第五章 定积分

§5.1 定积分的概念与性质

☞导言 积分的思想古已有之. 而在近代, Newton 把积分运算看成求导运算的逆运算, 称为"反流数术", Leibniz 则是把积分视为一种无限个无穷小量的加法运算. 现代形式的定积分由 Riemann 给出, 其严格的定义需要借助极限.

定义♡ 5.1.1 (定积分)
给定区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$. 在 $[a,b]$ 内插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

称其为对 $[a,b]$ 的一种分割. 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$, $\lambda = \max\{\Delta x_i \mid i = 1, 2.\cdots, n\}$. 在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任取一插值点 ξ_i, 记

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果对于 $[a,b]$ 的任意分割和任意选取的插值点 ξ_i, 只要 λ 趋于 0, S 总趋于确定的值, 那么称该极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**, 记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中 $f(x)$ 称为**积分函数**, x 称为**积分变量**, a 和 b 分别称为**积分下限** 和 **积分上限**, $[a,b]$ 称为**积分区间**.

◗注 1. 定积分的概念总结起来就七个字: "**分割, 求和, 求极限**".
2. 定积分三要素: **被积函数, 积分变量和积分范围.**
3. **定积分的结果是一个数**, 其结果与积分变量的名称无关, 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分存在, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**. 在我们接触过的函数中, Dirichlet 函数便是不可积的, 利用定义不难看出这一点. 至于什么函数可积, 这是一个复杂的问题, 初学者只需要知道**闭区间上的连续函数总是可积的**. 本讲义中所有与定积分有关的性质和问题, 我们总假定相应的函数是可积的, 事实上大多数时候我们总要求被积函数是连续的.

- 定积分的意义: 无穷小量的 "求和".
  - 几何意义: 曲边梯形的面积.
  - 物理意义: 变速直线运动的路程.

◗注 只有当被积函数非负时, 积分的结果才是相应曲边梯形的面积. 如果被积函数是非正的, 所得则是负的面积.

命题♣ 5.1.2 (单位元的积分)

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$$

◗注 对 1 的积分等于区间长度.

例题♢ 5.1.3
利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

例题♡ 5.1.4 (利用积分求极限)
设

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

试利用定积分的定义计算数列 $\{a_n\}$ 的极限.

◗注 在例题 1.6.10 中我们曾经利用单调有界准则证明了该数列的收敛性, 但单调有界准则却无法告诉我们它的极限是多少.

命题♣ 5.1.5 (定积分的性质)

- 线性:
$$\int_a^b [kf(x) + lg(x)]\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + l\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$
- 区域可加性:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$
- 积分保号性: 若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \ge 0$, 则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0;$$

- 积分保序性: 若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$, 则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$
- 积分绝对值不等式: 在区间 $[a,b]$ 上,
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x;$$
- 积分中值定理: 若函数在区间 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

注 1. 纯粹是为了计算上的方便, 我们做如下约定:
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
从而定积分的区域可加性与 a,b,c 的大小次序无关.
2. 我们把数值
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
称为是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**平均值**. 例如,
$$\bar{v} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$
反映的是做直线运动的物体从 t_1 时刻到 t_2 时刻这段时间内的平均速度.

例题♡ 5.1.6 (积分估计)

(1) 估计积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

(2) 易知当 $x>0$ 时, $e^x > 1+x$. 试利用这个不等式比较积分 $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 的大小.

注 这里两个问题中所涉及的两个积分, 其被积函数的原函数均不能显式的表示, 从而也就无法利用将要介绍的 Newton-Leibniz 公式求出具体的积分值, 此时分估计便是了解其积分值的一种有效方法.

例题♡★ 5.1.7

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)\ge 0$. 证明: 若 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x)\equiv 0$.

注 上述结论也意味着, 如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且不恒为零, 那么它在该区间上的积分值一定大于零. 注意此处连续性的条件是关键.

思考题

* 圆 (或者扇形) 的周长 l 与面积 S 的关系是
$$S = \frac{1}{2}lr,$$
这和三角形面积公式很相似, 你能否给这个现象一个合理的解释? 球的表面积和体积又有什么联系?

* 假设变速直线运动物体的速度函数是 $v(t)$, 那么积分 $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$ 各代表什么含义? 它们之间有何关系?

* 考虑定义在区间 $[0,2]$ 上的非负函数 $f(x)$, 它在 $x=1$ 处取值为 1, 其它地方取值均为零. 请利用定积分的定义计算 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的积分值. 你的结果与例题 5.1.7 的结论是否矛盾? 为什么?

