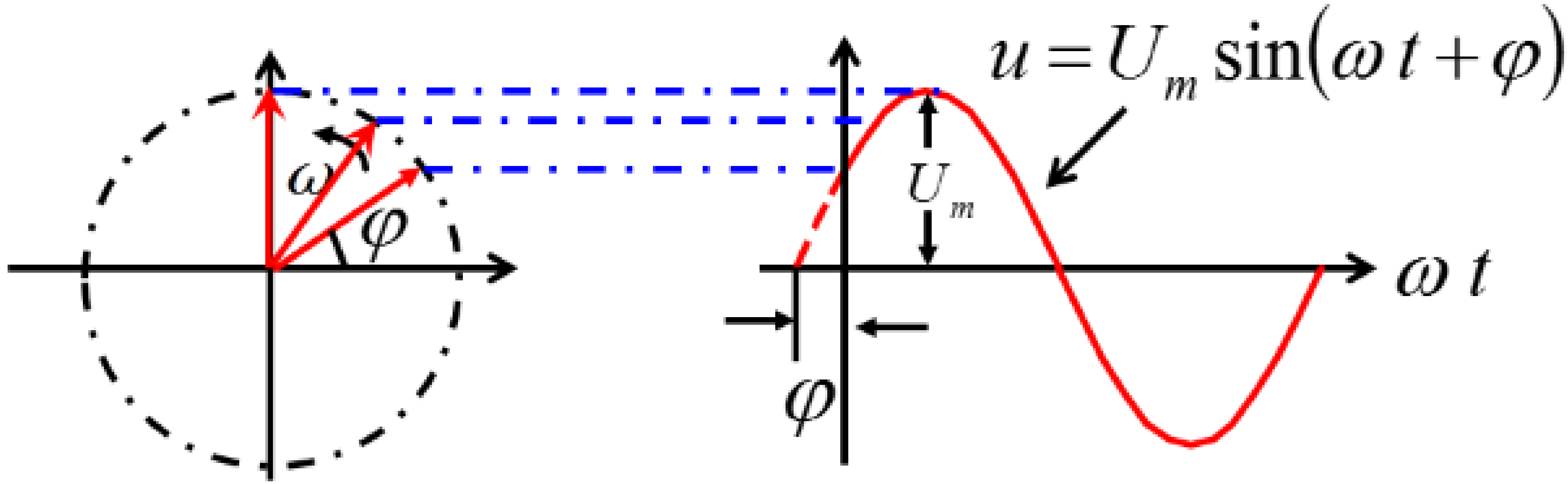
两个正弦量 $i_1 = \sqrt{2}\, I_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ $i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \sin(\omega t + \psi_2)$



无论是波形图逐点相加，或用三角函数做都很繁。

正弦波的相量表示法

一个正弦量的瞬时值可以用一个旋转的有向线段在纵轴上的投影值来表示。



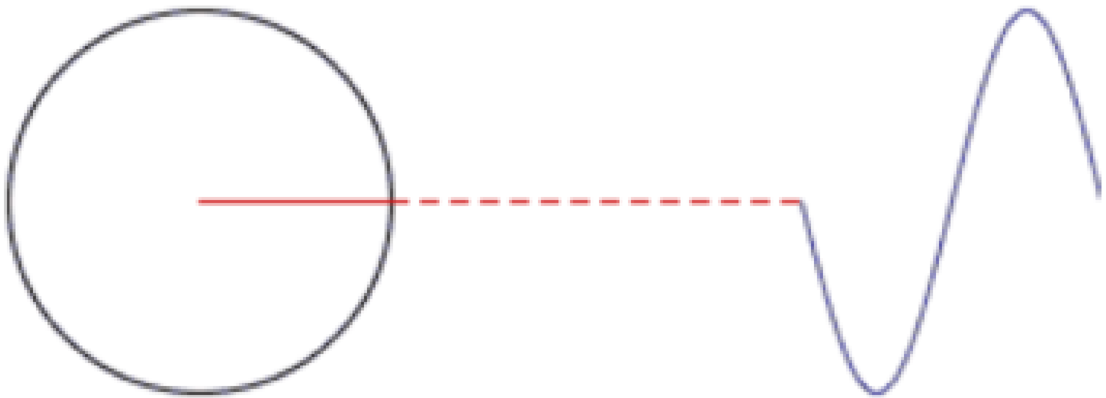
矢量长度 $= U_m$

$$u = \mathrm{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = \mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U} e^{j\omega t})$$

矢量与横轴夹角 = 初相位 φ

矢量以角速度 ω 按逆时针方向旋转

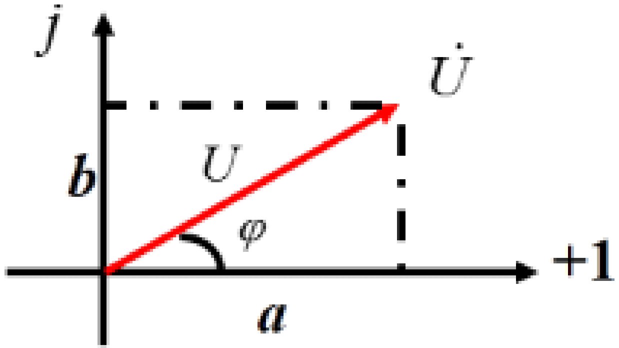
$u(t) \longleftrightarrow \dot{U}$



2. 相量的复数表示

$$u=\mathrm{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t})=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t})$$

将相量 $\dot{U}$ 放到复平面上，可如下表示：



$$U=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\varphi=tg^{-1}\frac{b}{a}$$

欧拉公式
$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}\\[2ex]\sin\varphi=\dfrac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}&=a+jb\\&=U(\cos\varphi+j\sin\varphi)\end{aligned}\right\}\text{代数式}$$

$$=Ue^{j\varphi}\quad\text{- - - - -}\quad\text{指数式}$$

$$\Rightarrow U\angle\varphi\quad\text{- - - - -}\quad\text{极坐标形式}$$

3. 相量运算与相量图(*phasor diagram*)

例. $u_1(t)=6\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\ \text{V}$

$u_2(t)=4\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\ \text{V}$

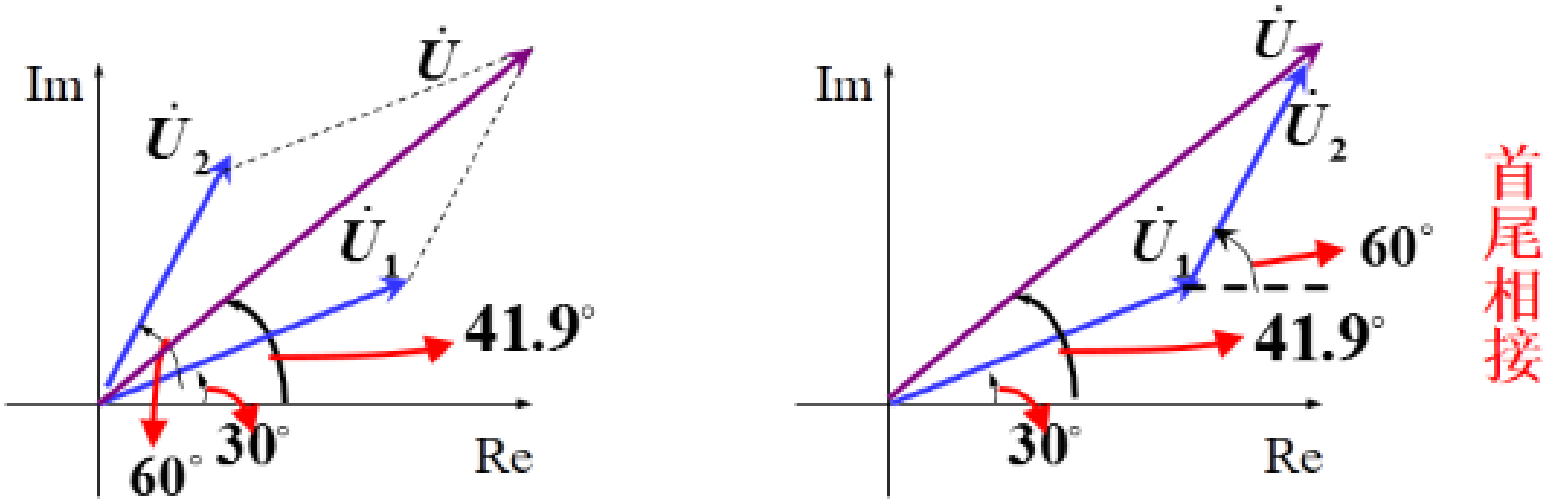
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V} \\ \dot{U}_2=4\angle 60^\circ\ \text{V} \end{cases}$$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ=5.19+j3+2+j3.46$$

$$=7.19+j6.46=9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.64\sqrt{2}\sin(314t+41.9^\circ)\ \text{V}$$

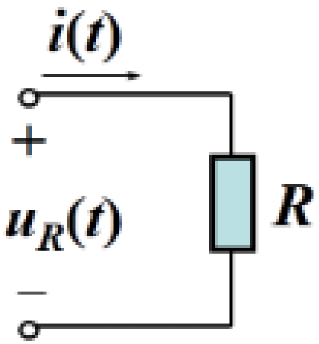
同频正弦量的加、减运算可借助相量图进行。相量图在正弦稳态分析中有重要作用，尤其适用于定性分析。



