《偏微分方程》学习指导与习题解答

浙 江 大 学 数 学 系

前　言

《偏微分方程》课程是本科阶段公认的较难学习和掌握的公共数学课程之一，为了帮助学生能更好地学习和掌握偏微分方程的基本概念、基本理论以及基本的求解方法，我们组织部分任课老师编写了这本《偏微分方程学习指导与习题解答》。

本书共分六章，除第一章外每章分为基本要求、内容提要和习题解答三部分。基本要求部分主要起教学大纲与教学计划的作用，用“理解、了解和知道”三个术语给出了基本概念和基本内容的不同要求，用“熟练掌握、掌握和会”三个术语给出了求解方法和解题技巧的不同要求；内容提要部分给出相关内容的精讲，供学生复习参考之用；习题解答部分以李胜宏、潘祖梁和陈仲慈编著的《数学物理方程》(浙江大学出版社，2008 年) 的附后练习题为主，这些习题属于掌握偏微分方程知识所必须的基本训练。

本书是多位老师合作的结果，其中第一章和第六章由薛儒英编写，第二章和第三章分别由汪国昭和吴彪编写，王会英和王伟分别编写了第四章和第五章的内容，最后由薛儒英和贾厚玉统稿并补充了每一章的基本要求和内容提要。本书得到浙江大学大类课程教改课题《微分方程》的资助，得到浙江大学数学系各位老师的大力支持，在此表示感谢。

目　录

第 2 章　方程的导出和定解问题

§2.1　基本要求与内容提要

一. 基本要求

1. 掌握三类典型数学物理方程 (弦振动方程，热传导方程以及拉普拉斯方程) 的推导过程；

2. 熟悉三类边界所代表的物理意义，能正确写出典型数学物理问题的定解条件和定解问题；

3. 掌握线性偏微分方程的叠加原理，了解其应用；

4. 了解二阶线性偏微分方程的分类，会将一般的二阶线性偏微分方程化成标准型。

二. 内容提要

1. 建立数学物理方程的常用方法

通常用以下三种方法来建立描述物理现象的数学方程：微元法、规律法和统计法。

(1) 微元法

就是在整个系统中分出一个小部分，分析邻近部分与这一小部分的相互作用，根据物理学规律 (牛顿第二定律等)，用数学表达式来表示这个作用，通过对表达式的化简、整理，得到所研究问题满足的数学物理方程。

(2) 规律法

就是将物理规律 (如 Maxwell 方程组) 用易求解的数学物理方程表示出来。

(3) 统计法

就是通过统计规律建立所研究问题满足的数学物理方程，常用于经济、社会科学等领域。

2. 定解条件

在一般情形下，数学物理方程的解中含有任意常数或任意函数，为了得到符合实际问题要求的惟一解，我们数学物理方附加定解条件。定解条件一般有初始条件和边界条件两种。

(1) 初始条件

初始条件是所研究的物理量在开始时刻取值的数学表达式。初始条件的个数取决于偏微分方程中关于时间变量 t 的导数的阶数，如弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

关于 t 的导数是二阶的，故需要两个初始条件才能确定一个特解，即要求给出初始位移和初始速度

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x).$$

热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

关于 t 的导数是一阶的，故需要一个初始条件就能确定一个特解，即要求给出初始温度

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x).$$

弦振动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$$

Poisson 方程和 Laplace 方程不含时间变量，称为稳定场方程，故不需要初始。

(2) 边界条件

边界条件是所研究的物理量在边界上状况的数学表达式。边界条件一般有三种类型，简单地说，若给定未知函数在区域边界（或区间端点）上的函数值，这样的条件称为 Dirichlet 条件 (或第一类边界条件)；若给定未知函数在区域边界（或区间端点）上外方向导数，这样的条件称为牛曼条件 (或第二类边界条件)；若不知道未知函数在区域边界（或区间端点）上的函数值，也不知道未知函数在区域边界（或区间端点）上的方向导数，只是给定未知函数和它的方向导数的某一组合在区域边界（或区间端点）上的取值，这样的条件称为混合边界 (或第三类边界条件)。

3. 定解问题与适定性

偏微分方程和相应的定解条件结合在一起，就构成了一个定解问题。根据定解条件的不同，定解问题以可以分为以下三类：

初值问题 只有初始条件，没有边界条件的定解问题；

边值问题 没有初始条件，只有边界条件的定解问题；

混合问题 既有初始条件又有边界条件的定解问题；

适定性 如果定解问题存在惟一解且解连续依赖于初值条件和边界条件，则称定解问题是适定的。经典问题的适定性已经解决，对于新的定解问题必须进行适定性研究。

4. 线性方程的分叠加原理

我们以二个自变量的二阶线性偏微分方程：

$$Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

为例来说明线性偏微分方程的叠加原理，其中 $a(x,y),b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$,$f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 为 (x,y) 光滑函数。

