球域中的分离变量法— Legendre多项式的应用

例. 半径为 a 的球，自己不产生热量，球面温度是 f, 求球内恒温场的温度?

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = f(x, y, z) \end{cases}$$

引进球坐标$x = \rho \sin\phi \cos\theta,\ y = \rho \sin\phi \sin\theta,\ z = \rho\cos\phi$,其中 $0 \le \rho \le a, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$。则 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right] = 0, \\ u|_{\rho=a} = f(\phi, \theta),\ u|_{\theta} = u|_{2\pi+\theta}, u|_{\phi=0}\text{及}u|_{\phi=\pi}\text{有界} \end{cases}$$

当函数 f 与 θ 无关而仅仅与 ϕ有关时，寻找与 θ 无关的解$u = u(\rho, \phi)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi \frac{\partial u}{\partial \phi}) = 0, \\ u|_{\rho=a} = f(\phi),\ u|_{\phi=0}\text{及}u|_{\phi=\pi}\text{有界} \end{cases}$$

(用分离变量法）先求满足方程和“$u|_{\phi=0}$ 及 $u|_{\phi=\pi}$ 有界”的非零解 $u = R(\rho)\Phi(\phi)$。

$$\frac{\rho^2 R'' + 2\rho R'}{R} = -\frac{\Phi'' + ctg\phi\Phi'}{\Phi} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, |R(\rho)| < +\infty \\ \Phi'' + ctg\phi\Phi' + \lambda\Phi = 0,\ \Phi(0)\text{及}\Phi(\pi)\text{有界} \end{cases}$$

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, |R(\rho)| < +\infty \Rightarrow \lambda \geq \frac{1}{4}$$

$$\lambda \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = n(n+1), n \geq \frac{1}{2}.$$

$$\Phi'' + ctg\phi\Phi' + n(n+1)\Phi = 0,\ \Phi(0)及\Phi(\pi)有界$$

令 $x = \cos\phi$，记 $y(x) = \Phi(\phi)$，则 $y(x)$ 满足Legendre方程$(n \geq \frac{1}{2})$

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,\ y(\pm 1)有界$$

常微分方程的幂级数解法

考虑二阶线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

定理.(幂级数解) 如果函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $|x - x_0| < R$ 内可以表示为收敛的幂级数，即

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \; q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$$

则二阶线性常微分方程(*)在 $|x - x_0| < R$ 内有可以表示为收敛的幂级数形式的解$y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$, 其中 b_n 可由 p_n 和 q_n确定。

让勒德(Legendre)方程及其通解

n 阶的 **Legendre** 方程是(其中 $n > -1$ 是实数)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

在区域 $|x| < 1$ 内 n 阶的 Legendre 方程有幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \{(k+2)(k+1)a_{k+2} - [k(k+1) - n(n+1)]a_k\} x^k = 0,$$

$$\Rightarrow a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k, \ k = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k, \ k = 0, 1, 2, \cdots .$$

$$a_2 = \frac{(-1)n(n+1)}{2!} a_0, \ a_4 = \frac{(-1)^2 n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}, \cdots ,$$

$$a_3 = \frac{(-1)(n-1)(n+2)}{3!} a_0, \ a_5 = \frac{(-1)^2 (n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}, \cdots$$

n 阶的 Legendre 方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \cdots \right] \\ &\quad + a_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \cdots \right. \\ &= a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots \\
y_1(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

- $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $|x| < 1$ 内收敛且它们线性无关;
- 注意到递推公式$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中有因子 $(n-k)$。
  - 当 n 是一个非负整数，$a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0$,即在二个特解 $a_0y_0(x)$ 和 $a_1y_1(x)$ 中恰好有一个是 n 次多项式$P_n(x)$，称为 n 次 **Legendre** 多项式或第一类 **Legendre** 函数(为了讨论方便适当选取 a_0 或 a_1 使 $P_n(x)|_{x=1} = 1$)。

另外一个特解仍是一个幂级数，在区域 $|x| < 1$ 内收敛，而 $x = \pm 1$ 时幂级数发散，我们记它为 $\theta_n(x)$，称为 **第二类 Legendre 函数**。

- 当 n 不是整数时，$y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 都是幂级数，这二个幂级数在区域 $|x| < 1$ 内收敛，而 $x = \pm 1$ 时幂级数发散。

