ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 4. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ.

Вопрос 1. Векторы. Линейные операции над векторами.

Понятие вектора. Длина. Направление. Коллинеарность. Компланарность

Вектор – направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Если A — начало вектора, B — конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1).

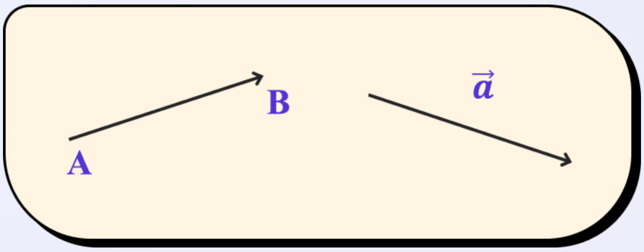


Рис. 1 Вектор

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (вектор с началом в точке B, а концом в точке A) называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$ (рис. 2).

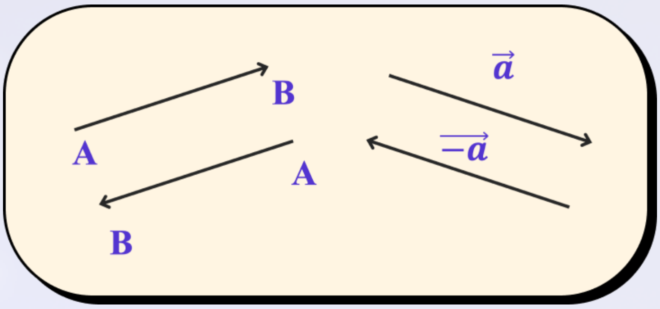


Рис. 2 Противоположные векторы

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Этот вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, на правление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a^0}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых и обозначаются: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно. (рис. 3).

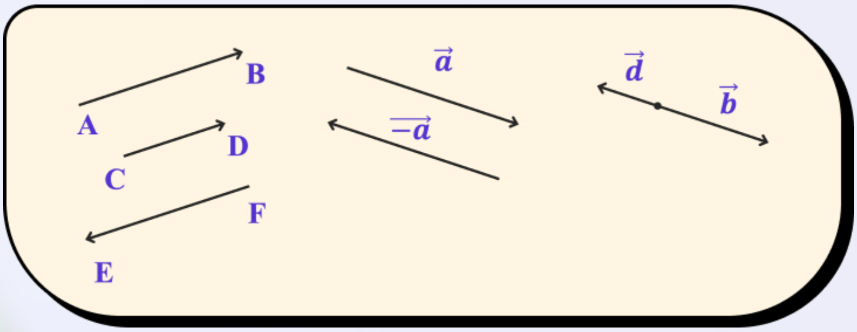


Рис. 3

На рисунке $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{FE}, \vec{a} \parallel -\vec{a}, \vec{b} \parallel \vec{d}$.

При этом векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ направлены одинаково ($\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$), а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{FE}$, $\vec{a}$ и $-\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{d}$ направлены противоположно ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}, \vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}, \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{d}$).

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если они коллинеарны ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), одинаково направлены ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$) и имеют одинаковые длины $\left(|\vec{a}| = |\vec{b}|\right)$ (рис. 4).

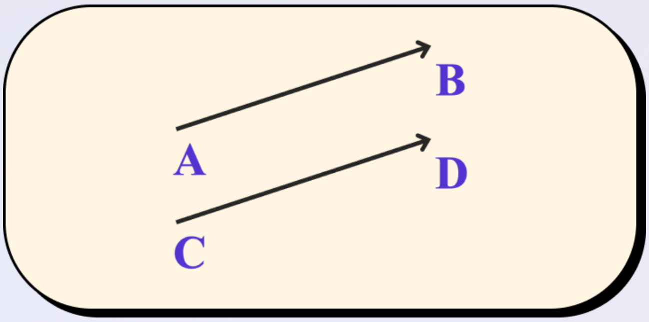


Рис. 4 Равные векторы

Три вектора в пространстве называются компланарными если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов хотя бы один нулевой, то векторы компланарны.

Если среди трех векторов два любых вектора коллинеарны, то три вектора компланарны .

Линейные операции над векторами

Сложение векторов (по правилу треугольника). Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два произвольных вектора. От произвольной точки O отложим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом последнего вектора, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис.5).

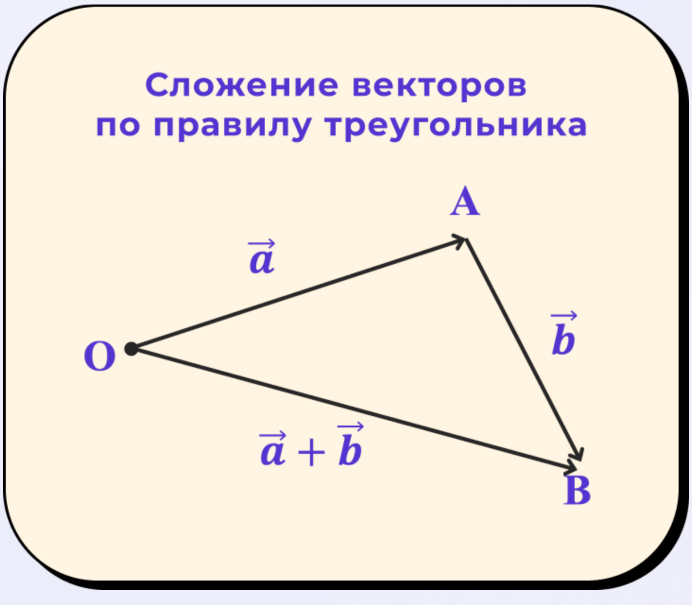


Рис. 5 Сложение векторов по правилу треугольника

По правилу многоугольника можно сложить несколько векторов. Например, для того, чтобы найти сумму векторов $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ необходимо от точки пространства отложить вектор $\vec{a}$, от конца $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}$, от конца $\vec{b}$ вектор $\vec{c}$, от конца $\vec{c}$ вектор $\vec{d}$, а затем соединить начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{d}$ (см. рис.6).

