——Equation de transport——

par
ZHANG Xunjie
pour le Méthodes numériques pour les EDP M1

fait le 15 mai 2017

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Problème physique

Dans cette séance de TP EDP , on considère le problème de l'advection d'une impulsion acoustique ; le champ de pression est initialement :

$$P_0(x) = \begin{cases} \cos(kx)\exp(-\alpha x^2) & |x| < 0.5 \\ P_\infty & |x| > 0.5 \end{cases} \tag{1.1}$$

Pour la continuité de la pression initiale et ses dérivées par rapport à , on met $\alpha = -2k\tan(\frac{k}{2})$, et $P_\infty = \cos(\frac{k}{2})\exp(-\frac{\alpha}{4}$.

Enfin, pour obtenir une impulsion utile, on utilisera $k = 37$ Pour la propagation on peut utiliser l'équation de transport,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

Ou est la pression et est la vitesse du son. Sur un domaine $-L \leq x \leq 2L$, les conditions au limites sont : $p(x = -L) = P_\infty$ et $\frac{\partial p}{\partial x}(x = 2L) = 0$.

Chapitre 2

Solution analytique

La solution générale de ce type de problème avec $c > 0$, s'écrit sous la forme :

$$p(x,t) = P_0(X) \qquad X = x - ct \tag{2.1}$$

Alors,

$$P_0(x) = \begin{cases} \cos(kX)\exp(-\alpha X^2) & |x| < 0.5 \\ P_\infty & |x| > 0.5 \end{cases} \tag{2.2}$$

On considère la propagation d'une onde sonore plane dans tube de longueur 2L contenant un milieu au repos de densité r_0 et de pression p_0. Le milieu est perturbé à l'instant initial par une fluctuation de pression $\omega(x)$ ne dépendant que de la direction spatiale x et sans vitesse initial $\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0$. La densité$r(x,t)+r_0$ la pression $p(x,t) + p_0$ et la vitesse $u(x,t)$ du milieu perturbée sont solutions des équations de conservation d'Euler, qui décrivent la dynamique d'un gaz non visqueux.

En supposant que les perturbations sont faibles (hypothèse de l'acoustique), l'équation de conservation de la masse s'écrit au premier ordre :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

De même l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit au premier ordre :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.4}$$

Les fluctuations étant faibles, on peut supposer l'écoulement isentropique :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0} \tag{2.5}$$

De ces relations on en déduit un système d'équations hyperbolique sur et :

$$\frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.7}$$

En dérivant la première équation par rapport à t et la seconde par rapport à x, on obtiens par différence l'équation des ondes pour la fluctuation de pression p :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.8}$$

Chapitre 3

Méthode numérique

3.1 Schéma de courant

Le schéma s'écrit sous la form suivante :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\triangle t} = -c\frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\triangle x} \tag{3.1}$$

On introduce une petite perturpation :

$$p_i^n = p_i^n + \varepsilon_i^n \tag{3.2}$$

en même temps

$$C_{FL} = \frac{c\triangle t}{\triangle x}$$

$$\beta = \omega dx$$

on introduce Fouriere mode :

$$\varepsilon_i^n = \psi^n e^{I\omega idx} \tag{3.3}$$

3.1.1 Stabilité

$$\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = 1 - C_{FL}(\cos\beta - 1) - C_{FL}\sin\beta \tag{3.4}$$

On se trouve la fraction est une valeur complex , donc on cherche la module de cette valeur :

$$\left|\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n}\right| \leq 1$$

et on retrouve la résultat :

$$\left|C_{FL}\right| \leq 1 \tag{3.5}$$

3.1.2 Consistance

On utilise Taylor Series pour trouver la consistance :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \triangle t \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{(i,n)} + \frac{\triangle t^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big|_{(i,n)} + \frac{\triangle t^3}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\Big|_{(i,n)} + \cdots\cdots \quad (3.6)$$

D'ou ,U_i^n est la solution exact .

et on trouve :

$$Err = \frac{\triangle t}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\Big|_{(i,n)} - \frac{c\triangle x}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Big|_{(i,n)} + \circ(\triangle t^2, \triangle x^2) \quad (3.7)$$