以下是前面几个 Legendre 多项式:

$$P_0(x) = 1, \; P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \; P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \; P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

当 n 是一个整数时, n 次 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

的通解是

$$y=C_1P_n(x)+C_2\theta_n(x),$$

其中 $P_n(x)$ 为 n 次 Legendre 多项式; $\theta_n(x)$ 为第二类 Legendre 函数, $\theta_n(x)$ 在区域 $|x|<1$ 内收敛, 而 $x=\pm1$ 处发散。
(2). 当 n 不是整数时, n 次 Legendre 方程的通解是

$$y=C_1y_0(x)+C_2y_1(x),$$

这时 n 次 Legendre 方程的所有解在区域 $|x|<1$ 内收敛, 而 $x=\pm1$ 处发散。

Legendre 多项式的性质

定理: Legendre 多项具有罗德列克 (Rodrigues) 公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

定理: Legendre 多项式 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$, $P_n(x)$, $\cdots$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是正交的，即

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n \\ \frac{2}{2n+1},\ m = n. \end{cases}$$

Fourier-Legendre 级数

定理： 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足 **Dirichlet(狄氏)** 条件,则存在常数

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

使得

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x).$$

Fourier-Legendre 级数

例. 将函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 展开成以 $P_n(x)$ 为项的级数。

解 $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ \cdots,$由公式

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} xP_n(x)dx$$

得 $C_0 = 1/4,\ C_1 = 1/2,\ C_2 = 5/16,\ \cdots$。因此，

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \cdots.$$

Fourier-Legendre 级数

例. 将函数 $f(x)=x^3+2x$ 展开成以 $P_n(x)$ 为项的级数。
解 注意到 Legendre 多项式 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，而函数 $f(x)=x^3+2x$ 是一个 3 次多项式，因此

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+C_3P_3(x) \\ &= \frac{5}{2}C_3x^3+\frac{3}{2}C_2x^2+(-\frac{3}{2}C_3+C_1)x+(\frac{1}{2}C_2+C_0), \end{aligned}$$

比较两边的次数得

$$C_0=0,\ C_1=\frac{3}{5},\ C_2=0,\ C_3=\frac{2}{5},$$

即

$$f(x)=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x).$$

例. 半径为 a 的球，自己不产生热量，球面温度是 f，求球内恒温场的温度？

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x^2+y^2+z^2 \le a^2 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = f(x,y,z) \end{cases}$$

引进球坐标$x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$,其中 $0 \le \rho \le a, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$。则 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right] = 0, \\ u|_{\rho=a} = f(\phi,\theta),\ u|_{\theta} = u|_{2\pi+\theta},\ u|_{\phi=0}\text{及}u|_{\phi=\pi}\text{有界} \end{cases}$$

当函数 f 与 θ 无关而仅仅与 ϕ有关时，寻找与 θ 无关的解$u = u(\rho, \phi)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi \frac{\partial u}{\partial \phi}) = 0, \\ u|_{\rho=a} = f(\phi),\ u|_{\phi=0}\text{及}u|_{\phi=\pi}\text{有界} \end{cases}$$

先求满足方程和“$u|_{\phi=0}$ 及 $u|_{\phi=\pi}$ 有界”的非零解 $u = R(\rho)\Phi(\phi)$。

$$\frac{\rho^2 R'' + 2\rho R'}{R} = -\frac{\Phi'' + ctg\phi\Phi'}{\Phi} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, \\ \Phi'' + ctg\phi\Phi' + \lambda\Phi = 0,\ \Phi(0)\text{及}\Phi(\pi)\text{有界} \end{cases}$$

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, |R(\rho)| < +\infty \Rightarrow \lambda \geq \frac{1}{4}$$

$$\lambda \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = n(n+1), n \geq \frac{1}{2}.$$

$$\Phi'' + ctg\phi\Phi' + n(n+1)\Phi = 0,\ \Phi(0)\text{及}\Phi(\pi)\text{有界}$$

令 $x = \cos\phi$，记 $y(x) = \Phi(\phi)$，则 $y(x)$ 满足Legendre方程($n \geq \frac{1}{2}$)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,\ y(\pm 1)\text{有界}$$

