ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 5. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Вопрос 1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

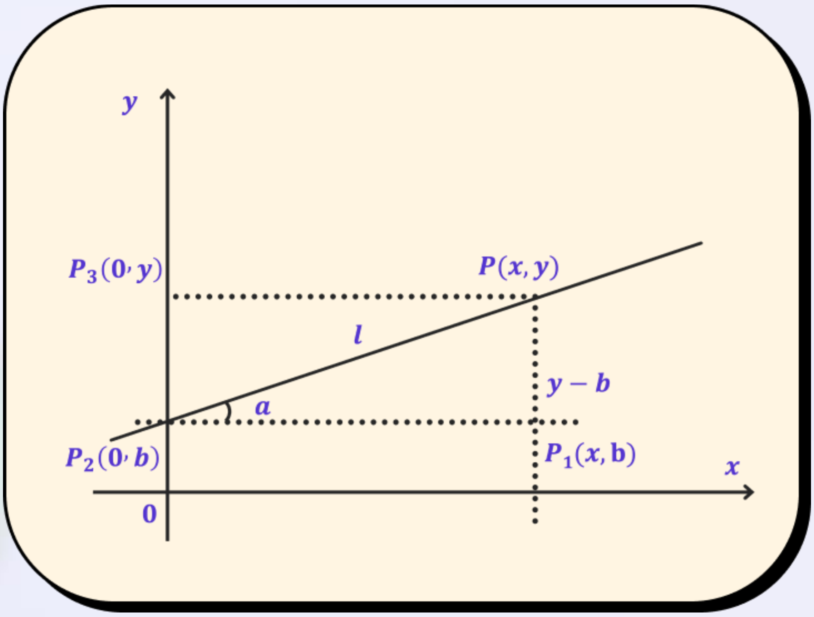

Рис. 1.

Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy и прямую l (рис. 1). Пусть l не параллельна оси Oy, следовательно, прямая l пересекает ось oy в некоторой точке. Обозначим ее через $P_2(0,b)$. Проведем прямую l' параллельно Ox через $P_2(0,b)$. Возьмем произвольную точку $P(x,y)$ на прямой l. Проведем прямую, параллельную оси Oy через точку $P(x,y)$. Обозначим через $\alpha -$ угол наклона прямой l к полож ит ельному направлению оси Ox. Тогда из прямоугольного треугольника PP_1P_2 будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{y-b}{x} = \operatorname{tg}\alpha, \ x \neq 0 \\ y = b, \ x = 0 \end{cases}$$

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha = k$ — угловой коэффициент прямой l.
При $x \neq 0$ следует

$$\frac{y-b}{x} = k \Leftrightarrow y - b = kx \Leftrightarrow y = kx + b.$$

При $x = 0$ следует $y = b$.
Пусть $l \parallel Oy \Leftrightarrow l \perp Ox$, следовательно, l пересекает Ox в точке $P_1(a, 0)$ (рис.2). $l: x = a$.

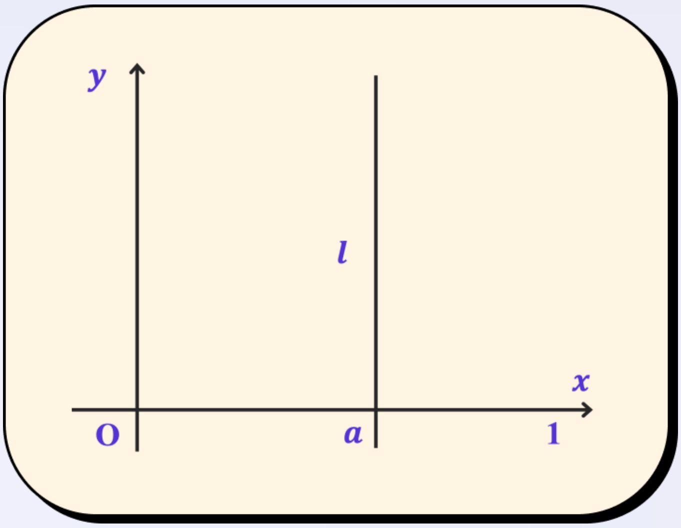

Рис. 2.

