ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве

Вопрос 1. Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве задана плоскость π с нормальным вектором $\vec{N}$ и точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка плоскости. Возьмем произвольную точку $P(x, y, z)$ из плоскости π (рис.1).

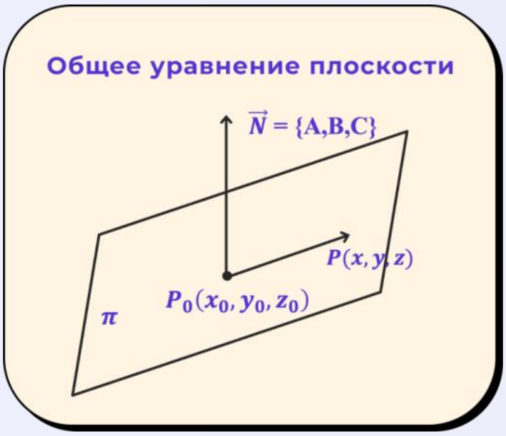


Рис. 1.

Теорема.

Всякая плоскость в пространстве задается у равнением вида $Ax + By + Cz + = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Обрат но: всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, задает плоскость, причем $A, B, C -$ координаты нормального вектора этой плоскости.

Доказательство.

Ясно что точка $P(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{P_0P} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ перпендикулярен вектору $\vec{N}$, а это выполняется тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов $\overrightarrow{P_0P}$ и $\vec{N}$ равно нулю.

$$P(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{P_0P},\vec{N}\right)=0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0$$

Обозначим: $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, получим общее **уравнение плоскости:**

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Уравнение плоскости с данным нормальным вектором, проходящей через заданную точку: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Обратно: Пусть дано у равнение $Ax+By+Cz+D=0$, где $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Если $A\neq 0$, то можно взять $x_0=-\frac{D}{A}, y_0=z_0=0$.

Если $A=0, B\neq 0$, то можно взять $y_0=-\frac{D}{B}, x_0=z_0=0$.

Если $A=B=0$, то $C\neq 0$ и можно взять $z_0=-\frac{D}{C}, x_0=y_0=0$.

Таким образом, существует точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$, удовлетворяющая уравнению. Далее, определим вектор $\vec{N}=\{A,B,C\}$ и возьмем уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, подставим точку P_0, получим $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, вычтем из первого уравнения второе:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow \left(\vec{N},\overrightarrow{P_0P}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N} \Leftrightarrow P\in\pi.\right.$$

Здесь π-плоскость, проходящая через P_0 перпендикулярно вектору $\vec{N}$.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Пусть в пространстве задана плоскость π и точки P_1, P_2, P_3 принадлежат плоскость π. (рис. 2).

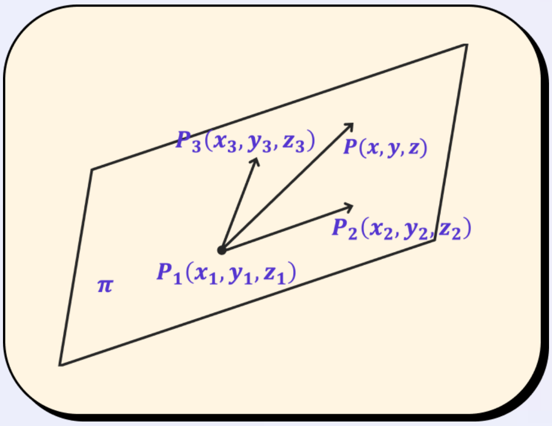


Рис. 2.

Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать координаты нормального вектора. Так как точки P_1, P_2, P_3 принадлежат плоскости π, то векторы $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_3}$ принадлежат плоскости π. Возьмем еще одну произвольную точку P в плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{P_1P}$ лежит в плоскости π. Три вектора $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. $\left(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\right)=0$. Запишем для всех векторов координаты: $\overrightarrow{P_1,P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. $\overrightarrow{P_1,P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{P_1,P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Тогда смешанное произведение в координатной форме будет иметь вид:

$$\left(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\right) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть плоскость π задана общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0, \vec{N} = \{A, B, C\}$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка (рис.2). Найдем расстояние от точки P_1 до плоскости π, для этого опустим перпендикуляр из точки P_1 на плоскость π. Получим точку P_2.

