Специальная математика и основы статистики

Множества. Отношения на множествах

Вопрос 1. Логические операции

Дискретная математика имеет дело с совокупностями объектов, называемых множествами, и определенными на них структурами. Элементы этих множеств как правило изолированы друг от друга и геометрически не связаны.
Логика необходима в любой формальной дисциплине и состоит из правил получения обоснованного вывода (заключения).
Стандартными блоками формальной логики являются высказывания. ***Высказыванием*** называется утверждение, которое имеет значение истинности, т.е. может быть истинным (обозначается буквой И) или ложным (обозначается Л).
Например, • земля плоская (обозначим P); • Михаил – врач (обозначим Q); • 29 – простое число (обозначим R).
Используя такие логические операции, как **не, или, и,** можно построить новые, так называемые ***составные высказывания***, компануя более простые. Например,
• (не P) — это высказывание «земля не плоская»;
• (P или Q) — «земля плоская или Михаил – врач»;
• (P и Q) — «земля плоская и Михаил – врач»
Чтобы уметь определять значение истинности составных высказываний, необходимо воспользоваться так называемыми таблицами истинности.
Отрицанием произвольного высказывания P называется высказывание вида (не P), чье истинностное значение строго противоположно значению P:

P	**не P**
И	Л
Л	И

Конъюнкцией или ***логическим умножением*** двух высказываний P и Q называют составное высказывание вида (P и Q). Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе его составные части.

P	Q	P и Q
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией или ***логическим сложением*** двух высказываний P и Q называется составное высказывание (P или Q). Оно истинно, если хотя бы одна из ее составных частей имеет истинное значение.

P	Q	P или Q
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример: Показать, что высказывание (не (P и (не Q))) логически эквивалентно утверждению ((не P) или Q).

Решение. Заполним совместную таблицу истинности для составных высказываний: R = (не (P и (не Q))) и S= ((не P) или Q). Вспомогательные колонки используются для построения обоих выражений из P и Q.

P	Q	не P	не Q	P и (не Q)	R	S
И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание R логически эквивалентно высказыванию S.

■ ■ ■

Составные высказывания, принимающие истинные значения при любых истинностных значениях своих компонент, называются ***тавтологиями***.

Важно изучить еще один тип логического оператора, результатом которого является ***условное высказывание***. Примером такого высказывания является следующее: «если завтра будет суббота, то сегодня — пятница». При определении истинностного значения условного высказывания, необходимо различать фактическую истину и логическую. Рассмотрим высказывание «если P, то Q». В том случае, когда предпосылка P истинна, мы не можем получить логически корректного заключения, если Q ложно. Однако если посылка P ложна, мы имеем логически корректное высказывание и когда Q ложно, и когда оно истинно.

В логике условное высказывание «если P, то Q» (обозначается знаком импликации P⇒Q) принято считать ложным только в том случае, когда предпосылка P истинна, а заключение Q ложно. В любом другом случае оно считается истинным.

P	**Q**	**P⇒Q**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример: Высказывание ((не Q)⇒(не P)) называется ***противоположным*** или ***контрапозитивным*** к высказыванию (P⇒Q). Показать, что ((не Q)⇒(не P)) логически эквивалентно высказыванию (P⇒Q).

Решение. Рассмотрим совместную таблицу истинности

P	**Q**	**не P**	**не Q**	**P⇒Q**	**((не Q)⇒(не P))**
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания, о которых идет речь, логически эквивалентны.

■■■

Логика высказываний применяется к простым декларативным высказываниям, где базисные высказывания – либо истинны, либо ложны. Утверждения, содержащие одну и более переменных, могут быть верными при некоторых значениях переменных и ложными при других.

Предикатом называется утверждение, содержащее переменные, принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных.

Логические операции можно применять и к предикатам. В общем случае истинность составного предиката в конечном счете зависит от значений, входящих в него переменных.

Кроме перечисленных логических операций, существуют логические операторы, называемые ***кванторы***, применение которых к предикатам превращает последние в ложные или истинные высказывания.

Выражения «для всех» и «найдется» («существует») называются кванторами и обозначаются, соответственно, ∀ и ∃.

