华南师范大学

《09-10 高等数学（Ⅰ）下 》期中试卷（参考答案）

学院________ 班级________ 姓名________学号_______

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	16	28	8	32	8	8	100

一、(16 分）求解下列空间图形的方程

1，**求通过点** $\left(2,3,1\right)$ **且与直线** $\begin{cases}2x-3y+z-5=0\\3x+y-2z-4=0\end{cases}$ **垂直的平面方程**

注: 此题用不了平面束方程, 因为所求的不是过直线的平面.

解法 1(点法式) 设所求平面为：$A\left(x-2\right)+B\left(y-3\right)+C\left(z-1\right)=0$，$\vec{n}=\left\{A,B,C\right\}$

为其法向量。直线的方向向量 $\vec{s}$ 为：$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\2 & -3 & 1\\3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\left\{5,7,11\right\}$，因为平面与已知直线垂直，所以 $\vec{n}=\vec{s}=\left\{5,7,11\right\}$，则所求平面方程为 $5\left(x-2\right)+7\left(y-3\right)+11\left(z-1\right)=0$，化简可得 $5x+7y+11z=42$.

解法 2(求系数) 设所求平面为：$A\left(x-2\right)+B\left(y-3\right)+C\left(z-1\right)=0$，$\vec{n}=\left\{A,B,C\right\}$. 由于此平面与直线 $\begin{cases}2x-3y+z-5=0\\3x+y-2z-4=0\end{cases}$ **垂直，因此分别与两个平面垂直，于是由向量的垂直关系可知，满足** $\begin{cases}2A-3B+C=0\\3A+B-2C=0\end{cases}$，**解得** $A=\dfrac{5}{11}C,B=\dfrac{7}{11}C,$ 则所求平面方程为 $5x+7y+11z=42$.

解法 3 (切向量法) 对一般式方程关于 x 求偏导数，得 $\begin{cases}-3\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2\\\dfrac{\partial y}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}=-3\end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\begin{vmatrix}-2 & 1\\-3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}}=\dfrac{7}{5},\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\begin{vmatrix}-3 & -2\\1 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}}=\dfrac{11}{5}$，由于直线的方向向量和切向量方向一样，因此直线的方向向量 $\vec{s}=\left\{1,\dfrac{7}{5},\dfrac{11}{5}\right\}=\dfrac{1}{5}(5,7,11)$，则所求平面方程为

$5(x-2)+7(y-3)+11(z-1)=0$，化简可得 $5x+7y+11z=42$.

2，求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ **在平面** $\prod:x-y+2z-1=0$ **上的投影直线的方程.**

解法 1(平面束方程) 将直线 L 方程转换为一般式形式：$\begin{cases}x-y-1=0\\z+y-1=0\end{cases}$，可得过直线的平面束方程 $(x-y-1)+\lambda(z+y-1)=0$，即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0$。

又与已知平面垂直可得 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=-2$，所求平面束中的方程为

$x-3y-2z+1=0$，从而投影直线的方程为 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z-3=0\end{cases}$.

解法 2(求投影直线的一般式方程) 只要写出过投影直线的两个平面方程，联立即可. 平面 $\prod:x-y+2z-1=0$ 显然是一个，只需再求一个. 用点法式: 在直线 L 上任取一个不同点，例如最明显的 $(1,0,-1)$，然后再找一个法方向

$$\vec{n}=(1,1,-1),\vec{m}=(1,-1,2)\Rightarrow\vec{l}=\vec{n}\times\vec{m}=(1,-3,-2);$$

于是过投影直线的另一个方程 $1(x-1)-3y-2(z+1)=x-3y-2z-3=0$. 联立可得投影直线的一般式方程 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z-3=0\end{cases}$

解法 3(求过投影直线的两点) 设 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}=t$ 带入方程 $x-y+2z-1=0$ 解得 $t=-1$，即直线与平面的交点为 $(0,-1,0)$；在直线 L 上再任取一个不同点，例如最明显的 $(1,0,-1)$，以平面的法向量为方向向量作直线方程，$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，求出新直线与平面的交点，然后写出过这两个交点的直线即为所求的投影直线的方程(具体过程略).

