积分变换法

积分变换一般指傅里叶(Fourier)变换和拉普拉斯(Laplace)变换,它们分别是研究微分方程初值问题和半无界问题的重要方法, 同时它们在其它学科有着重要的应用。

Fourier 变换的来源

一个以T为周期的周期函数$f_T(x)$可以展开成一个傅里叶级数(利用欧拉公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

$$f_T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_K \sin(\frac{2k\pi x}{T}) + B_k \cos(\frac{2k\pi x}{T})\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi inx/T},$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\bar{e}^{2\pi int/T}dt,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

- 一个以T为周期的周期函数$f_T(x)$可以表示为

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\bar{e}^{2\pi int/T}e^{2\pi inx/T}dt.$$

Fourier 变换的来源

- 在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(x)$(可能不再是一个周期函数)。

处理方法: 任取$T>0$,构造一个以T为周期的函数$f_T(x)$使得

$$f_T(x)=f(x),\ x\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}].$$

对于任何$|x|<T$,

$$f(x)=f_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\overline{e}^{2\pi int/T}e^{2\pi inx/T}dt.$$

令$T\to+\infty$取极限，可得到积分等式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Fourier 变换的定义

定义: 设$f(x)$是一个为绝对可积函数(即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$),则我们称广义积分

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

为 $f(x)$的 Fourier变换,而把积分变换

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

称为 $f(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换.

Fourier 反演定理

满足什么条件的函数能作Fourier变换和Fourier逆变换?

定理: 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$上连续且绝对可积(即满足$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$). 则我们有Fourier 反演公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\right]e^{i\lambda x}d\lambda,$$

即

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]=f(x).$$

Fourier 变换

例. 求函数 $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ e^{-\beta x}, x > 0 \end{cases}$ 的 Fourier 变换，其中 $\beta > 0$。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+i\lambda)x}dx = \frac{1}{\beta+i\lambda} = \frac{\beta-i\lambda}{\beta^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

Fourier 变换

例. 求函数 $f(x) = e^{-|x|}$ 的 Fourier 变换。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\lambda)x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\lambda)x}dx \\
&= -\frac{1}{\beta + i\lambda}e^{-(1+i\lambda)x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \frac{1}{1-i\lambda}e^{(1-i\lambda)x}\Big|_{x=-\infty}^{x=0} \\
&= \frac{2i\lambda}{1+\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Fourier 变换

例. 求函数 $f(x)=\frac{\sin(ax)}{x}$ 的 Fourier 变换，其中$a>0$。

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}e^{-i\lambda x}dx$$

$\frac{\sin(ax)}{x}\cos(\lambda x)$偶函数，$\frac{\sin(ax)}{x}\sin(\lambda x)$奇函数. 利用

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ a>0\\ 0,\ a=0\\ -\frac{\pi}{2},\ a<0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\lambda) &= 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\cos(\lambda x)dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(a+\lambda)x+\sin(a-\lambda)x}{x}dx=\begin{cases}\pi,\ |\lambda|<a\\ 0,\ |\lambda|>a\\ \frac{\pi}{2},\ |\lambda|=a\end{cases}\end{aligned}$$

Fourier 变换的基本性质

下面出现的函数总是假设它们的 Fourier 变换是存在的。

- **线性性质**：a_1 和 a_2常数，$F_1(\lambda)=\mathcal{F}[f_1(x)]$, $F_2(\lambda)=\mathcal{F}[f_2(x)]$。则

$$\mathcal{F}[a_1 f_1 + a_2 f_2](\lambda) = a_1 F_1(\lambda) + a_2 F_2(\lambda),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[a_1 F_1 + a_2 F_2](x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x).$$

- **平移性质**：对$a\in R$，有

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f(x)](\lambda),$$

$$\mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\lambda) = \mathcal{F}[f(t)](\lambda - a).$$

Fourier 变换的基本性质

- **伸缩性质（或相似性定理）：** 对$a \neq 0$，有

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{a}).$$

- **乘多项式性质:** $\mathcal{F}[xf(x)](\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}[f](\lambda).$
- **微分性质:** 若函数 f 的一阶导数 f' 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$。则

$$\mathcal{F}[f'(x)](\lambda) = i\lambda\mathcal{F}[f](\lambda).$$

注: 若函数 f 的 n 阶导数 $f^{(n)}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$ 则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n\mathcal{F}[f](\lambda).$$

Fourier 变换的基本性质

- **积分性质:**

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi](\lambda) = -\frac{i}{\lambda}\mathcal{F}[f](\lambda).$$

- **对称性质:**

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](-\lambda).$$

- **能量积分(Parseval 等式):** 若 $F(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

卷积定义以及运算

定义: 已知函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则积分

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau$$

称为函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积.

