ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 2. ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вопрос 1. Основные способы вычисления определителя квадратной матрицы.

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ или определителем первого порядка называется элемент a_{11}, который обозначается следующим образом:

$$\Delta_1 = |A| = \det A = a_{11}.$$

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

Например, пусть $A = (5)$, тогда $\Delta_1 = |A| = 5$.

Определителем матрицы второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$$

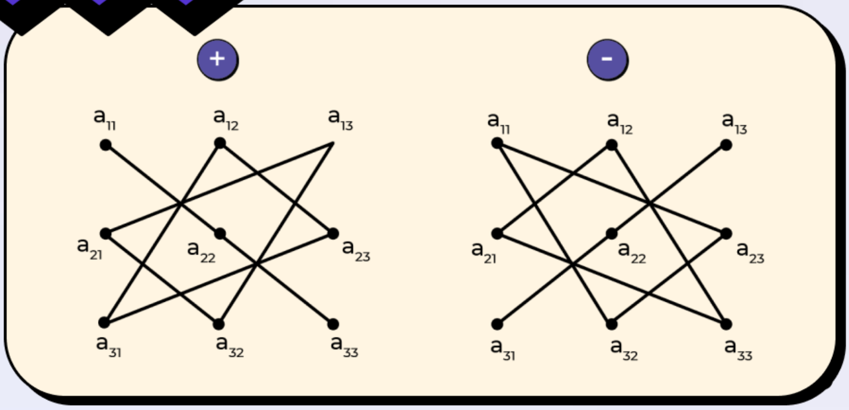
Например:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \bullet 3 - 2 \bullet (-1) = 3 + 2 = 5$

Определителем матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} \bullet a_{33} + a_{21} \bullet a_{32} \bullet a_{13} + a_{12} \bullet a_{23} \bullet a_{31} - - (a_{13} \bullet a_{22} \bullet a_{31} + a_{23} \bullet a_{32} \bullet a_{11} + a_{12} \bullet a_{21} \bullet a_{33})$$

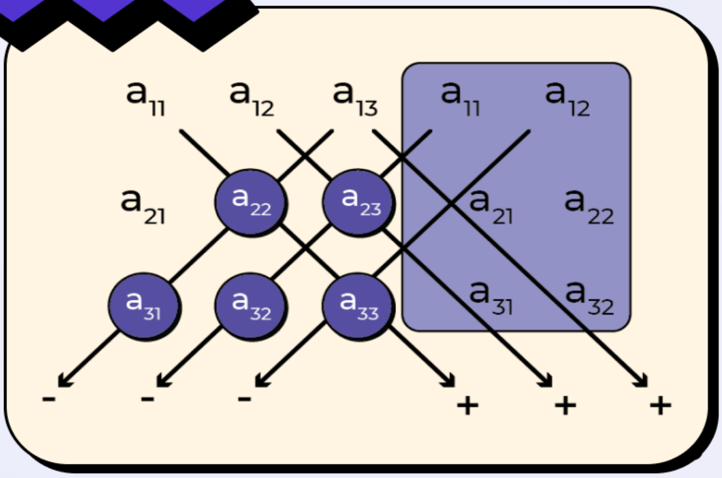
Данный метод называется методом треугольника. Потому что произведения элементов, помимо элементов диагоналей, образуют треугольники.



Для вычисления определителя матрицы третьего порядка существует еще один метод – правило Саррюса (фр. математик Пьер Фредерик Саррюс, 1798-1861 гг.).

Для матрицы третьего порядка А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ находим определитель суммированием шести произведений из трех элементов.

Первые два столбца матрицы записываем справа от матрицы.



Со знаком «+» берем произведения элементов по диагоналям, начиная с левого верхнего угла матрицы:

- $a_{11} \bullet a_{22} \bullet a_{33}$;
- $a_{12} \bullet a_{23} \bullet a_{31}$;
- $a_{13} \bullet a_{21} \bullet a_{32}$.

Со знаком «–» берем произведения элементов по диагоналям, начиная с правого верхнего угла матрицы:

- $a_{12} \bullet a_{21} \bullet a_{33}$;
- $a_{11} \bullet a_{23} \bullet a_{32}$;
- $a_{13} \bullet a_{22} \bullet a_{31}$.