5.1.2 用相量法分析正弦稳态电路

一、元件特性的相量形式

1. 电阻



已知 $i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$

则 $u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}RI\sin(\omega t+\psi)$

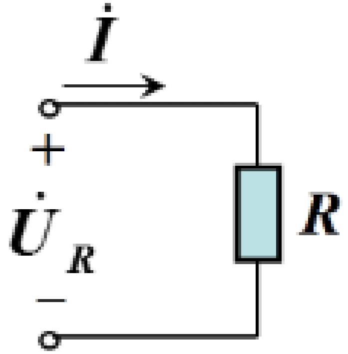
相量形式：

$\dot{I}=I\angle\psi$ 有效值关系：$U_R=RI$

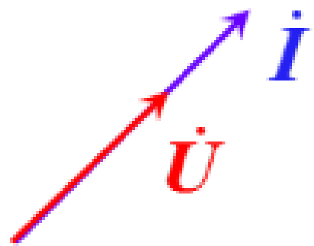
$\dot{U}_R=RI\angle\psi$ 相位关系：u，i 同相

相量关系

$\dot{U}_R=R\dot{I}$

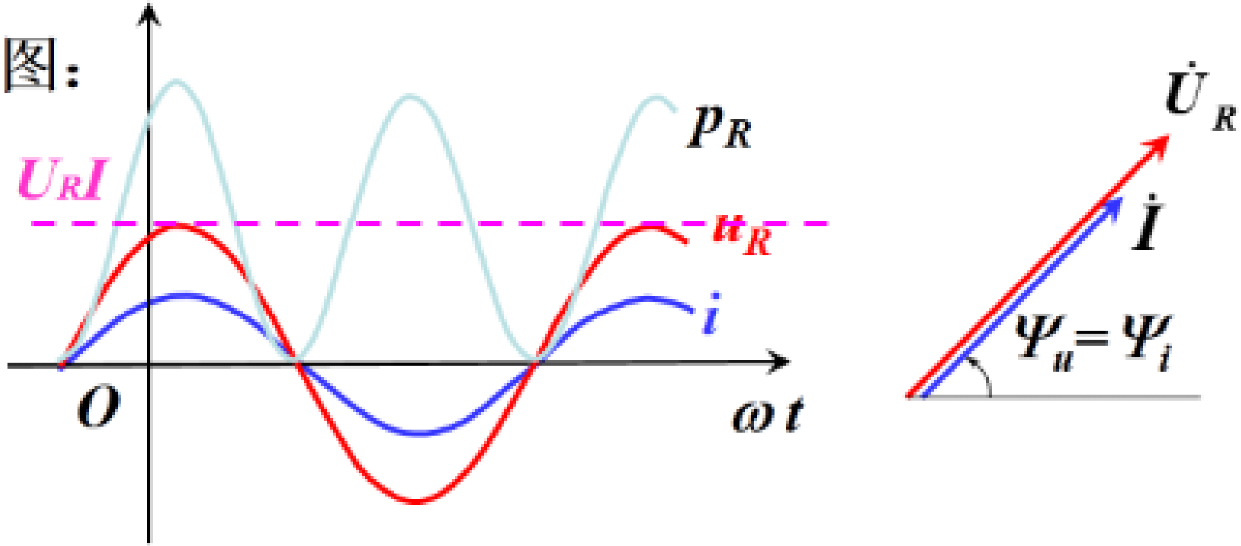


相量模型



相量图

波形图及相量图：



瞬时功率： $p_R = u_R i$

$$= \sqrt{2}U_R \sqrt{2}I \sin^2(\omega t + \Psi_i)$$

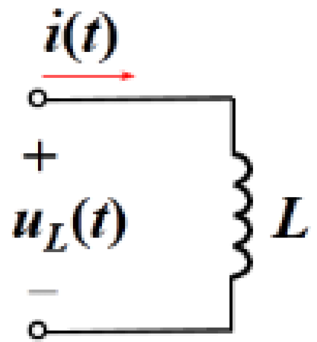
$$= U_R I[1 - \cos 2(\omega t + \Psi_i)]$$

瞬时功率以2ω交变。但始终大于零，也就是平均值大于零。表明电阻始终是吸收（消耗）功率。

2. 电感

时域形式：$u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$

1）相量关系：　已知 $i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi_i)$



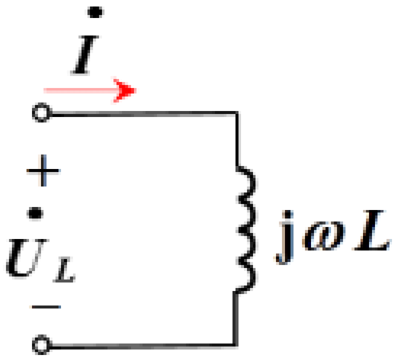
则 $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\omega L I\cos(\omega t + \Psi_i)$

$= \sqrt{2}\omega L I\sin(\omega t + \Psi_i + \dfrac{\pi}{2})$

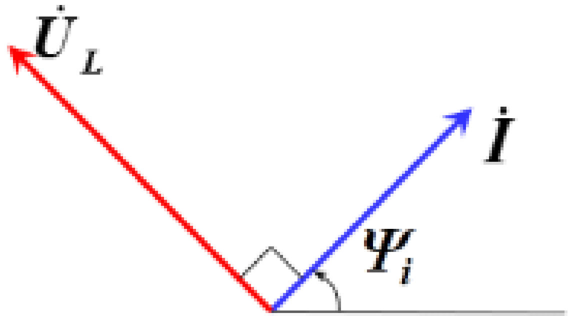
相量形式：

$\dot{I} = I\angle\Psi_i$

$\dot{U}_L = \omega L\ I\angle\Psi_i + \dfrac{\pi}{2}$



相量模型



相量关系：

$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$

有效值关系：　$U = \omega L I$

相位关系：　$\Psi_u = \Psi_i + 90°$

（u 超前 i 90°）

2）感抗和感纳:

$X_L=\omega L=2\pi fL$，称为感抗，单位为Ω (欧姆)

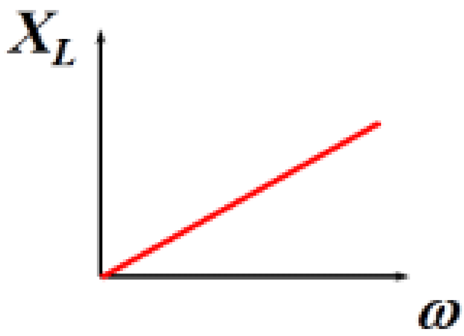
$BL=1/\omega L = 1/2\pi fL$， 感纳，单位为 S (同电导)

$$\dot{U} = j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I} \qquad \dot{I} = \frac{1}{j\omega L}\dot{U} = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U} = -jB_L\dot{U}$$

感抗的物理意义：

(1) 表示限制电流的能力； $U=X_L I=\omega LI= 2\pi fLI$

(2) 感抗和频率成正比；



$\omega = 0$(直流)，$X_L = 0$，短路；

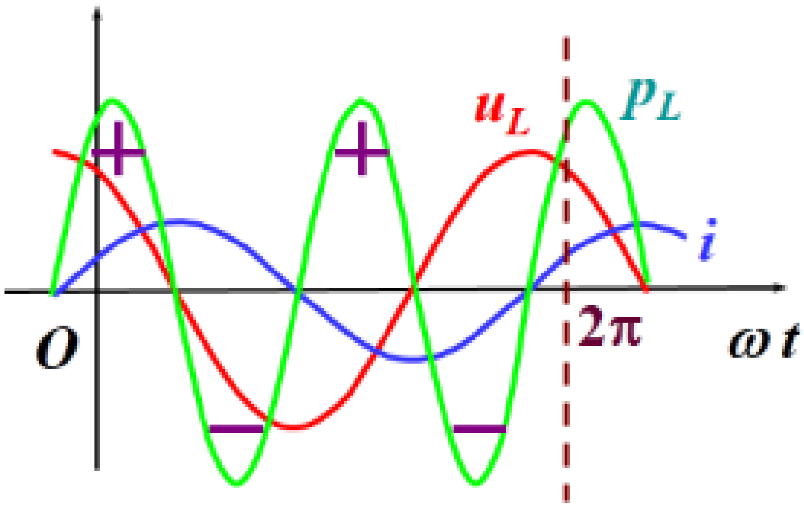
$\omega \to \infty$，$X_L \to \infty$，开路；

3）功率：

$$p_L = u_L i$$
$$= U_{Lm} I_m \sin(\omega t + \Psi_i)\cos(\omega t + \Psi_i)$$
$$= U_L I \sin 2(\omega t + \Psi_i)$$

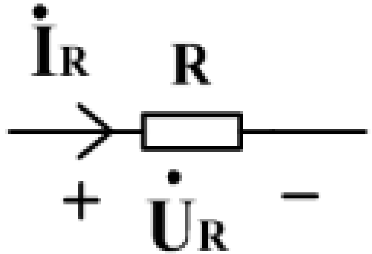
瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消。

功率交换的能力定义为无功功率$Q_L = U_L I$

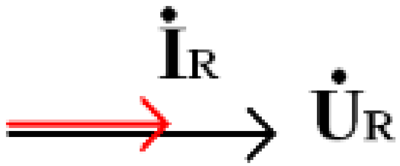


波形图

$$u_R = Ri_R$$

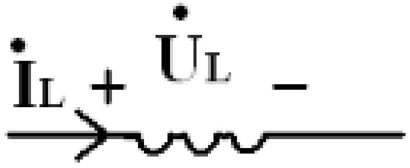


$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$



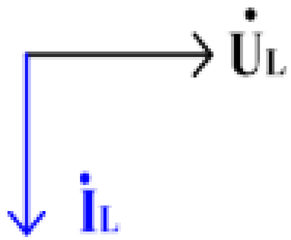
$$U_R I_R[1-\cos 2(\omega t+\Psi_i)]$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$



$j\omega L$

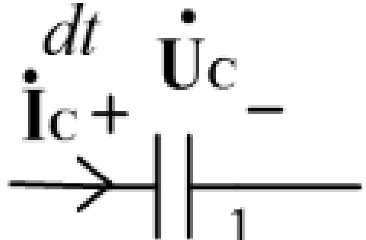
$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$$



$$U_L I_L \sin 2(\omega t+\Psi_i)$$

$$\dot{U} = Z\dot{I}$$

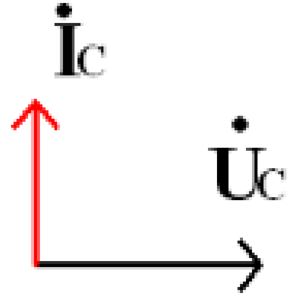
$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$



$$\frac{1}{j\omega C}$$

$$\dot{I} = j\omega C\dot{U}$$

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$



$$U_C I_C \sin 2(\omega t+\Psi_u)$$

二、基尔霍夫定律的相量形式

$$\sum i(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{U}=0$$

$$\sum_{j=1}^{N} u_j=0 \longrightarrow \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_1 e^{j\omega t}]+\ldots+\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_N e^{j\omega t}]=0$$

