Специальная математика и основы статистики

Основные понятия, теоремы и формулы теории вероятности

Закономерные явления – это явления, исход которых однозначно определяется некоторыми условиями.

Случайные явления – это явления, исход которых неоднозначен при повторении опытов с сохранением условий их проведения. К неоднозначности исхода приводит влияние большого числа случайных факторов, каждый из которых сам по себе не может изменить результат опыта.

Между случайными и закономерными явлениями нет четкой границы В силу всеобщей связи и взаимозависимости любое явление подвержено влиянию множества случайных факторов, и в этом смысле все явления можно считать случайными. В некоторых случаях действием случайных факторов можно пренебречь, и мы приходим к закономерному явлению В тех же случаях, когда для правильного описания явления необходимо учитывать действие случайных факторов, мы имеем дело со случайным явлением.

Предметом теории вероятностей является изучение закономерностей массовых однородных случайных явлений, а ***теория вероятностей (ТВ)*** – это раздел математики, изучающий математические модели случайных явлений.

К основным понятиям ТВ относятся: испытание, событие, вероятность события.

Испытанием в ТВ называется осуществление какого-либо комплекса условий, при котором наблюдается данное явление. Предполагается, что данный комплекс условий может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Событием называется всякий факт, который может наступить в результате
испытания.

Примеры:

1) бросание монеты - испытание, выпадение герба – событие;
2) стрельба по цели – испытание, промах – событие;
3) бросание игральной кости – испытание, выпало пять очков – событие.

События можно классифицировать по степени возможности их появления
и по характеру взаимосвязи.
Достоверным называется ***событие***, которое в данном испытании всегда наступает, его обозначают U или Ω.
Невозможным называется ***событие***, которое в данном испытании никогда
не наступает, его обозначают V или ∅.
Случайным называется ***событие***, которое в данном испытании может наступить, а может не наступить. Случайные события обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C,…
Пример:
В урне три белых и пять красных шаров. Из урны наугад извлекается один шар – испытание.
События: A={шар красный} – случайное;
B ={шар синий} – невозможное;
C ={шар красный или белый} – достоверное.
■ ■ ■
События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в данном испытании. В противном
случае события называются ***совместными***.
Примеры несовместных событий: появление герба и цифры при одном бросании монеты, попадание и промах при одном выстреле. Те же попадание и промах при двух выстрелах являются уже совместными событиями.
Несколько событий образуют ***полную группу событий***, если в результате
испытания обязательно наступит хотя бы одно из них. В частности, если
события образуют полную группу и несовместны, то в результате испытания
появится одно и только одно из этих событий.
Суммой событий $A_1, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий: $B = A_1 + \cdots + A_n$
Произведением событий $A_1, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий: $C = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$

Вероятность события – числовая величина, характеризующая степень объективной возможности наступления события.
Пусть произведена серия из n испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых могло появиться или не появиться событие A.
Частостью (относительной частотой) события A называется отношение числа испытаний m, в которых событие A появилось, к числу всех испытаний

n: $P^*(\text{A}) = \frac{m}{n}$

Экспериментально установлено, что частость обладает ***свойством устойчивости***: частость мало меняется от серии к серии при большом числе испытаний в серии n, колеблясь около некоторого числового значения.

Статистическое определение вероятности: вероятностью P(A) случайного события A называется число, около которого группируются частости этого события при неограниченном увеличении числа испытаний:

$$P^*(\text{A}) = \frac{m}{n}\xrightarrow{n \to \infty}P(A)$$

Таким образом, вероятность события есть объективная характеристика этого
события, существующая независимо от испытаний. Частость события определяется только по результатам испытаний, в то время как вероятность
события имеет вполне определённое значение, независимо от того, проводились испытания или нет.

Свойства частости:

1. Частость случайного события A есть неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству: $0 \le P^*(A) \le 1$
2. Частость достоверного события Ω равна единице: $P^*(\Omega) = 1$
3. Частость невозможного события ∅ равна нулю: $P^*(\emptyset) = 0$
4. Частость суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частостей событий (правило сложения частостей): $P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B)$

Для совместных событий A и B введены понятия условной частости.