* 试利用例题 5.1.7 的结论说明以下事实成立:

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负连续, 且不恒为零, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(x) \geq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x) \equiv g(x)$;

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$;

(4) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 必有零点.

** 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x) \geq 0$. 试利用连续函数的介值定理证明: 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

*** 利用定积分的定义计算以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ $(p > 0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

✍ 练习题

1. 利用定积分的几何意义解释以下等式的意义:

(1) $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$;

(4) $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi R^2$;

(5) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}(b-a)^2$ $(b > a)$.

2. **(利用积分获得不等式)** 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$. 对不等式的两端在区间 $[0,x]$ $(x > 0)$ 上进行积分, 你可以得到什么不等式? 对新的不等式的两端再在区间 $[0,x]$ $(x > 0)$ 上进行积分, 你又可以得到什么不等式? 接着做......
类似的, 请从不等式 $\cos x \leq 1$ $(x > 0)$ 出发, 采用类似的做法, 重新得到例题 3.4.4 中的不等式.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上具有连续的导函数, 且 $f(x) = 0$. 证明:

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{Ma^2}{2},$$

其中 $M = \max\limits_{0\leq x\leq a} |f'(x)|$. [提示: 利用微分中值定理]

☐ 回顾与展望

朴素的积分思想可以追溯到约 2400 年前的古希腊文明. Eudoxus 是 Plato 众多的门徒中数学成就最高的, 他利用他所发明的"穷竭法", 给出了可能是人类文明史上的第一个积分. 他曾得到一个很有意思的结果: 抛物线和一直线所围的弓形的面积是其同底等高的三角形面积的三分之四. 与 Eudoxus 同时代的作为朴素原子论创始人之一的 Democritus 则利用其"不可分元法", 得到了这样的结论: 棱锥的体积是与其同底等高的棱柱体积的三分之一. 而在晚些时候, 伟大的 Archimedes 更是利用神奇的"平衡法", 借助假想中的天秤"称出"了球体的体积是其外接圆柱的体积的三分之二. 他还同时得到了球体的表面积是其外接圆柱的表面积的三分之二. 他对这两个结果甚为满意, 并叫人把它们刻在他的墓碑上.

在中国古代, 我们也可以找到一些朴素的积分思想. 例如, 刘徽认为 (将圆) "割之弥细, 所失弥少. 割之又割, 以至于不可割, 则与圆合体, 而无所失矣." 这便是他的"割圆术". 而祖冲之的儿子祖暅则认为"夫叠棋成立积, 幂势既同, 则积不容异." 利用祖暅的想法可以容易的得到上面提到的 Democritus 的结论.

以上种种想法都有一个共同的特点, 就是为了求得不规则几何体的面积或体积, 必须对其进行分割, 然后再进行"求和". 与今天的积分概念相比起来, 缺乏的似乎只是利用极限对积分概念进行严格的数学描述.

现在所采用的积分符号最早是由 Leibniz 使用的. 他用以表示积分运算的符号 $\int$, 其实是 "sum" 的首字母 "s" 的拉长.

我们不妨用一种不严格的但富有启发性的观点重新解读定积分的几何意义. 对于由正值函数 $f(x)$ 与 x 轴所围成的曲面梯形, 用一条垂直于 x 轴的直线穿越曲边梯形, 截出的部分是一条线段. 但我们将它看成是一个无穷小的矩形, 它的高是 $f(x)$, 底边长度则是 $\mathrm{d}x$, 从而该无穷小矩形的面积便是 $f(x)\,\mathrm{d}x$, 对所有的无穷小矩形的面积在给定的范围内进行"求和" $\int$, 得到的便是曲边梯形的面积.

总之, **积分是一种无穷小层面上的"求和"运算**. 积就是累积, 就是求和. 这种非初等的求和运算使我们能够处理许多非初等的数学和物理问题. 例如, 在物理上, 速度关于时间的累积效应是位移, 力关于路程的累积效应是功.

利用定积分我们仅仅可以讨论像变速直线运动求路程之类"区间上"的问题. 但如果要计算非直线运动的路程, 或非均匀密度物体的质量, 则需要在曲线, 曲面或者空间区域上进行"求和". 这些不同形式的积分运算自然是我们今后讨论的基本内容, 它们多少有些复杂, 但最终将归结为定积分. 所以, 读者务必**熟练掌握定积分运算**.

§5.2 微积分基本定理

☞**导言** 对路径函数关于时间变量求导便得到速度函数, 而速度函数对时间变量积分则得到路径函数, 它们反映了求导与积分之间的内在联系. 物理上的观察引导我们在数学上得到微积分中最重要的结论.

