Специальная математика и основы статистики

Абсолютные и относительные показатели. Средние величины

Вопрос 1. Абсолютные показатели

Исходной формой статистических показателей являются показатели в абсолютном выражении, или ***абсолютные величины***.

Статистические показатели в форме абсолютных величин характеризуют размеры изучаемых статистикой процессов и явлений, а именно: их массу, площадь, объем, протяженность, отражают их временные характеристики, а также могут представлять объем совокупности, т.е. число составляющих ее единицу

Индивидуальные абсолютные показатели получают непосредственно при сборе данных как результат замера, взвешивания, подсчета и оценки интересующего количественного признака у конкретного объекта: человека, предприятия, домохозяйства.

Индивидуальные абсолютные показатели могут рассчитываться как разность. Например: разность между численностью работников предприятия на конец и на начало года, разность между выручкой от реализации предприятия и суммой затрат.

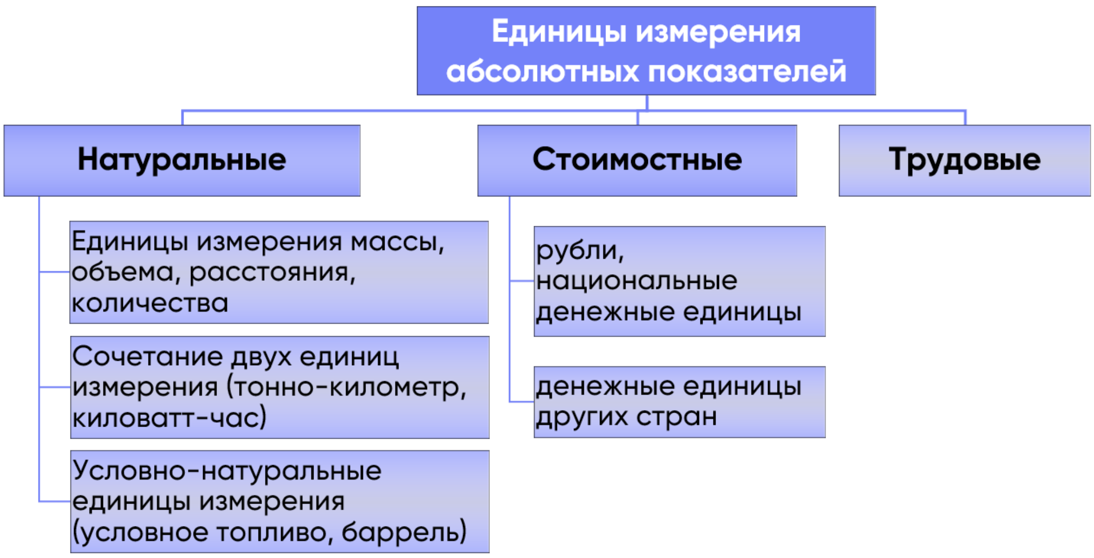

Рис. 1. Виды единиц измерения абсолютных показателей

Сводные абсолютные показатели характеризуют общий объем признака, объем совокупности или ее части. Их получают в результате сводки и группировки индивидуальных значений. К таким показателям относятся общая численность занятых в отрасли, совокупные активы коммерческих банков региона и т.п.

Абсолютные статистические показатели всегда имеют единицы измерения. Различают натуральные, стоимостные и трудовые единицы измерения (рис. 1).

1) В международной практике используются такие натуральные единицы измерения, как тонны, килограммы, квадратные, кубические и простые метры, мили, километры, галлоны, литры, штуки и т.д.

Например, производство электроэнергии в России за I полугодие 2006 г. составило 572 млрд. кВт-ч, за этот же период добыто 277 млн. т нефти и 383 млрд, м3 газа.

В группу натуральных также входят ***условно-натуральные*** измерители, используемые в тех случаях, когда какой-либо продукт имеет несколько разновидностей и общий объем можно определить только исходя из общего для всех разновидностей потребительского свойства. Так, различные виды органического топлива переводятся в условное топливо с теплотой сгорания 29,3 МДж/кг (7000 ккал/кг), мыло разных сортов - в условное мыло с 40%-ным содержанием жирных кислот, консервы различного объема - в условные консервные банки объемом 353,4 куб. см и т.д.