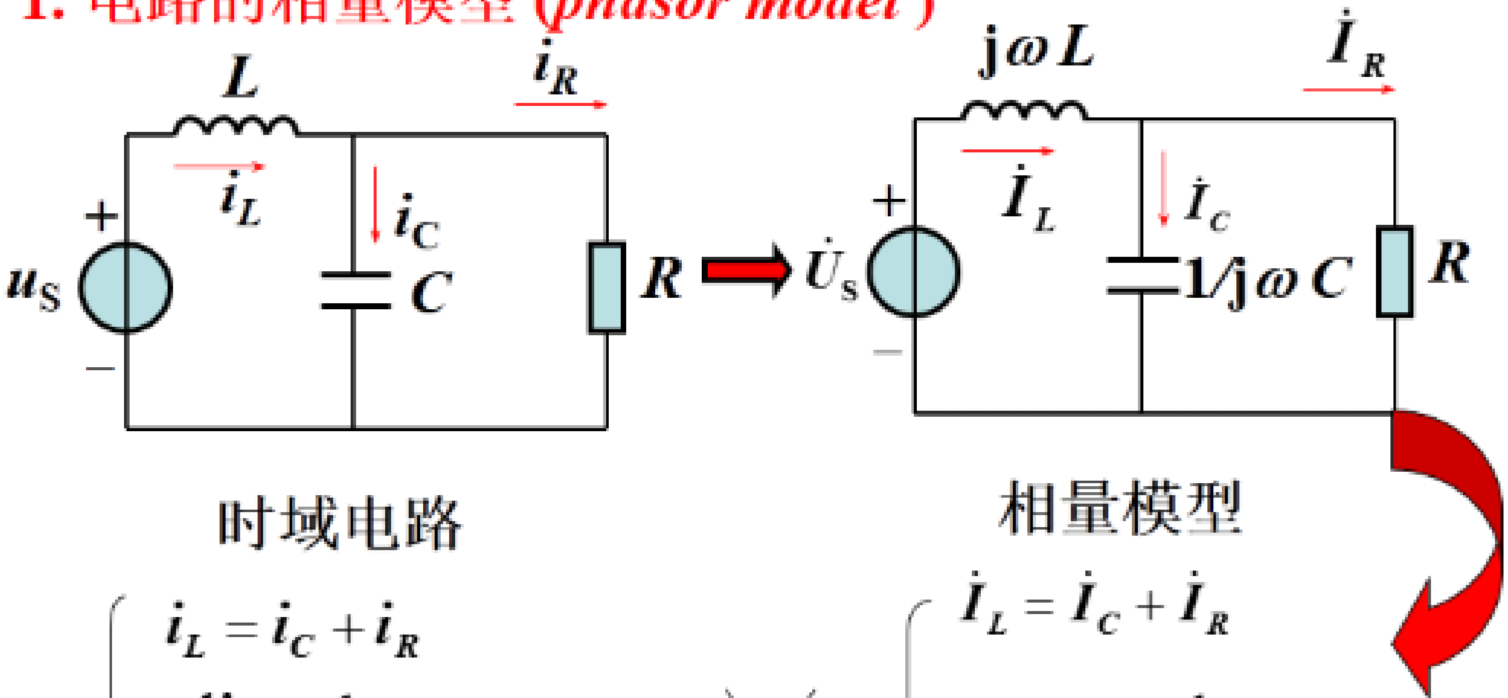
$$\longrightarrow \dot{U}_1+\dot{U}_2\ldots+\dot{U}_N=0 \longrightarrow \Sigma\dot{U}=0$$

正弦稳态电路分析方法：

在用相量表示的频域中，电路分析方法与线性电阻电路分析类似

三、电路的相量分析法

1. 电路的相量模型 (*phasor model*)



时域电路　　　　相量模型

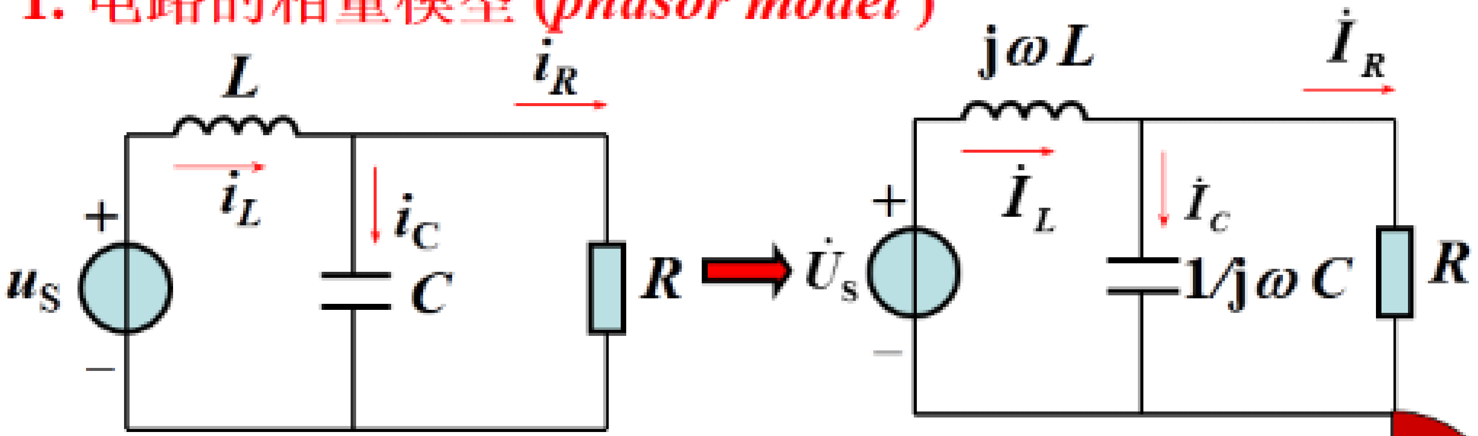
$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = u_S \\ R i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot I_L = \dot I_C + \dot I_R \\ \mathrm{j}\omega L \dot I_L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I_C = \dot U_S \\ R\dot I_R = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I_C \end{cases}$$

时域列写微分方程　　　　相量形式代数方程

三、电路的相量分析法

1. 电路的相量模型 (*phasor model*)



相量模型

用相量法分析电路的正弦稳态响应步骤

① 画出电路的相量模型

$R, L, C \rightarrow$ 复阻抗

$i, u \rightarrow \dot{U}, \dot{I}$

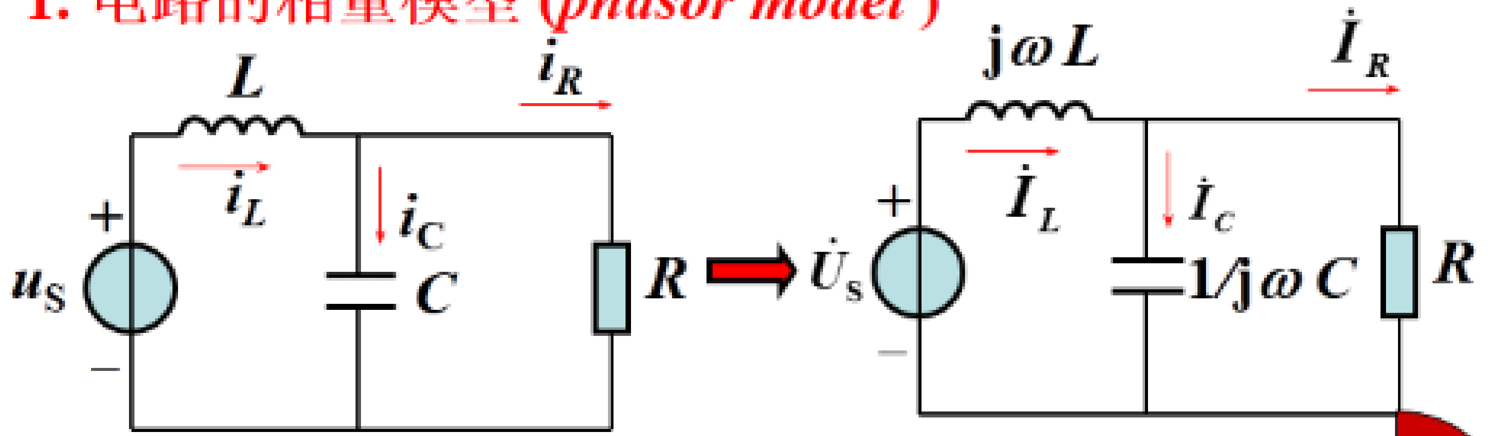
② 列相量代数方程

$$\begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\ \mathrm{j}\omega L\dot{I}_L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C = \dot{U}_S \\ R\dot{I}_R = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C \end{cases}$$

相量形式代数方程

三、电路的相量分析法

1. 电路的相量模型 (*phasor model*)



时域电路

相量模型

用相量法分析电路的正弦稳态响应步骤

① 画出电路的相量模型

$R, L, C \to$ 复阻抗

$i, u \to \dot{I}, \dot{U}$

② 列相量代数方程

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = u_S \\ R i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t \end{cases}$$

时域列写微分方程

$$\begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\ \mathrm{j}\omega L \dot{I}_L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C = \dot{U}_S \\ R\dot{I}_R = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C \end{cases}$$

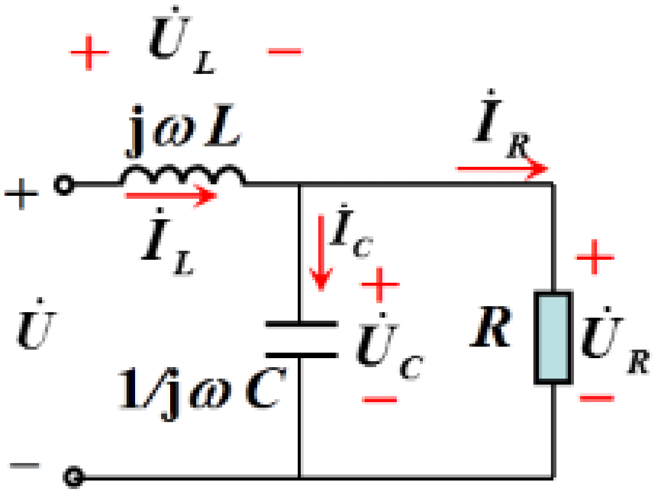
相量形式代数方程

2. 相量图(*phasor diagram*)

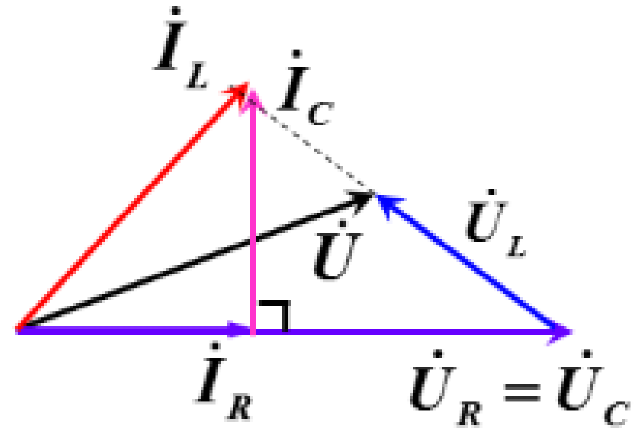
（1） 同频率的正弦量才能表示在同一个相量图中；

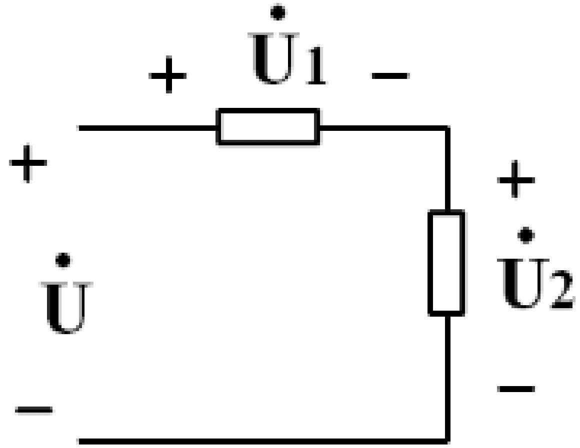
（2） 以ω角速度反时针方向旋转；

（3） 选定一个参考相量(设初相位为零)。应反映KCL、KVL



选$\dot{U}_R$为参考相量





例1：图示电路中，已知 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ \text{V}$

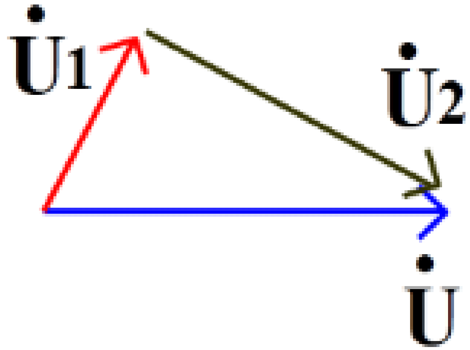
$\dot{U}_1 = 100\angle 60^\circ \text{V}$ ，求 $\dot{U}_2$ 的值。

