第三章 刚体力学基础

实际物体：质量，形状和大小，形变。

刚体（rigid body）：特殊的质点系，在外力作用下，形状和大小都保持不变。

具有一定质量、形状和大小, 忽略形变的理想模型
(比质点更接近自然界中实际物体的理想模型)

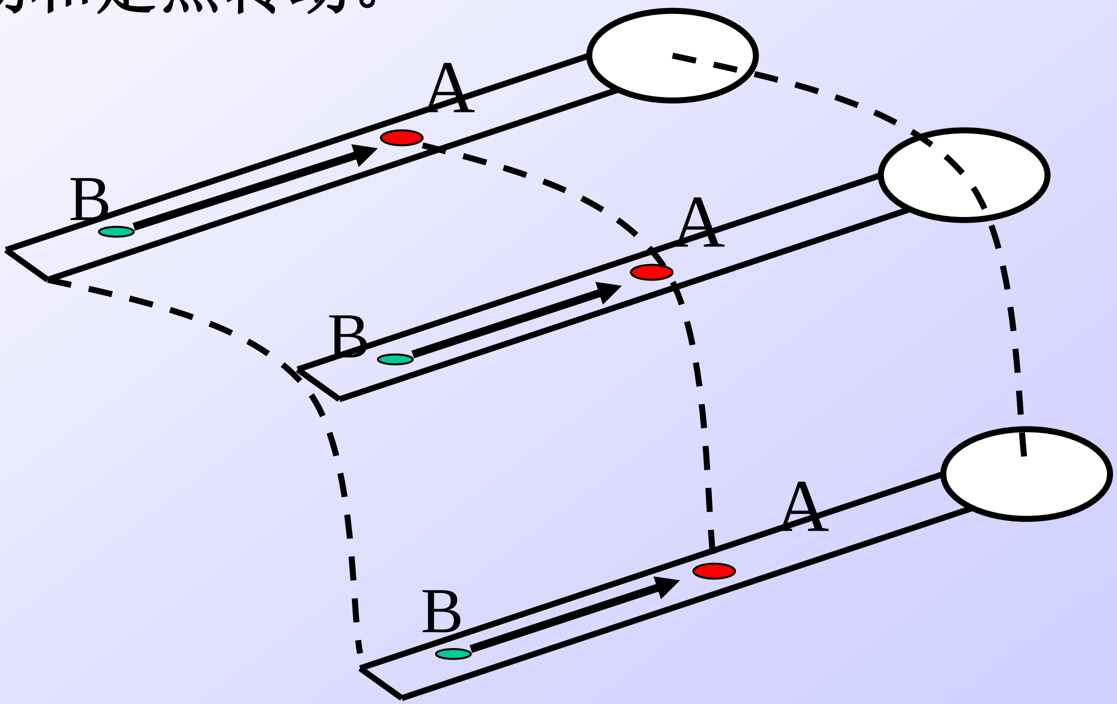
研究方法：将刚体看成由许多小质点 (质元) 组成，利用已知的质点规律的叠加来研究刚体的整体规律

