ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Вопрос 1. Определение матрицы. Разновидности матриц.

Матрицей (числовой) размера m X n называется прямоугольная таблица m X n чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Обозначают матрицы заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., а элементы матрицы обозначают строчными буквами с индексом: a_{ij}, здесь I – номер строки, j – номер столбца. В общем виде матрицу можно записать следующим образом:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или в сокращенном виде: A = (a_{ij}), где i = 1,...,m, j = 1,...,n.

Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае. В те времена матрицы назывались «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений, т.е. уравнений, в которых полная степень составляющих его многочленов равна 1.

Также «волшебные квадраты» были известны чуть позднее у арабских математиков. Примерно тогда появился принцип сложения матриц.

После развития теории определителей в конце XVII века Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в XVIII столетии. Он опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса» для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теория матриц начала своё существование в середине XX века, в работах Уильяма

Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат ученым Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу.

Термин «матрица» ввел английский математик Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. m = n, называется квадратной матрицей порядка k, k = m = n.

При этом, числа a_{11}, a_{22},..., a_{ij} – элементы главной диагонали.

Например

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 0.5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$ – это **матрица размера, 2 х 3**

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ – это **матрица размера 3 х 3** или **квадратная матрица порядка 3.**

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Например:

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ – это **нулевая матрица** размера m х n.

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется единичной матрицей.

Например

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – это единичная матрица 3-его порядка.

Квадратная матрица A_n называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

При этом матрицу вида

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - называют **верхней треугольной**.

А матрицу вида

$$\mathbf{B_n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - называют **нижней треугольной**.

Матрица произвольной размерности называется трапециевидной или ступенчатой, если она имеет вид:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ где a_{11}, a_{12},… a_{rn} не равны нулю.

Вопрос 2. Линейные операции над матрицами.

1. Сложение матриц

Суммой двух матриц одинакового размера $A_{mXn} = (a_{ij})$ и $B_{mXn} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{mXn} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где i = 1,…, m, а j = 1,…,n.

Т.е. элементы итоговой матрицы С получаются как сумма соответствующих элементов матрицы А и матрицы В.

Например:

$$\mathbf{A}_{2\times3}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B}_{2\times3}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда их сумма:

$$\mathbf{C}_{2\times3} = \mathbf{A}_{2\times3} + \mathbf{B}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1+(-3) & -4+0 & 0+2 \\ 5+1 & 3+0 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{nXm} = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B_{nXm} = (b_{ij})$, такая, что $b_{ij} = \alpha \bullet a_{ij}$, где i= 1,…m, j = 1,…,n.

Т.е. элементы итоговой матрицы получаются как произведение соответствующих элементов матрицы А на число α. Например:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Данная матрица умножается на α = - 4. Тогда их произведение равно:

$$B_{2\times3} = \alpha \bullet A_{2\times3} = -4 \bullet \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 0 \\ -20 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число

Допустим, A_{nXm}, B_{nXm}, C_{nXm} – это матрицы, O_{nXm} – нулевая матрица, а α и β – числа. Тогда:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$C_{m\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда

$A_{mXn} + B_{mXn} = B_{mXn} + A_{mXn}$ – это свойство коммутативности или перестановочности сложения матриц.

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Заметим, что элементы матриц – числа, а числа перестановочны, поэтому получаем:

$$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B_{m\times n} + A_{m\times n}.$$

Что и требовалось доказать.

(A_{mXn} + B_{mXn}) + C_{mXn} = A_{mXn} + (B_{mXn} + C_{mXn}) – это свойство ассоциативности сложения матриц.

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})+c_{1n} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} & \cdots & (a_{2n}+b_{2n})+c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1}+b_{m1})+c_{m1} & (a_{m2}+b_{m2})+c_{m2} & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})+c_{mn} \end{pmatrix}$$

Так как закон ассоциативности для чисел справедлив, то будем иметь следующее:

$$\begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) & \cdots & a_{1n}+(b_{1n}+c_{1n}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) & \cdots & a_{2n}+(b_{2n}+c_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+(b_{m1}+c_{m1}) & a_{m2}+(b_{m2}+c_{m2}) & \cdots & a_{mn}+(b_{mn}+c_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_{11}+c_{11}) & (b_{12}+c_{12}) & \cdots & (b_{1n}+c_{1n}) \\ (b_{21}+c_{21}) & (b_{22}+c_{22}) & \cdots & (b_{2n}+c_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (b_{m1}+c_{m1}) & (b_{m2}+c_{m2}) & \cdots & (b_{mn}+c_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$= A_{m\times n} + (B_{m\times n} + C_{m\times n}).$$

Что и требовалось доказать.

