

# **Curso Modelos Biomatemáticos I**

Luis Guillermo García Jácome

2025-05-18

# Tabla de contenidos

<b>Inicio</b>	<b>4</b>
Contacto . . . . .	4
 <b>I    Módulo 5</b>	 <b>5</b>
<b>1    Modelo exponencial</b>	<b>7</b>
1.1    Introducción . . . . .	7
1.2    Modelo general de crecimiento poblacional . . . . .	7
1.3    Supuestos del modelos . . . . .	7
1.4    Desarrollo y comportamiento . . . . .	7
1.5    Solución del modelo . . . . .	7
1.6    Práctica: Simulación con hojas de cálculo . . . . .	8
1.7    Lecturas sugeridas . . . . .	8
 <b>2    Modelo logístico</b>	 <b>9</b>
2.1    Introducción . . . . .	9
2.2    Supuestos del modelo . . . . .	9
2.3    Desarrollo . . . . .	9
2.4    Explicación del término logístico . . . . .	9
2.5    Práctica: Simulación con hojas de cálculo . . . . .	10
2.6    Puntos de equilibrio . . . . .	10
2.7    Análisis gráfico . . . . .	10
2.8    Caos . . . . .	10
2.9    Diagrama de bifurcación . . . . .	10
2.10    Sistemas dinámicos, Laplace y otros sistemas caóticos (opcional) . . . . .	11
2.11    Lecturas sugeridas . . . . .	11
 <b>3    Principio de Hardy-Weinberg y deriva génica</b>	 <b>12</b>
3.1    Introducción . . . . .	12
3.2    Principio de Hardy-Weinberg . . . . .	12
3.2.1    Evolución biológica y explicación de la simulación . . . . .	12
3.2.2    Exploración de la simulación . . . . .	12
3.2.3    Desarrollo del modelo . . . . .	13
3.2.4    Demostración de principio de Hardy-Weinberg . . . . .	13

3.2.5	Práctica: Construcción de gráfica . . . . .	13
3.3	Deriva génica . . . . .	13
3.3.1	Simulación de deriva génica . . . . .	13
3.3.2	Deriva génica y sus propiedades . . . . .	13
3.3.3	Efecto fundador y efecto de cuello de botella . . . . .	13
3.4	Lecturas sugeridas . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Modelo de selección diploide</b>	<b>15</b>
4.1	Introducción . . . . .	15
4.2	Selección natural . . . . .	15
4.3	La selección y adaptación de los ratones de bolsillo . . . . .	15
4.4	Exploración de modelo computacional . . . . .	16
4.5	Desarrollo de modelo de selección . . . . .	16
4.6	Práctica: Simulación con hojas de cálculo . . . . .	16
4.7	Análisis gráfico del modelo . . . . .	16
4.7.1	Parte 1 . . . . .	16
4.7.2	Parte 2 . . . . .	17
4.8	Ejemplos de selección positiva, sobredominancia y subdominancia . . . . .	17
4.9	Velocidad de selección . . . . .	17
4.10	Lecturas sugeridas . . . . .	17
	<b>Referencias</b>	<b>18</b>

# Inicio

Bienvenid@ a la página del curso *Modelos biomatemáticos I*, que se imparte en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

En esta página encontrarás algunos contenidos teóricos del curso.

## Contacto

- *Luis Guillermo García Jácome*: lggj37[at]ciencias.unam.mx

**Parte I**

**Módulo 5**

En este módulo iniciamos nuestro estudio de los *sistemas dinámicos*, es decir sistemas que cambian con el tiempo.

En particular se discuten dos de los modelos más fundamentales en la ecología: el modelo exponencial y el modelo logístico. Posteriormente se discuten algunos de los modelos más básicos en evolución: el modelo de frecuencia alélica de Hardy-Weinberg y el modelo de selección diploide.

# 1 Modelo exponencial

**Contenido:** 5 videos

**Duración estimada:** 45 minutos

## 1.1 Introducción

En este capítulo estudiamos el modelo de crecimiento más simple que existe: el *modelo exponencial*. Este modelo es central ya que es la base de cualquier modelo de crecimiento.

