ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 2. Теория определителей

Глоссарий

1. Определитель матрицы первого порядка.

Определителем матрицы первого порядка A = (a_{11}) или определителем первого порядка, называется элемент a11, который обозначается следующим образом:

$$\Delta_1 = |A| = \det A = a_{11}.$$

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

2. Определитель матрицы второго порядка.

Определителем матрицы второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$$

3. Определитель матрицы третьего порядка.

Определителем матрицы третьего порядка A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} \bullet a_{33} + a_{21} \bullet a_{32} \bullet a_{13} + a_{12} \bullet a_{23} \bullet$$

$$\bullet\, a_{31} - (a_{13} \bullet a_{22} \bullet a_{31} + a_{23} \bullet a_{32} \bullet a_{11} + a_{12} \bullet a_{21} \bullet a_{33})$$

4. Определитель матрицы A порядка n.

Определителем матрицы An-го порядка называется алгебраическая сумма n! произведений n-го порядка элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы.

5. Минор элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A называется определитель матрицы (n - 1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

6. Алгебраическое дополнение.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A_n называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$ т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bullet M_{ij}$.

7. Теорема Лапласа.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

8. Свойства определителя:

- определитель матрицы, полученной из данной матрицы транспонированием, равен определителю данной матрицы.
  $|A^T| = |A|$;
- если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0;
- если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число k, то ее определитель умножится на это число k;
- при перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный;
- если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0;
- если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то определитель этой матрицы равен 0;
- сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0;
- определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число;
- сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, ..., b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, ..., b_n$;
- определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей. Если $C = A \bullet B$, то $|C| = |A| \bullet |B|$. *Замечание:* если $A \bullet B \neq B \bullet A$,

то $|A \bullet B| = |B \bullet A|$.

9. Невырожденная матрица.

Матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от 0. Только для невырожденной квадратной матрицы A вводится понятие обратной матрицы.

10. Обратная матрица.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную и справа, и слева получается единичная матрица. $A^{-1} \bullet A = A \bullet A^{-1} = E$.

11. Теорема необходимого и достаточного условия существования обратной матрицы.

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденна.

12. Ранг матрицы.

Рангом матрицы $A_{m \times n}$ называется число r(A), равное наивысшему порядку минора этой матрицы, отличному от 0. Если все миноры матрицы $A_{m \times n}$ равны 0, то ранг матрицы равен 0, т.е. r(A) = 0.

13. Свойства ранга матрицы.

- $r(A) \leq \min(m, n)$;
- $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- пусть A_n — квадратная матрица порядка n, тогда $r(A) = n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ A — невырожденная. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.

14. Базисный минор матрицы.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от 0 минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы, на которых расположен базисный минор, называются базисными.

15. Теорема о базисном миноре.

Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Всякая небазисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).