解：由基尔霍夫电压定律，得

$$\dot{U} = U_1 + \dot{U}_2$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_1 = 220\angle 0^\circ \text{V} - 100\angle 60^\circ \text{V}$$

$$= 191\angle -27^\circ \text{V}$$



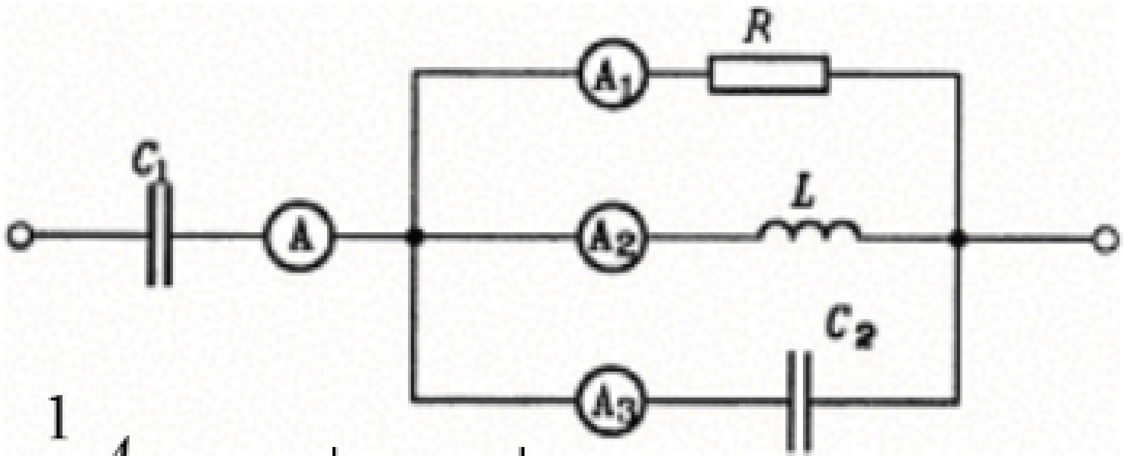
注意： $U_1 + U_2 \neq U$

电压电流相量形式满足KCL，KVL，有效值不满足KCL、KVL． 求交流电路应用相量关系计算 。

例2：正弦电流电路如图所示，图中电流表A_1读数为5A，A_2为20A，A_3为25A。

(1) 图中A的读数是多少?

(2) 如果维持第一只表A_1读数不变，而把电路的频率提高一倍，再求其它表读数。



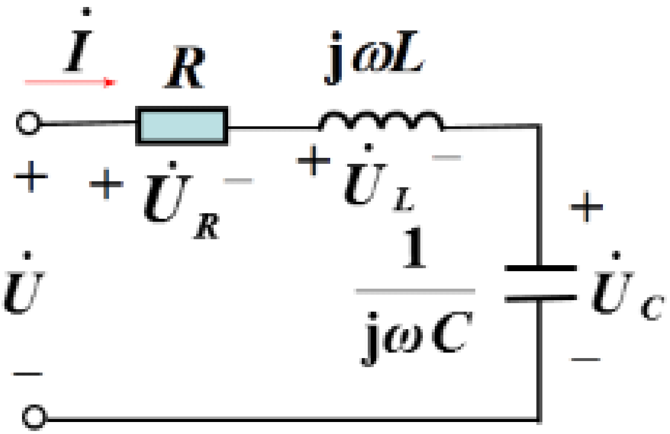
$$A=\sqrt{5^2+(25-20)^2}$$

$$A_2'=\left|\frac{\dot{U}}{j\omega' L}\right|=\left|\frac{\dot{U}}{j2\omega L}\right|=\frac{1}{2}A_2$$

$$A_3'=\left|\frac{\dot{U}}{\dfrac{1}{j\omega' C}}\right|=\left|\dot{U}j2\omega C\right|=2A_2$$

四、复阻抗和复导纳

1. 复阻抗(*complex impedance*)



复阻抗 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C}{\dot{I}}$

$$=R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

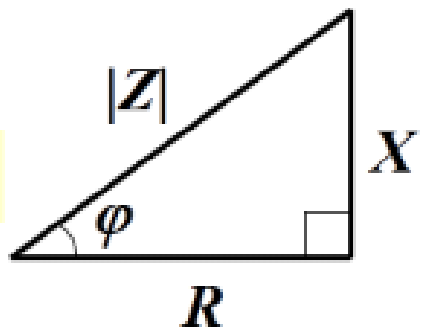
$$=R+\mathrm{j}X$$

电阻 电抗

$$Z=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\varphi$$

$|Z|=\dfrac{U}{I}$ 阻抗模 单位：Ω

$\varphi=\psi_u-\psi_i$ 阻抗角



阻抗三角形

$X=0$:阻性支路

$X>0$:感性支路

$X<0$:容性支路

具体分析一下 *RLC* 串联电路：

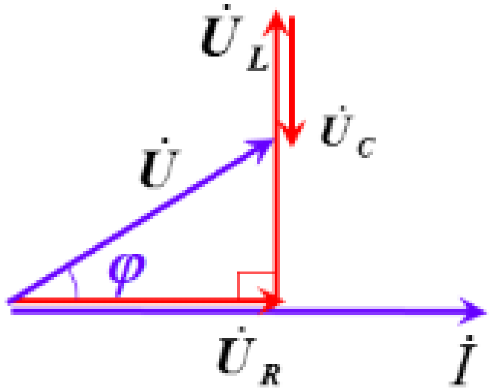
$Z=R+j(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi$

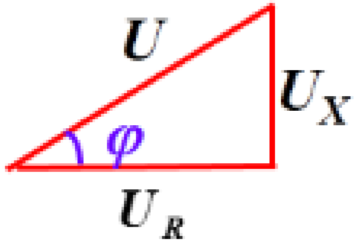
$\omega L>1/\omega C$，$X>0$， $\varphi>0$，电压领先电流，电路呈感性；

$\omega L<1/\omega C$ ，$X<0$， $\varphi<0$，电压落后电流，电路呈容性；

$\omega L=1/\omega C$ ，$X=0$， $\varphi=0$，电压与电流同相，电路呈电阻性。

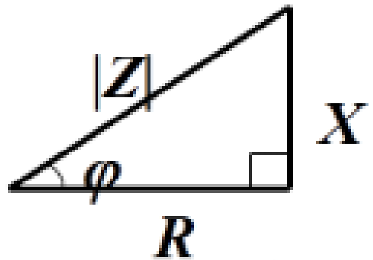
画相量图：选电流为参考向量($\omega L>1/\omega C$)





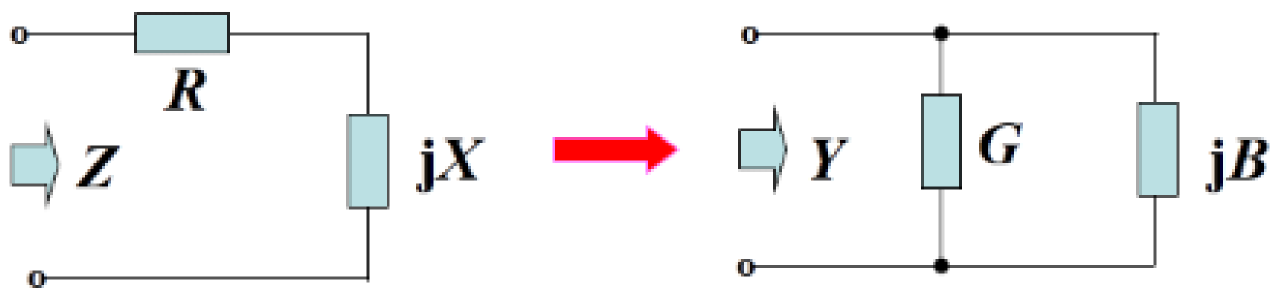
电压三角形

$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}$$



阻抗三角形

2. 复导纳以及复阻抗与复导纳的等效变换



$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi \quad \Rightarrow \quad Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi'$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\mathrm{j}X} = \frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2} = G + \mathrm{j}B$$

$$\begin{cases} |Y| = \dfrac{I}{U} & \text{导纳的模} \\ \varphi' = \psi_i - \psi_u & \text{导纳角} \end{cases}$$

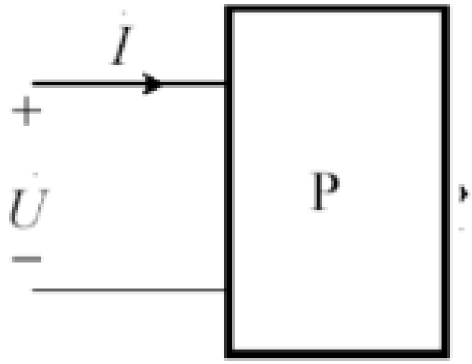
单位：S

$$\therefore \quad G = \frac{R}{R^2+X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2+X^2}$$

$$Y = \frac{1}{Z} \quad |Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad \varphi' = -\varphi$$

一般情况 $G \neq 1/R \quad B \neq 1/X$

例3： 已知无源一端口网络（不含受控源）的电压和电流为



$$u(t)=14\sin 10t \qquad i(t)=7\sin(10t-45^\circ)$$

求一端口的最简结构和元件参数

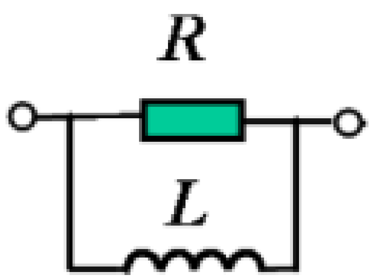
解： $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=2\angle 45^\circ$

串联结构 $R=\sqrt{2}\,\Omega \quad L=\dfrac{\sqrt{2}}{10}H$

若采用并联结构，？？？

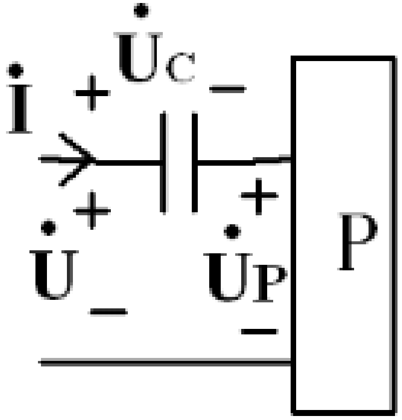
并联结构 $R=X_L=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\Omega$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=0.5\angle -45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)=G+jB$$