Получаем определитель третьего порядка

$$\Delta_3 = |\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}\bullet a_{22}\bullet a_{33} + a_{12}\bullet a_{23}\bullet a_{31} + a_{13}\bullet$$

$$\bullet\, a_{21}\bullet a_{32} - (a_{12}\bullet a_{21}\bullet a_{33} + a_{11}\bullet a_{23}\bullet a_{32} + a_{13}\bullet a_{22}\bullet a_{31})$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуется ряд определений.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n.

$$\mathbf{A_n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определителем матрицы A n-го порядка называется алгебраическая сумма n! произведений n-го порядка элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A называется определитель матрицы (n - 1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Каждая матрица порядка n имеет n^2 миноров (n - 1)-го порядка.

Например, найдем минор M_{23} для матрицы $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 7 \\ 9 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{M_{23}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \bullet 0 \bullet 1 + 9 \bullet 8 \bullet 4 + 2 \bullet 3 \bullet (-1) - ((-1) \bullet 0 \bullet 4 + 1 \bullet 8 \bullet 3 + 1 \bullet$$

$$\bullet\, 9 \bullet 2) = 288 - 6 - (24 + 144) = 282 - 168 = 144$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A_n называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bullet M_{ij}$.

Для предыдущей матрицы, например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -114$.

Минор элемента матрицы совпадает с алгебраическим дополнением в случае, когда (i + j) – четное число, и отличается знаком, когда (i + j) – нечетное число.

Теорема Лапласа

Данная теорема позволяет вычислять определители любого порядка.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Разложение по элементам i-ой строки:

$$\Delta = a_{i1} \bullet A_{i1} + a_{i2} \bullet A_{i2} + a_{i3} \bullet A_{i3} + \ldots + a_{in} \bullet A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \bullet A_{is}$$

Разложение по элементам j-го столбца:

$$\Delta = a_{1j} \bullet A_{1j} + a_{2j} \bullet A_{2j} + a_{3j} \bullet A_{3j} + \ldots + a_{nj} \bullet A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \bullet A_{sj}$$

Свойства определителя

1. **Определитель матрицы, полученной из данной матрицы транспонированием, равен определителю данной матрицы. $|A^T| = |A|$.**

2. **Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.**

Например, докажем, что $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Действительно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \bullet 0 \bullet 8 + 2 \bullet 0 \bullet 1 + 0 \bullet 5 \bullet 1 - 1 \bullet 0 \bullet 1 - 5 \bullet 0 \bullet 1 - 2 \bullet 0 \bullet 8 = 0$$

Таким образом, при вычислении определителя получаем, что каждое произведение содержит нулевой сомножитель и, следовательно, равно нулю. Соответственно, весь определитель равен нулю.

Так как по предыдущему свойству $|A^T| = |A|$, то определитель, содержащий нулевую строку, тоже равен нулю. т.е.

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

3. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число k, то ее определитель умножится на это число k.

Доказательство. Пусть дан определитель

$$\Delta = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} k \bullet a_{11} & k \bullet a_{12} & \cdots & k \bullet a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{k} \bullet a_{11} \bullet A_{11} + \mathrm{k} \bullet a_{12} \bullet A_{12} + \ldots + \mathrm{k} \bullet a_{1n} \bullet A_{1n} =$$

$$= \mathrm{k} \bullet (a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{12} + \ldots + a_{1n} \bullet A_{1n}) = \mathrm{k} \bullet \Delta$$

За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца.

Например, дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

Из первой строки вынесем общий множитель 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \bullet \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Из третьей строки вынесем общий множитель 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \bullet \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \bullet 2 \bullet \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \bullet (0 + 8 + 6 - 0 - 8 - 9) = 6 \bullet (-3) = -18$$

Теперь в исходной задаче умножим все элементы второго столбца на число -2 и сосчитаем определитель снова: $\begin{vmatrix} 6 & -18 & 12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -8 & 6 \end{vmatrix}$.