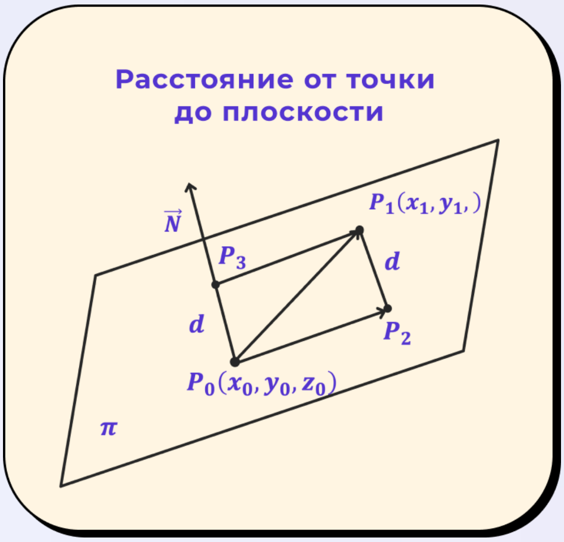


Рис. 3.

Заметим, что $P_0P_2P_1P_3$-прямоугольник. Расстояние от точки P_1 до плоскости π – длина вектра $\overrightarrow{P_2P_1}$ и она равна длине вектора $\overrightarrow{P_0P_3}$.

$$d(P_1, \pi) = \left|\Pi_{\vec{N}}\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{N}\right)\right|}{|\vec{N}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 - A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как точка P_0 принадлежит плоскости π, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, соответстенно, $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Откуда получаем следующую формулу:

$$d(P_1, \pi) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Взаимное расположение двух плоскостей.

1. Условие совпадения плоскостей.

Пусть нам даны две плоскости:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Плоскости совпадают тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнений пропорциональны, т.е. система, состав ленная из уравнений указанных плоскостей имеет бесконечное множество решений.

$$\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N_1} \parallel \vec{N_2} \Leftrightarrow \exists\lambda \in R: \vec{N_1} = \lambda\overrightarrow{N_2} \text{ и } D_1 = \lambda D_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

2. Условие параллельности плоскостей.

Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны.

$$\pi_1 \| \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N_1} \| \vec{N_2} \Leftrightarrow \exists\lambda \in R: \vec{N_1} = \lambda\vec{N_2} \text{ и } D_1 \neq \lambda D_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

3. Условие перпендикулярности плоскостей

Плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны, а это означает, что скалярное проведение нормальных векторов равно нулю.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

4. Угол между плоскостями π_1 и π_2

Определение. Углом между плоскостями π_1 и π_2 называется наименьший из двугранных углов, которые они образуют.

Рассмотрим вид с ребра:

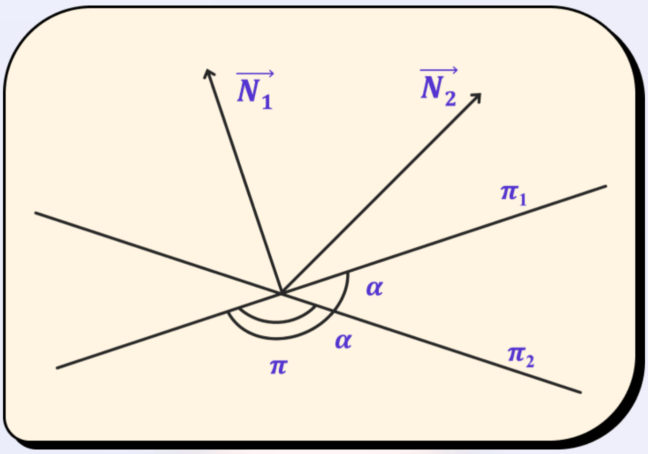


Рис. 4.

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями: $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Здесь векторы нормали $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}, \overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$. рами к этим плоскостям. $\varphi = \left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right)$. Используя формулу скалярного произведения векторов, получим

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Вопрос 2. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Рассмотрим произвольную прямую l (рис.5). Пусть $\vec{l} = \{a, b\} \neq 0 -$ направляющий вектор прямой l (иначе, вектор скорости прямой). Точк а $P_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой l (известная точка прямой, начальная точка).