A_{mXn} + O_{mXn} = A_{mXn} – это свойство сложения с нейтральным элементом, а именно с нулевой матрицей того же порядка.

$$A_{m\times n} + O_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & \cdots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & \cdots & a_{2n}+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+0 & a_{m2}+0 & \cdots & a_{mn}+0 \end{pmatrix} =$$

Из свойств рациональных чисел известно, что сумма числа и нуля – снова число, сложение чисел перестановочно, поэтому получаем следующее:

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} & \cdots & 0+a_{1n} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} & \cdots & 0+a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0+a_{m1} & 0+a_{m2} & \cdots & 0+a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = O_{m\times n} + A_{m\times n}.$$

Что и требовалось доказать.

A_{mXn} + (- A_{mXn}) = O_{mXn} – это свойство сложения с противоположным элементом.

$$A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} & \cdots & a_{1n}-a_{1n} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}a_{22} & \cdots & a_{2n}-a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}a_{m1} & a_{m2}-a_{m2} & \cdots & a_{mn}-a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = O_{m\times n}$$

Так как сложение матриц перестановочно, то (– **A_{mXn}**) + **A_{mXn}**=O_{mXn} тоже справедливо.

1• A_{mXn} = A_{mXn} – это свойство умножения матрицы на число 1.

α •(β • A_{mXn}) = (α • β) • A_{mXn} – это свойство ассоциативности относительно умножения чисел.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A_{m\times n}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta\cdot a_{11} & \beta\cdot a_{12} & \cdots & \beta\cdot a_{1n} \\ \beta\cdot a_{21} & \beta\cdot a_{22} & \cdots & \beta\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta\cdot a_{m1} & \beta\cdot a_{m2} & \cdots & \beta\cdot a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\cdot\beta\cdot a_{11} & \alpha\cdot\beta\cdot a_{12} & \cdots & \alpha\cdot\beta\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot\beta\cdot a_{21} & \alpha\cdot\beta\cdot a_{22} & \cdots & \alpha\cdot\beta\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot\beta\cdot a_{m1} & \alpha\cdot\beta\cdot a_{m2} & \cdots & \alpha\cdot\beta\cdot a_{mn} \end{pmatrix} =$$

Заметим, что **α • β** – число, общий множитель, который можно вынести на знак матрицы.

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha\cdot\beta)\cdot A_{m\times n}.$$

Что и требовалось доказать.

α • (A_{mXn} + B_{mXn}) = α • A_{mXn} + α • B_{mXn} – это свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения матриц.

$$\alpha \cdot (A_{m\times n} + B_{m\times n}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}+b_{11}) & \alpha(a_{12}+b_{12}) & \cdots & \alpha(a_{1n}+b_{1n}) \\ \alpha(a_{21}+b_{21}) & \alpha(a_{22}+b_{22}) & \cdots & \alpha(a_{2n}+b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha(a_{m1}+b_{m1}) & \alpha(a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & \alpha(a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Так как умножение чисел дистрибутивно, получаем:

$$\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11}+\alpha\cdot b_{11} & \alpha\cdot a_{12}+\alpha\cdot b_{12} & \cdots & \alpha\cdot a_{1n}+\alpha\cdot b_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21}+\alpha\cdot b_{21} & \alpha\cdot a_{22}+\alpha\cdot b_{22} & \cdots & \alpha\cdot a_{2n}+\alpha\cdot b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1}+\alpha\cdot b_{m1} & \alpha\cdot a_{12}+\alpha\cdot b_{12} & \cdots & \alpha\cdot a_{mn}+\alpha\cdot b_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда как матрица суммы равна сумме матриц, то имеем:

$$\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11}+\alpha\cdot a_{12} & \cdots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21}+\alpha\cdot a_{22} & \cdots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1}+\alpha\cdot a_{m2} & \cdots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\cdot b_{11}+\alpha\cdot b_{12} & \cdots & \alpha\cdot b_{1n} \\ \alpha\cdot b_{21}+\alpha\cdot b_{22} & \cdots & \alpha\cdot b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot b_{m1}+\alpha\cdot b_{m2} & \cdots & \alpha\cdot b_{mn} \end{pmatrix} =$$

Вынесем общий множитель за знак матрицы, получим:

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \alpha \cdot A_{m\times n} + \alpha \cdot B_{m\times n}.$$

Что и требовалось доказать.