解法 4(求对称式方程) 设 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}=t$ 带入方程 $x-y+2z-1=0$ 解得 $t=-1$，即交点为 $(0,-1,0)$，再求所求直线的方向向量 $\vec{k}$：记 $\vec{n}=(1,1,-1),\vec{m}=(1,-1,2)$，

$\Rightarrow\vec{l}=\vec{n}\times\vec{m}=(1,-3,-2)\Rightarrow\vec{k}=\vec{m}\times\vec{l}=2(4,2,-1)$ 从而投影直线的方程为 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

二、（28 分）求下列函数的偏导数或全微分

1．求 $z=y^x$ 的偏导数。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$,

2. 设 $e^z=xyz$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

解法 1（隐函数求导） 对 $e^z=xyz$ 两边关于 x 求导，得到 $e^z\frac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$. 因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$. 再

对 $e^z=xyz$ 两边关于 y 求导，得到 $e^z\frac{\partial z}{\partial y}=xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}$. 因此 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$.

注：后一部分也可以利用对称性直接写出：因为 x, y 在方程中地位相同，在关于 x 的结果中直接交换 x, y 顺序即可得到关于 y 的结果.

解法 2（对数法） $e^z=xyz$ 取对数，得到 $z=\ln x+\ln y+\ln z$

两边关于 x 求导，得到 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$. 因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{xz-x}$. 同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{yz-y}$.

解法 3（代公式） 令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$. $F_x=-yz,F_y=-xz,F_z=e^z-xy$. 由公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

解法 4（微分形式不变性）

对方程两边微分得 $e^zdz=yzdx+xzdy+xydz\Rightarrow dz=\frac{z}{xz-x}dx+\frac{z}{yz-y}dy$，

故所求 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{xz-x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{yz-y}$.

3. 设 $z=f(e^{xy},x^3-y)$ 其中 $f(\xi,\eta)$ 有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}f_1-f_2$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}f_1+xe^{xy}(xe^{xy}f_{11}-f_{12})-xe^{xy}f_{21}+f_{22}.$$

注：求抽象函数的二阶偏导，最容易犯的错误是漏掉一些项，一定要仔细.

4. 设 $z=\cos\left(y\sin x\right)$，求全微分 dz。

解法 1（全微分的系数） $\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin\left(y\sin x\right)y\cos x,\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin\left(y\sin x\right)\sin x$.

$$dz=-\sin\left(y\sin x\right)y\cos xdx-\sin\left(y\sin x\right)\sin xdy$$

解法 2　两边求微分,

$$dz=-\sin\left(y\sin x\right)d\left(y\sin x\right)=-\sin\left(y\sin x\right)y\cos xdx-\sin\left(y\sin x\right)\sin xdy$$

三、（8 分）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 各切平面方程。

解 设 (x_0,y_0,z_0) 曲面上的切点，则切平面方程为

$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$，又切平面方程平行于已知平面,得

$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}$ (对应坐标成比例,不是相等!) $\Rightarrow 2x_0=y_0=z_0$. 代入曲面方程得，$x_0=\pm1$，故所求切点为 $(1,2,2),(-1,-2,-2)$，所求切平面的方程为 $2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$，和

$-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$.

四、（32 分）求下列重积分。

1，$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le1,\,0\le y\le1\right\}$。

解：　设 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le1\right\}$　$D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>1\right\}$，则

$$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|dxdy=-\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy+\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy-\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy \qquad \text{（填补法）}$$

$$=\iint\limits_D\left(x^2+y^2-1\right)dxdy-2\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\left(r^2-1\right)rdr=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

注：如果被积函数含绝对值(或分段函数)，要将区域分块讨论，以去掉绝对值.

2，$\iint\limits_D\frac{\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由抛物线 $1\le x^2+y^2\le4$ 所确定的圆环域。

解：$\iint\limits_D\frac{\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{\cos\pi r}{r}rdr=0$

注：被积函数和区域中都有 x^2+y^2 型的项，所以用极坐标最简单.