等效阻抗 $\dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{2}}\,j\,\dfrac{4}{\sqrt{2}}}{\dfrac{4}{\sqrt{2}}+j\dfrac{4}{\sqrt{2}}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\,\dfrac{j(1-j)}{1+1}=\sqrt{2}(1+j)$

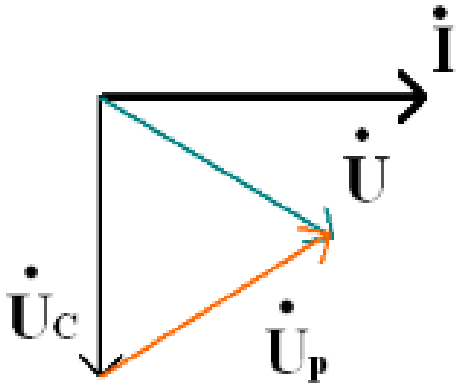
例4： 已知 $f=50\text{Hz}$，$I=2\text{A}$，$U=U_C=U_P=30\text{V}$，求C及无源网络P的串联电路参数。



解： 以 $\dot{I}$ 为参考相量，$\dot{I}=2\angle 0°$

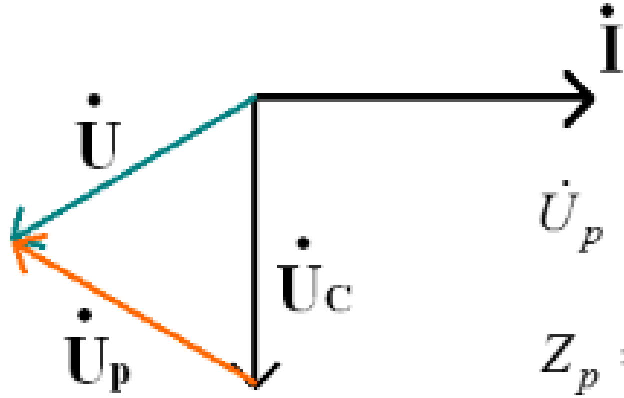
$$\dot{U}_C=30\angle -90° \quad X_C=\frac{U_C}{I}=15\Omega$$

$$C=\frac{1}{\omega X_C}=0.0667\text{F}$$



$$\dot{U}_p=30\angle 30^\circ$$

$$Z_p=\frac{30\angle 30^\circ}{2\angle 0^\circ}$$

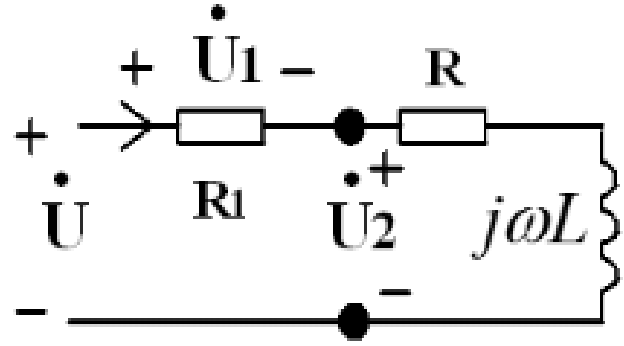


$$\dot{U}_p=30\angle 150^\circ$$

$$Z_p=\frac{30\angle 150^\circ}{2\angle 0^\circ}$$

在关联参考方向下，无源阻抗（无受控源）的阻抗角（电压和电流的相位角） $|\phi|\le 90^0$

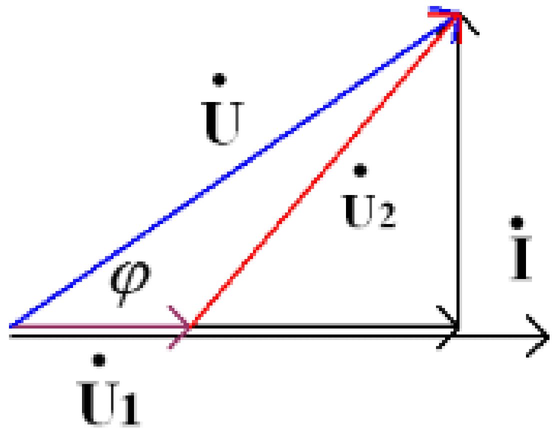
例5: 为测量一只线圈的电感和电阻，将它与电阻R_1串联后接入频率为50Hz的正弦电源，如图所示，测得外加电压 $U=200\text{V}$，电阻R_1上电压 $U_1=100\text{V}$，线圈两端电压 $U_2=124\text{V}$。已知电阻 $R_1=100\Omega$，试求线圈的电阻R与电感L的值。



解: 以电流作参考相量，分别作出电压相量如图所示。因为 $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

因此电压相量组成一个闭合三角形。

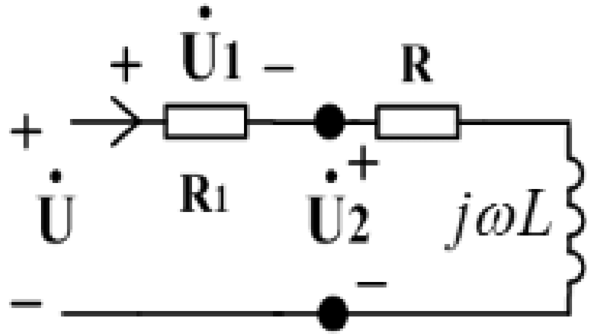
在相量图上，用余弦定理可求出φ角为：



$$\cos\varphi=\frac{U^2+U_1^2-U_2^2}{2UU_1}$$

$$=\frac{200^2+100^2-124^2}{2\times200\times100}=0.866$$

解二：



$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{I}(R_1 + R + j\omega L) \\ \dot{U}_1 = \dot{I}R_1 \\ \dot{U}_2 = \dot{I}(R + j\omega L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dfrac{\dot{U}_1}{R_1}(R_1 + R + j\omega L) \\ \dot{U}_2 = \dfrac{\dot{U}_1}{R_1}(R + j\omega L) \end{cases}$$

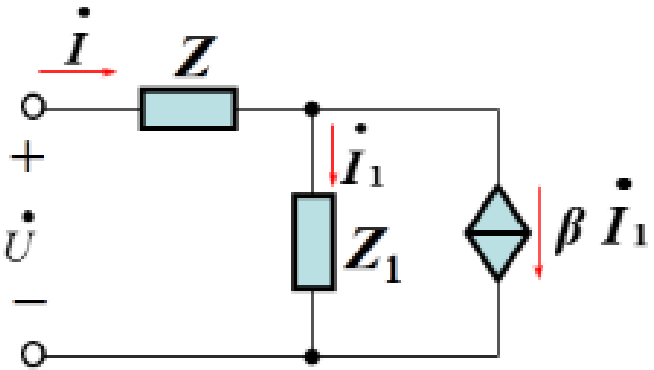
$$\begin{cases} \left(\dfrac{R_1\dot{U}}{\dot{U}_1}\right)^2 = (R_1 + R)^2 + (\omega L)^2 & (1) \\ \left(\dfrac{R_1\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right)^2 = R^2 + (\omega L)^2 & (2) \end{cases}$$

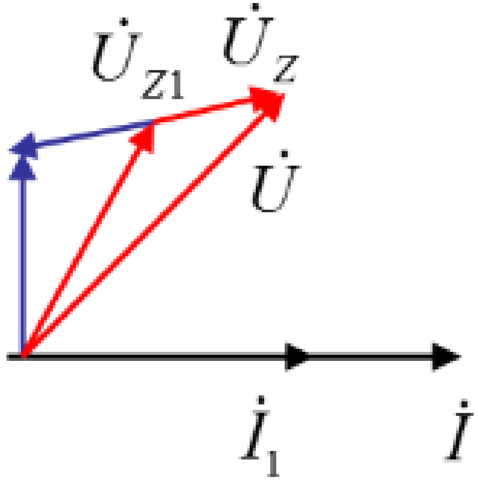
(1)－(2)可得：

R=73.12Ω……

例6: 已知 $Z=10+j50\Omega$, $Z_1=400+j1000\Omega$。

问：β等于多少时，$\dot{I}_1$和$\dot{U}$相位差90°？





解：

$$\dot{U}=\dot{I}_1Z_1+(1+\beta)\dot{I}_1Z$$

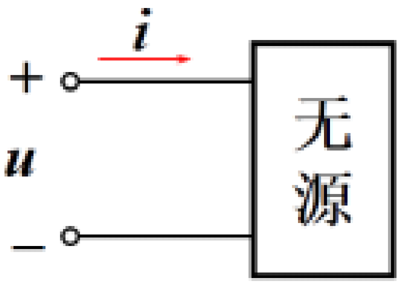
$$=(Z_1+(1+\beta)Z)\dot{I}_1$$

$$=\{[400+(1+\beta)10]+j[1000+(1+\beta)50]\}\dot{I}_1$$

$\beta=-41$ $\qquad \dfrac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1}=-j1000$ 故电流领先电压 90°.

5.1.3 正弦稳态电路的功率

无源一端口网络吸收的功率(u, i 关联)



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

φ 为u和i的相位差$\varphi=\Psi_u-\Psi_i$

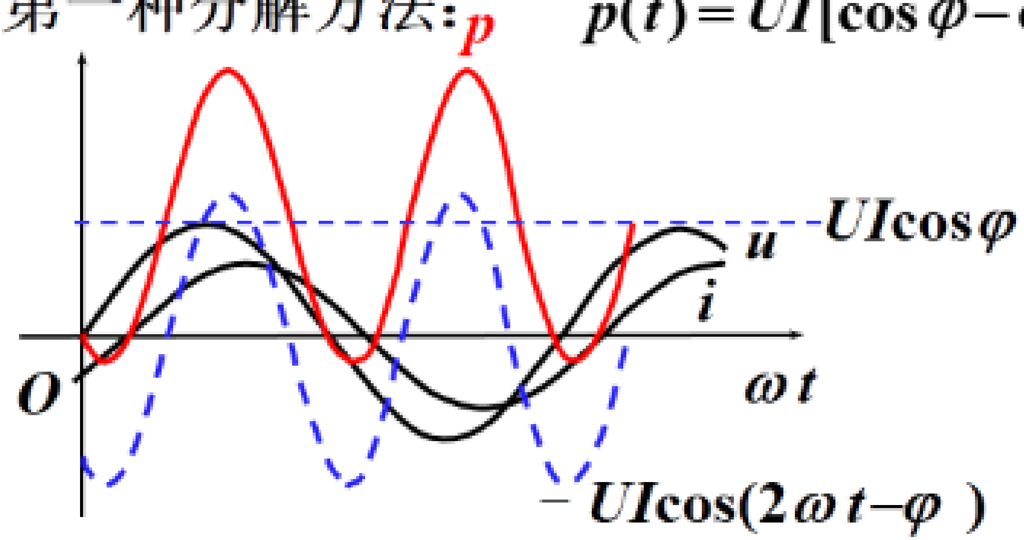
一、瞬时功率 (*instantaneous power*)

$$p(t)=ui=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]$$ 第一种分解方法;