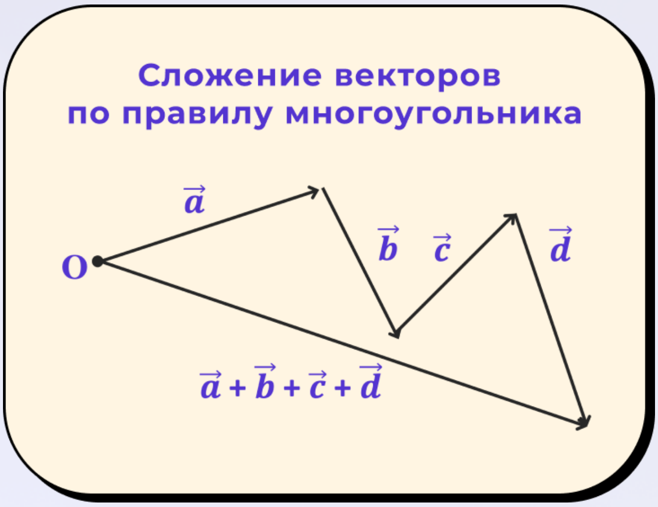


Рис. 6 Сложение векторов по правилу многоугольника

Сложение векторов (по правилу параллелограмма). Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. От произвольной точки O отложим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и вектор

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Достроим фигуру до параллелограмма $OACB$. Далее, построим вектор $\overrightarrow{OC}$, который является диагональю параллелограмма. Этот вектор называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 7).

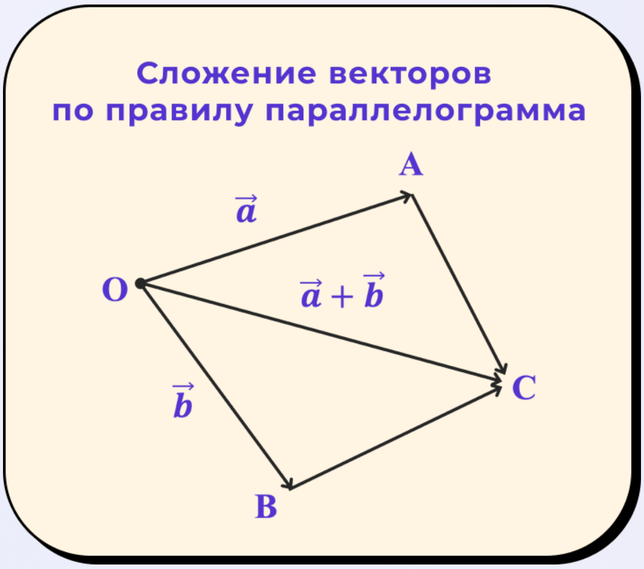


Рис. 7 Сумма векторов

Разность векторов. Под разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (см. рис. 8).

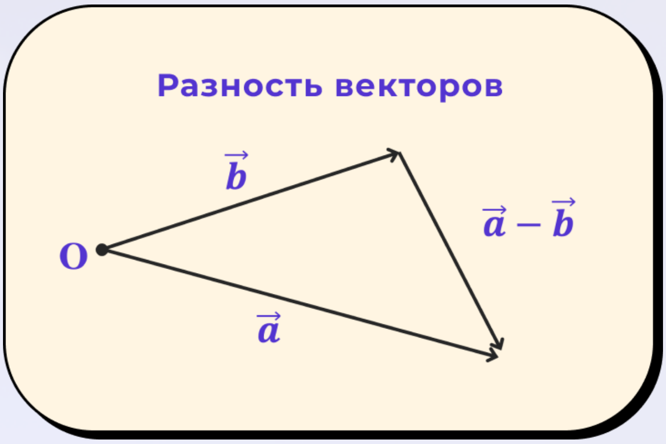


Рис. 8 Разность векторов

Отметим, что в параллелограмме $OACB$ вектор $\overrightarrow{BA}$ является разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис.9).

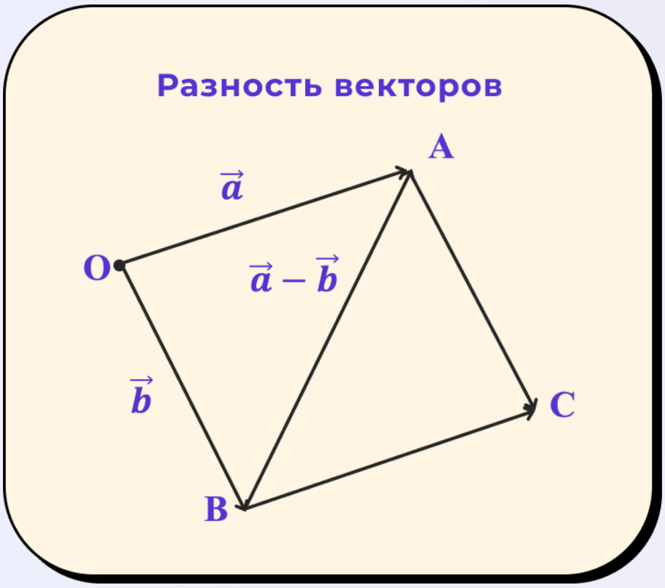


Рис. 9 Разность векторов

Произведение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ и а число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda||\vec{a}|$, вектор $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ и имеет направление, совпадающее с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Например, на рисунке ниже изображены векторы (см. рис.10).

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, -\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}, \vec{b} = -3\vec{d}$$

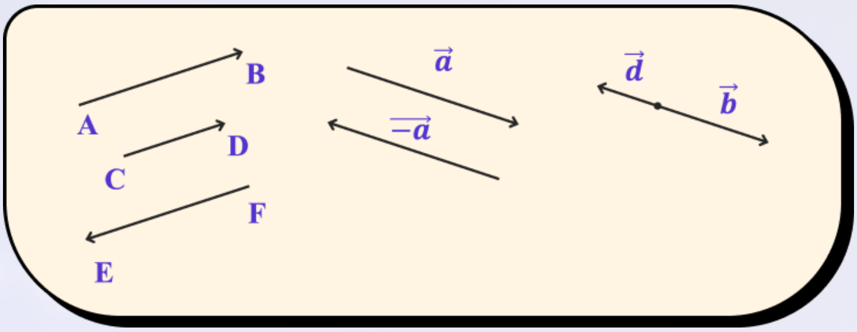


Рис. 10 Векторы

Свойства операций над векторами.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$-векторы, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ – действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ коммутативность сложения векторов;

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ассоциативность сложения векторов;

