

——TP1: Vibrations de flexion d'une poutre——

Serge Yannick KOUADIO 11006495

Ugo ANDRE 11108391

Hasinantenaina RAZAFIMAHALEO 11613124

UE Vibration des structures -(M1)

28 octobre 2016

Table des matières

1	Objectif	2
2	Problème	2
3	Etude théorique	3
3.1	Calcul des Trois premières fréquences de résonance de la poutre . .	3
3.2	Méthode de Rayleigh Ritz	4
3.3	Comparaison	5
4	Etude Expérimentale	7
4.1	Identification des trois premières fréquences de résonance	7
4.2	Influence des capteurs	8
5	Conclusion	11

1 Objectif

Le but du TP est d'exprimer et de trouver les caractéristiques modales de la poutre. Dans un second temps, nous nous donnerons à une confrontation théorie/expérience. Et nous étudierons les limites du problème.

2 Problème

Nous nous intéressons à une poutre verticale de section circulaire supposée encastree dans un socle. On sollicite la poutre à l'aide d'un excitateur magnétique

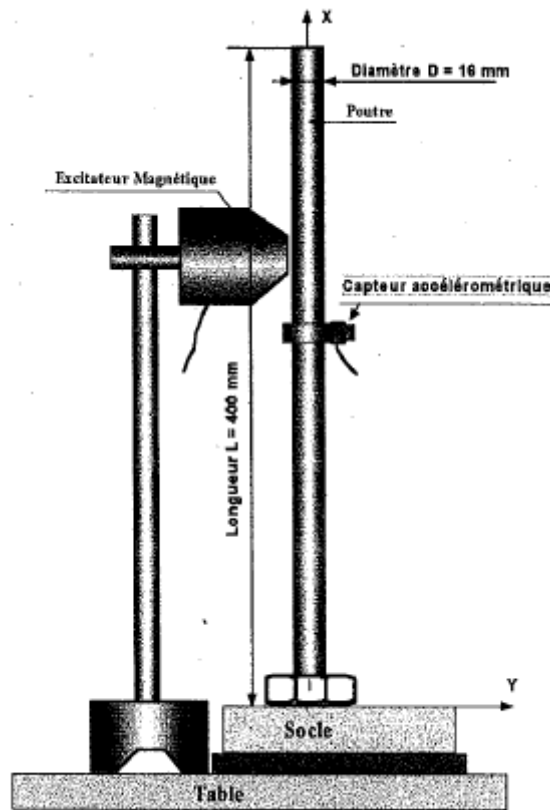


Figure : Montage de la poutre

Poutre en acier de :

-densité, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

-diamètre, $d = 16 \text{ mm}$

-Le module d'Young, $E = 1.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$

- $S = \frac{\pi d^4}{4} = 2.01 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

-la longueur avec écrou : 41.3 cm

-la longueur sans écrou : 40.1 cm

3 Etude théorique

3.1 Calcul des Trois premières fréquences de résonance de la poutre

A l'aide du polycopié qui nous a été fourni, nous trouvons une relation entre le nombre d'ondes spatiales k et la pulsation ω . En posant $\omega = 2\pi f$, on obtient la fréquence.

Relation entre k et ω :

$$k = \omega^{1/2} \left(\frac{EI_z}{\rho s} \right)^{-1/4}$$

Avec :

$$I_z = \int_S y^2 dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 R dR d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} R^3 \sin^2 dR d\theta = \int_0^R 2\pi \frac{R^4}{4} \left(\frac{1-\cos 2}{2} \right) dR = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Les premières racines associées aux fréquences de résonance sont données par :

$$k_1 L = 1.8751$$

$$k_2 L = 4.6941$$

$$k_3 L = 7.8548$$

Où avec l'écrou, $L = 41.3\text{cm}$ et sans l'écrou, $L = 40.1\text{cm}$

Pour l'étude, on a considéré les deux cas : avec et sans l'écrou

f [Hz]	Avec écrou $L = 41.3\text{cm}$	Sans écrou $L = 40.1\text{cm}$
f_1	63.04 Hz	66.87 Hz
f_2	395 Hz	419.06 Hz
f_3	1106 Hz	1193.41 Hz

