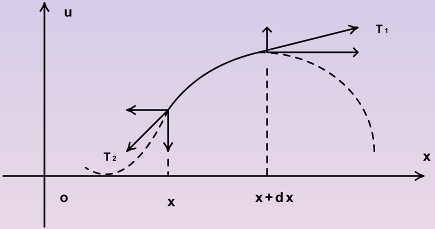
- 从几个重要的物理模型出发，推导出三类典型偏微分方程:
  - 弦振动方程,
  - 热传导方程,
  - 泊淞方程(拉普拉斯方程);
- 确定每类方程的定解条件—初值条件和边值条件;
- 介绍偏微分方程的一些基本概念;
- 介绍二阶线性偏微分方程的分类与化简。

例1. 一根均匀柔软且有弹性的细弦作微小的横向振动，研究它的运动规律?

以弦平衡时所在的直线为 x 轴; ρ—线密度; $f_0(x,t)$—外力密度; $u(x,t)$—弦离开平衡位置的位移;



在弦上任取一小段 $[x, x+\Delta x]$, 二端的拉力分别为 T_1 和 T_2, 其与水平方向的夹角分别为 α_1 和 α_2. 该段弦的受力为

$$\text{水平方向} \qquad T_2 cos\alpha_2 - T_1 cos\alpha_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\text{垂直方向} \qquad T_2 sin\alpha_2 - T_1 sin\alpha_1 + f_0(x,t)\Delta s = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta s, \qquad (2)$$

Δs 为弧长. "微小"横振动$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$, $\alpha_1 \approx 0, \alpha_2 \approx 0$.

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + o(\alpha_1^3) \approx 1,$$

$$\sin\alpha_1 = \alpha_1 + o(\alpha_1^2) \approx \alpha_1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x = \tan\alpha_1 = \alpha_1 + (\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!})\alpha_1^3 + o(\alpha_1^4) \approx \alpha_1$$

我们取一次近似得

$$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x.$$

类似有

$$\cos\alpha_2 \approx 1,\ \sin\alpha_2 \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}, \Delta s = \sqrt{1+(u_x)^2}\Delta x \approx \Delta x.$$

- 水平方向 $\quad T_2 cos\alpha_2 - T_1 cos\alpha_1 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 = T_0$
- 垂直方向 $\quad T_2 sin\alpha_2 - T_1 sin\alpha_1 + f_0(x,t)\Delta s = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta s,$

$$\Rightarrow \quad T_0\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right) + f_0(x,t)\Delta x = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x.$$

令$\Delta x \to 0$得，

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

记 $a^2 = T_0/\rho$, $f(x,t) = f_0(x,t)/\rho$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t).$$

- 齐次的弦振动方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- 非齐次的弦振动方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

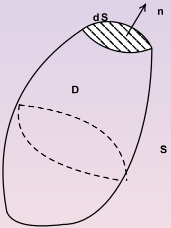
薄膜(或水波)的振动⇒**二维波动方程**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t),\ (x, y) \in \Omega,\ t \geq 0.$$

空气(或声波)的振动⇒**三维波动方程**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t),\ (x, y, z) \in \Omega,\ t \geq 0.$$

例2. 有一空间物体，讨论它内部的温度分布？
解: 热传导系数— k; 比热—C; (产生或吸收热量)热源密度为 $F(x, y, z, t)$; 物体的密度—ρ; t时刻点(x, y, z)处的温度—$u(x, y, z, t)$.
利用"**微元法**"：任取一块区域 D，其表面(闭曲面)为 S，单位外法向向量为 **n**.



通过S进入的热量+物体产生的热量 = 温度升高所需的热量

- **通过S进入的热量**Q_1: 由热力学中 Fourier 实验定律: 在时段 dt 内流过小块曲面 dS 的热量为

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

$[t, t+\Delta t]$内流入的总热量为

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t}\left(\int\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right)dt$$

利用高斯公式

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t}\left(\int\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right)dt = \int_t^{t+\Delta t}\left(\int\int\int_D k\Delta u dV\right)dt$$

其中

$$\Delta u = div(grad\ u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

- 在时段 $[t, t+\Delta t]$内产生的总热量

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_D F(x,y,z,t) dV \right) dt,$$