3，$\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{3})dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{3}$ 所围成.

解法 1(先一后二)将 Ω 投影到 XOY 平面，得到投影区域 $D_{xy}=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 1\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{3})dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}(\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{3})dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[(4-x^2-y^2)-3]dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=2\pi[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}]_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

注 1：.不能将被积函数中的 $\sqrt{4-x^2-y^2}$ 写为 z. 因为这在区域内部不成立，仅在一部分边界上成立.

注 2： $z=\sqrt{3}$ 是区域的底，$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 是区域的顶，注意 z 的积分上下限.

解法 2（柱坐标）

$$\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{3})dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}(\sqrt{4-\rho^2}+\sqrt{3})dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=2\pi[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}]_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

解法 3(先二后一)

$$\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{3})dxdydz=\int_{\sqrt{3}}^{2}dz\iint\limits_{D_z}(\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{3})dxdy$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{2}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(\sqrt{4-\rho^2}+\sqrt{3})\rho d\rho=\ldots=\frac{\pi}{2}$$

4，$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$。

解法 1（球坐标） $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cos^2\varphi\rho^2\sin\varphi d\rho=\dfrac{4}{15}\pi$

注：.在球坐标中，$z=\rho\cos\varphi$，不是 $z=\rho sin\varphi$，还要注意 φ 的范围.

解法 2 （截面法）$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} z^2 dz \iint_{D_z} dxdy = \int_{-1}^{1} z^2 \pi (1-z^2) dz = \frac{4}{15}\pi$

解法 3（对称性+球坐标）比第一种方法计算略简单些

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho^2 \sin\varphi d\rho = \frac{4}{15}\pi$$

注：.不能将被积函数中的 $x^2+y^2+z^2$ 写为 1，因为这在区域内部并不成立，仅在边界上成立.

五、（8 分）求函数 $f\left(x,y\right)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$ 的极值。

解：令 $\begin{cases} f_x = e^{2x}\left(2x+2y^2+4y+1\right)=0 \\ f_y = e^{2x}\left(2y+2\right)=0 \end{cases}$，得驻点 $M\left(\frac{1}{2},\quad -1\right)$。

又 $A = f_{xx}(\frac{1}{2},-1) = \left[e^{2x}\left(4x+4y^2+8y+4\right)\right]\Big|_{(\frac{1}{2},-1)} = 2e > 0$，

$B = f_{xy}(\frac{1}{2},-1) = e^{2x}(4y+4)\big|_{(\frac{1}{2},-1)} = 0$，$C = f_{yy}(\frac{1}{2},-1) = \left(2e^{2x}\right)\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = 2e$，

$\Rightarrow AC-B^2 = 4e^2 > 0$，

所以 $f\left(x,y\right)$ 在 $M\left(\frac{1}{2},\quad -1\right)$ 处取到了极小值 $-\frac{e}{2}$.

注：解题要有过程，特别要写明判别依据.

六．（8 分）设 $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$，其中 F 是可微函数，

证明 $\frac{\partial u}{\partial x}\cos y + \frac{\partial u}{\partial y}\cos x = \cos x \cdot \cos y$ 。

证明： 令 $z = \sin y - \sin x$，则 $u = \sin x + F(z)$，有

$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + \frac{dF}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \cos x\frac{dF}{dz}$， $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dF}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dF}{dz}\cos y$ 。代入等式左边得

$\frac{\partial u}{\partial x}\cos y + \frac{\partial u}{\partial y}\cos x = (\cos x - \frac{dF}{dz}\cos x)\cos y + \frac{dF}{dz}\cos y \cos x = \cos x \cos y$.

注：这里 $F(\sin y - \sin x)$ 是复合函数，而不是 F 乘 $(\sin y - \sin x)$. 也不要把 F 看成二元函数 F(x,y)，

而应该设出中间变量 $z = \sin y - \sin x$，记 $F(z) = F(\sin y - \sin x)$.