

第四届全国大学生统计建模大赛

论文题目：

埃博拉病毒的传播预测与控制¹

参赛队员：

姓名：魏思宇 学院：经济学院 专业：金融 年级：2012 级

姓名：鄢 然 学院：理学院 专业：统计 年级：2012 级

姓名：董文静 学院：理学院 专业：统计 年级：2012 级

¹ 注:该论文获得由中国统计教育学会举办的“2015 年(第四届)全国大学生统计建模大赛”大数据统计建模类本科生组三等奖。

摘要

为设计埃博拉病毒最优控制方案,本文针对埃博拉疫情的重灾区——西非地区建立了传染病 S-I-R 模型,选择疫情严重程度、实际生产能力和交通枢纽地理位置作为评价指标,并利用常微分方程对其求解。此外,建立了合理的检验模型,以证明我们建的模型可以承受埃博拉大流行所带来的压力。

本文主要探讨的任务有以下六方面:

1. 预测无药物情况下,各疫区对药品的需求量。建立传染病的 SIR 模型,预测在未来一段时间内,只有隔离防控等措施但无药物治疗情况下的各国患病人数,因 SIR 模型未考虑给为感染者的疫苗,且不考虑潜伏期,所以我们利用 SEIR 模型来修正模型。

2. 确定在供不应求时的药品分配方案。根据所预测的各国的患病人数,分析各疫情区对疫苗或药物的需要的重要程度和紧急程度,利用基于模糊数学的模糊分配方法(利用 AHP 层次分析法求重要程度,利用打分法求急需程度),来达到合理分配的目的。

3. 确定药品运输系统。建立基于 p-中值模型的静态确定型“中间定位”设施选址模型,结合疫区的重要程度和交通枢纽的分布,使得以需求量为权重的运输距离最小,并确定指派方案,充分体现系统设置的公平性和效率性。

4. 为验证模型的可行性,预测给药后疫情的控制情况。在任务一的基础上对 SIR 模型进行改进,引入给药后的防控因子,通过平衡防控因子和产药时间,使感染人数达到最小值,并可以得到对应的产药速度。

5. 模型的改进。引入 SEIR 模型使所得结果更贴合实际,引入多阶段选址分配和分散多重设置使中转站选址策略更实用;分析了其他影响病毒传播的自然因素、人为因素使模型更人性化。

6. 需强调的是,为体现政府的廉政公平和模型的高效,我们认为在分发药品时,传播系统的覆盖面应尽可能的广,故当疾病大流行时,覆盖所求区域的所有中转站都可提供快速反应。

本文建立了切实完备的抑制埃博拉病毒传播的解决方案,为早日消灭埃博拉病毒,实现社会的可持续发展和人类的健康繁衍提供了理论支持。

关键字: S-I-R 模型 模糊分配方法 p-中值模型 防控因子 SEIR 模型

一、当前研究背景和问题分析

（一）当前研究背景

2015 年 2 月，面对埃博拉病毒的大规模爆发，当时，疫情十分严重，然而疫苗和药品还处于临床试验阶段，无法大规模的生产，所以各国只能采取隔离、消毒等措施对病毒进行防治。因此，我们需要预测未来一段时间内疫情的发展情况，同时结合自然、经济、科技情况，以及分发药品公平、高效、合理等因素的原则，给出在药品大规模生产后可行的运输系统，选择最佳的生产源、中转站和药品分配方式，以达到最好的控制效果。

为此，本文利用世界卫生组织官方网站公布的数据，结合传染病 S-I-R 模型和常微分方程模型，针对疫情的重灾区——西非地区，建立模型以设定最优疾病控制方案。

（二）问题分析

1.无药物情况下，患病人数的预测。结合传染病的 SIR 模型和微分方程模型，预测未来一段时间内，在只有隔离防控等措施但无药物治疗情况下各国的患病人数。

2.药品分配数量的确定。根据所预测的各国的患病人数，分析各疫情区对疫苗或药物的需要的重要程度和紧急程度，利用基于模糊数学的模糊分配方法（利用 AHP 层次分析法求重要程度，利用打分法求急需程度），来达到合理分配的目的。

3.确定可行的运输系统。建立基于 p-中值模型的静态确定型“中间定位”设施选址模型，结合疫区的重要程度和交通枢纽的分布，使得以需求量为权重的运输距离最小，并确定指派方案分配路线，充分体现运输系统的公平性和效率性。

4.给药后疫情的防控。结合实际产药速度，在任务一的基础上对埃博拉病毒的传播模型进行改进，引入给药后的防控因子，通过监测传染系数的变化，预测在不同产药规模下，疫情的控制情况。

5.模型的优化。首先，分发药品时要考虑产量与分发量的关系和政府工作的廉政和高效。其次，基于非洲特殊的地理位置，结合水感染、气候影响、交通方式、人口分布特殊性等因素，利用控制变量法分别研究各因素对病毒传播的影响。最后，因为进行药物防控的起始时间不同，因此，可以对模型进行进一步的

改进，分析在不同时间起点时，防控的效果分析。

二、基本假设

1. 不考虑人口迁移等社会因素、生存空间、出生率、死亡率等自然因素的制约，以及意外灾难和其他疾病对人口变化的影响，即假定影响总人口数的只有易感染埃博拉病毒后死亡的人数；
2. 假设患传染病后通过治好的人，都具有长期的免疫力；
3. 设传染病的潜伏期很短，可以忽略不计(即任何人患病后立即成为传染者)；
4. 患病者处于潜伏期时不会传染他人；
5. 在没有药期间，政府采取的所有控制措施（隔离、消毒等）对于组织埃博拉病毒的传播都是有效的。

三、符号说明

符号	含义
i	$i=1、2、3$ 分别对应几内亚、利比里亚、塞拉利昂地区
$s(t)$	t 时刻易受感染可成为感染者的人数
$i(t)$	t 时刻能传染其他人的感染者
$r(t)$	t 时刻除前两类以外的其他人，包括感染后死亡和在疫情爆发后
N_i	第 i 个地区的总人数
W	生产药品的总数
q_i	所需药品数量
a_i	重要程度
b_i	急需程度
α	重要程度的权重
β	急需程度的权重
γ_i	第 i 个地区合理承受不足量所占的百分比

q_i'	实际分配药品量
I	需求区域集合
J	候选设施集合
w_i	需求区域 i 的权重
d_{ij}	需求区域 i 到候选区域 j 的距离
x_j	0—1 变量，若在候选地区建立设施 $x_j = 1$ ，否则 $x_j = 0$
y_{ij}	0—1 变量，若设施 j 服务需求地区 i ， $z_{ij} = 1$ ，否则， $z_{ij} = 0$
ζ	给药后的防控因子