Условной частостью называется частость одного события, вычисленная при условии наступления другого события. Обозначения условной частости: P*(A/B), P*(B/A).

5. Частость произведения двух совместных событий равна произведению частости одного из них на условную частость другого: $P^*(AB) = P^*(A) \cdot P^*(B/A) = P^*(B) \cdot P^*(A/B)$

В силу определения этими же свойствами должны обладать статистические
вероятности событий.

Статистическое определение вероятности отражает суть понятия вероятности как меры объективной возможности наступления события.

События называют ***равновозможными*** в данном испытании, если по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из них не является
более возможным, чем другое.

События, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, назовем ***случаями*** (шансами). Про испытания, исходы которых образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, говорят, что они сводятся к «схеме случаев».

По отношению к любому событию, связанному с данным испытанием, случаи делятся на ***благоприятные***, при наступлении которых это событие происходит, и ***неблагоприятные*** при наступлении которых это событие не происходит.

Классическое определение вероятности: вероятностью P(A) события A называется отношение числа случаев N(A) благоприятных A к общему числу случаев N(Ω): $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$

Классическое определение вероятности обладает всеми свойствами статистической вероятности.

Пример:

В урне находится 2 белых и 3 красных шара. Из урны наугад извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Событие A – извлечение белого шара. N(Ω)=5 – общее число случаев, N(A)=2 – число случаев, благоприятных A. Тогда имеем P(A)=2/5.

■■■

Пусть задача сводится к случайному бросанию точки на ограниченную фигуру Ω (отрезок прямой [a,b] , часть плоскости D, тело в пространстве V) меры μ (Ω).

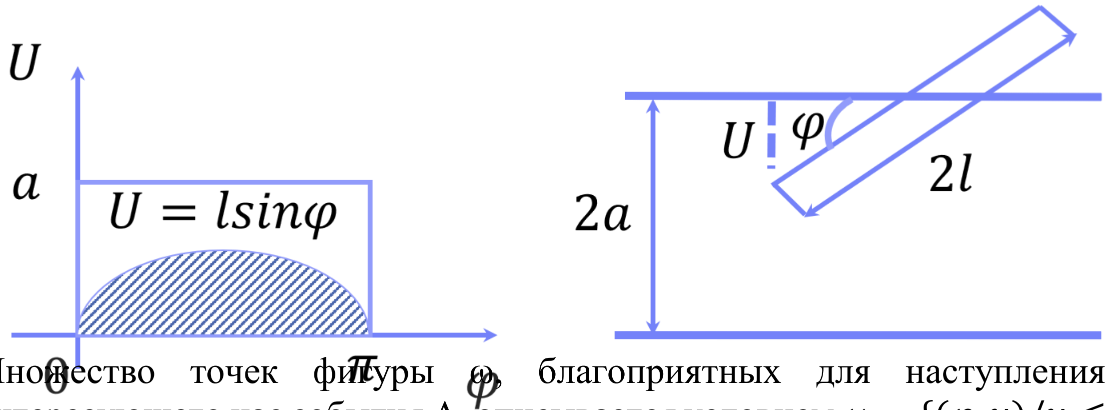
Пусть имеет место «схема случаев». Классическое определение к данному испытанию неприменимо, так как число исходов бесконечно (оно равно числу точек фигуры Ω).

В этом случае применяется **геометрическое определение вероятности**: пусть событие A состоит в том, что случайная точка попадает в область ω, являющуюся частью фигуры Ω и имеющую меру μ(ω), тогда вероятность события определяется по формуле $\mathrm{P(A)}=\frac{\mu(\omega)}{\mu(\Omega)}$

Здесь фигура Ω есть множество возможных, а фигура ω – множество благоприятных исходов испытания. Следовательно, последняя формула есть обобщение формулы классического определения вероятностей на случай испытаний с бесконечным числом исходов.