- 在时段 $[t, t+\Delta t]$温度从 $u(x,y,z,t)$ 升到 $u(x,y,z,t+\Delta t)$所需的热量

$$Q_2 = \iiint_D C\rho[u(x,y,z,t+\Delta t) - u(x,y,z,t)]dV,$$

由能量守恒定律⇒

通过S进入的热量+物体产生的热量 = 温度升高所需的热量

$$\int_t^{t+\Delta t}\left(\iiint_D k\Delta u dV\right)dt+\int_t^{t+\Delta t}\iiint_D F(x,y,z,t)dVdt$$

$$=\iiint_D C\rho[u(x,y,z,t+\Delta t)-u(x,y,z,t)]dV.$$

令$\Delta t\to 0$

$$\iiint_D k\Delta u dV+\iiint_D F(x,y,z,t)dV=\iiint_D C\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV$$

$$(\text{由区域D的任意性})\Rightarrow C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\Delta u+F(x,y,z,t)$$

记 $a^2=k/(C\rho)$, $f(x,y,z,t)=F/(C\rho)$得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t). \tag{3}$$

- 齐次的三维热传导方程: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$,
- 非齐次的三维热传导方程: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t)$,
- 二维热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t),\ (x, y) \in \Omega,\ t \geq 0$$

- 一维热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),\ x \in [a, b],\ t \geq 0.$$

例3. 物体产生(或吸收)热量的强度与时间无关,物体内稳定的温度场分布?(f与t无关,u也与t无关)

三维热传导方程: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,y,z) \Rightarrow$

- **三维的泊松方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z)$
- **三维的拉普拉斯方程(调和方程)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

二维热传导方程: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + f(x,y) \Rightarrow$

- **二维的泊松方程** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$
- **二维的拉普拉斯方程(调和方程)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

偏微分方程的基本概念

- 定义：把含有未知函数(多元函数) 及其偏导数的函数方程称为**偏微分方程**。
- 未知函数的最高阶偏导数的阶数称为**偏微分方程的阶**。
- **线性偏微分方程**：对未知函数及其各阶偏导数来说都是一次的,其系数仅依赖于自变量.
- 不是线性的偏微分方程称为**非线性偏微分方程**。
- 偏微分方程的一般形式：

$$F(x_1, \cdots, x_n; u; u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \cdots) = 0,$$

- 二阶线性偏微分方程的一般形式:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

- 当$f \equiv 0$时称为齐次的二阶线性偏微分方程;
- 当$f \not\equiv 0$时称为非齐次的二阶线性偏微分方程。
- 给定函数$u = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$，若把它及其各阶偏导数代入方程

$$F(x_1, \cdots, x_n; u; u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \cdots) = 0$$

使其在$\mathbb{R}^n$中的某一给定区域Ω内成为自变量的恒等式，则我们称函数$u = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$为**方程的一个解**。

下面是一些实际问题中出现的重要方程:

- Tricomi方程 $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
- Klein-Gordon方程 $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$
- 激波方程 $u_t + uu_x = 0$
- KdV方程 $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$
- 正弦Gordon方程 $u_{xt} = \sin u$
- 极小曲面方程 $(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$

初始条件和边界（或边值）条件

一．一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < \ell, t > 0$$

初始条件：$u(x,0) = \phi(x)$(它表示物体的初始温度).
边界（或边值）条件，通常有下列三种类型（以$x = \ell$ 为例）：

- 已知细杆端点的温度的变化$f(t)$——**第 I 类边界条件**或 **Dirichlet** 条件：$u(x,t)|_{x=\ell} = f(t)$.
- 已知细杆端点与外界热量交换强度$f(t)$——**第 II 类边界条件** 或 **Neumann** 条件：$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\ell} = f(t)$.

- 已知外界环境温度为 $m(t)$. 根据热力学定律，热流强度 $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$ 与温差成正比

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\ell} = h(u|_{x=\ell} - m(t))$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu u\right)|_{x=\ell} = f(t)$$

——**第 III 类边界条件**。

有限区间上的一维热传导方程允许：一个初始条件以及在每个端点加上边界条件（上面三种类型中的一种），例如

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < \ell, t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = f_1(t), \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=\ell} = f_2(t) \\ u(x,0) = \phi(x), 0 < x < \ell. \end{cases}$$

- $f_1(t) = 0, f_2(t) = 0$ 时⇒**齐次边界条件**
- $\phi = 0$ 时⇒**齐次初始条件**

无限区间上的一维热传导方程——只能加“初始条件”：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

称为 **初值问题** 或 **柯西(Cauchy)问题**。

二． 一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < \ell, t > 0$$

初始条件—$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$(分别代表初始位移和初始速度)
边界条件— 在细弦的二端（区间 $[0,\ell]$ 的边界）可加上类似于热传导方程的边界（或边值）条件。

有限区间上的一维波动方程允许：二个初始条件，在每个端点加上边界条件（上面三种类型中的一种），例如

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < \ell, t > 0 \\ u(x,t)|_{x=0} = f_1(t), \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=\ell} = f_2(t) \\ u(x,0) = \phi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) 0 < x < \ell. \end{cases}$$

