ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 1. Алгебра матриц

Глоссарий

1. Матрица.
   Матрицей (числовой) размера m X n называется прямоугольная таблица m X n чисел, состоящая из m и n столбцов.

2. Элементы матриц.
   Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

3. Квадратная матрица.
   Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$, называется квадратной матрицей порядка k, $k = m = n$. При этом числа $a_{11}, a_{22},\ldots, a_{nn}$ - элементы главной диагонали.

4. Нулевая матрица.
   Матрица, все элементы которой равны 0, называется нулевой матрицей.

5. Единичная матрица.
   Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется единичной матрицей.

6. Треугольная матрица.
   Квадратная матрица A_n называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны 0.

7. Трапециевидная матрица.
   Матрица произвольной размерности называется трапециевидной или ступенчатой ,

если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$, где $a_{11}, a_{12},\ldots a_{rn}$ не равны 0.

8. Сложение матриц.

Суммой двух матриц одинакового размера $A_{nxm} = (a_{ij})$ и $B_{nxm} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{nxm} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где i = 1,..., m, j = 1,...,n.

9. Свойства сложения матриц:

- $\mathbf{A_{nXm} + B_{nXm} = B_{nXm} + A_{nXm}}$ – свойство коммутативности или перестановочности сложения матриц.
- $\mathbf{(A_{nXm} + B_{nXm}) + C_{nXm} = A_{nXm} + (B_{nXm} + C_{nXm})}$ – свойство ассоциативности сложения матриц.
- $\mathbf{A_{nXm} + O_{nXm} = A_{nXm}}$ – свойство сложения с нейтральным элементом, а именно с нулевой матрицей того же порядка.
- $\mathbf{A_{nXm} + (-A_{nXm}) = O_{nXm}}$ – свойство сложения с противоположным элементом.

10. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $A_{nxm} = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B_{nxm} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = \alpha \bullet a_{ij}$, где i= 1,...,m, j = 1,...,n.

11. Свойства умножения матрицы на число:

- $\mathbf{1 \bullet A_{nXm} = A_{nXm}}$ – свойство умножения матрицы на число 1.
- $\mathbf{\alpha \bullet (\beta * A_{nXm}) = (\alpha \bullet \beta) \bullet A_{nXm}}$ – свойство ассоциативности относительно умножения чисел.
- $\mathbf{\alpha \bullet (A_{nXm} + B_{nXm}) = \alpha \bullet A_{nXm} + \alpha \bullet B_{nXm}}$ – свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел.
- $\mathbf{(\alpha + \beta) \bullet A_{nXm} = \alpha \bullet A_{nXm} + \beta \bullet A_{nXm}}$ – свойство дистрибутивности умножения на матрицу относительно сложения чисел.

12. Противоположная матрица.

Матрица -1•A называется противоположной матрице A.

13. Произведение матриц.

Произведением матрицы $A_{nxm} = (a_{ij})$ где i = 1,...,m, j = 1,...,n на матрицу $B_{nxk} = (b_{ij})$ где i = 1,...n, j = 1,...k называется матрица $C_{mxk} = (c_{ij})$, такая что $c_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} \bullet b_{s,j}$, i = 1,…,m, j = 1,…,k.

14. Свойства произведения матриц:

- **(A • B) • C = A • (B • C)** – свойство ассоциативности умножения матриц.
- **α • (A • B) = (α • A) • B = A • (α • B)** – свойство выноса числового множителя за знак произведения матриц.
- **(A+ B) • C = A • C + B • C** – свойство дистрибутивности умножения справа относительно сложения матриц.
- **C • (A+ B) = C • A+ C • B** – свойство дистрибутивности умножения слева относительно умножения матриц.

15. Возведение матрицы в степень.

Целой положительной степенью A^m, где m > 1 квадратной матрицы A, называется произведение m матриц, равных A, т.е.:

$A^m = \underbrace{A \bullet A \dots \bullet A}_{m}$

16. Транспонирование матриц.

Переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется транспонированием матрицы A. Например, если

$$A_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{j1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

17. Свойства операции транспонирования:

- **$(A^T)^T$ = A** – матрица, дважды транспонированная, равна исходной матрице.
- **$(αA)^T$ = α • (A^T)** – числовой множитель можно выносить за знак транспонирования.
- **(A+ B)^T = A^T + B^T** - транспонирование суммы матриц есть сумма транспонированных матриц.
- **(A • B)^T = B^T • A^T** - транспонирование произведения матриц есть произведение транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.