笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

求极限

例1. 试求 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)$

$=3^2+3$

$=12$

例2. 试求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$

$=\sin 0$

$=0$

求极限 —— $\frac{\infty}{\infty}$ 型

例3. 试求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{100}+x}{x^{1000}+2x}$

$=\frac{\infty^{100}+\infty}{\infty^{1000}+2\cdot\infty}$

$=\frac{\infty}{\infty}$

例4. 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}$

$=\frac{\ln(+\infty)}{2\cdot(+\infty)}$

$=\frac{\infty}{\infty}$

结果为 $\frac{\infty}{\infty}$，则：

方法1：只保留分子和分母中含x的指数最大的项

方法2：分子分母同时求导(洛必达法则)

例3. 试求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{100}\cancel{+x}}{x^{1000}\cancel{+2x}}$ (方法1)

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{x^{1000}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{900}}$

$=\frac{1}{\infty^{900}}$

$=\frac{1}{\infty}$

$=0$

例4. 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}$ (方法2)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(2x)'}$ 求导公式详见第3课导数的表格

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}$

$=\frac{1}{2\cdot(+\infty)}$

$=\frac{1}{+\infty}$

$=0$

求极限 —— $\frac{0}{0}$ 型

结果为 $\frac{0}{0}$，则：

方法1：根据下表，把复杂项简化后再算

	lim式子里的复杂项	可换成
$\Delta\to0$时	$\sin\Delta,\tan\Delta,\arcsin\Delta,$ $\arctan\Delta, e^{\Delta}-1,\ln(1+\Delta)$	Δ
	$1-\cos\Delta$	$\frac{1}{2}\Delta^2$
	$(1+\Delta)^{\alpha}-1$	$\alpha\cdot\Delta$
	$a^{\Delta}-1$	$\Delta\cdot\ln a$

方法2：分子分母同时求导(洛必达法则)

例5. 试求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$

$=\frac{\sin 2\cdot0}{0}$

$=\frac{0}{0}$

例5. 试求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ (方法1)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}$　　$2x\to0$ 时，$\sin 2x$ 可换成 $2x$

$=\lim\limits_{x\to0}2$

$=2$

例5. 试求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ (方法2)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin 2x)'}{x'}$　　详见第3课导数的表格

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x\cdot(2x)'}{1}$

$=\lim\limits_{x\to0}(2\cos 2x)$

$=2\cos(2\cdot0)$

$=2\times1$

$=2$

求极限 —— 1^{∞} 型

结果为 1^{∞} 型 (接近1的数$^{\infty}$)：

$$\lim_{x\to?}\text{底数}^{\text{指数}}=e^{\lim\limits_{x\to?}\text{指数}\cdot(\text{底数}-1)}$$

例6. 试求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{2x-1}{x-2}}$

$=\left(\frac{2+1}{3}\right)^{\frac{2\cdot2-1}{2-2}}$

$=1^{\frac{3}{0}}$

$=1^{\infty}$

例7. 试求 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

$=(1+3\cdot0)^{\frac{2}{0}}$

$=1^{\frac{2}{0}}$

$=1^{\infty}$

例6. 试求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{2x-1}{x-2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-1}{x-2}\cdot\left(\frac{x+1}{3}-1\right)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-1}{3}}$

$=e^{\frac{2\cdot2-1}{3}}$

$=e^{1}$

$=e$

例7. 试求 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\cdot(1+3x-1)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\cdot3x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}6}$

$=e^{6}$

求极限 —— 0·∞ 型

例8. 试求 $\lim\limits_{x\to0}(\sin 2x)\cdot\frac{1}{x}$

$=\sin(2\cdot0)\cdot\frac{1}{0}$

$=(\sin 0)\cdot\infty$

$=0\cdot\infty$

结果为 $0\cdot\infty$ 型 (接近0的数 $\cdot\,\infty$) :

把式子变成 $\frac{?}{?}$ 的形式，它就变成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型了

例8. 试求 $\lim\limits_{x\to0}(\sin 2x)\cdot\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ 即 例5

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}2$

$=2$

求极限 —— 左右极限

例9. 试证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$ 是否存在

若 左极限 = 右极限 = 不为∞的数，

则 函数极限存在，且函数极限 = 左极限 = 右极限；

若为其他情况，

则 函数极限不存在/函数没有极限

① 左极限 :

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{0^-}$

$=\frac{1}{-0.000\cdots01}$

$=-\infty$

② 右极限 :

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{0^+}$

$=\frac{1}{0.000\cdots01}$

$=+\infty$

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$ 不存在

【 可能有的同学有疑问： $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$ 不等于∞么？大家记住，极限等于∞，

也属于极限不存在，极限等于不为∞的数才算极限存在 】

求极限 —— 已知 $f'(x_0)=?$，求某极限

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\alpha\Delta)-f(x_0)}{\Delta}=f'(x_0)\cdot\lim_{\Delta\to 0}\alpha$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\alpha\Delta)-f(x_0+\beta\Delta)}{\Delta}=f'(x_0)\cdot\left(\lim_{\Delta\to 0}\alpha-\lim_{\Delta\to 0}\beta\right)$$

例10. 已知 $f'(x_0)=a$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}&=f'(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}(-2)\\&=\quad a\quad\cdot\quad(-2)\\&=-2a\end{aligned}$$

例11. 已知 $f'(1)=a$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}&=f'(1)\cdot\left[\lim_{h\to 0}3-\lim_{h\to 0}(-2)\right]\\&=\quad a\ \cdot[\quad 3\quad-\quad(-2)\quad]\\&=5a\end{aligned}$$

1/3 分析 a_n 的取值范围

例1. 已知 $0<a_1<2$，$a_{n+1}=\sqrt{\underset{\text{项1}}{a_n}\cdot(\underset{\text{项2}}{2-a_n})}$，试分析 a_n 的取值范围

倒数相加	相乘	本身相加	平方相加

$$\frac{2}{(\text{项1})^{-1}+(\text{项2})^{-1}}\le\boxed{\sqrt{(\text{项1})\cdot(\text{项2})}}\le\boxed{\frac{(\text{项1})+(\text{项2})}{2}}\le\sqrt{\frac{(\text{项1})^2+(\text{项2})^2}{2}}$$

（仅当 项1=项2 时，各式子才相等）

$$\boxed{\sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}}\le\boxed{\frac{a_n+(2-a_n)}{2}}$$

$\Rightarrow\ \sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}\le 1$

$\Rightarrow\qquad a_{n+1}\le 1$

又 $\because a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}\ge 0$

$\therefore 0\le a_{n+1}\le 1$

$\therefore 0\le a_n\le 1$

2/3 证明 a_n 的极限存在

例2. 已知 $0<a_1<2$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

$0\le a_n\le 1$ 例1结果

$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n\cdot\underline{(2-a_n)}}-a_n$

$\because 0\le a_n\le 1$

$\therefore \underline{2-a_n}\ge 1\ge a_n$

$\therefore a_n\cdot(\underline{2-a_n})\ge a_n\cdot a_n=a_n{}^2$

$\therefore \sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}\ge\sqrt{a_n{}^2}=a_n$

$\therefore \sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}\ge\sqrt{a_n{}^2}=a_n$

$\therefore \sqrt{a_n\cdot(2-a_n)}-a_n\ge 0$

即 $a_{n+1}-a_n\ge 0$

$\therefore a_n$ 是递增的

$\because a_n\le 1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

3/3 夹逼定理

例3. 试求 $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)}_{\text{共 n 项}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\cancel{+1}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}1\\&=1\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型，

只保留分子和分母中含未知数的指数最大的项

【第一课 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的方法一有讲】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\cancel{+n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}1\\&=1\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型，

只保留分子和分母中含未知数的指数最大的项

【第一课 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的方法一有讲】

$\because \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot n>\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

1/3 证明 f(x) 在某点连续

例1. 试证明 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x>0\\ 1, & x\le 0\end{cases}$ 在 x=0 处连续

① f(0)=1

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}1$

$=1$

$\frac{0}{0}$ 型，

∵ 当 $\Delta\to0$ 时，

$\sin\Delta\to\Delta$

∴ 当 $x\to0^+$，即 $x\to0$ 时，

$\sin x\to x$

【第一课 $\frac{0}{0}$ 型的方法一有讲】

② ∵ $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 成立

∴ f(x) 在 x=0 处连续

2/3 已知 f(x) 在某点连续，求未知数

例2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{ax}, & x>0\\ 1, & x\le 0\end{cases}$ 在 x=0 处连续，试求 a

