浙江大学 2010－2011 学年春季学期

《 微积分Ⅱ》课程期末考试试卷

注意：解题时应写出必要的解题过程。(1~9 及 14 每题 6 分; 10~13 每题 10 分).

1、 求经过原点 $O(0,0,0)$ 且与直线 $\begin{cases} x+2y-3z-4=0 \\ 3x-y+5z+9=0 \end{cases}$ 平行的直线 L 的方程.

2、求曲面 $z=x^2+y^2$ 上点 $(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4})$ 处的切平面方程.

3、求以点 $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 0)$, $C(2, 4, 1)$为顶点的三角形的面积.

4、已知圆柱面 S 的中心轴为直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$, 并设 S 与球面 $x^2+y^2+z^2-8x-6y+21=0$ 外切, 求该圆柱面的方程.

5、设 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(\dfrac{x}{z},yz)=0$ 所确定, 假定运算过程中出现的分母不为零，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6、求二元函数 $z=(1+\dfrac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$ 在点(1, 1)处的全微分.

7、求二元函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值, 应说明是极大值还是极小值？

8、计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$.

9、设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2y\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)y\,\mathrm{d}\sigma$.

10、设 $z=z(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $z=z(x-2y,x+3y)$ 满足方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求 $z=z(u,v)$ 满足的方程.

《微积分 II》期末试卷(2010-2011 学年春学期)

11、设 $f(x,y)=\max\{x,y\}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 计算 $\iint\limits_D f(x,y)|y-x^2|\,\mathrm{d}\sigma$.

12、求曲面 $4z=3x^2-2xy+3y^2$ 到平面 $x+y-4z=1$ 的最短距离.

13、设 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x+y\le 2, xy\ge 0\}$, 选择适当坐标系, 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}\sigma$.

14、设二元函数 $u=\sqrt{x^2+2y^2}$, 点 $(0,0)$.

(1)偏导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 是否存在？若存在求出之，若不存在，请说明理由；

(2)设 $\vec{l}=\{\cos\alpha.\cos\beta\}$ 为以点 $(0,0)$ 为始点的平面单位向量, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$, 方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$ 是否存在？若存在求出之，若不存在，请说明理由.

《微积分 II》期末试卷(2010-2011 学年春学期)

参考解答：

1、解：L 的方向矢量：$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=\{7,-14,-7\}//\{1,-2,-1\}$,

则直线 L 的方程为 $x=\dfrac{y}{-2}=-z.$

2、解：该曲面上点 $P(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4})$ 处的法矢量为 $\vec{n}=\{2x,2y,-1\}\big|_P=\{2,-1,-1\}$,

则切平面的方程为 $2(x-1)-(y+\dfrac{1}{2})-(z-\dfrac{5}{4})=0$,

即 $8x-4y-4z-5=0.$

3、解：$\overrightarrow{AB}=\{2,1,-1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1,3,0\}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{3,-1,5\}$,

则 ΔABC 的面积$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{35}.$

4、解：球面方程：$(x-4)^2+(y-3)^2+z^2=2^2$, 球心 $A(4,3,0)$, 半径 2.
在圆柱面 S 的中心轴上取点 $B(1,-1,0)$, 它与球心的距离 $d=|AB|=5$, 则圆柱的半径为 $5-2=3$, 从而该圆柱面的方程为

$(x-1)^2+(y+1)^2=3^2$, 即 $x^2+y^2-2x+2y-7=0$.

5、解：对方程求全微分

$$F_u'\frac{1}{z^2}(z\,dx-x\,dz)+F_v'(z\,dy+y\,dz)=0$$

得 $$dz=\frac{zF_u'\,dx+z^3F_v'\,dy}{xF_u'-yz^2F_v'},\quad \therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_u'}{xF_u'-yz^2F_v'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^3F_v'}{xF_u'-yz^2F_v'},$$

则 $$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

6、解 1: $\ln z=\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})$, 即 $y\ln z=x[\ln(x+y)-\ln y]$, 两边求全微分,

$$\ln z\,\mathrm{d}y+\frac{y}{z}\mathrm{d}z=[\ln(x+y)-\ln y]\,\mathrm{d}x+x\,(\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}-\frac{\mathrm{d}y}{y}),$$