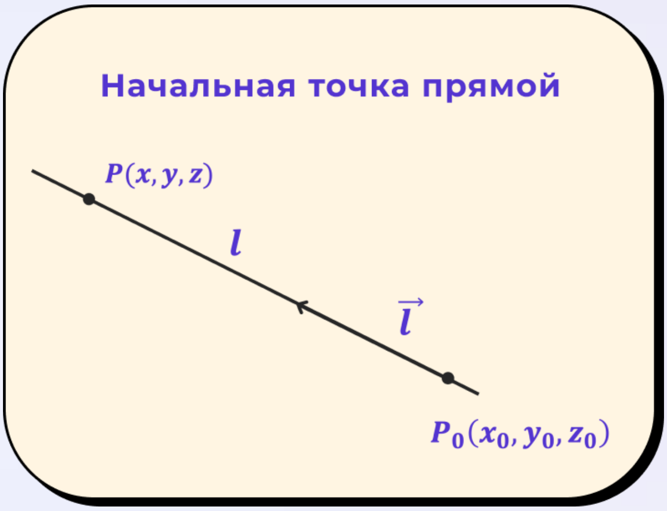


Рис. 5.

Возьмем произвольную точку $P(x, y, z)$ на прямой l. Тогда это означает, что вектор $\overrightarrow{P_0P}$ коллинеарен вектору $\vec{l}$, т.е. существует такое число t, что $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{l}$. Перейдем в координатную форму записи:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a \\ y - y_0 = t \cdot b \\ z - z_0 = t \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z - z_0 = t \cdot c \end{cases}$$

Таким образом, параметрические уравнения прямой записываются по известному вектору направления и известной точке с параметром t следующим образом:

$$\begin{cases} x & = x_0 + t \cdot a \\ y & = y_0 + t \cdot b \\ z & = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой в пространстве.

Из параметрических уравнениях прямой исключим параметр t, получим:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Таким образом, канонические у равнения имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Для канонических уравнений прямой принимают следующие соглашения: если знаменатель равен нулю, то и числитель автоматически равен нулю.

Прямая как пересечение двух плоскостей

Прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей следующим образом.

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями: $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Здесь векторы нормали $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}, \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Две плоскости непараллельны тогда и только тогда, когда их векторы нормали не коллинеарны. Тогда векторное произведение векторов нормали не равно нулю. Тогда плоскости пересекаются и в их пересечении лежит прямая.

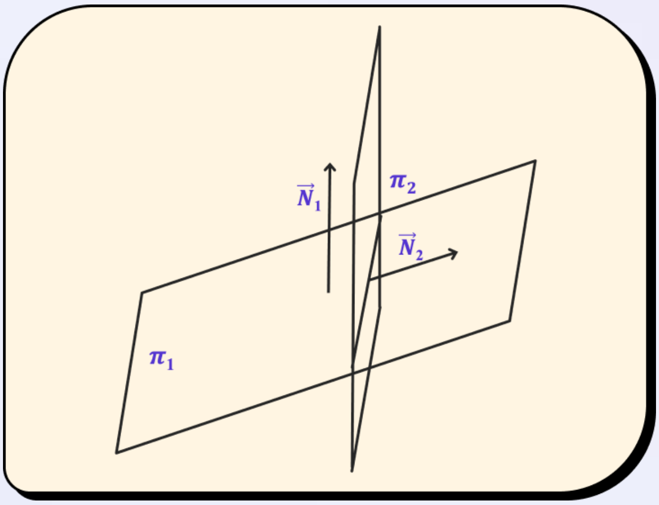


рис. 6.

$$l = \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_1 \nparallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow [\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \neq \{0,0,0\}.$$

Т.е. хотя бы один из трех определителей второго порядка отличен от нуля. Т.е. вектор

$$\vec{l} = [\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}] = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \neq \{0,0,0\}.$$

Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2 \end{cases}$$

В качестве одной переменной возьмем любое число, например, $z_0 = 0$, тогда можем найти решение (x_0, y_0). Применим правило Крамера к системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases},$$

получим:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Зная точку и вектор направления прямой, легко запишем канонические уравнения прямой l.

Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана каноническим уравнением: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \vec{l} = \{a, bc\} -$ направляющий вектор и $P_1(x_1, y_1, z_1)$ - произвольная точка (рис.7). Найдем расстояние от точки P_1 до прямой l, для этого опустим перпендикуляр из точки P_1 на прямую l. И проведем вектор $\overrightarrow{P_0P_1}$. Этот перпендикуляр -высота треугольника. Чтобы ее найти необходимо площадь треугольника разделить на основание. Заметим, ч то треугольник можно достроить до параллелограмма и площадь найти как модуль векторного произведения: $S = \| [\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{l}] \|$.

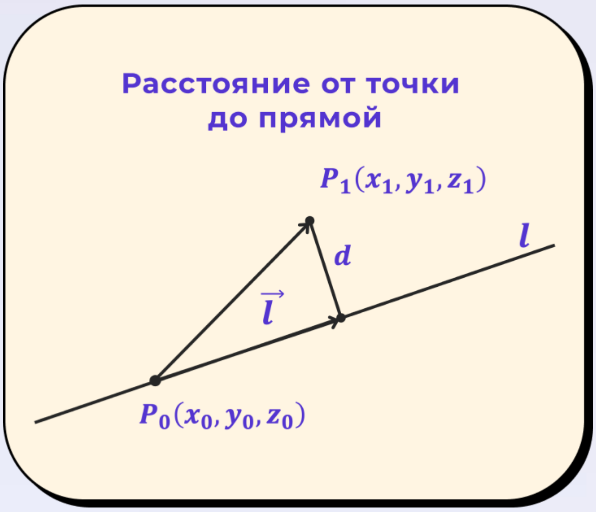


рис. 7.

Таким образом, получаем

$$d(P_1, l) = \frac{S}{|\vec{l}|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{l}\right]\right|}{|\vec{l}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Вопрос 3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть нам дана плоскость, заданная общим уравнением:

$$\pi: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и прямая, заданная каноническим уравнением:

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Прямая может лежать в плоскости, может проходить параллельно плоскости, быть перпендикулярна плоскости или пересекать плоскость под некоторым углом.

1. Условие включения прямой в плоскость.

Прямая лежит в плоскости (рис. 8) тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{l}$ перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}$ плоскости. И все точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. и $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

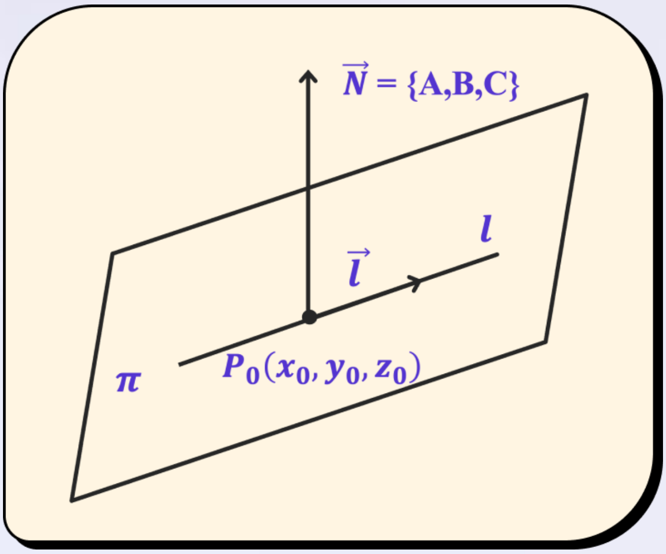


Рис. 8.

$$l \subset \pi \Leftrightarrow \vec{l} \perp \vec{N} \Leftrightarrow (\vec{l},\vec{N}) = 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0 \text{ и}$$
$$P_0 \in \pi \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

2. Условие параллельности прямой и плоскости.

Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{l}$ перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}$ плоскости. И все точки прямой не удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. и $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$.

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{l} \perp \vec{N} \Leftrightarrow (\vec{l},\vec{N}) = 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0\text{u}$$
$$P_0 \in \pi \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости (рис. 9) тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{l}$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{N}$ плоскости.