Пример *(задача Бюффона)*: Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно 2a. На плоскость наудачу

брошена игла длиной $2l$ $(a > l)$.Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.
Решение. Пусть U – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, а φ – угол, составленный иглой с этой прямой. Пара чисел (u,φ) задает положение
иглы с точностью до выбора конкретной прямой. Поскольку нас интересует
взаимное расположение иглы с ближайшей прямой, то в качестве Ω возьмем
прямоугольник: $\Omega = \{(\varphi, u)/0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le u \le a\}$.
Пересечение иглы с прямой происходит только в том случае, когда $u \le l \cdot sin\varphi$



Множество точек фигуры ω, благоприятных для наступления интересующего нас события А, описывается условием $\omega = \{(\varphi, u)/u \le l \cdot sin\varphi\}$
Имеем: $\mu(\Omega) = a\pi$, где μ(Ω) - площадь прямоугольника, $\mu(\omega) = \int_0^{\pi} l \cdot sin\varphi\, d\varphi = 2l$, где μ(ω) - площадь заштрихованной фигуры.
По формуле получим Р(А) $= \frac{\mu(\omega)}{\mu(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}$

■ ■ ■

Вопрос 2. Алгебра событий

При математической формализации модели испытания исходным является
понятие ***пространства элементарных событий*** (обозначается Ω), связанного с данным испытанием. Составные события, или просто события, могут быть описаны как подмножества множества элементарных событий.
В общем случае ***пространством элементарных событий*** называется произвольное множество Ω = {ω}, а элементы ω этого множества называют ***элементарными событиями***.
Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие

(возможно, и не наблюдаемое). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет ***поле событий*** для данного испытания.

Говорят, что ***событие А наступило***, если результатом испытания оказалось событие $\omega \in A$. Событие, совпадающее с пустым множеством, называется ***невозможным событием***, а событие, совпадающее со всем множеством Ω – ***достоверное событие***.

Два события А и В совместны, если соответствующие множества А и В имеют общие элементы, и несовместны в противном случае.

Множество Ω для данного испытания может быть дискретным (конечное или счетное множество) или непрерывным (множество типа континуума).

Так как событие отождествляется с элементом множества, то операции над событиями аналогичны операциям над множествами.

В частности, определены следующие операции и отношения между событиями:

* ***отношение включения***: $A \subset B$ (множество А является подмножеством множества В) – событие А влечет за собой событие В.

* ***отношение эквивалентности***: А = В (эквивалентность множеств) – событие А тождественно событию В: $A = B \leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

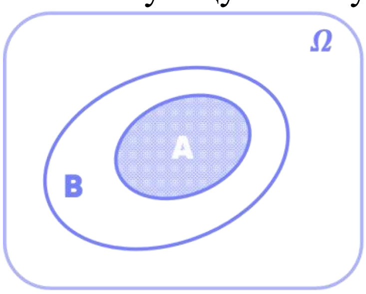
* ***объединение множеств***: А+В ($A \cup B$) – сумма событий

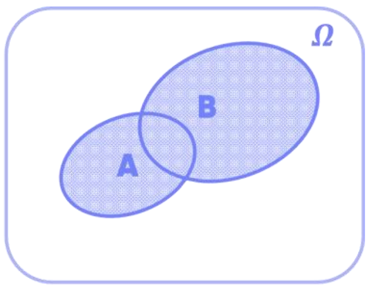
* ***пересечение множеств***: АВ ($A \cap B$) – произведение событий

* ***разность множеств***: А–В (А / В) – разность событий

* ***дополнение множества*** А до Ω: $A = \Omega - A$ ($\bar{A} = \Omega \backslash A$) – противоположное событие. Событие $\bar{A}$ означает, что событие А не произошло.