① f(0)=1

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{ax}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{ax}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{a}$

$=\frac{1}{a}$

$\frac{0}{0}$ 型，

∵ 当 $\Delta\to0$ 时，

$\sin\Delta\to\Delta$

∴ 当 $x\to0^+$，即 $x\to0$ 时，

$\sin x\to x$

【第一课 $\frac{0}{0}$ 型的方法一有讲】

② $1=1=\frac{1}{a}\ \Rightarrow\ a=1$

3/3 间断点

例3. 试判断 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$ 的间断点类型

① 没有 sin、cos

② 分段点为 x=1

③ $f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x=1^+=1$

∴ x=1 是间断点

∵ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，且均不为 ∞

∴ x=1 是跳跃间断点

若 $f(\text{该点})=\lim\limits_{x\to\text{该点}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\text{该点}^+}f(x)$ 成立，则该点不是间断点；

若 $f(\text{该点})=\lim\limits_{x\to\text{该点}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\text{该点}^+}f(x)$ 不成立，则该点是间断点：

若 $\lim\limits_{x\to\text{该点}^-}=\lim\limits_{x\to\text{该点}^+}$ =不为∞的数，则为可去间断点；

若 $\lim\limits_{x\to\text{该点}^-}\ne\lim\limits_{x\to\text{该点}^+}$，且均不为∞，则为跳跃间断点；

若 $\lim\limits_{x\to\text{该点}^-}$ 与 $\lim\limits_{x\to\text{该点}^+}$ 中有至少一个∞，则为无穷间断点 或 第二类间断点(无穷)

1/5 照公式求导

f(x)	f′(x)	例子
C	0	$(1)'=0$
x^a	$a\cdot x^{a-1}$	$(x^2)'=2\cdot x^{2-1}=2x$
a^x	$a^x\cdot\ln a$	$(3^x)'=3^x\cdot\ln 3$
e^x	e^x	$(e^x)'=e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\log_5 x)'=\frac{1}{x\cdot\ln 5}$
$\ln x$、$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$(\sin x)'=\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

常用组合公式：

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$

如: $(x^2+3^x)'=(x^2)'+(3^x)'$

② $(Cu)'=Cu'$

如: $(3x^2)'=3\cdot(x^2)'$

③ $(uv)'=u'v+uv'$

如: $(x^2\cdot 3^x)'=(x^2)'\cdot 3^x+x^2\cdot(3^x)'$

④ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

如: $\left(\frac{x^2}{3^x}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot 3^x-x^2\cdot(3^x)'}{(3^x)^2}$

⑤ 若已知 $[a(x)]'=b(x)$

则 $\{a[h(x)]\}'=b[h(x)]\cdot[h(x)]'$

如:已知 $(\sin x)'=\cos x$

则 $[\sin h(x)]'=\cos h(x)\cdot[h(x)]'$

像 $(\sin e^x)'=\cos e^x\cdot(e^x)'$

$(\sin x^2)'=\cos x^2\cdot(x^2)'$

2/5 隐函数求导

例1. 若 y=y(x) 由 $y^3-x^2+y=0$ 确定，则 $y'=$_____，$y''=$_____。

$$y^3(x)-x^2+y(x)=0$$
$$[y^3(x)-x^2+y(x)]'=0'$$
$$[y^3(x)]'-(x^2)'+[y(x)]'=0$$
$$3y^2(x)\cdot y'(x)-2x+y'(x)=0$$
$$3y^2\cdot y'-2x+y'=0$$
$$(3y^2+1)\cdot y'-2x=0$$
$$(3y^2+1)\cdot y'=2x$$
$$y'=\frac{2x}{3y^2+1}$$

$\because C'=0$【C 代表常数】
$\therefore 0'=0$
$\because (x^a)'=a\cdot x^{a-1}$
$\therefore (x^2)'=2\cdot x^{2-1}=2x$
$[y^3(x)]'=?$
$\because (x^3)'=3\cdot x^{3-1}=3x^2$
$\therefore [h^3(x)]'=3h^2(x)\cdot h'(x)$
$\therefore [y^3(x)]'=3y^2(x)\cdot y'(x)$

$$(y')'=\left[\frac{2x}{3y^2(x)+1}\right]'$$

$\because \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\therefore \left[\frac{2x}{3y^2(x)+1}\right]'=\frac{(2x)'\cdot[3y^2(x)+1]-2x\cdot[3y^2(x)+1]'}{[3y^2(x)+1]^2}$

$$y''=\frac{(2x)'\cdot[3y^2(x)+1]-2x\cdot[3y^2(x)+1]'}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y''=\frac{2\cdot[3y^2(x)+1]-2x\cdot\{[3y^2(x)]'+1'\}}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y''=\frac{2\cdot[3y^2(x)+1]-2x\cdot\{3[y^2(x)]'+0\}}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y''=\frac{2\cdot[3y^2(x)+1]-2x\cdot 3\cdot 2y(x)\cdot y'(x)}{[3y^2(x)+1]^2}$$

$[y^2(x)]'=?$
$\because (x^2)'=2x$
$\therefore [h^2(x)]'=2h(x)\cdot h'(x)$
$\therefore [y^2(x)]'=2y(x)\cdot y'(x)$

$$y''=\frac{6y^2(x)+2-12x\cdot y(x)\cdot y'(x)}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y''=\frac{6y^2+2-12xyy'}{(3y^2+1)^2}$$
$$y''=\frac{6y^2+2-12xy\frac{2x}{3y^2+1}}{(3y^2+1)^2}$$

3/5 参数方程求导

例2. 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$，则 $y'=$____，$y''=$____。

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y'' = \frac{y'\text{对 t 求导的结果}}{x'(t)}$$

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(\cos t)'}{(1+t^2)'} = \frac{-\sin t}{2t}$$

$$y'' = \frac{y'\text{对 t 求导的结果}}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)'}{(1+t^2)'} = \frac{\frac{(-\sin t)'\cdot 2t-(-\sin t)\cdot(2t)'}{(2t)^2}}{2t} = \frac{\frac{-2t\cdot\cos t+2\sin t}{4t^2}}{2t} = \frac{-t\cdot\cos t+\sin t}{4t^3}$$

$$\because \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\therefore \left(\frac{-\sin t}{2t}\right)' = \frac{(-\sin t)'\cdot 2t-(-\sin t)\cdot(2t)'}{(2t)^2}$$

4/5 求极值、最值

例3. 若 y=y(x) 由 $y^3 - x^2 + y = 0$ 确定，试求其极值

① $y' = \frac{2x}{3y^2+1}$，$y'' = \frac{6y^2+2-12xyy'}{(3y^2+1)^2}$ 例1求过

② $\frac{2x}{3y^2+1} = 0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

③ 将 x=0 代入 $y^3 - x^2 + y = 0$ 中，

可得：$y^3 - 0^2 + y = 0$

$\Rightarrow y^3 + y = 0$

$\Rightarrow y\cdot(y^2+1) = 0$

$\Rightarrow y = 0$

∴ 满足要求的点为 (0,0)

④ 将 x=0，y=0，$y'=0$

代入 $y''=\frac{6y^2+2-12xyy'}{(3y^2+1)^2}$ 中，

可得：$y''=\frac{6\cdot 0^2+2-12\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{(3\cdot 0^2+1)^2} = 2 > 0$

∴ 极小值点为(0,0)，极小值为 0

5/5 求凹凸区间与拐点

方法 : 求 y''

凸区间 : 满足 $y''<0$ 的区间

凹区间 : 满足 $y''>0$ 的区间

拐点 : 凹凸区间交界的点

例4. 求曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的凹凸区间和拐点

$$y' = [\ln(x^2+1)]' = \frac{2x}{x^2+1}$$

$[\ln(x^2+1)]' = ?$

$\because (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\therefore [\ln h(x)]' = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x)$

$$\therefore [\ln(x^2+1)]' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{x^2+1} \cdot [(x^2)' + 1'] = \frac{1}{x^2+1} \cdot (2x+0) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot\left[(x^2)'+1'\right]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-2x\cdot(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$\because \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$\therefore \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

凸区间 : 满足 $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ 的区间

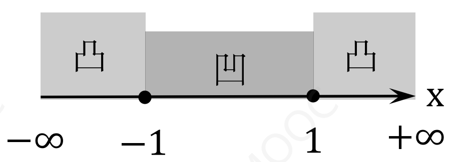
$\Rightarrow 2-2x^2<0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x>1$ 或 $x<-1$