四、模型的建立与求解

· 描述性统计

为直观了解数据信息，把握总体思路，本文先对已有数据进行了描述性统计分析，利用SPSS来分析患病率、死亡率与总人口的动态关系。

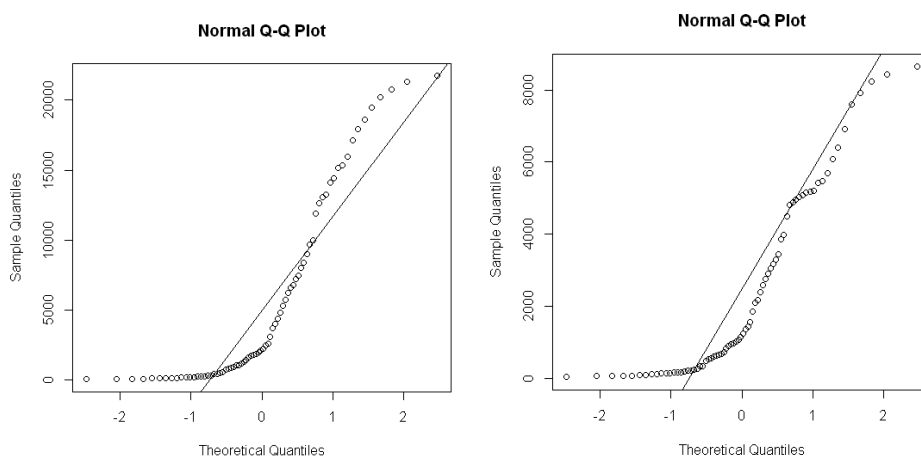


图1 被感染人数的正态QQ图

从图1可以看出，根据正态QQ图，可知样本数据不符合正态分布。根据散点图，可知其增长率先增长后下降，且死亡人数和感染人数变化趋势相同，符合自然趋势。



图2 截止到2月1日的被感染数与死亡数条形图

由图可知，埃博拉病情的感染主要集中在西非地区的塞拉利昂、利比里亚、几内亚3个地区，美国、英国、西班牙和塞内加尔的感染数为1，死亡数为0，即被感染病例尚未死亡。考虑到病毒可能在各国家之间传递，所以综合地理因素和生物因素，本文的研究主要针对西非地区的染病国家。

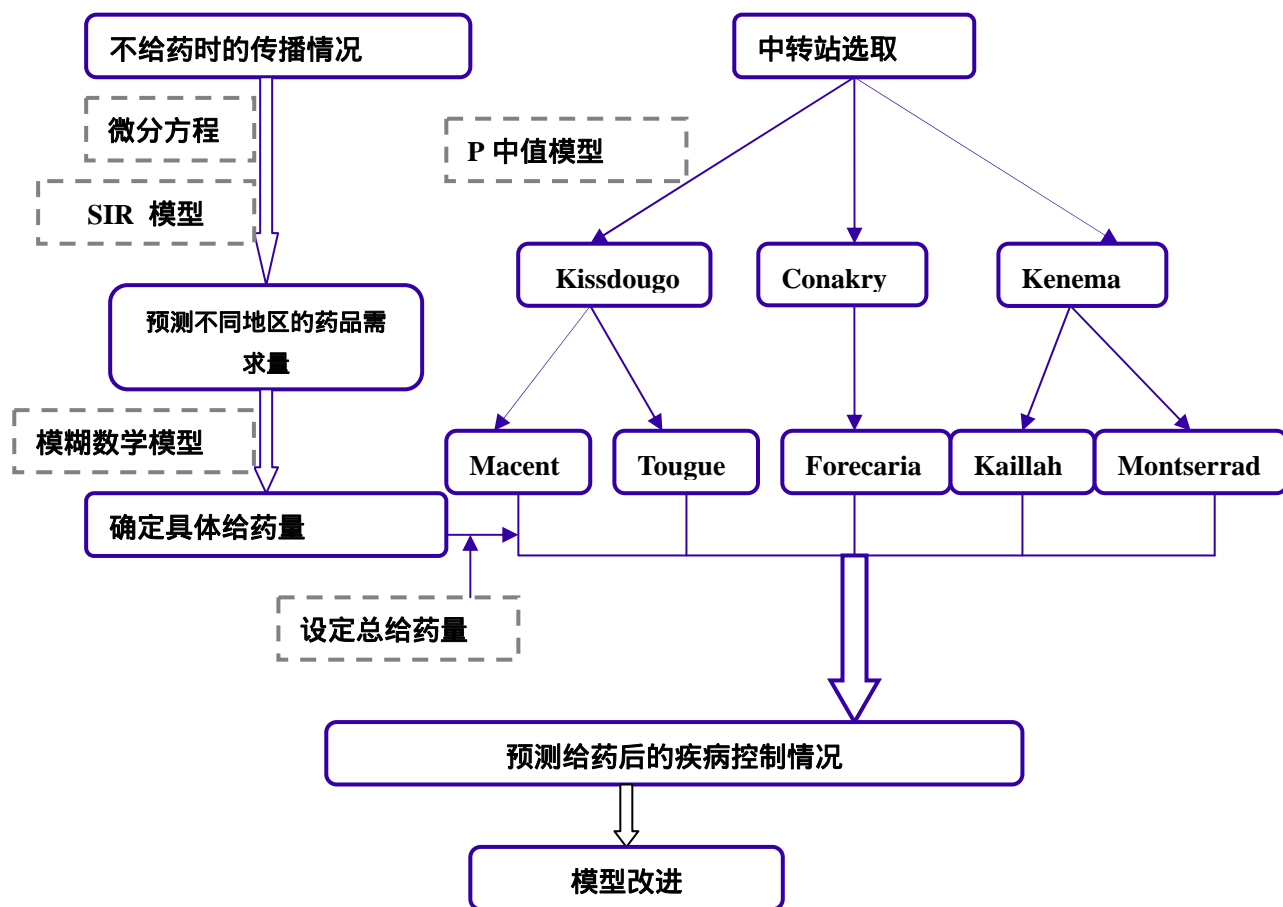


图3 模型建立与求解部分流程图

(一) 对未投放药品时疫区感染情况的预测

1. 常微分方程模型

由于对埃布拉病毒的探索不可能通过实验来取得具体数据,而病毒的基因变化又是不可控的,故所建模型存在一定的理想性。对于埃布拉病毒,若不及时采取措施,则其增长速度会难以控制,长期蔓延将给国家带来更大的损失。同时,若控制措施不合理,也将给国家带来损失。所以急需设计优化方案,使流行病期间传染人数最少,总的经济损失、人口损失最小。

下面根据其病毒传播特性建立常微分方程模型,并利用MATLAB求解。

(1) 数据预处理

符号假设

符号	意义
$i(0)$	为初始时刻受传染埃博拉病毒的人数
k_0	平均每个病人可传染的人数
k	传染率(每个被感染者在单位时间 t 内传染的人数与健康者之间的比例系数)

为最大限度预测疾病带来的危害，初步将易感人群视为全部健康人群。

根据定义，有：
$$k_0 = \frac{i(k+1) - i(k)}{i(k)}$$

每个被感染者在单位时间 t (每天) 内传染的人数与健康者成正比，即

$$k_0 = k \cdot s(t);$$

设该地区的人口总数为 N ，被感染者在传染期内不会死亡，即有：

$$s(t) + i(t) = N;$$

(2) 模型的建立与求解

由上述假设可得微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = ks(t)i(t) \\ s(t) + i(t) = N \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

对方程组进行分离变量，可得：

$$i(t) = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{i_0} - 1\right)e^{-kNt}}$$