Avec :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(- c\frac{\partial p}{\partial x}\Big) = -c\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big) = -c\frac{\partial}{\partial x}\Big(- c\frac{\partial p}{\partial x}\Big) = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$Err = \frac{\triangle t c^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Big|_{(i,n)} - \frac{c\triangle x}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Big|_{(i,n)} + \circ(\triangle t^2, \triangle x^2) \quad (3.8)$$

On a

$$C_{FL} = \frac{c\triangle t}{\triangle x}$$

Finalement,

$$Err = \frac{c\triangle x}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Big(C_{FL} - 1\Big) + \circ(\triangle t^2, \triangle x^2) \quad (3.9)$$

On peur dire que il y a une diffusion avec coefficient $\frac{c\triangle x}{2}(C_{FL} - 1)$

3.2 Schéma de Lax-Wendroff

Le schéma s'écrit sous la form suivante :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\triangle t} = -\frac{c}{2\triangle x}\Big(p_{i+1}^n - p_{i-1}^n\Big) + \frac{c^2\triangle t^2}{2\triangle x^2}\Big(p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n\Big) \quad (3.10)$$

On introduce une petite perturpation :

$$p_i^n = p_i^n + \varepsilon_i^n \quad (3.11)$$

en même temps

$$C_{FL} = \frac{c\triangle t}{\triangle x}$$

$$\beta = \omega dx$$

on introduce Fouriere mode :

$$\varepsilon_i^n = \psi^n e^{I\omega i dx} \quad (3.12)$$

3.2.1 Stabilité

$$\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = 1 - 2C_{FL}^2 \sin^2(\frac{\beta}{2}) - IC_{FL}(1 - \sin\beta) \tag{3.13}$$

On se trouve la fraction est une valeur complex , donc on cherche la module de cette valeur :

$$\left|\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n}\right| \leq 1$$

et on retrouve la résultat :

$$\left|C_{FL}\right| \leq 1 \tag{3.14}$$

3.2.2 Consistance

On utilise Taylor Series pour trouver la consistance :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \triangle t \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{(i,n)} + \frac{\triangle t^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big|_{(i,n)} + \frac{\triangle t^3}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\Big|_{(i,n)} + \cdots\cdots \tag{3.15}$$

D'ou ,U_i^n est la solution exact .

et on a :

$$Err = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\triangle t} + \frac{c}{2\triangle x}\Big(p_{i+1}^n - p_{i-1}^n\Big) - \frac{c^2\triangle t^2}{2\triangle x^2}\Big(p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n\Big)$$

on trouve :

$$Err = \frac{c\triangle x^2}{6}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\Big|_{(i,n)} + \circ(\triangle t^2, \triangle^4) \tag{3.16}$$

On peur dire que il y a une dispersion avec coefficient $\frac{c\triangle x^2}{6}$

3.3 Schéma de leap-frog

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^{n-1}}{\triangle t} = -c\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{\triangle x} \tag{3.17}$$

On introduce une petite perturpation :

$$p_i^n = p_i^n + \varepsilon_i^n \tag{3.18}$$

en même temps

$$C_{FL} = \frac{c\triangle t}{\triangle x}$$

$$\beta = \omega dx$$

on introduce Fouriere mode :

$$\varepsilon_i^n = \psi^n e^{I\omega i dx} \tag{3.19}$$

3.3.1 Stabilité

On substrust et on trouve :

$$\frac{\psi_i^{n+1}}{\psi_i^n} = \frac{\psi_i^{n-1}}{\psi_i^n} - 2IC_{FL}\sin\beta \tag{3.20}$$

Cette valeur de stabilité est une trois-étage , on pose :

$$\frac{\psi_i^{n+1}}{\psi_i^n} = \frac{\psi_i^{n-1}}{\psi_i^n} = G$$

on a :

$$G^2 + 2IC_{FL}\sin\beta - 1 = 0 \tag{3.21}$$

Les solutions sont :

$$G_{1,2} = -IC_{FL}\sin\beta \pm (1 - C_{FL}^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}$$

Ici , on sépare les résultat et discuss :