Всякая прямая на плоскости задается уравнением $y = kx + b$ или $x = a$.

Общее уравнение прямой. Нормальный вектор прямой

Определение. Нормальным вектором $\vec{N}$ к прямой l называется всякий ненулевой вектор, перпендикулярный (ортогональный) к этой прямой.

Теорема.
Всякая прямая на плоскости задается уравнением $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 > 0$ (т.е. хотя бы один из коэффициентов A, B отличен от нуля).
Обратно: У равнение $Ax + By + C = 0$ задает некоторую прямую на плоскост и.
Доказательство. Пусть l — произвольная прямая (рис.3). Проведем нормальный вектор $\vec{N} = \{A, B\}$ к прямой l. И пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ — точка на прямой l. Возьмем произвольную точку $P(x, y)$ на прямой l. Тогда точка P принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{P_0P}$ и $\vec{N}$ ортогональны. А это означает, что их скалярное произведение равно нулю. Запишем данный вывод в виде формул:

$$P(x, y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{N}\right) = 0.$$

Зная координаты векторов $\overrightarrow{P_0P} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\vec{N} = \{A, B\}$, получим следующее равенство:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$$

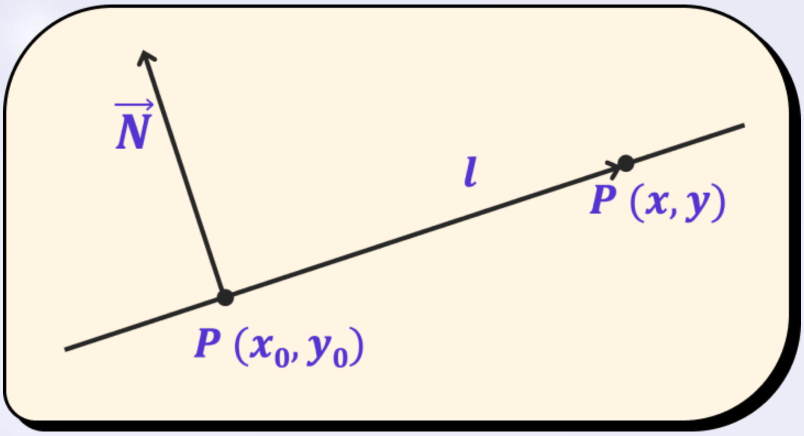

Рис. 3.

Замечание. Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$-уравнение прямой с данным нормальным вектором, проходящей через данную точку $P_0(x_0, y_0)$.

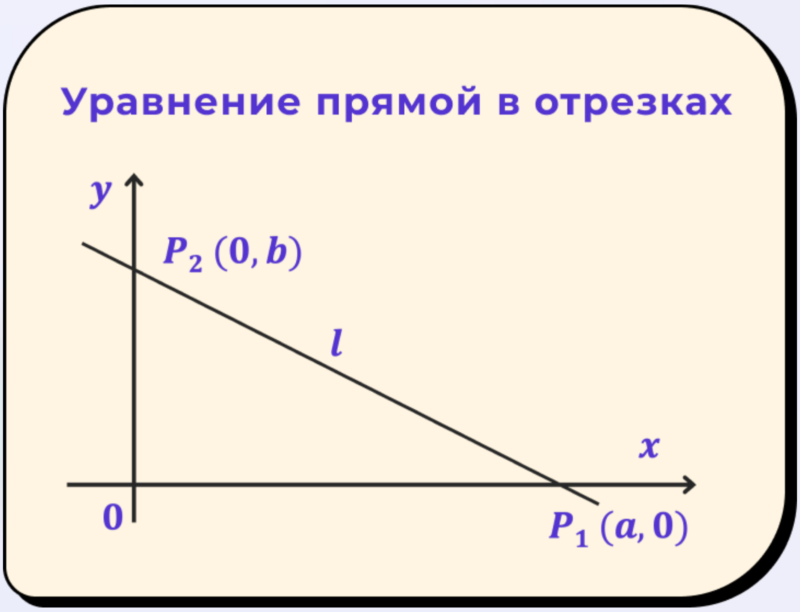

Рис. 4.

Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy и прямую l (рис.4). Пусть l не параллельна оси Oy и не параллельна оси Ox, а также точка $O(0,0)$ не принадлежит прямой l. Обозначим точку пересечения прямой l с осью Ox через $P_1(a, 0)$ и точку пересечения прямой l с осью Oy через $P_2(0, b)$. Таким образом, $P_1(a, 0) = l \cap Ox$ и $P_2(0, b) = l \cap Oy$. В этом случае прямая задается уравнением:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Покажем, что полученное уравнение задает прямую. Действительно, так как уравнение первой степени, то оно задает прямую на плоскости. Как известно, через две точки на плоскости всегда можно провести прямую и притом только одну.

Параметрические уравнения прямой

Прямая – траектория равномерного прямолинейного движения. Рассмотрим произвольную прямую l (рис.5). Пусть $\vec{l} = \{a, b\} \neq 0$ – направляющий вектор прямой l (иначе, вектор скорости прямой). Точка $P_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой l (известная точка прямой, начальная точка).

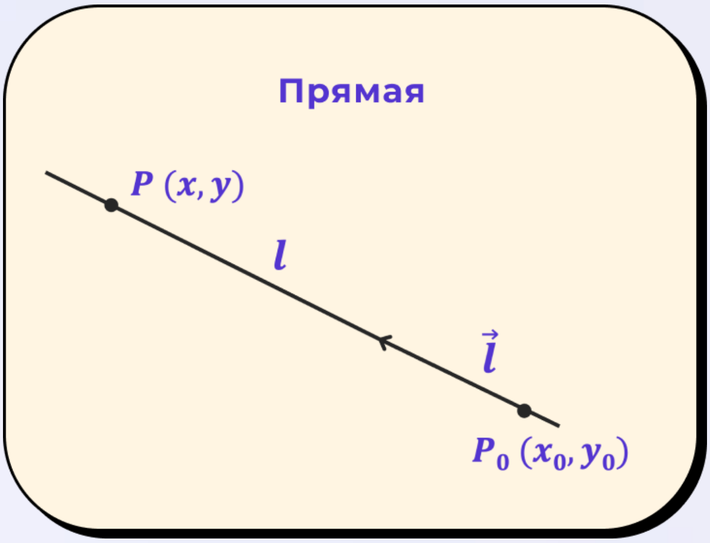

Рис. 5.

Возьмем произвольную точку $P(x, y)$ на прямой l. Тогда это означает, что вектор $\overrightarrow{P_0P}$ коллинеарен вектору $\vec{l}$, т.е. существует такое число t, что $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{l}$. Перейдем в координатную форму записи:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a \\ y - y_0 = t \cdot b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases}$$

Таким образом, параметрические уравнения прямой записываются по известному вектору направления и известной точке с параметром t следующим образом:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой

Из параметрических уравнений прямой исключим параметр t, получим:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Таким образом, канонические уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b},\ a^2+b^2\neq 0.$$

Для канонических уравнений прямой принимают следующие соглашения: если знаменатель равен нулю, то и числитель автоматически равен нулю. Т.е. если $a=0$, то $x=x_0$. Если $b=0$, то $y=y_0$.

Покажем, что канонические уравнения прямой легко преобразуется в общее уравнение прямой. Действительно,

$$b\cdot(x-x_0)-a\cdot(y-y_0)=0.$$

Переобозначим: $A=b, B=-a, C=-b\cdot x_0+a\cdot y_0, A^2+B^2=b^2+(-a)^2=b^2+a^2\neq 0$.

Таким образом, мы показали равносильность канонических уравнений прямой и общего уравнения прямой.