代入数据求解，得到的三地区 $i(t) - t$ 图：

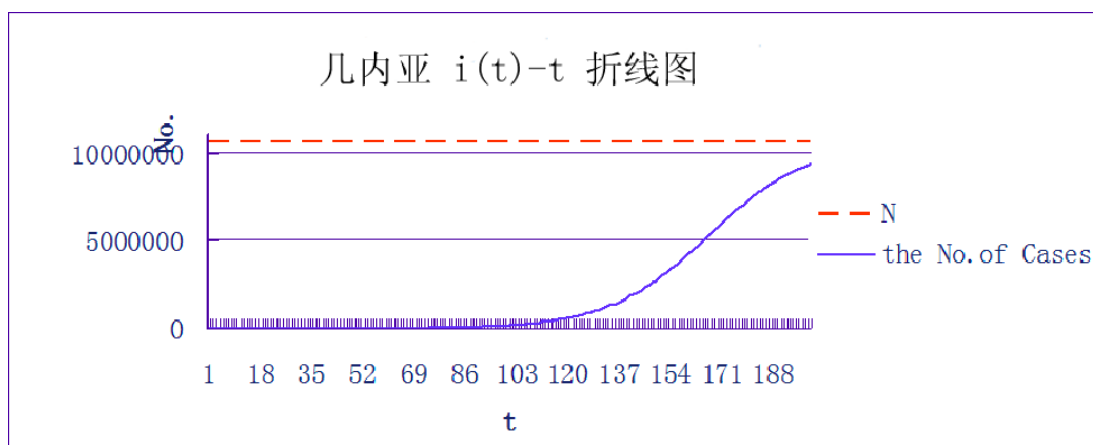


图4 几内亚 $i(t)$ - t 折线图

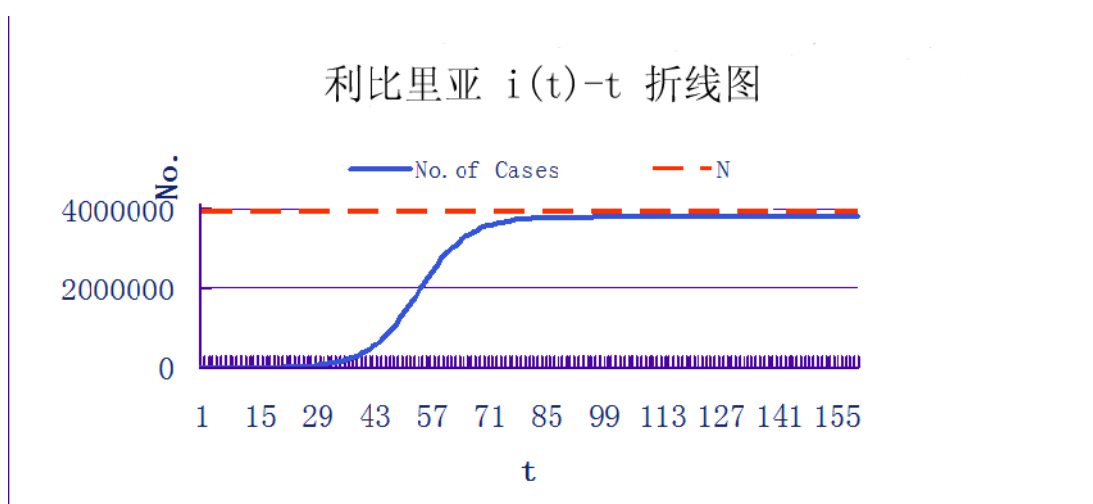


图5 利比里亚 $i(t)$ - t 折线图

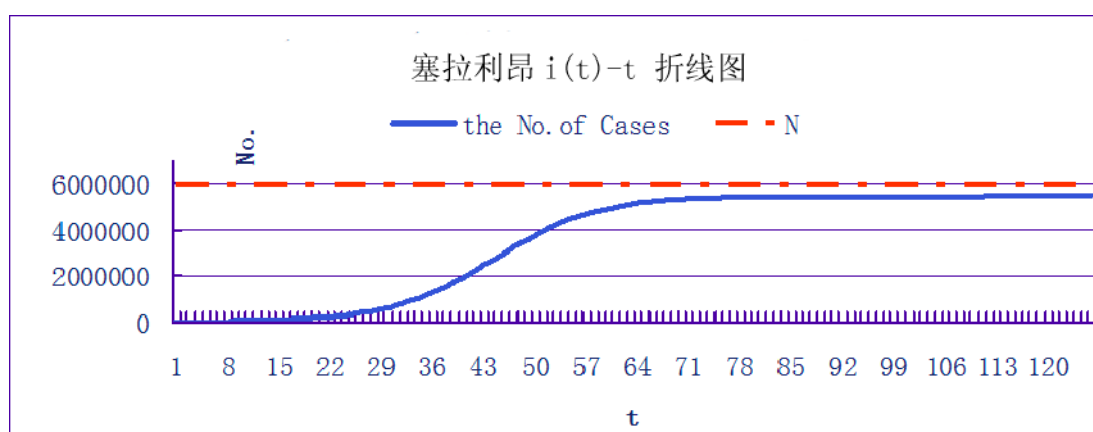


图6 塞拉利昂 $i(t)$ - t 折线图

如图可知，若不加以药物治疗，只是简单的采取隔离和预防措施，被感染人数会不断增加，初期扩散速度快，感染人数以指数形式增加，即若 $t \rightarrow \infty, i(t) \rightarrow \infty$ 。但这并没有考虑到隔离效果和已死亡人数，即在病人有效接触

的人群中，有健康人也有病人，而其中只有健康人才可以被传染。

为了改进上述模型，结合传染病 S-I-R 模型，建立改进的微分方程模型。

2. 改进的微分方程模型

将全部人口分为易感者 $s(t)$ 、感染者 $i(t)$ 、以及移出者 $r(t)$ ，三者之和：

$$s(t) + i(t) + r(t) = N$$

由于本模型考虑了移出者 $r(t)$ ，故引入了排除率 l ，即每日被隔离的人数与感染者之间的比例系数，

$$l = \frac{dr_m(t)}{d(t)} \bigg/ i_m(t)$$

根据初始条件 $i(0) = i_0, s(0) = s_0$ ，则 $r(0) = r_0 = N - i_0 - s_0$ ，故有：

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = ks(t)i(t) - l \cdot i(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -ks(t)i(t) \\ \frac{dr}{dt} = l \cdot i(t) \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, r(0) = N - s_0 - i_0 \end{cases}$$

由于以上方程难以求出具体解，故先进行数据计算，根据所设 t 的时间变化寻找 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的线性关系。