凸区间为 $(1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$

凹区间 : 满足 $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} > 0$ 的区间

$\Rightarrow 2-2x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -1<x<1$

凹区间为 $(-1,1)$



拐点 : $x=-1$ 和 $x=1$ 所对应的点

$\because y=\ln(x^2+1)$

$\therefore x=-1$ 时，$y=\ln[(-1)^2+1]=\ln 2$

对应的点为$(-1,\ln 2)$

$x=1$ 时，$y=\ln(1^2+1)=\ln 2$

对应的点为$(1,\ln 2)$

$\therefore$ 拐点为 $(-1,\ln 2)$、$(1,\ln 2)$

不定积分—— 猜

若 $a' = b$

则 $\int b = a+C$

比如：

$(x^2)' = 2x$

$\int 2x\,dx = x^2+C$

$(\sin x)' = \cos x$

$\int \cos x\,dx = \sin x+C$

$(e^x)' = e^x$

$\int e^x\,dx = e^x+C$

$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4+C$

$(x^4)' = 4\cdot x^3$

$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4\cdot x^3 = x^3$

不定积分 —— 套公式法

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
k	$kx+C$
$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$x^{\alpha}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
e^x	e^x+C
$\cos x$	$\sin x+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right\rvert+C$
$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$
$\frac{1}{\sin x}$	$-\ln\frac{1+\cos x}{\sin x}+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+C$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+C$
$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x}+C$
$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin x}+C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\cdot\arctan\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\cdot\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$

常用公式①：$\int k\cdot U=k\cdot\int U$

如：$\int 3\cdot e^x dx=3\cdot\int e^x dx$

常用公式②：$\int(U\pm V)=\int U\pm\int V$

如：$\int(a^x+e^x)\,dx=\int a^x dx+\int e^x dx$

求多个sin、cos相乘式子的积分时，常用的小技巧：

A、$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

如：$\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]dx$

$=\int\frac{1}{2}\cdot\sin x\,dx$

B、$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

如：$\int\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx=\int-\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]dx$

$=\int-\frac{1}{2}\cdot(\cos x-1)\,dx$

C、 $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

如：$\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]dx$

$=\int\frac{1}{2}\cdot(\cos x+1)\,dx$

不定积分 —— 第一类换元法

例1. 计算 $\int 2x\cdot \overset{\text{复杂部分}}{e^{x^2}}dx$

① 设 $u=x^2$

$u'=(x^2)'$

$=2x$

② $\frac{1}{u'}du=\frac{1}{2x}du$

$$\int 2x\cdot e^{x^2}dx=\int 2x\cdot e^{x^2}\cdot\frac{1}{2x}du$$
$$=\int e^{x^2}du$$
$$=\int e^{u}du$$
$$=e^{u}+C$$
$$=e^{x^2}+C$$

不定积分 —— 第二类换元法

式子中$(x+c)^2+a^2$、$(x+c)^2-a^2$、$a^2-(x+c)^2$时，用第二类换元法可能会简单

被积分的式子中有	方法
$(x+c)^2+a^2$	令 $x=a\cdot\tan t-c$ $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$
$(x+c)^2-a^2$	令 $x=\frac{a}{\cos t}-c$ $dx=\frac{a\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt$
$a^2-(x+c)^2$	令 $x=a\cdot\sin t-c$ $dx=a\cdot\cos t\,dt$

$a=1$

$c=-1$

例2. 计算 $\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\sqrt{(x-1)^2-1^2}}$

$$原式=\int\frac{\frac{a\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt}{\left(\frac{a}{\cos t}-c-1\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{\cos t}-c-1\right)^2-1}}$$
$$=\int\frac{\frac{1\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt}{\left(\frac{1}{\cos t}-(-1)-1\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\cos t}-(-1)-1\right)^2-1}}$$
$$=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos t}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2-1}}$$
$$=\int\frac{\cos^2 t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}$$
$$=\int\frac{\sin t\,dt}{\cos t\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}$$
$$=\int\frac{\sin t\,dt}{\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}$$
$$=\int\frac{\sin t\,dt}{\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}}$$
$$=\int\frac{\sin t\,dt}{\sin t}$$
$$=\int 1\,dt$$
$$=t+C$$

$\because x=\frac{1}{\cos t}-(-1)$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}+1$

$\Rightarrow \cos t\cdot x=1+\cos t$

$\Rightarrow \cos t\cdot x-\cos t=1$

$\Rightarrow \cos t\cdot(x-1)=1$

$\Rightarrow \cos t=\frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow t=\arccos\frac{1}{x-1}$

$\therefore 原式=t+C=\arccos\frac{1}{x-1}+C$

考试时题干可能先转化一下才能看出来

比如：计算 $\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-2x}}$

$\underline{x^2-2x}=x^2-2x+1-1$

$=\underline{(x-1)^2-1^2}$

$\therefore\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\underline{\sqrt{x^2-2x}}}=\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\underline{\sqrt{(x-1)^2-1^2}}}$ (即 例2式子)

不定积分 —— 分部积分法

设 U' 的顺序：a^x、$\sin/\cos$、x^a

$\int U'\cdot V = U\cdot V - \int U\cdot V'$

例3. 计算 $\int e^x\cdot x\,dx$

① 设 $U' = e^x$，$V = x$

② $V' = x' = 1$

$U = \int e^x\,dx = e^x$

③ $\int e^x\cdot x\,dx = e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx$

$= e^x\cdot x - \int e^x\,dx$

$= e^x\cdot x - (e^x + C)$

$= e^x\cdot x - e^x - C$

$= e^x\cdot x - e^x + C$

例4. 计算 $\int \ln x\,dx$

① $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx$

$= \int x^0\cdot \ln x\,dx$

设 $U' = x^0 = 1$，$V = \ln x$

② $V' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$，$U = \int U'dx = \int 1\,dx = x$

③ $\int 1\cdot \ln x\,dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x\cdot \ln x - \int 1\,dx$