$(\alpha + \beta) \bullet A_{mXn} = \alpha \bullet A_{mXn} + \beta \bullet A_{mXn}$. – это свойство дистрибутивности умножения на матрицу относительно сложения чисел.

Замечания:

Замечание 1. Матрица -1•A называется противоположной матрице А.

Замечание 2. Разность матриц $A_{mXn} – B_{mXn}$ можно определить следующим образом:

$$A_{mXn} – B_{mXn} = A_{mXn} + (- B_{mXn})$$

Т.е. разностью матриц А и В называется сумма матрицы А с матрицей, противоположной матрице В.

Замечание 3. Если к квадратной матрице А необходимо прибавить число 0, то нужно к квадратной матрице А добавить диагональную матрицу того же размера, что матрица А, в которой диагональные элементы есть α.

$$A_{n\times n} + \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\alpha \end{pmatrix}$$

4. Умножение матрицы на матрицу

Матрицу А будем называть согласованной с матрицей В, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Однако из согласованности матрицы А с матрицей В не следует согласованность матрицы В с матрицей А. Но если А и В – квадратные матрицы одинакового порядка, то если матрица А согласована с матрицей В, то матрица В согласована с матрицей А.

Произведение матрицы А на матрицу В вводится только в том случае, когда матрица А согласована с матрицей В.

Произведением матрицы $A_{mXn} = (a_{ij})$ где i = 1,…,m, j = 1,…,n на матрицу $B_{nXk} = (b_{ij})$ где i = 1,…n, j = 1,…k называется матрица $C_{mXk} = (c_{ij})$, такая, что

$$c_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} \bullet b_{s,j},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,k.$$

То есть, чтобы получить элемент матрицы С, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, нужно элементы i-ой строки матрицы А умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В и полученные произведения сложить.

Например, вот произведение матриц:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11}\bullet b_{11} + a_{12}\bullet b_{21} + a_{13}\bullet b_{31} & a_{11}\bullet b_{12} + a_{12}\bullet b_{22} + a_{13}\bullet b_{32} \\ a_{21}\bullet b_{11} + a_{22}\bullet b_{21} + a_{23}\bullet b_{31} & a_{21}\bullet b_{12} + a_{12}\bullet b_{22} + a_{23}\bullet b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\bullet 4 + 1\bullet 2 + 1\bullet(-1) & 1\bullet 1 + 1\bullet 5 + 1\bullet 0 \\ 2\bullet 4 + 0\bullet 2 + 1\bullet(-1) & 2\bullet 1 + 0\bullet 5 + 1\bullet 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Важно!

Если А и В — согласованные квадратные матрицы одинакового порядка, то **А•В ≠ В•А.**

А если А•В = В•А, то матрицы А и В называются **перестановочными или коммутирующими.**

5. Свойства произведения матриц

Допустим, A_{nXm}, B_{nXm}, C_{nXm} – это матрицы,

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\ B_{n\times k}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk}\end{pmatrix},$$

$C_{k\times l}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kl}\end{pmatrix}$ – матрицы, а α и β — числа.

Тогда верно следующее

$(A_{m\times n}\cdot B_{n\times k})\cdot\ C_{k\times l}=A_{m\times n}\cdot(B_{n\times k}\cdot\ C_{k\times l})$ – это свойство ассоциативности умножения матриц.

$$(A_{m\times n}\cdot B_{n\times k})=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk}\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kl}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n1} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{11}\cdot b_{1k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{nk} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{n1} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{21}\cdot b_{2k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\cdots+a_{mn}\cdot b_{n1} & a_{m1}\cdot b_{12}+a_{m2}\cdot b_{22}+\cdots+a_{mn}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{m1}\cdot b_{1k}+a_{m2}\cdot b_{2k}+\cdots+a_{mn}\cdot b_{nk}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kl}\end{pmatrix}=\cdots$$

