Специальная математика и основы статистики

Проверка статистических гипотез

Вопрос 1. Общая схема проверки статистических гипотез

Статистической гипотезой H_0 (***нулевой гипотезой***) называется любое предположение относительно закона распределения исследуемой случайной величины X.
Гипотезы бывают простые и сложные. ***Простая гипотеза*** содержит одно утверждение и полностью определяет закон распределения величины X в отличии от сложной, когда проверяется несколько утверждений.
Гипотезы бывают ***параметрическими***, если выдвигается предположение о параметрах распределения при известном законе и ***непараметрическими***, если предположение выдвигается о самом виде закона распределения.
Наряду с выдвинутой гипотезой H_0 рассматривают противоречащую ей гипотезу H_1 (***альтернативную гипотезу***). Если выдвинутая гипотеза H_0 будет отвергнута, то имеет место альтернативная гипотеза H_1.
Критерием проверки статистической гипотезы называется некоторое правило, позволяющее принять ее или отвергнуть.
Причем критерии строятся с помощью случайной величины K (часто именно ее называют критерием), для которой известно распределение.
Наблюдаемым значением критерия $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленное по данным выборки.
Параметрические гипотезы проверяются с помощью критериев ***значимости***, а непараметрические – с помощью критериев ***согласия***.

В случае проверки гипотез возможны ошибки:
Ошибка 1-го рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Вероятность ошибки первого рода α называется ***уровнем значимости*** критерия, по которому производится проверка.
Ошибка 2-го рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза. Если β – вероятность ошибки второго рода, то величина 1-β называется ***мощностью критерия***.
Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Если уровень значимости α уже выбран и задан объем выборки, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Выполнение этого требования должно обеспечить минимальную ошибку 2-го рода, что более желательно.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если $K_{набл}$ принадлежит критической области – гипотезу H_0 отвергают, если же $K_{набл}$ принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу H_0 принимают.

Вопрос 2. Проверка гипотез о нормальном законе распределения генеральной совокупности

После того, как получен эмпирический закон распределения выборки X и по данным этого вариационного ряда построен полигон относительных частот, делается вывод (выдвигается гипотеза H_0) о законе распределения:

H_0: генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

И выдвигается гипотеза H_1, противоречащая гипотезе H_0 или ее отвергающая.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения

производится при помощи специально подобранной случайной величины–

критерия согласия.

Разработано несколько таких критериев: χ^2-Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

Рассмотрим критерий χ^2-Пирсона, как классический пример применительно к проверке гипотезы о нормальном законе распределения ГС.

Пусть нам задан уровень значимости α (γ – доверительная вероятность, то есть вероятность принять верную гипотезу; α – это вероятность отвергнуть

верную гипотезу, причем $\alpha+\gamma=1$).

Для того, чтобы при заданном α проверить гипотезу о нормальном распределении ГС, надо вычислить теоретические вероятности. Плотность распределения для нормального закона есть функция: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M[x])^2}{2D[x]}}$

Тогда, пользуясь формулой нахождения вероятности попадания случайной величины в интервал: $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$, имеем $\forall j = \overline{1,k}$

$$p_j = P(a_{j-1} < x < a_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_в} e^{-\frac{(\bar{x}_j - M_в[x])^2}{2D_в[x]}} \cdot h$$

Где a_j $(j = \overline{0,k})$ – границы частных подынтервалов; $\bar{x}_j$ – середина j-го частичного подыитервала; h – длина частичного подынтервала.
Далее составляется таблица:

x	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	…	$\overline{x_k}$	
μ	μ_1	μ_2	…	μ_k	Эмпирические частоты
p	p_1	p_2	…	p_k	Теоретические частоты

Оценка отклонения эмпирических вероятностей μ_j $(j = \overline{1,k})$ от теоретических вероятностей p_j $(j = \overline{1,k})$ производится с помощью критерия

Пирсона χ^2: $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\mu_j - p_j)^2 \cdot N}{p_j}$

По таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы r=k-3 (k – количество подынтервалов) находим критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$ правосторонней критической области.

<u>Правило 1</u>. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, тогда нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном законе распределения генеральной совокупности (то есть
эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно)).

<u>Правило 2</u>. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, тогда гипотеза H_0 отвергается.

Вопрос 3. Проверка гипотез о других законах распределения генеральной совокупности

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α, проверить гипотезу о показательном распределении ГС надо:

1. Вычислить $\text{M}_\text{в}[x]$ и принять в качестве оценки параметра λ показательного распределения величину, обратную выборочной средней: $\lambda = \frac{1}{\text{M}_\text{в}[x]}$
2. Вычислить теоретические вероятности p_j $(j = \overline{1,k})$. Поскольку плотность распределения для показательного (экспоненциального) закона есть $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$, тогда $p_j = P(a_{j-1} < x < a_j) = e^{-\lambda \cdot a_{j-1}} - e^{-\lambda \cdot a_j}$, где a_j $(j = \overline{0,k})$ – границы частных подынтервалов.
3. Составляем сводную таблицу:

x	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	…	$\overline{x_k}$	
μ	μ_1	μ_2	…	μ_k	Эмпирические частоты
p	p_1	p_2	…	p_k	Теоретические частоты

4. Оценку отклонения эмпирических вероятностей μ_j $(j = \overline{1,k})$ от теоретических вероятностей p_j $(j = \overline{1,k})$ производим с помощью критерия Пирсона χ^2: $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\mu_j - p_j)^2 \cdot N}{p_j}$

5. По таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $r=k-2$ (k – количество подынтервалов) находим критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$ правосторонней критической области.

Для того чтобы при заданном уровне значимости α, проверить гипотезу о равномерном распределении ГС надо:

1. Оценить параметры a и c – концы интервала, в котором наблюдались возможные значения X, по формулам (через a^* и c^* обозначены оценки параметров): $a^* = \text{М}_\text{в}[x] - \sqrt{3} \cdot \sigma_\text{в}$, $c^* = \text{М}_\text{в}[x] + \sqrt{3} \cdot \sigma_\text{в}$.

2. Вычислить теоретические вероятности p_j $(j = \overline{1,k})$. Поскольку плотность распределения для показательного (экспоненциального) закона есть $f(x) = \frac{1}{c^* - a^*}$, тогда $p_j = P\left(a_{j-1} < x < a_j\right) = \frac{1}{c^* - a^*} \cdot h$, где a_j $(j = \overline{0,k})$ – границы частных подынтервалов; h – длина частичного подынтервала.

Получили, что все p_j $(j = \overline{1,k})$ равны одному числу $\frac{h}{c^* - a^*}$.

3. Составляем сводную таблицу на основе эмпирических вероятностей и рассчитанных теоретических вероятностей

4. Оценку отклонения эмпирических вероятностей μ_j $(j = \overline{1,k})$ от теоретических вероятностей p_j $(j = \overline{1,k})$ производим с помощью критерия Пирсона χ^2: $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\mu_j - p_j)^2 \cdot N}{p_j}$

5. По таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $r=k-3$ (k – количество подынтервалов) находим критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, r)$ правосторонней критической области.