ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вопрос 1. Общие понятия и совместные и несовместные системы уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными мы будем называть выражение вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где x1, x2, ..., xn – неизвестные (переменные); a11, a12, ..., a1n,...,am1, am2,..., amn – коэффициенты при неизвестных, b1, b2,..., bn — правая часть (свободные члены).

Эту систему уравнений можно записать в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Это основная матрица системы, то есть, матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Тогда расширенная матрица системы выглядит так:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_n & b_m \end{array}\right)$$

При этом

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - Это матрица неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - Это матрица правой части.

Тогда исходную систему можно записать в виде матричного уравнения A•X = B.

Упорядоченный набор чисел (α1, α2,..., α3) называется решением системы уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

если каждое из уравнений данной системы обращается в верное равенство при подстановке вместо x1, x2,...,xn чисел α1, α2,..., αn.

Совместные/несовместные и определенные/неопределенные системы уравнений

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы: r(A) =r(Ā).

При этом, если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. r < n, то система имеет единственное решение.
Если ранг совместной системы меньше числа переменных, т.е. r < n, то система неопределенная и имеет бесконечно много решений.

Пример. Исследуем на совместность следующие системы:

$$1)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_1 + 4x_3 + 8x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 7 \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$$

1. Найдем ранги матриц A и Ā:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}3&-5&2&4&2\\7&-4&1&3&5\\5&7&-4&-6&3\end{array}\right)\to \text{I}\cdot(-2)+\text{II}\to\left(\begin{array}{cccc|c}3&-5&2&4&2\\1&6&-3&-5&1\\5&7&-4&-6&3\end{array}\right)\to \text{II}\cdot(-2)+\text{III}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}3&-5&2&4&2\\1&6&-3&-5&1\\-1&17&-8&-14&-1\end{array}\right)\to \text{I}\leftrightarrow\text{II}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&6&-3&-5&1\\3&-5&2&4&2\\-1&17&-8&-14&-1\end{array}\right)\to$$

$$\to \text{I}\cdot(-3)+\text{II}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&6&-3&-5&1\\0&-23&11&19&-1\\-1&17&-8&-14&-1\end{array}\right)\to \text{I}\cdot(-3)+\text{III}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&6&-3&-5&1\\0&-23&11&19&-1\\0&23&-11&19&0\end{array}\right)\to\text{II}+\text{III}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&6&-3&-5&1\\0&-23&11&19&-1\\0&0&0&0&-1\end{array}\right)$$

Слева от вертикальной черты в расширенной матрице Ā стоят элементы матрицы A, следовательно, r(A) = 2, r(Ā) = 3, т.е. r(A) ≠ r(Ā). На основании теоремы Кронекера-Капелли система несовместна (решений не имеет).

2. Найдем ранги матриц A и Ā:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&7&2&5\\-1&0&4&8&3\\3&6&10&-4&7\\-2&-2&-3&6&-2\end{array}\right)\to \text{см. задача 5 урок}$$

$$\text{2 вопрос 4}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&7&2&5\\0&3&11&10&8\end{array}\right)$$

r(A) = 2, r(Ā) = 2 (у матриц A и Ā — общий базисный минор, по две линейно независимые строки), следовательно, система совместна.

Вопрос 2. Методы решения линейных уравнений. Системы линейных однородных уравнений.

Матричный метод

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

может быть записана в матрице A•X = B, где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_n & | & b_m \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Пусть m = n, т.е. число уравнений системы совпадает с числом неизвестных, тогда A – квадратная матрица.

Пусть |A| ≠ 0, т.е. матрица A – невырожденная, тогда система уравнений также называется невырожденной.

В этом случае существует матрица A-1, обратная к матрице A.

Итак, мы имеем невырожденную систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, записанную в матричной форме A•X = B.

Умножим обе части равенства A•X = B на матрицу A-1 слева (не справа!):
(A-1) • A•X = A-1 • B.

Поскольку (A-1) • A = E и E•X = X, то из 3' следует X = (A-1) •B.

Заметим, что так как |A| ≠ 0, то r(A) = n.

Расширенная матрица Ā

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

содержит n строк и (n + 1) столбец, поэтому для матрицы Ā не существует миноров (определителей) (n+1)-го порядка и выше. Следовательно, ранг матрицы Ā не может быть больше n.