Далее применяем правило треугольника:

$$\Delta = 6 \bullet 0 \bullet 6 + 1 \bullet (-8) \bullet 12 + (-18) \bullet 2 \bullet 2 - 12 \bullet 0 \bullet 2 - 2 \bullet (-8) \bullet 6 - (-18) \bullet 1 \bullet 6 = 0 - 96 - 72 - 0 + 96 + 108 = 36$$

Заметим, что 36 = - 2 • (- 18). Итак, мы умножили весь столбец на число -2 и в итоге получили, что весь определитель умножился на -2.

4. **При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.**

Доказательство. Предположим, что в определителе Δ переставили две строки: строку с номером i и строку с номером j + 1. Полученный определитель обозначим Δ'.

Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i-ой строки, а Δ' – по элементам

i + 1-ой строки. Разложения будут отличаться только знаком, т.к. в формуле Лапласа для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак соответствующему алгебраическому дополнению в разложении Δ ($(-1)^{i+j}$, то есть сменится на $(-1)^{i+1+j}$). Именно поэтому Δ' = Δ. Для столбцов доказательство аналогично.

Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}.$$

Действительно:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} \mathbf{= 1 \bullet (-5) - 3 \bullet 2 = -11 \text{ и } } \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \mathbf{= 2 \bullet 3 - (-5) \bullet 1 = 6 + 5 = 11}$$

5. **Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.**

Доказательство. Переставим одинаковые строки (столбцы) местами. С одной стороны, определитель не изменится, а с другой, поменяет знак, т.е. Δ = - Δ, откуда следует, что Δ = 0.

Например, давайте рассмотрим матрицу $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Применяем правило треугольника:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \mathbf{= 2 \bullet 3 \bullet 3 + 2 \bullet 2 \bullet 4 + 3 \bullet 4 \bullet 1 - 4 \bullet 3 \bullet 1 - 2 \bullet 3 \bullet 3 - 2 \bullet 4 \bullet 2 = 18 + 16 + 12 - 12 - 16 - 18 = 0}$$

6. **Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то определитель этой матрицы равен нулю.**

Доказательство. Пусть для определенности в определителе Δ пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности k и учитывая то, что если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю, мы получим Δ = k • Δ', где Δ' имеет две одинаковые строки. По свойству того, что если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю, определитель этой матрицы равен нулю.

Например, $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Мы помним, что если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число k, то ее определитель умножится на это число k. Исходя из этого вынесем множитель -2 за знак определителя:

$$\Delta = -2 \bullet \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

По свойству того, что если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю, мы получим 0.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е. $a_{i1} \bullet A_{i1} + a_{i2} \bullet A_{i2} + a_{i3} \bullet A_{i3} + \ldots + a_{in} \bullet A_{in} = 0$ при $i \neq j$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Пусть для определенности к элементам 1-ой строки матрицы прибавили элементы j-ой строки, умноженные на число k, ($i \neq j$). Тогда i-ая строка матрицы имеет вид:

$$[(a_{i1} + k \bullet a_{j1})\,(a_{i2} + k \bullet a_{j2}) \ldots (a_{in} + k \bullet a_{jn})]$$

Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i-ой строки:

$$(a_{i1} + k \bullet a_{j1}) \bullet A_{i1} + (a_{i2} + k \bullet a_{j2}) \bullet A_{i1} + \ldots (a_{in} + k \bullet a_{jn}) \bullet A_{in} = 0$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i-ой строки исходной матрицы ($s = 1,2,\ldots,n$; $i \neq j$).

Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \bullet A_{is} + k \bullet \sum_{s=1}^{n} a_{is} \bullet A_{is} \ (i \neq j)$$

Используя свойство того, что сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, и теорему Лапласа, получаем, что первая сумма равна определителю исходной матрицы, а вторая сумма равна нулю, т.е. $\Delta = \Delta'$.

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

Добавим к элементам второго столбца элементы первого, умноженные на число 3. Мы получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Сосчитаем определитель по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \bullet 9 \bullet 8 + 2 \bullet 4 \bullet 1 + 3 \bullet 5 \bullet 0 - 1 \bullet 9 \bullet 0 - 3 \bullet 2 \bullet 8 - 4 \bullet$$

$$\bullet 5 \bullet 1 = 72 + 8 + 0 + 0 - 48 - 20 = 12$$

Теперь рассмотрим задачу из свойства 5.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Добавим к первой строке вторую, умноженную на число -1 (вычтем из первой строки вторую), и получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

И по свойству того, что если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю, определитель равен нулю.

9. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Например, выше мы сосчитали:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

Возьмем произвольные числа: $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$.

Для всех элементов первой строки матрицы A найдем алгебраические дополнения:

- $\mathbf{A_{11} = (-1)^{1+1} \bullet \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 20 = 4}$
- $\mathbf{A_{12} = (-1)^{1+2} \bullet \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = - (16 - 0) = -16,}$
- $\mathbf{A_{13} = (-1)^{1+3} \bullet \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8}$

Теперь вычислим сумму:

$$\boldsymbol{b_1} \bullet \mathbf{A_{11}} + \boldsymbol{b_2} \bullet \mathbf{A_{12}} + \boldsymbol{b_3} \bullet \mathbf{A_{i3}} = \mathbf{3 \bullet 4 + 2 \bullet (-16) + 2 \bullet 8 = 12 - 32 + 16 = - 4}$$

И сосчитаем определитель матрицы, которая получается из матрицы A, если в ней заменить первую строку элементами $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = - 2$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{3 \bullet 3 \bullet 8 + 2 \bullet 4 \bullet 2 + 2 \bullet 5 \bullet 0 - 2 \bullet 3 \bullet 0 - 5 \bullet 4 \bullet 3 - 2 \bullet 2 \bullet 8 = 17 + 16 + 0 - 0 - 60 - 32 = -4}$$

Таким образом, - 4 = - 4.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей. Если C = A • B, то |C| = |A| • |B|.

Замечание. Если A • B ≠ B • A, то |A • B| = |B • A|

Например, на предыдущем занятии мы нашли произведения двух матриц:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \bullet B} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}, \mathbf{B \bullet A} = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Давайте сосчитаем определители всех матриц:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{1 \bullet 6 - 2 \bullet 3 = 6 - 6 = 0,}\ |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{2 \bullet 3 - 6 \bullet (- 1) = 6 + 6 = 12.}$$

$$|\mathbf{A \bullet B}| = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \text{ и } |\mathbf{B \bullet A}| = \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = \mathbf{320 - 320 = 0}$$

Таким образом, $|\mathbf{A \bullet B}| = |\mathbf{A}| \bullet |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}| \bullet |\mathbf{A}| = |\mathbf{B \bullet A}| = \mathbf{0}.$

Вопрос 2. Обратная матрица.

Матрица А называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.

Только для невырожденной квадратной матрицы А вводится понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице А, если при умножении этой матрицы на данную и справа, и слева получается единичная матрица.

$$\mathbf{A^{-1} \bullet A = A \bullet A^{-1} = E.}$$

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы):

Обратная матрица A^{-1} существует единственно тогда и только тогда, когда исходная матрица А невырождена.

Доказательство.

Пусть матрица А имеет обратную матрицу $\mathbf{A^{-1}}$ **т.е.** $\mathbf{A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = E.}$

По свойству 10 для определителей имеем: $\mathbf{|A \bullet A^{-1}| = |A| \bullet |A^{-1}| = |E| = 1}$, **т.е.**

$$\mathbf{|A| \neq 0, |A^{-1}| = 0.}$$

Допустим, что $|A| \neq 0$. Рассмотрим квадратную матрицу Ã порядка n, называемую присоединенной. Элементы Ã являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A^t, транспонированной к А:

$$\mathbf{\bar{a}_{ij} = A^t_{ij} = A_{ij},\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n.}$$

Тогда элементы произведения матриц Ã • А = В определяются по правилу умножения матриц:

$$\boldsymbol{b_{i,j}} = \sum_{s=1}^{n} \bar{a}_{i,j} \bullet \bar{a}_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{A}_{s,i} \bullet \bar{a}_{s,j} = \begin{cases} \mathbf{|A|, i = j} \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{i \neq j} \text{ (следует из свойства } \mathbf{7} \text{ и теоремы Лапласа)} \end{cases}$$

Поэтому матрица В – диагональная, элементы главной диагонали этой матрицы равны определителю исходной матрицы А.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} |A| & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |A| & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & |A| & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & |A| \end{pmatrix}$$

Аналогично доказывается, что произведение матрицы А на Ã равно той же матрице В.