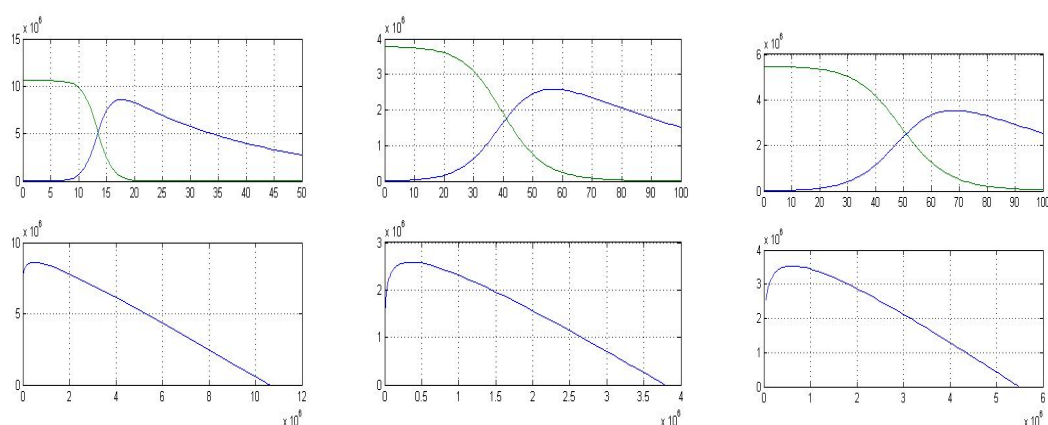


图7 利比里亚(左)、几内亚(中)、塞拉利昂(右)的 $i(t)$ - t 图和 $s(t)$ - t 图、 $i(t)$ - $s(t)$ 相轨线

• $i(t)$ - t 图和 $s(t)$ - t 图

可以看出，感染人数在经过持续增加后到达峰值，然后会有一定幅度的减少；

由于感染者一旦确诊便会被移出至 $r(t)$,所以 $s(t) + i(t)$ 的总和会不断变小 , 与图形变化趋势相符。

· 相轨线

相轨线定义为描述 $i(t)/s(t)$ 的曲线 , 在相面 $s-i$ 上 , 相轨线定义域为 :

$$d = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

整理微分方程组 , 可得 : $\frac{di(t)}{dt} = -1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{s}$

令常数 $\rho = \frac{1}{k}$ 为方程组的特征指数 , 则 : $\frac{di}{ds} = \frac{\rho}{s} - 1$

$$\text{相轨线方程为 : } i(s) = \rho \ln \frac{s}{s_0} - s + s_0 + i_0$$

所以可以从相轨线图中看出 : 不论相轨线从何点出发 , 它终将与 s 轴相交 , 即病人终将消失 ; 且最终未被感染的健康者的比例是 s_∞ ($t \rightarrow \infty$ 时的极限值)。

(二) 确定各地区实际可分配药品量

在控制病毒过程中通常需要进行药物分配 , 但实际拥有药品量往往供不应求 , 结合各地区对药品需求的重要程度和急需程度 , 运用以模糊数学为基础的模糊分配方法 , 使得药品的缺口在各地区之间合理分配。

1. 模型建立

设药品总数为 W , 供给地几内亚、利比里亚、塞拉利昂三个地区为集合 $U = (u_1, u_2, u_3)$, 三个地区各自需要药品的数量为 $Q = (q_1, q_2, q_3)$;

由于供不应求 , 则有 $W < \sum_{i=1}^3 q_i (i=1,2,3)$;

根据各地区实际情况 , 分别评定其重要程度为 a_i , 急需程度为 b_i , $a_i, b_i \in [0,1]$, 于是得到 U 上两个模糊子集 :

$$\tilde{A} = ((u_1, a_1), (u_2, a_2), (u_3, a_3)) , \quad \tilde{B} = ((u_1, b_1), (u_2, b_2), (u_3, b_3))$$

在分配过程中 , 重要性与急需性并不一定占有平等地位 , 故可以给出合理权

重分配 α 、 β , $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$

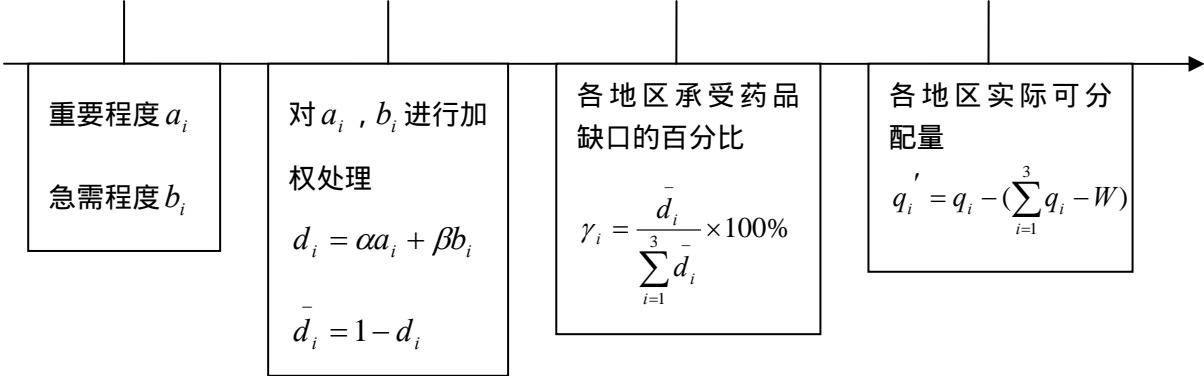
对 \tilde{A} , \tilde{B} 的隶属函数进行加权处理 , 得到综合模糊子集 :

$$\tilde{D} = ((u_i, d_i) | d_i = \alpha a_i + \beta b_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

对于不足量 , 用户合理承受的百分比为 : $\gamma_i = \frac{\bar{d}_i}{\sum_{i=1}^m \bar{d}_i} \times 100\%$ ($\bar{d}_i = 1 - d_i$)

得用户实际可分配量为 : $q_i' = q_i - (\sum_{i=1}^3 q_i - W) \times \gamma_i$

2. 模型求解



(1) 运用 AHP 层次分析法 , 确定 a_i 值

构造两两比较判断矩阵, 由因素集 U 得到判别矩阵, 用方根法求最大特征根及其对应的特征向量。当 $CR = CI / RI < 0.1$ 时 (CR 为随机一致性比率; CI 为判断矩阵的一般一致性指标, $CI = (\lambda_{\max} - m) / (m - 1)$; m 为判断矩阵的阶数; RI 为判断矩阵的平均随机一致性, 取值见表 1) , 即认为判断矩阵具有满意一致性, 否则, 需要调整判断矩阵, 使之具有满意的一致性。

表1 R_1 取值表

矩阵维数	1	2	3	4	5	6
R_1	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26

将 $U = (u_1, u_2, u_3)$ 三个地区作为判断因素 , 分别比较两两因素的重要程度 :

设同等重要为 1 , 重要为 3 , 很重要为 5 , 非常重要为 7 , 极重要为 9 ; 不重

要为 1/3 , 很不重要为 1/5 , 非常不重要为 1/7 , 极不重要为 1/9 , 处在以上各等级之间时 , 可记为 2,4,6,8 或 1/2,1/4,1/6,1/8 , 通过查阅相关文献得判断矩阵为