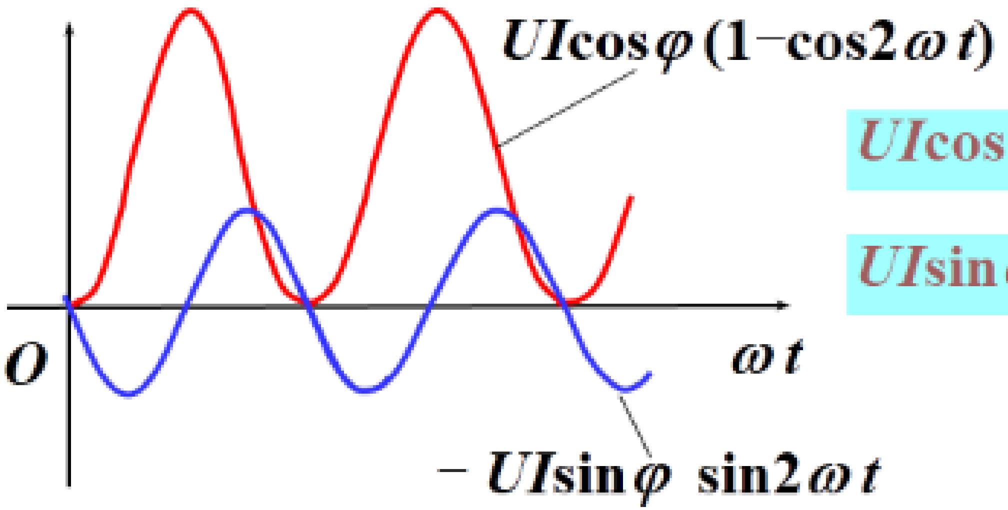
$$=UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$ 第二种分解方法。

第一种分解方法：$p(t)=UI[\cos\phi-\cos(2\omega t-\phi)]$



- p有时为正，有时为负；
- $p>0$，电路吸收功率：$p<0$，电路发出功率；

第二种分解方法：$p(t)=UI\cos\varphi(1-\cos2\omega t)-UI\sin\varphi\sin2\omega t$



平均功率（有功功率）P—W

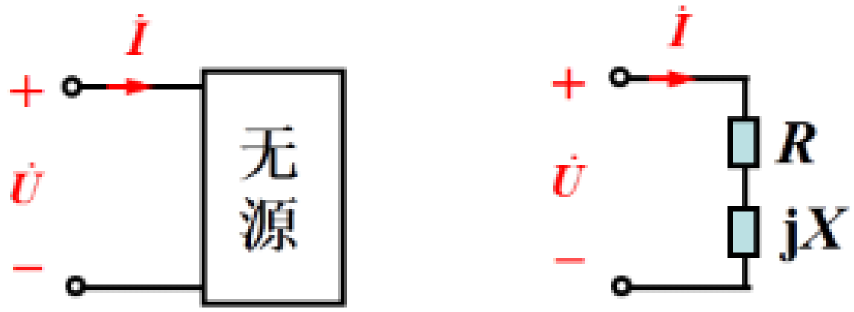
$UI\cos\varphi(1-\cos2\omega t)$为不可逆分量。

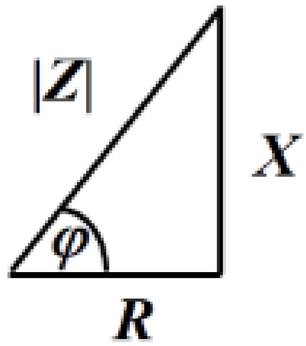
$UI\sin\varphi\ \sin2\omega t$为可逆分量。

交换功率幅值（无功功率）

Q—Var

二、平均功率 (*average power*) *P*





$$P = UI\cos\varphi = |Z|\,I\,I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

平均功率为消耗在电阻上的功率

↓

有功功率(*active power*)

有功功率守恒：电路中所有元件吸收的有功功率代数和为零。

功率因数 $\cos\varphi$ $\begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$

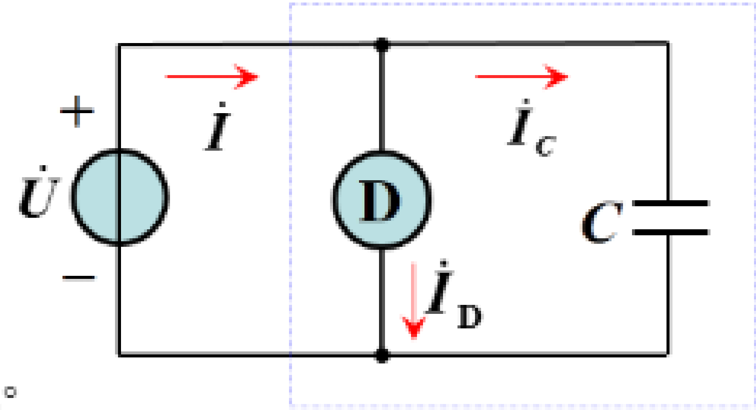
一般地，有 $0 \le \cos\varphi \le 1$

$X>0$，$\varphi>0$，感性， 滞后功率因数

$X<0$，$\varphi<0$，容性， 超前功率因数

例： $\cos\varphi = 0.5$ (滞后)， 则$\varphi = 60^\circ$

例1 已知：电动机 P_D=1000W，U=220V，f=50Hz，C=30μF，$\cos\varphi_D$=0.8(滞后）。求负载电路的功率因数。



解：设 $\dot{U} = 220\angle 0° \text{ V}$

$$I_D = \frac{P}{U\cos\varphi_D} = \frac{1000}{220\times 0.8} = 5.68\text{A}$$

$$\cos\varphi_D = 0.8(\text{滞后}) \quad \varphi_D = 36.9°$$

$$\dot{I}_D = 5.68\angle -36.9° \text{ A}$$

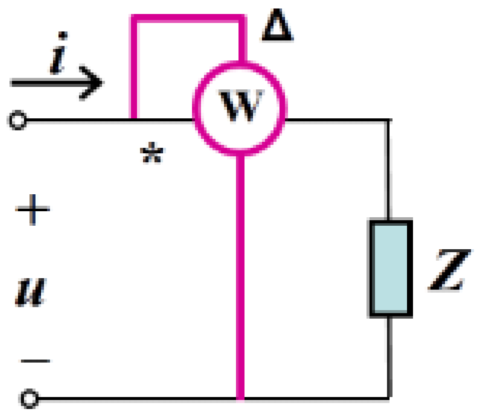
$$\dot{I}_C = \text{j}\omega C 220\angle 0° = \text{j}2.08 \text{ A}$$

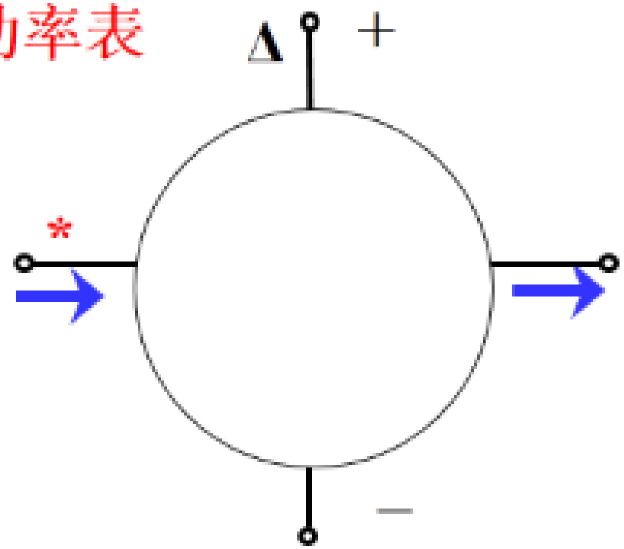
$$\dot{I} = \dot{I}_D + \dot{I}_C = 4.54 - \text{j}1.33 = 4.73\angle -16.3° \text{ A}$$

$$\therefore \cos\varphi = \cos[0° - (-16.3°)] = 0.96 \ (\text{滞后})$$

2. 有功功率的测量

功率表

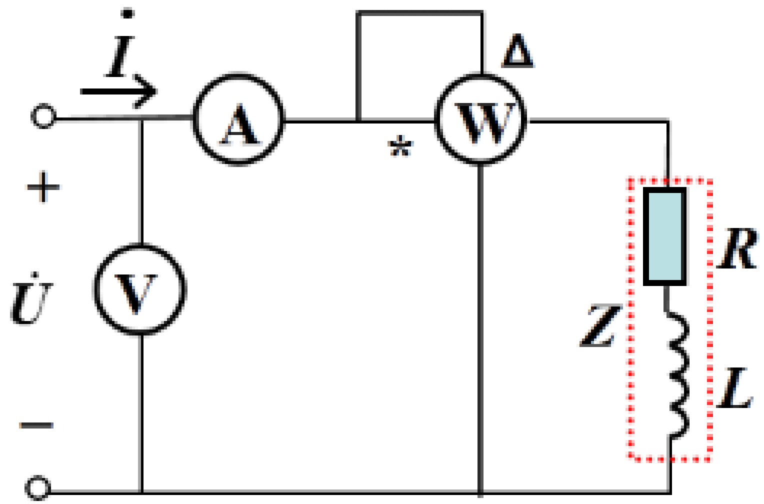




(1) 接法：负载电压 u 和 i 取关联参考方向。负载电流 i 从电流线圈“*”号端流入，负载电压u正端接电压线圈“Δ”号端，此时读数表示负载吸收的有功功率。

(2) 量程：测量时，P、U、I 均不能超量程。

例2　求虚线中线圈的电路模型参数.



f=50Hz，U=50V，

I=1A，P=30W.