Пример: Обозначим через P(x) предикат «x – целое число и $x^2 = 16$». Выразите словами высказывание: ∃x : P(x) и определите его истинностное значение.

Решение. Высказывание ∃x : P(x) означает, что найдется целое число x, удовлетворяющее уравнению $x^2 = 16$. Высказывание, конечно, истинно, поскольку уравнение $x^2 = 16$ превращается в верное тождество при x=4. Кроме того, x=-4 – также решение данного уравнения. Однако нам не требуется рассуждать о знаке переменной X, чтобы проверить истинность высказывания ∃x : P(x).

■ ■ ■

Пример: Пусть P(x) – предикат: «x – вещественное число и $x^2 + 1 = 0$». Выразите словами высказывание: ∃x : P(x) и определите его истинностное значение.

Решение. Данное высказывание можно прочитать так: существует вещественное число x, удовлетворяющее уравнению $x^2 + 1 = 0$. Поскольку квадрат любого вещественного числа неотрицателен, т. е. $x^2 \geq 0$, мы получаем, что $x^2 + 1 \geq 1$. Следовательно, утверждение ∃x : P(x) ложно.

■ ■ ■

Отрицание высказывания из последнего примера записывается в следующем виде: не ∃x : P(x).

Для общего предиката P{x) есть следующие логические эквивалентности:

не ∃x : P(x) ⇔ ∀x не P(x)

не ∀x P(x) ⇔ ∃x : P(x)

При доказательстве теорем применяется логическая аргументация. Существует несколько стандартных типов доказательств, включающих следующие:

1. Прямое рассуждение. Предполагаем, что высказывание P истинно и показываем справедливость Q. Такой способ доказательства исключает ситуацию, когда P истинно, а Q – ложно, поскольку именно в этом и только в этом случае импликация (P⇒Q) принимает ложное значение.

2. Обратное рассуждение. Предполагаем, что высказывание Q ложно и показываем ошибочность P. То есть, фактически, прямым способом проверяем истинность импликации ((не Q)⇒(не P)), что логически эквивалентно истинности исходного утверждения (P⇒Q).

3. Метод «от противного». Предположив, что высказывание P истинно, а Q ложно, используя аргументированное рассуждение, получаем противоречие. Этот способ опять-таки основан на том, что импликация (P⇒Q) принимает ложное значение только тогда, когда P истинно, а Q ложно.

4. Принцип математической индукции. Пусть P(n) – предикат, определенный для всех натуральных чисел n. Предположим, что 1. P(1) истинно и 2. $\forall k \geq 1$ импликация $(P(k) \Longrightarrow P(k+1))$ верна. Тогда P(n) истинно при любом натуральном значении n.

Пример: Докажите по индукции, что равенство $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ выполнено при всех натуральных n.

Решение. Пусть P(n) – предикат $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

В случае n=1 левая часть равенства – просто 1, а вычисляя правую часть, получаем $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Следовательно, P(1) истинно.

Предположим теперь, что равенство $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ 2 имеет место для какого-то натурального числа k. Тогда

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{1}{2}\big(k(k+1) + 2(k+1)\big)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Таким образом, при любом натуральном к импликация $(P(k) \Longrightarrow P(k+1))$ справедлива. Значит, по принципу математической индукции, предикат P(n) имеет истинное значение при всех натуральных n.

■■■

Вопрос 2. Теория множеств

Множество – это совокупность объектов, называемых ***элементами множества***.

Элементы каждого множества заключаются в фигурные скобки, а сами множества обычно обозначаются латинскими буквами.

В общем случае запись $a \in S$ означает, что объект a – элемент множества S. Часто говорят, что ***a принадлежит множеству S***. Если объект a не принадлежит S, то пишут: $a \notin S$.

Для описания множества, состоящего из элементов x, для которых предикат P(x) имеет истинное значение, используется запись $S = \{x : P(x)\}$.

Некоторые множества чисел столь часто используются, что имеют стандартные названия и обозначения.

$\emptyset$ – пустое множество;

$N = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \{\frac{p}{q} : \ p, q \in Z, q \neq 0\}$ – множество рациональных чисел;

R – множество вещественных чисел.