- $f_1(t) = 0, f_2(t) = 0$ 时 $\Rightarrow$ **齐次边界条件**
- $\phi(x) = 0, \psi(x) = 0$ 时 $\Rightarrow$ **齐次初始条件**

无限区间上的一维波动方程——只能加“初始条件”：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

称为 **初值问题** 或 **柯西(Cauchy)问题**。

三. 二维的泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),(x,y)\in D.$$

泊松方程不能加**初始条件**，(泊松方程描述的是一些稳定状况,它的初始状态就是它今后的存在状态), 只能加上“边界（或边值）条件”。例如(∂D表示区域D的边界)允许加下列边界条件之一:

- **Dirichlet条件**: $u|_{(x,y)\in\partial D}=g(x,y)$;
- **Neumman条件**: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(x,y)\in\partial D}=g(x,y)$(其中$n$是单位外法向方向);
- 第三类边界条件: $\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_{(x,y)\in\partial D}=g(x,y)$(其中$n$是单位外法向方向);

- **定解问题**： 方程 + 定解条件。
- **适定性**： 定解问题解的存在性，惟一性以及解关于初值条件和边界条件的连续依赖性。

二阶线性方程的分类与叠加原理

二个自变量的二阶线性偏微分方程：

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g.$$

线性方程的叠加原理：

- 函数u_1, u_2是$Lu_1 = g_1$，$Lu_2 = g_2$的解，c_1, c_2为常数$\Rightarrow$ $c_1 u_1 + c_2 u_2$为$Lu = c_1 g_1 + c_2 g_2$的解。
- 函数u_1, u_2是$Lu_1 = 0$，$Lu_2 = 0$的解,c_1, c_2为常数$\Rightarrow$ $c_1 u_1 + c_2 u_2$为$Lu = 0$的解。

二阶线性方程的分类

二个自变量的二阶线性偏微分方程

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g.$$

在点(x_0, y_0)

- $\Delta \equiv b^2 - ac > 0 \Rightarrow$双曲型的;
- $\Delta \equiv b^2 - ac = 0 \Rightarrow$抛物型的;
- $\Delta \equiv b^2 - ac < 0 \Rightarrow$椭圆型的

在区域Ω内

- $\Delta \equiv b^2 - ac > 0 \Rightarrow$双曲型的,例如 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$;
- $\Delta \equiv b^2 - ac = 0 \Rightarrow$抛物型的,例如 $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$;
- $\Delta \equiv b^2 - ac < 0 \Rightarrow$椭圆型的,例如 $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$

例. 判别方程$u_{xx}+yu_{yy}=0$的类型?

- 当$y>0$时$\Delta=-y<0$,椭圆型方程;
- 当$y=0$时$\Delta=-y=0$,抛物型方程;
- 当$y<0$时$\Delta=-y>0$,双曲型方程.

二阶线性方程的化简

- $u_{xx} - u_{yy} = Au_x + Bu_y + Cu + D$—双曲型方程的标准型；
- $u_{xx} = Au_x + Bu_y + Cu + D$或$u_{yy} = Au_x + Bu_y + Cu + D$—抛物型方程的标准型；
- $u_{xx} + u_{yy} = Au_x + Bu_y + Cu + D$—椭圆型方程的标准型。

如何化为标准型？

二个自变量的二阶线性偏微分方程

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g.$$

$\Rightarrow$(找自变量变换)

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

$u = u(x, y) = u(\xi, \eta)$ 利用复合函数求导法则得

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \cdots.$$

代入方程得:

$$a_1 u_{\xi\xi} + 2b_1 u_{\xi\eta} + c_1 u_{\eta\eta} + d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u = g_1.$$

$$\begin{cases} a_1 = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ b_1 = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ c_1 = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ d_1 = \cdots, e_1 = \cdots \\ f_1 = f, g_1 = g \end{cases}$$

注意到系数a_1和c_1有类似的表达式,若能取二个线性无关的函数$\xi(x,y)$和$\eta(x,y)$使得

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0, \ \ a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0$$

则方程可以简化为

$$2b_1 u_{\xi\eta} + d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u = g_1.$$