А так как элементы матрицы A являются элементами матрицы Ā и |A| ≠ 0, то r(A) = r(Ā) = n и данная система действительно совместна.

Заметим, что так как обратная матрица (A)-1 к матрице A единственна, то решение X = (A-1) •B уравнения (A-1) • A•X = A-1 • B, а следовательно, и рассматриваемой системы, является единственным.

Таким образом, если в системе линейных алгебраических уравнений число уравнений совпадает с числом неизвестных и система невырожденная (определитель матрицы системы отличен от 0), то такая система имеет единственное решение (система определенная).

Метод Крамера

Снова рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель матрицы системы |Ā| ≠ 0.

Матричное равенство X = A-1• B запишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

То есть:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}\cdot b_1 + A_{21}\cdot b_{2+\cdots+A_{n1}\cdot b_n}}{|A|} \\ \frac{A_{12}\cdot b_1 + A_{22}\cdot b_{2+\cdots+A_{n2}\cdot b_n}}{|A|} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{A_{1n}\cdot b_1 + A_{2n}\cdot b_{2+\cdots+A_{nn}\cdot b_n}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что:

$$x_1 = \frac{A_{11}\cdot b_1 + A_{21}\cdot b_{2+\cdots+A_{n1}\cdot b_n}}{|A|}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{A_{1n}\cdot b_1 + A_{2n}\cdot b_{2+\cdots+A_{nn}\cdot b_n}}{|A|}$$

Но $\frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_{2} + \dots + A_{n1} \cdot b_n}{|A|}$ – это разложение определителя

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель |A1| получается из определителя |A| путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, x1 = |A1|/|A|.

Аналогично, x1 = |A2|/|A|, где |A2| получается из определителя |A| путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов, x1 = |A2|/|A|..., xn = |An|/|A|.

Получившиеся формулы для нахождения переменных x1, x2,..., xn называются формулами Крамера.

Метод Гаусса

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения переменных с помощью элементарных преобразований.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Предположим, что данная система совместна, т.е. r(A) = r(Ā) = r (по теореме Кронекера-Капелли). Очевидно, что r ≤ n, т.к. число столбцов матрицы A равно n, а r это порядок базисного минора (определителя наивысшего порядка, отличного от нуля, составленного из элементов матрицы A).

Введем новое определение.

Две системы называются равносильными (эквивалентными), если они имеют одно и то же множество решений.

Заметим, что если проводить элементарные преобразования расширенной матрицы Ā, касающиеся только строк (не столбцов!), то это равносильно проведению аналогичных преобразований с уравнениями системы.

Например, перестановка местами двух строк матрицы Ā равносильна перестановке местами соответствующих уравнений системы и т.д. Очевидно, что такие преобразования преобразуют исходную систему к равносильной системе.

Вернемся к методу Гаусса и этой системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Мы предположили, что эта система совместна и r ≤ n.

Пусть r < n. При отыскании ранга r(A) и r(Ā) приводим матрицу Ā к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, касающихся строк. При этом возможна перестановка местами столбцов матрицы A, что равносильно перестановке местами соответствующих слагаемых в уравнениях системы (это следует учесть при дальнейшем решении):

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1r} & \overline{a}_{1(r+1)} & \dots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2r} & \overline{a}_{2(r+1)} & \dots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{rr} & \overline{a}_{r(r+1)} & \dots & \overline{a}_{rn} & \overline{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выделяем базисный минор:

$$M = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1r} \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{rr} \end{vmatrix}$$

Неизвестные x1, x2,..., xn , коэффициенты при которых вошли в базисный минор M, называем базисными. Остальные (n - r) неизвестных xr+1, xr+2,..., xn называются свободными.

На основании теоремы о базисном миноре, максимальное число линейно независимых строк расширенной матрицы Ā, а, следовательно, и максимальное число линейно независимых уравнений системы, равно числу r. Оставшиеся (m - r) уравнений являются следствиями r линейно независимых уравнений.

