华南师范大学

学院 20　-20　学年第　学期期末考试试卷

级《　　　　》试卷（A 卷）

专业________年级________班级________姓名________学号________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、求过点 $M\left(1,-2,-1\right)$ 且与直线 $L:\begin{cases} x=-t+1 \\ y=3t-2 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程。（本题总分 10 分）

二、求偏导数或全微分。（本题总分 20 分，每小题 10 分）

1. 设 $x^2+y^2+z^2=y\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $dz,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

三、级数的判别。（本题总分 30 分，每小题 10 分）

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n^2\alpha}{n^2}$ 是否收敛？如果收敛是绝对还是条件收敛？

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 的和。

3. 利用 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n, x\in\left(-1,1\right)$，将 $f(x)=\dfrac{1}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数。

四、计算下列积分。（本题总分 10 分，每小题 5 分）

1. $I=\int_0^1 dx\int_x^1 \sin y^2 dy$。

2. $\mathrm{I}=\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $L: x=2\cos t, y=2\sin t\left(0\le t\le 2\pi\right)$。

五、计算 $\iint\limits_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy$**，其中** $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$**。（本题 10 分）**

六、计算 $\mathrm{I}=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$**，其中** L **是曲线** $|x|+|y|=2$ **取逆时针方向。（本题 10 分）**

七、设 $f(u)$ **有连续的导数，计算** $\mathrm{I}=\oiint \frac{2}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{2}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+zdxdy$**，其中** Σ **是** $y=x^2+z^2$，$y=8-x^2-z^2$ **围成立体的外侧。（本题 10 分）**

参考答案

一、求过点 $M(1,-2,-1)$ **且与直线** $L:\begin{cases}x=-t+1\\ y=3t-2\\ z=t-1\end{cases}$ **垂直的平面方程。**

（本题总分 10 分）

解： 由直线方程知他的方向向量是 $\{-1,3,1\}$，

这就是所求平面的法向量。（4 分）

由点法式得平面方程：

$-1(x-1)+3(y+2)+1(z+1)=0$，（4 分）

$x-3y-z-8=0$。（2 分）

二、求偏导数或全微分。（本题总分 20 分，每小题 10 分）

1. 设 $x^2+y^2+z^2=y\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解： 令 $F=x^2+y^2+z^2-y\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)$，$\Rightarrow F_x=2x$，(2 分)

$$F_z=2z+y\sin\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}=2z+\sin\left(\frac{z}{y}\right)$$ (4 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-2x}{2z+\sin\left(\frac{z}{y}\right)}。$$ (4 分)

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $dz,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1+xf_2.$ (4 分)

$$dz=(2xf_1+yf_2)dx+(-2yf_1+xf_2)dy$$ (2 分)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(2xf_1+yf_2)\\&=2x(-2yf_{11}+xf_{12})+f_2+y(-2yf_{21}+xf_{22})\end{aligned}$$ （4 分）

三、级数的判别.（本题总分 30 分，每小题 10 分）

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n^2\alpha}{n^2}$ 是否收敛？如果收敛是绝对还是条件收敛？

解： $\because \left|\dfrac{\cos n^2\alpha}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$ (4 分)

和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以该级数绝对收敛。（4 分）+（2

分）

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数，并求数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的和。

解： 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域为$[-1,1)$，其和函数（2 分）

$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n}=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$；（2 分）

两边积分得，$\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$，（2 分）

$\Rightarrow s(x)=-\ln(1-x)$，（2 分）

令$x=-1$得，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$。（2 分）

3. 利用$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$，将$f(x)=\frac{1}{2+x-x^2}$展成$x$的幂级数。

解： 因为$f(x)=\frac{1}{2+x-x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$（2 分）

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\left(|x|<1\right)$，$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\left(|x|<2\right)$（4 分）

所以$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n,\left(|x|<1\right)$，（2 分）

即收敛区间满足$-1<x<1$。（2 分）

四、计算下列积分。（本题总分 10 分，每小题 5 分）

1. $I=\int_0^1 dx\int_x^1\sin y^2 dy$

解： 画图。

$\int_0^1 dx\int_x^1\sin y^2 dy=\int_0^1 dy\int_0^y\sin y^2 dx=\int_0^1\left[x\sin y^2\right]\Big|_0^y dy$（2 分）+（2 分）

$=\int_0^1 y\sin y^2 dy=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$。（1 分）

2. $I=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $L: x=2\cos t, y=2\sin t\left(0\le t\le 2\pi\right)$。

解： 由曲线积分转化为定积分得 （2 分）+（2 分）

$$I=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2\cos t\right)^2+\left(2\sin t\right)^2}\sqrt{\left(-2\sin t\right)^2+\left(2\cos t\right)^2}dt$$

$=\int_0^{2\pi}2^2dt=8\pi$。 （1 分）

五、计算 $\iint\limits_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$。（本题总分 10 分）

解： $\iint\limits_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_D \frac{x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy=I_1+I_2$，

（2 分）

$I_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}rdr=2\pi\frac{1}{2}\ln\left(1+r^2\right)\Big|_0^1=\pi\ln 2$， （3 分）

由对称性奇偶性得 $I_2=0$， （3 分）

故 $\iint\limits_D \frac{1+x^3y^5}{1+x^2+y^2}dxdy=\pi\ln 2$。 （2 分）

六、计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $|x|+|y|=2$ 取逆时针方向。

（本题 10 分）

解： $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\ne(0,0)$。 （2 分）

由于曲线内有洞 $(0,0)$，在 L 内作椭圆周

$l: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta, \theta\in\left(0,2\pi\right)$，取逆时针。

利用格林公式得 $\oint_{L+l^-}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$。 （4 分）

$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_l \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$

$=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\cos\theta d\varepsilon\sin\theta-\varepsilon\sin\theta d\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}d\theta=2\pi$。 （4 分）

七、设 $f(u)$ 有连续的导数，计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{2}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{2}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+zdxdy$，

其中 Σ 是 $y=x^2+z^2,\quad y=8-x^2-z^2$ 围成立体的外侧。 （本题10分）

解：记 Ω 为 Σ 所围成的立体，它在 xoz 面上的投影为 $x^2+z^2\le 4$。

利用高斯公式有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right\}dxdydz \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{2}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+1\right\}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz \qquad (2\text{ 分})$$

利用柱面坐标，

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{r^2}^{8-r^2}rdy=2\pi\int_0^2\left(8r-2r^3\right)dr=16\pi \qquad (4\text{ 分})$$