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{求各权重向量近似值 } a_i' = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^3 a_{ij}}$$

$$\text{得 } a_1' = 2, a_2' = 1, a_3' = 0.5$$

$$\text{将 } a_i' \text{ 作归一化处理, 求出 } a_i \text{ 值, 公式为 } a_i = \frac{a_i'}{\sum_{k=1}^3 a_k'}$$

$$\text{得 } a_1 = 0.571, a_2 = 0.286, a_3 = 0.143$$

用一致性比率 (CR) 检验所得 a_i 值有无逻辑错误

$$\text{先求特征值 } \lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^3 (a_{ij} a_j)}{a_i}$$

$$\text{得 } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$$

$$\text{再求最大特征值 } \lambda_{\max} = \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}{3}$$

$$\text{得 } \lambda_{\max} = 3$$

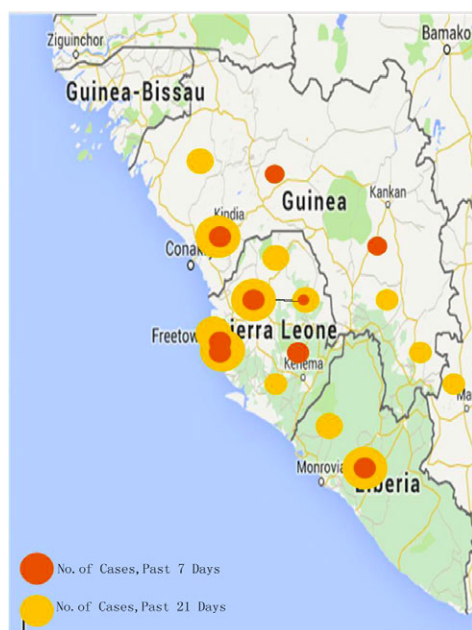
$$\text{计算一致性检验值 } CI = \frac{\lambda_{\max} - 3}{3 - 1} = 0$$

通过查平均随机一致性指标 RI 值表得 $RI = 0.52$

$$\text{得 } CR = \frac{CI}{RI} = 0$$

$CR < 0.1$, 说明所得 a_i 值无逻辑错误

(2) 运用打分法, 确定 b_i 值



由上图，得各地区急需性打分表为

u_1	u_2	u_3	合计
2	1	3	6

根据公式 $b_i = \frac{u_i \text{地区的得分}}{\text{总分}}$

得 $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 3$

(3) 根据公式 $d_i = \alpha a_i + \beta b_i$, 其中 $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.4$

得 $d_1 = 0.4578$, $d_2 = 0.2384$, $d_3 = 0.2858$

(4) 根据公式 $\bar{d}_i = 1 - d_i$

得 $\bar{d}_1 = 0.5242$, $\bar{d}_2 = 0.7616$, $\bar{d}_3 = 0.7142$

(5) 根据公式 $\gamma_i = \frac{\bar{d}_i}{\sum_{i=1}^3 \bar{d}_i} \times 100\%$

得 $\gamma_1 = 0.2621$, $\gamma_2 = 0.3808$, $\gamma_3 = 0.3571$

(6) 根据公式 $q_i' = q_i - (\sum_{i=1}^3 q_i - W) \times \gamma_i$

$$\text{得 } q_1' = 1866 - (20972 - W) \times 0.2621$$

$$q_2' = 2601 - (20972 - W) \times 0.3808$$

$$q_3' = 16505 - (20972 - W) \times 0.3571$$

3. 模型总结

通过运用基础模糊数学的模糊分配方法，我们将供不应求的药品合理分配。根据各地区的重要程度和紧急程度，使其合理承受药品不足量的一定百分比，实现有限药品数量效用最大化，以便更好地去阻止病毒的传播或者至少保持现在的状态。

（三）运输系统的建立

1. 基于 P-中值模型的中转站选址问题

为使各疫区和各中转站之间以需求量为权重的运输距离最小，采用基于 P-中值模型的静态确定型“中间定位”设施选址模型，以充分实现中转站选址的公平性和效率性。

（1）模型建立

为迅速调动救援物资到达各需求区域，运用 P--中值模型，旨在实现要求设置的设施到需求区域总加权距离为最小。

$$\text{目标函数：} \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} w_i d_{ij} y_{ij}$$

$$\text{约束条件：} \sum_{j \in J} y_{ij} = 1, i \in I$$

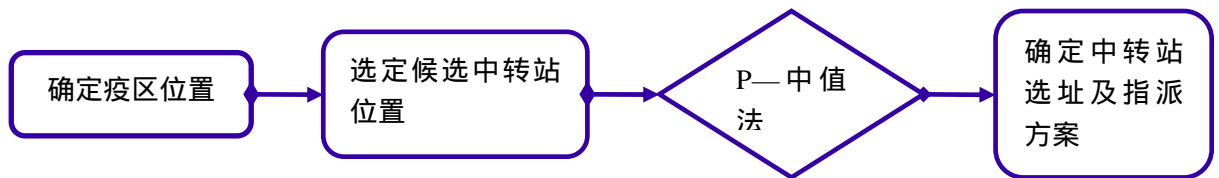
$$\sum_{j \in J} x_j = p$$

$$y_{ij} \leq x_j, i \in I, j \in J$$

$$x_j, y_{ij} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J$$

利用 Lingo 求解上述线性规划问题，得到候选设施的选址方法及各设施到个需求区的指派方案。

（2）模型求解



当前研究开发埃博拉疫苗或药物的国家有：美国、加拿大、英国、中国和俄罗斯，考虑到美国的经济实力，科研实力，研制出的药物和疫苗具有更高的可靠性和安全性，并已进入大规模临床试验阶段，故本模型假定所有药物都从美国运往各中转站，且运输方式均为空运。

根据世界卫生组织最新公布的截止 2015 年 2 月 4 日有关埃博拉病毒的统计数据，使用确诊患病人数、过去七天及二十一天的病例数和各地区患病人数的波动情况，秉承公平随机性和人道主义原则，结合地理位置因素，使得疫区覆盖面积最大化，综合选定疫区位置： $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$

表 2 疫区选取位置

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
Forecariah	Macenta	Tougue	Kailahun	Montserrado

考虑到塞拉利昂地区埃博拉病情最严重的地区集中分布在首都弗里顿的特殊性，且弗里顿拥有弗里顿隆吉国际机场，是便捷的交通枢纽，方便药品和疫苗传送，满足设置中转站的条件，故在塞拉利昂首都弗里顿设置一中转站，且此中转站仅提供弗里顿周边病情严重地区的需求。

针对剩余地区，综合权衡疫区位置和机场所在位置，考虑中转站选取地点的覆盖性及应急性，拟定候选中转站位置： $J = \{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5\}$

表 3 候选中转站位置

j_1	j_2	j_3	j_4	j_5
Conakry	Kissidougo	Kankan	Kenema	Kabala

通过索引 Google 地图得到各候选中转站到各疫区的直线距离，由各疫区的重要程度及紧急程度评定其权重指标

表 4 各候选中转站到各疫区的距离及各疫区权重系数

	Forecariah	Macenta	Tougue	Kailahun	Montserrado
Conakry	41.1628	296.483	160.044	230.056	296.158
Kissidougo	203.271	62.4286	211.230	68.7152	203.851
Kankan	266.584	126.537	214.063	166.121	297.524
Kenema	172.681	130.684	254.657	58.4728	105.044
Kabala	105.300	160.176	129.326	111.285	234.785
Weight	2	5	1	4	3