- $\triangle \geq 0$, $G_{1,2} = 1$ et on trouve la condition ,$\Big|C_{FL}\Big| \leq 1$
- $\triangle < 0$, $G_{1,2} = -I(C_{FL}\sin\beta \pm \sqrt{C_{FL}^2\sin^2\beta})$ est une valeur complexe , on essaie cherche la module de cette valeur ,

  $$\Big|G_{1,2}\Big|^2 = Im\{G_{1,2}\}^2 = (C_{FL}\sin\beta \pm \sqrt{C_{FL}^2\sin^2\beta - 1})^2$$

  on s'interest à G_2 , et :

  $$G_2^2 = (C_{FL}\sin\beta + \sqrt{C_{FL}^2\sin^2\beta - 1})^2$$

  $$G_2^2 > (C_{FL}\sin\beta)^2 > 1$$

  on dit que pour $\triangle < 0$, il n'y pas de consisitance .

Donc , pour la stabilité de la schéma Leap-Frog , quand $\Big|C_{FL}\Big| \leq 1$, elle est stabilité avec condition .

3.3.2 Consistance

$$Err = \frac{\triangle t^2}{12}\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\Big|_{(i,n)} + \frac{c\triangle x^2}{12}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\Big|_{(i,n)} + \circ(\triangle t^4, \triangle x^4) \tag{3.22}$$

On a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(-c\frac{\partial p}{\partial x}\Big) = -c\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}\Big) = -c\frac{\partial}{\partial x}\Big(-c\frac{\partial p}{\partial x}\Big) = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

on retrouve :

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -c^3\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}$$

Donc au final :

$$Err = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\Big|_{(i,n)}(-c^3\triangle t^2 + c\triangle x^2) + \circ(\triangle t^4, \triangle x^4) \tag{3.23}$$

On dit que cette schéma transpose avec dispersion , sa coefficient est $\frac{1}{12}(-c^3\triangle t^2 + c\triangle x^2)$.

Chapitre 4

Etude numérique

4.1 Solution exact

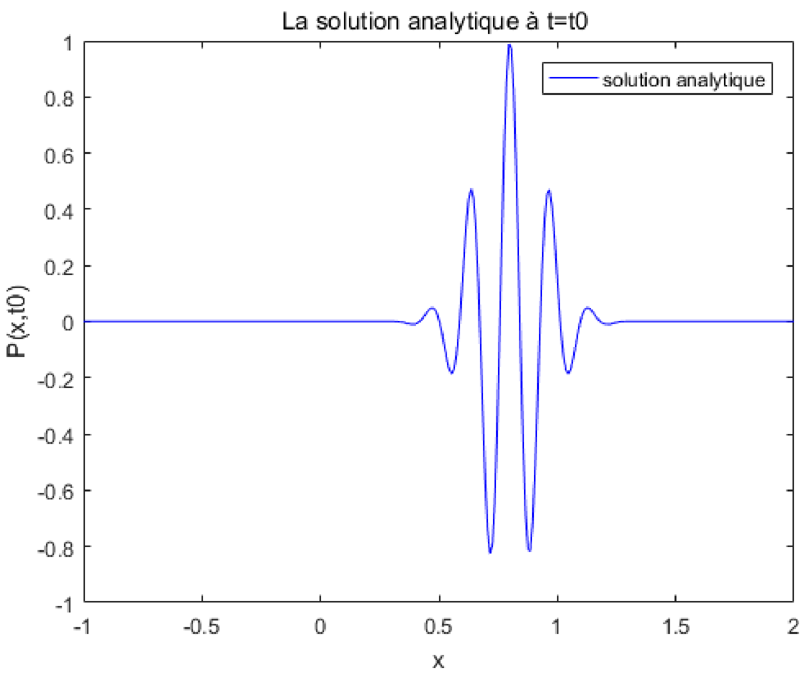

FIGURE 4.1 – Solution exact à t_0

Commentaire :

Au début , on plot cette figure de la solution exact à l'instant t_0 . A la vue de la figure , on dit que il est presque vrai , parce-que on trouve l'axe symétrique es$x = 0.8$, c'est la solution transport de la solution P_0.