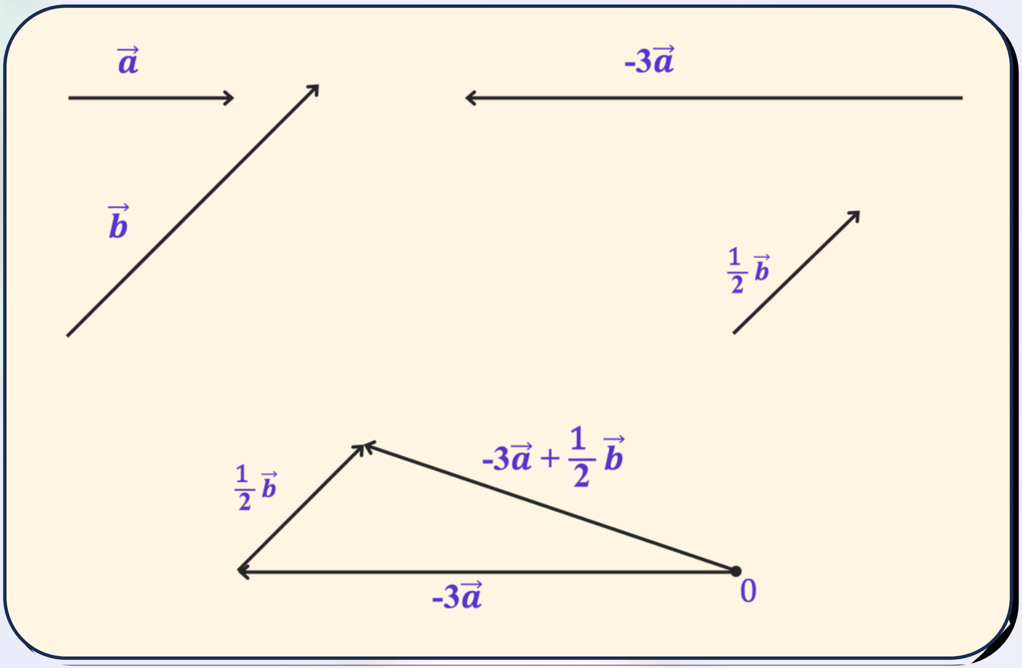
$\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$ ассоциативность умножения на число;

$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$ дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел;

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $-3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Решение. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вначале построим векторы $-3\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$, а затем построим сумму по правилу треугольника и по правилу параллелограмма (см. рис. ниже).



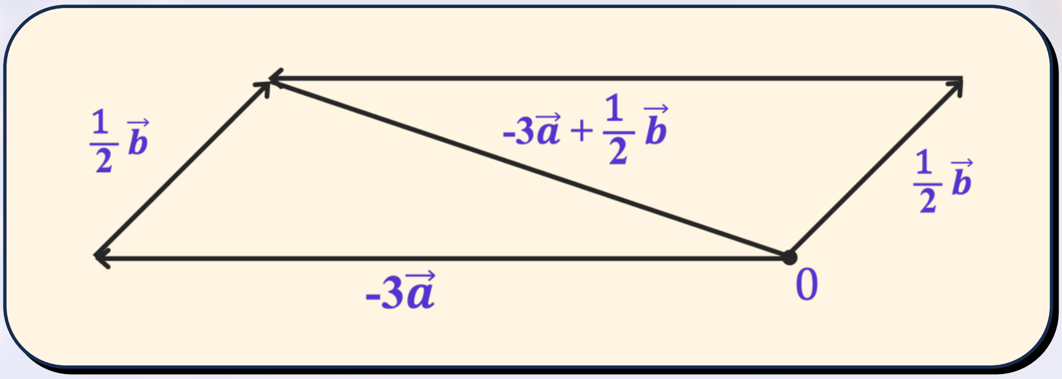


Рис. 11

Линейная зависимость векторов. Коллинеарность и компланарность векторов

Выражение $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$ называется линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

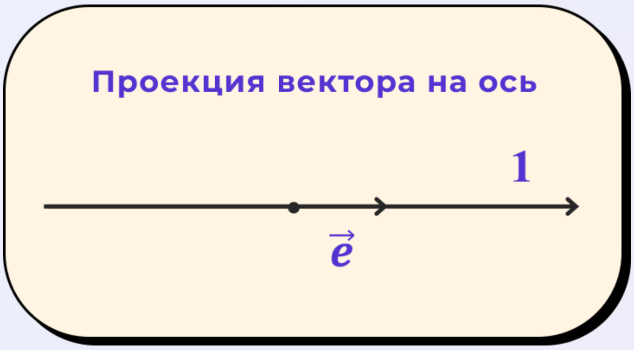
Линейная комбинация векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отличен от нуля.

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называют линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т. е. найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не все равные нулю, такие что $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называются линейно независимыми, если из того, что $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ следует, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равны нулю.

Проекция вектора и точки на ось

Осью называется прямая, с выбранным на ней ненулевым вектором. Этот вектор называется направляющим вектором оси.



Пусть на плоскости заданы две непараллельные оси. Точку их пересечения обозначим O, а направляющие векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. A — произвольная точка плоскости. Через точку A проведем прямую, параллельную вектору $\overrightarrow{e_2}$ и прямую, параллельную вектору $\overrightarrow{e_1}$

Пусть на плоскости заданы две непараллельные оси. Точку их пересечения обозначим O, а направляющие векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, A – произвольная точка плоскости. Через точку A проведем прямую, параллельную вектору $\overrightarrow{e_2}$ и прямую, параллельную вектору $\overrightarrow{e_1}$

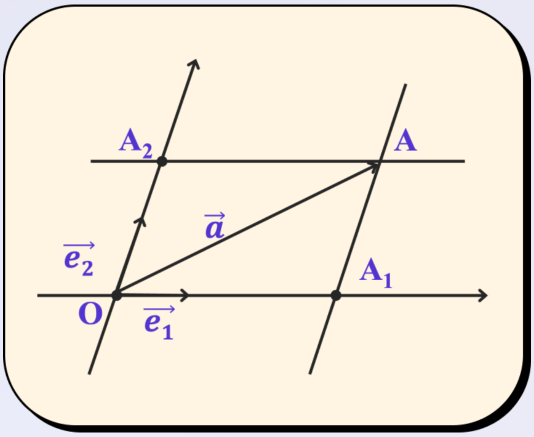


Рис. 12.

Проекцией точки A на ось $\overrightarrow{e_1}$ называется точка A_1 пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно $\overrightarrow{e_2}$ с осью $\overrightarrow{e_1}$.

Проекцией точки $\boldsymbol{A}$ на ось $\overrightarrow{e_2}$ называется точка A_2 пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно $\overrightarrow{e_1}$ с осью $\overrightarrow{e_2}$.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} += \overrightarrow{OA_2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} \parallel \overrightarrow{e_1} \quad &\Rightarrow \exists x: \overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{OA_2} \parallel \overrightarrow{e_2} \quad &\Rightarrow \exists y: \overrightarrow{OA_2} = y\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$

Числа x и y называются координатами вектора $\vec{a}$ относительно осей $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ или проекциями вектора $\vec{a}$ на эти оси.

Заметим, проекция точки на ось – это точка, проекция вектора на ось – число.

Теорема 1. Вся кий вектор на плоскости можно выразить в виде линейной комбинации любых двух неколлинеарных векторов.

Т.е. если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ на плоскости, то для любого $\vec{c}$ найдутся числа x и y такие, что $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$.

Теорема 2. Всякий вектор в пространстве можно выразить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов.