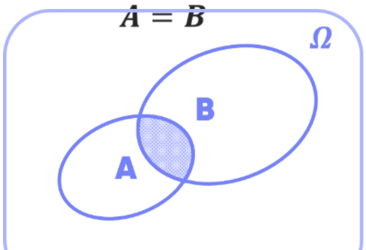
Условно изображая события в виде областей на плоскости, получим диаграммы Венна, которые иллюстрируют введенные определения. Наступление события А трактуется как попадание случайной точки в область, соответствующую этому событию.

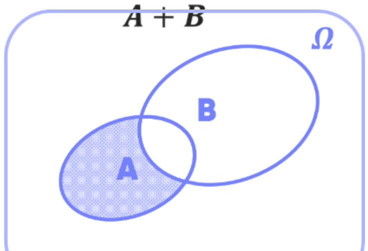


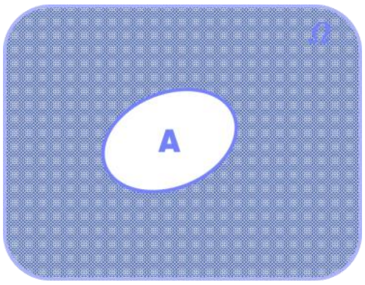


$A \subset B$
$A = B$

$A \cup B$
$A + B$







$\overline{A}$

$$\overline{A} = \Omega - A$$

Понятие произведения и суммы событий переносится на бесконечные последовательности событий:

$A_1 + \dots + A_n + \dots = \sum A_k \; (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup A_k)$

$A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots = \prod A_k \; (A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap A_k)$

Аксиомы ТВ вводят таким образом, чтобы вероятность события А обладала всеми свойствами частости P*(A). В этом случае ТВ будет согласовываться с практикой.

Пусть F – поле событий для данного испытания. Вероятностью P(A) называется числовая функция, определенная для всех A∈F и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам) :

А1. Аксиома неотрицательности. Каждому событию A∈ F сопоставлено неотрицательное число P(A): P(A)≥ 0 $\forall A$∈F.

А2. Аксиома нормированности. Вероятность достоверного события равна

единице: P(Ω) =1.

А3. Аксиома аддитивности. Вероятность наступления хотя бы одного из

попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k)$, где $A_i \cdot A_j = \emptyset$ при $i \neq j, k = \overline{1,n}(\infty)$

Вопрос 2. Основные теоремы ТВ

Случайное событие определяется как событие, которое при осуществлении

определенного комплекса условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других

ограничений, кроме условий S не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной***, если же налагаются другие дополнительные условия, то вероятность называют условной.
Пусть A и B – наблюдаемые события в испытании.
Условной вероятностью P(B/A) наступления события B при условии, что
событие A произошло в результате испытания, называется величина определяемая равенством $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$
Аналогично определяется условная вероятность P(A/B): $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
Пример: В урне 3 белых и 2 красных шара. Из урны последовательно без возвращения извлекают два шара (испытание). Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен красный шар (событие A).
Решение. После первого испытания, когда произошло событие A, в урне
осталось 4 шара, из них 3 белых.
Искомая условная вероятность равна $P(B/A) = \frac{3}{4}$
Определим теперь P(B/A) по формуле условной вероятности. Вероятность появления красного шара в первом испытании $\mathrm{P(A)} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.
Найдем вероятность P(AB) того, что в первом испытании извлечен красный шар, а затем – белый. Общее число случаев совместного появления двух шаров любого цвета $N(\Omega) = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.
При этом событию AB благоприятствуют $N(AB)$=2·3=6 случаев.
Следовательно, $P(AB) = \frac{N(AB)}{N(\Omega)} = \frac{6}{20} = 0{,}3$ и тогда $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$.
Как и следовало ожидать, ответ получился такой же, как и при непосредственном вычислении.

■ ■ ■

Случайные события называются ***зависимыми***, если вероятность наступления одного из них зависит от того, имело место или нет другое событие.
Теорема 1 Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\mathrm{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)}$$

Пример: Вероятность попадания ракеты в цель (событие A) P(A) = 0,9. Вероятность поражения цели при попадании в нее одной ракеты

(событие B) P(B A) = 0,4 . Найти вероятность поражения цели при пуске одной ракеты.
Решение. Событие AB – ракета попала в цель и цель поражена.
По теореме 1: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}36$.