只有当 $\lambda_n = n(n+1)(n=0,1,2,\cdots)$ 时，Legendre 方程有在$|x| \leq 1$内有界的解

$$y_n(x) = C_n P_n(x) \Rightarrow \Phi_n(\phi) = C_n P_n(\cos\phi)$$

当 $\lambda_0 = 0$ 时，$R(\rho) = D + E\ln(\rho)$.

$$|R(0)| < \infty \Rightarrow E = 0 \Rightarrow R_0(\rho) = D_0$$

当 $\lambda_n = n(n+1)(n=1,2,\cdots)$
时$R_n(\rho) = D\rho^n + E\rho^{-n}, |R(0)| < \infty \Rightarrow R_n(\rho) = D_n\rho^n$。

综合： 只有当 $\lambda = n(n+1)(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 时，

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi}) = 0, \\ u|_{\rho=a} = f(\phi),\ u|_{\phi=0} \text{及} u|_{\phi=\pi} \text{有界} \end{cases}$$

中满足方程以及“$u|_{\phi=0}$ 及 $u|_{\phi=\pi}$ 有界”且可以分离变量的所有非零解

$$u_n = C_n P_n(\cos \phi)\rho^n,\ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

取系数 C_n 使$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \phi)\rho^n$满足

$$u|_{\rho=a} = f(\phi) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \phi) a^n = f(\phi),$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^{1} f P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2a^n} \int_0^{\pi} f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi$$

常微分方程的幂级数解法

考虑二阶线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

定理.(幂级数解) 如果函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内可以表示为收敛的幂级数，即

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n,\ q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$$

则二阶线性常微分方程(∗)在 $|x-x_0|<R$ 内有可以表示为收敛的幂级数形式的解$y=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$，其中 b_n 可由 p_n 和 q_n确定。

常微分方程的幂级数解法

考虑二阶线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

定理.(广义幂级数解) 如果函数 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 在 $|x| < R$ 内可以表示为收敛的幂级数,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,\ x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

则二阶线性常微分方程$(*)$在 $|x| < R$有收敛的广义幂级数的解$y = x^c \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 其中 $b_0 \neq 0$, c 为待定的常数。

例. 用幂级数解法求解方程 $y'' + y = 0$.

解. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$,
$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$,

$$
\begin{aligned}
\text{方程} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0 \Rightarrow c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \\
&\Rightarrow \quad c_2 = -\frac{c_0}{2!},\ c_4 = \frac{c_0}{4!},\ \cdots,\ c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}, \\
&\Rightarrow \quad c_3 = \frac{c_1}{3!},\ c_5 = \frac{c_1}{5!},\ \cdots,\ c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

方程 $y'' + y = 0$的(幂级数)解

$$y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

即 $y(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$

例. 用幂级数解法求解 Airy 方程$y'' = xy$.

解. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2},$$

$$\begin{aligned}
\text{方程} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}x^n \\
&\Rightarrow \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1} \\
&\Rightarrow \quad c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)},\ n = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

例. 用幂级数解法求Airy 方程$y'' = xy$在$x = 1$处的幂级数解.
解. 将方程改写为$y'' = [1 + (x - 1)]y$, 解
为$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - 1)^n$, 代入方程⇒

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{n-1})(x-1)^n.$$

比较系数 $\Rightarrow (n+2)(n+1)c_{n+2} = c_n + c_{n-1},\ n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned} y &= c_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] \\ &+ c_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

例. 半径为 a 的薄圆盘，上下两面绝热，薄圆盘边缘的温度恒为零，内部不产生热量，初始温度为$\phi(x,y)$，求薄圆盘内的温度分布？

温度 $u(x,y,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ x^2+y^2 \le a^2, \\ u|_{t=0} = \phi(x,y), \ x^2+y^2 \le a^2, \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

引进极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,及记 $u(x,y,t) = u(r,\theta,t)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \ 0 \le r \le a, \\ u|_{t=0} = \phi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \phi(r,\theta), \ 0 \le r \le a, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

利用分离变量法，求出满足齐次方程$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$和齐次边界条件$u|_{r=a} = 0$的可写为 $u(r,\theta,t) = R(r)H(\theta)T(t)$（分离变量）的所有非零解。

$$\text{方程} \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)H(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)H(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)H''(\theta)}{R(r)H(\theta)} = -\lambda,$$
$$\Rightarrow T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