Итак, имеем A • Ã = Ã • A = B. Отсюда следует, что если в качестве обратной матрицы взять матрицу A^{-1} = (1/|A|) • Ã, где (|A|≠ 0), то произведения A^{-1} • A и A • A^{-1} равны единичной матрице E порядка n, т.е. A^{-1} • A = A • A^{-1} = (1/|A|) • B = E.

Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существуют матрицы X и Y такие, что X ≠ A^{-1}, Y ≠ A^{-1}, но A • X = E и Y • A = E. Умножим первое равенство на A^{-1} слева: A^{-1} • A • X = A^{-1} • E. Следовательно, E • X = A^{-1} и, следовательно, X = A^{-1}.

Второе равенство умножим на A^{-1} справа: Y • A • A^{-1} = E • A^{-1}.
Следовательно, Y • E = E • A^{-1} и, следовательно, Y = A^{-1}. Таким образом, обратная матрица A^{-1} единственна.

Теперь рассмотрим алгоритм построения обратной матрицы.

$$\mathbf{A_n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Находим определитель исходной матрицы A. Если |A| = 0, то матрица A является вырожденной и для нее не существует матрицы A^{-1}. Если |A| ≠ 0, то матрица A является невырожденной и для нее существует матрица A^{-1}.
2.
3. Находим матрицу, транспонированную к исходной A^t:

$$\mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Находим алгебраические дополнения к элементам матрицы A^T и составляем из них присоединенную матрицу:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{A_{11}} & \widetilde{A_{12}} & \cdots & \widetilde{A_{1n}} \\ \widetilde{A_{21}} & \widetilde{A_{22}} & \cdots & \widetilde{A_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{A_{\iota 1}} & \widetilde{A_{\iota 2}} & \cdots & \widetilde{A_{\iota n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{A_{n1}} & \widetilde{A_{n2}} & \cdots & \widetilde{A_{nn}} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}_{ik} = (-1)^{i+k} \bullet \widetilde{M_{\iota k}}$, где $\widetilde{M_{\iota k}}$,- минор элемента $\widetilde{a_{\iota k}}$,; матрицы Ã,

т.е. определитель матрицы порядка n - 1, которая получается из матрицы Ã вычеркиванием i-ой строки и k-го столбца.

5. Составляем обратную матрицу, умножая каждый элемент присоединенной матрицы $\tilde{A}$ на число $1/|A|$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{A_{11}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\widetilde{A_{12}}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{\widetilde{A_{1n}}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\widetilde{A_{21}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\widetilde{A_{22}}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{\widetilde{A_{2n}}}{|\mathbf{A}|} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\widetilde{A_{\iota 1}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\widetilde{A_{\iota 2}}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{\widetilde{A_{\iota n}}}{|\mathbf{A}|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\widetilde{A_{n1}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\widetilde{A_{n2}}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{\widetilde{A_{nn}}}{|\mathbf{A}|} \end{pmatrix}$$

6. Проверяем правильность построения обратной матрицы по формуле $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Вопрос 3. Решение матричных уравнений. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Ранг, базисный минор, элементарные преобразования матрицы.

Давайте рассмотрим принцип решения матричных уравнений.

Пусть даны следующие матрицы порядка n:

$$\mathbf{A_n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X_n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B_n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим уравнение вида $A \cdot X = B$.

Для того, чтобы решить уравнение, т.е. найти матрицу X, умножим уравнение слева на матрицу A^{-1} и получим $A^{-1}(A \cdot X = B)$.

Следовательно, $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Следовательно, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$.

Теперь рассмотрим уравнение вида $X \cdot A = B$

Для того, чтобы решить данное уравнение, т.е. найти матрицу X, умножим его справа на матрицу A^{-1} и получим $(X \cdot A = B) \cdot A^{-1}$.

Следовательно, $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$.

Следовательно, $X = B \cdot A^{-1}$.

Теперь рассмотрим уравнение вида $A \cdot X \cdot C = B$.