Primero se presenta el modelo de crecimiento más general que hay del cual se derivan todos los demás. Después se presentan los supuestos y desarrollo del modelo exponencial y se realizan algunos ejemplos para ver su comportamiento. Posteriormente se presenta la solución analítica del modelo. Finalmente se realiza una simulación del modelo usando hojas de cálculo.

## 1.2 Modelo general de crecimiento poblacional

<https://youtu.be/Kknacs4RVc>

## 1.3 Supuestos del modelos

<https://youtu.be/tlNwtaiWrFA>

## 1.4 Desarrollo y comportamiento

<https://youtu.be/eBPUSfxLbgs>

## 1.5 Solución del modelo

<https://youtu.be/ExQ9xa7gRXs>

## 1.6 Práctica: Simulación con hojas de cálculo



Tip

Se recomienda que realices esta práctica a la par que ves el video.

[https://youtu.be/yQTK2\\_ogmzo](https://youtu.be/yQTK2_ogmzo)

## 1.7 Lecturas sugeridas

Para aprender más puedes consultar:

- Capítulo 7 de Donovan y Welden (2002)
- Sección 1.1 de Allman *et al.* (2004)
- Sección 3.2.1 de Otto y Troy (2007)
- Capítulo 1 de Case (2000)



## 2 Modelo logístico

**Contenido:** 8 videos (+2 videos opcionales)

**Duración estimada:** 1 hora 7 minutos (+20 minutos opcionales)

### 2.1 Introducción

En este capítulo estudiamos el *modelo logístico*. Este modelo hace supuestos más realistas que el modelo exponencial al considerar que los recursos son limitados. Este ligero cambio en los supuestos tienen consecuencias muy grandes para el comportamiento del modelo.

Primero describimos como el supuesto de recursos limitados se ve reflejado en cómo se modelan las tasas de nacimiento y de mortalidad *per cápita*. Luego desarrollamos el modelo y damos una explicación intuitiva de qué significa la expresión resultante. Posteriormente se realizan simulaciones usando una hoja de cálculo (que está basada en nuestra [Simulación del modelo exponencial](#)). Después exploramos la idea de lo que son los puntos o valores de equilibrio y realizamos el análisis gráfico del modelo. Finalmente introducimos el concepto de caos y construimos el diagrama de bifurcación del modelo logístico.

### 2.2 Supuestos del modelo

<https://youtu.be/SaM4Szual0o>

### 2.3 Desarrollo

<https://youtu.be/hThtO6tZiRM>

### 2.4 Explicación del término logístico

<https://youtu.be/brbGvtYykpA>

## 2.5 Práctica: Simulación con hojas de cálculo

### Tip

Se recomienda que realices esta práctica a la par que ves el video.

### Importante

Esta práctica se basa en la hoja de cálculo resultante de la [simulación del modelo exponencial](#). Así que debes realizarla previamente.

<https://youtu.be/ikalgvkZijI>

## 2.6 Puntos de equilibrio

<https://youtu.be/A2I2Ot76ytc>

## 2.7 Análisis gráfico

<https://youtu.be/-ilKIBHGedM>

## 2.8 Caos

<https://youtu.be/AGa4-FhH0gE>

### Explora la simulación del modelo logístico

Aquí puedes [abrir el simulador del modelo logístico](#) en tu navegador web.  
Para ejecutarlo en tu computadora localmente puedes [descargar NetLogo](#) y descargar el archivo del modelo.

## 2.9 Diagrama de bifurcación

<https://youtu.be/5Gts1arBbkQ>

## 2.10 Sistemas dinámicos, Laplace y otros sistemas caóticos (opcional)

Estos son videos que hice para otro curso donde se aborda el tema de caos desde una perspectiva más histórica y se ven otros ejemplos de sistemas caóticos. Al final de estos videos se explica de nuevo el caos en el modelo logístico.

<https://youtu.be/B9FRN82vSQQ>

**i** Explora la simulación de 2 y 3 cuerpos

Aquí puedes [abrir el simulador del modelo de 2 y 3 cuerpos en tu navegador web](#). Solo que nota que este modelo es muy demandante de recursos como para ejecutarse en el navegador por lo que **corre muy lento**. Te sugiero descargarlo y ejecutarlo localmente en tu computadora para que se ejecute más rápido.