Перевод в условные единицы измерения осуществляется на основе специальных коэффициентов, рассчитываемых как отношение потребительских свойств отдельных разновидностей продукта к эталонному значению. Так, например, 100 т торфа, теплота сгорания которого - 24 МДж/кг, будут эквивалентны 81,9 т условного топлива (100 * 24,0 / 29,3), а 100 т нефти при теплоте сгорания 45 МДж/кг будут оцениваться в 153,6 т условного топлива (100*45,0/29,3).

В отдельных случаях для характеристики какого-либо явления или процесса используется произведение двух единиц. Например, грузооборот и пассажирооборот, оцениваемые соответственно, в тонно-километрах и пассажиро-километрах.

2) В условиях рыночной экономики наибольшее применение имеют стоимостные единицы измерения, позволяющие получить денежную оценку социально- экономических явлений и процессов. Так, одним из важнейших стоимостных показателей в системе национальных счетов, характеризующим общий уровень развития экономики страны, является валовой внутренний продукт, который в России за 2005 год составил 21 598,0 млрд. руб. в текущих ценах (в номинальном выражении).

При анализе и сопоставлении стоимостных показателей необходимо иметь в виду, что в условиях высоких или относительно высоких темпов инфляции они становятся несопоставимыми. Так, сравнивать ВВП России за 2005 год с его величиной, например, за 1995 год нецелесообразно, так как содержание рубля за этот период существенно изменилось. Для подобных сравнений осуществляют пересчет показателей в сопоставимые цены.

3) К трудовым единицам измерения, позволяющим учитывать общие затраты труда на предприятии, трудоемкость отдельных операций технологического процесса, относятся человеко-дни и человеко-часы.

Почему важно всегда учитывать единицы измерения показателей? Потому что один и тот же показатель может принимать различные количественные выражения в зависимости от выбранных единиц измерения. Например, партия продукции может характеризоваться следующими величинами: 1000 штук упаковок или 200 килограмм в натуральном выражении; 350 тыс. рублей - в стоимостном выражении; 50 чел.-ч - в трудовых единицах измерения.

Единство единиц измерения позволяет сравнивать различные объекты, определять соотношения между ними, изучать структуру общественных явлений и процессов по различным показателям.

Вопрос 2. Относительные показатели

Относительный показатель представляет собой результат деления одного абсолютного показателя на другой и выражает соотношение между количественными характеристиками социально-экономических процессов и явлений. Без относительных показателей невозможно измерить интенсивность развития изучаемого явления во времени, оценить уровень развития одного явления на фоне других, осуществить пространственно-территориальные сравнения, в том числе и на международном уровне.

Абсолютный показатель, находящийся в числителе, называется ***текущим*** или ***сравниваемым***. Показатель, с которым производится сравнение и который находится в знаменателе, называется ***основанием*** или ***базой сравнения***. Рассчитываемая таким образом относительная величина показывает, во сколько раз сравниваемый абсолютный показатель больше базисного, какую составляет от него долю, или сколько единиц первого приходится на 1,100, 1000 и т.д. единиц второго.

Относительные показатели могут выражаться в:

1. коэффициентах (долях единицы),
2. процентах (%),
3. промилле (‰),
4. продецимилле (‱),
5. быть именованными числами.

Если база сравнения принимается за 1, то относительный показатель выражается в коэффициентах, если база принимается за 100, 1000 или 10000, то показатель соответственно выражается в (%), (‰) и (‱).

Именованный относительный показатель получается в результате соотнесения разноименных абсолютных показателей. Его наименование представляет собой сочетание наименований единиц измерения сравниваемых показателей.

Все используемые на практике относительные статистические показатели можно подразделить на следующие виды:

1. динамики;
2. плана;
3. реализации плана;
4. структуры;
5. координации;
6. интенсивности и уровня экономического развития;
7. сравнения.

Рис. 2. Виды относительных величин

1) Относительный показатель динамики (ОПД)

ОПД получают путем деления величины показателя, относящейся к одному временному промежутку (моменту), на величину этого же показателя за другой, как правило, прошедший промежуток или момент времени. Рассчитывая ОПД, мы сопоставляем величины одного и того же показателя, взятые за различные временные промежутки.

ОПД представляет собой отношение уровня исследуемого процесса или явления за данный период времени (по состоянию на данный момент времени) к уровню этого же процесса или явления в прошлом:

$$\text{ОПД} = \frac{\text{Текущей уровень}}{\text{Предшествующий или базистый уровень}}$$

Рассчитанная таким образом величина показывает, во сколько раз текущий уровень превышает предшествующий (базисный) или какую долю от последнего составляет. Данный показатель может быть выражен кратным отношением или переведен в проценты.