Выпишем первый элемент итоговой матрицы, а именно, перемножим только первую строку матрицы *AB* и первый столбец матрицы *C*, получим:

$$(a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n1})\cdot c_{11}+(a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n2})\cdot c_{21}+\cdots$$
$$+(a_{11}\cdot b_{1k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{nk})\cdot c_{k1}=$$
$$=a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n1}\cdot c_{11}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{21}+\cdots+$$
$$+a_{1n}\cdot b_{n2}\cdot c_{21}+a_{11}\cdot b_{1k}\cdot c_{k1}+a_{12}\cdot b_{2k}\cdot c_{k1}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{nk}\cdot c_{k1}=$$
$$=a_{11}\cdot(b_{11}\cdot c_{11}+b_{12}\cdot c_{21}+\cdots+b_{1k}\cdot c_{k1})+a_{12}\cdot(b_{21}\cdot c_{11}+b_{22}\cdot c_{21}+\cdots+b_{2k}\cdot c_{k1})+\cdots$$
$$+a_{1n}\cdot(b_{n1}\cdot c_{11}+b_{n2}\cdot c_{21}+b_{nk}\cdot c_{k1})$$

Заметим, что выражение $(b_{11}\cdot c_{11}+b_{12}\cdot c_{21}+\cdots+b_{1k}\cdot c_{k1})$ – произведение элементов второй строки матрицы *B* на первый столбец матрицы *C*.
$(b_{21}\cdot c_{11}+b_{22}\cdot c_{21}+\cdots+b_{2k}\cdot c_{k1})$ – произведение элементов второй строки матрицы *B* на первый столбец матрицы *C*.

$(b_{n1}\cdot c_{11}+b_{n2}\cdot c_{21}+b_{nk}\cdot c_{k1})$ – произведение элементов *n*- ой строки матрицы *B* на первый столбец матрицы *C*. То есть эти элементы образуют первый столбец матрицы *BC*.

А весь элемент

$$a_{11}\cdot(b_{11}\cdot c_{11}+b_{12}\cdot c_{21}+\dots+b_{1k}\cdot c_{k1})+a_{12}\cdot(b_{21}\cdot c_{11}+b_{22}\cdot c_{21}+\dots+b_{2k}\cdot c_{k1})+\dots$$
$$+a_{1n}\cdot(b_{n1}\cdot c_{11}+b_{n2}\cdot c_{21}+b_{nk}\cdot c_{k1})$$

– произведение первой строки матрицы *A* на первый столбец матрицы *BC*.

Рассуждая аналогичным образом для остальных элементов получим справедливость ассоциативности умножения матриц.

$\alpha\cdot\ (A_{m\times n}\cdot B_{n\times k})=\alpha\cdot(A_{m\times n})\cdot B_{n\times k}=A_{m\times n}\cdot(\alpha\cdot B_{n\times k})$ – свойство выноса числового множителя за знак произведения матриц.

$$\alpha\cdot(A_{m\times n}\cdot B_{n\times k})=$$
$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\dots+a_{1n}\cdot b_{n1} & \dots & a_{11}\cdot b_{1k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\dots+a_{1n}\cdot b_{nk} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\dots+a_{2n}\cdot b_{n1} & \dots & a_{21}\cdot b_{2k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\dots+a_{2n}\cdot b_{nk} \\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\dots+a_{mn}\cdot b_{n1} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1k}+a_{m2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{mn}\cdot b_{nk} \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha\cdot(a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\dots+a_{1n}\cdot b_{n1}) & \dots & \alpha\cdot(a_{11}\cdot b_{1k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\dots+a_{1n}\cdot b_{nk}) \\ \alpha\cdot(a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\dots+a_{2n}\cdot b_{n1}) & \dots & \alpha\cdot(a_{21}\cdot b_{2k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\dots+a_{2n}\cdot b_{nk}) \\ \alpha\cdot(a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\dots+a_{mn}\cdot b_{n1}) & \dots & \alpha\cdot(a_{m1}\cdot b_{1k}+a_{m2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{mn}\cdot b_{nk}) \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11}\cdot b_{11}+\alpha\cdot a_{12}\cdot b_{21}+\dots+\alpha\cdot a_{1n}\cdot b_{n1} & \dots & \dots & (\alpha\cdot a_{11}\cdot b_{1k}+\alpha\cdot a_{12}\cdot b_{2k}+\dots+\alpha\cdot a_{1n}\cdot b_{nk}) \\ \alpha\cdot a_{21}\cdot b_{11}+\alpha\cdot a_{22}\cdot b_{21}+\dots+\alpha\cdot a_{2n}\cdot b_{n1}) & \dots & \dots & (\alpha\cdot a_{21}\cdot b_{2k}+\alpha\cdot a_{12}\cdot b_{2k}+\dots+\alpha\cdot a_{2n}\cdot b_{nk}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1}\cdot b_{11}+\alpha\cdot a_{m2}\cdot b_{21}+\dots+\alpha\cdot a_{mn}\cdot b_{n1}) & \dots & \dots & (\alpha\cdot a_{m1}\cdot b_{1k}+\alpha\cdot a_{m2}\cdot b_{2k}+\dots+\alpha\cdot a_{mn}\cdot b_{nk}) \end{pmatrix}=$$

