连续时间傅里叶变换 (CTFT)

一、重要性质

设 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$。

1. **相乘 (时域)**: $x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta$
2. **时域微分**: $\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$
3. **积分**: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4. **频域微分**: $tx(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
5. **实信号共轭对称**: $x(t)$ 实 $\Rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
   $\mathrm{Re}[X(j\omega)]$ 偶; $\mathrm{Im}[X(j\omega)]$ 奇
6. **实偶/奇信号**: 实偶 $\leftrightarrow$ 实偶; 实奇 $\leftrightarrow$ 纯虚奇
7. **奇偶分解**: $x_{\mathrm{e}}(t) \leftrightarrow \mathrm{Re}[X(j\omega)]$; $x_{\mathrm{o}}(t) \leftrightarrow j\mathrm{Im}[X(j\omega)]$
8. **帕斯瓦尔**: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

二、基本变换对

1. $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
2. $\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
3. $\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
4. $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
5. $\sum_k \delta(t-kT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_k \delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$
6. $\delta(t) \leftrightarrow 1$
7. $\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$
8. $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
9. $e^{-at}u(t), \mathrm{Re}\{a\} > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$
10. $te^{-at}u(t), \mathrm{Re}\{a\} > 0 \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2}$
11. $t^{n-1}e^{-at}u(t), \mathrm{Re}\{a\} > 0 \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(a+j\omega)^n}$
12. **周期方波** $\leftrightarrow \frac{2\omega_0 T_1}{T}\sum_k \mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)\delta(\omega-k\omega_0)$

离散时间傅里叶变换 (DTFT)

一、重要性质 (表 5.3)

设 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$。

1. **时域扩展**: $x_{(k)}[n] \leftrightarrow X(e^{jk\omega})$ (n 非 k 倍数为 0)
2. **卷积**: $x[n]*y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
3. **相乘**: $x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
4. **时域差分**: $x[n]-x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
5. **频域微分**: $nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$
6. **实信号对称**: $x[n]$ 实 $\leftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
7. **实偶/奇**: 实偶 $\leftrightarrow$ 实偶; 实奇 $\leftrightarrow$ 纯虚奇
8. **奇偶分解**: $x_{\mathrm{e}}[n] \leftrightarrow \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$; $x_{\mathrm{o}}[n] \leftrightarrow j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$
9. **帕斯瓦尔**: $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

二、基本变换对 (表 5.2)

1. **DTFS**: $\sum_k \delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N}\sum_r \delta(\omega-\frac{2\pi r}{N})$
2. $e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_k \delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$
3. $\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi\sum_k[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)]$
4. $\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\sum_k[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)]$
5. $a^n u[n], |a|<1 \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
6. **矩形脉冲**: $x[n] = 1(|n| \le N_1) \leftrightarrow \frac{\sin[\omega(N_1+1/2)]}{\sin(\omega/2)}$
7. **低通**: $\mathrm{Rect}_W(\omega) \leftrightarrow \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$
8. $\delta[n] \leftrightarrow 1$
9. $u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_k \delta(\omega-2\pi k)$
10. $\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$
11. $(n+1)a^n u[n], |a|<1 \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
12. $\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n], |a|<1 \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$

主要变换定义公式

一、傅里叶级数 (FS)

1. 连续 (CTFS):

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

2. 离散 (DTFS):

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

二、傅里叶变换 (FT)

3. 连续 (CTFT):

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

4. 离散 (DTFT):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

三、复平面变换 (S 域与 Z 域)

5. 连续拉普拉斯 (CTLT):

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

6. Z 变换 (DTLT):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

7. 单边 Z 变换:

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_+(z)z^{n-1}dz$$

拉普拉斯变换 (CTLT)

一、重要性质 (表 9.1)

1. **线性**: $aX_1(s)+bX_2(s)$ (ROC 至少 $R_1 \cap R_2$)
2. **时移**: $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$ (ROC 不变)
3. **s 平移**: $e^{s_0 t}x(t) \leftrightarrow X(s-s_0)$ (ROC 平移)
4. **尺度**: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$ (ROC 变为 aR)
5. **共轭**: $x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*)$
6. **卷积**: $x_1 * x_2 \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$ (ROC $\cap$)
7. **时域微分**: $x'(t) \leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$ (单边考虑初始值)
8. **s 域微分**: $-tx(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$
9. **积分**: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$ (ROC $\cap\mathrm{Re}(s)>0$)
10. **初/终值**: $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$; $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

二、基本变换对 (表 9.2)

注: 以下均为右边信号 (ROC 通常为 $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{pole}$)

1. $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (全平面)
2. $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$
3. $-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ ($\mathrm{Re}\{s\} < 0$)
4. $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$
5. $te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$
6. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^n}$
7. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n}$
8. $[\cos\omega_0 t]u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
9. $[\sin\omega_0 t]u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

三、收敛域 (ROC)

- **因果**: ROC 为右侧半平面。
- **反因果**: ROC 为左侧半平面。
- **稳定**: ROC 包含虚轴 ($\mathrm{Re}\{s\} = 0$)。

四、单边拉普拉斯性质 (表 9.3)

假设 $t < 0$ 时 $x(t) = 0$。

1. **线性/平移/尺度/卷积**: 与双边类似。
2. **时域微分**: $x'(t) \leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$
3. **s 域微分**: $-tx(t) \leftrightarrow X'(s)$
4. **初值**: $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
5. **终值**: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

Z 变换 (DTLT)

一、重要性质 (表 10.1)

设 $x[n] \leftrightarrow X(z)$。

1. **线性**: $aX_1(z) + bX_2(z)$
2. **时移**: $x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$
3. **尺度**: $a^n x[n] \leftrightarrow X(a^{-1}z)$ (ROC 缩放)
4. **反转**: $x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1})$ (ROC 倒数)
5. **扩展**: $x_{(k)}[n] \leftrightarrow X(z^k)$
6. **共轭**: $x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*)$
7. **卷积**: $x_1 * x_2 \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$
8. **一次差分**: $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1-z^{-1})X(z)$
9. **累加**: $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
10. **z 域微分**: $nx[n] \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z)$
11. **初值**: 若因果, $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

二、单边 Z 变换性质 (表 10.3)

假设 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$。

1. **右移**: $x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x[-1]$
2. **左移**: $x[n+1] \leftrightarrow zX(z) - zx[0]$
3. **一次差分**: $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1-z^{-1})X(z) - x[-1]$

三、基本变换对 (表 10.2 整理)

格式：信号 $\leftrightarrow$ 变换, ROC

1. $\delta[n] \leftrightarrow 1$, All z
2. $u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$
3. $-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| < 1$
4. $\delta[n-m] \leftrightarrow z^{-m}$, $z \neq 0, \infty$
5. $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$
6. $-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| < |a|$
7. $na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$
8. $-na^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| < |a|$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n] \leftrightarrow \frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$, $|z| > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n] \leftrightarrow \frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$, $|z| > 1$