■ ■ ■

Теорему 1 можно обобщить на случай любого числа событий.
Теорема 2 Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности остальных событий, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

В частности, для трех событий:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$$

Событие A называется ***независимым*** от события B, если выполняется условие $P(A/B) = P(A)$.
Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.
События A и B называются ***независимыми***, если P(AB) = P(A) · P(B).
Теорема 3 Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.
События $A_1; \ldots; A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если для любого набора из m событий (m = 2,3,..., n) выполняется равенство:

$$P(A_{k1} \cdot \ldots \cdot A_{km}) = P(A_{k1}) \cdot P(A_{k2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{km})$$

Теорема 4 Вероятность произведения нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Пример: Два стрелка производят по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка (событие A1) P(A1)=0,7, вероятность попадания в цель для второго стрелка (событие A2) P(A2)=0,8. Чему равна вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?
Решение. События A1 и A2 – независимы.
P(A1A2)=P(A1)·P(A2)=0,7·0,8=0,56

■ ■ ■

В соответствии с аксиомой A3 вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.
Теорема 5 Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Пример: Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого и второго орудия соответственно равны:P1=0,8; P2=0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе.
Решение. Пусть A1={попадание из первого орудия}, A2={попадание из второго орудия}. События A1 и A2 совместны и независимы. Имеем P(A1A2)=P(A1)P(A2)=0,8·0,9=0,72;
P(A1+A2)=P(A1)+P(A2)−P(A1A2)=0,8+0,9−0,72=0,98.
■ ■ ■
Следствие 1. $\mathrm{P(A)} = \mathbf{1} - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$
Следствие 2. Если $\mathrm{A}_1; \dots; \mathrm{A}_n$ – полная группа попарно несовместных событий, то P(A1)+P(A2)+...+P(An)=1.
Следствие 3. Вероятность появления хотя бы одного из событий $\mathrm{A}_1; \dots; \mathrm{A}_n$, независимых в совокупности, равна $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 + \dots + \mathrm{A}_n) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_n)$
Пример: Истребитель атакует бомбардировщик и производит пуск четырех неуправляемых ракет. Для поражения бомбардировщика достаточно хотя бы одного попадания ракеты. Найти вероятность поражения бомбардировщика, если вероятность попадания каждой ракеты в цель $p = 0{,}4$.
Решение. Пусть $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ – попадание в цель соответственно каждой по счету ракетой. Тогда $\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{A}}_2, \overline{\mathrm{A}}_3, \overline{\mathrm{A}}_4$ – промахи этих ракет. Пусть событие B – цель поражена (хотя бы одно попадание), тогда B – нет попаданий. Событие $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \overline{\mathrm{A}}_3 \cdot \overline{\mathrm{A}}_4$.
По условию P(A1)=P(A2)=P(A3)=P(A4)=p=0,4.
Имеем $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_2) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_3) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_4) = q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
Так как события $\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{A}}_2, \overline{\mathrm{A}}_3, \overline{\mathrm{A}}_4$независимые, то
$P(\overline{\mathrm{B}}) = P(\overline{\mathrm{A}}_1) \cdot P(\overline{\mathrm{A}}_2) \cdot P(\overline{\mathrm{A}}_3) \cdot P(\overline{\mathrm{A}}_4) = q^4 = 0{,}6^4$ и тогда $\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - 0{,}6^4 \approx 0{,}88$
■ ■ ■
Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу.
Теорема (формула полной вероятности) Вероятность события A, которое может наступить вместе с одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, равна сумме произведений вероятности каждой из гипотез на соответствующую ей условную вероятность события A: $\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_i)$
Теорема (формулы Байеса) Пусть $H_1, \dots H_n$ – полная группа событий, $P(H_i)>0$. Тогда для любого случайного события B такого, что P(B)>0 выполняются равенства: $\mathrm{P}(\mathrm{H}_i/B) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{P}(B/\mathrm{H}_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(B/H_i)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{P}(B/\mathrm{H}_i)}{P(B)}$