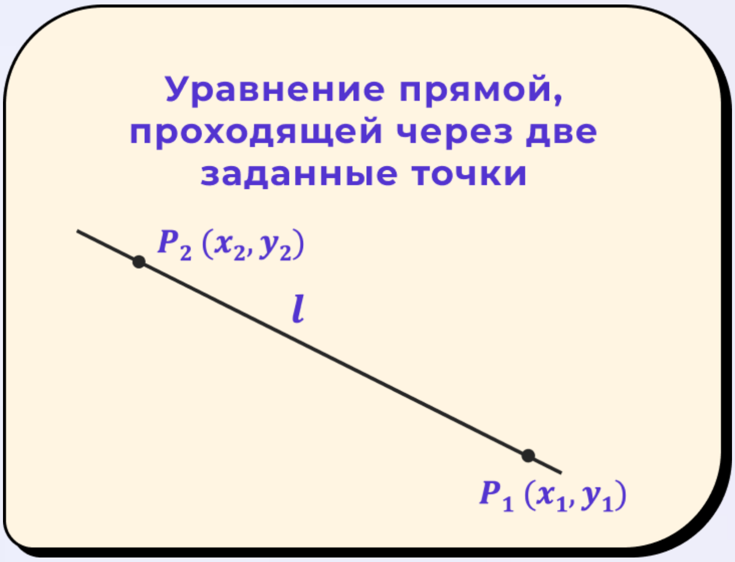

Рис. 6.

Пусть произвольная прямая l проходит через две заданные точки $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$. Тогда направляющий вектор прямой $\overrightarrow{P_1P_2}$ будет иметь координаты: $\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$. Тогда легко запишем канонические уравнения прямой l, проходящей через точку P_1 и с направляющим вектором $\overrightarrow{P_1P_2}$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Вопрос 2. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана общим уравнением: $Ax + By + C = 0, \vec{N} = \{A, B\}$ и $P_1(x_1, y_1)$ – произвольная точка (рис.7). Найдем расстояние от точки P_1 до прямой l, для этого опустим перпендикуляр из точки P_1 на прямую l.

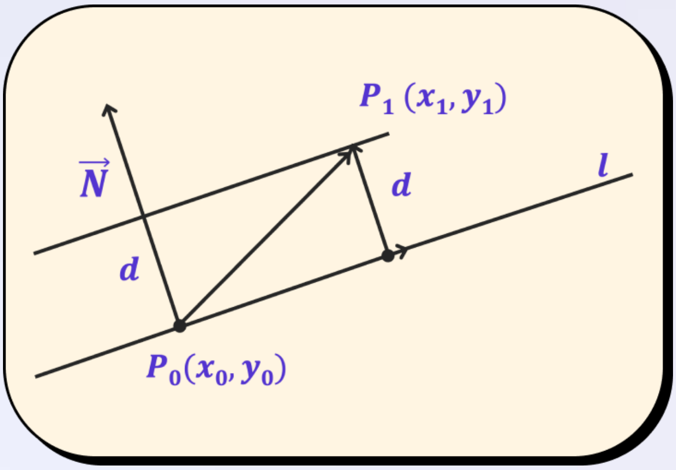

Рис. 7.

Расстояние от точки P_1 до прямой l – проекция вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$ на вектор нормали $\vec{N}$. Чтобы ее найти необходимо вычислит ь скалярное произвдение векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\vec{N}$, а затем поделит ь на длину $\vec{N}$.

$$d(P_1, l) = \left|\Pi_{\vec{N}}\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{N}\right)\right|}{|\vec{N}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|\ A \cdot x_1 + B \cdot y_1 - A \cdot x_0 - B \cdot y_0)\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка P_0 принадлеж ит прямой l, то ее координаты удовлет воря ют уравнению прямой, т.е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$, соответственно, $C = -Ax_0 - By_0$.
От куда получаем следующую формулу:

$$d(P_1, l) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Вопрос 3. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Две прямые на плоскости могут быть параллельны, совпадать, пересекаться под прямым углом (быть перпендикулярными) или пересекаться под любым углом, отличным от 90 градусов.

Условие параллельности прямых.