Т.е. если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные векторы в пространстве, то для любого $\vec{d}$ найдутся числа x, y, z такие, что $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$.

Вопрос 2. Базисы на плоскости и в пространстве

Базисом на плоскости называется пара векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, обладающая свойствами:

Векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ линейно независимы.

Любой вектор плоскости линейно выражается через векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, т.е.

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \exists x, y \in \mathbb{R}: \vec{a} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}.$$

(Для любого вектора $\vec{a}$ на плоскости найдутся такие действительные числа x, y, что вектор $\vec{a}$ будет иметь следующее разложение по векторам $\vec{e_1}, \vec{e_2}$: $\vec{a} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}$.)

Теорема 1. Два вектора образуют базис на плоскости тогда и только тогда, когда они не коллинеарны.

Теорема 2. Числа x и y в разложении $\vec{a} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}$ определены однозначно. Эти числа называются координатами вектора $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

Базисом в пространстве называется тройка векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ обладающая следующими свойствами:

Векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ линейно независимы.

Любой вектор пространства линейно выражается через векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, т.е.

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \exists x, y, z \in \mathbb{R}: \vec{a} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} + z \cdot \vec{e_3}.$$

(Для любого вектора $\vec{a}$ в пространстве найдутся такие действительные числа x, y, z, что вектор $\vec{a}$ будет иметь следующее разложение по векторам $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$: $\vec{a} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} + z \cdot \vec{e_3}$.)

Теорема 3. Три вектора образуют базис в пространстве тогда и только тогда, когда они не компланарны.

Теорема 4. Числа x, y, z в разложении $\vec{a} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} + z \cdot \vec{e_3}$ определены однозначно. Эти числа называются координатами вектора $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Базис $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ называется ортогональным, если $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}, i = 1,2,3, j = 1,2,3, (i \neq j)$.

Базис $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ называется ортонормированным, если он ортогонален и состоит из единичных векторов, т.е. $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}| = 1$.

Декартовой (прямоугольной) системой координат на плоскости называется тройка $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, O — начало координат, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ — ортонормированный базис.

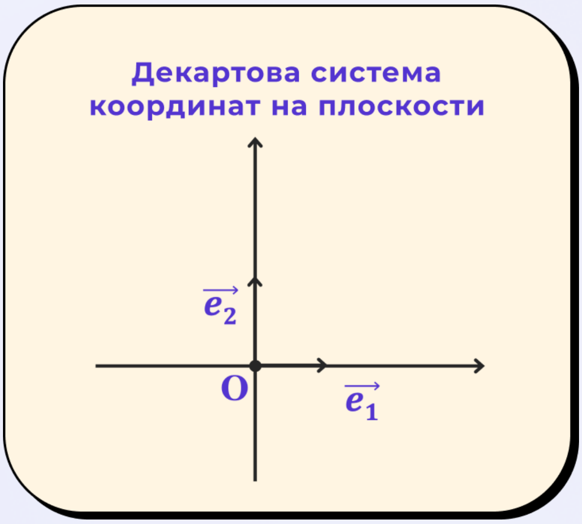


Рис.13

Декартовой (прямоугольной) системой координат в пространстве называется четверка $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, O — начало координат, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ — ортонормированный базис.

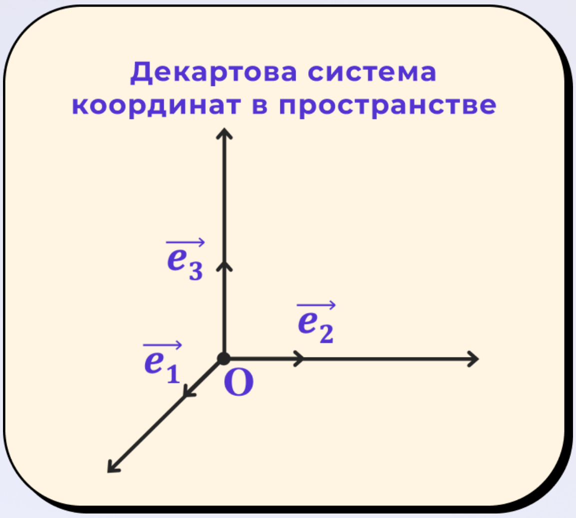


Рис. 14

Для ортонормированного базиса чаще используется другое обозначение: $\vec{e_1} = \vec{\imath}, \vec{e_2} = \vec{\jmath}, \vec{e_3} = \vec{k}$.

Ортогональная проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая. Ортогональной проекцией точки M на ось l называетс точка N, которая является основанием перпендикуляра, опущенного из точки M на ось l.

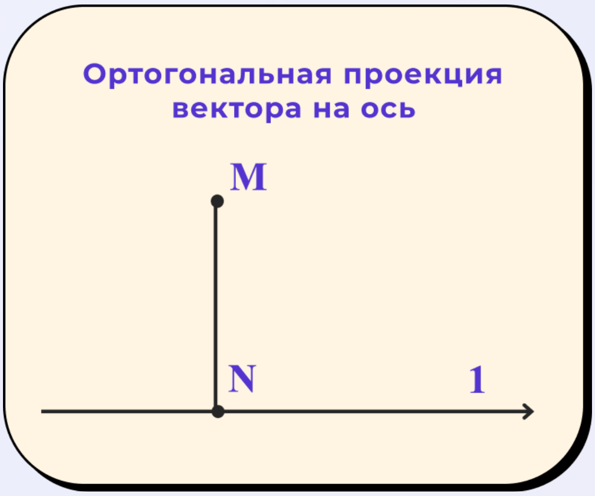


Рис. 15

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор ($\overrightarrow{AB} \neq 0$). Обозначим через A_1 проекцию точки A на ось l, через B_1 проекцию точки B на ось l, получим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

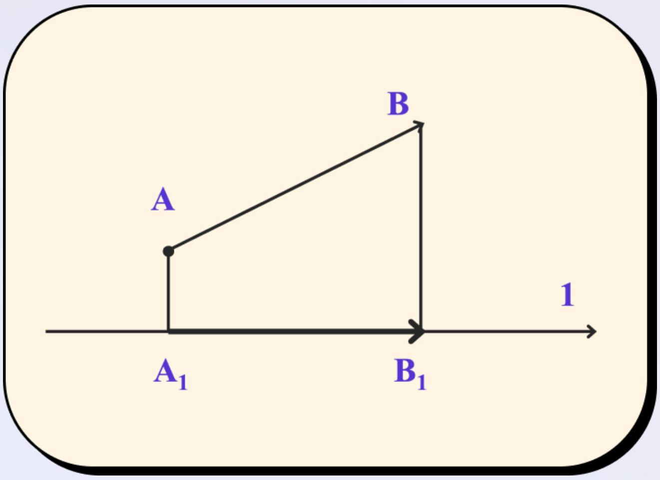


Рис. 16

Ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}$.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначим $\Pi_l\overrightarrow{AB}$.

