Специальная математика и основы статистики

Экономические индексы

Вопрос 1. Общие понятия об индексах

«Индекс» в переводе с латыни означает «указатель» или «показатель». Индексы служат для сравнения и оценки изменения показателей во времени, в пространстве или по отношению к любому эталону (плану, прогнозу, нормативу).

В статистике ***индекс*** - это показатель, который характеризует относительное изменение уровня исследуемого явления в рассматриваемом временном периоде *(текущем (отчетном)* периоде) но сравнению с другим его уровнем, принятым за базу сравнения *(базисным* периодом).

В качестве такой базы может быть использован уровень этого явления за какой-либо прошлый период времени *(динамический индекс)* или уровень того же явления по другой территории *(территориальный индекс).*

Если оценивают изменение отдельной величины (цены конкретного товара, например, автомобиля конкретной марки, или объем выпуска ноутбука определенной модели фирмы SONY) - получают *индивидуальный индекс,* если анализируется изменение показателя по всей совокупности (по автомобилям всех марок или всем моделям ноутбуков) - получают *сводный индекс.*

Сводные индексы являются незаменимым инструментом исследования в тех случаях, когда необходимо сравнить во времени или пространстве две совокупности, элементы которых непосредственно суммировать нельзя. Например, сравнить изменение количества произведенной продукции промышленности за год в абсолютном выражении нельзя, так как оно складывается из объема добычи полезных ископаемых, обрабатывающего производства, объема производства и распределения электроэнергии, объема производства промышленных машин и оборудования и др., несопоставимых по своим свойствам и единицам измерения. Но если выразить объем производства через стоимость, умножив количество произведенной продукции на цену единицы каждого вида, и сопоставить суммарные величины стоимости на конец и на начало года, мы узнаем сводный индекс промышленного производства - значимую и экономически обоснованную сводную индексную величину.

В целом индексный метод направлен на решение следующих задач:

1) характеристика общего изменения уровня сложного социально-экономического явления;

2) анализ влияния каждого фактора, составляющего сложное социально-экономическое явление, па изменение индексируемой величины;

3) анализ влияния структурных сдвигов на изменение индексируемой величины.

В практике индексного метода используются следующие общепринятые обозначения:

i - индивидуальный индекс;

I - сводный индекс;

p - цена;

q - количество;

z - себестоимость единицы продукции;

1 - текущий период;

O - базисный период.

Вопрос 2. Индивидуальные индексы

Простейшим показателем, используемым в индексном анализе, является ***индивидуальный индекс,*** который характеризует изменение во времени экономических величин, относящихся к одному объекту:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0} - \text{индекс цены}$$

где p_1 - цена товара в текущем периоде;

p_0 - цена товара в базисном периоде.

Изменение физической массы проданного товара в натуральном выражении **измеряется индивидуальным индексом физического объема реализации:**

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

где q_1 - количество реализованного товара в текущем периоде;

q_0 - количество реализованного товара в базисном периоде.

Изменение стоимостного объема товарооборота по данному товару отразится в значении **индивидуального индекса товарооборота (индивидуального индекса стоимости).** Для его расчета товарооборот текущего периода (произведение цены на количество проданного товара) сравнивается с товарооборотом предшествующего периода:

$$i_{pq} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$$

где $p_1 q_1$ - общая стоимость реализованного товара (товарооборот) в текущем периоде;

$p_0 q_0$ - общая стоимость реализованного товара (товарооборот) в базисном периоде.

Данный индекс также может быть получен как произведение индивидуального индекса цепы и индивидуального индекса физического объема реализации:

$$i_p \left(= \frac{p_1}{p_0}\right) \times i_q \left(= \frac{q_1}{q_0}\right) = i_{pq} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$$

Если рассматривать изменение себестоимости производства отдельного вида продукции, то система индивидуальных индексов будет следующей:

* Индивидуальный индекс себестоимости единицы продукции:

$$i_z = \frac{z_1}{z_0}$$

где z_1 - себестоимость единицы продукции в текущем периоде;

z_0 - себестоимость единицы продукции в базисном периоде.

* Индивидуальный индекс физического объема производства продукции:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

где q_1 - количество единиц продукции, произведенное в текущем периоде;

q_0 - количество единиц продукции, произведенное в базисном периоде.

* Индивидуальный индекс затрат на производство данного вида продукции:

$$i_{zq} = \frac{z_1 q_1}{z_0 q_0}$$

где - общие затраты на производство всего объема продукции в текущем периоде;

$z_0 q_0$ - общие затраты на производство всего объема продукции в базисном периоде.