以及

$$\Rightarrow R''(r)H(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)H(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)H''(\theta) + \lambda R(r)H(\theta) = 0,$$
$$\Rightarrow \frac{H''(\theta)}{H(\theta)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2R(r)}{R(r)} = -\mu$$
$$\Rightarrow H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0,\ r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0.$$

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = u(r,2\pi+\theta,t) \\ R(a)H(\theta)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(\theta) = H(2\pi+\theta) \\ R(a) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0 \\ H(\theta) = H(2\pi+\theta). \end{cases}, \Rightarrow \quad \mu = n^2$$

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ |T(t)| < +\infty. \end{cases}, \Rightarrow \quad \lambda > 0$$

Bessel方程

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0,\ 0 \le r \le a \\ |R(r)| < +\infty,\ R(a) = 0. \end{cases}$$

贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

或等价地

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0.$$

常微分方程的幂级数解法

考虑二阶线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

定理.(广义幂级数解) 如果函数 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 在 $|x| < R$ 内可以表示为收敛的幂级数,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,\ x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

则二阶线性常微分方程$(*)$在 $|x| < R$有收敛的广义幂级数的解$y = x^c \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 其中 $b_0 \neq 0$, c 为待定的常数。

贝塞尔方程 $\Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y=0$,有广义幂级数解

$$y=x^c\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{c+k},$$

其中 $a_0\neq 0$, c 为待定的常数。求导得

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(c+k)a_kx^{c+k-1},\ y''=\sum_{k=0}^{\infty}(c+k)(c+k-1)a_kx^{c+k-2}.$$

贝塞尔方程 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}[(c+k)^2-\nu^2]a_kx^{c+k}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{c+k}=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(c+k)^2-\nu^2]a_k x^{c+k}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{c+k}=0,$$

比较不同次数前的系数，

$$\begin{aligned}
k=0:&\ (c^2-\nu^2)a_0=0\\
k=1:&\ [(1+c)^2-\nu^2]a_1=0\\
k\geq 2:&\ [(k+c)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0
\end{aligned}$$

由 $a_0\neq 0$知 $c=\pm\nu$。

$$k = 1: \ [(1+c)^2 - \nu^2]a_1 = 0$$
$$k \geq 2: \ [(k+c)^2 - \nu^2]a_k + a_{k-2} = 0$$

- $c = \nu > 0$ 情形:

$$[(1+c)^2 - \nu^2]a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$
$$a_k = -\frac{1}{k(k+2\nu)}a_{k-2} \Rightarrow a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$$
$$a_k = -\frac{1}{k(k+2\nu)}a_{k-2} \Rightarrow a_2 = \frac{(-1)a_0}{2(2+2\nu)},$$
$$a_4 = \frac{(-1)^2 a_0}{2\cdot 4(2+2\nu)(4+2\nu)}, \ \cdots\cdots,$$
$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^m m!(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2m+2\nu)}.$$

为了简化记号，我们引进**Gamma 函数:**

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\ s>0.$$

当 $s>0$ 时$\Gamma(s)$有定义且满足$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$。
把到Gamma 函数 $\Gamma(s)$的定义域推广到所有的实数，定义:

$$\begin{cases} -1<s<0\text{时} & \Gamma(s)=\Gamma(s+1)/s, \\ -2<s<-1\text{时} & \Gamma(s)=\Gamma(s+1)/s=\frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}, \\ -3<s<-2\text{时} & \Gamma(s)=\Gamma(s+1)/s=\frac{\Gamma(s+3)}{s(s+1)(s+2)}, \\ \dots \\ s=0,-1,-2,-3,\cdots\text{时} & \Gamma(s)=\infty \end{cases}$$

推广了的Gamma 函数 $\Gamma(s)$仍能保证等式$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$对所有的实数 s 都成立。

$$\Gamma(m+\nu+1)=(m+\nu)\Gamma(m+\nu)=\cdots=(m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^m m!(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2m+2\nu)}$$

$$\Gamma(m+\nu+1) = (m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

如果取 $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$,$a_{2m}$ 表示为

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2m}$$

ν 阶的 Bessel 方程的一个特解为

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{2m} x^{\nu+2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}.$$

称它为 ν **阶第一类 Bessel 函数**。利用比值判别法知 $J_\nu(x)$ 对一切实数都收敛。

- **当** $c = -\nu < 0$ **时**, 类似可得 ν阶的 Bessel 方程的一个特解

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{2m} x^{-\nu+2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2m}$$

称它为 $-\nu$ **阶第一类 Bessel 函数**。这样我们得到 ν 阶 Bessel 方程的二个特解 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$。
问题是: $J_\nu(x)$与 $J_{-\nu}(x)$线性无关?