叠加原理　设函数 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 是线性偏微分方程

$$Lu=g_j,\ j=1,2,\cdots$$

的解，$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$ 为给定的数列，使得级数 $\sum_{j=1}^{\infty}c_ju_j$ 收敛, 和为 u, 且可逐项微分两次，级数 $\sum_{j=1}^{\infty}c_jg_j$ 也收敛。则 u 为方程

$$Lu=\sum_{j=1}^{\infty}c_jg_j$$

的解。

若 $g_j = 0\ (j = 1, 2, \cdots)$, 则 u_j 为二阶齐次线性偏微分方程 $Lu = 0$ 的解, 此时齐次线性方程的叠加原理可表述为：

设函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是齐次线性方程 $Lu = 0$ 的解, $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 为给定的数列, 使得级数 $\sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j$ 收敛, 和为 u, 且可逐项微分两次。则 u 为齐次线性方程 $Lu = 0$ 的解。

5. 二阶线性方程的分类

我们以二个自变量的二阶线性偏微分方程：

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

为例来说明线性偏微分方程的分类, 其中 $a(x,y), b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$,$f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 为 (x,y) 光滑函数。

若在区域 Ω 上某一点 (x_0, y_0),

$$\Delta \equiv b^2 - ac > 0,$$

则称方程) 在点 (x_0, y_0) 为**双曲型的**；若点 (x_0, y_0) 有

$$\Delta \equiv b^2 - ac = 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为**抛物型的**；若点 (x_0, y_0) 有

$$\Delta \equiv b^2 - ac < 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为**椭圆型的**。若方程在区域 Ω 内每一点都是双曲型的称方程 (??) 在点在区域 Ω 内是双曲型的；若方程在区域 Ω 内每一点都是抛物型的称方程在点在区域 Ω 内是抛物型的；若方程在区域 Ω 内每一点都是椭圆型的称方程在点在区域 Ω 内是椭圆型的。

由上述定义, 弦振动方程是双曲型方程, 热传导方程是抛物型方程, 而二维拉普拉斯方程是一个椭圆型方程。

§2.2　习题解答

习题 2.1 *若弦的重量不能忽略，试推导弦的振动方程。*

解 考察一根两端固定、水平拉紧的弦。弦沿垂直方向的位移 $u(x,t)$。根据牛顿第二定律, u 方向运动的方程可以描述为 (λ 为线密度)：

$$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 - \lambda g ds = \lambda u_{tt} ds.$$

作用于小段 ABC 的纵向合力应该为零, 即

$$T_2 \cos\alpha_2 - T_1 \cos\alpha_1 = 0.$$

仅考虑微小的横振动, 夹角 α_1, α_2 为很小的量, 忽略 α_1^2, α_2^2 及其以上的高阶小量, 则根据级数展开式有

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \cdots \approx 1, \cos\alpha_2 \approx 1,$$

$$\sin\alpha_1=\alpha_1-\frac{1}{3!}\alpha_1^3+\cdots\approx\alpha_1\approx\tan\alpha_1,\ \sin\alpha_2\approx\alpha_2\approx\tan\alpha_2,$$
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(du)^2}=\sqrt{1+(u_x)^2}dx\approx dx,\ u_x=\tan\alpha\approx\sin\alpha.$$

故得到

$$u_x|_x=\tan\alpha_1\approx\sin\alpha_1,\ u_x|_{x+dx}=\tan\alpha_2\approx\sin\alpha_2.$$

这样, 简化得

$$T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x-\lambda g dx=\lambda u_{tt}dx,\ T_1-T_2=0.$$

因此在微小横振动条件下, 可记 $T=T_1=T_2$, 故有

$$T[u_x|_{x+dx}-u_x|_x]-\lambda g dx=\lambda u_{tt}dx.$$

由于变化量 dx 可以取得很小, 根据微分知识成立

$$u_x|_{x+dx}-u_x|_x=u_{xx}dx,$$

这样, ABC 段的运动方程就成为 $\lambda u_{tt}-Tu_{xx}+\lambda g=0$, 即

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-g,\ (a^2=T/\lambda).$$

习题 2.2 若弦在振动过程中还受到阻力和恢复力的作用, 阻力的大小与速度成正比, 恢复力的大小与位移成正比, 试推导弦的振动方程 (重力忽略不计)。

解 由上题推导过程知: 如果在弦的单位长度上还有横向外力 $F(x,t)$ 作用, 则弦的横振动方程应该改写为

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-f(x,t),$$

式中 $f(x,t)=F(x,t)/\lambda$ 称为力密度, 根据题意

$$F(x,t)=-ku_t+pu,$$

其中 $k>0$ 为单位长度弦的阻力系数, $p>0$ 为单位长度弦的恢复力系数。则弦的横振动方程为

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-\frac{k}{\lambda}u_t+\frac{p}{\lambda}u,\ (a^2=T/\lambda).$$