解：

$$P = I^2 R \longrightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1^2} = 30\Omega$$

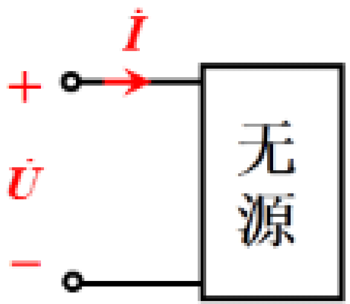
$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\,\Omega$$

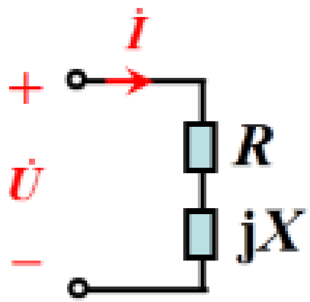
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

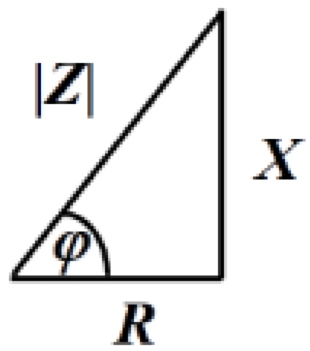
$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314}\sqrt{50^2 - 30^2} = \frac{40}{314} = 0.127\text{H}$$

三、无功功率 (*reactive power*) *Q*

1. 定义







$\varphi = \psi_u - \psi_i$： 功率因数角。

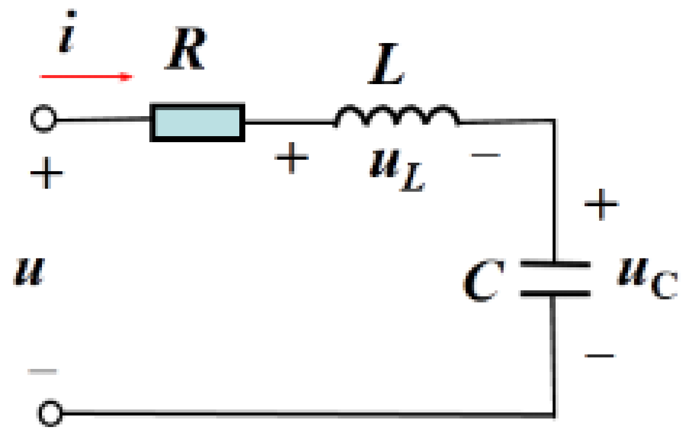
$$Q = UI\sin\varphi$$

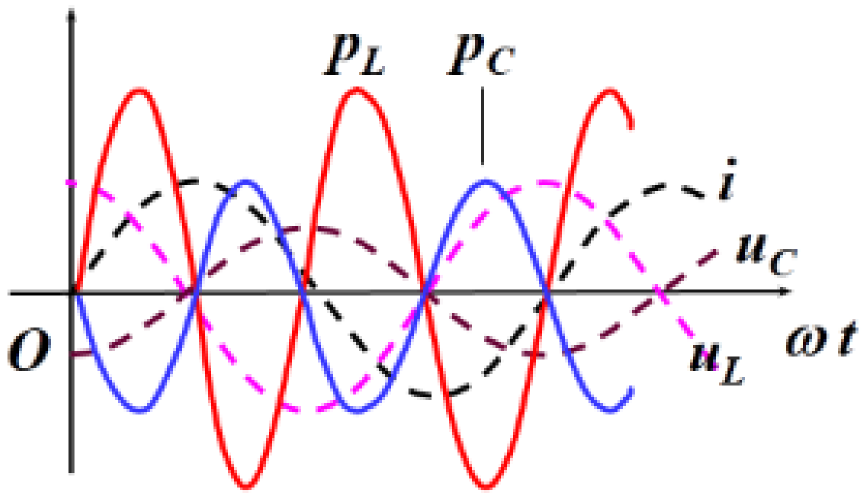
单位：var (乏)

$$= |Z|\, I\, I\sin\varphi = I^2|Z|\sin\varphi = I^2X$$

无功功率守恒：电路中所有元件吸收的无功功率代数和为零。

电感、电容的无功补偿作用：





当L发出功率时，C 刚好吸收功率，因此L、C 的无功具有互相补偿的作用。通常说，L吸收无功、C发出无功。

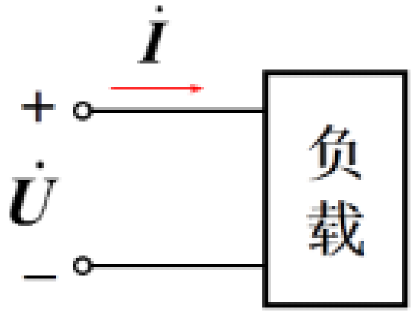
无功的物理意义：

$$Q_L = I^2 X_L = I^2 \omega L = \omega \cdot \frac{1}{2} L(\sqrt{2} I)^2$$

$$= \omega \cdot \frac{1}{2} L I_m^{\ 2} = \frac{2\pi}{T} W_{max}$$

反映电源与负载之间交换能量的速率。

四、复功率 (*complex power*)



$$\dot{U} = U\angle\psi_u \ , \qquad \dot{I} = I\angle\psi_i$$

$$P = UI\cos(\psi_u - \psi_i)$$

$$= UI\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_u - \psi_i)}]$$

$$= \mathrm{Re}[\underbrace{U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}}_{\dot{U}}\ \underbrace{I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_i}}_{\dot{I}^*}]$$

$$P = \mathrm{Re}[\dot{U}\,\dot{I}^*]$$

记 $\bar{S} = \dot{U}\,\dot{I}^*$ 为复功率，单位:VA

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI\angle(\psi_u - \psi_i) = UI\angle\varphi$$

$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi$$

$$= P + \mathrm{j}Q$$

视在功率(*apparent power*)

$$S \overset{\text{def}}{=} UI$$

单位：VA（伏安）

反映电气设备的容量

有功、无功和视在功率的关系：

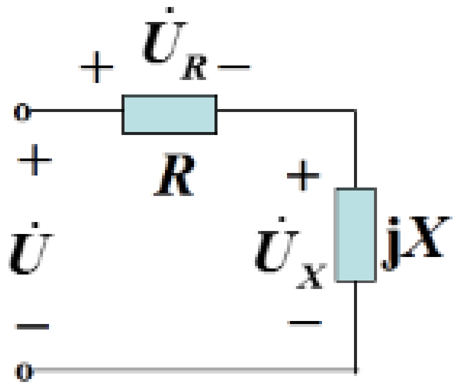
复功率守恒！！！

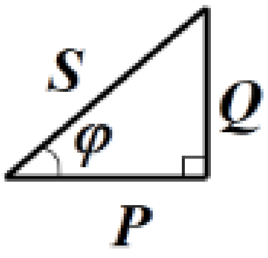
$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI\angle\varphi = S\angle\varphi = P + jQ$$

有功功率：$P=UI\cos\varphi$　　单位：W

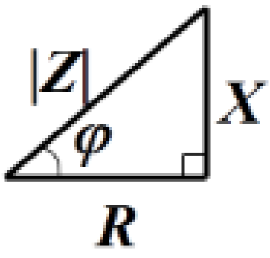
无功功率：$Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

视在功率：$S=UI$　　单位：VA

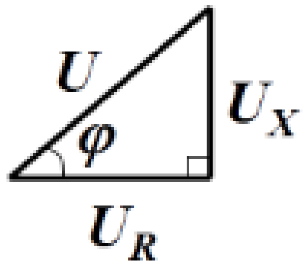




功率三角形



阻抗三角形



电压三角形

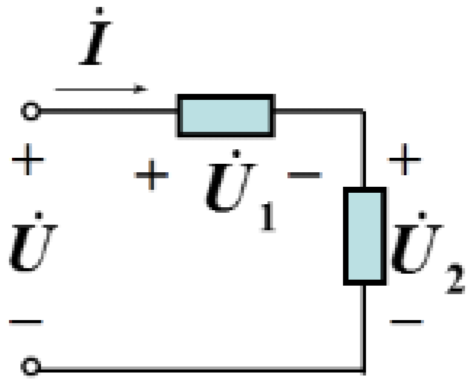
三个三角形相似。

复功率守恒

$$\sum_{k=1}^{b}\bar{S}_k=0 \qquad \sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}_k^*=0$$

$$\sum_{k=1}^{b}(P_k+\mathrm{j}Q_k)=0 \qquad \begin{cases}\sum_{k=1}^{b}P_k=0\\ \sum_{k=1}^{b}Q_k=0\end{cases}$$

* 复功率守恒，不等于视在功率守恒 一般情况下： $S\neq\sum_{k=1}^{b}S_k$



$$\bar{S}=\dot{U}\dot{I}^*=(\dot{U}_1+\dot{U}_2)\dot{I}^*$$

$$=\dot{U}_1\dot{I}^*+\dot{U}_2\dot{I}^*=\bar{S}_1+\bar{S}_2$$

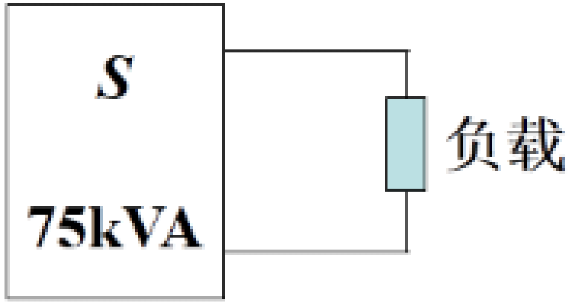
$$S=UI \qquad S_1=U_1I \qquad S_2=U_2I$$

$$\because U\neq U_1+U_2$$

$$\therefore S\neq S_1+S_2$$

五、功率因数提高

设备容量 S (额定)向负载送多少有功要由负载的阻抗角决定。



$P=S\cos\varphi$

$\cos\varphi=1$， $P=S=75\text{kW}$

$\cos\varphi=0.7$，$P=0.7S=52.5\text{kW}$

一般用户： 异步电机 空载$\cos\varphi=0.2\sim0.3$

满载$\cos\varphi=0.7\sim0.85$

日光灯 $\cos\varphi=0.45\sim0.6$

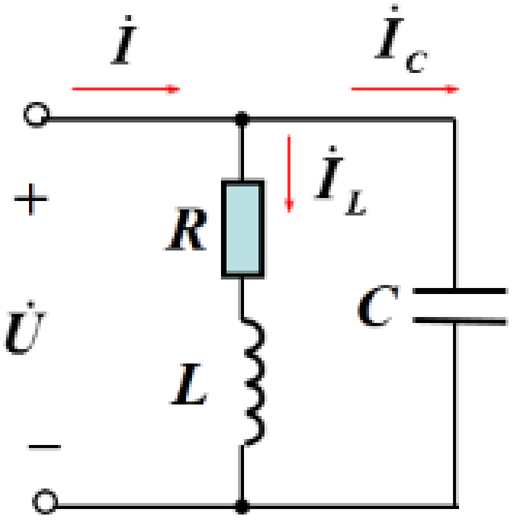
功率因数低带来的问题：

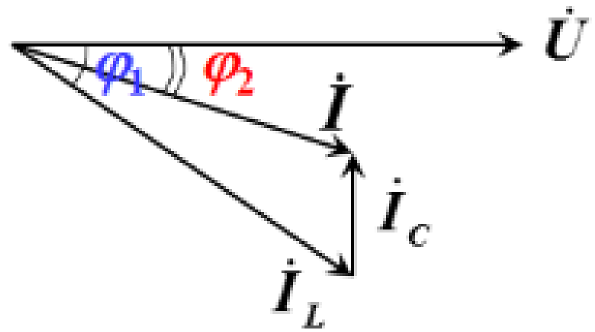
(1) 设备不能充分利用，电流到了额定值，但功率容量还有；

(2) 当输出相同的有功功率时，线路上电流大 $I=P/(U\cos\varphi)$，线路压降损耗大。

解决办法：并联电容，提高功率因数 。

分析：





负载中电流的无功分量被补偿减小，总电流与电压的夹角减小

再从功率这个角度来看：

有功：$UI_L\cos\varphi_1 = \boxed{UI\cos\varphi_2}$

无功：$UI_L\sin\varphi_1 > \boxed{UI\sin\varphi_2}$

并C后

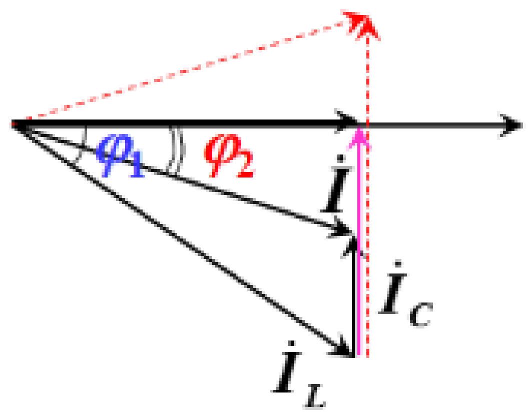
补偿容量的确定：

方法1：

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\varphi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\varphi_1} \end{aligned}\right\} \text{代入上式}$$

$$I_C = \frac{P}{U}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$



补偿容量不同 $\left\{\begin{array}{l}\text{欠}\\\text{全}\\\text{过}\end{array}\right.$ 取舍：$\left\{\begin{array}{l}\text{性能}\\\text{成本}\end{array}\right.$