定理♠ 5.2.1 (微积分基本定理)
若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则**变上限积分函数**

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 的一个原函数, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x). \tag{5.1}$$

且对于 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$, 有如下的 **Newton-Leibniz 公式**

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

◗注 1. 变上限积分函数是一个函数, 它的自变量是其积分上限. 我们可以这样理解 (5.1) 的结论, 为了得到变上限积分函数的导函数, 只需**将被积函数的积分变量换成积分上限**.

2. 假设 $f(x)$ 可导, 根据微积分基本定理易知

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x),$$

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

上述等式明确地表明了**求导与积分是一对互逆的运算**, 对 $f(x)$ 先积分后求导, 或者先求导后积分, 得到的还是 $f(x)$ 本身 (后者至多相差一个常数).

命题♣ 5.2.2 (积分函数求导法则)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

例题♣ 5.2.3 (积分函数的导数 I)

求下列函数的导函数:

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

(2) $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{x^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{2t}\,\mathrm{d}t\ (x>0)$;

(3) $H(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin u^2\,\mathrm{d}u$.

例题♣ 5.2.4 (积分函数的导数 II)

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(1) 求函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 的二阶导数;

(2) 证明: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$.

◗注 x 是 $F(x)$ 的变量, 但对于积分来讲, 它应该被视为常数.

例题♣ 5.2.5
求定积分 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

例题♣ 5.2.6
求抛物线 $y=x^2+1$, 直线 $x+y=3$ 以及两条坐标轴所围图形的面积.

思考题

* 下列计算

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$$

显然是错误的, 因为被积函数为正值函数, 其积分值应该为正 (事实上该积分值为正无穷, 详见 §5.3). 问题出在哪儿?

* 请将 $\ln x$, $\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 用变上限积分函数表示.

** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)>0$. 讨论函数

$$F(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

** 设

$$y=\int_0^x\left(u\int_0^u\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.$$

验证函数 $y=y(x)$ 满足以下微分方程

$$xy''-y'=x\sin x.$$

*** 证明: 当 $p>0$ 时,

$$\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1.$$

*** 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

练习题

1. 求下列极限:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)>0$. 设
$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   (1) 求 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$;
   (2) 讨论 $F(x)$ 在 (a,b) 上的单调性.

   如何从直观上理解 (2) 的结论的意义?
3. 给定定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi.\end{cases}$$
   试给出 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数.
4. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)>0$. 证明: 在 (a,b) 内有且仅有一点 c, 使得
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$
   [提示: 利用零点定理]

回顾与展望

微分和积分这两个看似不相关的概念, 借助 Newton-Leibniz 联系在了一起. 打个比方, 函数在一楼, 其导函数在地下一楼, 原函数则在二楼, 而基本定理便是连接它们的楼梯.

另一方面, Newton-Leibniz 也把定积分与不定积分联系起来. 连续函数在给定区间上的积分值, 等于其原函数在区间端点的函数值改变量, 而求原函数的过程正是不定积分的过程. 这么说来, 计算一个定积分, 我们只需要先用求不定积分的方法求出积分函数的一个原函数, 然后再取值做差就可以了. 但是很快我们就会发现, 问题没有这么简单.

§5.3 定积分的换元法和分部积分法

☞**导言** 不同于不定积分至始至终 “单调” 的运算, 定积分有着更丰富的内涵. 我们将讨论定积分的许多有意思的性质. 而适用于不定积分的三个基本方法, 同样适用于定积分.

命题♠ 5.3.1 (定积分的换元法)
设函数 $f(x)$ 在区间 $[A,B]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 且满足 $\varphi([\alpha,\beta])\subseteq[A,B]$. 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注 1. 上述等式从右往左看, 便是定积分的凑微分法.
2. 与不定积分有所不同, 定积分的换元法并不要求 $x=\varphi(t)$ 具有反函数, 但对其连续性有着严格的要求.

命题♠ 5.3.2 (定积分的分部积分法)
设函数 $u(x), v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导函数. 则

$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x.$$

例子♣ 5.3.3 (利用换元法求定积分)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \mathrm{d}\sin x = \frac{\sin^6 x}{6}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{6}.$$

或者令 $u = \sin x$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \mathrm{d}\sin x = \int_1^0 u^5\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{6}.$$