Tableau des valeurs théoriques des fréquences de résonance

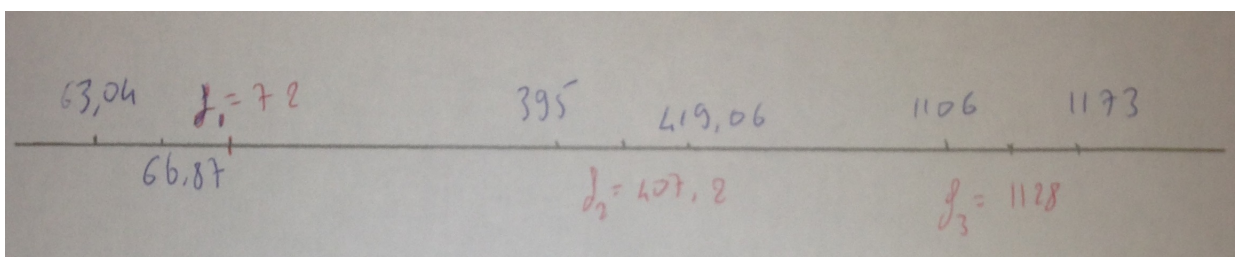
On observe une différence de fréquence entre les valeurs trouvées avec écrou et sans écrou. Mais globalement, si notre système expérimental correspond à notre système théorique, les fréquences de résonance expérimentales doivent se situer entre les deux valeurs (avec écrou et sans écrou).

Nos mesures donnent :

f [Hz]	Valeurs expérimentales
f_1	72 Hz
f_2	407.2 Hz
f_3	1128 Hz

Tableau des valeurs expérimentales des fréquences de résonance

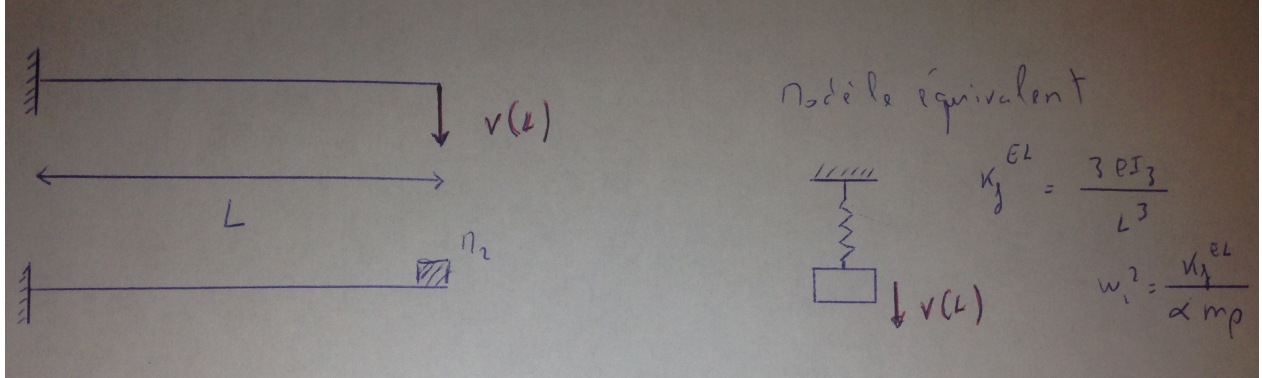
Si on compare les deux :



3. ETUDE THÉORIQUE

On remarque que nos fréquences théoriques de résonance et les valeurs que nous trouvons expérimentalement sont proches, mais ne sont pas exactement les mêmes. Il faut donc étudier ce qui provoque cette différence.

3.2 Méthode de Rayleigh Ritz



On a $E_{C_{sys}} = E_{C_p} + E_{C_2}$, avec E_{C_p} : l'énergie cinétique de la poutre.

$$(1) E_{C_{sys}} = E_{C_p} + \frac{1}{2} M_2 \dot{v}^2$$

$$\text{Or } E_{C_p} = \frac{1}{2} \int_v \rho_p \dot{v}(M)^2 dV$$

En flexion,

$$\dot{u}_f = \begin{cases} -y \frac{d\dot{v}(x)}{dx} \\ \dot{v}(x) \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_{C_p} = \frac{1}{2} \int_v \rho_p \dot{v}(x)^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p S \dot{v}(x)^2 dx \quad (2)$$

$$\text{On peut approcher } v(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{L} + a_2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + O\left(\frac{x^3}{L^3}\right)$$

$$\text{En prenant en compte les conditions limites qui sont : } v(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x=0) = 0$$

$$\text{On trouve que } a_0 = 0, a_1 = 0 \text{ et } v(x) = a_2 \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$\text{Or } a_2 = V(L)$$

$$\text{Donc finalement } v(x) = v(L) \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

En insérant cette valeur dans (2), on a :

$$E_{C_{sys}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S v(L)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^4 dx$$

$$E_{Csys} = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^4 dx v(L)^2 dx$$

$$E_{Csys} = \frac{1}{2} \frac{\rho S L}{5} v(L)^2 dx$$

$$E_{Csys} = \frac{1}{2} V(L)^2 \left(\frac{\rho S L}{5}\right)$$

Du coup $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_f^{EL}}{M_{\acute{e}q}}} = 2\pi f$