* Взаимосвязь между индексами:

$$i_z \times i_q = i_{zq}.$$

Индивидуальные индексы, в сущности, представляют собой относительные показатели динамики или темп роста и по данным за несколько периодов времени могут рассчитываться в цепной или базисной формах.

Вопрос 3. Сводные индексы

В отличие от индексов индивидуальных, сводные индексы позволяют обобщить показатели по нескольким позициям (товарам, видам продукции). Исходной формой сводного индекса является агрегатная форма.

Агрегатная форма индекса позволяет найти для разнородной совокупности такой общий показатель, в котором можно объединить все ее элементы. При анализе динамики цен индивидуальные цены различных товаров складывать неправомерно, но суммировать товарооборот по этим товарам вполне допустимо. В текущем периоде такой товарооборот по *n* товарам составит:

$$p_1^1 q_1^1 + p_1^2 q_1^2 + p_1^3 q_1^3 + \cdots + p_1^n q_1^n = \sum p_1 q_1$$

Аналогично определяется товарооборот для базисного периода:

$$p_0^1 q_0^1 + p_0^2 q_0^2 + p_0^3 q_0^3 + \cdots + p_0^n q_0^n = \sum p_0 q_0$$

Если мы сравним товарооборот в текущем периоде с его величиной в базисном периоде, то получим **сводный индекс товарооборота (сводный индекс стоимости):**

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Пример: Для иллюстрации этого и последующих индексов воспользуемся следующими условными данными (табл. 1.):

Таблица 1

Цены и объем реализации трех товаров

Товар	Январь		Февраль	
	цена, руб.	продано, тыс. шт.	цена, руб.	продано, тыс. шт.
А	20	9	22	8
Б	60	15	65	13
В	30	7	35	11

Рассчитаем индекс товарооборота:

$$I_{pq} = \frac{22 \times 8 + 65 \times 13 + 35 \times 11}{20 \times 9 + 60 \times 15 + 30 \times 7} = 1{,}089, \text{или } 108{,}9\%$$

Рассчитанное значение индекса позволяет заключить, что товарооборот в целом по данной товарной группе, состоящей из трех товарных позиций А, Б и В, в текущем периоде по сравнению с базисным возрос на 8,9% (108,9 - 100,0%). Отметим, что размер товарной группы (количество товаров), единицы измерения товаров могут быть любыми.

■ ■ ■

Величина индекса товарооборота формируется под воздействием двух факторов - на неё оказывает влияние как изменение цен на товары, так и изменение объемов их реализации. Для того, чтобы оценить изменение только цен (индексируемой величины), необходимо количество проданных товаров (веса индекса) зафиксировать на каком-либо постоянном уровне. При исследовании динамики таких показателей, как цена и себестоимость, физический объем реализации обычно фиксируют на уровне текущего периода. Таким способом получают **сводный индекс цен** (по методу Пааше):

$$I_p = \frac{p_1^1 q_1^1 + p_1^2 q_1^2 + \cdots + p_1^n q_1^n}{p_0^1 q_1^1 + p_0^2 q_1^2 + \cdots + p_0^n q_1^n} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Пример: Для рассматриваемого примера получим:

$$I_p = \frac{22 \times 8 + 65 \times 13 + 35 \times 11}{20 \times 8 + 60 \times 13 + 30 \times 11} = 1{,}107, \text{или } 110{,}7\%$$

Таким образом, по данной товарной группе цены в феврале по сравнению с январем в среднем возросли на 10,7%. При построении данного индекса цена выступает в качестве индексируемой величины, а количество проданного товара - в качестве веса.

■ ■ ■

Рассмотрим сводный индекс цен более подробно. Числитель данного индекса содержит фактический товарооборот текущего периода. Знаменатель же представляет собой условную величину, которая показывает, каким бы был товарооборот в текущем периоде при условии сохранения цен на базисном уровне. Поэтому соотношение этих двух категорий и отражает имевшее место изменение цен.