а) Пусть две прямые заданы общими уравнениями: $l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Здесь векторы нормали $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1\}, \overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2\}$

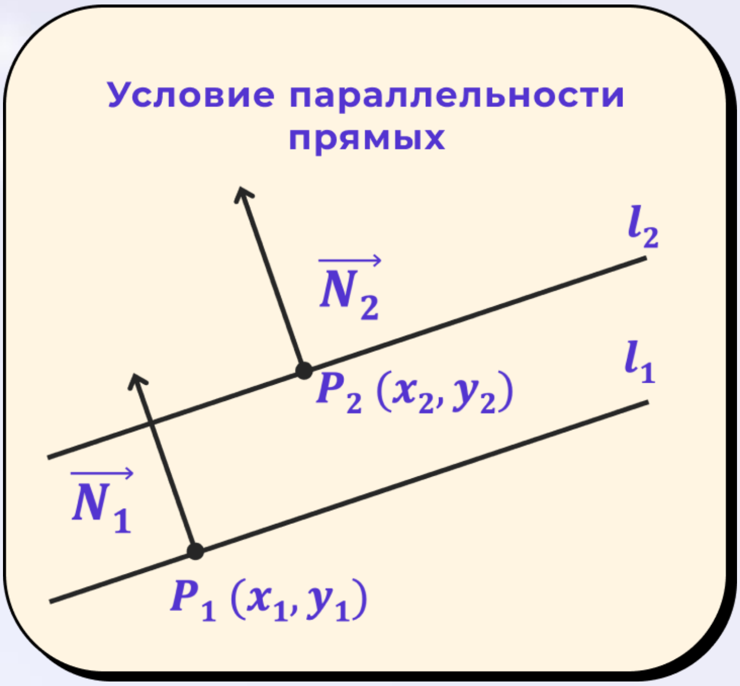

Рис. 8.

Две прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы - коллинеарны. То есть

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1} \| \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \exists \lambda\colon \overrightarrow{N_1} = \lambda \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow$$
$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2.$$

Заметим, что если $C_1 = \lambda C_2$, то $l_1 = l_2$.

Таким образом, условие совпадения двух прямых выражается в пропорциональности всех коэффициентов этих прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие параллельности двух прямых выражается в пропорциональности координат нормальных векторов этих прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

б) Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1\colon \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1},\ l_2\colon \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2}$$

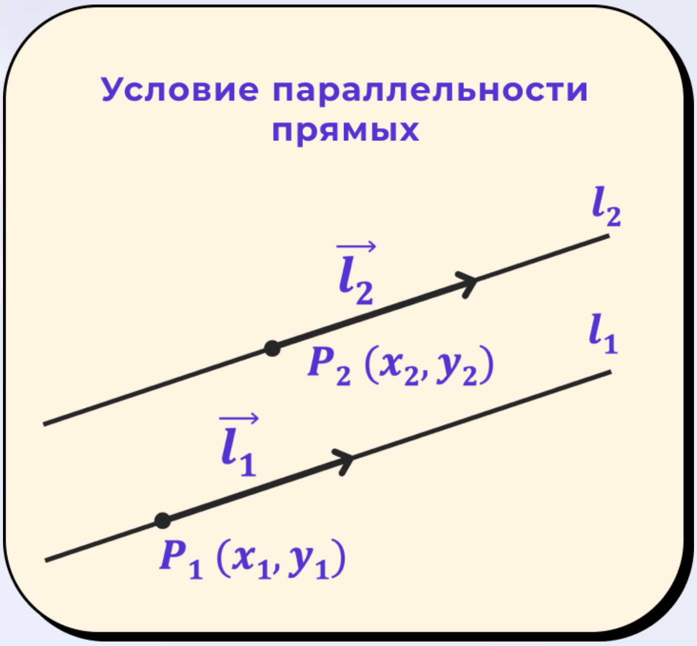

Рис. 9.