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{2m} x^{\nu+2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{2m} x^{-\nu+2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2m}$$

- 当 ν 不是整数时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$ 是二个 **线性无关** 的特解， ν 阶的 Bessel 方程的通解为

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

- 当 ν 是整数时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$ 可知它们是二个 **线性相关** 的特解.

贝塞尔方程的解—广义幂级数解法

构造另外一个与 $J_\nu(x)$线性无关的特解,**通常的做法为:**
当 ν 不是整数时，取

$$C_1 = ctg(\nu\pi),\ C_2 = -1/\sin(\nu\pi)$$

$$Y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

满足$\lim_{x\to 0} Y_\nu(x) = \infty, Y_\nu(x)$ 与 $J_\nu(x)$是ν 阶的 Bessel 方程的线性无关.ν 阶的 Bessel 方程的通解为

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

当 ν 是整数时，罗必达法$\Rightarrow$

$$Y_\nu(x)=\lim_{\beta\to\nu}\frac{\cos(\beta\pi)J_\beta(x)-J_{-\beta}(x)}{\sin(\beta\pi)}$$

存在，且满足$\lim_{x\to 0}Y_\nu(x)=\infty, Y_\nu(x)$ 与 $J_\nu(x)$是ν 阶的 Bessel 方程的线性无关.ν 阶的 Bessel 方程的通解为

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x).$$

综合:

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu\text{不是整数时} \\ \lim_{\beta\to\nu} \frac{\cos(\beta\pi)J_\beta(x) - J_{-\beta}(x)}{\sin(\beta\pi)}, & \nu\text{是整数时} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} Y_\nu(x) = \infty,\ J_\nu(0) = \begin{cases} 1, & \text{当}\nu = 0\text{时} \\ 0, & \text{当}\nu > 0\text{时}. \end{cases}$$

$Y_\nu(x)$ 和$J_\nu(x)$ 是ν 阶Bessel 方程的二个特解.ν 阶Bessel 方程的 **通解**可表示为

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

$J_\nu(x)$ 称为 ν **阶第一类 Bessel 函数**，$Y_\nu(x)$ 称为 ν **阶第二类 Bessel 函数**。

Bessel 函数$J_\nu(x)$的递推公式

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x),\ \frac{d}{dx}[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu J_\nu(x)}{x},\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J_\nu'(x)$$

Bessel 函数的零点

Bessel 函数的零点是指方程 $J_\nu(x)=0$ 的根。由 $J_\nu(x)$ 的级数表达式知 $J_\nu(x)$的零点关于原点对称。

- $J_\nu(x)$ 具有无穷多个实正零点 $\xi_m^{(\nu)}$, $m=1,2,\cdots$,且满足$\lim_{m\to+\infty}[\xi_{m+1}^{(\nu)}-\xi_m^{(\nu)}]=\pi$,即$J_\nu(x)$ 几乎是以2π为周期的周期函数。
- $J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点相间出现，即 $J_\nu(x)$ 的任意二个正零点之间有且仅有一个 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点，反之，$J_{\nu+1}(x)$ 的任意二个正零点之间有且仅有一个 $J_\nu(x)$ 的正零点。
- 除 $x=0$ 外，$J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 没有相同的零点。
- 除 $x=0$ 外，$J_\nu(x)$ 没有 **重零点**，即除 $x=0$ 外 J_ν 和 J_ν' 不同时为零。
- $\nu>-1$ 时，$J_\nu(x)$ 没有 **复** 零点。