◗注 1. 第一种做法是隐换元, 其实就是凑微分. 此时形式上的积分变量是 $\sin x$, 但实际上积分变量仍然是 x, 故积分上下限无需改变.
2. 第二种做法则是显换元. 此时的积分变量已变成 u, 因此上下限也要做相应的改变. 注意, 是**下限变下限**, **上限变上限**, 而不是区间变区间. 此外, 与不定积分不同的是, 在变成关于 u 的积分并求出其原函数之后, 无需将 u 换成 $u = \sin x$, 因为我们算的是积分值, 而不是原函数.
3. 下面的计算是对的, 虽然看起来有点奇怪.
设 $u = \sin x$, 则

$$\int_0^{\pi} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin^5 x \mathrm{d}\sin x = \int_0^0 u^5\,\mathrm{d}u = 0.$$

例题♣ 5.3.4 (基本积分运算)
用适当的方法求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

例题♣ 5.3.5 (非闭区间上的积分)
求定积分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

◗注 1. 上述积分的被积函数 $f(x) = x^3 \ln^2 x$ 在原点没有定义, 但它在原点处存在右极限, 所以只要令 $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, 则被积函数便在积分区间 $[0, 1]$ 上连续, 从而可积.
2. $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 在原点也没有定义, 但右极限存在, 此时 Newton-Leibniz 公式仍然适用, 只是 $F(0)$ 应理解为 $F(0^+)$, 即

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0^+).$$

例题♣ 5.3.6 (积分陷阱)
求定积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$.

◗注 与不定积分有所不同, 在定积分的计算中, 不论是利用三种基本方法中的哪一种, 都**要求所涉及到的函数在相应的积分区间上是连续的**, 否则很容易产生错误, 这一点和利用 New-Leibniz 公式计算积分时对被积函数的要求是相同的 (见 §5.2 思考题). 例如下面关于上述积分的计算

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+2\cos^2\frac{x}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{2+\tan^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

显然是错误的, 因为被积函数为正值函数, 其积分值应该为正. 造成这个错误的原因, 是计算过程中用到的隐换元 $u = \tan\frac{x}{2}$ 在积分区间 $[0, 2\pi]$ 上是不连续的.

命题♠ 5.3.7 (函数的对称性与积分 I)
设 $f(x)$ 是对称区间 $[-a, a]$ 上的连续函数.

- 若 $f(x)$ 为奇函数, 则
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$
- 若 $f(x)$ 为偶函数, 则
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

◗注 **在对称区间上, 奇函数的积分为零, 偶函数的积分等于区间一半积分值的两倍.**

命题♠ 5.3.8 (函数的对称性与积分 II)
设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 $T\ (>0)$ 为周期的连续函数. 则对任意 a,
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

◗注 **周期函数在相同周期长度的区间上的积分值相同.**

例题♣ 5.3.9 (善用对称性 I)
求下列定积分:

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{4\pi} \sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

◗注 1. 对于第一个积分, 被积函数 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ 在点 $x = 0$ 处没有定义, 但该点是 $f(x)$ 的可去间断点, 所以通过补充定义 $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(x)$ 便在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 从而可积.
2. 第一个积分的被积函数的原函数不是初等函数, 用通常的方法无法得到结果.
3. **善用对称性, 是简化积分运算的有效方式.** 当被积函数或者积分区间具有对称性时, 我们应该有意识地想想是否可以用其简化计算.

例题♡ 5.3.10 (善用对称性 II)

(1) 求积分 $\int_0^n (x-[x])\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$;

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x (u-[u])\,\mathrm{d}u$.

例题♣ 5.3.11 (积分等式 I)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

(1) 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

例题♣ 5.3.12 (积分等式 II)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

(1) 证明: $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 求积分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

例题♡ 5.3.13 (积分函数的导数 III)

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 求函数

$$F(x)=\int_0^x t f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

的导函数.

例题♣⋆ 5.3.14 (递推公式 I)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$. 证明:

(1) 当 $n=2m$ 为偶数时,

$$I_n=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

(2) 当 $n=2m+1$ 为奇数时,

$$I_n=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

例题♡ 5.3.15 (递推公式 II)
求积分 $\int_0^1 x^m(1-x)^n \,\mathrm{d}x \ (m,n\in\mathbb{N})$.

例题♡ 5.3.16 (改变积分区间)
设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上单调递减的连续函数. 证明: 对于任意 $a\in(0,1)$, 均有
$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \ge a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 通过适当的变换改变一个定积分的积分区间, 或者将两个不同积分区间上的定积分转化为同一区间上的积分, 是讨论定积分的基本技巧. 该技巧在命题 5.3.7 和命题 5.3.8 的证明过程中也有所体现.

思考题

* 下列计算
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}$$
是否正确?

** **(奇偶函数的原函数)** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 证明: 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是偶函数, 并由此说明 $f(x)$ 的原函数均为偶函数. 请接着想一想, 若 $f(x)$ 是偶函数, 其原函数是否都是奇函数?