Числитель и знаменатель сводного индекса цен также можно интерпретировать и по-другому. Числитель представляет собой сумму денег, фактически уплаченных покупателями за товары в текущем периоде. Знаменатель же показывает, какую сумму покупатели заплатили бы за те же товары, если бы цены не изменились. Разность числителя и знаменателя будет отражать величину экономии (если знак «-») или перерасхода («+») покупателей от изменения цен:

$$E = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 1406 - 1270 = 136 \text{ тыс. руб.}$$

Необходимо отметить, что на практике также используется сводный индекс цен, построенный по методу Ласпейреса, когда веса или объемы продаж фиксируются на уровне базисного, а не текущего периода:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Третьим индексом в рассматриваемой индексной системе (включающим индекс цен, рассчитанный по методу Пааше) является **сводный индекс физического объема реализации.** Он характеризует изменение количества проданных товаров не в денежных, а в физических единицах измерения. Весами в данном случае выступают цены, которые фиксируются на базисном уровне:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_o p_0}$$

Пример: В нашем случае индекс составит:

$$I_q = \frac{8 \times 20 + 13 \times 60 + 11 \times 30}{9 \times 20 + 15 \times 60 + 7 \times 30} = 0{,}984, \text{или } 98{,}4\%$$

Физический объем реализации сократился на 1,6% (98,4% - 100,0%).

■ ■ ■

Между рассчитанными индексами существует следующая взаимосвязь:

$$I_p \times I_q = I_{pq}$$

Для проверки взаимосвязи переведем значения индексов из процентов в доли единицы и подставим их в формулу:

1,107×0,984 = 1,089, или 108,9%.

На основе данной взаимосвязи по значениям двух известных индексов всегда можно определить неизвестное значение третьего индекса.

Для оценки изменения уровня производственных издержек рассчитываются сводные индексы затрат (издержек) производства, себестоимости произведенной продукции и физического объема производства.

Сводный индекс затрат на производство оценивает, во сколько раз возросли или уменьшились издержки производства продукции в текущем периоде по сравнению с базисным, или сколько процентов от затрат базисного уровня они составили:

$$I_{zq} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0}$$

Разница между числителем и знаменателем сводного индекса затрат покажет, на сколько рублей увеличились или уменьшились издержки производства в текущем периоде по сравнению с базисным.

Сводный индекс себестоимости продукции показывает, как изменились издержки производства из-за изменения себестоимости в текущем периоде по сравнению с базисным:

$$I_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1}$$

Индекс физического объема производства оценивает, во сколько раз изменились издержки производства продукции в результате изменения объема ее производства или сколько процентов составил рост (снижение) издержек из-за изменения физического объема ее производства:

$$Iq = \frac{\sum z_1 q_0}{\sum z_0 q_0}$$

Взаимосвязь между индексами выражается формулой:

$$I_z \times I_q = I_{zq}$$

Вопрос 4. Средние формы сводных индексов

На практике при расчете индексов часть необходимой информации может отсутствовать или базироваться на результатах выборочных обследований. В подобных случаях вместо индексов в агрегатной форме удобнее использовать средние арифметические и средние гармонические индексы. Любой сводный индекс можно представить, как среднюю взвешенную из индивидуальных индексов.

Предположим, мы располагаем данными о стоимости проданной продукции в текущем периоде и индивидуальными индексами цен, полученными, например, в результате выборочного наблюдения. Тогда при расчете сводного индекса цен по методу Пааше можно использовать следующую замену:

$$p_o q_1 = \frac{1}{i_p} p_1 q_1$$

В целом же **сводный индекс цен** в данном случае будет выражен **в форме средней гармонической:**

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_p} p_1 q_1}$$

Пример: Рассчитаем сводный индекс цен по данным о реализации и ценах трех товаров (табл. 2):

Таблица 2

Данные о реализации и ценах по товарной группе

Товар	Реализация в текущем периоде, руб.	Изменение цен в текущем периоде по сравнению с базисным, %
А	44000	-1,3
Б	56000	+4,2
В	31000	+2,5

Последняя графа таблицы содержит информацию об изменениях индивидуальных индексов цен или их приростах. С учетом этих приростов несложно определить первоначальные значения индексов, которые по товарам А, Б и В, соответственно, составляют 0,987, 1,042 и 1,025.

Рассчитаем значение сводного индекса:

$$I_p = \frac{44000 + 56000 + 31000}{\frac{44000}{0{,}987} + \frac{56000}{1{,}042} + \frac{31000}{1{,}025}} = 1{,}019$$

Произведенный расчет позволяет заключить, что цены по данной товарной группе в среднем возросли на 1,9%. Мы получили значение сводного индекса цен в среднегармонической форме, соответствующее сводному индексу Пааше.