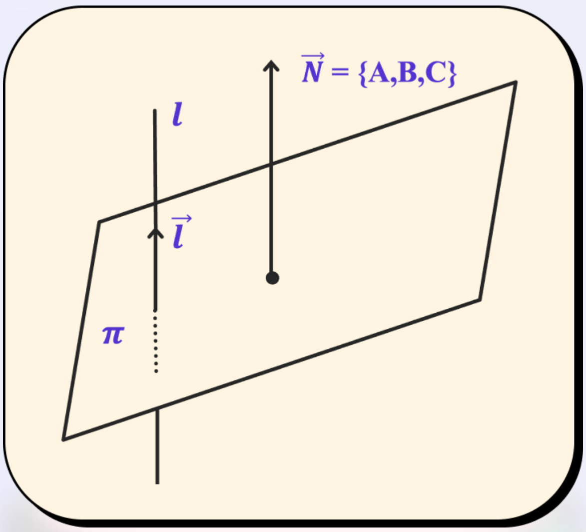


Рис. 9.

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{l} \parallel \vec{N} \Leftrightarrow \exists \lambda \in R : \vec{N} = \lambda \vec{l} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \lambda a \\ B = \lambda b \\ C = \lambda c \end{cases}$$

Выражая λ, получаем условия ортогональности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

4. **Угол между прямой и плоскостью.**

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

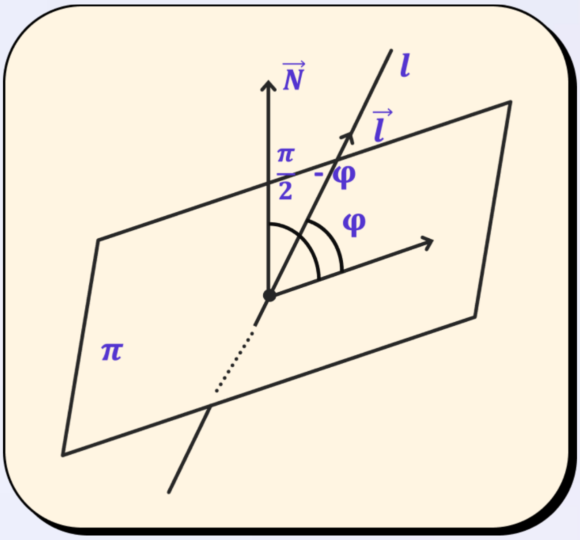


рис. 10.

Обозначим через φ – угол между прямой l и плоскостью π. (рис. 10).

Тогда угол между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости равен $\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.

$$\cos\theta = \frac{(\vec{l}, \vec{N})}{|\vec{l}||\vec{N}|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\sin\varphi| = \frac{|(\vec{l}, \vec{N})|}{|\vec{l}||\vec{N}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Так как по рисунку видим, что угол в первой четверти, поэтому мы берем значение по модулю, так как синус должен быть положительным.

Расстояние от точки прямой до плоскости

Если прямая параллельна плоскости, то можно ввести понятие расстояния от прямой до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости вычисляется как расстояние от любой точки прямой до плоскости. Т.е. в нашем случае.

$$d(l,\pi) = d(P_1,\pi) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Вопрос 4. Взаимное расположение прямых в пространстве

В пространстве две прямы е могут быть параллельными, совпадать, пересекаться под прямым углом или произвольным, лежат в одной плоскости или быть скрещивающимися.
Пусть нам даны две прямые, заданные каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1},$$

Прямая l_1 проходит через точку $P_1(x_1, y_1, z_1)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{l_1} = \{a_1, b_1, c_1\}$

$$l_2: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

Прямая l_2 проходит через точку $P_2(x_2, y_2, z_2)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{l_2} = \{a_2, b_2, c_2\}$.

Условие совпадения или параллельности (аналогично условиям совпадения и параллельности на плоскости):

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ и } \frac{x_2 - x_1}{a_1} = \frac{y_2 - y_1}{b_1} = \frac{z_2 - z_1}{c_1}.$$

$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ и выполняется одно из двух условий

1 $\frac{x_2-x_1}{a_1} \neq \frac{y_2-y_1}{b_1}$ или 2. $\frac{x_2-x_1}{a_1} \neq = \frac{z_2-z_1}{c_1}$.