Тогда рассматриваемая нами система равносильна системе r линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \overline{a}_{12}x_2 + \cdots + \overline{a}_{1r}x_r + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1 \\ \overline{a}_{22}x_2 + \cdots + \overline{a}_{2r}x_r + \cdots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \overline{a}_{rr}x_r + \cdots + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r \end{cases}$$

Переносим слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правые части уравнений:

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \cdots + \bar{a}_{1r}x_r = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - \bar{a}_{1n}x_n \\ \bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2r}x_r = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - \bar{a}_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ \bar{a}_{rr}x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - \bar{a}_{rn}x_n \end{cases}$$

Получаем систему r линейных уравнений с r неизвестными x1, x2,..., xn . Определитель матрицы последней системы (базисный минор) отличен от нуля.

Итак, мы завершили так называемый прямой ход метода Гаусса.

Далее осуществляем обратный ход метода Гаусса.

Из последнего уравнения системы

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \cdots + \bar{a}_{1r}x_r = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - \bar{a}_{1n}x_n \\ \bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2r}x_r = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - \bar{a}_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ \bar{a}_{rr}x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - \bar{a}_{rn}x_n \end{cases}$$

находим xr (выражаем через свободные неизвестные); поднимаясь от последнего уравнения к предпоследнему, находим xr-1 и т.д.

Таким образом, все базисные неизвестные x1, x2,..., xr, будут выражены через (n - r) свободные неизвестные xr+1, xr+2,..., xn. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, будем получать все новые и новые решения исходной системы.

При r = n, очевидно, все неизвестные x1, x2,..., xn являются базисными (число свободных неизвестных r–n = 0). Система, аналогичная ранее рассмотренной системе, а значит, и исходная система, имеет единственное решение.

Вывод таков:
Если r(A) = r(Ā) = r < n, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений (неопределенная).
Если r = n, то система имеет единственное решение (определенная).

Системы линейных однородных уравнений.

Система m линейных уравнений с n неизвестными называется системой линейных однородных уравнений, если все свободные члены в этой системе равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как имеет по крайней мере нулевое решение.

Система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа переменных, т.е. r < n.

Обозначим решение такой системы в виде строки следующим образом:

x1=k1, x2=k2,..., xn=kn тогда l = (k1, k2,...,kn).

Решения системы линейных однородных уравнений имеют следующие свойства:

1. Если l1 = (k1, k2,...,kn) – решение, то λl1 – решение, где λ є ℝ.
2. Если l1, = (k1, k2,...,kn) – решение и l2 = (m1, m2,...,mn) – решение, то для любых λ1, λ2 є ℝ линейная комбинация λ1l1 + λ2l2 – решение.

Введем новое определение.

Система линейно независимых решений l1, l2, ..., ln называется фундаментальной, если каждое решение системы является линейной комбинацией решений l1, l2, ..., lk.

Теорема.

Если ранг матрицы системы линейных однородных уравнений меньше числа переменных, т.е. r < n , то всякая фундаментальная система решений состоит из n – r решений. Поэтому общее решение системы линейных однородных уравнений имеет вид λ1l1 + λ2 l2 + · · · + λk lk для любой фундаментальной системы решений l1, l2, ..., lk и λ1, λ2, . . . , λk ∈ R.

Вопрос 3. Практическое занятие.

Задача 1.

Требуется решить матричным методом систему

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 1 \\ -3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Действие 1. Для этой системы запишем матричное уравнение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим матричное уравнение A•X = B.

Действие 2. Вычислим |A| = 1•1•3 + 4• (-3) • (-1) + 1•2•2 — (-1•1•1+1•2•4 +3•2• (-3)) = 3 + 12 + 4+ 1- 8 +18 = 30 ≠ 0.

Следовательно, матрица A-1 существует.

Действие 3. Найдем матрицу A-1. Для этого вычислим присоединенную матрицу Ã.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Для матрицы Ã найдем все алгебраические дополнения.

$$\tilde{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5,$$

$$\tilde{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 4) = -10,$$

$$\tilde{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5,$$

$$\tilde{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-9 - 2) = 11,$$

$$\tilde{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4,$$

$$\tilde{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1,$$

$$\tilde{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 1 = -13,$$

$$\tilde{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} = -(4-2) = -2,$$
$$\tilde{A}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1+6 = 7.$$

Тогда:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 10 & 5\\ 11 & 4 & 1\\ -13 & -2 & 7\end{pmatrix}}$$

Действие 4. Решение системы:

$$\boldsymbol{X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 10 & 5\\ 11 & 4 & 1\\ -13 & -2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-5+10\\ 11+2\\ -13+14\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 13\\ 1\end{pmatrix}}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/6\\ 13/30\\ 1/30\end{pmatrix}}$$

Следовательно, система имеет единственное решение x1 = 1/6, x2 = 13/30, x3 = 1/30.