** **(周期函数的原函数)** 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 $T\ (>0)$ 为周期的连续函数.

(1) 在什么条件下, $f(x)$ 的原函数也是周期函数?

(2) 试确定常数 k, 使得周期函数 $f(x)-k$ 的原函数也是周期函数;

(3) 写出 $f(x)-k$ 的一个原函数.

** **(函数的对称性与积分 III)** 试证明下列关于函数 $f(x)$ 在某些对称性条件下的积分性质:

(1) 若 $f(x)$ 关于点 $x=a$ 呈中心对称 (即 $f(a-x)=-f(a+x)$, 或等价的 $f(2a-x)=-f(x)$), 则
$$\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x=0;$$
(2) 若 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 呈左右对称 (即 $f(a-x)=f(a+x)$, 或等价的 $f(2a-x)=f(x)$), 则
$$\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$
(3) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则
$$\int_0^{\pi} f(\cos x)\,\mathrm{d}x=0;$$
(4) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则
$$\int_0^{\pi} xf(\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

** 在命题 5.1.5 的注解中我们给出了函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的平均值的定义. 请想一想, 如何定义连续函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[0,+\infty)$ 上的平均值, 并讨论 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数在 $[0,+\infty)$ 上的平均值有何特殊性?

** 试利用例题 5.3.11 中的相关结论计算如下积分:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$
计算过程中涉及到的不定积分我们曾在第四章讨论过.

** 设 $f(x)$ 是连续函数. 试利用分部积分法证明:
$$\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$
这个等式我们曾在例题 5.2.4 中用不同的方法讨论过.

** 求定积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

** 证明: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\,\mathrm{d}x>0$.

** 下面这个积分
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$
的计算方法不具有普遍性, 但很有意思. 首先, 利用积分区域可加性把积分拆成两个区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 和 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的积分的和, 然后用适当的换元法将第一部分的积分转化为在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的积分.

*** 设 $f(x)$ 是连续函数, $a>0$. 证明:
$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

*** 证明: 对于任意实数 α, 均有
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^\alpha x}=\frac{\pi}{4}.$$

*** 推导下列积分的递推关系, 并由此计算其值:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n 2x\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x\ (m,n\in\mathbb{N})$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$. [提示: $I_n=I_{n-2}$]

✍ 练习题

1. 用适当的方法求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^2}$; (4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^4\sin x\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

2. 利用适当的积分换元证明下面的积分等式 (其中涉及到的函数 $f(x)$ 均在相应的区间上连续):

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$;

(3) $\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\ (x>0)$;

(4) $\displaystyle\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{a^2} f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2x}(a>0)$.

3. 以下两个积分, 谁的绝对值更大一些?
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 $T\ (>0)$ 为周期的连续函数. 证明:
$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$
为周期函数.

5. 计算定积分
$$I_n=\int_0^{\pi} x\sin^n x\,\mathrm{d}x.$$
[提示: 利用例题 5.3.11, 例题 5.3.14 及练习题 2(3) 的结果]

◻ 回顾与展望

根据定积分的几何意义, 命题 5.3.7 的结论并不难理解. 但我们仍然需要作进一步地讨论. 此处的讨论并不会对那些能够直接应用命题 5.3.7 的简单问题的解决提供更多的帮助, 但却能够使我们更好地理解如何利用函数的对称性简化积分运算, 包括一些比较复杂的定积分以及今后我们将要学习的重积分以及曲线曲面积分.

奇偶函数的情况类似, 我们仅以奇函数为例进行讨论. 奇函数是满足 $f(-x)=-f(-x)$ 的函数, 其定义本身已清楚地表明函数的对称性: 在对称的点 x 与 $-x$ 处, 函数的取值大小相同但符号相反. 结合我们在 §5.1 回顾与展望部分的讨论, 定积分是将积分区间上无限多个无穷小矩形 $f(x)\mathrm{d}x$ 的 (带符号的) 面积进行“求和”. 对于奇函数, 如果是在对称区间上进行积分, 那么在对称点 x 与 $-x$ 处的两个无穷小矩形的面积同样是大小相同但符号相反, 它们相加正好抵消. 从而, 所有的无穷小矩形两两配对, 其面积之和自然为零. 当然, 这种理解不能够作为命题 5.3.7 的证明, 但它富有启发性, 可以作为我们分析其它类似问题的出发点. 读者不妨按这种方式重新解读偶函数以及周期函数的积分性质, 并进一步试着去分析例题 5.3.11, 例题 5.3.12, 例题 5.3.14 以及思考题中函数的对称性与积分 III 中所涉及的若干个积分等式的含义.