练习题2

09-10 参考解答

一、判断级数的敛散性

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2\alpha}{n^2}$$

解 $\because \left|\frac{\sin n^2\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$

通过绝对收敛证明收敛

和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以该级数绝对收敛, 从而收敛.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= e > 1$$

比值法也可判断发散!
说明通项不收敛到零

所以该级数发散。

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

解

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\frac{e}{2}>1$$

此级数不是绝对收敛，也意味着 $|u_n|$ 不收敛到0

所以该级数发散。

类似于上题

机动 目录 上页 下页 返回 结束

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{na^n}\quad(a>0)$

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}}$

$$=\frac{1}{a}$$

所以当 $a>1$ 时该级数绝对收敛。

当 $0<a<1$ 时，该级数发散。 (理由？必要条件)

当 $a=1$ 时，该级数条件收敛。

二、计算下列重积分.

1. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy,$ 其中

$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$

解: $I_1=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln 2$

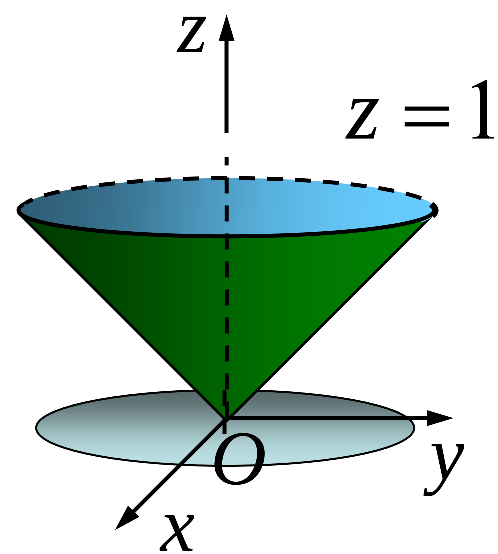
因为D关于y轴对称，被积函数关于变量x为奇函数。

$$I_2=\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxy=0$$

对称性

所以 $I=\frac{\pi}{2}\ln 2$

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$，其中$\Omega$ 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 所围的立体。



解: 利用柱面坐标来计算，积分区域

$$\Omega: r\le z\le 1, 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$$

得到

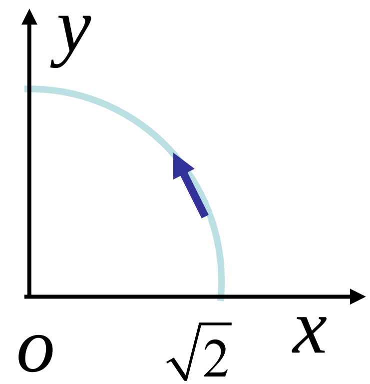
$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 r^2 r dz=\frac{\pi}{10}$$

三、计算 $\int_L xdy - 2ydx$，其中 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分。

解: 曲线 L 的参数方程为

$$x = \sqrt{2}\cos\theta, y = \sqrt{2}\sin\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



于是 $\int_L xdy - 2ydx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 \cos^2\theta + 2\left(\sqrt{2}\right)^2 \sin^2\theta \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + 2\sin^2\theta\right) d\theta = \pi + 2\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta}$$

(常用公式?)

$$= \pi + 2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

(极,柱,球坐标下)一个常用定积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

四、计算$\iint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy$ 其中Σ是上半球面

$x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\quad z \ge 0$ 的上侧

解： 记Σ_1为曲面Σ在OXY平面中投影面的下侧即

$x^2 + y^2 \le 4, (z = 0)$，Ω为Σ和Σ_1所围成的立体。

利用高斯公式有

$\boxed{\text{添加辅助面}}$

$$\iint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy$$

$$= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy - \iint\limits_{\Sigma_1} x^2 dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} ydxdydz + \iint\limits_{D} x^2 dxdy \underset{(\text{重心公式})}{=} 0 + 4\pi = 4\pi$$

五、设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有

$$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$$

证明：对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L，都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

证明： 由格林公式，对D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$ 的充要条件是对 $\forall(x,y)\in D$ 有

$$\frac{\partial}{\partial y}yf(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[-xf(x,y)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2f(x,y)+yf_2'(x,y)+xf_1'(x,y)=0$$

又由已知条件对任意的 $t>0$ 都有

$$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$$

两边对 t 求导得

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$$

令 $t=1$ 得

$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)+2f(x,y)=0$$

即得 $$\frac{\partial}{\partial y}yf(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[-xf(x,y)\right]$$

所以 $$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

六 1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域。

解:

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x^{2n+2}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{nx^{2n}}$$

$$=\frac{x^2}{2}$$

当 $\frac{x^2}{2}<1 \Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数收敛。

又当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数发散。

所以收敛域为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的和。

解： 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，其和函数的导数

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

两边积分得，

$$\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$\Rightarrow s(x)=-\ln(1-x)$$

令 $x=-1$ 得，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$$

3. 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展成 $x-1$ 的幂级数。

解：$\because \dfrac{1}{(2-x)^2}=\left(\dfrac{1}{2-x}\right)'$

$$=\left[\frac{1}{1-(x-1)}\right]'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$$

$|x-1|<1\Rightarrow 0<x<2$ 又 $x=0, x=2$ 时级数发散。

故 $x\in(0,2)$

$\boxed{\text{需要检验端点}}$

幂级数的逐项求导时, 要注意常数项

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

注意下标

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots)'$$

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \ldots\ldots$$

七 1. 求方程 $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy+\sin x=0$ 满足条件 $y(2)=0$ 的特解。

解： 因为方程可以写为 $\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{-\sin x}{x^2-1}$

记 $P(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ $\quad Q(x)=\frac{-\sin x}{x^2-1}$

上次我们用常数变易法，这次换一下，直接用公式

根据公式原方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int\frac{-\sin x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\ln\frac{1}{x^2-1}}\left[\int\frac{-\sin x}{x^2-1}e^{\ln(x^2-1)}dx+C\right]=\frac{1}{x^2-1}\left[\int-\sin xdx+C\right]$$

所以

$$y=\frac{1}{x^2-1}\left[\cos x+C\right]$$

由于 $y(2)=0$ 有

$$0=\frac{1}{2^2-1}\left[\cos 2+C\right]$$

所以得到

$$C=-\cos 2$$

所求特解为

$$y=\frac{1}{x^2-1}\left[\cos x-\cos 2\right]$$

2. 求方程 $x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$ 的通解。

可降阶方程

解：设 $y'=p$，则 $y''=p'$，因此得到 $\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$

分离变量 $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$

积分可以得到

$$\ln|p|=\ln|x|+\ln|C_1|=\ln|C_1x|$$

所以

$$p=C_1x$$

再写为 $\frac{dy}{dx}=C_1x$ 再次积分（C_1,C_2 是任意常数）

$$y=\int C_1xdx=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$$