刚体运动的基本类型：

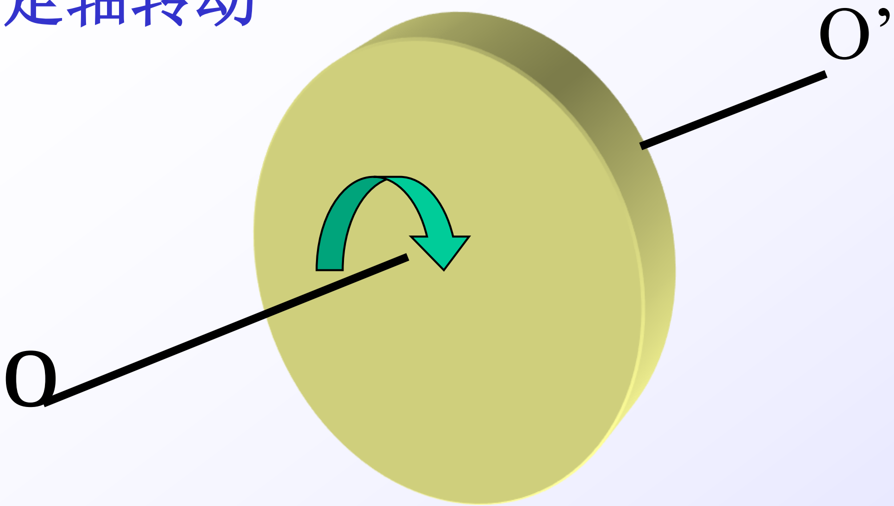
平动：质心的运动可以代表整个刚体的运动。

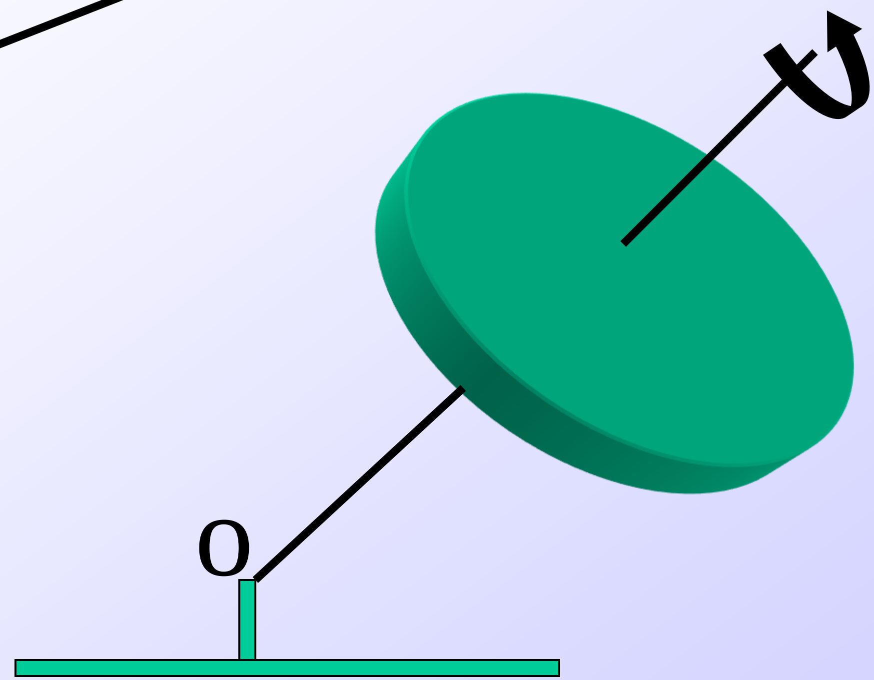
转动：定轴转动和定点转动。

平动



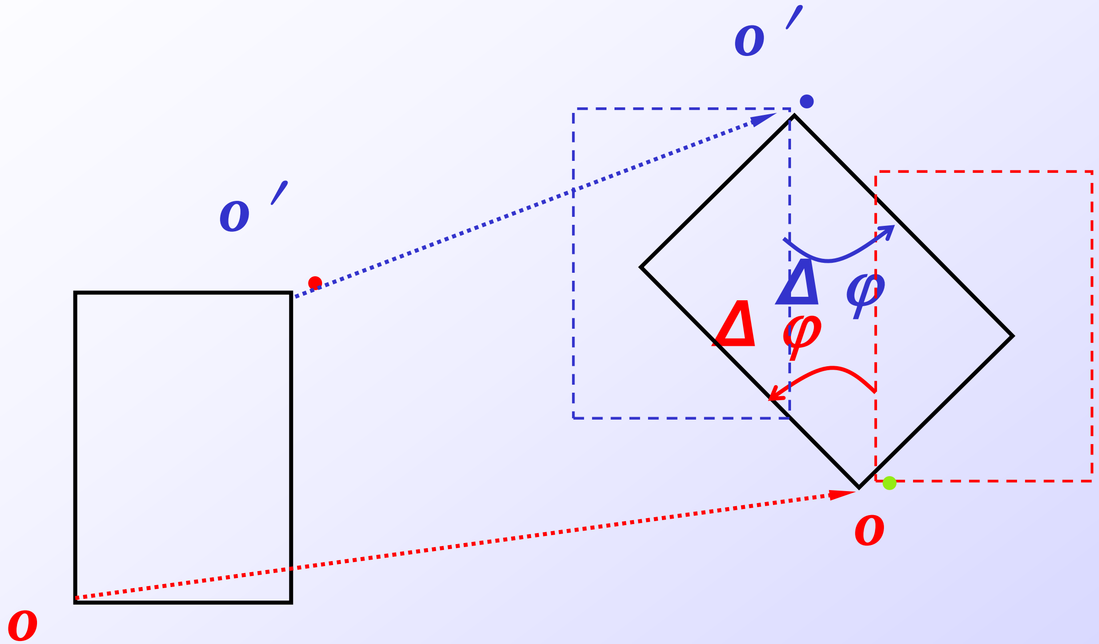
定轴转动





定点转动

一般运动：平动+转动



3-1 刚体运动的描述

一、刚体的平动

平动 ----- 刚体内任一直线的方位, 在运动过程中始终保持不变。

(几何学特征)

任一时刻, 刚体内各质点具有相同的速度和加速度。

(运动学特征)

任一质点的运动—— 代表整个刚体的运动 (质点运动学)
刚体平动动力学 —— 可用质心运动来代表 (质点动力学)