例. $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$, $(f_1 * f_2)(x)$?

解 由卷积的定义，有

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau.$$

注意到$f_1(\tau)f_2(x-\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 0, x-\tau \geq 0$,

$$(f_1 * f_2)(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x e^{-(x-\tau)} d\tau, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Fourier 变换的基本性质

- **卷积定理:** 假设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 连续且绝对可积，记$F_1(\lambda)=\mathcal{F}[f_1](\lambda)$ 和 $F_2(\lambda)=\mathcal{F}[f_2](\lambda)$，则
$$\mathcal{F}[f_1\star f_2]=F_1(\lambda)F_2(\lambda),\mathcal{F}^{-1}[F_1(\lambda)F_2(\lambda)]=(f_1\star f_2)(x).$$

证明: 由分部积分和交换积分次序得

$$\mathcal{F}[(f_1\star f_2)(x)](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}[(f_1\star f_2)(x)]e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau\right]e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)e^{-i\lambda\tau}f_2(x-\tau)e^{-i\lambda(x-\tau)}d\tau dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)e^{-i\lambda\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x-\tau)e^{-i\lambda(x-\tau)}dx\right]d\tau=F_1(\lambda)F_2(\lambda).$$

Fourier 变换的基本性质

例. 求函数$f(x)=e^{-x^2}$的Fourier变换.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx \\
&= -\frac{1}{i\lambda} e^{-x^2} e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \frac{2i}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx \\
&= \frac{2i}{\lambda}\mathcal{F}[xf(x)](\lambda) = -\frac{2}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}[f(x)](\lambda)
\end{aligned}
$$

即满足$\frac{d\hat{f}}{d\lambda}=-\frac{\lambda}{2}\hat{f}(\lambda)$, 而$\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.由常微分方程的初值问题解得

$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

Fourier 变换的基本性质

例. 利用性质计算$e^{-3(x^2+4x-2)}$ 的 Fourier 变换。

解: 利用 Fourier 变换的性质（线性性质和平移性质）

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-3(x^2+4x-2)}](\lambda) &= \mathcal{F}[e^{-3(x+2)^2+18}](\lambda)\\ &= e^{18}\mathcal{F}[e^{-3(x+2)^2}](\lambda) = e^{18}e^{2\lambda i}\mathcal{F}[e^{-3x^2}](\lambda).\end{aligned}$$

由上例有

$$\mathcal{F}[e^{-3x^2}](\lambda) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} e^{-\lambda^2/(12)}.$$

因此，有

$$\mathcal{F}[e^{-3(x^2+4x-2)}](\lambda) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} e^{18}e^{2\lambda i}e^{-\lambda^2/(12)}.$$

Fourier 变换应用

例 一维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), \ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

解: 记函数 $u(x,t)$, $f(x,t)$ 和 $\phi(x)$ 关于变量 x 的 Fourier 变换分别为$\hat{u}(\lambda,t) = \mathcal{F}[u(x,t)](\lambda)$, $\hat{f}(\lambda,t) = \mathcal{F}[f(x,t)](\lambda)$, $\hat{\phi}(\lambda) = \mathcal{F}[\phi(x)](\lambda)$.对方程和初值条件关于变量 x 作 Fourier 变换,

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} - a^2(i\lambda)^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,t)|_{t=0} = \hat{\phi}(\lambda), \end{cases}$$

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^{\infty} \hat{f}(\lambda,t)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau.$$

Fourier 变换应用

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^{\infty} \hat{f}(\lambda, t)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau.$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\lambda,t)](x,t) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}](x,t) + \int_0^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,t)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}]d\tau \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}](x,t) \\
&\quad + \int_0^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,t)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}]d\tau.
\end{aligned}$$

注意到$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)] = \phi(x), \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,t)] = f(x,t).$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}](x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

Fourier 变换应用

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}](x,t) \\
&\quad + \int_0^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,t)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}]d\tau \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Fourier 变换应用

例. 一维弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

解: 记$\hat{u}(\lambda,t) = \mathcal{F}[u(x,t)](\lambda)$, $\hat{f}(\lambda,t) = \mathcal{F}[f(x,t)](\lambda)$, $\hat{\phi}(\lambda) = \mathcal{F}[\phi(x)](\lambda)$, $\hat{\psi}(\lambda) = \mathcal{F}[\psi(x)](\lambda)$.对方程和初值条件关于变量 x 作 Fourier 变换，得到

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}}{dt^2} - a^2(i\lambda)^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), t > 0 \\ \hat{u}(\lambda,t)|_{t=0} = \hat{\phi}(\lambda), \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(\lambda,t)|_{t=0} = \hat{\psi}(\lambda), \end{cases}$$