■■■

Для получения значения, соответствующего индексу Ласпейреса, сводный индекс цен необходимо представить в среднеарифметической форме. При этом используется следующая замена:

$$p_1 q_0 = i_p p_0 q_0$$

С учетом этой замены **сводный индекс цен в среднеарифметической форме** можно представить следующим образом:

$$I_p = \frac{\sum i_p p_o q_0}{\sum p_o q_0}$$

Среднеарифметическая форма также может использоваться при расчете сводного индекса физического объема товарооборота. При этом производится замена:

$$q_1 p_0 = i_q q_0 p_0$$

Сводный индекс физического объема товарооборота в форме средней арифметической имеет вид:

$$I_q = \frac{\sum i_0 q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

Пример: Рассчитаем сводный индекс физического объема реализации продукции по данным о стоимости трех товаров товарной группы (табл. 3)

Таблица 3

Реализация товаров А, Б, В в натуральном и стоимостном выражении

Товар	Стоимостной объем реализации в базисном периоде, руб.	Изменение физического объема реализации текущем периоде по сравнению с базисным, %
А	87000	+3,4
Б	54000	-12,0
В	73000	-8,5

Индивидуальные индексы физического объема, соответственно, будут равны 1,034, 0,880 и 0,915. С учетом этого рассчитаем среднеарифметический индекс:

$$I_q = \frac{1{,}034 \times 87000 + 0{,}880 \times 54000 + 0{,}915 \times 73000}{87000 + 54000 + 73000} = 0{,}955$$

В результате расчета мы получили, что физический объем реализации товаров рассматриваемой товарной группы в среднем снизился на 4,5%.

■■■

Вопрос 5. Расчет сводных индексов за последовательные периоды

На практике, как правило, расчет индексов не является разовой акцией. Индексы позволяют получать сводную оценку изучаемых процессов постоянно, месяц за месяцем, год за годом. Для достижения сопоставимости они должны рассчитываться но единой методологии. Такая методология, или схема расчета индексов по нескольким следующим друг за другом временным периодам, называется системой индексов.

<u>Система индексов</u> - ряд последовательно построенных индексов. Такие системы характеризуют изменения, происходящие в изучаемом явлении в течение исследуемого периода времени.

Рассмотрим варианты построения системы индексов на примере сводного индекса цен, рассчитываемого за n периодов.

Если сравнивать цены каждого периода с ценами периода предшествующего, получаемая индексная система будет включать цепные индексы, отражающие изменение цен за каждый из периодов рассматриваемого временного интервала. При этом в качестве весов можно использовать объемы реализации каждого конкретного периода или же постоянные объемы какого-либо периода, принятого за базис сравнения. Тогда индексная система будет включать индексы, соответственно, с переменными или с постоянными весами.

<u>Система цепных индексов</u> - это ряд индексов одного и того же явления, вычисленных с меняющейся от индекса к индексу базой сравнения.

Цепные индексы цен с переменными весами имеют следующий вид:

$$I_{p1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1};\ I_{p2/1} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2};\ I_{p3/2} = \frac{\sum p_3 q_3}{\sum p_2 q_3};\ I_{\frac{pn}{n}-1} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_{n-1} q_n};$$

При использовании *постоянных весов* система преобразуется:

$$I_{p1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0};\ I_{p2/1} = \frac{\sum p_2 q_0}{\sum p_1 q_0};\ I_{p3/2} = \frac{\sum p_3 q_0}{\sum p_2 q_0};\ I_{\frac{pn}{n}-1} = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_{n-1} q_0};$$

Отметим, что использование постоянных весов более предпочтительно, так как рассчитываемые таким образом индексы мультипликативны, т.е. их можно последовательно перемножать и получать величину показателя за более продолжительный период. Так, например, располагая индексами цен за три последовательных месяца, можно получить сводную оценку изменения цены в целом за квартал и т.п. Индексы с переменными весами такой возможности не предоставляют.

Если сравнивать цены каждого периода с ценами какого-либо базисного периода (как правило - начального), получаемая индексная система будет включать базисные индексы, отражающие изменение цен накопленным итогом, т.е. с начала рассматриваемого временного интервала. Например, изменение цен в январе по сравнению с декабрем предшествующего года, в феврале по сравнению с тем же декабрем и т.д. При этом в качестве весов также можно использовать объемы реализации каждого конкретного периода или же постоянные объемы периода, принятого в качестве базисного.

Система базисных индексов - это ряд последовательно вычисленных индексов одного и того же явления с постоянной базой сравнения, т.е. в знаменателе всех индексов находится индексируемая величина базисного периода.