习题 2.3 推导二维的稳恒 (定常) 的温度分布方程。

解 由热传导的傅里叶定律: dt 时间内, 通过线元 dL 流入小面元的热量 dQ 与沿线元外法线方向的温度变化率 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比, 也与 dL 与 dt 之积成正比, 即

$$dQ=k\frac{\partial u}{\partial n}dLdt$$

式中 k 是导热系数, $u(x,y,t)$ 表示 t 时刻二维物体内任一点 (x,y) 处的温度。则在 dt 时段内通过线元 AB 流入的热量为

$$dQ|_x=\left(k\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Bigg|_x dtdy=\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_x dtdy.$$

同样，在 dt 时间沿 y 方向流入立方体的热量为 $\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)dtdxdy$. 在 t 到 $t+dt$ 时间内，小体积元的温度变化是 $\frac{\partial u}{\partial t}dt$. 如果用 ρ 和 C_0 分别表示物体的密度和比热，则根据能量守恒定律得热平衡方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dtdxdy=\rho C_0\frac{\partial u}{\partial t}dtdxdy,$$

或写成

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\rho C_0\frac{\partial u}{\partial t}.$$

当温度稳恒时，$\frac{\partial u}{\partial t}=0$, 即有

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

习题 2.4 推导一维的非定常的温度分布方程。

解 由上题推导过程知：在一维情况下，温度分布方程为 $ku_{xx}=\rho C_0 u_t$, 即

$$u_t=a^2u_{xx},\,(a^2=k/\rho C_0).$$

若内部有热源，热平衡方程变为 $ku_{xx}+F(x,t)=\rho C_0u_t$, $F(x,t)$ 表示热源强度，则

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\,(a^2=k/\rho C_0,\,f(x,t)=F(x,t)/\rho C_0).$$

习题 2.5 球形导热体的上半球面绝热，下半球面保持温度 $u=u_0\sin\omega t$, 试用球坐标写出这个定解问题的边界条件。

解 设球面半径为 a, 球坐标 (R,θ,φ)(如图所示)。则边界条件为

$$\begin{cases} u_R|_{R=a}=0\,(0\le\varphi<2\pi,0\le\theta<\frac{\pi}{2}) \\ u|_{R=a}=u_0\sin\omega t\,(0\le\varphi<2\pi,\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi). \end{cases}$$

习题 2.6 圆柱体的侧面绝热，一端温度为 0^oC, 另一端的温度与端面半径成反比，比例系数为 λ, 试写出它的边界条件。

解 设圆柱体底面半径为 R, 高为 h(如图所示), 在柱坐标 (ρ,φ,z) 下的温度函数为 u, 则边界条件为

$$\begin{cases} u_\rho|_{\rho=R}=0\,(0\le\varphi<2\pi,0\le z<h), \\ u|_{z=0}=0\,(0\le\varphi<2\pi,0\le\rho<R), \\ u|_{z=h}=\lambda/\rho\,(0\le\varphi<2\pi,0\le\rho<R). \end{cases}$$

习题 2.7 长为 ell 的均匀杆，两端有恒定热流进入，其强度为 q_0, 写出这个热传导问题的边界条件。

解 根据第 3 题的分析，有 $Q|_x=k\frac{\partial u}{\partial n}|_x$($k$ 为热传导系数)。当 $x=0$ 时，有 $q_0=-k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}$；当 $x=\ell$ 时，有 $q_0=k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\ell}$。因此边界条件为

$$frac\partial u\partial x\,|_{x=0}=-q_0/k,\,frac\partial u\partial x\,|_{x=\ell}=q_0/k.$$