Para ejecutarlo en tu computadora localmente puedes [descargar NetLogo](#) y descargar el archivo del modelo.

<https://youtu.be/TD7RBtIaagg>

## 2.11 Lecturas sugeridas

Para aprender más puedes consultar:

- Capítulo 8 de Donovan y Welden (2002)
- Sección 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 de Allman *et al.* (2004)
- Capítulo 5 de Case (2000)
- Secciones 3.2.2 y 4.2.2 de Otto y Troy (2007)

## 3 Principio de Hardy-Weinberg y deriva génica

**Contenido:** 8 videos

**Duración estimada:** 1 hora 30 minutos

### 3.1 Introducción

En este capítulo iniciamos nuestro estudio de algunos modelos de evolución biológica. Para poder entender cómo cambian las poblaciones durante la evolución primero debemos entender cómo se ve una población que no evoluciona. Esto es justo lo que el principio de Hardy-Weinberg nos ofrece.

Primero se discute brevemente qué es la evolución biológica y se explica y explora una simulación computacional de una población donde no opera ninguna fuerza evolutiva. Posteriormente pasamos a traducir este modelo al lenguaje matemático y a demostrar el principio o equilibrio de Hardy-Weinberg. Finalmente aprovechamos nuestra simulación computacional para explorar una fuerza evolutiva: la deriva génica.

### 3.2 Principio de Hardy-Weinberg

#### 3.2.1 Evolución biológica y explicación de la simulación

<https://youtu.be/TS11j2D3vIY>

#### 3.2.2 Exploración de la simulación

<https://youtu.be/UajMHYBmXww>

**i** Explora la simulación del principio de Hardy-Weinberg

Aquí puedes [abrir el simulador del modelo logístico en tu navegador web](#).

Para ejecutarlo en tu computadora localmente puedes [descargar NetLogo](#) y descargar el archivo del modelo.

### 3.2.3 Desarrollo del modelo

<https://youtu.be/IamdjHVTIzY>

### 3.2.4 Demostración de principio de Hardy-Weinberg

[https://youtu.be/prSZYjM\\_Z24](https://youtu.be/prSZYjM_Z24)

### 3.2.5 Práctica: Construcción de gráfica



Tip

Se recomienda que realices esta práctica a la par que ves el video.

[https://youtu.be/rlH6Xtc\\_qGw](https://youtu.be/rlH6Xtc_qGw)

## 3.3 Deriva génica

### 3.3.1 Simulación de deriva génica

<https://youtu.be/GFmFYK0mffk>

### 3.3.2 Deriva génica y sus propiedades

<https://youtu.be/Nm4zvzWxPbU>

### 3.3.3 Efecto fundador y efecto de cuello de botella

La «reproducción aleatoria» que subyace a la deriva génica no significa que uno no pueda conocer los mecanismos que producen la deriva génica. Hay distintos procesos que pueden favorecer que opere la deriva génica en una población. Dos de ellos son el **efecto fundador** y el **efecto de cuello de botella**. Estos se caracterizan por generar condiciones donde las poblaciones son muy pequeñas favoreciendo así que la deriva génica sea más fuerte y tenga efectos significativos sobre las frecuencias alélicas de una población. A continuación se presentan un par de ejemplos de estos procesos:

<https://youtu.be/wzIXweZ7pyE>

### 3.4 Lecturas sugeridas

Para aprender más puedes consultar:

- Capítulo 29 de Donovan y Welden (2002)
- Sección 6.4 de Allman *et al.* (2004)
- Capítulo 23 de Urry *et al.* (2021)

## 4 Modelo de selección diploide

**Contenido:** 9 videos

**Duración estimada:** 1 hora 43 minutos

### 4.1 Introducción

En el **capítulo anterior** discutimos el principio o equilibrio de Hardy-Weinberg, el cual describe cómo se ve una población en la que no opera ninguna fuerza evolutiva y por lo tanto que no evoluciona. En este capítulo extendemos el modelo para integrar una de las principales fuerzas evolutivas: la selección natural.