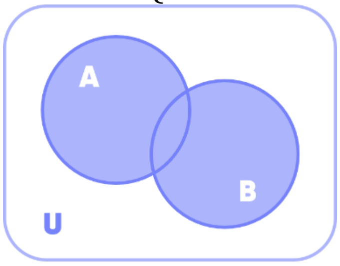
С целью конструирования нового множества из двух данных вводятся понятия ***операций на множествах***.

Говорят, что множество A является ***подмножеством*** множества S, если каждый его элемент автоматически является элементом множества S. Довольно часто при этом говорят, что множество A ***содержится в множестве S***. Этот факт обозначают так: $A \subset S$.

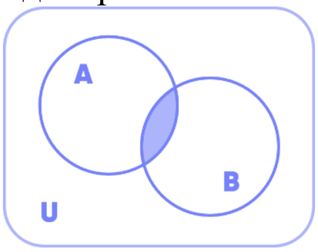
Два множества считаются ***равными***, если каждое из них содержится в другом. Поэтому для доказательства равенства множеств нам нужно показать, что они состоят из одних и тех же элементов. На формальном языке для равенства множеств A = B необходимо проверить истинность двух импликаций: $\{x \in A \Longrightarrow x \in B\}$ и $\{x \in B \Longrightarrow x \in A\}$.

Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат либо множеству A, либо множеству B:

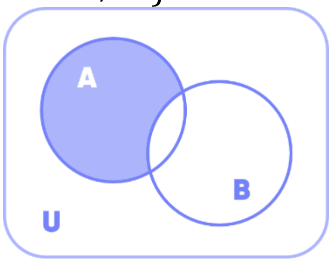
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.



Пересечением двух множеств A и B называется множество состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

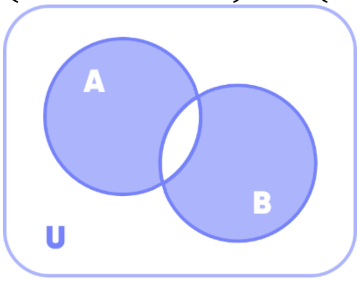


Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат B: $A \backslash B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.



Если мы оперируем подмножествами некоего большого множества U, мы называем его ***универсальным множеством*** для данной задачи.

Симметрической разностью двух множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов универсального множества, которые либо принадлежат A и не принадлежат B, либо наоборот, принадлежат B, но не A: $A\Delta B = \{x : (x \in A \text{ и } x \notin \mathrm{B}) \text{или} (x \in B \text{ и } x \notin \mathrm{A})\}$.



Пример: Пусть A=\{1, 3, 5, 7\}; B=\{2, 4, 6, 8\}; C=\{1, 2, 3, 4, 5\}.
Найдите $A \cup C$, $B \cap C$, $A \backslash C$ и $B \Delta C$.

Решение.
$A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 2, 4\}$;
$B \cap C = \{2, 4\}$;
$A \setminus C = \{7\}$
$B \Delta C = (B \setminus C) u (C \setminus B) = \{6, 8\} \cup \{1, 3, 5\} = \{6, 8, 1, 3, 5\}$.
■ ■ ■
Соответствияя между операциями на множествах и логическими операциями над предикатами задаются следующей таблицей

Операции над множествами	Логические операции
–	не
∪	или
∩	и
⊂	⇒

Пример: Докажите, что для любых множеств А и В имеет место соотношение: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Решение.

$$\overline{(A \cap B)} = \{x : x \notin (A \cap B)\} = \{x : \text{не}\,(x \in (A \cap B))\} = \{x : \text{не}\,((x \in A)\text{и}(x \in B))\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{x : (x \notin A)\text{или}(x \notin B)\} = \{x : (\text{не}(x \in A))\text{или}(\text{не}(x \in B))\}$$

Сравнивая таблицы истинности, легко установить логическую эквивалентность составных предикатов: (не (Р и Q)) и ((не Р) или (не Q)), где Р и Q – простые высказывания.
Опираясь теперь на соответствие между логическими операциями и операциями над множествами, можно увидеть, что предикат (не (Р и Q)) соответствует множеству $\overline{(A \cap B)}$, а ((не Р) или (не Q)) – множеству $\overline{A} \cup \overline{B}$.
Следовательно, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
■ ■ ■
Законы алгебры множеств

Законы ассоциативности	
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Законы коммутативности	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Законы тождества	
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Законы идемпотентности	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

Законы дистрибутивности	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Законы дополнения	
$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = U$
$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
Законы де Моргана	
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Мощностью конечного множества S называется число его элементов. Она обозначается символом $|S|$.