Две прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\overrightarrow{l_1}$ и $\overrightarrow{l_2}$ – коллинеарны и точка P_2 не принадлежит прямой l_1 т.е. вектор $\overrightarrow{P_1P_2} \nparallel l_1$. То есть

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{l_1} \| \overrightarrow{l_2} \Leftrightarrow \exists \lambda: \overrightarrow{l_1} = \lambda \overrightarrow{l_2} \Leftrightarrow$$
$$a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2.$$

Заметим, что если $P_2 \in l_1$, то $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel l_1$, следовательно,

$$x_2 - x_1 = \lambda a_1, y_2 - y_1 = \lambda b_1.$$

Таким образом, условие совпадения двух прямых выражается в пропорциональности всех коэффициентов этих прямых:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ и } \frac{x_2 - x_1}{a_1} = \frac{y_2 - y_1}{b_1}.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

с) Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1: y_1 = k_1 x + b_1 \text{ и } l_1: y_2 = k_2 x + b_2$$

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты совпадают, т.е.

$$k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых.

а) Пусть две прямые заданы общими уравнениями: $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Здесь векторы нормали $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1\}, \overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2\}$.

Две прямые l_1 и l_2 перпенди кулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно нулю. То есть

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

б) Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1}, \ l_2: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2}.$$

Две прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно нулю. То есть

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{l_1} \perp \overrightarrow{l_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0.$$

с) Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1: y_1 = k_1x + b_1 \text{ и } l_1: y_2 = k_2x + b_2$$

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты совпадают, т.е.

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Определение. Углом между пересекающимися прямыми на плоскости называется меньший из углов, образуемых в точке их пересечения.

Пусть две прямые заданы общими уравнениями: $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Здесь векторы нормали $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}, \vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$. Угол между двумя прямыми будет совпадать с углом между нормальными векторами к этим прямым. $\varphi = \left(\overrightarrow{N_1, N_2}\right)$. Используя формулу скалярного произведения векторов, получим:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1}, \ l_2: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2}.$$

Угол между двумя прямыми совпадает с углом между направляющими векторами этих прямых. $\varphi = \left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right)$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{l_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{l_2}\right|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Практические задания

Аналитическая геометрия на плоскости

Уравнение прямой на плоскости

З а д а ч а 1.

Построить прямые:

а) $3x - y - 6 = 0$; **б)** $x + 2y = 0$; **в)** $4x - 3 = 0$; **г)** $3y + 5 = 0$.

Р е ш е н и е.

а) Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Прямая – это множество точек плоскости. Полагаем в уравнении $3x - y - 6 = 0$ переменная $x = 3$, получим 3*3-y-6=0, следовательно, -y=6-9, $y = 3$. Точка $M_1(3;3)$ лежит на прямой. Полагая $x = 1$, получим $y = -3$. Вторая точка $M_2(1;-3)$. Проводим прямую M_1M_2 (рис. 1).

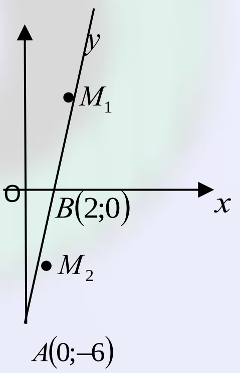

Рис. 1

Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведем уравнение прямой к виду уравнение прямой в отрезках. Для этого перенесем свободный член (-6) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 6. Получим: $3x - y = 6$;

$\frac{3x}{6} - \frac{y}{6} = 1$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{(-6)} = 1$.

На оси Ox отложим 2 единицы вправо от точки $O(0;0)$. На оси Oy отложим 6 единиц вниз.

Получим точки $A(0;-6)$ и $B(2;0)$ на осях, через которые проведем прямую.

б) Прямая $x + 2y = 0$ проходит через точку $O(0;0)$.

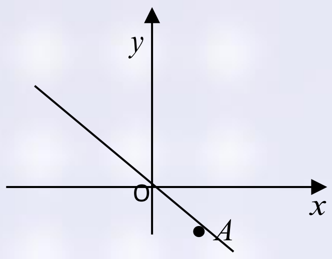

Рис. 2

Полагая $x=2$, получаем $2+2y=0$, $y=-1$. Точка $A(2;-1)$ лежит на прямой. Проводим прямую через точки $O(0;0)$ и $A(2;-1)$ (рис. 2).