Primero repasamos qué es la selección natural y los elementos que requiere. Posteriormente vemos un ejemplo real de evolución por selección natural y luego pasamos a explorar ese ejemplo en una simulación computacional. A continuación desarrollamos el modelo matemáticamente y pasamos a explorar la dinámica que describe usando hojas de cálculo. Finalmente aplicamos el análisis gráfico para identificar los comportamientos que el modelo predice.

### 4.2 Selección natural

<https://youtu.be/U2PVZ4NkNy4>

### 4.3 La selección y adaptación de los ratones de bolsillo

En el siguiente video se muestra un ejemplo muy estudiado y bien documentado de evolución y adaptación por selección natural de los ratones de bolsillo en el desierto de Nuevo México. La simulación computacional que vamos a explorar en los siguientes videos está basado en este ejemplo.


#### Tip

El video está en inglés pero puedes agregarle subtítulos en español.

<https://youtu.be/sjeSEngKGrg?si=LgqLL1DkJ3OJck9>

## 4.4 Exploración de modelo computacional

<https://youtu.be/3yfEEEd6z4M>

 Explora la simulación del modelo de selección

Aquí puedes [abrir el simulador del modelo de selección en tu navegador web](#). Nota que en la versión web no se ve la animación de los depredadores, sin embargo, la selección sí ocurre (puedes notar cómo el tamaño poblacional disminuye). Para ejecutarlo en tu computadora localmente puedes [descargar NetLogo](#) y descargar el archivo del modelo.

## 4.5 Desarrollo de modelo de selección

<https://youtu.be/dsZDbZIQrSw>

## 4.6 Práctica: Simulación con hojas de cálculo

 Tip

Se recomienda que realices esta práctica a la par que ves el video.

[https://youtu.be/bMEfdLzyi\\_g](https://youtu.be/bMEfdLzyi_g)

## 4.7 Análisis gráfico del modelo

### 4.7.1 Parte 1

<https://youtu.be/1LBQWIPKWho>



### 4.7.2 Parte 2

[https://youtu.be/ViMfBDUbu\\_c](https://youtu.be/ViMfBDUbu_c)

Aquí abajo puedes utilizar la aplicación que se usa en el video para explorar el modelo gráficamente:

## 4.8 Ejemplos de selección positiva, sobredominancia y subdominancia

<https://youtu.be/1FRyra9Jz3c>

## 4.9 Velocidad de selección

[https://youtu.be/Je12nIP\\_oWA](https://youtu.be/Je12nIP_oWA)

## 4.10 Lecturas sugeridas

Para aprender más puedes consultar:

- Capítulo 5 de Futuyma *et al.* (2017)
- Sección 6.4 de Allman *et al.* (2004)
- Secciones 3.3, 4.3 y 5.2.2 de Otto y Troy (2007)
- Nachman *et al.* (2003)
- Capítulo 32 de Donovan y Welden (2002)

# Referencias

- Allman, Elizabeth S, y John A Rhodes. 2004. *Mathematical Models in Biology: An Introduction*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Case, Ted J. 2000. *An Illustrated Guide to Theoretical Ecology*. New York ; Oxford: Oxford University Press.
- Donovan, Therese Marie, y Charles Woodson Welden. 2002. *Spreadsheet Exercises in Ecology and Evolution*. Sunderland, Massachusetts: Sinauer.
- Futuyma, Douglas J., y Mark Kirkpatrick. 2017. *Evolution*. Fourth edition. Sunderland, Massachusetts: Sinauer Associates, Inc., Publishers.
- Nachman, Michael W., Hopi E. Hoekstra, y Susan L. D'Agostino. 2003. «The Genetic Basis of Adaptive Melanism in Pocket Mice». *Proceedings of the National Academy of Sciences* 100 (9): 5268-73. <https://doi.org/10.1073/pnas.0431157100>.
- Otto, Sarah P., y Troy Day. 2007. *A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution*. Princeton: Princeton University Press.
- Urry, Lisa A., Michael L. Cain, Steven Alexander Wasserman, Peter V. Minorsky, Rebecca B. Orr, y Neil A. Campbell. 2021. *Campbell Biology*. Twelfth edition. New York, NY: Pearson.