Теорема (формула включений и исключений) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Пример: Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности, и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

Решение. Введем обозначения.

A = {студенты, слушающие курс бухгалтерии};

B = {студенты, слушающие курс коммерческой деятельности}.

Тогда $|A| = 16,\ |B| = 37,\ |A \cap B| = 5$

Поэтому, $|A \cup B| = 16 + 37 - 5 = 48$

Следовательно, 63 – 48 = 15 студентов не посещают дополнительных курсов.

■ ■ ■

Формула для подсчета мощности объединения двух множеств может быть обобщена на произвольное число множеств.

Упорядоченной парой называется запись вида (a, b), где a – элемент некоторого множества A, а b – элемент множества B. Множество всех таких упорядоченных пар называется ***декартовым*** или ***прямым произведением*** множеств A и B и обозначается $A \times B$: $A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Пример: Пусть A={x, y} и B={1, 2, 3}. Найдите декартовы произведения: $A \times B$, $B \times A$ и $B \times B$.

Решение. Прямым произведением $A \times B$ является множество $\{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

Прямое произведение $B \times A$ имеет вид $\{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}$.

Заметим, что множества $A \times B$ *и* $B \times A$ различны!

Прямым произведением $B \times B$ служит множество $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

■■■

Прямое произведение множества R вещественных чисел на само себя $R \times R$ или R^2, как его часто обозначают, состоит из всех упорядоченных пар вещественных чисел (x, *y).* Их можно представлять себе как координаты точек на плоскости. Множество R^2 называется ***декартовой плоскостью***.

Декартовым произведением произвольного числа множеств $A_1, \dots, A_n$ называется множество $A_1 \times \dots \times A_2 = \{(a_1, \dots, a_n): a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$. Элементы этого множества – *конечные упорядоченные наборы.*

Бинарным отношением между множествами *A* и *B* называется подмножество

R прямого произведения $A \times B$. *В* том случае, когда *A = B,* мы говорим просто об ***отношении*** *R* на *A*.

Пример: Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям на множествах $A = \{1,3,5,7\}$ и $B = \{2,4,6\}$:

а) $U = \{(x, y): x + y = 9\}$

б) $V = \{(x, y): x < y\}$

Решение.

А) U состоит из пар: (3,6), (5,4) и (7,2)

Б) $V = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,4), (3,6), (5,6)\}$

■■■

Способ задания бинарного отношения на конечных множествах основан на использовании таблиц. Предположим, что мы хотим определить бинарное отношение *R* между множествами *A* и *B*. *Н*еобходимо обозначить элементы множеств и выписать их в каком-нибудь порядке. Сделаем это так: $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$.

Для определения отношения *R* заполним таблицу *M* с *n* строками и *m* столбцами. Строки «перенумеруем» элементами множества А, а столбцы – элементами множества *B* в соответствии с порядком, в котором мы выписали элементы. Ячейку таблицы, стоящую на пересечении i-той строки и j-того столбца будем обозначать через M(i, j), а заполнять ее будем следующим образом: $M(i, j) = \text{И}, \text{если } (a_i, b_j) \in R$ и $M(i, j) = \text{Л}, \text{если } (a_i, b_j) \notin R$.

Такого сорта таблицы называются ***n* × *m* матрицами**.

В этих терминах, отношение *U* из последнего примера с помощью матрицы задается следующим образом:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \end{matrix} & \begin{bmatrix} Л & Л & Л \\ Л & Л & И \\ Л & И & Л \\ И & Л & Л \end{bmatrix} \end{array}$$

Чтобы лучше понять такой способ задания отношений, мы явно пометили столбцы и строки матрицы. В общем случае это делать не обязательно.