Условие компланарности

Две прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда их направляющие векторы компланарны. Так как условие компланарности справедливо для трех векторов, то возьмем вектор, соединяющий точку одной прямой с точкой другой, получим: $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{P_1P_2}$- компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие пересечения двух прямые в пространстве

Две прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда они компланарны, но не параллельны и не совпадают. Таким образом,

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ и } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Скрещивающиеся прямые в пространстве

Некомпланарные прямые называются скрещивающимися. l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда смешанное произведение векторов равно нулю: $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

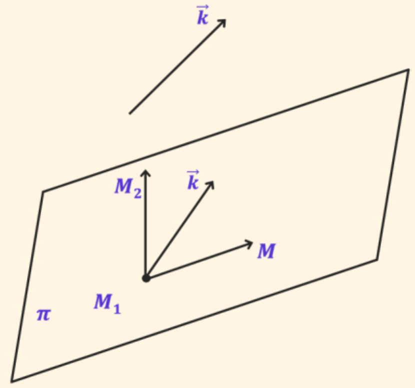
Определение. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между содержащими их параллельными плоскостями. и может быть найдено по формуле:

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right)}{\left|\left[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_1}\right]\right|}.$$

Практические задания

З а д а ч а 1.

Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(-1{,}0{,}5)$ и $M_2(-5,-2{,}1)$.



Р е ш е н и е.

Так как точки M_1 и M_2 принадлежат плоскости (обозначим ее π), то и вектор $\vec{M_1}\vec{M_2} = \{-5-(-1), -2-0{,}1-5\} = \{-4,-2,-4\}$ принадлежит плоскости π. Плоскость проходит параллельно оси Oz, следовательно, вектор $\vec{k} = \{0{,}0{,}1\}$ п ар аллелен плоскости и его можно перенести в плоскость. Причем параллельным переносом можно добиться, чтобы начало вектора $\vec{k}$ совпадало с точкой M_1. Так как координаты векторов $\vec{M_1}\vec{M_2}$ и $\vec{k}$ не пропорциональны, то векторы не коллинеарны. Таким образом, мы будем иметь два неколлинеарных вектор а, лежащих в одной плоскости π.

Так как векторы $\vec{k} \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, то в качестве нормали к плоскости мы можем взять векторное произведение $\vec{N} = [\vec{k}, \vec{M_1}\vec{M_2}]$. Кроме того, возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ в нашей плоскости. И рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x+1, y-0, z-5)$. Тогда векторы $\vec{k}$, $\vec{M_1}\vec{M_2}, \overrightarrow{M_1M}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно и нулю. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по второй строке, получим:

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x+1 & y \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1(-2(x+1)-(-4)y) = 0 \Leftrightarrow 2x+2-4y = 0 \Leftrightarrow 2x-4y+2 = 0.$$

Ответ: уравнение плоскости $\pi 2x-4y+2=0$.

Задача 2.

Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l=\begin{cases}4x-y+3z-6=0\\x+5y-z+10=0\end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $2x-y+5z=5$.

Решение.

Плоскость проходит через прямую l. Это означает, что все точки прямой принадлежат плоскости. И направляющий вектор прямой принадлежит искомой плоскости, найдем его.

$$\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\4&-1&3\\1&5&-1\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}-1&3\\5&-1\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}4&3\\1&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4&-1\\1&5\end{vmatrix}=-14\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+21\vec{k}.$$

Итак, мы имеем вектор $\vec{l}=-14\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+21\vec{k}$, принадлежащий плоскости. Найдем хотя бы одну точку прямой. Для этого решим систему

$$\begin{cases}4x-y+3z-6=0\\x+5y-z+10=0\end{cases}$$

Предыдущие вычисления показали, что все три минора отличны от нуля. Поэтому нам без разницы какой переменной придать значение. Но, например, возьмем $z=0$. Тогда

$$\begin{cases}4x-y=6\\x+5y=-10\end{cases}.$$

Откуда получаем:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&-1\\-10&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&-1\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{20}{21},\ y=\frac{\begin{vmatrix}4&6\\1&-10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&-1\\1&5\end{vmatrix}}=-\frac{46}{21}.$$

Так как плоскость перпендикулярна заданной в условии плоскости $2x-y+5z=5$. То вектор нормали $\vec{N}=\{2,-1,5\}$ параллелен искомой плоскости. Тогда вектор нормали мы можем перенести в плоскость и найти вектор нормали искомой плоскости как векторное произведение векторов $\vec{l}$ и $\vec{N}$.

