

— Vibration Libres d'une Poutre en Flexion —

par

GAYE, Ibrahima

ZHANG, Xunjie

Compte-rendu du Ex.31 de l'UE Outil de Mathématique

fait le 29 octobre 2016

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction et Séparation des variables</b>                                  | <b>4</b>  |
| 1.1      | Introduction . . . . .   | 4         |
| 1.2      | Séparation des variables . . . . .   | 4         |
| 1.2.1    | Équation d'Équilibre . . . . .   | 4         |
| 1.2.2    | Séparations . . . . .  | 4         |
| 1.3      | Solution des fonctions . . . . .   | 5         |
| 1.3.1    | équation différentielles ordinaires . . . . .                                    | 5         |
| 1.3.2    | recherche la solution . . . . .  | 5         |
| 1.4      | Solution finalement . . . . .  | 6         |
| <b>2</b> | <b>Résolution dans le cas de la poutre encastrée-appuie</b>                      | <b>7</b>  |
| 2.1      | conditons limites . . . . .  | 7         |
| 2.1.1    | extrémité en appui simple à l'abscisse $x=L$ . . . . .                           | 7         |
| 2.1.2    | Encastrement à l'abscisse $x=0$ . . . . .  | 7         |
| 2.1.3    | Résultat par les conditions limites . . . . .                                    | 8         |
| 2.2      | Solution analyse . . . . .   | 8         |
| 2.3      | Infinité de solutions . . . . .  | 8         |
| 2.4      | Solution générale . . . . .  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Analyse et Résultat</b>   | <b>11</b> |
| 3.1      | Premier condition . . . . .  | 11        |
| 3.1.1    | serie de $F_r$ . . . . .   | 11        |
| 3.1.2    | Transformé de Fourier . . . . .  | 11        |
| 3.2      | Deuxième condition . . . . .   | 13        |
| 3.2.1    | Dérivée partiel d'équation . . . . .   | 13        |
| 3.2.2    | Nulle de derivation . . . . .  | 13        |
| 3.3      | Solution complète . . . . .  | 13        |
| <b>4</b> | <b>Prénsatations Graphiques</b>  | <b>14</b> |
| 4.1      | Graphiques temps fixé . . . . .  | 14        |
| 4.1.1    | Mode 1 ( $\gamma = \gamma_1$ ) . . . . .   | 14        |
| 4.1.2    | Mode 2 ( $\gamma = \gamma_2$ ) . . . . .   | 15        |
| 4.1.3    | $V(x,0)$ total pour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ . . . . . | 16        |
| 4.2      | Graphiques position fixé . . . . .   | 16        |
| 4.2.1    | Model du temps . . . . .   | 17        |
| 4.2.2    | Viration2 total du temps . . . . .   | 18        |
| 4.2.3    | Viration5 total du temps . . . . .   | 19        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>                         | <b>20</b> |
| <b>A</b> | <b>Code Python</b>                        | <b>21</b> |
| A.1      | Listes des fonctions . . . . .            | 21        |
| A.2      | Les graphiques . . . . .                  | 23        |
| A.2.1    | $\tan(\gamma)=\tan(\gamma)$ . . . . .     | 23        |
| A.2.2    | Mode 1 . . . . .                          | 23        |
| A.2.3    | Mode 2 . . . . .                          | 24        |
| A.2.4    | Mode 5 . . . . .                          | 24        |
| A.2.5    | 5 modes total . . . . .                   | 24        |
| A.2.6    | flexion à $x=0.5$ mode 1 . . . . .        | 25        |
| A.2.7    | flexion à $x=0.5$ mode 2 . . . . .        | 25        |
| A.2.8    | flexion à $x=0.5$ total 5 modes . . . . . | 26        |

# Table des figures

|     |                                 |    |
|-----|---------------------------------|----|
| 2.1 | infinité points . . . . .       | 9  |
| 4.1 | t=0 mode 1 . . . . .            | 15 |
| 4.2 | t=0 mode 2 . . . . .            | 15 |
| 4.3 | 5 modes et vibrations . . . . . | 16 |
| 4.4 | model du temps . . . . .        | 17 |
| 4.5 | vibration2 du temps . . . . .   | 18 |
| 4.6 | vibration5 du temps . . . . .   | 19 |

# Chapitre 1

## Introduction et Séparation des variables

### 1.1 Introduction

On ne traitera que ici que le problème d'une poutre droite , de section uniforme , en flexion simple dans un plan principal . Ce pendant , le plus souvent , la poutre n'est pas contrainte à rester dans ce plan , et il existe une possibilité de déplacement dans la direction perpendiculaire . Si les excitations ne sont pas contenues dans un plan principal , il faut étudier les vibrations de flexion , dans les 2 plans principaux définis chacun par l'axe de la poutre et l'une des directions principales de la section .