Если $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ или $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $\prod_{\text{р}}\overrightarrow{AB} = 0$.

Рассмотрим угол φ между вектором $\vec{a}$ и осью l или угол между двумя векторами. Углом между двумя векторами называется угол между лучами, построенными на этих векторах.

Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

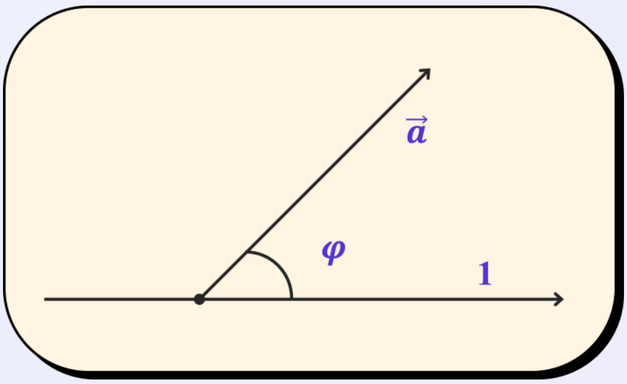


Рис. 17

Свойства проекции.

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором $\vec{a}$ и осью l, т.е. $\text{Пр}_l\vec{a} = |a| \cdot \cos\ \varphi$.

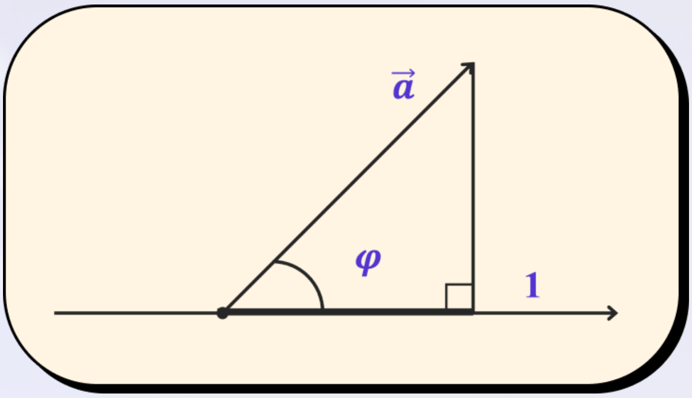


Рис. 18

Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – векторы.

Тогда $\Pi_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = \Pi\mathrm{p}_l\vec{a} + \Pi_{\mathrm{p}_l}\vec{b} + \Pi_{\mathrm{p}_l}\vec{c} + \Pi_{\mathrm{p}_l}\vec{d}$.

Разложение векторов по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно (см. рис.19 ниже).

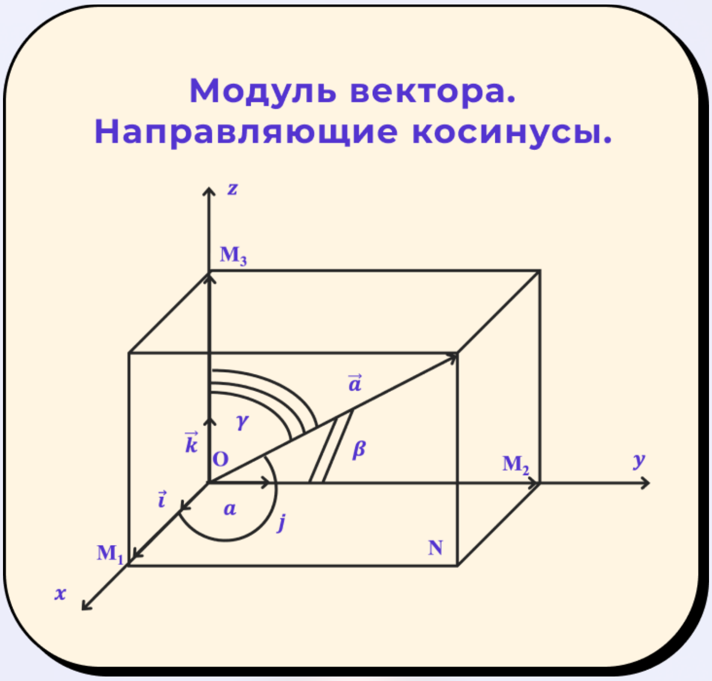


Рис. 19

Выберем произвольный вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$. Найдем проекции этого вектора на координатные оси. Для этого проведем через конец вектора $\overrightarrow{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2, M_3. В результате получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OM}$. Тогда $\Pi_x\vec{a}=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|, \Pi_p\vec{a}=\left|\overrightarrow{OM_2}\right|, \Pi_{p_z}\vec{a}=\left|\overrightarrow{OM_3}\right|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{NM}$. А так как $\overrightarrow{M_1N}=\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OM_3}$, то $\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$. Но $\overrightarrow{OM_1}=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|\cdot\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_2}=\left|\overrightarrow{OM_2}\right|\cdot\vec{\jmath}, \overrightarrow{OM_3}=\left|\overrightarrow{OM_3}\right|\cdot\vec{k}$. Переобозначим проекции вектора $\vec{a}$ следующим образом:

$\left|\overrightarrow{OM_1}\right|=a_x, \left|\overrightarrow{OM_2}\right|=a_y, \left|\overrightarrow{OM_3}\right|=a_z$. Тогда имеем разложение вектора по ортам координатных осей:

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{\imath}+a_y\cdot\vec{\jmath}+a_z\cdot\vec{k}$$

Это равенство часто записывают в виде:

$$\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}.$$

Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\vec{a}$. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можем записать:

$$|\overrightarrow{OM}|^2=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2,$$

т. е.

$$|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

Отсюда

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\ \alpha,\ a_y=|\vec{a}|\cdot\cos\ \beta,\ a_z=|\vec{a}|\cdot\cos\ \gamma.$$

Отсюда

$$\cos\ \alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\ \beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\ \gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos\ \alpha, \cos\ \beta, \cos\ \gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Подставим выражение $(^{**})$ в выражение $(^{*})$, получим

$$|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2\cdot\cos^2\ \alpha+|\vec{a}|^2\cdot\cos^2\ \beta+|\vec{a}|^2\cdot\cos^2\ \gamma.$$

Сократив на $|\vec{a}|^2\neq 0$, получим соотношение

$$\cos^2\ \alpha+\cos^2\ \beta+\cos^2\ \gamma=1.$$

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т. е. сам вектор.