4.2 Solution exact et scheme courant

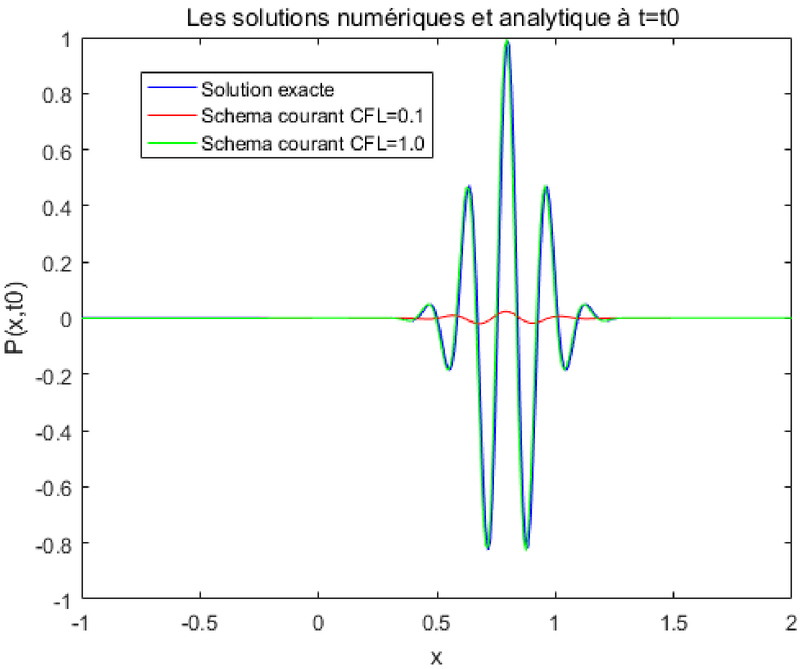

FIGURE 4.2 – Solution exact et schéme courant à t_0 pour $C_{FL} = 0.1\,, 1.0$

Commentaire : On fait la courant schéma pour different C_{FL} , dans la figure on se trouve , quand C_{FL} égale 1 , la solution exact et la solution numérique sont de chevauchement des deux fonctions . On retrouve la même résultat dans la presentation Err ,$\frac{c\triangle x}{2}(C_{FL} - 1)$ est nul , donc les deux solution soit paraille . Aussi , quand C_{FL} est petite , il y a une grand diffusion. Et le schéma de Leapfrog a une grande dispersion .

4.3 Solution exact et scheme laxwendroff

Commentaire : Dans la figure 4.3 on presente les solution exact et solution de lax wendroff pour $C_{FL} = 0.1\,, 1.0$, les solution sont similaire que la solution exact . Ils convergent .

4.4 Solution exact et scheme leapfrog

Commentaire : Dans la figure4.4 on presente les solution exact et solution de la schéma leapfrog pour $C_{FL} = 0.1\,, 1.0$, les solution sont similaire que la solution exact . Ils convergent .