运用 P-中值法

$$\text{目标函数：} \min \sum_{1 \leq i \leq 5} \sum_{1 \leq j \leq 5} w_i d_{ij} y_{ij}$$

$$\text{约束条件：} \sum_{1 \leq j \leq 5} y_{ij} = 1, 1 \leq i \leq 5$$

$$\sum_{1 \leq j \leq 5} x_j = 5$$

$$y_{ij} \leq x_j, 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$$

$$x_j, y_{ij} \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$$

确定中转站选址及由各中转站到各疫区的指派方案，如图

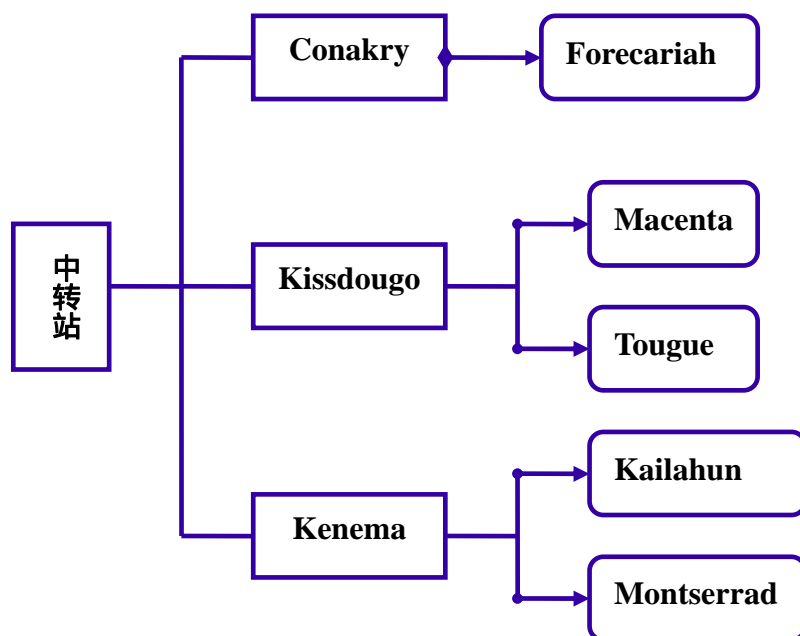


图 7 中转站到各疫区的指派方案



2. 各疫区给药量的分配

根据(二)中基于模糊数学的模糊分配法中得到的实际分配至各国家的药品数量可得总药品量的限制条件

$$\begin{cases} 1866 - (20972 - W) \times 0.2621 \leq W \\ 2601 - (20972 - W) \times 0.3808 \leq W \\ 16505 - (20972 - W) \times 0.3571 \leq W \end{cases}$$

得 $W \geq 14023$

综合考虑, 取 $W = 15000$

依据 4.3.1 中各疫区权重系数进行分配, 可得各地区分配药品量为

Forecariah	Macenta	Tougue	Kailahun	Montserrado
75	187.5	37.5	514	686

3. 总结

为解决本任务, 本文建立了建立基于 p-中值模型的静态确定型“中间定位”设施选址模型, 结合疫区的重要程度和交通枢纽的分布, 使得以需求量为权重的运输距离最小; 利用任务 2 得到的实际分配到各国家的药品量, 按紧急程度(各城市近一周新增确诊人数、发现第一例病例的时间、总患病人数)的权重分配运送到各城市的药品量和指派路线, 充分体现运输系统的公平性和效率性。

最终得出的中转站 疫区(具体城市)的药品分配量如下图所示:

	Forecariah	Macenta	Tougue	Kailahun	Montserrado
Conakry	75	187.5	37.5	514	686
Kissidougou					
Kankan					
Kenema					
Kabala					

(四) 利用改进的S-I-R模型预测给药后的病毒控制情况

1. 模型建立

由于在一定时期后，世界药物组织可以制造出可以治疗的药物或疫苗，根据相关新闻的报道，可以得知最开始的时候这两者的产量非常稀少，即便在该研究最先进的美国，现在阶段的日产量也是40支/天，完全不能达到减缓疫情的效果，故在考虑本任务时，只考虑病毒感染者提供药物，忽略前期注射疫苗的影响。

由上一段，假设所有处于潜伏期的病人一定会进入感染期，同时，吃过药的病人立刻不具有传染性，且可以被治愈，不会再次患病。本章，会对前面模型^{*}进行进一步的改进，得出提供不同总量药品后，患病人数的规模。

其中，我们设定 α 为给药后的防控因子（ $0 \leq \alpha \leq 1$ ），即我们会按照各地患病总人数的一定比例进行给药，此时，我们给药的比例将决定未来患病人数的规模。以下为我们改进的方程：

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = k(1-\alpha)s(t)i(t) - l \cdot i(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -k(1-\alpha)s(t)i(t) \\ \frac{dr}{dt} = l \cdot i(t) \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, r(0) = N - s_0 - i_0 \end{cases}$$

2. 模型求解

以下，我们以塞拉利昂为例，分析当 α 取不同值时，疫情的控制情况：

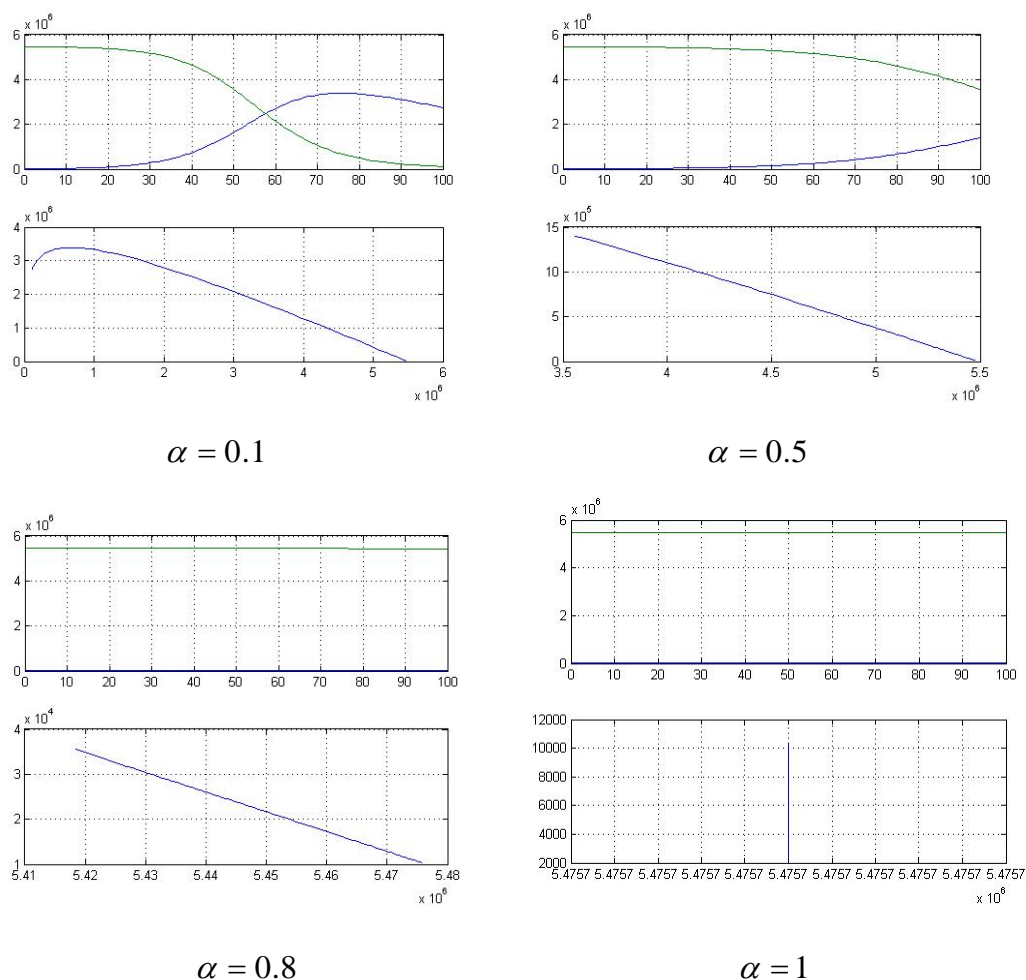


图8 取不同值时塞拉利昂 $x(1)-t$ 图和 $x(2)-t$ 图、 $x(1)-x(2)$ 相轨线

(1) 当 $\alpha = 0.1$, 即 $1-\alpha = 0.9$ 时, 由图可知, 在这个条件下, 很难控制传染病的规模。

(2) 当 $\alpha = 0.5$, 即 $1-\alpha = 0.5$ 时, 由图可知, 在这种情况下, 患病人数远远小于健康人数, 可见此时传染病的传播可以得到控制。