в) Разрешим уравнение относительно x, получаем $x=\frac{3}{4}$. Это прямая, параллельная оси Oy, отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{3}{4}$.

г) Запишем уравнение в виде $y=-\frac{5}{3}$. Эта прямая параллельна оси Ox.

З а д а ч а 2.

Уравнение прямой $3x-4y+12=0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках).

Р е ш е н и е.

Заметим, что первоначально уравнение прямой задано в общем виде. Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y. Получим:

$4y=3x+12$, $y=\frac{3}{4}x+3$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом: здесь $k=\frac{3}{4}$; $b=3$.

Для получения уравнения в отрезках на осях координат перенесем свободный член $C=12$ в правую часть и разделим обе части уравнения на (-12). Получим $3x-4y+12=0$

$3x-4y=-12$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ - уравнение в отрезках: здесь $a=-4$; $b=3$.

З а д а ч а 3.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A(1;2)*

а) под углом 135^0 к оси Ox ;

б) параллельно оси Oy;

в) перпендикулярно вектору $\vec{N} = (-2{,}3)$;

г) и точку $B(-5;-2)$.

Р е ш е н и е.

а) Будем искать уравнение прямой с угловым коэффициентом, т.е. уравнение вида $y = kx + b$. По условию $k = tg135^{0} = tg(180° - 45°) = -tg45° = -1$. Значит $y = -x + b$. Параметр b найдем из условия принадлежности точки A искомой прямой. Подставляя координаты точки A в уравнение, получим $-2 = -1 + b$, $b = 3$. Уравнение искомой прямой имеет вид $y = -x + 3$.

б) Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-2)$ параллельно оси Oy имеет вид $x = 1$. Так как эта прямая проходит перпендикулярно к оси Ox.

в) Чтобы записать уравнение прямой, заданной точкой $A(1;-2)$ и нормальным вектором $\vec{N} = (-2{,}3)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором:

$$-2(x-1) + 3(y-2) = 0;$$
$$-2x + 3y - 4 = 0.$$

г) Используем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Полагая $x_1 = 1$, $y_1 = -2$; $x_2 = -5$, $y_2 = -2$, получим $\frac{x-1}{-5-1} = \frac{y-2}{-2-2}$;

$$-4(x-1) = -6(y-2);$$

$-4x + 6y - 8 = 0$ - общее уравнение прямой или

$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом.

З а д а ч а 4.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;0)$:

а) параллельно прямой $y = 6x - 5$;

б) перпендикулярно этой же прямой.

Р е ш е н и е.

Запишем уравнение прямой в общем виде $6x - y - 5 = 0$.

Тогда нормальный вектор к прямой имеет вид: $\vec{N} = (6;-1)$ Будем искать уравнение прямой в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

а) Прямая проходит через точку $A(-3;0)$, параллельно $6x - y - 5 = 0$, значит, ее нормальный вектор имеет вид $\vec{N} = (6;-1)$

Поэтому имеем:

$6(x-(-3)) - (y-0) = 0$, $6x + 18 - y = 0$, $6x - y + 18 = 0.$

б) Прямая проходит через точку $A(-3;0)$, перпендикулярно $6x - y - 5 = 0$, значит, ее нормальный вектор имеет вид $\vec{N} = (1;6)$

Поэтому имеем:

$1(x-(-3)) + 6(y-0) = 0$, $x + 3 + 6y = 0$, $x + 6y + 3 = 0.$

З а д а ч а 5.

Найти расстояние от точки пересечения двух прямых $x + 4y - 13 = 0$ и $4x - y - 1 = 0$ до биссектрисы первого координатного угла.

Р е ш е н и е.

Найдем точку M_0 пересечения данных прямых. Для этого составим и решим систему из уравнений прямых по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 4y - 13 = 0, \\ 4x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -17; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -17; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -51.$$

$x = \dfrac{-17}{-17} = 1; \quad y = \dfrac{-51}{-17} = 3$, т.е. $M_0(1;3)$.