$$\vec{N}_\pi=[\vec{N},\vec{l}]=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-14&7&21\\2&-1&5\end{vmatrix}=\vec{\imath}(35+21)-\vec{\jmath}(-70-42)+\vec{k}(14-14)=\{56,112,0\}.$$

Тогда уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0 = \left(\frac{20}{21}, -\frac{46}{21}, 0\right)$ с нормальным вектором $\vec{N} = \{56,112,0\}$, будет иметь вид:

$$56\left(x - \frac{20}{21}\right) + 112\left(y + \frac{46}{21}\right) + 0(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 56x + 112y + 192 = 0.$$

Ответ: уравнение искомой плоскости: $56x + 112y + 192 = 0$.

Задача 3.

Составить уравнение медианы $\Delta\, ABC$, проведенной из вершины A, если $A(-2,1,3)$, $B(2,6,1)$, $C(0,2,-1)$.

Решение.

Медиана – это прямая, проходящая из вершины A к середине стороны BC. Т.е. нам нужно найти координаты точки $M -$ середины стороны BC и записать уравнение прямой проходящей, через две заданные точки A и M. Итак, найдем $M -$ середин BC :

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1,4,0).$$

Запишем уравнение:

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-3}{0-3} = \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-3}.$$

Ответ: уравнение прямой l :

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-3}.$$

Задача 4.

Найти точку пересечения плоскости xOy и прямой, проходящей через точки $A(5,0,5)$ і $B(-3,4,1)$.

Решение.

Можно сразу записать, что уравнение плоскости $xOy - z = 0$. Можно формально это показать.

Составим уравнение плоскости, в качестве нормального вектора возьмем вектор $\vec{k} = \{0{,}0{,}1\}$ – направляющий вектор оси Oz и напишем уравнение плоскости, проходящей через начало координат $O(0{,}0{,}0)$.

Получим уравнение плоскости $\pi: 0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow z=0$. Уравнение прямой l :

$$\iota: \frac{x-5}{-3-5} = \frac{y-0}{4-0} = \frac{z-5}{1-5} \Leftrightarrow \frac{x-5}{-8} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-4}.$$

От канонических уравнений прямой перейдем к параметрическим:

$$\begin{cases} x = 5-8t \\ y = 4t \\ z = 5-4t \end{cases}$$

Чтобы найти точку пересечения прямŏ и плоскости, подставим параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, получим:

$$z = 0 \Leftrightarrow 5-4t = 0 \Leftrightarrow -4t = -5 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x = 5-8\cdot\frac{5}{4} \\ y = 4\cdot\frac{5}{4} \\ z = 5-4\cdot\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, точка пересечения имеет координаты: $M(-5{,}5{,}0)$.

Задача 5.

Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2{,}3{,}2\}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a}) = 34$.

Решение.

Так как по условию задачи $\vec{x} \parallel \vec{a}$, то координаты вектора $\vec{x}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{a}$. Обозначим коэффициент пропорциональности k, тогда координаты вектора $\vec{x} = \{2k; 3k; 2k\}$. Вычислим скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{a}) = 2k\cdot 2 + 3k\cdot 3 + 2k\cdot 2 = 17k$. По условию задачи $(\vec{x}, \vec{a}) = 34$, следовательно, $17k = 34$, $k = 2$. Поэтому координаты вектора $\vec{x} = \{4{,}6{,}4\}$.

О т в е т : $\vec{x} = \{4{,}6{,}4\}$.

З а д а ч а 6.

Определить угол между плоскостями $\pi_1\colon 2x - y + 3z + 5 = 0$ и

$$\pi_2\colon \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Р е ш е н и е .

У равнение второй плоскости записано в отрезках, приведем его к общему виду.

$$\pi_2\colon \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1. \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} - 1 = 0.$$

Таким образом имеем

Тогда угол между плоскостями, который равен углу между нормальными векторами, найдем по формуле скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{N_{\pi_1}}, \overrightarrow{N_{\pi_2}}\right)}{\left|\overrightarrow{N_{\pi_1}}\right|\left|\overrightarrow{N_{\pi_2}}\right|} = \frac{2\cdot 1 - 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{7\cdot 6}{2\sqrt{147}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

О т в е т : искомый угол $\varphi = \arccos\frac{3\sqrt{14}}{14}$.