Различают относительные показатели динамики с постоянной и переменной базой сравнения. Если сравнение осуществляется с одним и тем же базисным уровнем, например первым годом рассматриваемого периода, получают относительные показатели динамики с ***постоянной базой (базисные)***. При расчете относительных показателей динамики ***с переменной базой (цепных)*** сравнение осуществляется с предшествующим уровнем, т.е. основание относительной величины последовательно меняется.

Пример: Вычислить все показатели динамики для данных, представленных в таблице 1.

Таблица 1

Число абонентских устройств сотовой связи в РФ в 2008-2011гг. (млн. шт., на конец года)

Год	2008	2009	2010	2011
Число абонентских устройств, млн. шт.	199,5	230,5	237,7	256,1

Рассчитаем ОПД с переменной и постоянной базой сравнения:

Переменная база сравнения (цепные показатели)

Постоянная база сравнения (базисные показатели)

$ОПД_{09/08}$=230,5/199,5*100%=115,54%

$ОПД_{09/08}$=230,5/199,5*100%=115,54%

$ОПД_{10/09}$=237,7/230,5*100%=103,12%

$ОПД_{10/08}$=237,7/199,5*100%=119,15%

$ОПД_{11/10}$=256,1/237,7*100%=107,7%

$ОПД_{11/08}$=256,1/199,5*100%=128,32%

■ ■ ■

Относительные показатели динамики с переменной и постоянной базой сравнения взаимосвязаны между собой следующим образом: произведение всех относительных показателей с переменной базой равно относительному показателю с постоянной базой за исследуемый период.

Так, для рассчитанных показателей (предварительно переведя их из процентов в коэффициенты) получим: 1,1554*1,0312*1,0770=1,2832

2) Относительные показатели плана и реализации плана

Все субъекты финансово-хозяйственной деятельности, от небольших индивидуальных частных предприятий и до крупных корпораций, осуществляют как оперативное, так и стратегическое планирование, а также сравнивают реально достигнутые результаты с ранее намеченными. Для этих целей используются относительные показатели плана (ОПП) и реализации плана (ОПРП):

$$\text{ОПП} = \frac{\text{Уровень, планируемый на } (\boldsymbol{i}+\mathbf{1})\text{период}}{\text{Уровень, достигнутый в } \boldsymbol{i} - \text{м периоде}}$$

$$\text{ОПРП} = \frac{\text{Уровень, достигнутый в } (\boldsymbol{i}+\mathbf{1}) \text{ периоде}}{\text{Уровень, планируемый на } (\boldsymbol{i}+\mathbf{1}) \text{ период}}$$

Первый из этих показателей характеризует относительную высоту планового уровня, т.е. во сколько раз намечаемый объемный показатель превысит достигнутый уровень или сколько процентов от этого уровня составит. Второй показатель отражает фактический объем производства или реализации в процентах или коэффициентах по сравнению с плановым уровнем.

Пример: Предположим, оборот торговой фирмы в 2018г. составил 3,0 млн. руб. Исходя из проведенного анализа складывающихся на рынке тенденций, руководство фирмы считает реальным в следующем году довести оборот до 3,6 млн. руб. В этом случае относительный показатель плана, представляющий собой отношение планируемой величины к фактически достигнутой, составит 120% ($\frac{3,6}{3,0} \times 100\%$).

Предположим теперь, что фактический оборот фирмы за 2019г. составил 3,8 млн. руб. Тогда относительный показатель реализации плана, определяемый как отношение фактически достигнутой величины к ранее запланированной, составит 105,6% ($\frac{3,8}{3,6} \times 100\%$).

■ ■ ■

Между относительными показателями плана, реализации плана и динамики существует следующая взаимосвязь: 1,20 -1,056 = 1,267 или $\frac{3,8}{3,0} = 1,267$

Основываясь на этой взаимосвязи, по любым двум известным величинам всегда можно определить третью неизвестную величину.

3) Относительный показатель структуры (ОПС)

представляет собой соотношение структурных частей изучаемого объекта и их целого:

$$\text{ОПС} = \frac{\text{Показатель, характеризующий часть совокупности}}{\text{Показатель по всей совокупности в целом}}$$

ОПС выражается в долях единицы или в процентах. Рассчитанные величины, соответственно называемые ***долями*** или ***удельными весами***,

показывают, какой долей обладает или какой удельный вес имеет та или иная часть в общем итоге.
Пример: Рассмотрим структуру рынка онлайн кинотеатров в России в 2016-2019гг. (табл. 2.):

Таблица 2

Структура рынка онлайн кинотеатров в России, млрд. руб.