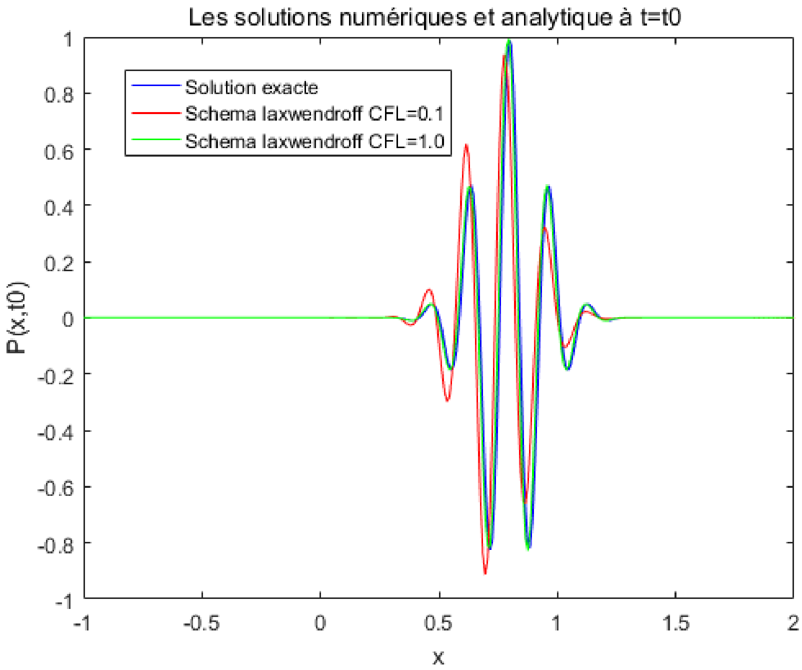

FIGURE 4.3 – Solution exact et schéme laxwendroff à t_0 pour $C_{FL} = 0.1\,,1.0$