Если R – бинарное отношение, то вместо записи $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in R$ можно употреблять обозначение *xRy*.

Говорят, что отношение R на множестве А:

Рефлексивно: если $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \ xRx$ (в терминах упорядоченных пар: $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \ (\mathrm{x}, \mathrm{x}) \in R$);

Симметрично: если *xRy* ⇒ *yRx* для каждой пары *x* и *y* из А (в терминах упорядоченных пар: $(\mathrm{x}, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$);

Кососимметрично: если (*xRy* и *yRx* ⇒ *x* = *y)* для всех *x* и *y* из А (в терминах упорядоченных пар: $(\mathrm{x}, y) \in R$ и $(y, x) \in R \Longrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$);

Транзитивно: если *{xRy и yR z ⇒ xRz) для* любой тройки элементов *x,y,z* из А $(\mathrm{x}, y) \in R, (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$

Перечислим свойства матриц, задающих отношения:

1) матрица отношения на отдельном множестве *A* будет квадратной, т.е. количество ее строк будет равно количеству столбцов;

2) у матрицы М, задающей рефлексивное отношение, элементы главной диагонали (М(i, i)), равны И;

3) матрица *M* симметричного отношения будет симметричной, т.е. M(i,j)=M(j,i);

4) в матрице кососимметричного отношения выполнено условие: $(M(i, j) = \text{И} \text{ и } i \neq j) \Longrightarrow M(i, j) = \text{Л}$

Если отношение *R* на множестве *A* не обладает тем или иным свойством, то его стоит попытаться продолжить до отношения R*, которое будет иметь нужное свойство. Под «***продолжением***» мы понимаем присоединение некоторых упорядоченных пар к подмножеству $R \subset A \times A$ так, что новое полученное множество *R** уже будет обладать требуемым свойством. Ясно, что исходное множество *R* будет подмножеством в R*. В том случае, если вновь построенное множество R* будет минимальным среди всех расширений *R с* выделенным свойством, то говорят, что *R** является ***замыканием*** *R* относительно данного свойства.

Более строго, *R** называется ***замыканием отношения*** *R* относительно свойства Р, если 1. R* обладает свойством Р; 2. R⊂R*; 3. R* является подмножеством любого другого отношения, содержащего *R* и обладающего свойством *P*.

Пример: Пусть A = {1, 2, 3}, а отношение R на A задано упорядоченными

парами: R={(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3)}. Оно не рефлексивно, не симметрично и не транзитивно. Найдите соответствующие замыкания.

Решение. Замыкание относительно рефлексивности должно содержать все пары вида (x, x). Поэтому, искомое замыкание имеет вид: R* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (2, 2), (3, 3)}, где добавленные пары отделены от исходных точкой с запятой.

Замыкание относительно симметричности должно содержать все пары, симметричные исходным. Значит, R^* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (2, 1), (3, 2)}.

Чтобы найти замыкание относительно транзитивности, необходимо выполнить несколько шагов. Так как R содержит пары (3, 1) и (1, 2), замыкание обязано включать в себя и пару (3, 2). Аналогично, пары (2, 3) и (3, 1) добавляют пару (2, 1), а пары (3, 1) и (1, 3) – пару (3, 3).

Добавим сначала эти пары: R^* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (3, 2), (2, 1), (3, 3)}.

Теперь у нас возникло сочетание (2, 1) и (1, 2). Стало быть, замыкание R^* должно содержать пару (2, 2). Теперь можно увидеть, что все необходимые пары мы добавили (хотя бы потому, что перебрали все пары из A^2). Следовательно, R^* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3); (3, 2), (2, 1), (3, 3), (2, 2)}.

■ ■ ■

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение на множестве *A* называется ***отношением эквивалентности***. Отношение эквивалентности в некотором смысле обобщает понятие равенства.

Эквивалентные элементы (т. е. находящиеся в отношении эквивалентности), как правило, обладают какими-то общими признаками.

Если на множестве задано отношение эквивалентности, то все его элементы можно естественным способом разбить на непересекающиеся подмножества, которые называются ***классы***. Все элементы в любом из таких подмножеств эквивалентны друг другу.