	2016		**2017**		**2018**		**2019**	
	млрд. руб.	**% к итогу**	**млрд. руб.**	**% к итогу**	**млрд. руб.**	**% к итогу**	**млрд. руб.**	**% к итогу**
Объем рынка всего	8 259	100	12 092,4	100	18 660,7	100	27 071,2	100
Рекламная модель	4 114,5	49,82	5 039,2	41,67	6 344,6	34,00	7 615,9	28,13
Платная модель	4 144,5	50,18	7 053,2	58,33	12 316,1	66,00	19 455,3	71,87

Рассчитанные в 3, 5, 7 ,и 9 графах таблицы проценты представляют собой относительные показатели структуры (в данном случае - удельные веса). Сумма удельных весов всегда должна быть строго равна 100% или 1.

■ ■ ■

4) Относительный показатель координации (ОПК)
представляет собой отношение одной части совокупности к другой части этой же совокупности:

$$\text{ОПК} = \frac{\text{Показатель, характеризующий i} - \text{ую часть совокупности}}{\text{Показатель, характеризующий часть совокупности, выбранную в качестве базы сравнения}}$$

При этом в качестве базы сравнения выбирается та часть, которая имеет наибольший удельный вес или является приоритетной с экономической, социальной или какой-либо другой точки зрения. В результате узнают, во сколько раз данная часть больше базисной или сколько процентов от нее составляет, или сколько единиц данной структурной части приходится на 1 единицу (иногда - на 100, 1000 и т.д. единиц) базисной структурной части.
Пример: На основе данных приведенной выше таблицы 2 мы можем вычислить, что в 2019г. на каждый рубль платной модели рынка онлайн кинотеатров приходится 0,39 руб. рекламной модели (7615,9:19455,3).

5) Относительный показатель интенсивности (ОПИ) характеризует степень распространения изучаемого процесса или явления и представляет собой отношение исследуемого показателя к размеру присущей ему среды:

$$\text{ОПИ} = \frac{\text{Показатель, характеризующий явление А}}{\text{Показатель, характеризующий среду распространения явления А}}$$

Данный показатель получают сопоставлением уровней двух взаимосвязанных в своем развитии явлений. Поэтому наиболее часто он представляет собой именованную величину, по может быть выражен и в процентах, промилле, продецимилле.

Пример: Для определения уровня обеспеченности населения легковыми автомобилями рассчитывается число автомашин, приходящихся на 100 семей, для определения плотности населения рассчитывается число людей, приходящихся на 1 кв.км.

Так, по данным социальной статистики на конец 2017г. общая численность безработных в РФ составляла 3967 тыс. чел., а среднегодовая численность занятых в экономике – 71746 тыс. чел. Отсюда следует, что уровень безработицы составлял 5,2% = 3967:71746* 100%.

6) Относительные показатели уровня экономического развития которые являются разновидностью относительных показателей интенсивности и характеризуют производство продукции в расчете на душу населения и играющие важную роль в оценке развития экономики государства или региона. В расчетах используют среднюю за численность населения (например, за один год).

Пример: Рассматривая лишь абсолютный размер ВВП России и некоторых стран мира на 01 декабря 2018 (таблица 3). Трудно оценить или «почувствовать» эту величину. Для того чтобы сделать вывод об уровне развития экономики, необходимо сопоставить ее со среднеквартальной численностью населения страны, которая в простейшем случае рассчитывается как полусумма численности населения на начало и на конец квартала. В результате номинальный объем ВВП на душу населения России на 1 декабря 2018г. составлял 11710 долл/чел. ($\frac{1720000 \text{ млн.долл.}}{146{,}880 \text{ млн.чел}}$).