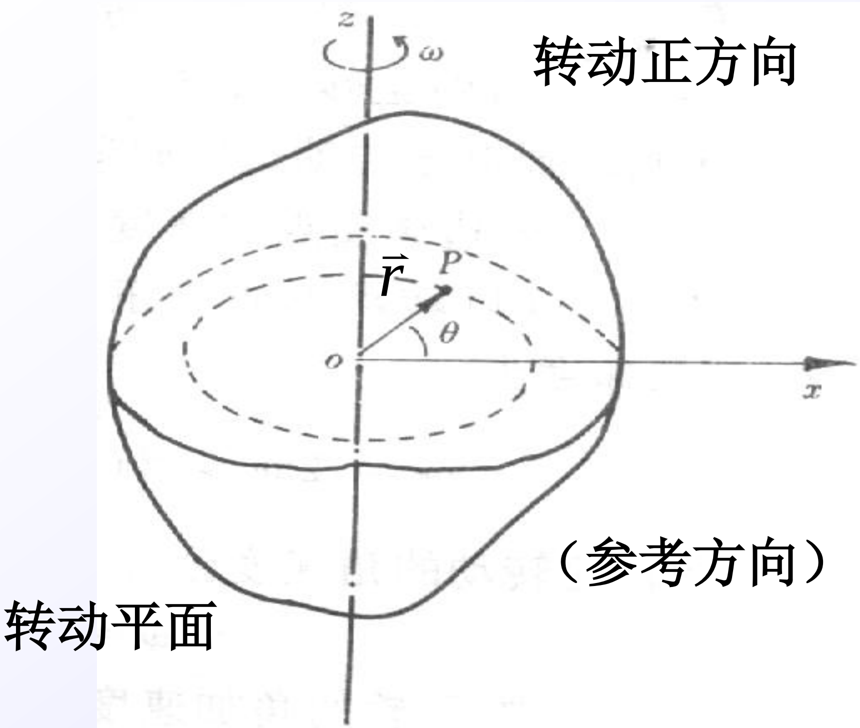
二、刚体的定轴转动

定轴转动----- 如果转轴是固定的转动。

特点: 刚体上各点都绕固定轴作圆周运动

转动平面 —— 垂直于转动轴的平面

定轴转动的运动学规律



1) 刚体上的各点具有相同的角量

角量描述： θ ， $\vec{\omega}$， $\vec{\beta}$

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

2) 不同圆周上的各点具有不同的线量

线速度 $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$

$$v_i = \omega R_i \sin\varphi = \omega r_i$$

切向加速度 $\vec{a}_{ti} = \vec{\beta} \times \vec{R}_i$

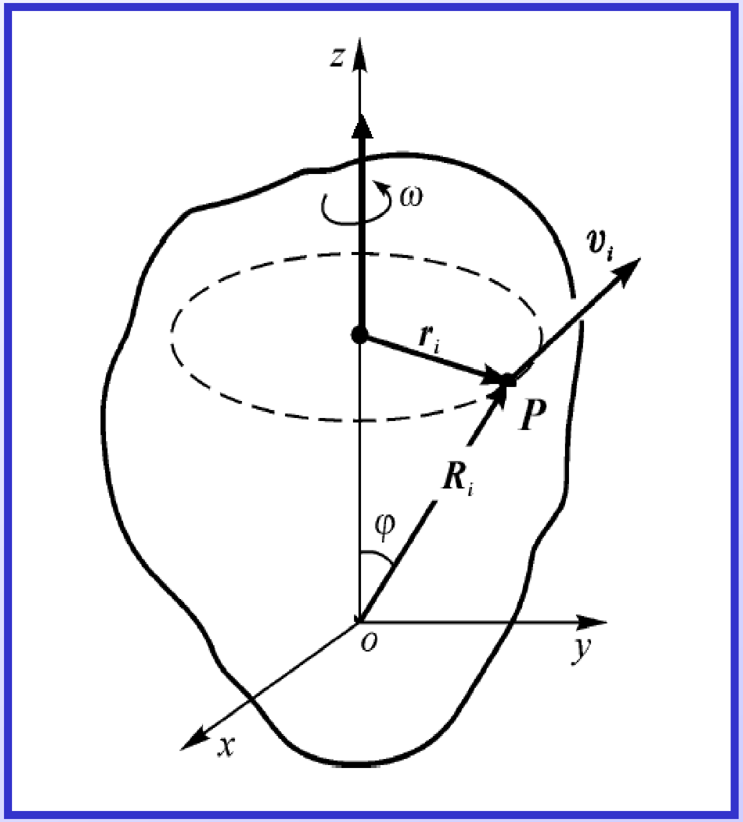
$$a_{ti} = \beta R_i \sin\varphi = \beta r_i$$

法向加速度 $\vec{a}_{ni} = \vec{\omega} \times \vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_i)$

$$a_{ni} = \omega v_i \sin 90^o = \omega v_i$$

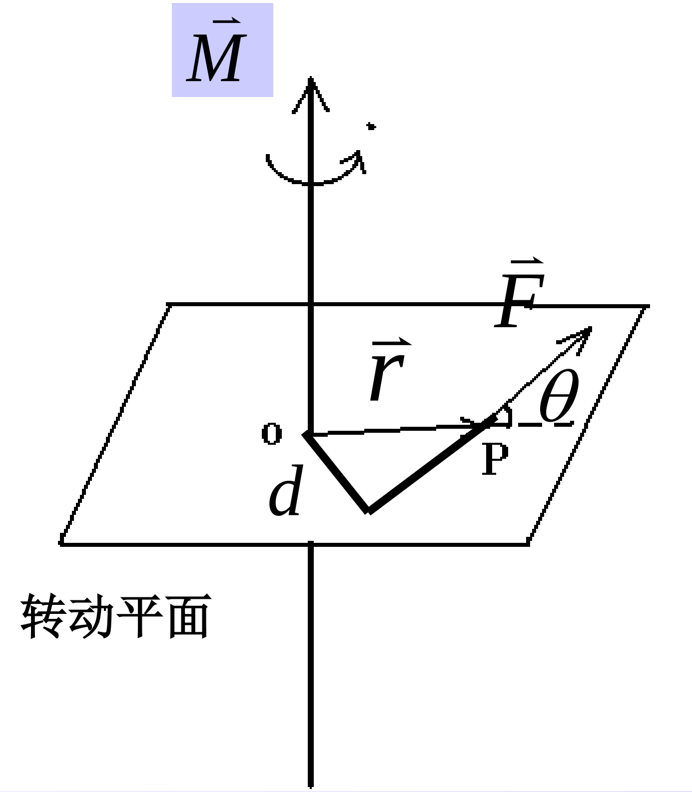
$$= \omega^2 r_i = \frac{v_i^2}{r_i}$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{ti} + \vec{a}_{ni} = \vec{\beta} \times \vec{R}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_i)$$



3-2 刚体定轴转动的转动定律

一、力对轴的力矩



1） 设 $\vec{F}$ 在转动平面内

大小： $\mathrm{M} = r \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d$

方向：沿轴向上

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

选定转轴正方向，用**M**的正负可表明力矩的方向。

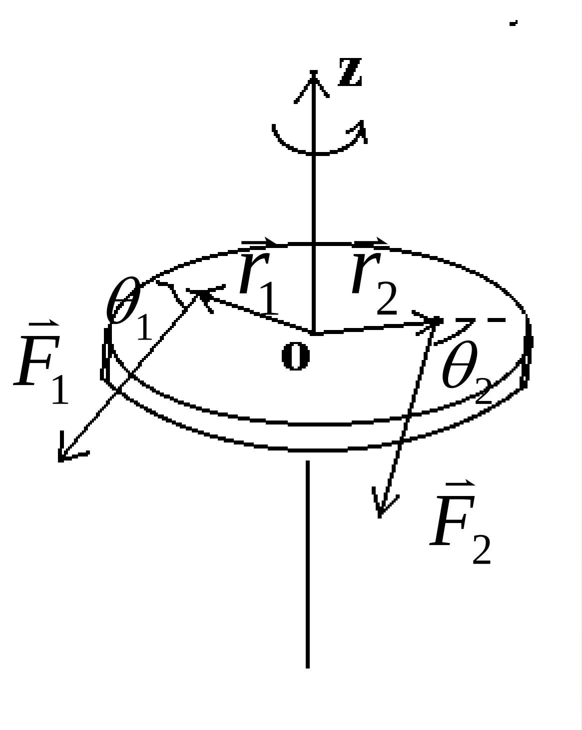
2） 如果 $\vec{F}$ 不在转动平面内

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$$

$\therefore$ $\vec{F}$ 应理解为在转动平面内的力

3）如果有几个力同时作用于刚体： $\vec{F}_1 \quad \vec{F}_2 \cdots \vec{F}_n$

合力矩： $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots \vec{r}_n \times \vec{F}_n$