$= x\cdot \ln x - (x + C)$

$= x\cdot \ln x - x - C$

$= x\cdot \ln x - x + C$

计算定积分 —— 普通定积分

$\int 2x\,dx = x^2+C$

$\Rightarrow \int_2^3 2x\,dx = x^2|_{x=3} - x^2|_{x=2} = 3^2 - 2^2 = 5$

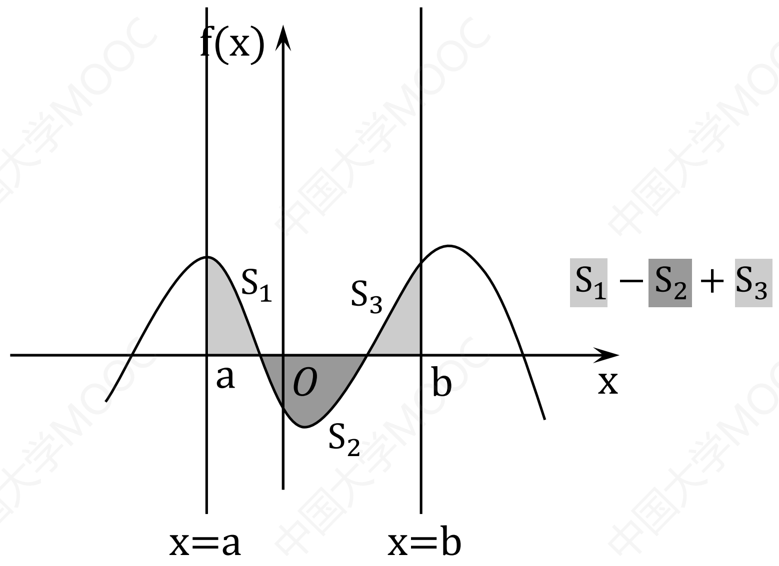
$\int e^x\,dx = e^x+C$

$\Rightarrow \int_2^3 e^x\,dx = e^x|_{x=3} - e^x|_{x=2} = e^3 - e^2$

性质1：

若 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$，

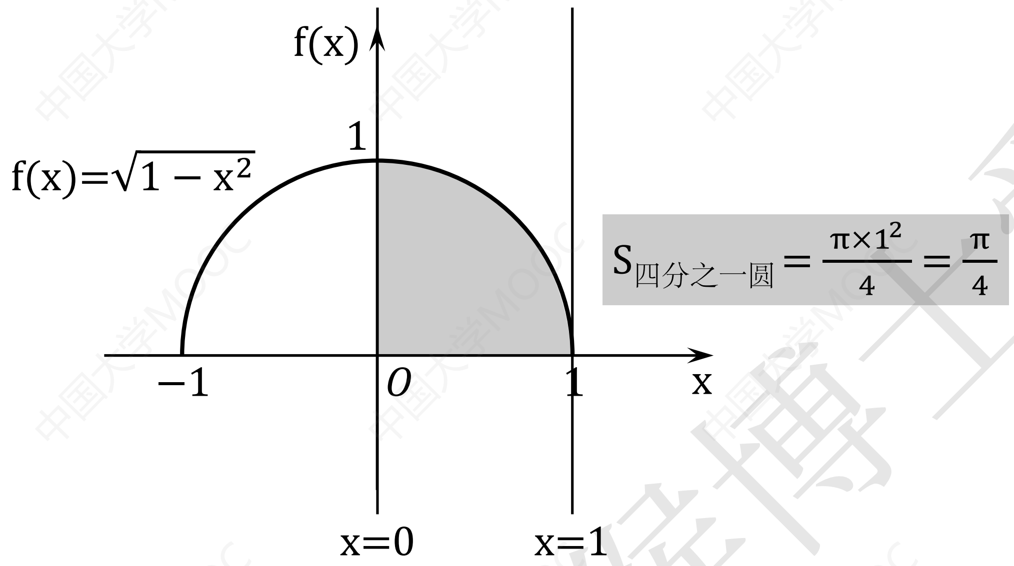
则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$



性质2：

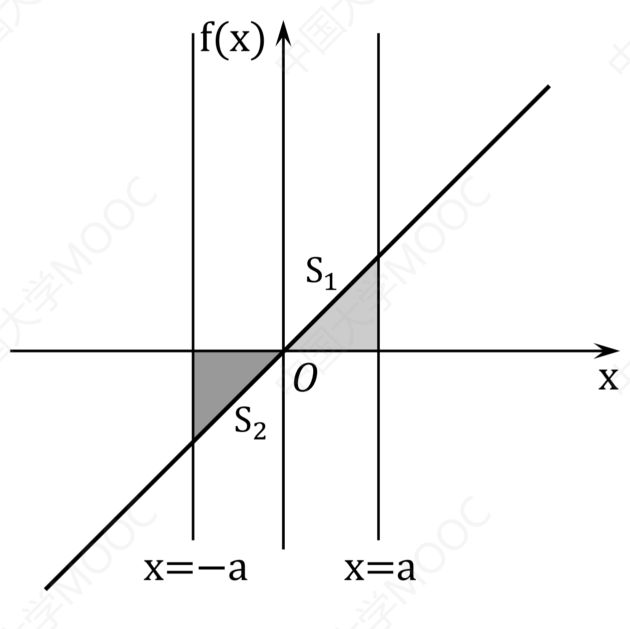
$\int_a^b f(x)\,dx$ = x=a、x=b之间 f(x) 同 x轴 间图像的面积

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ = x=0、x=1之间 f(x) 同 x轴 之间图像的面积



$f(x) = b + \sqrt{a^2-(x-c)^2}$：圆心为 (c , b) 、半径为 a 的上半圆

$f(x) = b - \sqrt{a^2-(x-c)^2}$：圆心为 (c , b) 、半径为 a 的下半圆



性质2：

$\int_a^b f(x)\,dx$ = x=a、x=b之间 f(x) 同 x轴 间图像的面积

① f(x) 为奇函数时，$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

奇函数：满足$f(-x)= -f(x)$的函数

$f(x) = xe^{-|x|}$

$f(-x) = -xe^{-|-x|}$

$= -xe^{-|x|}$

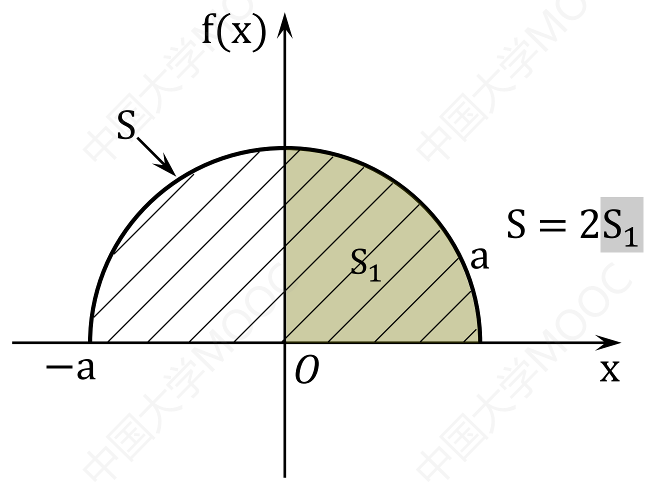
$f(-x) = -f(x)$

$xe^{-|x|}$是个奇函数

$\int_{-2}^2 xe^{-|x|}\,dx = 0$

$\int_{-3}^3 xe^{-|x|}\,dx = 0$

$\int_{-10086}^{10086} xe^{-|x|}\,dx = 0$



性质2：

$\int_a^b f(x)\,dx$ = x=a、x=b之间 f(x) 同 x轴 间图像的面积

② f(x) 为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

偶函数：满足$f(-x)=f(x)$的函数

$$f(x) = |x|$$
$$f(-x) = |-x|$$
$$= |x|$$

$|x|$是个偶函数

$$\int_{-2}^{2} |x|\,dx = 2\int_0^2 |x|\,dx$$

$|x|$有时为 x，有时为 $-x$

$$= 2\int_0^2 x\,dx$$

③ $\int_a^{a+b+c} f(x)\,dx = \int_a^{a+b} f(x)\,dx + \int_{a+b}^{a+b+c} f(x)\,dx$

【如：$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$】

④ 若 f(x) 是以 T 为周期的周期函数，

则 $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$

【如：$\int_{1亿}^{1亿+2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx$】

【注意：sin ax/cos ax 的周期为 $\frac{2\pi}{a}$】

计算定积分 —— 变限积分

例1. 试求 $[\int_x^{e^{-x}} f(t)\ dt]'$

$$[\int_x^{e^{-x}} f(t)\ dt]' = f(e^{-x})\cdot(e^{-x})' - f(x)\cdot x'$$
$$= f(e^{-x})\cdot e^{-x}\cdot(-1) - f(x)\cdot 1$$
$$= -f(e^{-x})\cdot e^{-x} - f(x)$$

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f[g(x)]\cdot g'(x) - f[h(x)]\cdot h'(x)$$

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} k(x)\cdot f(t)\,dt\right)' = \left(k(x)\cdot \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)'$$
$$= k'(x)\cdot\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt + k(x)\cdot\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)'$$

例2. 试求 $[\int_x^{e^{-x}} x\cdot f(t)\ dt]'$

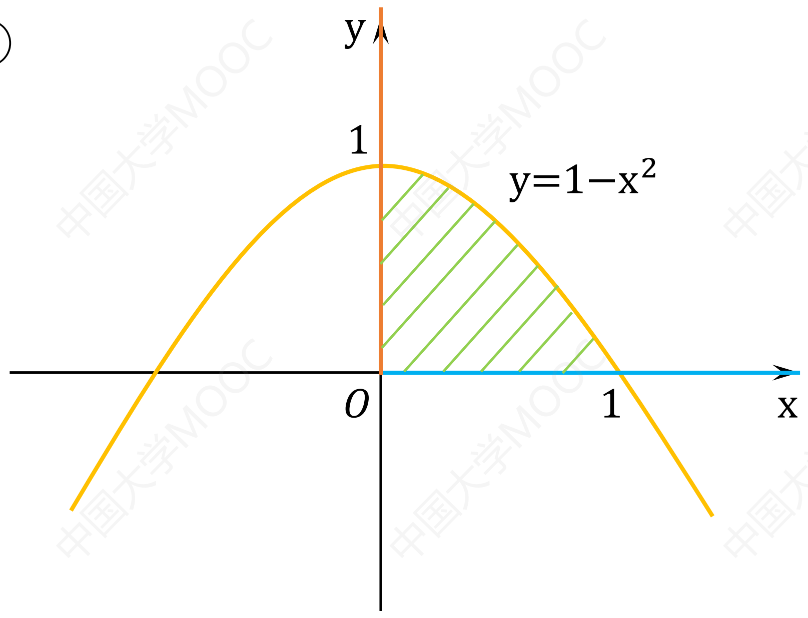
$$[\int_x^{e^{-x}} x\cdot f(t)\ dt]' = \left(x\cdot\int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt\right)'$$
$$= x'\cdot\int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt + x\cdot\left(\int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt\right)'$$
$$= x'\cdot\int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt + x\cdot[-f(e^{-x})\cdot e^{-x} - f(x)]$$
$$= \int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt - x\cdot f(e^{-x})\cdot e^{-x} - xf(x)$$