Для того, чтобы решить данное уравнение, т.е. найти матрицу X, умножим его слева на матрицу A^{-1}, а справа на матрицу C^{-1}, и получим $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

То есть в общем виде решение уравнение будет выглядеть так:

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.}$$

Теперь рассмотрим линейную зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы, ранг, базисный минор, элементарные преобразования матрицы.

Пусть

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица размера m x n

Если в матрице некоторая строка (столбец) может быть представлена в виде суммы других (m - 1) строк ((n - 1) столбцов), умноженных соответственно на числа $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$), то говорят, что данная строка (столбец) является линейной комбинацией указанных строк (столбцов).

Будем говорить, что *l* строк (столбцов) матрицы линейно зависимы, если хотя бы одна из этих строк (столбцов) является линейной комбинацией остальных. Иначе эти *l* строк (столбцов) являются линейно независимыми.

Давайте найдём линейно зависимые строки в матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

В данной матрице пятая строка является линейной комбинацией второй и третьей строк, т.к. она может быть представлена в виде суммы второй строки с третьей, умноженной на (-3):

$$\mathbf{(\,7\ -15\ \ -7\ \ 2\,) = (\,1\ -3\ \ 2\ \ 5\,) - 3 \cdot (-2\ 4\ 3\ 1)}$$

Следовательно, вторая, третья, пятая строки линейно зависимы.

Следующие преобразования матрицы будем называть элементарными преобразованиями матрицы. Перечислим их:

- умножение всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам одной строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число, отличное от нуля;
- перестановка местами любых двух строк (столбцов).

Минором k-го порядка матрицы A называется всякий определитель k-го порядка, элементы которого стоят на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A.

Например, для матрицы A выпишем минор порядка 4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Заметим, что в матрице 5 строк и 4 столбца. Следовательно, наивысший возможный порядок минора матрицы равен 4. Все миноры порядка 4 мы можем получить, вычеркивая последовательно по одной строке из исходной матрицы.

Запишем один из миноров, например, минор матрицы, который получается, если вычеркнуть предпоследнюю строку:

$$M_4^2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

Остальные миноры порядка 4 вычисляются аналогично.

Рангом матрицы $A_{m \times n}$ называется число r(A), равное наивысшему порядку минора этой матрицы, отличному от нуля. Если все миноры матрицы $A_{m \times n}$ равны нулю, то ранг матрицы равен нулю, т.е. r(A) = 0.

Из определения ранга матрицы следуют свойства:

- $r(A) \le \min(m, n)$;
- $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- пусть A_n – квадратная матрица порядка n, тогда $r(A) = n \Leftrightarrow A$ – невырожденная.

Теорема. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы, на которых расположен базисный минор, называются базисными.

Теорема о базисном миноре.
Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Всякая небазисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

На практике, согласно всему вышесказанному, для определения ранга матрицы удобно привести эту матрицу с помощью элементарных преобразований к трапециевидной форме (ступенчатому виду):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rk} \end{pmatrix} a_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\ \ldots,\ r,\ r \leq k$$

Тогда:

$$\text{Тогда } M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rk} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} \ldots a_{rr} \neq 0 \text{ базисный минор.}$$

Первые r строк (столбцов) – базисные строки (столбцы). Заметим, что число ненулевых строк в преобразованной матрице равно рангу матрицы.

Вопрос 4. Практическое занятие.

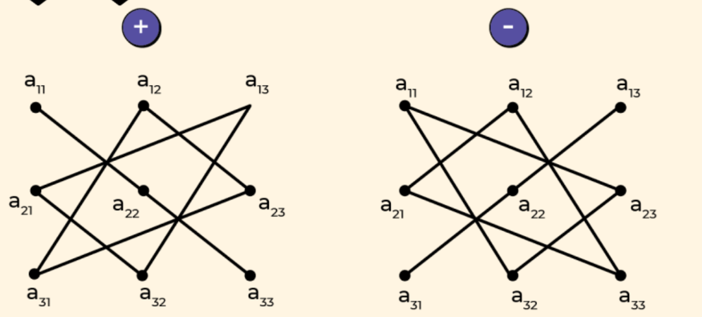
Задача 1.

Вычислить определитель по правилу треугольника и по теореме Лапласа, разложив по элементам первой строки.