Действия над векторами, заданными проекциями (координатами)

Пусть векторы $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ заданы своими проекциями на оси координат $Ox, Oy, Oz. \lambda$ – число. Тогда выполняется следующее:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Например, для векторов $\vec{a}=\{1,2,1\}$ и $\vec{b}=\{-4,2,-5\}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\{1+(-4),2+2,1+(-5)\}=\{-3,4,-4\}.$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\{1-(-4),2-2,1-(-5)\}=\{5,0,6\}.$$
$$3\cdot\vec{a}=3\cdot\{1,2,1\}=\{3,6,3\}.$$

Свойства векторов, заданных проекциями (координатами)

Равенство векторов. Два вектора $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ равны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $a_x=b_x,\ a_y=b_y, a_z=b_z$.

Коллинеарность векторов. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ можно записать $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, где α — некоторое число. Отсюда

$$a_x=\alpha b_x, a_y=\alpha b_y, a_z=\alpha b_z,$$

т.е.

$$\frac{a_x}{b_x}=\alpha,\ \frac{a_y}{b_y}=\alpha,\ \frac{a_z}{b_z}=\alpha.$$

Таким образом, координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное, векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Координаты точки.

Пусть в пространстве задана прямоугольная (декартова) система координат Oxyz. Для произвольной точки $M=M(x_M,y_M,z_M)$ координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ называются координатами точки M. Для $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\{x_M,y_M,z_M\}$.

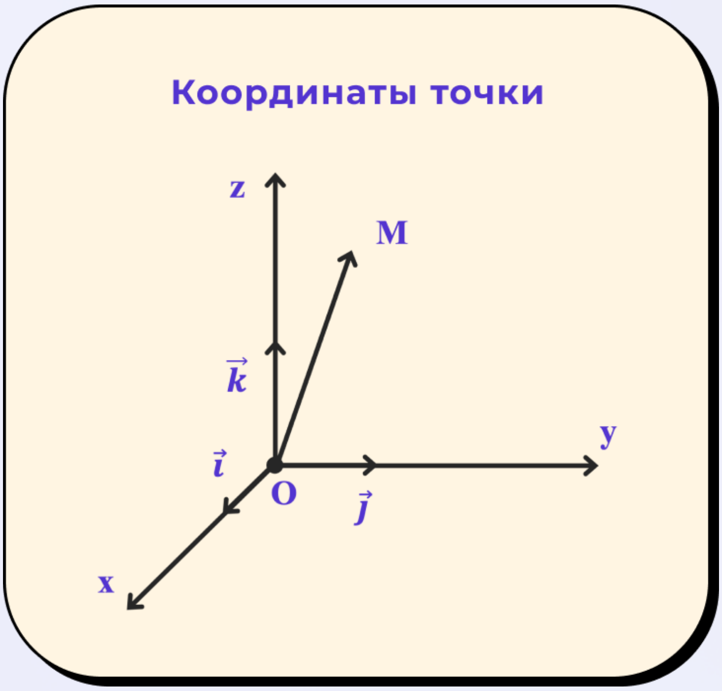


Рис. 20

Координаты вектора, заданного координатами двух точек.

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Имеем (см. рисунок ниже) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

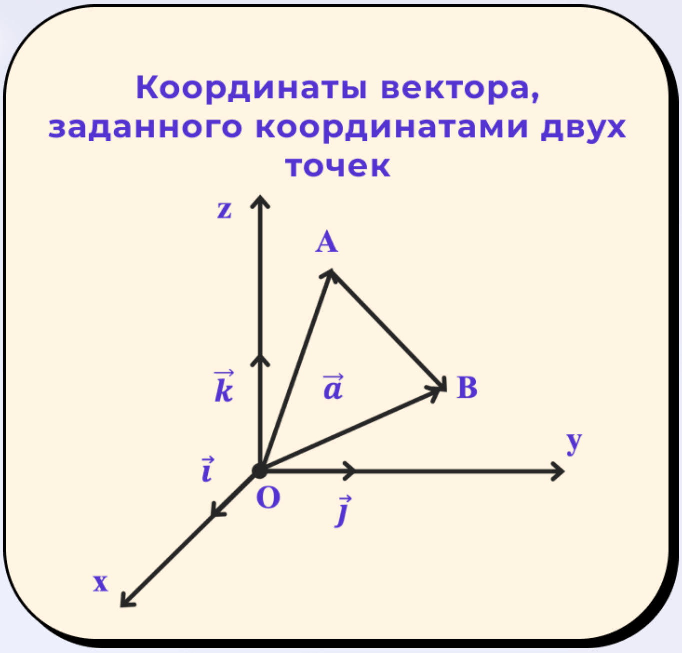


Рис. 21

Вопрос 3. Определение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов

Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\ \varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$. (1)

Формулу (1) можно записать в другом виде: т.к. $|\vec{a}| \cdot \cos\ \varphi = \prod_{\vec{b}} \vec{a}$, а $|\vec{b}| \cdot \cos\ \varphi = \Pi_{\vec{a}} \vec{b}$, то получаем

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \Pi p_{\vec{b}} \vec{a}$ (2)

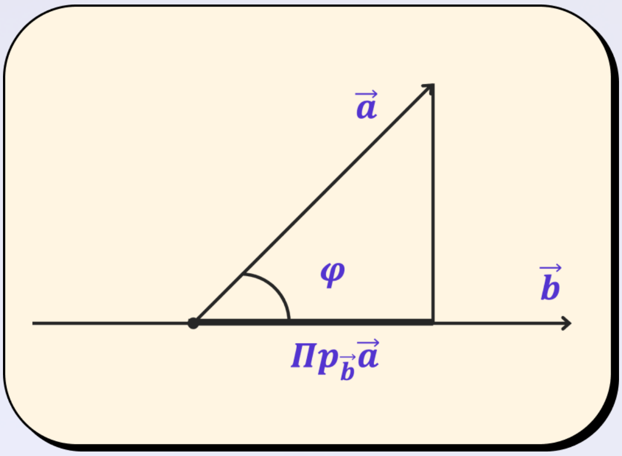


Рис. 22

Определение векторного произведения векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям:

Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = S$$

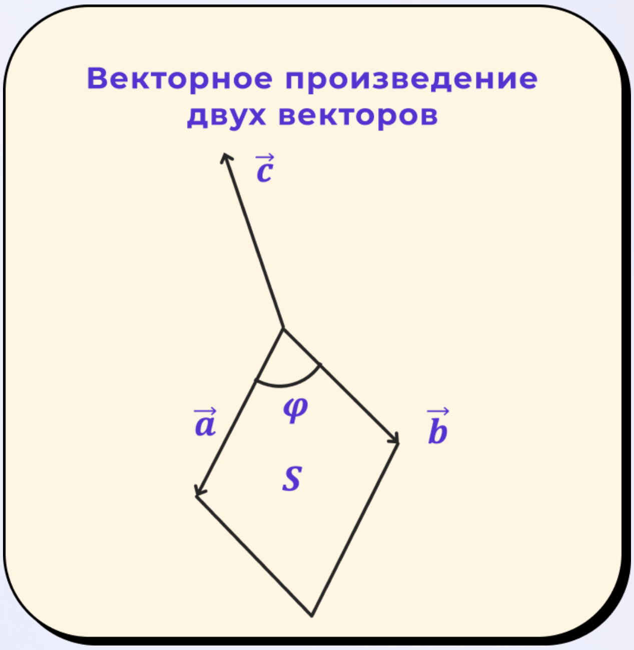
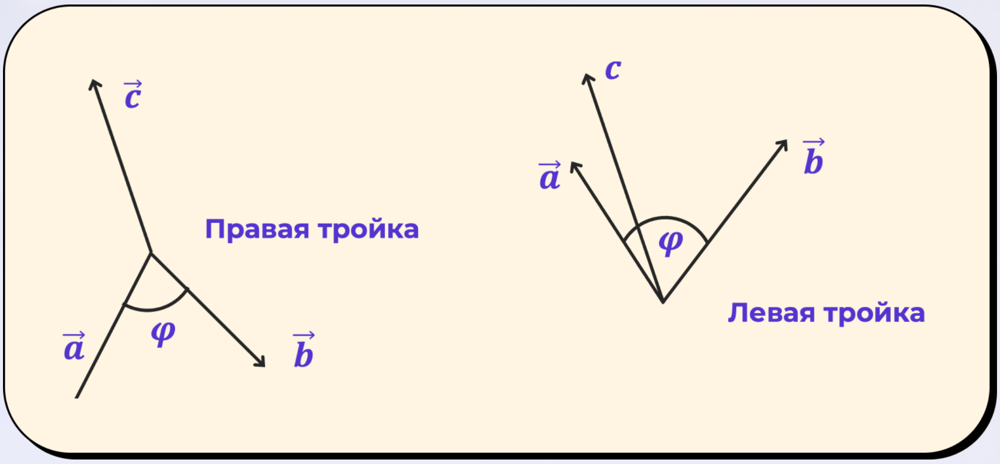


Рис. 23

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка (т.е. с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки).



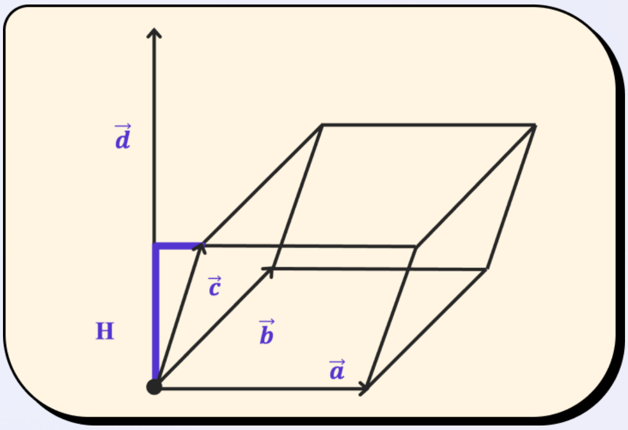
Часто для векторного произведения используют другое обозначение: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$.

Определение смешанного произведения векторов

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — это число, равное $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$, которое обозначается $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения.

Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$



Имеем: $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = |\vec{d}| \cdot \Pi_{\text{p}}\vec{c}\vec{c}, \vec{d} = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b} \cdot \Pi_{\vec{d}}\vec{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{p}_{\vec{a}}\vec{c} = -H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = S \cdot (\pm H)$, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Практические задания

Задача 1.

Найдите длину и направление вектора $\vec{a} = \{6{,}7,-6\}$.

Решение.

Для решения задачи найдем длину вектора $\vec{a}$.

Длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 49 + 36} = \sqrt{121} = 11$.

Тогда разделим вектор на его длину, получим вектор того же направления, что вектор $\vec{a}$, но единичной длины, т.е. орт вектора $\vec{a}$.

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-6}{11}\right\}.$$

Ответ: Длина вектора $|\vec{a}| = 11$.

$$\vec{a}^0 = \left\{\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-6}{11}\right\}.$$

т.е.

$$\cos\ \alpha = \frac{6}{11}, \cos\ \beta = \frac{7}{11}, \cos\ \gamma = \frac{-6}{11}.$$

Задача 2.

Даны векторы $\overrightarrow{a_1} = \{1; 8; -4\}, \overrightarrow{a_2} = \{1; 3; -1\}, \overrightarrow{a_3} = \{-1; -6; 3\}, \overrightarrow{a_4} = \{1; 2; -3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overrightarrow{a_4}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$.

Решение.

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образует базис, т.е. является линейно независимой, а это означает, что из равенства $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_3\overrightarrow{a_3} = 0$ следует, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равны нулю.

Запишем равенство покоординатно:

$$\lambda_1\{1; 8; -4\} + \lambda_2\{1; 3; -1\} + \lambda_3\{-1; -6; 3\} = \{0; 0; 0\}$$

Отсюда получим:

$$\{\lambda_1; 8\lambda_1; -4\lambda_1\} + \{\lambda_2; 3\lambda_2; -\lambda_2\} + \{-\lambda_3; -6\lambda_3; 3\lambda_3\} = \{0; 0; 0\}$$

Приравняем левую и правую часть покоординатно, получим систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 8\lambda_1 + 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-6) \cdot (-4) - ((-1) \cdot 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) \cdot (-6) + 1 \cdot 8 \cdot 3) =$$

$$9 + 8 + 24 - (12 + 6 + 24) = 17 - 18 = -1 \neq 0.$$

Так как определитель однородной системы не равен нулю, то система имеет единственное нулевое решение: $\{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\} = \{0; 0; 0\}$. А это означает, что векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линей но независимые и образуют базис. Найдем разложение вектора $\overrightarrow{a_4}$ через векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$. Т.е. найдем такие коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, что вектор

$$\overrightarrow{a_4} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_3\overrightarrow{a_3}$$

Запишем равенство покоординатно:

$$\lambda_1\{1; 8; -4\} + \lambda_2\{1; 3; -1\} + \lambda_3\{-1; -6; 3\} = \{1; 2; -3\}$$

Отсюда получим:

$$\{\lambda_1; 8\lambda_1; -4\lambda_1\} + \{\lambda_2; 3\lambda_2; -\lambda_2\} + \{-\lambda_3; -6\lambda_3; 3\lambda_3\} = \{1; 2; -3\}$$

Приравняем левую и правую часть покоординатно, получим систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ 8\lambda_1 + 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 2, \\ -4\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = -3. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера. Определитель основной матрицы системы $|A| = -1 \neq 0$, вычислили выше. Сосчитаем определители:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - ((-1) \cdot 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-6) \cdot 1) =$$

$$9 + 18 + 2 - (9 + 6 + 6) = 8.$$

Тогда $\lambda_1 = \frac{|A_1|}{|\lambda|} = \frac{8}{-1} = -8.$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \\ -4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) \cdot (-4) + 8 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-1 \cdot 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-6) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \cdot 8) =$$

$$6 + 24 + 24 - (8 + 18 + 24) = 4$$

Тогда $\lambda_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4.$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 8 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-4) - (1 \cdot 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 8 \cdot (-3)) =$$

$$-9 - 8 - 8 - (-12 - 2 - 24) = -25 + 38 = 13$$

Тогда $\lambda_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{13}{-1} = -13.$

Ответ: $\overrightarrow{a_4} = -8\overrightarrow{a_1} - 4\overrightarrow{a_2} - 13\overrightarrow{a_3}.$

Задача 3.