例：如图所示

解：如图选定转轴正方向

$$M = r_1 F_1 \sin\theta_1 - r_2 F_2 \sin\theta_2$$

$M > 0$ 则$\vec{M}$的方向和转轴的正方向一致

$M < 0$ 则$\vec{M}$的方向和转轴的正方向相反

二、刚体定轴转动的转动定律

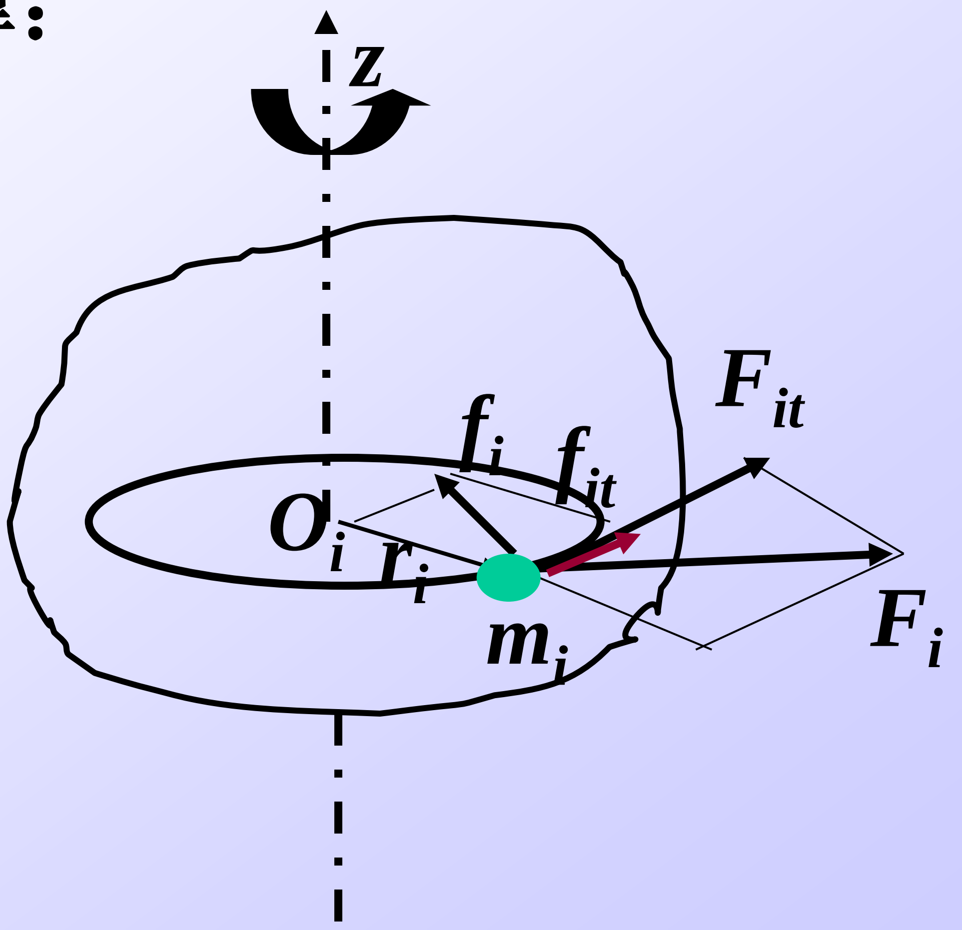
对m_i用牛顿第二定律：

$$\vec{F}_i+\vec{f}_i=m_i\vec{a}_i$$

切向分量式为：

$$F_{it}+f_{it}=m_ia_{it}=m_ir_i\beta$$

切向分力与圆的半径及转轴三者互相垂直



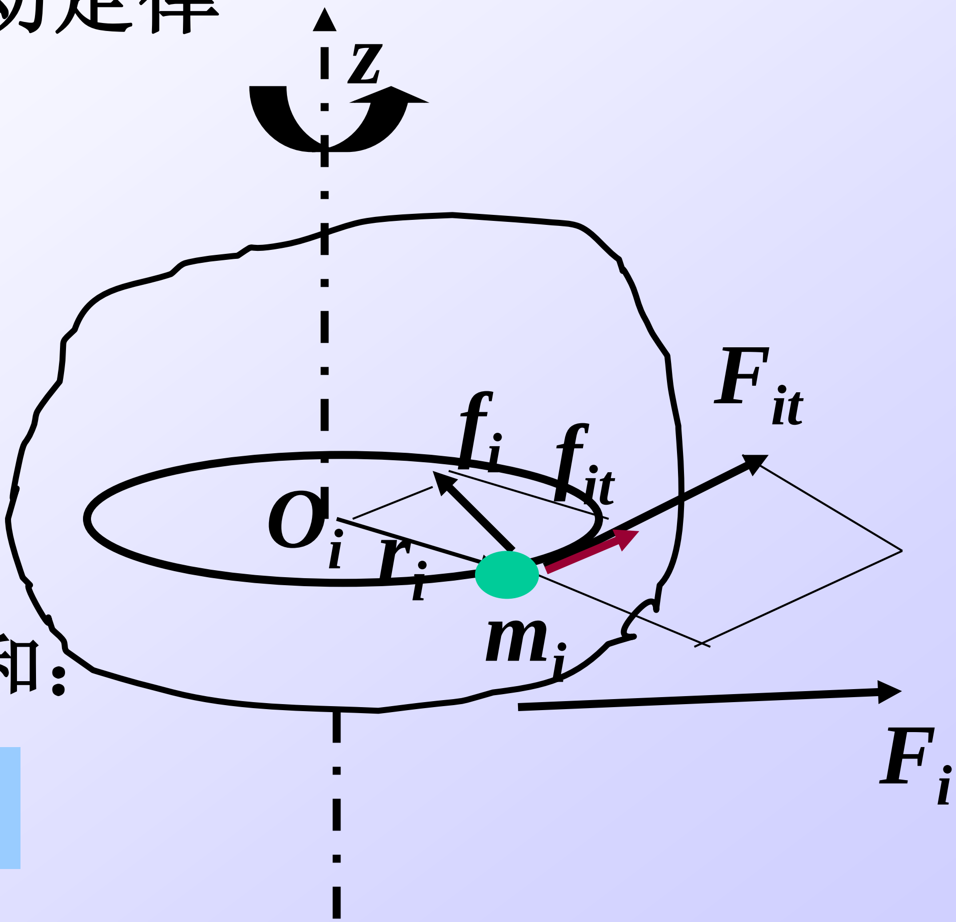
二、刚体定轴转动的转动定律

两边乘以r_i,有：

$$F_{it}r_i+f_{it}r_i=m_ir_i^2\beta$$

外力矩

内力矩



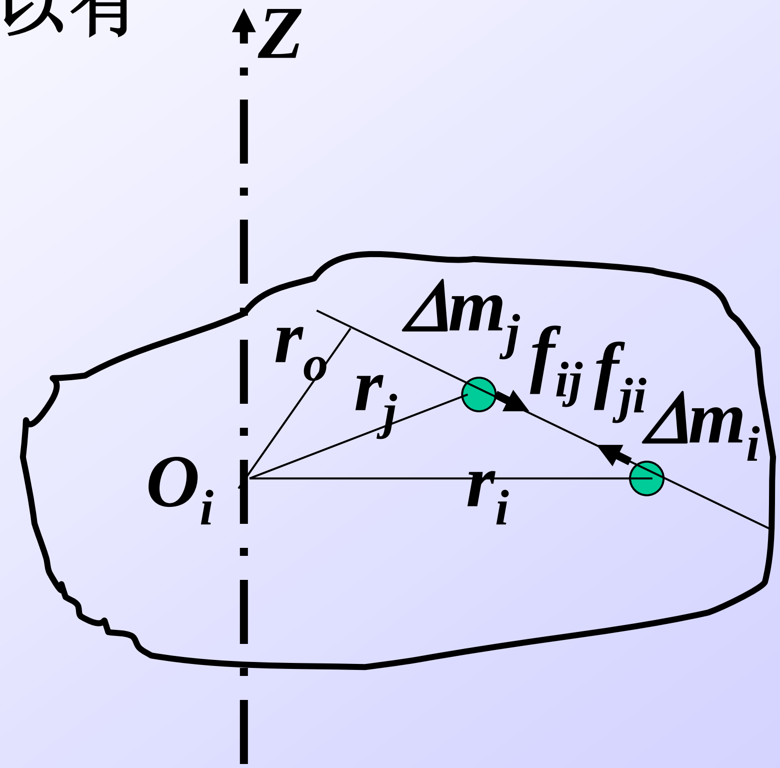
对所有质元的同样的式子求和：

$$\sum F_{it}r_i+\sum f_{it}r_i=\sum m_ir_i^2\beta$$

一对内力的力矩之和为零，所以有

$$\sum F_{it} r_i = (\sum m_i r_i^2)\,\beta$$