(3) 当 $\alpha = 0.8$, 即 $1-\alpha = 0.2$ 时, 由图可知, 此时, 传染病的传播几乎完全得到控制。

(4) 当 $\alpha = 1$, 即 $1-\alpha = 0$ 时, 这是一种理想的状态, 传染病完全得到控制, 但是, 这种情况很难实现。

由图形可以分析, 随着给药量的增加, 患病人数与易感人群的人数变化趋势, 即随着给药量的增加, 患病人口的规模可以逐步得到控制, 由图可以看出, 当达到一个极限, 即所有患病人都可以被提供药品时, 可以迅速控制 $\alpha=0.5$ 时, 疫情即可以得到控制。

3. 不同时点为起点进行疫情防治

选择在不同的时点开始对疫情进行防治，分析其效果的差异性。

(1) 在 $t = 0$ 处开始采取防控措施

先考虑一旦有疫情发生，政府及医疗部门立即采取相关防控措施，即 $t = 0$ 的情况，下以塞拉利昂为例求得不同 ζ 取值下的 $i(t)$ 值

表 5 不同 ζ 值下的 $i(t)$ 值

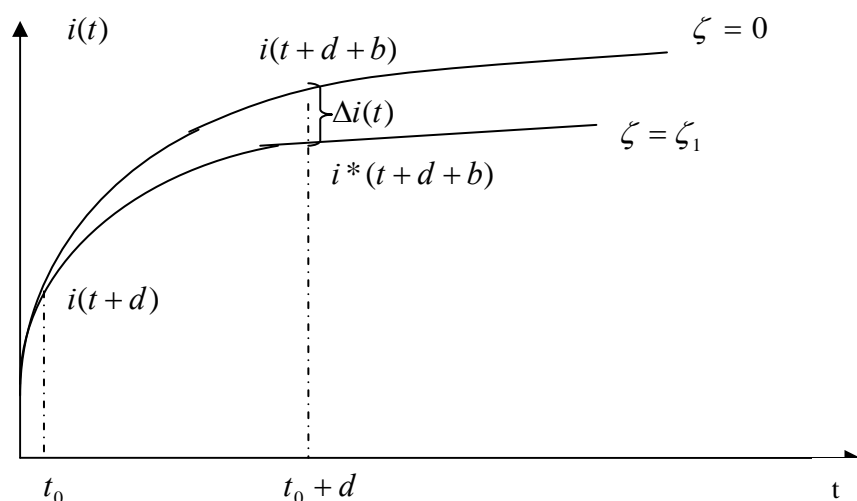
ζ	$i(0)$	$i(10)$	$i(20)$	$i(30)$	$i(40)$	$i(50)$	$i(60)$
0	10340	42153.97	168834.5	632015.8	1909548	3765930	4936184
0.1	10340	36643.17	128289.4	431017.3	1277737	2850009	4354876
0.2	10340	31848.58	97302.83	290121.2	807759.1	1909548	3416621
0.3	10340	27678.16	73697.72	193519.7	490499.8	1144662	2274101
0.4	10340	24051.42	55759.82	128289.4	290121.2	632015.8	1277737
0.5	10340	20898.09	42153.97	84694.57	168834.5	331434.3	632015.8
0.6	10340	18156.81	30110.26	55759.82	97302.83	168834.5	290121.2
0.7	10340	15774.08	24051.42	36643.17	55759.82	84694.57	128289.4
0.8	10340	13703.25	18156.81	24051.42	31848.58	42153.97	55759.82
0.9	10340	11903.68	13703.25	15774.08	18156.81	20898.09	24051.42
1	10340	10340	10340	10340	10340	10340	10340

(2) 在 $t \neq 0$ 处开始采取防控措施

现考虑在 $t = t + d$ 天处开始采取防控措施，则对 SIR 模型的微分方程进行改进，有

$$\begin{cases} \frac{di(t+d)}{dt} = k(1-\zeta_0)s(t)i(t+d) - l \cdot i(t+d) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -k(1-\zeta_0)s(t)i(t+d) \\ \frac{dr}{dt} = l \cdot i(t+d) \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, r(0) = N - s_0 - i_0 \end{cases}$$

求出 t_0 时刻采取隔离措施和在 $t_0 + d$ 时刻开始采取隔离措施之间的差值，即提前或推迟 d 天采取隔离措施产生的效果，如下图所示



假设在 $t + d + b$ 天改变隔离强度，使 ζ_0 变为 ζ_1 ，这对 t^* 点 ($t^* \geq t + d + b$) 累计患病人数的影响值为

$$\begin{cases} \frac{di(t + d + b)}{dt} = k(1 - \zeta_1)s(t)i(t + d + b) - l \cdot i(t + d + b) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -k(1 - \zeta_1)s(t)i(t + d + b) \\ \frac{dr}{dt} = l \cdot i(t + d + b) \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, r(0) = N - s_0 - i_0 \end{cases}$$

分别以 ζ 为 0.9 和 0.8 的情况为例，计算出 t_0 为 5, 15, 25 时的隔离效果

表 6 不同时期开始隔离的隔离效果

t_0	$\zeta = 0.9$					$\zeta = 0.8$				
	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
5	13701.5	15772.1	18154.5	20895.5	24048.4	12771.8	14702.3	16923.7	19479.4	22419.6
	5	4	8	2	7	8	5		6	1
15	18150.1	20890.3	24042.5	27667.9	31836.8	14702.3	16923.7	19479.4	22419.6	25801.4
		9	7	6	6	4		7	1	5
25	24036.6	27661.1	31829.0	36620.7	42128.1	16923.6	19479.4	22419..	25801.4	29690.6
	4	8	6	1	6	9	7	6	4	4

综上所述，一方面可以看出早隔离比晚隔离好，隔离强度越大越好，与实际
问题相符，另一方面可以通过平衡 ζ 和 d 的取值，使得 $i(t)$ 取值达到最小，并可
确定此时药品的生产速度，即当生产速度满足上述要求时，此模型可以实现阻止

埃博拉病毒传播的目的。

五、模型修正

分发药品时要考虑产量与分发量的关系和政府工作的廉政和高效。其次，基于非洲特殊的地理位置，结合水感染、气候影响、交通方式、人口分布特殊性等因素，利用控制变量法分别研究各因素对病毒传播的影响。最后，因为进行药物防控的起始时间不同，因此，可以对模型进行进一步的改进，分析在不同时间起点时，防控的效果分析。