Fourier 变换应用

把它分解为二个问题

$$(I)\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}}{dt^2} - a^2(i\lambda)^2\hat{u} = 0, t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, t)|_{t=0} = \hat{\phi}(\lambda), \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(\lambda, t)|_{t=0} = \hat{\psi}(\lambda), \end{cases} \quad (II)\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}}{dt^2} - a^2(i\lambda)^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda, t),\ t > 0 \\ \hat{u}(\lambda, t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(\lambda, t)|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

问题(I)的解是

$$\hat{u}_1(\lambda, t) = \hat{\phi}(\lambda)\cos(a\lambda t) + \frac{1}{a}\hat{\psi}(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}.$$

我们利用齐次化原理来求解问题 (II)。

Fourier 变换应用

记 $w(\lambda, t, \tau)$ 为下列问题

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dt^2} - a^2(i\lambda)^2 w = 0, \ t > 0 \\ w(\lambda, t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{dw}{dt}(\lambda, t)|_{t=0} = \hat{f}(\lambda, \tau), \end{cases}$$

的解

$$w(\lambda, t, \tau) = \frac{1}{a}\hat{f}(\lambda, \tau)\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}.$$

$$\hat{u}_2(\lambda, t) = \int_0^t w(\lambda, t-\tau, \tau)d\tau = \frac{1}{a}\int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau)\frac{\sin(a\lambda(t-\tau))}{\lambda}d\tau.$$

Fourier 变换应用

$$\begin{aligned}\hat{u}(\lambda, t) &= \hat{\phi}(\lambda)\cos(a\lambda t) + \frac{1}{a}\hat{\psi}(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{a}\int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau)\frac{\sin(a\lambda(t-\tau))}{\lambda}d\tau.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)\cos(a\lambda t))](x,t) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\lambda)e^{a\lambda ti} - \hat{\phi}(\lambda)e^{-a\lambda ti}] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\phi(x+at)] + \mathcal{F}[\phi(x-at)]] \\ &= \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[\frac{\sin ax}{x}](\lambda) = \begin{cases} \pi, |\lambda| < a \\ 0, |\lambda| > a \end{cases}$$

Fourier 变换应用

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}](x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\frac{\sin(at\xi)}{\xi}](x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < at \\ 0, & |x| > at \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{a}\hat{\psi}(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}](x,t) = \frac{1}{a}\mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}] \star \mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}] \\
= \ & \frac{1}{a}\psi \star \mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda}] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_a t}\psi(s)ds, \\
& \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda,\tau)\frac{\sin(a\lambda(t-\tau))}{\lambda}](x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds.
\end{aligned}
$$

Fourier 变换应用

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(\lambda, t) &= \hat{\phi}(\lambda)\sin(a\lambda t) + \frac{1}{a}\hat{\psi}(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{\lambda} \\
&+ \frac{1}{a}\int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau)\frac{\sin(a\lambda(t-\tau))}{\lambda}d\tau.
\end{aligned}
$$

作 Fourier逆变换得

$$
\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x-at}\psi(s)ds \\
&+ \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau.
\end{aligned}
$$

二.（20分）(1). 已知函数e^{-x^2}的Fourier变换是$\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$，求函数$e^{-Ax^2}$的逆变换, 其中常数$A>0$.

(2). 利用等式$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(f)(\lambda)|^2\,d\lambda$（其中$F(f)$表示函数$f$的Fourier变换）及Fourier变换证明：下列初值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, & x\in(-\infty,+\infty), t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

存在有限能量解$u(t,x)$（即存在依赖于函数φ和ψ的常数M使得$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(t,x)|^2\,dx\le M<+\infty$的充分必要条件是$\psi(x)=\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}$。

(3). 在条件$\psi(x)=\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}$下求出上述初值问题的有限能量解$u(t,x)$。

解. (1). $F^{-1}[e^{-Ax^2}](\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$.

(2). 记函数$u(t,x)$、$\varphi(x)$和$\psi(x)$关于变量x的Fourier变换为$\hat{u}$、$\hat{\varphi}$及$\hat{\psi}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - \lambda^4 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}, \qquad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}|_{t=0} = \hat{\psi} \end{cases}$$

解得

$$\hat{u}(t,\lambda) = C_1 e^{-\lambda^2 t} + C_2 e^{\lambda^2 t}$$

其中

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}(\lambda) - \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda^2}\right),\ C_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}(\lambda) + \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda^2}\right).$$

注意到$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x)|^2\, dx \le M < +\infty \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow$

$$0 = \lambda^2 \hat{\varphi}(\lambda) + \hat{\psi}(\lambda) = F[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \psi](\lambda) \Rightarrow \psi(x) = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}$$

(3). 由（2）得$\hat{u}(t,\lambda)=\hat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$,再由(1) 以及Fourier变换的性质得

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi.$$