- $\phi=\phi(x,y)$是$a\phi_x^2+2b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2=0$的解$\Leftrightarrow$ $\phi(x,y)=C$为$a(dy)^2-2bdxdy+c(dx)^2=0$的解.
- 我们把

$$a(dy)^2-2bdxdy+c(dx)^2=0$$

称为

$$Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

特征方程

$$\Delta = b^2 - ac > 0\text{时，特征方程}a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(A_1(x,y)dy + B_1(x,y)dx)(A_2(x,y)dy + B_2(x,y))dx = 0$$

$$\Rightarrow A_1(x,y)dy + B_1(x,y)dx = 0,\ A_2(x,y)dy + B_2(x,y)dx = 0$$

$$\Rightarrow \phi_1(x,y) = C_1,\ \phi_2(x,y) = C_2$$

取 $\xi = \phi_1(x,y),\ \eta = \phi_2(x,y)$,方程

$$\Rightarrow u_{\xi\eta} = d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u + g_1$$

$(\xi = s + t, \eta = s - t)$

$$\Rightarrow u_{ss} - u_{tt} = d_2 u_s + e_2 u_t + f_2 u + g_2.$$

—双曲型方程的标准型。

例. 试将方程$y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$化为标准型。

解 当$x\neq 0, y\neq 0$时$\Delta=b^2-ac=x^2y^2>0$,双曲型方程.特征方程是

$$y^2(dy)^2-x^2(dx)^2=0,$$

$$\Rightarrow ydy-xdx=0,\ ydy+xdx=0.$$

特征线族为$\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2=C_1$, $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2=C$.取变换

$$\xi=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2,\ \eta=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2.$$

u满足

$$u_{\xi\eta}=\frac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}u_\xi-\frac{\xi}{2(\xi^2-\eta^2)}u_\eta.$$

再令$s=\xi+\eta$, $t=\xi-\eta$,

$$\Rightarrow u_{tt}-u_{ss}=\frac{1}{2s}u_s-\frac{1}{2t}u_t.$$

当 $\Delta = b^2 - ac = 0$ 时,特征方程为

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = (A_1(x,y)dy + B_1(x,y)dx)^2 = 0,$$

$\Rightarrow \phi_1(x,y) = C_1$.
取一个与函数$\phi_1(x,y)$线性无关的函数$\phi_2(x,y)$取变换$\xi = \phi_1(x,y), \eta = \phi_2(x,y)$方程

$$\Rightarrow u_{\eta\eta} = d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u + g_1.$$

—抛物型方程的标准型。

例. 试将方程$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$化为标准型。

解 $\Delta=b^2-ac=x^2y^2-x^2y^2=0$,抛物型方程，特征方程是

$$x^2(dy)^2-2xydxdy+y^2(dx)^2=0,$$

$\Rightarrow xdy-ydx=0$, 特征线族为$y/x=C_1$.取变换

$$\xi=y/x,\ \eta=x.$$

在新的自变量(ξ,η)下未知函数u满足

$$u_{\eta\eta}=0,\ (y\neq 0).$$

当 $\Delta = b^2 - ac < 0$ 时,特征方程为$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$

$$\Rightarrow (A(x,y)dy + iB(x,y)dx)(A(x,y)dy - iB(x,y)dx) = 0,$$

$$\Rightarrow A(x,y)dy + iB(x,y)dx = 0,\ A(x,y)dy - iB(x,y)dx = 0,$$

$$\Rightarrow \phi_1(x,y) + i\phi_2(x,y) = C,\ \phi_1(x,y) - i\phi_2(x,y) = C$$

$\Rightarrow \phi_1(x,y)$与$\phi_2(x,y)$是线性无关的。取变
换$\xi = \phi_1(x,y), \eta = \phi_2(x,y)$,方程

$$\Rightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u + g_1.$$

—椭圆型方程的标准型。

例. 试将Tricomi方程$yu_{xx}+u_{yy}=0$化为标准型。

解 $\Delta=-y$。

- 当$y>0$时椭圆型方程，特征方程是$y(dy)^2+(dx)^2=0$,

$$\Rightarrow i\sqrt{y}dy+dx=0,\ -i\sqrt{y}dy+dx=0.$$

$\Rightarrow$特征线族为$x\pm i\frac{2}{3}y^{3/2}=C$。取变换

$$\xi=x,\ \eta=\frac{2}{3}y^{3/2}.$$

在新的自变量(ξ,η)下未知函数u满足标准的椭圆型方程。

- 当$y<0$时双曲型方程，特征方程是$y(dy)^2+(dx)^2=0$,

$$\Rightarrow \sqrt{-y}dy+dx=0,\ -\sqrt{-y}dy+dx=0.$$

$\Rightarrow$特征线族为

$$x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_1,\ x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_2.$$

取变换

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2},\ \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}.$$

在新的自变量(ξ,η)下未知函数u满足

$$u_{\xi\eta}=\frac{6}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta).$$

再令$s=\xi+\eta,\ t=\xi-\eta$,则方程$\Rightarrow$

$$u_{tt}-u_{ss}=\frac{1}{3t}u_t.$$

———标准的双曲型方程