Действие 5. Сделаем проверку:

$$\boldsymbol{\begin{cases}\frac{5}{30} + 2\cdot\frac{13}{30} - 1\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\\ -3\cdot\frac{1}{6} + \frac{13}{30} + \frac{2}{30} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0\\ \frac{1}{6} + 4\cdot\frac{13}{30} + 3\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{6} + \frac{11}{6} = 2\end{cases}}$$

Ответ: (1/6, 13/30, 1/30).

Задача 2.

Требуется решить систему по правилу Крамера.

$$\boldsymbol{\begin{cases}x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 = 1\\ -3\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 = 0\\ x_1 + 4\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2\end{cases}}$$

Решение.

- $\boldsymbol{|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix} = 30 \neq 0,}$

- $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 2 - \big((-1) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot}$ $\cdot$
$\mathbf{4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 3\big) = 3 + 8 - 6 = 5}$

- $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{1 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - ((-1) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot}$
$\mathbf{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot 3)}$ = 6+2+5=13

- $|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot}$ $\cdot$
$\mathbf{1 + 2 \cdot 2 \cdot (-3)) = 2 - 12 - (1 - 12) = -10 + 11 = 1}$.

По формулам Крамера получаем:

- x1 = |A1|/|A| = 5/30 = 1/6
- x2 = |A2|/A| = 13/30
- x3 = |A3|/|A| = 1/30.

Ответ: (1/6, 13/30, 1/30).

Задача 3.

Требуется решить методом Гаусса следующую систему:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 1} \\ \mathbf{-3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 0} \\ \mathbf{x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2} \end{cases}$$

Решение.

Действие 1. Исследуем систему на совместность, сравнивая r(A) и r(Ā):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \cdot 3 + II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\cdot(-1)+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}\cdot(-3)+\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{III}\cdot(-3)+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}\cdot(-2)+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 1 \end{pmatrix}$$

r(Ā) = 3 и r(A) = 3, значит, система совместна.

Действие 2. Заметим, что r = 3, n = 3, следовательно, система имеет единственное решение (система определенная).

Неизвестные x1, x2,…,xn являются базисными (число свободных неизвестных n - r = 0).

Действие 3. Исходная система равносильна системе с преобразованной расширенной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - 13 \cdot x_3 = 0 \\ 30 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

Прямой ход Гаусса выполнен.

Действие 4. Выполним обратный ход метода Гаусса.
Выражаем x3 из последнего уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - 13 \cdot x_3 = 0 \\ x_3 = 1/30 \end{cases}$$

Далее выражаем x2 из второго уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 = 13 \cdot x_3 \\ x_3 = 1/30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 = 13 \cdot 1/30 = 13/30 \\ x_3 = 1/30 \end{cases}$$

Наконец, из первого уравнения выражаем переменную r.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2 \cdot x_2 + x_3 \\ x_2 = 13/30 \\ x_3 = 1/30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2 \cdot 13/30 + 1/30 \\ x_2 = 13/30 \\ x_3 = 1/30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5/30 = 1/6 \\ x_2 = 13/30 \\ x_3 = 1/30 \end{cases}$$

Ответ: (1/6, 13/30, 1/30).

Задача 4.

Требуется решить методом Гаусса следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 5 \\ -x_1 + 4 \cdot x_3 + 8x_4 = 3 \\ 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 - 4 \cdot x_4 = 7 \\ -2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = -2 \end{cases}$$

Решение.

Действие 1. Исследуем систему на совместность, сравнивая r(A) и r(Ā). Для этого применим элементарные преобразования к матрице.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \\ -2 & -3 & -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

r(Ā) = 3 и r(A) = 3, система совместна.

Действие 2. Заметим, что r = 2, n = 4, r < n. Выделяем базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$, следовательно, неизвестные x1,x2 являются базисными(коэффициенты при них вошли в базисный минор), остальные неизвестные x3,x4 - свободные.