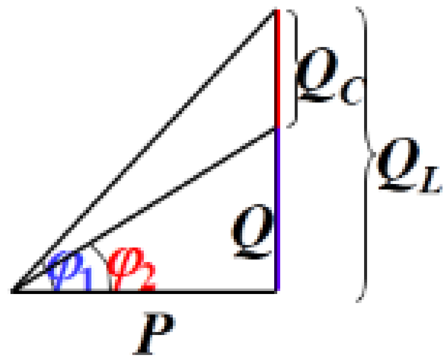
实际中一般补偿到 λ=0. 95(滞后)

方法2：

用功率三角形确定补偿容量

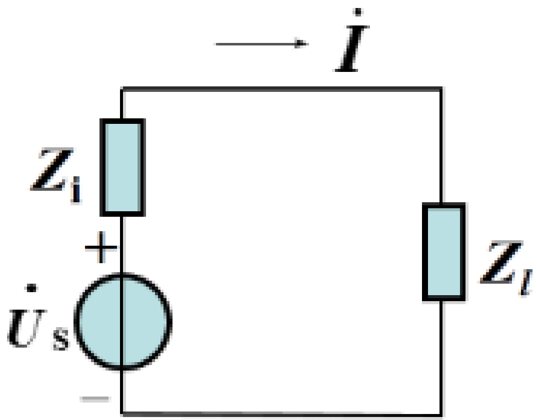
$$Q_C = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$



六、最大功率传输

讨论正弦电流电路中负载获得最大功率$P_{\max}$的条件。



$$Z_i = R_i + jX_i,\quad Z_l = R_l + jX_l$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_l},\quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i+R_l)^2 + (X_i+X_l)^2}}$$

有功功率 $P = R_l I^2 = \dfrac{R_l U_S^2}{(R_i+R_l)^2 + (X_i+X_l)^2}$

(1) $Z_l = R_l + jX_l$ 可任意改变

负载上获得最大功率的条件是：$Z_L = Z_i^*$，即 $\begin{cases} R_L = R_i \\ X_L = -X_i \end{cases}$

P获得最大值 $P_{\max} = \dfrac{U_S^2}{4R_i}$

(2) 若$Z_L=R_L+jX_L$只允许X_L改变

此时获得最大功率的条件$X_i+X_L=0$，即$X_L=-X_i$。

最大功率为 $P_{max}=\dfrac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2}$

(3) 若$Z_L=R_L+jX_L=|Z_L|\angle\varphi$，$R_L$、$X_L$均可改变，但$X_L/R_L$不变

(即$|Z_L|$可变，φ不变)

此时获得最大功率的条件$|Z_L|=|Z_i|$。

最大功率为 $P_{max}=\dfrac{\cos\varphi\, U_S^2}{2|Z_i|+2(R_i\cos\varphi+X_i\sin\varphi)}$

(3)的证明：$P=\dfrac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$

$$=\frac{|Z_L|\cos\varphi\, U_S^2}{R_i^2+2R_iR_L+R_L^2+X_i^2+2X_iX_L+X_L^2}$$

$$=\frac{|Z_L|\cos\varphi U_S^2}{|Z_i|^2+|Z_L|^2+2R_i|Z_L|\cos\varphi+2X_i|Z_L|\sin\varphi}$$

$$=\frac{\cos\varphi U_S^2}{\dfrac{|Z_i|^2}{|Z_L|}+|Z_L|+2(R_i\cos\varphi+2X_i\sin\varphi)}$$

若使P最大，需使$\left(\dfrac{|Z_i|^2}{|Z_L|}+|Z_L|\right)$最小　($|Z_L|$改变)

即　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|Z_L|}\left(\dfrac{|Z_i|^2}{|Z_L|}+|Z_L|\right)=0$，得 $\dfrac{-|Z_i|^2}{|Z_L|^2}+1=0$

$|Z_i|^2=|Z_L|^2$　即　$|Z_L|=|Z_i|$

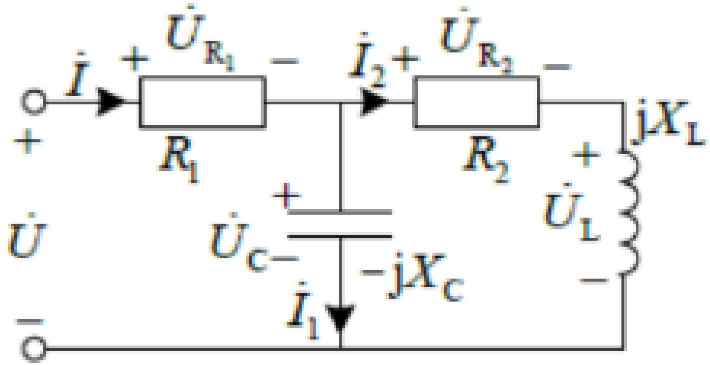
此时P_{max}即如(3)中所示。

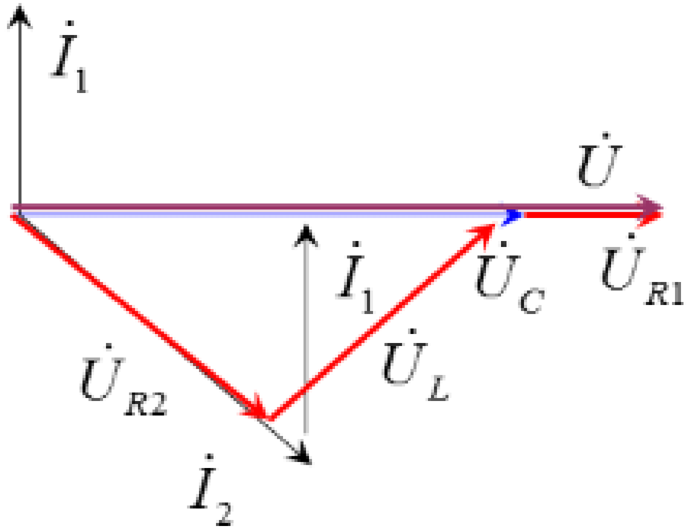
证毕！

作业

- 12，14，15，16　正弦电路
- 18，22，24　功率
- 25，27，29　谐振

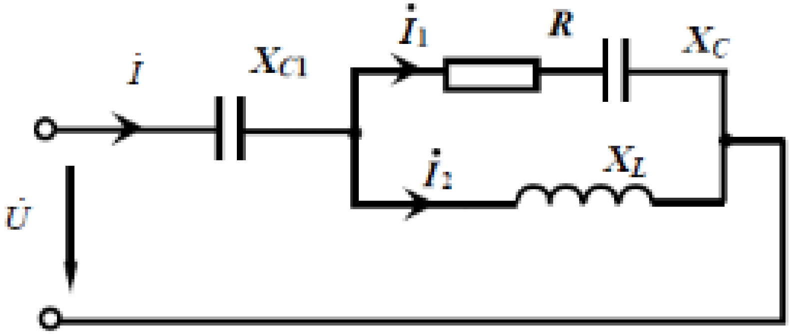
5.12 已知$U=200\,\text{V}$，$I_1=10\,\text{A}$，$I_2=10\sqrt{2}\,\text{A}$，$R_1=10\,\Omega$，$R_2=X_L$。试以$\dot{U}_C$为参考相量，画出$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、$\dot{I}$、$\dot{U}_{R_1}$、$\dot{U}$、$\dot{U}_L$的相量图。





5.16 已知 $f=50\text{Hz}$，$i(t)=5\sqrt{2}\sin\left(\omega t+45^\circ\right)$ A，

$u(t)=100\sin\omega t$ V，$X_L=10\Omega$，$X_{C1}=10\Omega$，求 R 和 X_C 之值。



$$Z=-j10+\frac{(R-jX_c)j10}{(R-jX_c)+j10}$$

$$=-j10+\frac{(R-jX_c)j10\left[R-j(10-X_c)\right]}{\left[R+j(10-X_c)\right]\left[R-j(10-X_c)\right]}$$

$$=-j10+10\frac{10R+j(R^2-10X_c+X_c^{\ 2})}{R^2+(10-X_c)^2}$$

$$=\frac{100}{5\sqrt{2}}\angle-45^\circ=-j10+10$$

$$\begin{cases}\dfrac{R^2-10X_c+X_c^{\ 2}}{R^2+(10-X_c)^2}=0\\[2ex]\dfrac{10R}{R^2+(10-X_c)^2}=1\end{cases}$$

不合理，舍去

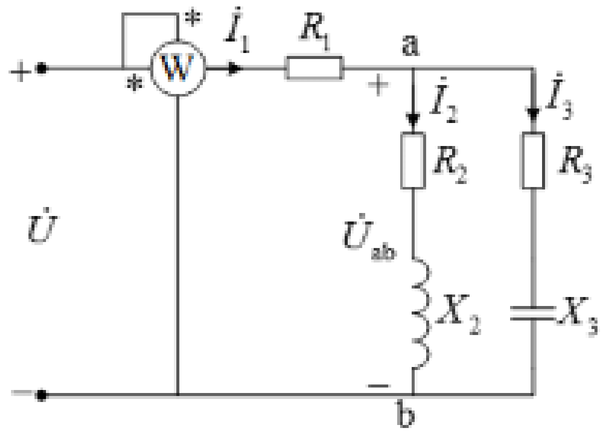
$$X_c=10,or5$$

$$R=0,or5$$

5.22 如题图 12 所示电路中，已知 $R_1=R_2=R_3$、$I_1=I_2=I_3$、$U=3\,\text{V}$，功率表读数为 3 W，试求

（1） 以 $\dot{U}_{ab}$ 为参考相量画相量图；

（2） 在（1）的基础上求参数 R_1 和 X_2、X_3 的值。



提示:

1） u_{ab}、u_{R1}、u同相

2） 由W求I1和R1

3） 由W求Uab