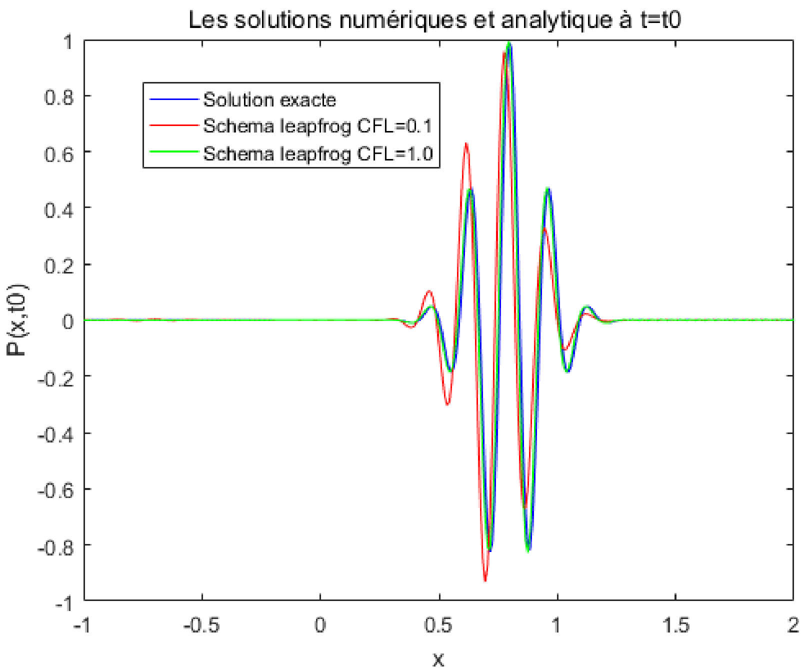

FIGURE 4.4 – Solution exact et schéme leapfrog à t_0 pour $C_{FL} = 0.1\,,1.0$

Chapitre 5

Erreur numérique

5.1 Error spatial

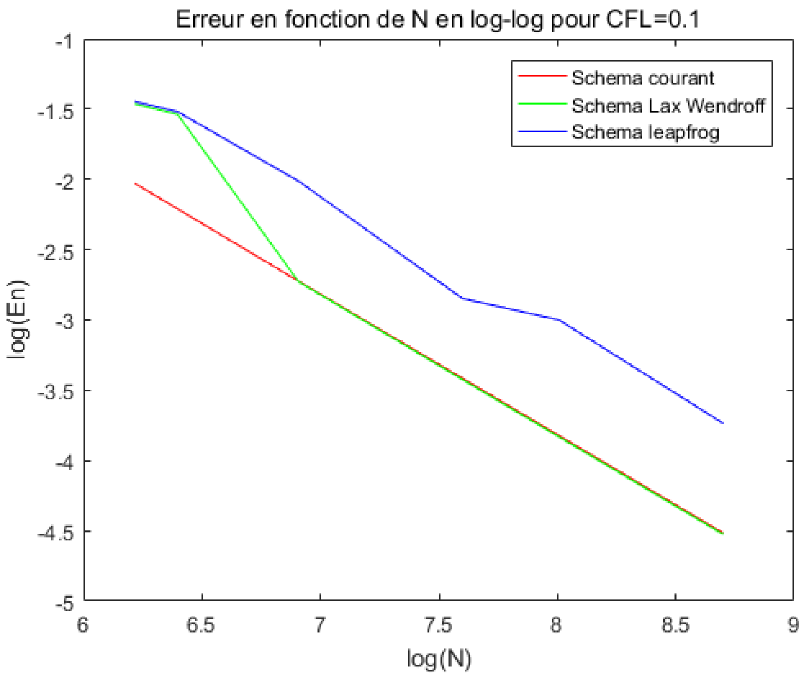

FIGURE 5.1 – Error pour les trois schémes

On va étudier la convergence spatiale de ces trois schémas. On va calculer l'erreur spatiale en fonction de N en utilisant une échelle logarithmique pour les axes, et en déduire la précision spatiale des schémas. Ici, on prend les discrétisations de N= [500, 600, 1000, 2000, 3000,6000], Dans tous les schémas, on obtient les coefficients comme le figure au dessus.1, ça veut dire que le schéma de courant est une erreur d'ordre 1 en N. Et les deux autres ont des pentes vers

2.Donc ses erreurs sont d'ordre 2 en N. Dans la code , on peut aussi trouve la pente .

5.2 Precision temporelle

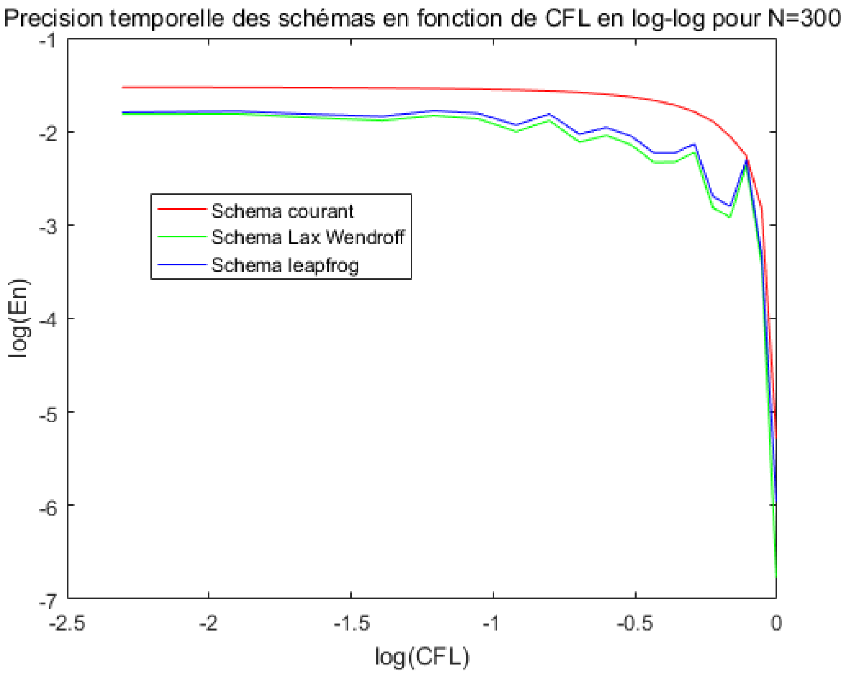

FIGURE 5.2 – Precision temporelle pour trois scheme

On remarque que pour soit, l'erreur pour ces trois schémas est quasiment constante puisque pour 1, des pas en temps sont inférieurs à des pas en espace, l'erreur est donc contrôlée par la précision spatiale. Par contre, pour, soit, les trois schémas sont vérifiés pas par les conditions de stabilité des trois schémas. Les erreurs augmentent très rapidement. Et quand , les erreurs commencer à décroitre. Dans la code , on peut aussi trouve la pente .

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette séance de TP , on étude équation trensport . Au début on cherche la solution analytique de la problèm , ensuite on fait une simulation utilisant trois schéma , schema courant , schéma lax wendroff , et schéma leapfrog . On utilise Matlab pour programmer les solutions .

Pour la schéma courant il y a une diffusion , et pour les autres deux , il y a une dispersion . Les trois schéma sont stabilité avec conditions .

Pour la précision , on dit que pour la schema courant , la précision est $o(\triangle t^2, \triangle x^2)$, pour la schema courant , la précision est $o(\triangle t^2, \triangle x^4)$,pour la schema courant , la précision est $o(\triangle t^4, \triangle x^4)$.