计算定积分 —— 利用定积分求面积

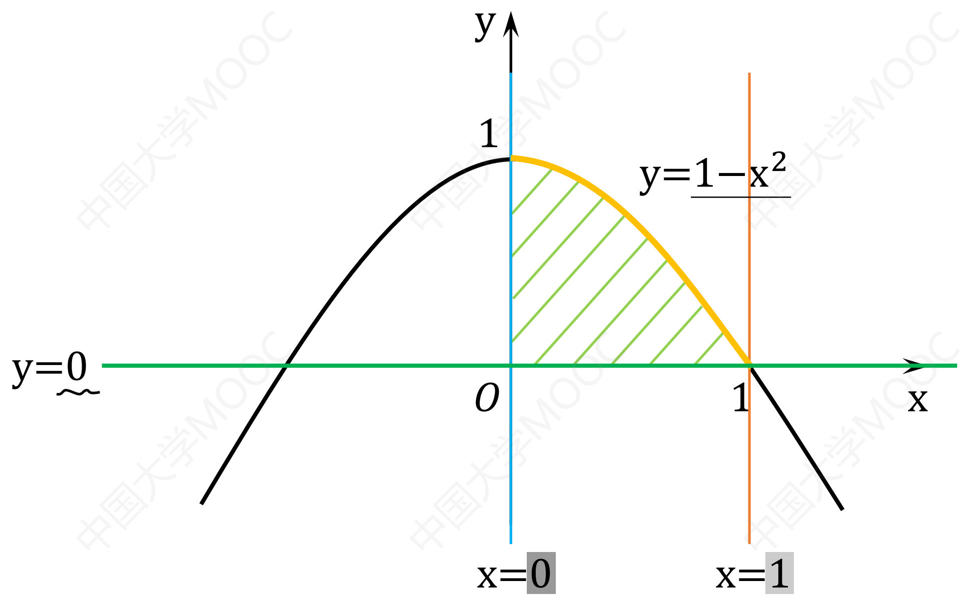
例3. 求 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴围成区域的面积

所求面积 $=\int_{x_{小}}^{x_{大}}(y_{上}-y_{下})\,dx$

①



②



$x_{大}=1$，$x_{小}=0$　$y_{上}=1-x^2$，$y_{下}=0$

所求面积 $=\int_0^1(1-x^2-0)\,dx$

$=\int_0^1(1-x^2)dx$

$=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$

$=1-\frac{1^3}{3}-\left(0-\frac{0^3}{3}\right)$

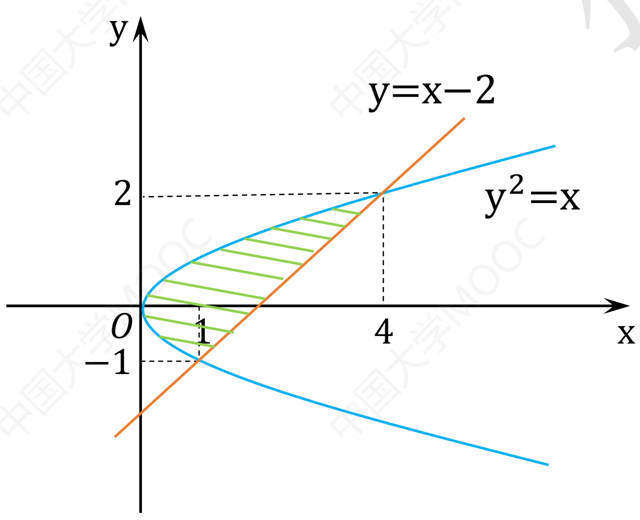
$=\frac{2}{3}-0$

$=\frac{2}{3}$

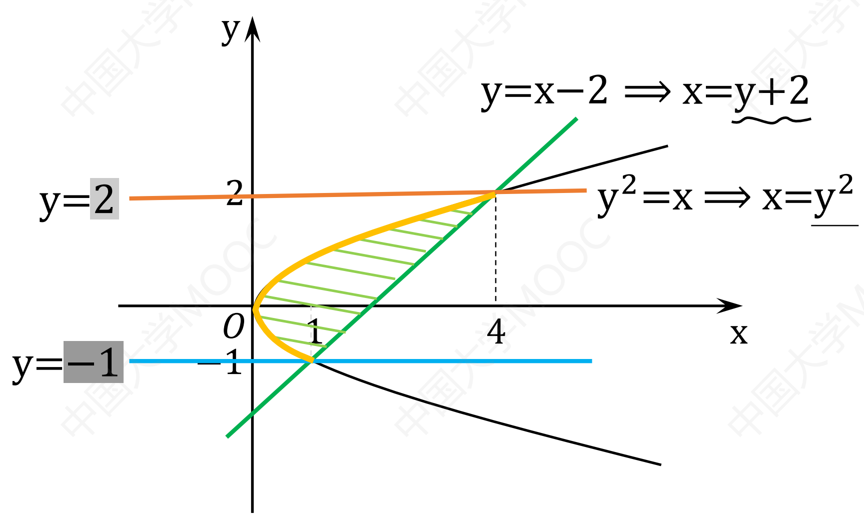
例4. 求 $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 围成区域的面积

所求面积 $=\int_{y_{小}}^{y_{大}}(x_{右}-x_{左})\,dy$

①



②



$y_{大}=2$，$y_{小}=-1$　$x_{左}=y^2$，$x_{右}=y+2$

所求面积 $=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)\,dy$

$=\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}$

$=\left(\frac{2^2}{2}+2\times2-\frac{2^3}{3}\right)-\left[\frac{(-1)^2}{2}+2\times(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]$

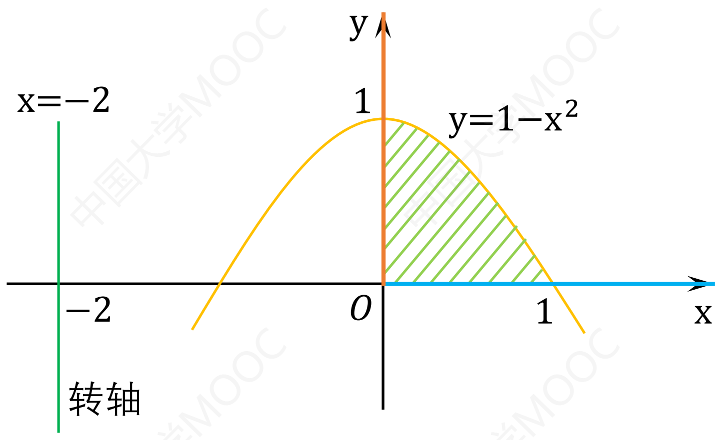
$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)$

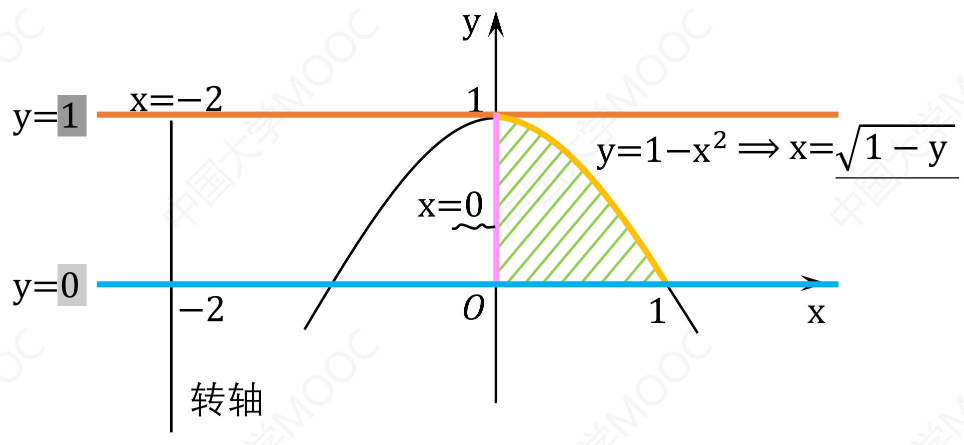
$=\frac{9}{2}$

计算定积分 —— 利用定积分求体积

例5. 由 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴所围成区域的图形，绕 $x=-2$ 旋转一周生成一个旋转体，求其体积

$$V=\int_c^d \pi[f(y)-a]^2\,dy-\int_c^d \pi[g(y)-a]^2\,dy$$





$c=0$　$d=1$　$f(y)=\sqrt{1-y}$　$g(y)=0$　$a=-2$（由转轴可得）

$$V=\int_0^1 \pi[\sqrt{1-y}-(-2)]^2\,dy-\int_0^1 \pi[0-(-2)]^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1(1-y+4\sqrt{1-y}+4)\,dy-4\pi\int_0^1 1\,dy$$