Разбиением множества *A* называется совокупность непустых подмножеств

$A_1, \dots, A_n$ множества A, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) $A = A_1 \cup \dots \cup \mathrm{A_n}$; 2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Подмножества *Ai* называются ***блоками разбиения***.

Рефлексивное, транзитивное, но кососимметричное отношение R на множестве *A* называется ***частичным порядком***.

Множества с частичным порядком принято называть ***частично упорядоченными множествами***.

Если *R* – отношение частичного порядка на множестве А, то при $x \neq y$ и *xRy* мы называем ***х предшествующим элементом*** или ***предшественником***, а у – ***последующим***.
У произвольно взятого элемента *y* может быть много предшествующих элементов. Однако если *x* предшествует *y*, и не существует таких элементов z, для которых *xRz* и *zRy*, мы называем *x* ***непосредственным предшественником*** *y* и пишем $x \prec y$.
Линейным порядком на множестве *A* называется отношение частичного порядка, при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий.

Вопрос 3. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций (наборов), подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.
Из конечного множества $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, состоящего из n различных элементов, можно образовывать различные наборы, состоящие из m $(m \leq n)$ элементов.
Перестановками из n различных элементов называются наборы, содержащие по n элементов и отличающиеся только порядком их расположения (упорядоченные наборы без повторений из n элементов по n).
Число всех таких перестановок обозначают Р и определяют по формуле: $\mathrm{P} = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ (n-факториал)
Конечное множество называется ***упорядоченным***, если его элементы перенумерованы некоторым образом. Каждое упорядочение заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – номер 2, …, какой-то номер – n.
Номер 1 может получить любой элемент множества Е; значит, выбор первого элемента можно произвести n способами. Если первый элемент выбран, то на второе место остается лишь (n-1) кандидат, так как повторить сделанный выбор нельзя. Третий элемент можно выбрать (n-2) способами и т.д. Последний элемент можно выбрать лишь одним способом, он и займет n-е
место.
Общее число способов упорядочения равно: $n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 1 = n! \to P_n = n!$
Здесь мы воспользовались ***правилом произведения***: если элемент х можно
выбрать m способами, а элемент у можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (х,у) можно выбрать m· n способами.
Пример: Сколькими способами можно трех студентов рассадить на трех стульях?
Решение. Искомое число: $\mathrm{P}_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

■ ■ ■

Размещениями называются наборы из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком
(упорядоченные наборы без повторений из n элементов по m). Число всех
размещений равно: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m-1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

Пример: Сколькими способами из 7 студентов группы можно отобрать для участия в олимпиадах по математике и физике по одному студенту.

Решение. $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$

■ ■ ■

Сочетаниями называются наборы, составленные из n различных элементов
по m (неупорядоченные наборы без повторений из n элементов по m). Их число обозначается C_n^m. Так как каждый набор можно упорядочить $P_m = m!$
способами, то имеем $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$, откуда получаем $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример: Сколькими способами из 6 студентов можно отобрать для участия в соревнованиях 2 студента?

Решение. $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15$

■ ■ ■

Для чисел C_n^m, называемых также ***биномиальными коэффициентами***, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при
решении задач.

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (свойства симметрии)
2. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$, $C_n^0 = 1$ (рекуррентное соотношение)
3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (следствие бинома Ньютона).

Если выбор m элементов из n различных элементов производится с возвращением (отобранный элемент возвращается в исходное множество и
может быть снова выбран – схема выбора с возвращением) и с упорядочиванием, то различные наборы будут с повторениями, отличаясь либо составом элементов, либо порядком их следования. Получаемые в результате комбинации называются ***размещениями с повторениями***, а их общее число определяется формулой $\bar{A}_n^m = n^m$

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число ***перестановок с повторениями*** определяются формулой $P_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$, где $n_1 + \dots + n_k = n$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m равно числу сочетаний без повторений из n+m-1 элементов по m элементов, т.е. $(C_n^m)_{\text{с повт}} = C_{n+m-1}^m$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.
Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно m+n способами.
Правило произведения. Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может
быть выбрана m· n способами.
Пример: Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?
Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями: при k=2, n1=3, n2=3, n=6 получаем $P(3;3) = \frac{6!}{3!3!} = 2$