当 $x=1,\ y=1,$ 得 $z=2,$ 代入上式, 有

$$\ln 2\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\mathrm{d}z=\ln 2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-\mathrm{d}y,$$

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=(1+2\ln 2)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y).$

解 2: $z=(1+u)^u,\ u=\frac{x}{y},\ \ln z=u\ln(1+u)$, 两边求全微分,

$$\frac{1}{z}\mathrm{d}z=[\ln(1+u)+\frac{u}{1+u}]\mathrm{d}u=[\ln(1+u)+\frac{u}{1+u}]\cdot\frac{1}{y^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y),$$

$x=1,\ y=1,$ 得 $z=2,\ u=1,$ 代入上式, 有 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=(1+2\ln 2)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y).$

7、解：$\begin{cases}z'_x=3x^2-8x+2y=0,\\ z'_y=2x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y,\\ x^2-2x=0,\end{cases}$ 得驻点：$M(0,0),\ N(2,2).$

又 $z''_{xx}=6x-8,\ z''_{xy}=2,\ z''_{yy}=-2,\quad\therefore B^2-AC=4+2(6x-8)=12x-12,$

在点 $N(2,2)$ 处，$B^2-AC=12>0,$ 故点 N 处无极值;

在点 $M(0,0)$ 处，$B^2-AC=-12<0,$ 且 $C=-2<0,$ 所以点 M 处 z 取得极大值 0.

8、解 1：交换积分次序，

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$$

解 2：用分部积分，

$$\text{原式}=\int_0^1\left[\int_{x^2}^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)$$

$$=[\frac{1}{2}x^2\int_{x^2}^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}[\int_{x^2}^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y]$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}2\sqrt{1+x^6}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$$

9、解：由于 D 关于 y 轴对称, 所以 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = 0$.

$$原式 = \iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi .$$

10、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2\dfrac{\partial z}{\partial u} + 3\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

代入原方程，得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$.

11、解：积分区域分成三部分：$D = D_1(y \ge x) + D_2(x^2 \le y \le x) + D_3(y \le x^2)$,

$$原式 = \iint\limits_{D_1} y(y - x^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} x(y - x^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_3} x(x^2 - y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 (y^2 - yx^2)\,\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x (xy - x^3)\,\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} (x^3 - xy)\,\mathrm{d}y = \frac{11}{40}.$$

12、解：曲面 S 上点 (x, y, z) 到平面的距离：$\mathrm{d} = \dfrac{|x + y - 4z - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|x + y - 4z - 1|}{3\sqrt{2}}$,

设 $f(x, y, z) = (x + y - 4z - 1)^2$, 求 $f(x, y, z)$ 在 $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z = 0$ 下的最小值.

令 $F(x, y, z, \lambda) = (x + y - 4z - 1)^2 + \lambda(3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z)$，由拉格朗日乘数法，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x + y - 4z - 1) + \lambda(6x - 2y) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x + y - 4z - 1) + \lambda(-2x + 6y) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(x + y - 4z - 1)(-4) - 4\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z = 0,$$

由前 3 个方程得 $x = y = \dfrac{1}{4}$, 代入第 4 个方程, $z = x^2 = \dfrac{1}{16}$, 得唯一驻点 $(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16})$.

所以 S 上点 $(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16})$ 处 d 最小，则曲面到平面的最短距离为

$$\mathrm{d} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{16} - 1\right| = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

《微积分 II》期末试卷(2010-2011 学年春学期)

13、解 1：极坐标变换： $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}(e-1)\,.$$

解 2：坐标变换： $u = x+y,\ v = y, \Rightarrow x = u-v,\ y = v,\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$

$D_{uv} = \{(u,v) \mid 1 \le u \le 2,\ 0 \le v \le u\},$

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{uv}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}u\int_0^u e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 u\,\left(e^{\frac{v}{u}}\Big|_{v=0}^{v=u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \int_1^2 u(e-1)\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}(e-1).$$

14、解：(1) $\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，

所以偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ 不存在.

(2) 方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)} = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta_{\vec{l}} u}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{u(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)-u(0,0)}{\rho}$

$= \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\sqrt{(\rho\cos\alpha)^2+2(\rho\sin\alpha)^2}-0}{\rho} = \sqrt{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}$ 存在.