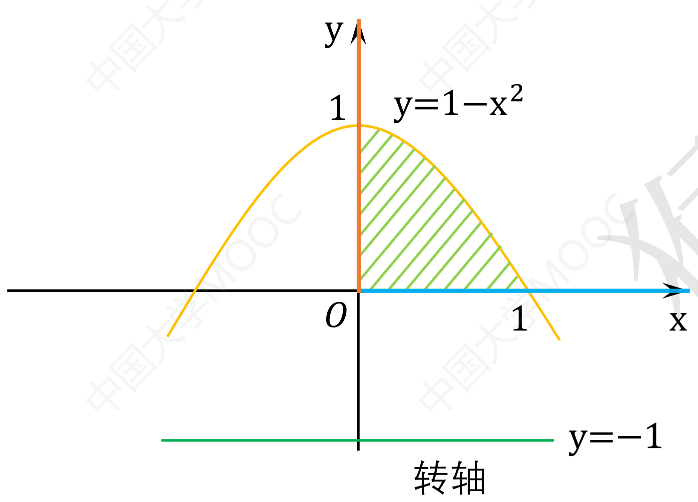
$$=\pi\cdot\left(\int_0^1 5\,dy-\int_0^1 y\,dy+4\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy\right)-4\pi\int_0^1 1\,dy$$

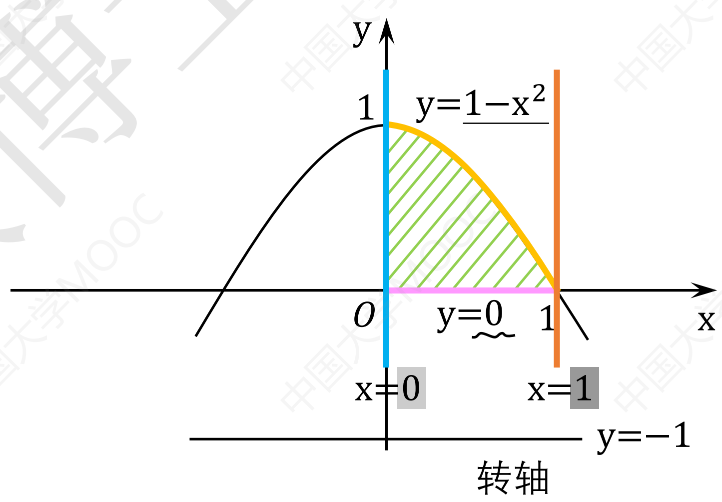
$$=\pi\cdot\left(5-\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\right)-4\pi$$

$$=\frac{19}{6}\pi$$

例6. 由 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴所围成区域的图形，绕 $y=-1$ 旋转一周生成一个旋转体，求其体积

$$V=\int_c^d \pi[f(x)-a]^2\,dx-\int_c^d \pi[g(x)-a]^2\,dx$$





$c=0$　$d=1$　$f(x)=1-x^2$　$g(x)=0$　$a=-1$（由转轴可得）

$$V=\int_0^1 \pi[1-x^2-(-1)]^2\,dx-\int_0^1 \pi[0-(-1)]^2\,dx$$

$$=\int_0^1 \pi(2-x^2)^2\,dx-\int_0^1 \pi\cdot 1^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1(4-4x^2+x^4)\,dx-\pi\int_0^1 1\,dx$$

$$=\pi\left(\int_0^1 4\,dx-\int_0^1 4x^2\,dx+\int_0^1 x^4\,dx\right)-\pi\cdot 1$$

$$=\pi\cdot\left(4-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)-\pi$$

$$=\frac{28}{15}\pi$$

微分方程 —— 一阶(只有y')

例1. 试求 $x \cdot y' - \frac{1}{\sin y} = 0$ 的通解

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{\sin y} = 0$$
$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{1}{\sin y}$$
$$x \sin y\, dy = 1\, dx$$
$$\sin y\, dy = \frac{1}{x} dx$$
$$\int \sin y\, dy = \int \frac{1}{x} dx$$
$$-\cos y + C_1 = \ln|x| + C_2$$
$$\cos y = -\ln|x| + C_1 - C_2$$
$$\cos y = -\ln|x| + C$$

例2. 试求 $x \cdot y' + y = 0$ 的通解

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$\frac{x\,dy}{dx} = -y$$
$$x\, dy = -y\, dx$$
$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$$
$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx$$
$$\ln|y| + C_1 = -\int \frac{1}{x} dx$$
$$\ln|y| + C_1 = -(\ln|x| + C_2)$$
$$\ln|y| = (-C_2 - C_1) - \ln|x|$$
$$\ln|y| = C_3 - \ln|x|$$

【$\because \ln e^a = a$】

$$\therefore \ln|y| = \ln e^{C_3} - \ln|x|$$

【$\because \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$】

$$\therefore \ln|y| = \ln \frac{e^{C_3}}{|x|}$$
$$\ln|y| = \ln\left|\frac{e^{C_3}}{x}\right|$$

【$\because \ln a = \ln b \Rightarrow a = b$】

$$\therefore |y| = \left|\frac{e^{C_3}}{x}\right|$$
$$y = \pm \frac{e^{C_3}}{x}$$
$$y = \frac{\pm e^{C_3}}{x}$$

【$\because \pm e^{C_3}$ 结果是一个常数，可用 C 表示】

$$\therefore y = \frac{C}{x}$$

例3. 试求 $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin\frac{y}{x}}$ 的通解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin\frac{y}{x}} \qquad \text{令 } \frac{y}{x} = Y\,,\ \frac{dy}{dx} = Y + x\frac{dY}{dx}$$

$$Y + x\frac{dY}{dx} = Y + \frac{1}{\sin Y}$$

$$x\frac{dY}{dx} = \frac{1}{\sin Y} \quad \text{(例1做过)}$$

$$\cos Y = -\ln|x| + C \ \Rightarrow \cos\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$$

例4. 试求 $y' + y = x$ 的通解

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 1\cdot y \qquad Q(x)=x\,,\ P(x)=1$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right]$$

$$= e^{-\int 1dx}\left(\int xe^{\int 1dx}\,dx + C\right)$$

$$= e^{-x}\left(\int xe^{x}\,dx + C\right)$$

$$= e^{-x}\left(\int x\cdot(e^{x})'dx + C\right)$$

$\because \int a\cdot b' = a\cdot b - \int a'\cdot b$

$\therefore \int x\cdot(e^{x})'dx = xe^{x} - \int x'\cdot e^{x}\,dx$

$$= e^{-x}\left(xe^{x} - \int x'\cdot e^{x}\,dx + C\right)$$

$$= e^{-x}\left(xe^{x} - \int e^{x}\,dx + C\right)$$

$$= e^{-x}\left(xe^{x} - e^{x} + C\right)$$

$$= e^{-x}\cdot xe^{x} - e^{-x}\cdot e^{x} + Ce^{-x}$$

$$= x - 1 + Ce^{-x}$$

微分方程 —— 可降阶的高阶

例5. 试求 $y'' + y' = x$ 的通解

令 $y'=Y$、$y''=Y'$

$$y'' + y' = x \ \Rightarrow\ Y' + Y = x \quad \text{(例4做过)}$$

$$Y = x - 1 + Ce^{-x}$$

$$y = \int(x - 1 + Ce^{-x})\,dx$$

$$= \int x\,dx - \int 1\,dx + \int Ce^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + C_1 - (x + C_2) + C_3\cdot\int e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + (C_1 - C_2) + C_3\cdot(-e^{-x} + C_4)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x - C_3\cdot e^{-x} + (C_1 - C_2 + C_3C_4)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x - C_3\cdot e^{-x} + C_5$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + C_1\cdot e^{-x} + C_2$$