Or $K_f^{EL} = \frac{3EI_z}{L^3}$

Donc

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3 \left(\frac{M_1}{5}\right)}} (3)$$

3.3 Comparaison

A partir de $\sqrt{\omega} = k \left(\frac{EI_z}{\rho S}\right)^{-1/4}$, on trouve que $w = k^2 \left(\frac{EI_z}{\rho S}\right)^{1/2} = 2\pi f$

Donc $f = \frac{K^2}{2\pi} \left(\frac{EI_z}{\rho S}\right)^{1/2}$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^4 EI_z}{\rho S}}$$

Avec ce fomule, on obtient les valeurs théoriques de la fréquence.

Raileigh :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3 \left(\frac{M_1}{5}\right)}}$$

$$M_1 = M_{poutre} = 627g$$

$$\frac{M_1}{5} = 125,4g$$

Avec écrou :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3*1.8*10^{11}*\pi*16*10^{-7}}{64*41.3*10^{-5}*0.1254}}$$

$$\boxed{f = 70.58Hz}$$

3. ETUDE THÉORIQUE

Sans écrou :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3*1.8*10^{11}*\pi*16*10^{-7}}{64*40.1*10^{-5}*0.1254}}$$

$$f = 73.77 Hz$$

Ces valeurs sont proches de la valeur théorique $f_1=72Hz$.

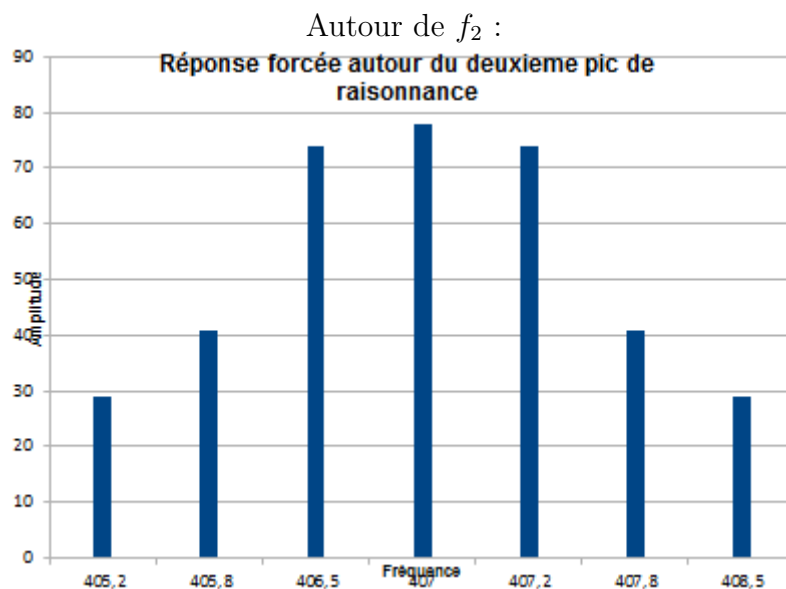
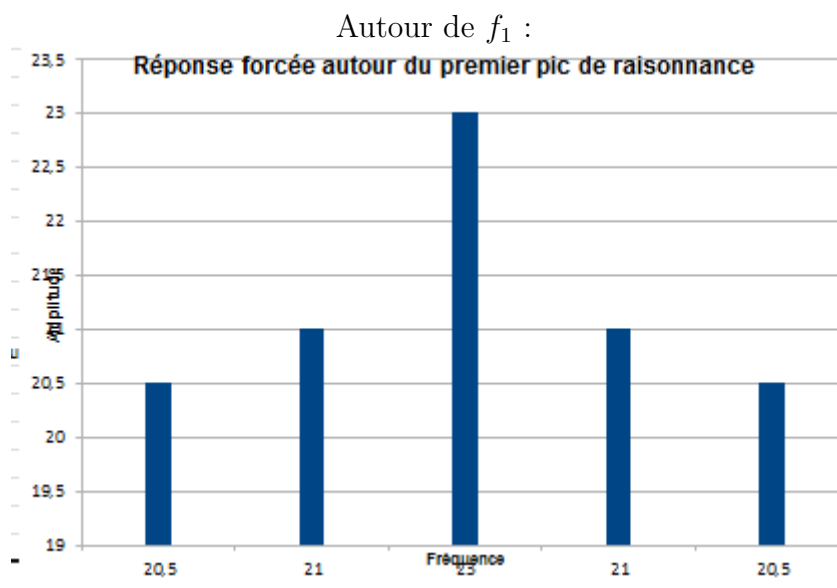
4 Etude Expérimentale