Пример: В пирамиде 5 винтовок, две из них снабжены оптическим прицелом. Вероятность поразить мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9, а для винтовки без оптического прицела – 0,7. Требуется: 1) Найти вероятность поражения мишени,

если стрелок произвел один выстрел из наудачу взятой винтовки. 2) Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: мишень поражена из винтовки с оптическим прицелом или без него?
Решение. Введем гипотезы:
H1 - винтовка с оптическим прицелом;
H2 - винтовка без оптического прицела;
A – цель поражена при одном выстреле.
$P(H_1) = \frac{2}{5}, P(H_2) = \frac{3}{5}, P\left(A/H_1\right) = 0{,}9, P\left(A/H_2\right) = 0{,}7$
1) По формуле полной вероятности найдем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{2}{5} \cdot 0{,}9 + \frac{3}{5} \cdot 0{,}7 = 0{,}78$$

2) По формуле Байеса найдем вероятности гипотез после испытания:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 0{,}9}{0{,}78} = \frac{6}{13}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 0{,}7}{0{,}78} = \frac{7}{13}$$

Так как $P(H_2/A) > P(H_1/A)$, то более вероятно, что цель поражена из винтовки без оптического прицела.

■ ■ ■

Знание основных теорем и формул теории вероятностей позволяет по известным вероятностям элементарных событий находить вероятности сложных событий, что имеет важное практическое значение.

Вопрос 4. Последовательности независимых испытаний

Как известно, испытанием называется осуществление определенного комплекса условий S, при которых могут наступать некоторые события. В результате каждого испытания появляется одно из нескольких попарно несовместных событий, которые называют исходами. На практике часто приходится решать задачи, связанные с повторением испытаний, в которых требуется оценить число наступления некоторых исходов в серии из n испытаний определенное количество раз. Испытания называются независимыми, если вероятности исходов каждого испытания не зависят от исходов других испытаний. Частный случай схемы независимых испытаний, в котором каждое испытание может закончиться только одним из двух исходов, называют ***схемой Бернулли***.
Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться, либо не появиться событие A. Пусть вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же.
Обозначим $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Поставим задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит ровно m раз. Искомую вероятность обозначим Pn (m), где ($0 \le m \le n$) .
Имеем схему независимых испытаний в одинаковых условиях
Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.
Прилученные вероятности называют ***биномиальными***, поскольку правая часть формула есть коэффициент разложения x^m в бином по степеням x: $(q+px)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} x^m$
Таким образом, вероятность появления события A в серии из n испытаний может быть представлена таблицей:

m	1	2	…	n	…
$P_n(m)$	p	2pq	…	$C_n^m p^m q^{n-}$	…

Пример: Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,8. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии в течение 2 суток не превысит нормы.
Решение. Имеем схему Бернулли: n=5, m=2, p=0,8, q=0,2. По формуле Бернулли находим: $P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$.

■ ■ ■

Обозначим $P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2)$ – вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли событие A наступит от m_1 до m_2 раз ($0 \le m_1 \le m_2 \le n$).
Тогда имеет место формула

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$$

В частности, вероятность $P_n(1 \le m \le n)$ того, что в n испытаниях *событие A наступит хотя бы один раз*, равна $P_n(1, n) = P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n$;
вероятность того, что *событие A в n испытаниях наступит не менее k раз*, равна $P_n(k, n) = P_n(k \le m \le n) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m)$
Пример: Планируется нанесение бомбового удара по цели, для поражения которой необходимо попадание хотя бы одной бомбы. Вероятность попадания в цель одной бомбы равна 0,3. Определить необходимое количество бомб для поражения цели с гарантированной вероятностью α=0,8.
Решение. Имеем схему Бернулли, p=0,3, q=0,7.

