華南師範大學

学院 20　-20　学年第　学期期末考试试卷

级《　　　　》试卷（A 卷）

专业________年级________班级________姓名________学号_______

一、解微分方程。（本题总分 10 分，每小题 5 分）

1. 求方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y+2x^3$ 满足条件 $y(1)=1$ 的特解。

2. 求方程 $y''+y'-6y=0$ 的通解。

二、求偏导数或全微分。（本题总分 20 分，每小题 10 分）

1. 设 $x^2+y^2+z^2=y\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $dz,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

三、级数的判别.（本题总分 30 分，每小题 10 分）

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n^2\alpha}{n^2}$ 是否收敛？如果收敛是绝对还是条件收敛？

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 的和。

3. 利用 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$，将 $f(x)=\dfrac{1}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数。

四、计算下列积分。（本题总分 10 分，每小题 5 分）

1. $I=\int_0^1 dx\int_x^1 \sin y^2 dy$

2. $\mathrm{I}=\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 $L: x=2\cos t, y=2\sin t\,(0\le t\le 2\pi)$

五、计算 $\iint\limits_D \dfrac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$。（本题总分 10 分）

六、计算 $\mathrm{I}=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $|x|+|y|=2$ 取逆时针方向。（本

题 10 分）

七、设 $f(u)$ 有连续的导数，计算 $I=\oiint \frac{2}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{2}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+zdxdy$，其中 Σ 是 $y=x^2+z^2$， $y=8-x^2-z^2$ 围成立体的外侧。（本题 10 分）

参考答案

一、解微分方程。（本题总分 10 分，每小题 5 分）

1. 求方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y+2x^3$ 满足条件 $y(1)=1$ 的特解。

解：因为方程可以写为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+2x^2$，根据公式原方程的通解为（1 分）

$$y=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int 2x^2e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C\right] \qquad （2 分）$$

$$=e^{\ln x}\left[\int 2x^2e^{\ln\frac{1}{x}}dx+C\right]=x\left[\int 2xdx+C\right]$$

$$=x\left[x^2+C\right]. \qquad （1 分）$$

又根据条件 $y(1)=1$，有 $1=1\left[1^2+C\right]$，所以得到 $C=0$，

所求特解为 $y=x^3$. （1 分）

2. 求方程 $y''+y'-6y=0$ 的通解。

解：特征方程为 $r^2+r-6=0$，即 $r_1=-3, r_2=2$ （3 分）

故通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$。 （2 分）

二、求偏导数或全微分。（本题总分 20 分，每小题 10 分）

1. 设 $x^2+y^2+z^2=y\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解： 令$F=x^2+y^2+z^2-y\cos\left(\frac{z}{y}\right)$，$\Rightarrow F_x=2x$，（2 分）

$$F_z=2z+y\sin\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}=2z+\sin\left(\frac{z}{y}\right)$$（4 分）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-2x}{2z+\sin\left(\frac{z}{y}\right)}。$$（4 分）

2. 设$z=f(x^2-y^2,xy)$，其中f有连续的二阶偏导数，求$dz,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1+xf_2.$（4 分）

$$dz=\left(2xf_1+yf_2\right)dx+\left(-2yf_1+xf_2\right)dy$$（2 分）

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xf_1+yf_2\right)\\&=2x\left(-2yf_{11}+xf_{12}\right)+f_2+y\left(-2yf_{21}+xf_{22}\right)\end{aligned}$$（4 分）

三、级数的判别.（本题总分 30 分，每小题 10 分）

1. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2\alpha}{n^2}$是否收敛？如果收敛是绝对还是条件收敛？

解： Q$\left|\frac{\sin n^2\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$（4 分）

和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以该级数绝对收敛。（4 分）+（2 分）

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数，并求数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的和。

解： 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域为$[-1,1)$，其和函数（2 分）

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n}=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1);$$（2 分）

两边积分得，$\int_0^x s'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)$，（2 分）

$\Rightarrow s(x) = -\ln(1-x)$，（2 分）

令 $x=-1$ 得，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$。（2 分）

3. 利用 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x \in (-1,1)$，将 $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数。

解： 因为 $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right)$（2 分）

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \left(|x|<1\right)$，$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\left(|x|<2\right)$（4 分）

所以 $f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n, \left(|x|<1\right)$，（2 分）

即收敛区间满足 $-1 < x < 1$。（2 分）

四、计算下列积分。（本题总分 10 分，每小题 5 分）

1. $I = \int_0^1 dx \int_x^1 \sin y^2 dy$

解： 画图。

$\int_0^1 dx \int_x^1 \sin y^2 dy = \int_0^1 dy \int_0^y \sin y^2 dx = \int_0^1 \left[x \sin y^2\right]\Big|_0^y dy$（2 分）+（2 分）

$= \int_0^1 y \sin y^2 dy = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$。（1 分）

2. $I = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t\,(0 \le t \le 2\pi)$。

解： 由曲线积分转化为定积分得（2 分）+（2 分）

$I = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2}\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt$

$= \int_0^{2\pi} 2^2 dt = 8\pi$。（1 分）

五、计算 $\iint_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2 \le 1\right\}$。（本题总分 10 分）

解： $\iint\limits_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy + \iint\limits_D \frac{x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy = I_1 + I_2$，

（2 分）

$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} rdr = 2\pi \frac{1}{2} \ln\left(1+r^2\right)\Big|_0^1 = \pi \ln 2$，（3 分）

由对称性奇偶性得 $I_2 = 0$，（3 分）

故 $\iint\limits_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy = \pi \ln 2$。（2 分）

六、计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $|x|+|y|=2$ 取逆时针方向。

（本题 10 分）

解： $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, (x,y) \neq (0,0)$。（2 分）

由于曲线内有洞 $(0,0)$，在 L 内作椭圆周

$l: x = \varepsilon\cos\theta, y = \varepsilon\sin\theta, \theta \in (0,2\pi)$，取逆时针。

利用格林公式得 $\oint_{L+l^-} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = 0$。（4 分）

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \int_l \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\cos\theta d\varepsilon\sin\theta - \varepsilon\sin\theta d\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} d\theta = 2\pi$$ 。（4 分）

七、设 $f(u)$ 有连续的导数，计算 $I = \oiint\limits_\Sigma \frac{2}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dydz + \frac{2}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dzdx + zdxdy$，其中 Σ 是 $y = x^2+z^2$， $y = 8 - x^2 - z^2$ 围成立体的外侧。 （本题10分）

解： 记 Ω 为 Σ 所围成的立体，它在 xoz 面上的投影为 $x^2+z^2 \leq 4$。

利用高斯公式有

$$I=\iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right\}dxdydz$$ （4 分）

$$=\iiint_{\Omega}\left\{\frac{2}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+1\right\}dxdydz=\iiint_{\Omega}dxdydz$$ （2 分）

利用柱面坐标，

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{r^2}^{8-r^2}rdy=2\pi\int_0^2\left(8r-2r^3\right)dr=16\pi$$ （4 分）