令 $J=\sum m_i r_i^2$ J为刚体对于转轴的转动惯量



用M表示$\sum F_{it} r_i$（合外力矩）

则有 $M=J\beta$

即 刚体定轴转动的转动定律 $\vec{M}=J\vec{\beta}$

三、转动惯量

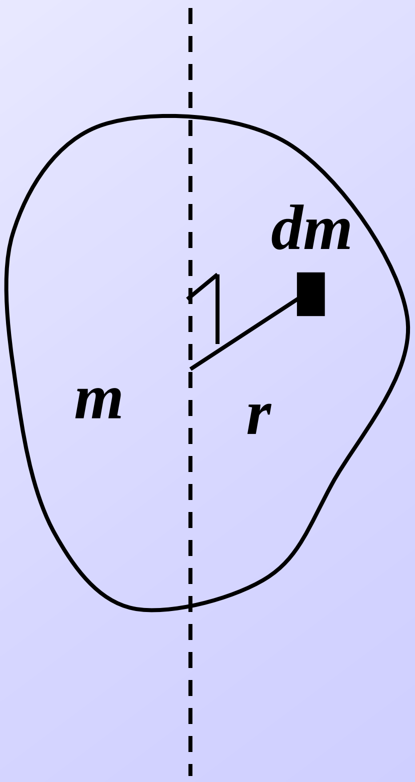
1、转动惯量的物理意义

$\vec{M} = J\vec{\beta}$ 与 $\vec{F} = m\vec{a}$ 地位相当

m反映质点的平动惯性，
J反映刚体的转动惯性

2、转动惯量的计算：

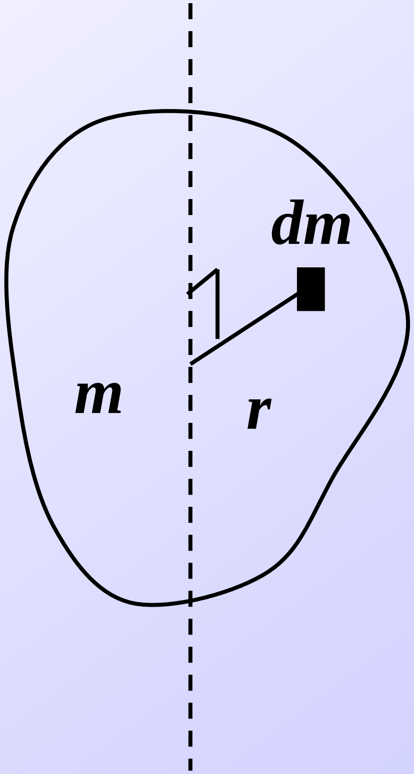
质点系　$J = \sum_i m_i r_i^2$



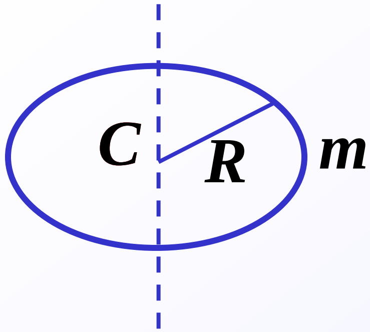
三、转动惯量

若质量连续分布　$dJ = r^2 dm$

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m \begin{cases} \text{质量为线分布} & dm = \lambda dl \\ \text{质量为面分布} & dm = \sigma ds \\ \text{质量为体分布} & dm = \rho dV \end{cases}$$