Решение.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Тогда по правилу треугольника:



$$\Delta_3 = a_{11} \bullet a_{22} \bullet a_{33} + a_{21} \bullet a_{32} \bullet a_{13} + a_{12} \bullet a_{23} \bullet a_{31} - (a_{13} \bullet a_{22} \bullet a_{31} + a_{23} \bullet a_{32} \bullet a_{11} + a_{12} \bullet a_{21} \bullet a_{33}$$

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \bullet 3 \bullet 8 + 2 \bullet 4 \bullet 1 + 0 \bullet 5 \bullet 0 - (1 \bullet 3 \bullet 0 + 4 \bullet 5 \bullet 1 + 0 \bullet 2 \bullet 8) = 24 + 8 + 0 -$$

$$- (0 + 20 + 0) = 32 - 20 = 12$$

Теперь вычислим этот же определитель, используя теорему Лапласа, а именно, разложим определитель по элементам первой строки:

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 1 \bullet (-1)^{1+1} \bullet \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 1 \bullet (-1)^{1+3} \bullet \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \bullet 8 - 5 \bullet 4 + 2 \bullet 4 - 3 \bullet 0 = 24 - 20 + 8 - 0 = 12$$

Вычислив определитель двумя способами, мы получили одинаковые ответы.

Ответ: 12

Задача 2.

Докажем, что определитель матрицы A равен определителю матрицы A^T, то есть:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Действительно, в предыдущей задаче мы нашли, что |A| = 12.

Вычислим $|A^T|$, получим:

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 8 + 0 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 8 = 24 + 0 + 8 - 0 - 20 - 0 = 12$$

Таким образом, мы получили |A| = 12 и $|A^T|$ = 12. Задача решена.

Ответ: $|A| = |A^T| = 12$

Задача 3.

Используя свойства определителей, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение.

Умножим первую строку на (-5) и добавим результат ко второй строке, а остальные строки оставим без изменения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5+5 & -10+8 & -15+2 & -20+1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -13 & -19 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

Далее умножим первую строку на число (-3) и добавим результат к третьей строке. Получим:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -13 & -19 \\ -3+3 & -6+(-1) & -9+2 & -12+0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -13 & -19 \\ 0 & -7 & -7 & -12 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

Теперь раскроем определитель по первому столбцу, получим

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -13 & -19 \\ -7 & -7 & -12 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

Умножим первый столбец на (-1) и добавим результат ко второму столбцу, получим

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2-13 & -19 \\ -7 & 7-7 & -12 \\ 5 & -5+4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -11 & -19 \\ -7 & 0 & -12 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

А теперь раскроем определитель по второму столбцу:

$$- 11 \bullet (-1)^{1+2} \bullet \begin{vmatrix} -7 & -12 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \bullet (-1)^{3+2} \bullet \begin{vmatrix} -2 & -19 \\ -7 & -12 \end{vmatrix} = 11 \bullet(-21 - (-60)) + (24 - 133) = 11 \bullet 39 - 109 = 429 - 109 = 320.$$

Ответ: 320.

Задача 4.

Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение.

Действие 1. Определитель указанной матрицы мы вычислили в задаче предыдущего урока.

Напомним:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

Так как $|A| \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует и единственна.

Действие 2. Находим матрицу, транспонированную к исходной A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Действие 3. Теперь найдем алгебраические дополнения транспонированной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \bullet M_{11} = (-1)^2 \bullet \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \bullet 8 - 5 \bullet 4 = 4.$$

По аналогии найдём остальные дополнения:

- $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 4$
- $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$
- $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -16,$
- $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8,$
- $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$
- $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8$
- $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$
- $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

Таким образом, из алгебраических дополнений мы получаем присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -16 & 8 & -3 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Действие 4. Составляем обратную матрицу, умножая каждый элемент присоединенной матрицы на число $\frac{1}{|A|}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \bullet \tilde{A} = \frac{1}{12} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -16 & 8 & -3 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Действие 5. Сделаем проверку. Для этого умножаем получившуюся обратную матрицу на изначально данную матрицу. Мы должна получить диагональную матрицу, при этом элементы главной диагонали этой матрицы должны быть равны определителю исходной матрицы A:

$$= \frac{1}{12} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -16 & 8 & -3 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} =$$