Bessel方程的固有值问题

考虑下列固有值问题

$$\begin{cases} x^2R''+xR'+(\lambda^2x^2-\nu^2)R=0,\ \lambda>0,\ 0<x<\ell, \\ |R(0)|<+\infty,\ R(\ell)=0, \end{cases}$$

有固有值和固有函数

$$\lambda_n=\frac{\xi_n^{(\nu)}}{\ell},\ R_n(x)=C_nJ_\nu(\frac{\xi_n^{(\nu)}}{\ell}x),\ n=1,2,\cdots.$$

定理： 设 $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$ 是函数 $J_\nu(\ell x)$ 的正零点 $(\nu>-1)$（即$\lambda_n=\frac{\xi_n^{(\nu)}}{\ell}$），则函数系

$$J_\nu(\lambda_1x),\cdots,J_\nu(\lambda_nx),\cdots,$$

在区间 $[0,\ell]$ 上带权 x 正交，即

$$\int_0^\ell xJ_\nu(\lambda_ix)J_\nu(\lambda_jx)dx=\begin{cases} 0,\ i\neq j, \\ \frac{1}{2}\ell^2J_{\nu+1}^2(\lambda_i\ell),\ i=j, \end{cases}$$

Bessel方程的固有值问题

定理: $J'_\nu(\ell x)$ 的正零点$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ 及函数

$$J_\nu(\lambda_1 x), \cdots, J_\nu(\lambda_n x), \cdots$$

为固有值问题

$$\begin{cases} x^2 R'' + xR' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)R = 0,\ \lambda > 0,\ 0 < x < \ell, \\ |R(0)| < +\infty,\ R'(\ell) = 0, \end{cases}$$

的固有值和固有函数, 它们在区间 $[0, \ell]$ 上带权 x 正交, 即

$$\int_0^\ell x J_\nu(\lambda_i x) J_\nu(\lambda_j x) dx = \begin{cases} 0,\ i \neq j, \\ \frac{1}{2}\left(\ell^2 - \frac{\nu^2}{\lambda_i^2}\right) J_\nu^2(\lambda_i \ell),\ i = j, \end{cases}$$

Bessel方程的固有值问题

定理： $J'_\nu(\ell x)$ 的正零点$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ 及函数

$$J_\nu(\lambda_1 x), \cdots, J_\nu(\lambda_n x), \cdots$$

为固有值问题

$$\begin{cases} x^2 R'' + xR' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)R = 0, \ \lambda > 0, \ 0 < x < \ell, \\ |R(0)| < +\infty, \ R'(\ell) = 0, \end{cases}$$

的固有值和固有函数，它们在区间 $[0, \ell]$ 上带权 x 正交，即

$$\int_0^\ell x J_\nu(\lambda_i x) J_\nu(\lambda_j x) dx = \begin{cases} 0, \ i \neq j, \\ \frac{1}{2}\left(\ell^2 - \frac{\nu^2}{\lambda_i^2}\right) J_\nu^2(\lambda_i \ell), \ i = j, \end{cases}$$

Fourier-Bessel 函数项级数

定理： 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ell]$ 上满足 **狄氏条件**（即 $f(x)$ 在 $[0,\ell]$ 上只有有限个第一类间断点，及 $\int_0^\ell |f(x)|^2 dx < +\infty$）.

$$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

是函数 $J_\nu(\ell x)$ 的正零点 $(\nu > -1)$。则存在常数

$$C_n = \frac{2}{\ell^2 J_\nu^2(\lambda_n \ell)} \int_0^\ell x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx$$

使得

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_\nu(\lambda_n x),$$

Fourier-Bessel 函数项级数

$\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^{\infty}$为固有值问题

$$\begin{cases} x^2R'' + xR' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)R = 0,\ \lambda > 0,\ 0 < x < \ell, \\ |R(0)| < +\infty,\ R'(\ell) = 0, \end{cases}$$

的固有函数系.