4.1 Identification des trois premières fréquences de résonance

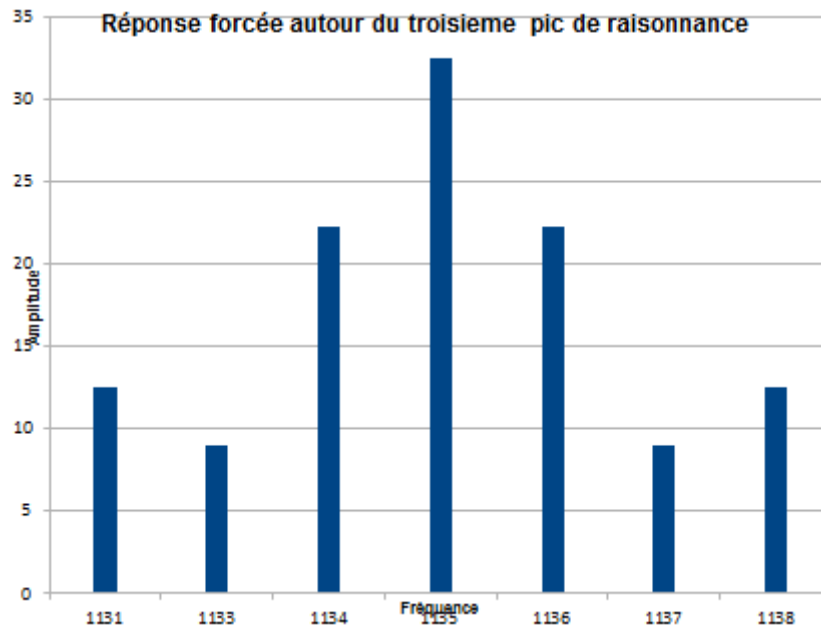
Configuration de mesure la plus appropriée : on fait varier la fréquence de l'excitateur magnétique, en se rapprochant des valeurs théoriques des fréquences de résonance calculées précédemment. On cherche à observer une amplitude maximale sur l'oscilloscope. Et on note les différentes valeurs pour les pics de résonance.

Ensuite, on balaie autour de ces pics et on note sur quelques points avant/après, pris pour une même amplitude, la fréquence associée.

On obtient les trois graphes suivant :



Autour de f_3 :



Commentaire : Les premier et deuxième graphes correspondent bien aux pics attendus. Pour le troisième on observe une rotation de phase. Cela veut dire que la vitesse de la masse et de la force d'inertie se déplacent en sens inverse.

Remarque sur les conditions limites :

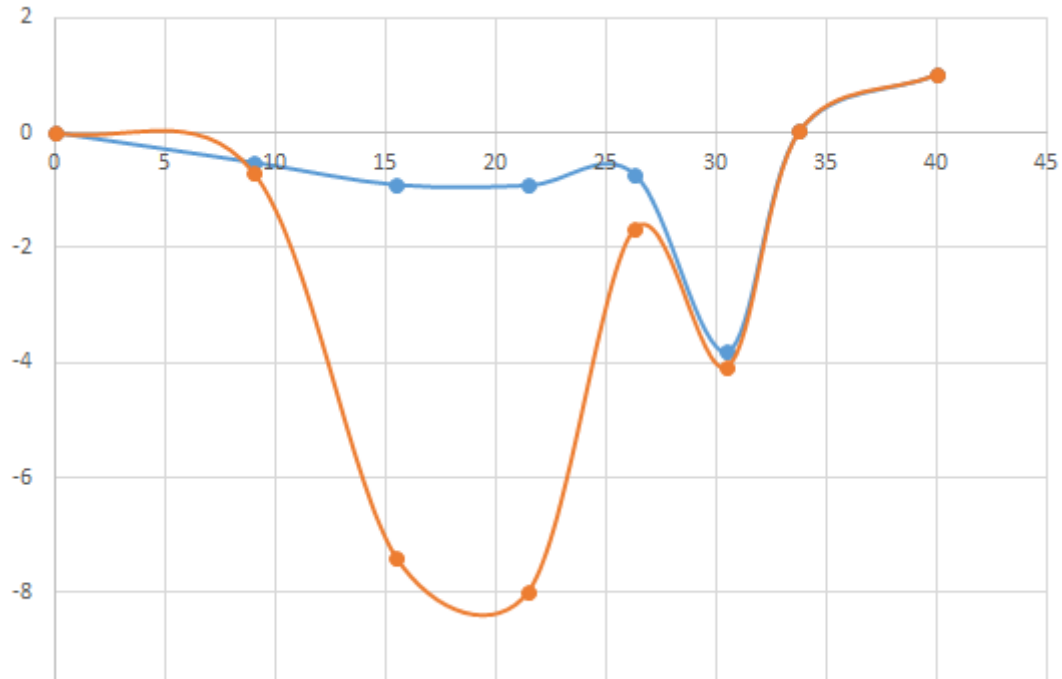
On peut identifier la liaison de l'encastrement théorique de la poutre et du socle avec l'écrou comme étant non-parfaite. En réalité, il faudrait modéliser cette liaison avec une raideur de rotation (K_θ). Cela veut dire qu'en réalité $v(0) \neq 0$.