例6. 试求 $yy''+(y')^2=0$ 的通解

令 $y=X$、$y'=Y$、$y''=Y\frac{dY}{dX}$

$$yy''+(y')^2=0 \Longrightarrow XY\frac{dY}{dX}+Y^2=0$$

$$X\frac{dY}{dX}+Y=0 \qquad \text{(例2做过)}$$

$$Y=\frac{C}{X}$$

$$Y=\frac{C}{y}$$

$$y'=\frac{C}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C}{y}$$

$$y\,dy=C\,dx$$

$$\int y\,dy=\int C\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2+C_1=Cx+C_2$$

$$y^2=2Cx+2(C_2-C_1)$$

$$y^2=C_3x+C_4$$

$$y^2=C_1x+C_2$$

例 . 试求 $x\cdot y'+y=0$ 的通解，并求其满足 $y(1)=1$ 的特解

$$x\cdot\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\frac{x\,dy}{dx}=-y$$

$$x\,dy=-y\,dx$$

$$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln|y|+C_1=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y|+C_1=-(\ln|x|+C_2)$$

$$\ln|y|=(-C_2-C_1)-\ln|x|$$

$$\ln|y|=C_3-\ln|x|$$

【$\because\ \ln e^a=a$】

$$\therefore \ln|y|=\ln e^{C_3}-\ln|x|$$

【$\because\ \ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$】

$$\therefore \ln|y|=\ln\frac{e^{C_3}}{|x|}$$

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{e^{C_3}}{x}\right|$$

【$\because\ \ln a=\ln b\Longrightarrow a=b$】

$$\therefore |y|=\left|\frac{e^{C_3}}{x}\right|$$

$$y=\pm\frac{e^{C_3}}{x}$$

$$y=\frac{\pm e^{C_3}}{x}$$

【$\because \pm e^{C_3}$ 结果是一个常数，可用 C 表示】

$$\therefore y=\frac{C}{x}$$

$$y(1)=\frac{C}{1}=C$$

$$C=1$$

特解为 $y=\frac{1}{x}$

微分方程 —— 常系数齐次

求 $y''-5y'+6y=0$ 的通解

$y^{(2)}\quad y^{(1)}\quad y^{(0)}$

① $r^2\quad r^1\quad r^0$

$r^2-5r^1+6r^0=0$

② $\Rightarrow\quad r^2-5r+6=0$

$\Rightarrow (r-2)(r-3)=0$

解得：$r_1=2$，$r_2=3$

③ 单实根 2，单实根 3

$C_1\cdot e^{2x}\qquad C_2\cdot e^{3x}$

④ 通解：$y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

特点	称为	对应的式子
$r_n=\alpha$	单实根α	$C\cdot e^{\alpha x}$
$\begin{cases}r_1\\r_2\\\dots\\r_k\end{cases}=\alpha$	k重实根α	$e^{\alpha x}\cdot\left(C_1+C_2x+\dots+C_kx^{k-1}\right)$
$r_a=\alpha+\beta i$ $r_b=\alpha-\beta i$	一对复根 α±βi	$e^{\alpha x}\cdot(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
$\begin{cases}r_{a1}\\r_{a2}\\\dots\\r_{ak}\end{cases}=\alpha+\beta i$ $\begin{cases}r_{b1}\\r_{b2}\\\dots\\r_{bk}\end{cases}=\alpha-\beta i$	一对 k 重 复根α±βi	$e^{\alpha x}\cdot[\left(C_1+C_2x+\dots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x$ $+\left(D_1+D_2x+\dots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x]$

微分方程 —— 常系数非齐次

例1. 求 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解

① $y''-5y'+6y=0$

特征方程的单实根 2，单实根 3　常系数齐次的题目做过

齐次方程的通解 $\bar{y}=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

② $f(x)=e^x=1\cdot e^{1\cdot x}$

$\lambda=1$， $m=0$， $k=0$

③ $y^*=x^k(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)e^{\lambda x}$

$=x^0\cdot b_0x^0\cdot e^{1\cdot x}$

$=b_0\cdot e^x$

$(b_0\cdot e^x)''-5\cdot(b_0\cdot e^x)'+6\cdot(b_0\cdot e^x)=e^x$

$(b_0\cdot e^x)'-5b_0e^x+6b_0e^x=e^x$

$b_0e^x-5b_0e^x+6b_0e^x=e^x$

$2b_0=1$

$b_0=\frac{1}{2}$

$y^*=\frac{1}{2}e^x$

④ 通解 $=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$

例2. 求 $y''-5y'+6y=\cos x+\sin x$ 的通解

① $y''-5y'+6y=0$

特征方程的单实根 2，单实根 3　常系数齐次的题目做过

齐次方程的通解 $\bar{y}=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

② $f(x)=\cos x+\sin x=e^{0\cdot x}[1\cdot\cos(1\cdot x)+1\cdot\sin(1\cdot x)]$

$\lambda=0,\ \beta=1,\ n=0,\ t=0,\ k=0,\ m=0$

$\lambda+\beta i=0+1\cdot i=i$，i 不是特征方程的根，$\therefore k=0$

③ $y^*=x^k[(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_mx^0)\cos\beta x+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_mx^0)\sin\beta x]e^{\lambda x}$

$=x^0[a_0x^0\cos(1\cdot x)+b_0x^0\sin(1\cdot x)]e^{0\cdot x}$

$=a_0\cos x+b_0\sin x$

$(a_0\cos x+b_0\sin x)''-5(a_0\cos x+b_0\sin x)'+6(a_0\cos x+b_0\sin x)=\cos x+\sin x$

$-a_0\cos x-b_0\sin x+5a_0\sin x-5b_0\cos x+6a_0\cos x+6b_0\sin x=\cos x+\sin x$

$(5a_0+5b_0-1)\sin x+(5a_0-5b_0-1)\cos x=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}5a_0+5b_0-1=0\\5a_0-5b_0-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=\frac{1}{5}\\b_0=0\end{cases}$$

$y^*=\frac{1}{5}\cos x+0\cdot\sin x=\frac{1}{5}\cos x$

④ 通解 $=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}+\frac{1}{5}\cos x$

微分方程 —— 需要用知识点快速做的小题

例3．已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$

是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，

则该方程的通解为 y =____________

找非齐次方程的通解 $\Rightarrow$ 找 $\begin{cases}\text{齐次方程的通解} & C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^x\\ \text{非齐次方程的特解} & y_3=-xe^{2x}\end{cases}$

找 齐次方程的通解 $\Rightarrow$ 找 齐次方程的两个特解且 $\dfrac{\text{齐次特解}_1}{\text{齐次特解}_2}\neq C$

齐次特解1：$y_1-y_3=(e^{3x}-xe^{2x})-(-xe^{2x})=e^{3x}$

齐次特解2：$y_2-y_3=(e^x-xe^{2x})-(-xe^{2x})=e^x$

$\because\dfrac{\text{齐次特解}_1}{\text{齐次特解}_2}=\dfrac{e^{3x}}{e^x}=e^{2x}\neq C$

$\therefore$ 齐次方程的通解为 $C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^x$

$\therefore$ 非齐次方程的通解为 $C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^x-xe^{2x}$

找啥	需要有啥	能得到啥
非齐次的通解	齐次的通解 $\bar{y}$，非齐次的特解 y^*	非齐次的通解为 $\bar{y}+y^*$
齐次的特解	非齐次的特解 y_1^*, y_2^*	齐次的特解为 $y_1^*-y_2^*$
齐次的通解	齐次的特解 y_1, y_2 且 $\frac{y_1}{y_2}\neq C$	齐次的通解为 $C_1y_1+C_2y_2$
	齐次的特解 y_1, y_2	齐次的特解为 $C_1y_1+C_2y_2$
	$?=f_1(x)$的特解 y_a^* $?=f_2(x)$的特解 y_b^*	$?=f_1(x)+f_2(x)$的特解为 $y_a^*+y_b^*$

证明题

<table>
<tr><td rowspan="3">不等式</td><td colspan="2">只含 x</td><td>单调性</td></tr>
<tr><td rowspan="2">含 x_1 , x_2</td><td>能一边只有 x_1 ,一边只有 x_2</td><td>单调性</td></tr>
<tr><td>有 $f(?_2)-f(?_1)$ 形式的式子</td><td>拉格朗日中值定理</td></tr>
<tr><td rowspan="4">等式</td><td rowspan="2">不含 f'</td><td>已知两点的 f 值</td><td>零点定理</td></tr>
<tr><td>已知范围内几个点加减后的值</td><td>介值定理推论</td></tr>
<tr><td rowspan="2">含 f'</td><td>证明范围中存在 ξ 满足要求</td><td>罗尔中值定理</td></tr>
<tr><td>证明范围中存在 ξ、η 满足要求</td><td>柯西定理</td></tr>
</table>