Система базисных индексов с переменными весами имеет вид:

$$I_{p1/0}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1};\ I_{p2/1}=\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_0q_2};\ I_{p3/0}=\frac{\sum p_3q_3}{\sum p_0q_3};\ I_{pn/0}=\frac{\sum p_nq_0}{\sum p_0q_n};$$

Базисные индексы цен с постоянными весами рассчитываются по формулам:

$$I_{p1/0}=\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0};\ I_{p2/0}=\frac{\sum p_2q_0}{\sum p_0q_0};\ I_{p3/0}=\frac{\sum p_3q_0}{\sum p_0q_0};\ I_{pn/0}=\frac{\sum p_nq_0}{\sum p_0q_0};$$

Отметим, что использование постоянных весов приводит базисные индексы, так же как и индексы цепные, к сопоставимому виду.

Вопрос 6. Индексный анализ влияния структурных изменений

Индексы позволяют оценить динамику показателей, характеризующих разнородные в качественном отношении совокупности, как правило, товарные группы. Однако даже если рассматривать данные по каждому товару отдельно или о производстве продукции одного вида, на величине результативного показателя будет отражаться влияние структурных изменений, например, изменений в структуре производства или реализации данного товара по территориям.

Пример: Рассмотрим случай, когда один товар или вид продукции реализуется или производится в нескольких местах (табл. 4).

Таблица 4

Данные о ценах и объемах реализации товара «Х» в регионах

Регион	2018		2019	
	Цена, тыс. руб.	Продано, шт.	Цена тыс. руб.	Продано, шт.
1	7	36000	8	10000
2	5	12000	6	34000

Проведем анализ изменения цен на данный товар. Из таблицы видно, что цена в каждом регионе возросла. Для сводной оценки этого роста воспользуемся средними показателями. Так как в данном случае реализуется один и тот же товар, вполне правомерно рассчитать его среднюю цену за 2019 и за 2018 гг. **Индекс цен переменного состава** представляет собой соотношение средних значений за два рассматриваемые периода:

$$I_p^{nc} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}$$

$$I_p^{nc} = \frac{8 \times 10000 + 6 \times 34000}{10000 + 34000} : \frac{7 \times 36000 + 5 \times 12000}{36000 + 12000} = 6{,}45 : 6{,}50 = 0{,}992$$

Рассчитанное значение индекса указывает на снижение средней цены данного товара на 0,8%, т.е. с 6,50 тыс. руб. до 6,45 тыс. руб. В то же время из приведенной выше таблицы видно, что цена в каждом регионе в 2019 г. по сравнению с 2018 г. возросла. Данное несоответствие объясняется влиянием изменения структуры реализации товаров по регионам: в 2018 г. по более высокой цене 7 тыс. руб. продали товара втрое больше, чем по цене 5 тыс. руб., а в 2019 г. ситуация принципиально изменилась. Иными словами, на динамике средней цены данного товара отразились структурные сдвиги в рассматриваемой совокупности. Оценить воздействие этого фактора можно с помощью **индекса структурных сдвигов:**

$$I^{\text{стр}} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}$$

$$I^{\text{стр}} = \frac{7 \times 10000 + 5 \times 34000}{44000} : \frac{7 \times 36000 + 5 \times 12000}{48000} = 0{,}839$$

Первая формула в этом индексе позволяет ответить на вопрос, какой была бы средняя цена в 2019 г., если бы цены в каждом регионе сохранились на уровне 2018 года. Вторая часть формулы отражает фактическую среднюю цену 2018 г. В целом по значению индекса мы можем сделать вывод, что за счет структурных сдвигов цены снизились на 16,1% (83,9% - 100% = -16,1%).

Последним в данной системе является **индекс цен фиксированного состава,** который не учитывает влияние структуры и рассчитывается по уже известной нам формуле сводного индекса цен по методу Пааше:

$$I_{\text{р}}^{\text{фс}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = 1{,}183$$

Полученное значение индекса позволяет сделать вывод о том, что если бы структура реализации товара «Х» по регионам не изменилась, средняя цена возросла бы па 18,3%. Однако влияние на среднюю цену фактора структурных изменений оказалось сильнее, и в итоге цена даже несколько снизилась. Данное взаимодействие рассматриваемых факторов отражается в следующей взаимосвязи:

$$I_p^{\text{фс}} \times I_p^{cm} = I_p^{nc}$$

$$1{,}183 \times 0{,}839 = 0{,}992$$