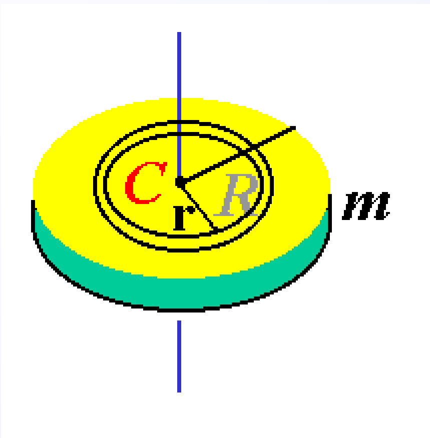
例1：常用的几个J



1）均匀圆环：$\boxed{J_c = mR^2}$

2）均匀圆盘：$dm = \sigma \cdot 2\pi r dr$

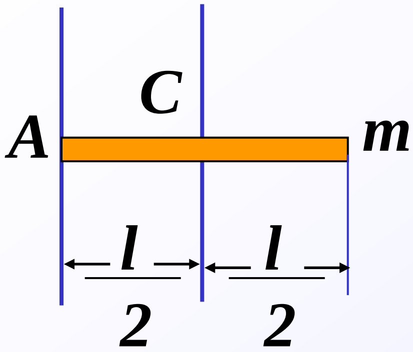
$$dJ = r^2 dm = \sigma \cdot 2\pi r^3 dr$$



$$J_c = \int dJ = \int_0^R \sigma \cdot 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4$$

$$\because \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \quad \boxed{\therefore J_c = \frac{1}{2} mR^2}$$

例1：常用的几个J



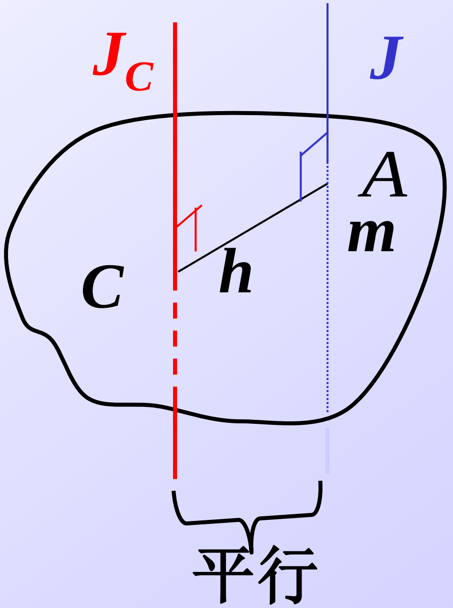
3）均匀棒：

$$J_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$J_A = \frac{1}{3} ml^2$$

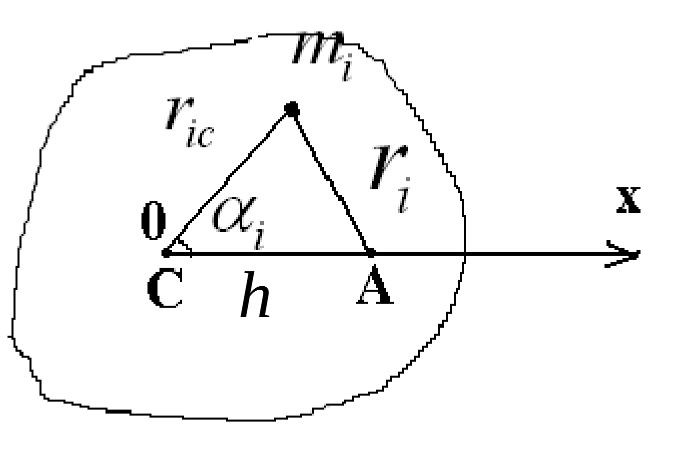
3、平行轴定理

$$J = J_C + mh^2$$



3、平行轴定理

$$J = J_C + mh^2$$



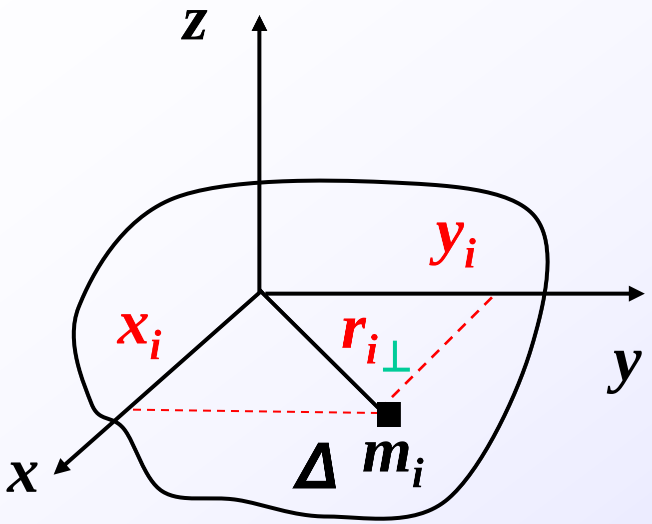
$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

$$r_i^2 = r_{ic}^2 + h^2 - 2r_{ic}h\cos\alpha_i$$

$$J = \sum_i \Delta m_i r_{ic}^2 + \sum_i \Delta m_i h^2 - 2h\sum_i \Delta m_i r_{ic}\cos\alpha_i$$