По формуле расстояния от дочки до прямой находим расстояние d до прямой $y = x$ или $x - y = 0$ - биссектрисы первого координатного угла:

$$d = \frac{|1 - 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

З а д а ч а 5.

Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(3;-2)$, $C(5;3)$. Составить уравнения:

а) стороны AB;

б) медианы, проведенной из вершины B;

в) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Найти угол между медианой и высотой.

Р е ш е н и е.

а) Уравнение стороны AB данного треугольника найдем с использованием уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $x_1 = -1$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-3}{-2-3}; \qquad -5(x+1) = 4(y-3);$$

AB: $5x + 4y - 7 = 0$.

б) Чтобы составить уравнение медианы BM, найдем координаты точки M - середины отрезка AC:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2, \; y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+3}{2} = 3,$$

т.е. $M(3;3)$.

Для составления уравнения медианы воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$x_1 = 3$, $y_1 = -2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$, имеем

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{3-2}; \qquad x - 3 = -(y+2);$$

$BM: \; x+y-1=0$.

в) Высота CH из вершины C есть прямая, перпендикулярная AB и проходящая через точку C. Вектор $\overline{AB}=(3+1;-2-3)=(4;-5)$ является нормальным вектором высоты. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором:

$4(x-5)-5(y-3)=0$; $\qquad CH: \; 4x-5y-5=0$.

Угол между медианой BM и высотой CH найдем следующим образом. Нормальный вектор $\vec{N}_{BM}=(1{,}1)$, нормальный вектор $\vec{N}_{CH}=(4{,}-5)$. Угол между прямыми BM и CH

Будем искать как угол между нормалями к этим прямым.

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{N}_{CH},\vec{N}_{BM})}{|\vec{N}_{CH}||\vec{N}_{BM}|}=\frac{1\cdot 4+1\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{4^2+(-5)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{41}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(-2;\frac{2}{5}\right)$ и образующей с осью Ox угол, равный $arctg\,3$.

2. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $5x+5y-7=0$?

3. Определить при каком значении α прямая $(\alpha^2-\alpha)x+(2+\alpha)y-3\alpha+1=0$

а) параллельна оси Ox;

б) проходит через начало координат?

4. Найти угловой коэффициент прямой и ординату точки ее пересечения с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1;1)$ и $B(-2;3)$.

5. Прямая проходит через точки $A(-2;-2)$ и $B(-1;6)$. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой и имеющая ординату, равную 22?

6. Найти уравнение прямой:

а) образующей с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось Oy в точке (0; -6);

б) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2;

в) отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4.

7. Дана прямая $2x+5y-1=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;3)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.

8. Составить уравнение прямой, проходящую через точку пересечения прямых $x-2y+3=0$ и $2x+y+5=0$ и параллельную оси ординат.

9. Составить уравнение перпендикуляра к прямой $8x+4y-3=0$ в точке пересечения ее с прямой $x-y=0$.

10. Найти угол между прямыми

а) $y=2x-3$ и $y=-\frac{1}{2}x+5$;

б) $y=5x+1$ и $y=5x-2$;

в) $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$.

11. Найти расстояние от точки $M_0(2;1)$ до прямой $3x-4y-16=0$.

12. Показать, что прямые $15x+36y-105=0$ и $5x+12y+30=0$ параллельны. Найти расстояние между ними.

13. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами $A(5;2)$, $B(2;3)$ и $C(0;-3)$.

О т в е т ы:

1	$15x-5y+32=0$
2	135^0
3	а) $\alpha=0$; $\alpha=1$ б) $\alpha=\frac{1}{3}$
4	$k=-\frac{2}{3}$; $в=\frac{5}{3}$
5	1
6	а) $y=\sqrt{3}x-6$; б) $y=2$; в) $4x+3y-12=0$
7	а) $2x+5y-13=0$; б) $5x-2y+11=0$
8	$5x+13=0$
9	$4x-8y+1=0$
10	а) 90^0; б) 0^0; в) 45^0
11	2,8
12	5
13	$\sqrt{10}$