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n \ge \alpha \ \rightarrow \ q^n \le 1 - \alpha = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 < 1$$

Отсюда: $n lgq \ge \lg(1-\alpha) \ \rightarrow \ n \ge \frac{\lg(1-\alpha)}{lgq} = \frac{lg0{,}2}{lg0{,}7} = 4{,}4$
Вывод: для поражения цели необходимо не менее 5 бомб.

■ ■ ■

Точное вычисление вероятностей для больших значений *n* по формуле Бернулли через факториалы достаточно трудоемко. В ряде случаев

можно вычисления упростить, если воспользоваться таблицами факториалов или формулой Стирлинга: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (запись ($a_n \sim b_n$) означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$). Однако и этот путь остается громоздким и не всегда обеспечивает требуемую точность. Возникла необходимость в асимптотических формулах, позволяющих с достаточной степенью точности
определять эти вероятности. (Функцию $\phi(x)$ называют ***асимптотическим приближением*** функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)} = 1$).

Теорема (Локальная теорема Муавра – Лапласа). Если вероятность наступления события *A* в n независимых испытаниях постоянна и равна p (0<p<1), то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие *A* *н*аступит ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) $P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где p – вероятность наступления события A в каждом испытании, $q = 1 - \text{p}$, $\text{x} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$.

Теорема (Интегральная теорема Муавра – Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что в *n* испытаниях событие A наступит от m_1 до m_2 раз, приближенно равна $P_n(m_1,m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2) \cong \Phi(\text{x}_2) - \Phi(\text{x}_1)$, где $\text{x}_1 = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\text{x}_2 = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(\text{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\text{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Для функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ имеются таблицы для $x \ge 0$.
Для отрицательных аргументов *x* (*x*>0) значения этих функций находят с учетом того, что $\varphi(x)$ – четная, а $\Phi(x)$ – нечетная функции.
Приближенные формулы применяют в случаях, когда p и q не малы, а npq≥9.

Пример: Вероятность наступления события *A* в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие *A* произойдет: 1) 750 раз; 2) от 710 до 740 раз.

Решение. Так как npq = 900 · 0.8 · 0.2 =144 >9, то можно использовать теоремы Муавра-Лапласа:

1) $\text{x} = \frac{750-900\cdot0{,}8}{\sqrt{900\cdot0{,}8\cdot0{,}2}} = 2{,}5$, $\varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175$, $P_{900}(750) \cong \frac{1}{\sqrt{144}}\varphi(2{,}5) \approx 0{,}00146$

2) $\text{x}_1 = \frac{710-720}{12} \approx -0{,}83$, $\text{x}_2 = \frac{740-720}{12} = 1{,}67$,
$\Phi(-0{,}83) = -\Phi(0{,}83) \approx -0{,}2967$, $\Phi(1{,}67) \approx 0{,}4527$,
$P_{900}(710 \le m \le 740) \cong 0{,}4527 + 0{,}2967 = 0{,}7494$

■■■

При применении локальной теоремы Муавра – Лапласа можно заметить, что асимптотическое представление вероятности $P_n(m)$

посредством функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$ действует тем хуже, чем больше вероятность p отличается от половины, то есть чем меньше значения p или q приходится рассматривать, и
это представление отказывается служить при p=0, q=1, а также при p=1, q=0.

Теорема Пуассона. Если $n \to \infty$ и p $\to 0$ так, что $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$, то $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \; \to \; P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ $(m = \overline{0,\infty})$

(для функции $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ имеется таблица)

Пример: Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0.001. Найти вероятность того, что на базу прибудут не более 2 негодных изделий.

Решение. p=0,001<0,1 npq=5000·0,001·0,999≈5<9.

Значит, можно использовать формулу Пуассона

$\lambda = np = 0{,}001 \cdot 5000 = 5,\; P_n(0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} \approx 0{,}0067,\; P_n(1) = \frac{5^1}{1!} e^{-5} \approx 0{,}0337,\;\; P_n(2) = \frac{5^2}{2!} e^{-5} \approx 0{,}08375,\;\; P_n(0 \le m \le 2) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}08375 = 0{,}12415$