Таблица 3

Показатели номинального ВВП 15 лидирующих стран мира по состоянию на 1 декабря 2018 г. с учётом их населения

Позиция в рейтинге	Страна	ВВП, трлн. долл.	Численность населения, млн. чел.	ОПУЭР, долл/чел.
1	США	20,413	327,631	62 304,85
2	Китай	14,093	1430,075	9 854,73
3	Япония	5,167	126,225	40 934,84
4	Германия	4,212	89,792	46 908,41
11	Россия	1,720	146,880	11 710,24
12	Южная Корея	1,693	51,446	32 908,29

■ ■ ■

7) Относительный показатель сравнения (ОПСр) представляет собой соотношение одноименных абсолютных показателей, характеризующих разные объекты (предприятия, фирмы, районы, области, страны и т.п.):

$$\text{ОПСр} = \frac{\text{Показатель, характеризующий объект А}}{\text{Показатель, характеризующий объект В}}$$

Для выражения данного показателя могут использоваться как коэффициенты, так и проценты.

Пример: Согласно официальным статистическим данным, инвестиции в основной капитал в РФ в 2012 г. за счет средств федерального бюджета составили 81,6 млрд, руб., бюджетов субъектов Федерации и местных бюджетов - 184,5 млрд, руб., средств предприятий - 653,1 млрд. руб. Таким образом, можно сделать вывод, что инвестиции за счет средств предприятий в 8 раз превышали инвестиции из средств федерального бюджета и в 3,5 раза превышали инвестиции из бюджетов субъектов Федерации и местных бюджетов.

■ ■ ■

Вопрос 3. Сущность и виды средних величин

Наиболее распространенной формой статистических показателей, используемой в экономических исследованиях, является средняя величина.

Средняя величина представляет собой обобщенную количественную характеристику признака в статистической совокупности в конкретных условиях места и времени.

<u>Важнейшее свойство средней величины</u> заключается в том, что она отражает то общее, что присуще всем единицам исследуемой

совокупности. Значения признака отдельных единиц совокупности колеблются под влиянием множества факторов, среди которых могут быть как основные, так и случайные.

Например, курс акций корпорации в основном определяется финансовыми результатами ее деятельности. В то же время в отдельные дни и на отдельных биржах эти акции в силу обстоятельств могут продаваться по более высокому или заниженному курсу.

В средней взаимопогашаются случайные отклонения, и учитываются изменения, вызванные действием основных факторов. Это позволяет средней отражать типичный уровень признака, независимо от индивидуальных особенностей отдельных единиц.

Категорию средней можно раскрыть через понятие **определяющего свойства.** Согласно этому понятию средняя, являясь обобщающей характеристикой всей совокупности, ориентируется на определенную величину, связанную со всеми единицами изучаемой совокупности. Эту величину можно представить в виде функции: $f(x_1, \dots, x_n)$.

Если в функции все величины x_1, x_2, ..., x_n заменить их средней величиной x, то значение этой функции должно остаться прежним: $f(x_1, \dots, x_n) = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$.

На практике среднюю можно определить через ***исходное соотношение средней (ИСС)*** или ее **логическую формулу:**

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Суммарное значение, или объем осредняемого признака}}{\text{Число единиц, или объём совокупности}}$$

Для каждого показателя, используемого в экономическом анализе, можно составить только одно истинное исходное соотношения для расчета средней. **Пример:** для расчета средней заработной платы работником предприятия необходимо общий фонд заработной платы разделить на число работников:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Фонд заработаной платы (тыс. руб.)}}{\text{Число работников (чел)}}$$

Средний размер одного вклада в банк определяется как:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Сумма всех вкладов (тыс. руб.)}}{\text{Число вкладов}}$$

Определить среднюю процентную ставку по кредитам, выданным на один и тот же срок, можно по следующему исходному соотношению:

$$\text{ИИС} = \frac{\text{Общая сумма выплат по процентам (из расчета за год, тыс. руб.)}}{\text{Общая сумма представленных кредитов (тыс. руб.)}}$$

Виды средних величин:

1) Средняя арифметическая

Чаще других на практике используется ***средняя арифметическая,*** которая, как и все средние, может быть простой или взвешенной.

Средняя арифметическая простая используется в тех случаях, когда расчет осуществляется по несгруппированным данным.

Пример: Предположим, шесть торговых предприятий фирмы имеют следующий объем товарооборота за месяц:

Торговое предприятие	1	2	3	4	5	6
Товарооборот (млн.руб.)	25	18	27	32	15	21

Среднемесячный товарооборот в расчете на одно предприятие определяет следующее исходное соотношение:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Общий объем товарооборота (млн. руб.)}}{\text{Число торговых предприятий}}$$

Используя условные обозначения, запишем формулу средней арифметической простой: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$

Подставив в формулу данные, рассчитаем среднюю: $x = \frac{25+18+27+32+15+21}{6} = 23$ млн.руб.