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ell]$ 上满足 **Dirichiet(狄氏)** 条件,

$$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

是函数 $J_\nu'(\ell x)$ 的正零点 $(\nu > -1)$。则存在常数

$$C_n = \frac{2}{(\ell^2 - \nu^2/\lambda_n^2)J_\nu^2(\lambda_n \ell)} \int_0^\ell xf(x)J_\nu(\lambda_n x)dx$$

使得

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_\nu(\lambda_n x).$$

Bessel 函数的一个应用

例. 半径为 a 的薄圆盘，上下两面绝热，薄圆盘边缘的温度恒为零, 内部不产生热量，初始温度为$\phi(x,y)$, 求薄圆盘内的温度分布？

解. 温度 $u(x,y,t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ x^2+y^2 \le a^2, \\ u|_{t=0} = \phi(x,y), \ x^2+y^2 \le a^2, \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

引进极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,及记 $u(x,y,t) = u(r,\theta,t)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \ 0 \le r \le a, \\ u|_{t=0} = \phi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \phi(r,\theta), \ 0 \le r \le a, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Bessel 函数的一个应用

第一步. 求出满足齐次方程$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$和齐次边界条件$u|_{r=a}=0$的可写为 $u(r,\theta,t)=R(r)H(\theta)T(t)$（分离变量）的所有非零解。

$$\text{方程}\Rightarrow\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{R''(r)H(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)H(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)H''(\theta)}{R(r)H(\theta)}=-\lambda,$$

$$\Rightarrow T'(t)+\lambda T(t)=0$$

以及

$$\Rightarrow R''(r)H(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)H(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)H''(\theta)+\lambda R(r)H(\theta)=0,$$

$$\Rightarrow\frac{H''(\theta)}{H(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)}{R(r)}=-\mu$$

$$\Rightarrow H''(\theta)+\mu H(\theta)=0,\ r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\mu)R(r)=0.$$

Bessel 函数的一个应用

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \ H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0,$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0,$$

其中 λ, ν 是适当的常数.由条件

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = u(r, 2\pi + \theta, t) \\ R(a)H(\theta)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(\theta) = H(2\pi + \theta) \\ R(a) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0 \\ H(\theta) = H(2\pi + \theta). \end{cases}, \begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ |T(t)| < +\infty. \end{cases},$$

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0, \ 0 \le r \le a \\ |R(r)| < +\infty, \ R(a) = 0. \end{cases}$$

Bessel 函数的一个应用

第二步. 讨论固有值问题的固有值和本征函数先求解下列固有值问题

$$\begin{cases} H''(\theta)+\mu H(\theta)=0 \\ H(\theta)=H(2\pi+\theta). \end{cases}$$

- 当 $\mu<0$ 时，通解为

$$H(\theta)=C_1e^{\sqrt{-\mu}\theta}+C_2e^{-\sqrt{-\mu}\theta}$$

由条件 $H(\theta)=H(2\pi+\theta)$,

$$\Rightarrow C_1(1-e^{2\pi\sqrt{-\mu}})e^{\sqrt{-\mu}\theta}+C_2(1-e^{-2\pi\sqrt{-\mu}})e^{-\sqrt{-\mu}\theta}=0$$

$$\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow H(\theta)=0.$$

Bessel 函数的一个应用

$$\begin{cases} H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0 \\ H(\theta) = H(2\pi + \theta). \end{cases}$$

- 当 $\mu = 0$时，通解为$H(\theta) = C_1\theta + C_2$， $H(\theta) = H(2\pi + \theta) \Rightarrow 2\pi C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, C_2 为任意.固有值$\mu_0 = 0$, 固有函数$H_0(\theta) = C_0$。

Bessel 函数的一个应用

- 当 $\mu > 0$ 时，方程为

$$H(\theta) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{\mu})\theta$$

$H(\theta) = H(2\pi + \theta) \Rightarrow \mu = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.固有值以及固有函数

$$\mu_n = n^2,\ H_n(\theta) = C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta),\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

Bessel 函数的一个应用

$$\begin{cases} H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0 \\ H(\theta) = H(2\pi + \theta). \end{cases}$$

综合： 当 $\mu_n = n^2 (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 时固有值问题有非零解固有函数

$$H_n(\theta) = C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta),\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

Bessel 函数的一个应用

确定λ 的范围。

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ |T(t)| < +\infty. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ae^{-\lambda t} \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

最后我们需要确定 λ 使

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ |R(0)| < \infty, \; R(a) = 0. \end{cases}$$

有非零解，其中 $\lambda \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$。

Bessel 函数的一个应用

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-n^2)R(r)=0 \\ |R(0)|<\infty,\ R(a)=0. \end{cases}$$