Действие 3. Исходная система равносильна системе с преобразованной расширенной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 5 \\ 3 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 = 8 \end{cases}$$

Переносим свободные неизвестные x3, x4 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 = 5 - 7 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 \\ 3 \cdot x_2 = 8 - 11 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4 \end{cases}.$$

Мы завершили прямой ход метода Гаусса.

Действие 4. Выполним обратный ход метода Гаусса. Выражаем неизвестную x2 из последнего уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 = 5 - 7 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 \\ x_2 = \dfrac{8 - 11 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4}{3}. \end{cases}$$

Выражаем неизвестную x1 из первого уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 7 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 - 3 \cdot x_2 = 5 - 7 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 - 3 \cdot \dfrac{8 - 11 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4}{3} \\ x_2 = \dfrac{8 - 11 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 7 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 - (8 - 11 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4) = -3 + 4 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \\ x_2 = \dfrac{8 - 11 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4}{3} \end{cases}$$

Придаем свободным неизвестным произвольные числовые значения:
x3 = c1, x4 = c2,
где c1,c2 ϵ ℝ, тогда:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 4 \cdot c_1 + 8 \cdot c_2 \\ x_2 = \dfrac{8 - 11 \cdot c_1 - 10 \cdot c_2}{3} \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

Система неопределенная (имеет бесконечное множество решений).

Запишем общее решение:

(-3 + 4•c1 + 8•c2; (8 -11•c1 - 10•c2) /3; c1; c2).

Придавая свободным неизвестным значения, найдем частное решение:

(9, - 13/3, 1, 1).

Действие 5. Выполним проверку. Для этого подставим найденное частное решение в исходную систему.

$$\begin{cases} 9+3\cdot(-13/3)+7\cdot 1+2\cdot 1=5 \\ -9+4\cdot 1+8\cdot 1=3 \\ 3\cdot 9+6\cdot(-13/3)+10\cdot 1-4\cdot 1=7 \\ -2\cdot 9-3\cdot(-13/3)-3\cdot 1+6\cdot 1=-2 \end{cases} \to \begin{cases} 5 & =5 \\ 3 & =3 \\ 7 & =7 \\ -2 & =-2 \end{cases}$$

Мы получили верные равенства. Таким образом, придавая свободным переменным различные значения, вычисляя базисные, будем получать частные решения исходной системы.

Ответ:

- Общее решение системы - $\left(-3+4\cdot c_1+8\cdot c_2, \frac{8-11\cdot c_1-10\cdot c_2}{3}, c_1,\ c_2\right)$
- Частное решение системы - (9, — 13/3, 1, 1)

Задача 5.

Требуется решить систему:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1-3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

Решение.

Действие 1. Выпишем матрицу системы и преобразуем ее.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\cdot(-1)+II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\cdot(-2)+III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I\cdot(-3)+IV} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to$$

Действие 2. Из трех одинаковых строчек оставим одну:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Мы получили r = 2, n = 4, следовательно, n – r = 2, поэтому фундаментальная система решений будет состоять из двух решений.

Имеем 2 базисные переменные x_1, x_2 и две свободные x_3, x_4.

Действие 3. Исходная система равносильна системе с преобразованной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Перенесем свободные переменные в правую часть равенств и обозначим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, получим:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_3 - 3x_4 - 2x_3 - x_4 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы: ($3c_1 - 4c_2; 5c_1 - 3c_2;$ c_1, c_2), фундаментальная система решений:

	l_1	l_2
c_1	1	0
c_2	0	1
	(3;5;1;0)	(-4;-3;0;1)

Любое решение можно записать в виде λ1 • l1 + λ2 • l2

Например, 2• l_1 + 2•l_2 = 2•(3; 5; 1; 0) + 2•(−4; −3; 0; 1) = (6; 10; 2; 0) + (−8; −6; 0; 2) = (−2; 4; 2;2) это частное решение,

−1•l_1 + 2•l_2 = (−3; −5; −1; 0) + 2 • (−4; −3; 0; 1) =(−3; −5; −1; 0) + (−8; −6; 0; 2) = (−11; −11; −1; 2) - другое частное решение.

Ответ:

- Общее решение системы (31 – 42; 51 – 32; c1, c2), ф.с.р. l_1 = (3; 5; 1; 0), l_2 =(−4; −3; 0; 1)
- Частные решения системы (–2; 4; 2; 2), (–11; –11; –1; 2).