一、

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x^2}{x+x^2}$

$\because \sin x^2$ 为有界 $\in[-1,1]$ ……（2分）

$x+x^2\to\infty$

（12分）

$\therefore$ 原式 $=0$ ……

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\frac{\cos x}{x}}$

$\boxed{\left(\text{当 } x\to 0,\ \begin{cases}\cos x\to 1\\ x\to 0\end{cases}\right)}$ （有直接代入 x=0 即可）

$=\cancel{\lim\limits_{x\to 0}}\dfrac{1}{1+\infty}=0$ ……（12分）

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+\sin x}}{x}$

$\frac{0}{0}$ 形式，由洛必达

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+\sin x})'}{x'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

$=-\frac{1}{2}$ ……（12分）

使用等价无穷小、分子有理化也可以

$x\sim\sin x$

二、

1) $y=\ln(x+y)+e^{x^2}$

等式两边对 x 求导

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}+2xe^{x^2}$ …… （14分）

显然 $x+y\neq 0$

$\Rightarrow (x+y)\dfrac{dy}{dx}=(1+\dfrac{dy}{dx})+2xe^{x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+2xe^{x^2}(x+y)}{x+y-1}$ ……（16分）

$dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}(x+y)}{x+y-1}dx$ ……（18分）

2) $\begin{cases}x=\sin(e^t)\\ y=t^2+\cos t\end{cases}$

$\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos(e^t)\\ \dfrac{dy}{dt}=2t-\sin t\end{cases}$

（8分）

$\therefore \boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t-\sin t}{e^t\cos(e^t)}}$ ……

（14分）

$\therefore \boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\dfrac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\left(\frac{2t-\sin t}{e^t\cos(e^t)}\right)'}{e^t\cos(e^t)}}$

（18分）……

基于右式的正确运算都给满分

$=\boxed{\dfrac{[(2-\cos t)e^t\cos(e^t)]-[e^t\cos(e^t)-(e^t)^2\sin(e^t)](2t-\sin t)}{[e^t\cos(e^t)]^3}}$

整理可得

（18分）……

$\boxed{\text{原式}=\dfrac{2(1-t)+\sin t+2te^t\tan(e^t)-e^t\tan(e^t)\sin t-\cos t}{\cos^2(e^t)}}$

三、

1）证明连续 a 取值

在 $x=0$ 连续，需 f(x)在 $x=0$ 的极限与 $f(0)$ 相等 ……（4分）

即 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}+a = f(0)=0$ ……（4分）

当 $x\to 0$，x^2 为无穷小，$\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数

故 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}+a = a = f(0)=0$ ……（6分）

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

2）在 $x=0$ 是否可导

由导数定义

$$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

同理

$= 0$ ……（15分）

故 f(x)在 $x=0$ 处可导（注意：不可用左极限=右极限证函数连续，可用导数值左极限=右极限）

$x\neq 0$

$x=0$

分）

四、构造函数

令 $g(x)=f(x)-x$

$\because g(0)=f(0)-0=f(0)<0$

$g(1)=f(1)-1>0$

$\boxed{\begin{array}{l}\because g(0)\cdot g(1)<0 \\ \text{由零点存在定理}\end{array}}$ ……10分

$\exists\ \xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$

（须为开区间）

$\Rightarrow g(\xi)=f(\xi)-\xi=0$

$\Rightarrow f(\xi)=\xi$ ……13分

证毕.

① 若上述开区间写成闭区间扣2分

② 此解用了 $f(x)-x$ 有零点的想法

若表述出现 f(x)与x在(0,1)有交点

也算数踩点

解二：

设 $g(x)=x$

g(x)与f(x)在(0,1)上有交点可证

$\because$ f(x)在[0,1]连续，且 $\begin{cases} f(0)<0 \\ f(1)>1 \end{cases}$

$\begin{cases} g(0)=0 \\ g(1)=1 \end{cases}$

$\therefore$ f(x)与g(x)至少有一个交点

证毕.