Средняя арифметическая взвешенная используется когда все или отдельные значения осредняемого признака повторяются, т.е. для расчета средней величины по сгруппированным данным или рядам распределения.

Пример: Определить по данному дискретному вариационному ряду средний курс продажи 1 акции.

Таблица 4

Сделки по акциям эмитента «ХХХ» за торговую сессию

Сделка	**Курс продажи, руб.**	**Количество проданных акций, шт.**	**Удельный вес, %**
1	420	700	37,5
2	440	200	10,8
3	410	950	51,4

Это можно сделать, используя исходное соотношение:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Общая сумма сделок (руб.)}}{\text{Количество проданных акций (шт.)}}$$

Чтобы получить общую сумму сделок, необходимо по каждой сделке курс продажи (X_i) умножить на количество проданных акций (f_i) и полученные произведения сложить:

$$\bar{x} = \frac{420 \times 700 + 440 \times 200 + 410 \times 950}{700 + 200 + 950} = \frac{771500}{1850} = 417{,}03 \text{ руб.}$$

■ ■ ■

Расчет среднего курса продажи произведен по формуле средней арифметической взвешенной: $\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$

В отдельных случаях веса могут быть представлены не абсолютными величинами, а относительными (в процентах или долях единицы). Если для расчета средней по данным табл. 4 использовать удельные веса, преобразовав формулу средней арифметической, получим: $\overline{x} = \sum(x_i \frac{f_i}{\sum f_i})$

При расчете средней по **интервальному вариационному ряду** от интервалов переходят к их серединам. При этом ширина открытых интервалов (первого и последнего) условно приравнивается к ширине интервалов, примыкающих к ним (второго и предпоследнего).

Пример: Определите средний возраст персонала (табл. 5).

Таблица 5

Распределение сотрудников предприятия по возрасту

Возраст, лет	Число сотрудников, чел.
До 25	8
25-30	32
30-40	68
40-50	49
50-60	21
60 и более	3
Итого:	181

Для определения среднего возраста персонала найдем середины возрастных интервалов: 22,5; 27,5; 35,0; 45,0; 55,0; 65,0.

Используя среднюю арифметическую взвешенную, определим средний возраст работников данного предприятия:

$$\boldsymbol{\overline{x}} = \frac{\mathbf{22{,}5 \times 8 + 27{,}5 \times 32 + 35 \times 68 + 45 \times 49 + 55 \times 21 + 65 \times 3}}{\mathbf{8 + 32 + 68 + 49 + 21 + 3}} = \textbf{\textit{38,6 года.}}$$

■ ■ ■

Свойства средней арифметической

1. Произведение средней на сумму частот равно сумме произведений отдельных вариантов на соответствующие им частоты: $\boldsymbol{\overline{x}\sum f_i = \sum x_i f_i}$
2. Сумма отклонений индивидуальных значений признака от средней арифметической равна нулю: $\boldsymbol{\sum(x_i - \overline{x}) f_i = 0}$

3. Сумма квадратов отклонений индивидуальных значений признака от средней арифметической меньше, чем сумма квадратов их отклонений от любой другой произвольной величины С.

4. Если все осредняемые варианты уменьшить или увеличить на постоянное число А, то средняя арифметическая соответственно уменьшится или увеличится на ту же величину А: $\frac{\sum(x_i \pm \text{A})f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \pm \frac{\sum \text{A} f_i}{\sum f_i} = \overline{x} \pm \text{A}$

5. Если все варианты значений признака уменьшить или увеличить в А раз, то средняя также соответственно увеличится или уменьшится в А раз: $\frac{\sum \frac{xi}{\text{A}} fi}{\sum fi} = \frac{\frac{1}{\text{A}} \sum xifi}{\sum fi} = \frac{1}{\text{A}} \overline{x}$

6. Если все веса уменьшить или увеличить в А раз, то средняя арифметическая от этого не изменится: $\frac{\sum xi \frac{fi}{\text{A}}}{\sum \frac{fi}{\text{A}}} = \frac{\frac{1}{\text{A}} \sum xifi}{\frac{1}{\text{A}} \sum fi} = \bar{x}$

2) Средняя гармоническая

Средняя гармоническая взвешенная используется, когда известен числитель исходного соотношения средней, но неизвестен его знаменатель. Рассмотрим расчет средней урожайности, являющейся одним из основных показателей эффективности производства в агробизнесе:

Таблица 7

Валовой сбор и урожайность сельскохозяйственной культуры «у» по районам области

Район	Валовой сбор, тыс. тонн	Урожайность, ц/га
А	36	13
Б	53	9
В	29	15
Г	78	8
Д	20	17

Средняя урожайность любой сельскохозяйственной культуры может быть определена только на основе следующего исходного соотношения:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Общий валовой сбор (тыс. ц.)}}{\text{Общая посевная площадь (тыс. га)}}$$

Общий валовой сбор мы получим простым суммированием валового сбора по районам. Данные же о посевной площади отсутствуют, но их можно получить, разделив валовой сбор каждого района на урожайность. С учетом этого определим искомую среднюю, предварительно переведя для сопоставимости тонны в центнеры:

$$\overline{x} = \frac{360 + 530 + 290 + 780 + 200}{\frac{360}{13} + \frac{530}{9} + \frac{290}{15} + \frac{780}{8} + \frac{200}{17}} = \frac{2160}{215{,}2} = 10{,}0\ ц/га$$

Таким образом, общая посевная площадь данной культуры в целом по области составляла 215,2 тыс. га, а средняя урожайность - 10,0 ц с одного гектара. В данном случае расчет произведен по формуле средней гармонической взвешенной:

$$\overline{x} = \frac{\sum w_i}{\sum \frac{w_i}{x_i}}, \text{где } w_i = x_i f_i$$

3) Средняя геометрическая и средняя квадратическая

Средняя геометрическая рассчитывается по формулам:

$\overline{x} = \sqrt[к]{x_1 \times x_2 \times x_3 \ldots x_к} = \sqrt[к]{\Pi xi}$ - невзвешенная

$\overline{x} = \sqrt[\sum m]{x_1^{m_1} \times x_2^{m_2} \times x_3^{m_3} \ldots x_к^{m_к}} = \sqrt[\sum m]{\Pi \mathrm{x}_i^{m_i}}$ - *взвешенная*

Наиболее широкое применение этот вид средней получил в анализе динамики для определения среднего темпа роста, что будет рассмотрено в соответствующей теме.

Средняя квадратическая, которая лежит в основе вычислений ряда сводных расчетных показателей:

$\overline{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$ – невзвешенная

$\overline{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i}}$ - взвешенная

Данный вид средней используется при расчете показателей вариации.

4) Структурные средние

Наиболее часто используемыми в экономической практике структурными средними являются мода и медиана.

Мода представляет собой значение признака, повторяющееся с наибольшей частотой. **Медианой** называется значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности.

Рассмотрим определение моды и медианы по **несгруппированным данным. Пример:** Предположим, что **9** торговых фирм города реализуют товар А по следующим оптовым ценам (тыс. руб.).

4,4 4,3 4,4 4,5 4,3 4,3 4,6 4,2 4,6

Так как чаще всего встречается цена 4,3 тыс.руб., то она и будет модальной. Для определения медианы необходимо провести ранжирование:

4,2 4,3 4,3 4,3 4,4 4,4 4,5 4,6 4,6

Центральной в этом ряду является цена 4,4 тыс. руб., следовательно, она и будет медианой. Если ранжированный ряд включает четное число единиц, то медиана определяется как средняя из двух центральных значений.

■ ■ ■

В отличие от моды, медиана практически выполняет функции средней для неоднородной, не подчиняющейся нормальному закону распределения совокупности. Медиана используется в случаях, когда средняя не позволяет объективно оценить исследуемую совокупность из-за сильного влияния на нее максимальных и минимальных значений. **Пример:** Допустим, нам необходимо дать характеристику среднего дохода группы людей, насчитывающей 100 человек, из которых 99 имеют доходы в интервале от 100 до 300 долл. США в месяц, а месячные доходы последнего составляют 5000 долл. США:

№п/п	1	2	3	4…50	51…99	100
Доход, долл. США	100	104	104	107…162	164…300	5000

Средняя арифметическая покажет средний доход в 600-700 долл., который не только в несколько раз меньше дохода сотого человека, но и имеет мало общего с доходами остальной части группы. Медиана, равная 63 долл. (162+164):2), позволит дать объективную характеристику уровня доходов 99% данной группы людей.

■ ■ ■

Рассмотрим расчет Мо и Ме по **сгруппированным данным** (табл. 8).

Таблица 8.