4.2 Influence des capteurs

Démarche : on fait varier la position du capteur C_1 le long de la poutre pour une même fréquence de résonance.

On note les différentes amplitudes de la fréquence de résonance pour les différentes positions du capteur C_1 mesurée par les capteurs C_1 et C_2 .

Ici, on s'intéresse à la deuxième fréquence de résonance $f_2 = 400\text{Hz}$.



Déformée observée par C_1 en fonction de sa position sur la poutre
Rapport de C_2 sur C_1

On voit que les deux courbes coïncident à partir de $X=28\text{cm}$. On en déduit que la déformée transversale de la poutre observée par C_1 et C_2 est la même à partir de ce point.

On identifie le mode $n=2$ qui correspond bien à la deuxième fréquence de résonance de notre poutre.

Il y'a un ventre de trop au alentours $X=30\text{cm}$. Il est lié au erreurs de mesures.

Influence de la masse du capteur :

On réutilise les résultats de l'approximation de Rayleigh Ritz en prenant en compte la masse M_2 du capteur : $M_2=20\text{g}$

$$E_{Csys} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S v(L)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^4 dx + \frac{1}{2} M_2 V(L)^2$$

$$E_{Csys} = \frac{1}{2} V(L)^2 \left(\frac{\rho S L}{5} + M_2\right)$$

$$E_{Csys} = \frac{1}{2} V(L)^2 \left(\frac{M_1}{5} + M_2\right)$$

On obtient donc $M_{\text{éq}} = \frac{M_1}{5} + M_2$

Donc

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3(\frac{M_1}{5} + M_2)}} \quad (3)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3(\frac{M_1}{5} + M_2)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3(\frac{M_1}{5})}}$$

$$M_1 = M_{poutre} = 627g, M_2 = 20g(\text{capteur})$$

$$\frac{M_1}{5} = 125,4g$$

Avec écrou :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot 1.8 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 10^{-7}}{64 \cdot 41.3 \cdot 10^{-5} \cdot 0.1454}}$$

$$f = 65.63Hz$$

Sans écrou :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot 1.8 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 10^{-7}}{64 \cdot 40.1 \cdot 10^{-5} \cdot 0.1454}}$$

$$f = 68.60Hz$$

Ces résultats sont plus proches de nos valeurs théoriques : $f_{ecrou} = 65.63Hz$ $f_{sans} = 68.60Hz$.

Le fait de prendre en compte la masse du capteur C1 a affiné notre étude.

Pour obtenir un meilleur résultat il serait judicieux de placer le capteur C1 sur la position (supposée) connue du noeud correspondant à chaque fréquence de résonance étudiée.

Au vu de ces résultats obtenus par approximation avec la méthode de Rayleigh Ritz en prenant en compte la masse du capteur C1.

On est en mesure de se questionner sur la différence persistante entre valeurs théoriques et approchées.

Si on reprend la définition de départ :

$$k = \omega^{1/2} \left(\frac{EI_z}{\rho s} \right)^{-1/4}$$

On note que dans cette équation les seuls paramètres que l'on ne contrôle pas sont le module d'Young E et la masse volumique ρ .

Il est judicieux de se poser la question si les valeurs données par le constructeur sont exactes et si ce n'est pas cela qui donne un résultat avec une erreur.

5 Conclusion

Dans ce TP, on a étudié une poutre soumise à une force tangentielle appliquée à son extrémité et soumise en vibration.

Dans un premier temps, on a calculé les valeurs théoriques des fréquences de résonance, et utilisé la méthode Rayleigh-Ritz pour avoir une solution approchée.

Dans un second temps, on a mesuré expérimentalement ces fréquences de résonance, On observe une différence entre les deux valeurs. On déduit que ces erreurs sont induites par des paramètres que l'on ne maîtrise pas comme la masse volumique et le module d'young fournis par le constructeur.