$$\sum_i \Delta m_i r_{ic}\cos\alpha_i = \sum_i \Delta m_i x_i = mx_c = 0$$

4、对薄平板刚体的正交轴定理



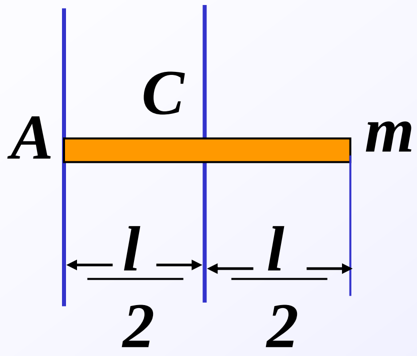
$$J_Z = J_x + J_y$$

说明(1)仅适用于薄板刚体

(2)xy平面为薄板平面

5、回转半径

$$R_G \equiv \sqrt{\frac{J}{m}} \qquad \boxed{J \equiv mR_G^2}$$



$$J_A = \frac{1}{3}ml^2 \qquad \frac{1}{3}ml^2 = mR_G^2$$

$$R_G = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

四、刚体定轴转动的转动定律的应用

对刚体的动力学问题

$M = J\beta$ 与 $\vec{F} = m\vec{a}$ 联合起来运用

【解题步骤】：

（1） 确定研究对象，进行受力分析，画出隔离体受力图；

（2） 建立坐标系，规定转轴正方向，并尽可能使两者在运动方向保持一致；

（3） 对质点的平动用牛顿第二定律，对刚体的转动用转动定律，列联立方程；

（4） 由物体之间的连接关系及角量与线量的对应关系，列出补充方程；

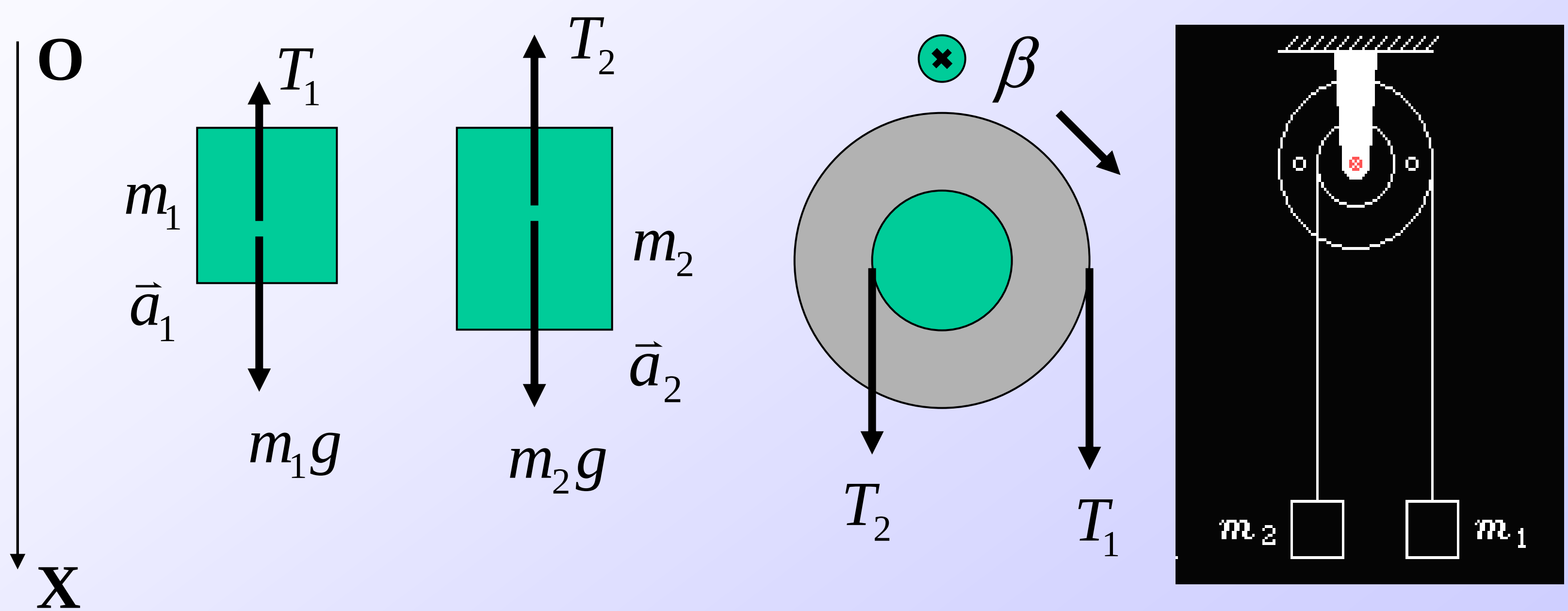
（5） 求解方程，并分析结果的合理性与物理意义。

【例题2】如图所示，一个组合轮由两个匀质的圆盘固接而成，大盘质量 M_1=6kg，半径 R=0.10m，小盘的质量 M_2=4kg，半径r=0.05m。两盘边缘上分别绕有细绳，细绳的下端各悬挂质量为 m_1=m_2=2kg 的物体，试求：

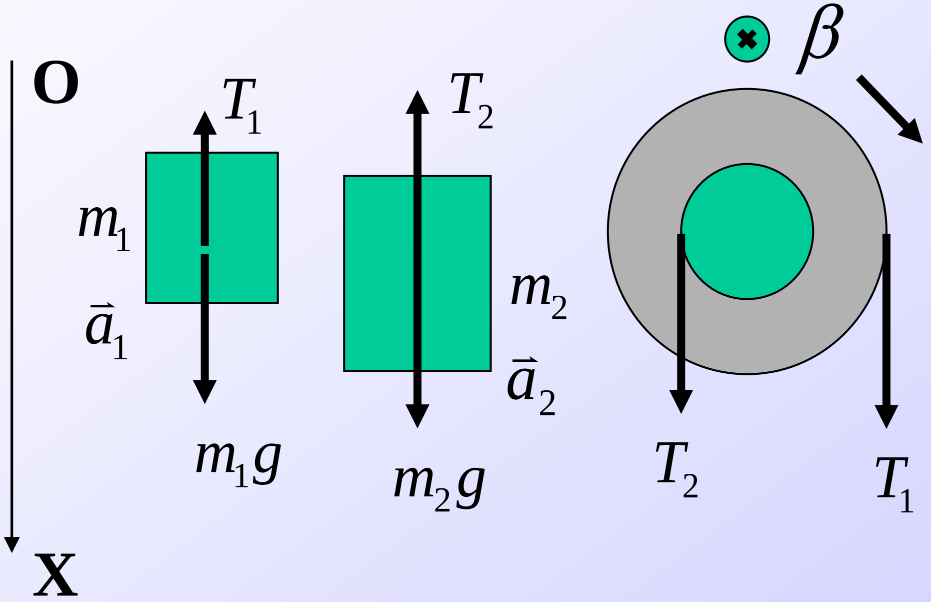
①两物体 m_1、m_2 的加速度大小；

②两绳子中的张力。

解：



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 ---(1) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 ---(2) \\ T_1 R - T_2 r = J\beta ---(3) \\ J = \dfrac{1}{2} M_1 R^2 + \dfrac{1}{2} M_2 r^2 ---(4) \\ a_1 = R\beta ---(5) \\ a_2 = -r\beta ---(6) \end{cases}$$