Так как произведение чисел ассоциативно, то будем иметь:

$$=\begin{pmatrix} (\alpha\cdot a_{11})\cdot b_{11}+(\alpha\cdot a_{12})\cdot b_{21}+\dots+(\alpha\cdot a_{1n})\cdot b_{n1} & \dots & \dots & (\alpha\cdot a_{11})\cdot b_{1k}+(\alpha\cdot a_{12})\cdot b_{2k}+\dots+(\alpha\cdot a_{1n})\cdot b_{nk} \\ (\alpha\cdot a_{21})\cdot b_{11}+(\alpha\cdot a_{22})\cdot b_{21}+\dots+(\alpha\cdot a_{2n})\cdot b_{n1} & \dots & \dots & (\alpha\cdot a_{21})\cdot b_{2k}+(\alpha\cdot a_{12})\cdot b_{2k}+\dots+(\alpha\cdot a_{2n})\cdot b_{nk} \\ \dots & \dots & & \\ (\alpha\cdot a_{m1})\cdot b_{11}+(\alpha\cdot a_{m2})\cdot b_{21}+\dots+(\alpha\cdot a_{mn})\cdot b_{n1} & \dots & \dots & (\alpha\cdot a_{m1})\cdot b_{1k}+(\alpha\cdot a_{m2})\cdot b_{2k}+\dots+(\alpha\cdot a_{mn})\cdot b_{nk} \end{pmatrix}=(\alpha\cdot A_{m\times n})\cdot B_{n\times k}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot(\alpha\cdot b_{11})+a_{12}\cdot(\alpha\cdot b_{21})+\dots+a_{1n}\cdot(\alpha\cdot b_{n1}) & \dots \\ a_{21}\cdot(\alpha\cdot b_{11})+a_{22}\cdot(\alpha\cdot b_{21})+\dots+a_{2n}\cdot(\alpha\cdot b_{n1}) & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{m1}\cdot(\alpha\cdot b_{11})+a_{m2}\cdot(\alpha\cdot b_{21})+\dots+a_{mn}\cdot(\alpha\cdot b_{n1}) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdots & a_{11}\cdot(\alpha\cdot b_{1k})+a_{12}\cdot(\alpha\cdot b_{2k})+\cdots+a_{1n}\cdot(\alpha\cdot b_{nk}) \\ \cdots & a_{21}\cdot(\alpha\cdot b_{1k})+a_{12}\cdot(\alpha\cdot b_{2k})+\cdots+a_{2n}\cdot(\alpha\cdot b_{nk}) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{m1}\cdot(\alpha\cdot b_{1k})+a_{m2}\cdot(\alpha\cdot b_{2k})+\cdots+a_{mn}\cdot(\alpha\cdot b_{nk}) \end{matrix}\Bigg) = A_{m\times n}\cdot(\alpha\cdot B_{n\times k}).$$

Пусть:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$C_{k\times l} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} - \text{ матрицы, } A, B - \text{ матрицы одинакового размера.}$$

Тогда верно следующее.

$(A_{m\times n}\cdot B_{m\times n})\cdot\ C_{n\times k} = A_{m\times n}\cdot C_{n\times k} + B_{m\times n}\cdot\ C_{n\times k})$ – свойство дистрибутивности умножения справа относительно сложения матриц.

$$(A_{m\times n}+B_{m\times n})\cdot C_{n\times k} =$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$\Bigg(\begin{matrix} (a_{11}+b_{11})\cdot c_{11}+(a_{12}+b_{12})\cdot c_{21}+\cdots+(a_{1n}+b_{1n}\cdot c_{n1} & \cdots \\ (a_{21}+b_{21})\cdot c_{11}+(a_{22}+b_{22})\cdot c_{21}+\cdots+(a_{2n}+b_{2n})\cdot c_{n1} & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (a_{m1}+b_{m1})\cdot c_{11}+(a_{m2}+b_{m2})\cdot c_{21}+\cdots+(a_{mn}+b_{mn})\cdot c_{n1} & \cdots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \cdots & (a_{11}+b_{11})\cdot c_{1k}+(a_{12}+b_{12})\cdot c_{2k}+\cdots+(a_{1n}+b_{1n}\cdot c_{nk} \\ \cdots & (a_{21}+b_{21})\cdot c_{1k}+(a_{22}+b_{22})\cdot c_{2k}+\cdots+(a_{2n}+b_{2n})\cdot c_{nk} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & (a_{m1}+b_{m1})\cdot c_{1k}+(a_{m2}+b_{m2})\cdot c_{2k}+\cdots+(a_{mn}+b_{mn})\cdot c_{nk} \end{matrix}\Bigg)$$