Компоненты диагональной матрицы вычисляются следующим образом:

- $c11 = a11 \cdot b11 + a12 \cdot b21 + a13 \cdot b31 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = 4 + 8 + 0 = 12$
- $c12 = a11 \cdot b12 + a12 \cdot b22 + a13 \cdot b32 = 4 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = 0 + 12 - 12 = 0$

- c13 = a11 · b13 + a12 · b23 + a13 · b33 = 4 · 1 + 4 · 5 + (-3) · 8 = 4 + 20 - 24 = 0
- c21 = a21 · b11 + a22 · b21 + a23 · b31 = (-16) · 1 + 8 · 2 + (-3) · 0 = (-16) +16 + 0 = 0
- c22 = a21 · b12 + a22 · b22 + a23 · b32 = (-16) · 0 + 8 · 3 + (-3) · 4 = 0 + 24 - 12 = 12
- c23 = a21 · b13 + a22 · b23 + a23 · b33 = (-16) · 1 + 8 · 5 + (-3) · 8 = (-16) + 40 - 24 = 0
- c31 = a31 · b11 + a32 · b21 + a33 · b31 = 8 · 1 + (-4) · 2 + 3 · 0 = 8 - 8 + 0 = 0
- c32 = a31 · b12 + a32 · b22 + a33 · b32 = 8 · 0 + (-4) · 3 + 3 · 4 = 0 - 12 + 12 = 0
- c33 = a31 · b13 + a32 · b23 + a33 · b33 = 8 · 1 + (-4) · 5 + 3 · 8 = 8 - 20 + 24 = 12

$$= \frac{1}{12} \bullet \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

Проверка выполнена, наш ответ верный.

Ответ: $\frac{1}{12} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -16 & 8 & -3 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 5.

Решить матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet X \bullet \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение.

Решение будем искать в виде $X = A^{-1} \bullet B \bullet C^{-1}$.

Действие 1. Найдем обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Так как $|A| \neq 0$, то A^{-1} существует.

Найдем определитель матрицы: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

Тогда обратная матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Действие 2. Теперь найдем обратную матрицу к матрице C = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Находим определитель |C| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$=3

Тогда обратная матрица: $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Действие 3. Находим искомую матрицу X:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1} \bullet B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Компоненты получившейся матрицы вычисляются следующим образом:

- $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = (-1) \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = 5 - 7 = -2$
- $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 6 = (-6) + 6 = 0$
- $c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 0 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = 0 - 7 = -7$
- $c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 0 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 0 + 6 = 6$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Действие 4. Аналогично находим произведение двух матриц, получаем

$$\mathbf{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Задача 6.

Вычислить ранг матрицы A и указать базисный минор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \\ -2 & -3 & -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение.

Преобразуем матрицу А.

Для этого мы прибавляем ко 2-ой строке первую строку, к четвертой строке прибавляем первую строку два раза, а из третей строки вычитаем первую строку три раза. При сложении четвертой и третей строки, а так же второй и третей, получаем строки состоящие из 0, следовательно итоговую матрицу можно записать как

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \\ -2 & -3 & -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & -8 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1$, $a_{22} = 3$.

Получили две линейно независимые строки, r(A) = 2. Базисным минором является, например, минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$, т.к. он отличен от нуля (или любой другой, отличный от нуля, минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Покажем, что небазисные строки можно выразить в виде линейной комбинации базисных строк.

В исходной матрице возьмем третью строку и представим ее в виде линейной комбинации первых двух базисных:

(3, 6,10,-4,7) = 3• (1,3,7,2,5) - (0,3,11,10,8)

Аналогично, выразим четвертую:

(-2,-3,-3,6,-2) = -2•(1,3,7,2,5) + (0,3,11,10,8)

Можно выразить в непреобразованном виде:

(3, 6,10,-4,7) = 2• (**1**, **3**, **7**, **2**, **5**) – (-1,0,4,8,3)
(-2,-3,-3,6,-2) = 1 • (**1**, **3**, **7**, **2**, **5**) + (-1,0,4,8,3)

Ответ: r(A) = 2, базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$.