1. 利用定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sin\frac{2}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$ $(a\neq e^{-1})$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{x}{2}}=3$, 求常数 c.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内具有连续的二阶导数, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1}|\leqslant k|a_n|$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, 其中常数 $0<k<1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

6. 试估计当 $x\to 0$ 时无穷小量 $\left(\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)^2$ 的阶, 并写出三个与之等价的无穷小量.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$. 设

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

证明: 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个实根.

9. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)\geqslant 0$. 试利用连续函数的介值定理证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

10. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明: 若 $f(x_o)\neq 0$, 则 $f(x)$ 在 (x_o,x_o+T) 内至少有两个零点.

11. 设 $a_1,a_2,a_3>0$, $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明: 方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在区间 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 内各有一个实根.

12. 求下列函数的导函数:

(1) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;

(2) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

(3) $y=(1+x^2)^{\arctan x}$;

(4) $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$ $(x>1)$;

(5) $y=\displaystyle\int_0^x e^{-(x-t)^2}\,\mathrm{d}t$.

13. 设 $y=e^x\sin x$. 求 $y',y'',y''',y^{(4)}$, 并由此计算 $y^{(15)}$.

14. 求由参数方程

$$\begin{cases}x(t)=a(\cos t+t\sin t)\\ y(t)=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数.

15. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(\tan x)=\sin x$. 求 $f'(\tan x)$ 及 $f'(x)$.

16. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可微性.

17. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, $f(x)=(x^2-a^2)\varphi(x)$. 求 $f'(a)$.

18. 设 $f(x)=x^3-3x+\lambda$, 其中 λ 为常数.

(1) 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内最多只有一个实根;

(2) 试确定 λ 的范围, 使得方程 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内有且仅有一个实根;

(3) 试确定 λ 的范围, 使得方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实根.

19. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导, 且无界. 证明: $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导. 证明: 存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

21. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导.

(1) 试给出函数 $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$ 的一个原函数;

(2) 若 $g''(x)\neq 0$, 且 $g(a)=g(b)=0$, 证明: 当 $x\in(a,b)$ 时, $g(x)$ 恒不为零;

(3) 若 $g''(x)\neq 0$, 且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, 证明: 存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f''(c)}{g''(c)}.$$

22. 证明: 当 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}>\dfrac{\beta}{\alpha}$.

23. 一张 1.4 米高的图画挂在墙上, 它的底边高于观察者的眼睛 1.8 米. 观察者应该站在距离墙多远处看图才最清楚 (即视角最大)?

24. 证明: 单位圆的内接正 n 边形的面积随 n 的增大而增大.

25. 求函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 的凹凸区间及拐点.

26. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导. 证明:

(1) 若 $f''(x)>0$, 则 $y=e^{f(x)}$ 在 (a,b) 内是凹的;

(2) 若 $f''(x)<0$ 且 $f(x)>0$, 则 $y=\ln f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的.

27. 设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 且 $f''(x)<0$. 证明: 对于 I 中的任意两个不同的点 x_1,x_2, 函数 $\varphi(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 为区间 $[0,1]$ 上的凸函数.

28. 求下列不定积分:

(1) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int\frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$;

(6) $\int\sin x\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$.

29. 对于不定积分 $\int\frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-3\cos x}\,\mathrm{d}x$, 若利用万能公式转化为有理函数的不定积分, 计算较为繁琐. 根据被积函数的特点, 我们可以设法求出两个常数 A 和 B, 使得

$$\sin x+\cos x=A(2\sin x-3\cos x)+B(2\sin x-3\cos x)'.$$

(1) 试利用这个方法求上面给出的不定积分;

(2) 说明这个方法适用于所有型如 $\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\,\mathrm{d}x$ 的不定积分, 其中 $c^2+d^2\neq 0$.

30. 求下列定积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+e^{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}\,\mathrm{d}\theta\ (a>1)$;

(3) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(5) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}}x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

31. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=a, f(\pi)=b$. 求定积分 $\int_0^{\pi}\left[f(x)+f''(x)\right]\sin x\,\mathrm{d}x$.

32. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续.

(1) 证明: $\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$;

(2) 利用上面的结果求定积分 $\int_0^2\frac{x^2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

33. 设 $f(x)=\frac{x\ln x}{1-x}$.

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$;

(2) 试定义一个在 $[0,1]$ 上连续的函数 $F(x)$, 使得当 $x\in(0,1)$ 时, $F(x)=f(x)$;

(3) 证明: $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的有界函数;

(4) 求 $F(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的切线.

34. 设 $f(x)=\arctan x-\ln(1+x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值;

(3) 试比较 $\frac{\pi}{4}$ 与 $\ln 2$ 的大小;

(4) 讨论方程 $f(x)=0$ 根的个数;

(5) 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=0$;

(6) 试估计当 $x\to 0$ 时, 无穷小量 $f(x)$ 的阶;

(7) 证明: 函数在 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内必有拐点.

35. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y-x-\varepsilon\sin y=0$ 所确定的隐函数, 其中 $0<\varepsilon<1$.

(1) 求 $y(x)$ 的一阶导数和二阶导数;

(2) 讨论 $y(x)$ 的单调性, 并由此说明原点是函数的拐点;

(3) 求 $y(x)$ 在点 $x=\pi$ 处的切线和法线;

(4) 设 $x=x(y)$ 为 $y(x)$ 的反函数. 利用定积分的几何意义说明

$$\int_0^{\pi}y(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x(y)\,\mathrm{d}y=\pi^2,$$

并由此求定积分 $\int_0^{\pi}y(x)\,\mathrm{d}x$.

36. 已知星形线在直角坐标系下的方程为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$.

(1) 试利用等式 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ 给出星形线的参数方程;

(2) 判断星形线在第一象限部分的单调性与凹凸性;

(3) 说明星形线的图像关于 x 轴, y 轴以及 $y=x$ 对称, 并利用这些对称性画出星形线的草图;

(4) 试利用对称性求星形线在点 $(-\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线;

(5) 求星形线所围成的图形的面积;

(6) 求星形线绕 x 轴旋转所得的立体的体积;

(7) 求星形线的长度.

37. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的函数. 若存在常数 $L>0$, 使得对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$, 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,$$

则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足李普希茨条件. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 满足李普希茨条件, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希茨条件;

(3) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可积函数, 则变上限积分函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希茨条件.