Найти вектор $\vec{x}$ из уравнения:

$$\overrightarrow{a_1} - 5\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} - 7\vec{x} = \vec{0},$$

где

$$\overrightarrow{a_1} = \{1; -1; -1; 2\}, \overrightarrow{a_2} = \{2; -1; 3; -3\}, \overrightarrow{a_3} = \{-3; 2; -8; 4\}$$

Решение.

Подставим в уравнение координаты векторов:

$$\overrightarrow{a_1} - 5\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} - 7\vec{x} = \vec{0}$$

$$\{1; -1; -1; 2\} - 5\{2; -1; 3; -3\} + \{-3; 2; -8; 4\} - 7\{x_1; x_2; x_3; x_4\} = \{0; 0; 0; 0\}$$

и сосчитаем:

$$\{1; -1; -1; 2\} - \{10; -5; 15; -15\} + \{-3; 2; -8; 4\} - \{7x_1; 7x_2; 7x_3; 7x_4\} = \{0; 0; 0; 0\}$$

$$\{-12; 6; -24; 21\} - \{7x_1; 7x_2; 7x_3; 7x_4\} = \{0; 0; 0; 0\}$$

$$\{-7x_1; -7x_2; -7x_3; -7x_4\} = \{12; -6; 24; -21\}$$

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\} = -\frac{1}{7}\{12; -6; 24; -21\}$$

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\} = \left\{-\frac{12}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{24}{7}; 3\right\}$$

Ответ: Искомый вектор имеет координаты:

$$\vec{x}\left\{-\frac{12}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{24}{7}; 3\right\}.$$

Задача 4.

Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2,3,2\}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a}) = 34$.

Решение.

Так как по условию задачи $\vec{x} \parallel \vec{a}$, то координаты вектора $\vec{x}$ и пропорциональны координатам вектора $\vec{a}$. Обозначим коэффициент пропорциональности k, тогда координаты вектора $\vec{x} = \{2k; 3k; 2k\}$. Вычислим скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{a}) = 2k \cdot 2 + 3k \cdot 3 + 2k \cdot 2 = 17k$. По условию задачи $(\vec{x}, \vec{a}) = 34$, следовательно, $17k = 34$, $k = 2$. Поэтому координаты вектора $\vec{x} = \{4,6,4\}$.

Ответ: $\vec{x} = \{4,6,4\}$.

Задача 5.

Найдите орт вектора $\vec{p}$ (вектор единичной длины и того же направления, что вектор $\vec{p}$) перпендикулярный вектору $\vec{a}$ и си $OX \cdot \overrightarrow{p^0} \perp \vec{a} = \{3,6,8\}$ и $\overrightarrow{p^0} \perp OX$.

Решение.

Вначале найдем вектор $\vec{p}$ такой что $\vec{p} \perp \vec{a}$ и $\vec{p} \perp OX$. Поэтому найдем вектор $\vec{p}$ как векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{\imath}$.

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{\imath} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \{0, -8{,}6\}.$$

Заметим, что если мы поменяем в произведении векторы $\vec{a}$ и $\vec{\imath}$ местами, то получим вектор $\vec{\imath} \times \vec{a} = \{0{,}8, -6\}$. Т.е. условиям нашей задачи удовлетворяют два взаимно противоположных вектора. Вычислим $|\vec{p}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$. Тогда $\overrightarrow{p^0} = \pm\{0; -0{,}8; 0{,}6\}$.

Ответ: $\overrightarrow{p^0} = \pm\{0; -0{,}8; 0{,}6\}$.

Задача 6.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 6\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = -3\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные взаимноперпендикулярные векторы.

Решение.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах находим как модуль векторного произведения этих векторов.
$S = |\vec{p} \times \vec{q}|$.
Вычислим векторное произведение.

$$\vec{p} \times \vec{q} = (6\vec{a} + 2\vec{b}) \times (-3\vec{a} + \vec{b}) = -18\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b}$$

По свойству 4 векторного произведения, первое и последнее слагаемые равны нулю, по свойству 1 третье слагаемое $-6\vec{b} \times \vec{a} = 6\vec{a} \times \vec{b}$.
Таким образом, получаем $\vec{p} \times \vec{q} = 12\vec{a} \times \vec{b}$.

$$S = |\vec{p} \times \vec{q}| = |12\vec{a} \times \vec{b}| = 12|\vec{p} \parallel |\vec{q}\,| \sin\,90 = 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 12.$$

Ответ: площадь параллелограмма составляет 12 квадратных единиц.

Задача 7.

Вычислить высоту h параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построены на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

Объем можно вычислить с помощью смешанного произведения:

$$V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 49.$$

Вычислим объем по-другому: $V = S \cdot h$, при этом $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а затем его модуль.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \{3\vec{\imath} - 17\vec{\jmath} - 5\vec{k}\}.\text{ Тог да } S = \sqrt{9 + 25 + 289} = \sqrt{323}.$$

Тогда

$$h = \frac{49}{\sqrt{323}} = \frac{49\sqrt{323}}{323}.$$

Ответ: $h = \frac{49\sqrt{323}}{323}$.

Задача 8.

Проверить, компланарны ли векторы $\vec{p} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{q} = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 7\vec{k}$, $\vec{r} = 6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Решение.

По свойству 5 смешанного произведения имеем, три вектора компланарны тогда и только тогда, когда и х смешанное произведение равно нулю. Вычислим смешанное произведение.

$$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2)2 + (-3)5(-5) + 176 - ((-5)(-2)6 + 752 + 1(-3)2) =$$
$$= -8 + 75 + 42 - (60 + 70 - 6) = 5 - 2 - 18 = -15 \neq 0.$$

Ответ: так как смешанное произведение векторов не равно нуль, то векторы некомпланарные.