证明题 —— 利用单调性证明不等式

例1. 设 $x>0$，常数 $a>e$，证明 $(a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

① $(a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

$\Rightarrow (a+x)\cdot\ln a-a\cdot\ln(a+x)>0$

$f(x)=(a+x)\cdot\ln a-a\cdot\ln(a+x)$

② $f(0)=0$

③ $f'(x)=[(a+x)\cdot\ln a-a\cdot\ln(a+x)]'$

$=[(a+x)\cdot\ln a]'-[a\cdot\ln(a+x)]'$

$=(a+x)'\cdot\ln a-a\cdot[\ln(a+x)]'$

$=1\cdot\ln a-a\cdot\frac{1}{a+x}$

$=\ln a-\frac{a}{a+x}>0$

$\because a>e$

$\therefore \ln a>\ln e=1$

$\because x>0$，$a>0$

$\therefore 0<\frac{a}{a+x}<1$

$\therefore \ln a-\frac{a}{a+x}>0$

$\therefore$ 范围内 $f(x)$ 递增

$\therefore f(x)>f(0)$

$\Rightarrow f(x)>0$

$\Rightarrow (a+x)\cdot\ln a-a\cdot\ln(a+x)>0$

$\Rightarrow (a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

【 题难一点可能要用的公式：

$a^b=e^{b\cdot\ln a}$，$e^{\alpha}>e^{\beta}\Rightarrow\alpha>\beta$ 】

$a^{a+x}=e^{(a+x)\cdot\ln a}$

$(a+x)^a=e^{a\cdot\ln(a+x)}$

$e^{(a+x)\cdot\ln a}>e^{a\cdot\ln(a+x)}\Rightarrow(a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

例2. 设 $x_1>x_2>e$，证明 $x_1\cdot\ln x_2 > x_2\cdot\ln x_1$

① $x_1\cdot\ln x_2 > x_2\cdot\ln x_1$

$\Rightarrow \quad \frac{\ln x_2}{x_2} > \frac{\ln x_1}{x_1}$

$f(x_1)=\frac{\ln x_1}{x_1}$， $f(x_2)=\frac{\ln x_2}{x_2}$

② $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

③ $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$

$=\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot x'}{x^2}$

$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)\cdot 1}{x^2}$

$=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\because x_1>x_2>e$

$\therefore x>e$ 时，$x^2>0$

$\ln x>\ln e=1$

$\therefore$ 范围内 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$

$\therefore$ 范围内 $f(x)$ 单调递减

④ $\because x_1>x_2$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{\ln x_2}{x_2}$

$\Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1}\cdot x_1x_2<\frac{\ln x_2}{x_2}\cdot x_1x_2$

$\Rightarrow \quad x_2\cdot\ln x_1<x_1\cdot\ln x_2$

证明题 —— 利用拉格朗日中值定理证明不等式

例3. 设 $f''(x)<0$，证明：对任何的 $x_1\geq x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0)$

方法：
令 $f(?_2)-f(?_1)=f'(\xi)\cdot(?_2-?_1)$，$\xi\in(?_1,?_2)$

$f(x_1+x_2)-f(x_1)=f'(\xi_1)\cdot(x_1+x_2-x_1)$， $\xi_1\in(x_1,x_1+x_2)$

$=f'(\xi_1)\cdot x_2$ ， $\xi_1\in(x_1,x_1+x_2)$

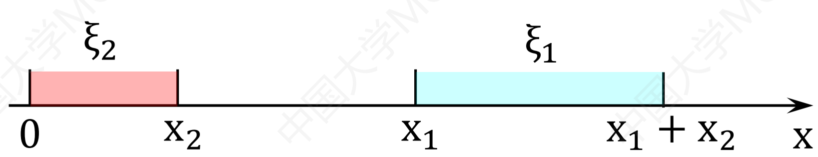
$f(x_2)-f(0)=f'(\xi_2)\cdot(x_2-0)$， $\xi_2\in(0,x_2)$

$=f'(\xi_2)\cdot x_2$ ， $\xi_2\in(0,x_2)$

$\because f''(x)<0$

$\therefore f'(x)$ 单调递减

$\because x_1\geq x_2>0$，$\xi_1\in(x_1,x_1+x_2)$，$\xi_2\in(0,x_2)$



$\therefore \xi_1>\xi_2$

$\therefore f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow \quad f'(\xi_1)\cdot x_2<f'(\xi_2)\cdot x_2$

$\Rightarrow f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0)$

证明题 —— 利用零点定理证明等式

例4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=1-x_0$

① $f(x_0)=1-x_0 \implies f(x_0)+x_0-1=0$

$\implies F(x_0)=f(x_0)+x_0-1$

$\implies F(x)=f(x)+x-1$

② $F(0)=f(0)+0-1 = 0+0-1 = -1$　　$F(1)=f(1)+1-1 = 1+1-1 = 1$

③ $\because F(0)\cdot F(1)=-1\times1=-1<0$

$\therefore$ $(0,1)$ 内必有一点 x_0，可使 $F(x_0)=0$

即 $f(x_0)+x_0-1=0$

即 $f(x_0)=1-x_0$

证明题 —— 利用介值定理推论证明等式

例5. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)+2f(1)=12$，

证明：存在 $x_0\in[0,2]$，使得 $f(x_0)=4$

① 设在$[0,2]$内，$f(x)$ 最大值为 M，

最小值为 m

② $m+2m\le12 \implies 3m\le12 \implies m\le4$

$M+2M\ge12 \implies 3M\ge12 \implies M\ge4$

$\implies m\le4\le M$

$\implies$$[0,2]$必有一点 x_0，可使 $f(x_0)=4$

证明题 —— 利用罗尔中值定理证明等式

例6. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$

对照下表设 $F(x)$

标准格式	$F(x)$
$f'(\xi)+C=0$	$f(x)+Cx$
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)+C=0$	$e^{\lambda x}f(x)+\frac{C}{\lambda}e^{\lambda x}$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$e^{g(x)}f(x)$
$\xi f'(\xi)+\lambda f(\xi)+C=0$	$x^{\lambda}f(x)+\frac{C}{\lambda}x^{\lambda}$

① $f'(\xi)=1 \implies f'(\xi)-1=0$

② $F(x)=f(x)+(-1)\cdot x=f(x)-x$

$F'(x)=[f(x)-x]'$

$=f'(x)-x'$

$=f'(x)-1$

③ $F(0)=f(0)-0 = 0-0 = 0$　　$F(1)=f(1)-1 = 1-1 = 0$

$\therefore a=0$，$b=1$ 时，可使 $F(a)=F(b)$

即 $F(0)=F(1)$

④ $(0,1)$内存在 ξ，可使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-1=0$

即 $f'(\xi)=1$

证明题 —— 利用柯西定理证明等式

例7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f'(x)\neq 0$，

证明：存在 ξ、$\eta\in(a,b)$，可使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$

① $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}\implies \underbrace{f'(\xi)}_{\text{含}\,\xi\,\text{的项}}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot \underbrace{e^{-\eta}\cdot f'(\eta)}_{\text{含}\,\eta\,\text{的项}}$

② 令 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=f'(\xi)\implies g'(\xi)=1$

$g(\xi)=\int 1\,d\xi=\xi$

$\therefore$ (a,b)内必有一点 ξ，可使 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

③ 令 $\dfrac{f'(\eta)}{h'(\eta)}=e^{-\eta}\cdot f'(\eta)\implies h'(\eta)=\dfrac{f'(\eta)}{e^{-\eta}\cdot f'(\eta)}=\dfrac{1}{e^{-\eta}}=e^{\eta}$

$h(\eta)=\int e^{\eta}\,d\eta=e^{\eta}$

$\therefore$ (a,b)内必有一点 η，可使 $e^{-\eta}\cdot f'(\eta)=\dfrac{f'(\eta)}{h'(\eta)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$

④ $\because f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$e^{-\eta}\cdot f'(\eta)=\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$

$\therefore \dfrac{f'(\xi)}{e^{-\eta}\cdot f'(\eta)}=\dfrac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$

$\implies \dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$

$\therefore$ (a,b)内必有一点 ξ、η，可使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$