Распределение торговых предприятий города по уровню цен на товар А

Цена, руб. (xi)	**Число предприятий (fi)**	**Накопленные частоты (Si)**
52	12	12
53	48	60 (=12+48)
54	56	116 (=12+48+56)
55	60	176 (=12+48+56+60)
56	14	190 (=12+48+56+60+14)
Итого:	190	-

В дискретных рядах распределения мода - это значение, имеющее наибольшую частоту. Цену 55 руб. установили максимальное число предприятий (60), следовательно, она является модальной. Для определения медианы находят номер медианной единицы ряда:

$$N_{me} = \frac{n+1}{2}$$

где n - объем совокупности. В нашем случае:

$$N_{me} = \frac{190 + 1}{2} = 95{,}5.$$

Полученное дробное значение, всегда имеющее место при четном числе единиц совокупности, указывает, что точная середина ряда находится между 95 и 96 предприятиями. Необходимо определить, в какой группе находятся предприятия с этими порядковыми номерами. Это можно сделать, по накопленной частоте S. Очевидно, что магазинов с этими номерами нет в первой группе, где всего лишь 12 торговых предприятий, нет их и во второй группе (12 + 48 = 60). 95 и 96 предприятия находятся в третьей группе (12 + 48 + 56 = 116) и, следовательно, медианой является цена 54 руб.

Определение моды и медианы по **интервальным рядам** требует проведения расчетов на основе следующих формул:

$$M_0 = X_0 + i \times \frac{(f_{m_0} - f_{m_{0-1}})}{(f_{m_0} - f_{m_{0-1}}) + (f_{m_0} - f_{m_{0-1}})}$$

где X_0 - нижняя граница модального интервала (модальным называется интервал, имеющий наибольшую частоту);

i - ширина модального интервала;

f_{Mo} - частота модального интервала;

f_{Mo-1} ~ частота интервала, предшествующего модальному;

f_{Mo+1} - частота интервала, следующего за модальным.

$$M_e = x_0 + i \times \frac{\frac{1}{2}\sum f_i - s_{M_{e-1}}}{f_{m_e}}$$

где X_0 - нижняя граница медианного интервала (медианным называется первый интервал, накопленная частота которого превышает половину общей суммы частот);

i - ширина медианного интервала:

S_{Me-1} - накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

f_{Me} - частота медианного интервала.

Пример: Рассчитаем моду и медиану по данным таблицы 9

Таблица 9.

Распределение населения региона по уровню денежного дохода

Среднедушевой денежный доход, тыс. руб.	**Удельный вес населения, в %**
24 и менее	2,4
24-25	15,4
25-26	20,1
26-27	17,2
27-28	12,8
28-29	9,2
29-30	6,5
30-31	4,5
31-32	3,2
32-33	2,3
33 и более	6,4
Итого:	100

Интервал с границами 2500-2600 в данном распределении будет модальным, так как он имеет наибольшую частоту (20,1%). По формуле (6.18) определим моду:$M_0 = 2500 + 100 \times \frac{20{,}1-15{,}4}{(20{,}1-15{,}4)+(20{,}1-17{,}2)} = 2562$ руб.

Для определения медианного интервала необходимо определять накопленную частоту каждого последующего интервала до тех пор, пока она не превысит 1 /2 суммы накопленных частот (в нашем случае 50%):

Интервал	**Накопленная частота, в %**
24 и менее	2,4
24-25	17,8
25-26	37,9
26-27	55,1

Медианным является интервал с границами 2600-2700. Определим медиану по формуле:

$$M_e = 2600 + 100 \times \frac{50{,}0-37{,}9}{17{,}2} = 2670 \text{ руб.}$$

Соотношение моды, медианы и средней арифметической указывает на характер распределения признака в совокупности, позволяет оценить его асимметрию. Если Мо < Ме < X , имеет место правосторонняя асимметрия, при X < Me < Mo следует сделать вывод о левосторонней асимметрии ряда.

На основе полученных в последнем примере значений структурных средних можно заключить, что наиболее распространенным, типичным является среднедушевой доход порядка 2560 руб. в месяц. В то же время более половины населения располагает доходом свыше 2670 руб. при среднем уровне 2735 руб. (средняя арифметическая взвешенная). Из соотношения этих показателей следует вывод о правосторонней асимметрии распределения населения по уровню среднедушевых денежных доходов, что позволяет предполагать достаточную емкость рынка дорогих товаров повышенного качества и товаров престижной группы.

■ ■ ■