Возьмем первый элемент:

$$(a_{11}+b_{11})\cdot c_{11}+(a_{12}+b_{12})\cdot c_{21}+\cdots$$
$$+(a_{1n}+b_{1n}\cdot c_{n1} = a_{11}\cdot c_{11}+b_{11}\cdot c_{11}+a_{12}\cdot c_{21}+b_{12}\cdot c_{21}+\cdots+$$
$$a_{1n}\cdot c_{n1}+b_{1n}\cdot c_{n1} =$$

Перегруппируем слагаемые, получим:

$$= (a_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot c_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot c_{n1}) + (b_{11} \cdot c_{11} + b_{12} \cdot c_{21} + \cdots + b_{1n} \cdot c_{n1})$$

Здесь видим в первой скобке выражение соответственно равно произведению элементов первой строки матрицы *A* на первый столбец матрицы *C*, выражение во второй скобке равно произведению первой строки матрицы *B* на первый столбец матрицы *C*. Вычисляя таким образом элемент, будем иметь *A·C + B·C*

C•(A+ B) = C•A+ C•B – свойство дистрибутивности умножения слева относительно умножения матриц.

6. Возведение матрицы в степень

Целой положительной степенью A^m, где m >1 квадратной матрицы A, называется произведение m матриц, равных A. То есть:

$$A^m = \underbrace{A \bullet A \ldots \bullet A}_{m}$$

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. Пример возведения такой матрицы:

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Транспонирование матрицы

Переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется транспонированием матрицы A.

Например, если:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{j1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Итак, при транспонировании матрица размера m X n переходит в матрицу размера n X m.

Например

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } A^T_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Свойства операции транспонирования

Пусть A, B – это матрицы, α – число. Тогда:

$$(A^T)^T = A$$

то есть, матрица, дважды транспонированная, равна исходной матрице.

$$(\alpha \bullet A)^T = \alpha \bullet (A^T)$$

то есть, числовой множитель можно выносить за знак транспонирования.

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

то есть, транспонирование суммы матриц есть сумма транспонированных матриц.

$$(A \bullet B)^T = B^T \bullet A^T$$

то есть, транспонирование произведения матриц есть произведение транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.

Вопрос 3. Практическое занятие

Задача 1.

Вычислить произведения матриц A • B и B • A. Записать матрицу, транспонированную к A • B, при условии, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как матрицы квадратные одного порядка, то мы можем вычислить их произведения следующим образом:

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 1\bullet 2 + 2\bullet(-1) & 1\bullet 6 + 2\bullet 3 \\ 3\bullet 2 + 6\bullet(-1) & 3\bullet 6 + 6\bullet 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили A • B ≠ B • A, следовательно, матрицы A и B неперестановочные.

Теперь найдем матрицу, транспонированную к A • B:

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}$

Задача 2.

Найти значение матричного многочлена $f(A) = 3A^2 - 5A + 2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

Действие 1. Вычислим значение A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

Действие 2. Находим значение 3 • A^2:

$$3 \cdot A^2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 6 & 9 & -18 \\ -30 & 6 & 45 \end{pmatrix}$$

Действие 3. Теперь перейдем к (-5) • A:

$$(-5) \bullet A = (-5) \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \\ 10 & -5 & -20 \end{pmatrix}$$

Действие 4. Сложим получившиеся значения. Обратите внимание, что мы представили разность 3 • A^2 - 5 • A, как 3 • A^2 +((- 5) • A):

$$3 \bullet A^2 - 5 \bullet A = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 6 & 9 & -18 \\ -30 & 6 & 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \\ 10 & -5 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -6 \\ 6 & -1 & -13 \\ -20 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

Действие 5. К полученному выражению добавим число 2. Для того, чтобы это сделать, нужно добавить диагональную матрицу, у которой на главной диагонали стоит число 2.

Таким образом, получаем:

$$3 \bullet A^2 - 5 \bullet A + 2 = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -6 \\ 6 & -1 & -13 \\ -20 & 1 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$