有非零解，其中 $\lambda \geq 0$, $n=0,1,2,\cdots$。

- 当 $\lambda=0$时，$R(r)$ 满足$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0 \\ |R(0)|<\infty,\ R(a)=0. \end{cases}$ 即满足“欧拉方程” .记 $r=e^s$, $R(r)=R(s)$, 则$R''(s)-n^2R(s)=0.$

$$\Rightarrow R_n(r)=\begin{cases} a_0+b_0\ln r,\ n=0 \\ a_nr^n+b_nr^{-n},\ n=1,2,\cdots \end{cases}$$

$$|R(r)|<\infty\,(0\leq r\leq a)\Rightarrow R_n(r)=a_nr^n,$$

$$R_n(a)=0\Rightarrow a_n=0\Rightarrow R(r)=0$$

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ |R(0)| < \infty,\ R(a) = 0. \end{cases}$$

- 当$\lambda > 0$时,记 $x = \sqrt{\lambda} r,\ y(x) = R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = R(r)$,

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,\ 0 \le x \le \sqrt{\lambda} a \\ |y(0)| < \infty,\ y(\sqrt{\lambda} a) = 0. \end{cases}$$

是 n 阶 Bessel 方程。

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),\ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$|y(0)| < \infty \Rightarrow C_2 = 0,\ y(\sqrt{\lambda} a) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} a = \xi_m^{(n)},$$

$m = 1, 2, \cdots,\ \xi_m^{(n)}$是$J_n(x)$的正零点。

$$\lambda_m = \left(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}\right)^2,\ R_m^n(r) = C_m^n J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a} r),\ m = 1, 2, \cdots,\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

Bessel 函数的一个应用

综合:只有当 $\lambda = \left(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}\right)^2$ 和 $\mu = n^2$ 时，才有满足初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, 0 \le r \le a, \\ u|_{t=0} = \phi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \phi(r,\theta), 0 \le r \le a, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

中齐次方程和边界条件的可写为 $u(r,\theta,t) = R(r)H(\theta)T(t)$（分离变量）的非零解

$$u_m^{(n)}(r,\theta,t) = (A_m^{(n)}\cos(n\theta) + B_m^{(n)}\sin(n\theta))J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)e^{\left(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}\right)^2 t},$$

其中 $m = 1, 2, \cdots$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 。

Bessel 函数的一个应用

第三步. 构造级数形式的解

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(n)}(r,\theta,t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_m^{(n)}\cos(n\theta)+B_m^{(n)}\sin(n\theta))J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)e^{\left(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}\right)^2 t},
\end{aligned}
$$

满足初始条件$u|_{t=0}=\phi(r,\theta)$,

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_m^{(n)}\cos(n\theta)+B_m^{(n)}\sin(n\theta))J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)=\phi(r,\theta),
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_m^{(n)}J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)\right]\cos(n\theta)+\left[\sum_{m=1}^{\infty}B_m^{(n)}J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)\right]\sin(n\theta)\right\}
=\phi(r,\theta),
$$

Bessel 函数的一个应用

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(n)} J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)\right]\cos(n\theta)+\left[\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(n)} J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r)\right]\sin(n\theta)\right\}$$
$$=\phi(r,\theta),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(n)} J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta)\cos(n\theta)d\theta =,\ n=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(n)} J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a}r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta)\sin(n\theta)d\theta,\ n=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(0)} J_n(\frac{\xi_m^{(0)}}{a}r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta)d\theta,$$

Bessel 函数的一个应用

利用 Fourier-Bessel 函数展开定理 $m = 1, 2, \cdots, n = 1, 2, \cdots,$

$$A_m^{(n)} = \frac{2}{a^2 J_{n+1}(\xi_m^{(n)})} \int_0^a r \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) \cos(n\theta) d\theta \right] J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a} r) dr,$$

$$B_m^{(n)} = \frac{2}{a^2 J_{n+1}(\xi_m^{(n)})} \int_0^a r \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta \right] J_n(\frac{\xi_m^{(n)}}{a} r) dr,$$

$$A_m^{(0)} = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_m^{(0)})} \int_0^a r \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) d\theta \right] J_n(\frac{\xi_m^{(0)}}{a} r) dr.$$