解上述联立方程可得

$$a_1 = 1.63\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, a_2 = -0.82\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$T_1 = 16.3\ \mathrm{N}, T_2 = 21.2\ \mathrm{N}$$

刚体力学

作业:

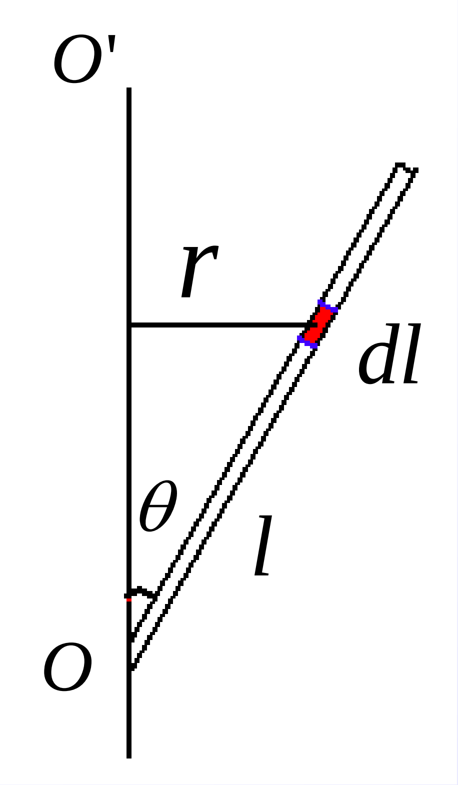
3 -1

-5

-6

-15

例3：求如图所示的匀质细棒对 OO'轴的转动惯量



已知： $L \quad m \quad \theta$

$$dJ = r^2 dm \qquad \boxed{J = \int r^2 \mathrm{d}m}$$

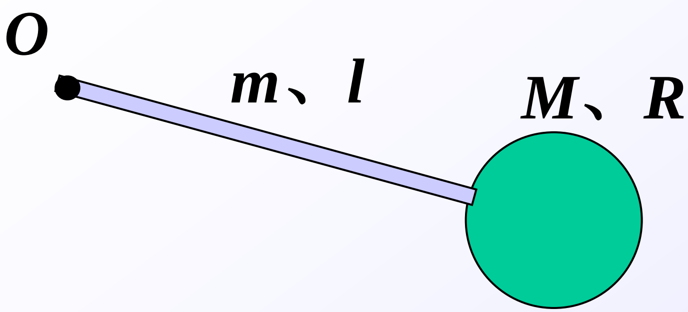
$$dm = \lambda dl \qquad \lambda = \frac{m}{L}$$

$$dJ = r^2 dm = l^2 \sin^2 \theta \lambda dl$$

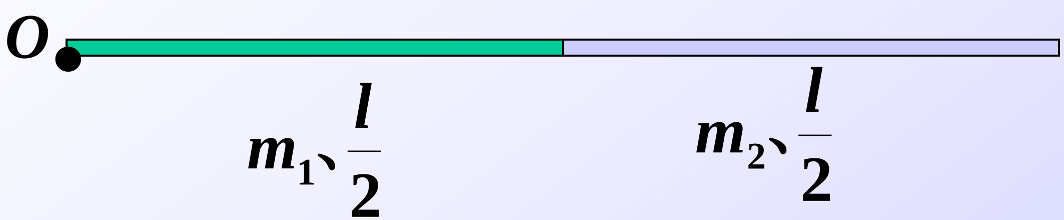
$$\boxed{J = \int dJ = \int_0^L l^2 \sin^2 \theta \lambda dl = \frac{1}{3} m L^2 \sin^2 \theta}$$

【例题4】计算下列刚体对O轴的转动惯量J_0:

$$J = J_C + mh^2$$

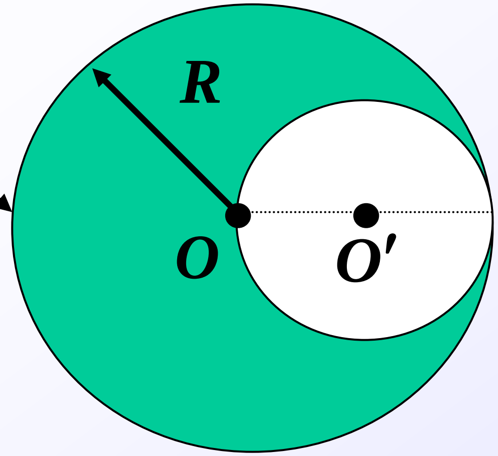


$$J_O = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(l+R)^2$$



$$J_O = \frac{1}{3}m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{4}\right)^2$$

剩余部分的质量为 m



$$m_{总}=\frac{4}{3}m,\qquad m_{孔}=\frac{1}{3}m$$

$$J_0=J_1-J_2$$

$$J_1=\frac{1}{2}m_{总}R^2\qquad J_2=\frac{1}{2}m_{孔}\left(\frac{1}{2}R\right)^2+m_{孔}\left(\frac{1}{2}R\right)^2$$

$$J_0=\frac{1}{2}m_{总}R^2-\left[\frac{1}{2}m_{孔}\left(\frac{1}{2}R\right)^2+m_{孔}\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]=\frac{13}{24}mR^2$$