（一）SEIR 模型

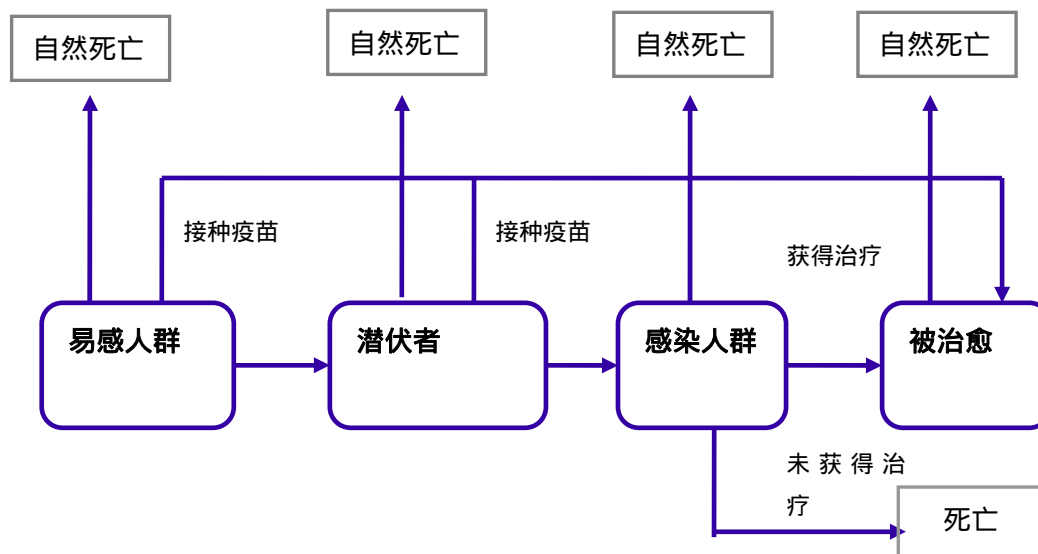
由于 SIR 模型没有考虑潜伏人数，且在预测感染人口数时 SIR 模型忽略了人口的自然死亡，所以我们引入 SEIR 模型对 SIR 模型进行改进。

另一方面，由于当前药物产量小，完全不能满足总患病人数的需求，所以在前面的模型建立中我们忽略了疫苗的发放，假设所产药物全部分配给患病者。

尽管如此，在技术成熟以后，药物可以大批生产，那么前文所建立的 SIR 模型就存在一定的局限性，这点也体现了在 SEIR 模型中。

表 7 SEIR 模型的符号假设

S	易感人群
E	潜伏者
I	感染人群
R	治愈人群
$\Lambda(t)$	总人口数
$\mu(t)$	T 时刻的自然死亡率系数
$\beta(t)$	T 时刻的感染系数
$\varepsilon(t)$	潜伏期的移出率
$\gamma(t)$	患病阶段的移出率
$\xi(t)$	获得疫苗或药物的可能性



SEIR 模型的微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda(t) - \beta(t)SI - [\mu(t) + \xi(t)]S \\ \frac{dE}{dt} = \beta(t)SI - (\mu(t) + \varepsilon(t) + \xi(t))E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon(t)E - [\mu(t) + \gamma(t) + (1 - \xi(t))]I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma(t)I - \mu(t)R \\ N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \end{cases}$$

(二) 中转站选址

(1) 多阶段选址分配

考虑到期望所建立的中转站在建成后的一段时间内都能够很好地实现既定指派方案，保持其最优性，也就是说不仅要选择一个在当前时间需求情况下最优的设施位置，而且在将来各疫区情况发生变化后仍然最优的设施位置，故可静态确定型“中间定位”设施选址模型改进为多阶段选址-分配模型，以便达到在各疫区埃博拉病毒感染情况发生变化后仍能实现最佳选址的目的。

(2) 分散多重设置

在上述基于 P-中值模型的静态确定型“中间定位”设施选址模型中，将疫区按其地理位置分布情况集中视为一点，考虑到实际问题中疫区分布较为分散，

对于不同的需求区域，中转站选址需要考虑合适的备用覆盖和超额覆盖，使一个中转站同时覆盖多个需求区域，当需求产生时，覆盖需求区域的所有中转站都可提供快速反应，以达到紧急应对埃博拉病毒爆发的情况。

（三）其它影响病毒传播的自然因素和人为因素

（1）水感染：埃博拉病毒随液体传播

（2）气候因素：非洲南北对称的气候特点

（3）交通方式：非洲不同地区差别较大的运输体系

（4）人口分布：非洲地广人稀极不平衡的人口疏密分布

在考虑病毒传播时应结合水感染、气候因素、交通方式、人口分布特殊性等因素对其传播的影响。

六、模型评价

（一）优点

- 1.在模型一中，我们结合实际情况对埃博拉病毒传播模型进行改进，使得对未来被感染人数的预测值更加接近实际情况。
- 2.在模型二中，相较于传统的层次分析法，模糊层次分析法可以更加准确地得到特征向量，同时，模糊层次分析法不包含一致性。
- 3.在模型三中，基于定量分析的方法，我们的预测过程更为客观和有效。
- 4.在模型改进中，我们增加了新的变量，通过控制变量法对数据进行分析，得到了预期结果。

（二）缺点

- 1.在模型二中，对于模糊层次分析法中一些指标权重的主观判断，可能会使得模型的客观性受到一定的影响。
- 2.在模型二和模型三中，由于无法确定供药总量，因此我们无法精确的确定各地区分配药量的具体数值。
- 3.在模型一和模型四中，由于微分方程过于复杂，我们很难计算出受感染人数的具体值。

(三) 改进

1. 如果可以获知关于各城市患病人数、疫情爆发情况、以及各城市间的距离等更详细的情况,我们可以更为准确的确定中转站的位置和运输方案,从而建立更精细的运输系统。
2. 如果可以获知药物的研究现状,我们可以通过控制药品和疫苗的生产速度和数量,从而将疫情的危害控制在最小的范围。

七、参考文献

- [1]李伟.关于 SARS 病毒传播的数学模型[J].毕节师范高等专科学校学报(综合版),2004,02:46-52.
- [2]王万平,钟解志.模糊数学在消毒药物分配中的应用[J].中国消毒学杂志,1991,03:186-189.
- [3]陈志宗,尤建新.重大突发事件应急救援设施选址的多目标决策模型[J].管理科学,2006,04:10-14.

附录

微分方程 MATLAB 程序：

```
k=0.000000044;l= 0.0156987;
```

```
ill=@(t,x) [k*x(1)*x(2)-l*x(1);-k*x(1)*x(2)]; //定义回归方程和 ill 函数
```

```
ts=0:100;输入 t 初值
```

```
x0=[8478,3778286]; //输入 x(1)、x(2)初值
```

```
[t,x]=ode45(ill,ts,x0); subplot(211), //用以解微分方程
```

```
plot(t,x(:,1),t,x(:,2)),grid on //分别输出 x(1)-t 图和 x(2)-t 图
```

```
subplot(212),
```

```
plot(x(:,2),x(:,1)),grid on //将 x(1)-x(2)图在第二格输出
```