习题 2.8 在波动方程 $u_{tt} = \Delta u$ 中令 $u = e^{ikt}\nu$, 在热传导方程 $u_t = \Delta u$ 中令 $u = -e^{-k^2t}\nu$。证明 $\nu(x, y, z)$ 满足 *Helmholtz* 方程

$$\Delta\nu + f^2\nu = 0.$$

解 注意到 $\nu(x, y, z)$ 与 t 无关, 在波动方程 $u_{tt} = \Delta u$ 中,

$$u_t = ike^{ikt}\nu, u_{tt} = -k^2e^{ikt}\nu,$$

$$\Delta u = e^{ikt}\Delta\nu.$$

从而 ν 满足

$$\Delta\nu + k^2\nu = 0.$$

同理, 在热传导方程 $u_t = \Delta u$ 中

$$u_t = k^2e^{-k^2t}\nu, \Delta u = -e^{-k^2t}\Delta\nu.$$

从而 ν 满足

$$\Delta\nu + k^2\nu = 0.$$

习题 2.9 设 $F(z)$, $G(z)$ 是任意的二阶连续可微函数, 试证

$$u = F(x + at) + G(x - at)$$

满足波动方程

$$u_{tt} = a^2u_{xx}.$$

解 $u_x = F'(x + at) + G'(x - at)$, $u_t = aF'(x + at) - aG'(x - at)$, $u_{xx}F"(x + at) + G"(x - at)$, $u_t = a^2F"(x + at) + a^2G"(x - at)$. 因此有

$$u_{tt} = a^2u_{xx}.$$

习题 2.10 对于方程 $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$, 设其解为 $u(x, y) = f(\lambda x + y)$ 的形式, 试确定参数 λ 的值, 使 $u(x, y)$ 满足方程, 这里 f 为其变元的二阶可微函数。

解 $u_x = \lambda f'(\lambda x + y)$, $u_y = f'(\lambda x + y)$,

$$u_{xx} = \lambda^2f"(\lambda x + y),\ u_{xy} = \lambda f"(\lambda x + y),\ u_{yy} = f"(\lambda x + y),$$

则方程化为

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 3)f"(\lambda x + y) = 0,$$

从而推得 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

习题 2.11 将下列方程化为标准型:

(1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$;

(2) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$;

(3) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x = 0$;

(4) $yu_{xx} + u_{xy} = 0\,(y < 0)$.

解 (1) $\Delta=1^2-1\times(-3)>0$,, 方程为双曲型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm\sqrt{4}}{1}$, 积分得

$$y-3x=C_1,\ y+x=C_2.$$

作替换 $\xi=y-3x$, $\eta=y+x$, 原方程化为

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_\eta=0.$$

再令 $s=\frac{\xi+\eta}{2}$, $t=\frac{\xi=\eta}{2}$, 得

$$u_{ss}-u_{tt}-u_s+u_t=0.$$

(2) $\Delta=2^2-1\times5<0$,, 方程为椭圆型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm i}{1}$, 积分得

$$y-(2+i)x=C_1,\ y-(2-i)x=C_2.$$

作替换 $\xi=y-2x$, $\eta=x$, 原方程化为

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_\eta=0.$$

(3) $\Delta=(-2)^2-1\times4=0$,, 方程为抛物型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1}$, 积分得 $y+2x=C_1$. 作替换 $\xi=y+2x$, $\eta=x$, 原方程化为

$$u_{\eta\eta}+10u_\xi+5u_\eta=0.$$

(4) $\Delta=0^2-1\times y>0$,, 方程为双曲型. 特征方程为 $\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm\sqrt{-y}}{y}$, 积分得

$$x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_1,\ x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_2.$$

作替换 $\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, 原方程化为

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0.$$

习题 2.12 设 u_x 和 u_2 分别为下列定解问题的解

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(\ell,t)=\varphi_2(t)\\ u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0.\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=0,\ u(\ell,t)=0\\ u(x,0)=\psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi_2(x).\end{cases}$$

试证明 $u=u_1+u_2$ 是定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(\ell,t)=\varphi_2(t)\\ u(x,0)=\psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi_2(x)\end{cases}$$

的解。

证明 由题意，得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = \varphi_1(t),\ u_1(\ell,t) = \varphi_2(t) \\ u_1(x,0) = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ u_2(0,t) = 0,\ u_2(\ell,t) = 0 \\ u_2(x,0) = \psi_1(x),\ \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2(x). \end{cases}$$

则有

$$\frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial x^2},$$

$$(u_1+u_2)(0,t) = \varphi_1(t) + 0 = \varphi_1(t),$$

$$(u_1+u_2)(\ell,t) = \varphi_2(t) + 0 = \varphi_2(t),$$

$$(u_1+u_2)(x,0) = 0 + \psi_1(x) = \psi_1(x),$$

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial t}|_{t=0} = 0 + \psi_2(x) = \psi_2(x).$$

即 $u = u_1 + u_2$ 是定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \varphi_1(t),\ u(\ell,t) = \varphi_2(t) \\ u(x,0) = \psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2(x) \end{cases}$$

的解。