### 1.2 Séparation des variables

#### 1.2.1 Équation d'Équilibre

Pour une poutre droite de section constante en flexion , et considérons un effort extérieur  $t_{ext}$  nul , on a l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{El}{\rho S} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (1.1)$$

Posons :  $v(x, t) = \phi(x)q(t)$  et reportons cette expression dans l'équation du mouvement :

$$\phi \frac{d^2 q}{dt^2} = - \frac{El}{\rho S} \frac{d^4 \phi}{dx^4} q \quad (1.2)$$

#### 1.2.2 Séparations

Séparons les termes qui dépendent de  $t$  et de  $x$  :

$$\frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} = - \frac{El}{\rho S} \frac{d^4 \phi}{dx^4} \frac{1}{\phi} \quad (1.3)$$

## 1.3 Solution des fonctions

Les 2 membres de cette équation sont indépendants l'un de  $x$ , l'autre de  $t$ ; ils sont donc constants. Pour que la solution  $q(t)$  reste bornée quand le temps tend vers l'infini, cette valeur constante doit être négative.

Trouver  $q(t)$  et  $\phi(x)$  quand  $-\omega^2$  est constant :

$$\frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S} \frac{d^4 \phi}{dx^4} \frac{1}{\phi} = -\omega^2 \quad (1.4)$$

### 1.3.1 équation différentielles ordinaires

On en tire 2 équations différentielles ordinaires, l'une en  $x$ , l'autre en  $t$ , que l'on résout séparément :

$$\begin{cases} \frac{d^4 \phi}{dx^4} - \omega^4 \frac{\rho S}{EI} \phi = 0 \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

### 1.3.2 recherche la solution

On recherche la solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante :  $\phi(x) = ae^{sx}$ , d'où l'équation caractéristique, de degré 4 en  $S$  :

$$s^4 - \omega^4 \frac{\rho S}{EI} = 0 \quad (1.6)$$

qui a solutions :

$$s = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2}, \quad s = \pm i \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} \quad (1.7)$$

que l'on peut aussi écrire en fonction d'un paramètre  $\gamma$  sans dimension :

$$s = \pm \frac{\gamma}{L}, \quad s = \pm i \frac{\gamma}{L}, \quad \gamma = L \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} \quad (1.8)$$

On en déduit l'expression de la forme modale :

$$\phi(x) = ae^{\gamma \frac{x}{L}} + be^{-\gamma \frac{x}{L}} + ce^{i\gamma \frac{x}{L}} + de^{-i\gamma \frac{x}{L}} \quad (1.9)$$

ou encore :

$$\phi(x) = A \sinh\left(\gamma \frac{x}{L}\right) + B \cosh\left(\gamma \frac{x}{L}\right) + C \sin\left(\gamma \frac{x}{L}\right) + D \cos\left(\gamma \frac{x}{L}\right) \quad (1.10)$$

On recherche l'autre solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante :  $q(t) = ae^{bt}$ , d'où l'équation caractéristique, de degré 2 en  $t$  :

$$b^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.11)$$

qui a 2 solutions :

$$b = \pm i\omega, \quad \omega = \frac{\gamma^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (1.12)$$

Donc on en déduit l'expression de la forme modale :

$$q(t) = \hat{e}e^{i\omega t} + \hat{f}e^{-i\omega t} \quad (1.13)$$

Ou encore :

$$q(t) = E \sin \omega t + F \cos \omega t, \quad \omega = \frac{\gamma^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (1.14)$$

## 1.4 Solution finalement

On obtient donc finalement :

$$v(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (1.15)$$

avec :

$$\begin{cases} \phi(x) &= A \sinh(\gamma \frac{x}{L}) + B \cosh(\gamma \frac{x}{L}) + C \sin(\gamma \frac{x}{L}) + D \cos(\gamma \frac{x}{L}) \\ q(t) &= E \sin \omega t + F \cos \omega t \\ \omega &= \frac{\gamma^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \end{cases} \quad (1.16)$$

- $\phi(x)$  définit la form de la poutre pendant sa vibration . Elle contient les 5 constantes  $A, B, C$  et  $\gamma$ (ou  $\omega$ ) , qui sont fixées par les conditions aux limites .
- $q(t)$  définit le mouvement de la poutre . Elle contient , outre la constante  $\omega$  déjà évoquée , les 2 constantes  $E$  et  $F$  , qui sont fixées par les conditions initiales .

## Chapitre 2

# Résolution dans le cas de la poutre encastree-appuie

### 2.1 conditions limites

Il existe 2 conditions aux limites usuelles pour une poutre en flexion :

#### 2.1.1 extrémité en appui simple à l'abscisse $x=L$

La flèche est nulle en tout instant , ainsi que le moment fléchissant :

$$\forall t \begin{cases} v(L, t) &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L, t) &= 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

On a :

$$\begin{cases} \phi(L) &= A \sinh \gamma + B \cosh \gamma + C \sin \gamma + D \cos \gamma = 0 \\ \frac{d^2 \phi}{dx^2}(L) &= \frac{\gamma^2}{L^2} A \sinh \gamma + B \frac{\gamma^2}{L^2} \cosh \gamma - C \frac{\gamma^2}{L^2} \sin \gamma - D \frac{\gamma^2}{L^2} \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Et on en déduit :

$$\begin{cases} A \sinh \gamma + B \cosh \gamma &= 0 \\ C \sin \gamma + D \cos \gamma &= 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

#### 2.1.2 Encastrement à l'abscisse $x=0$

La flèche est nulle en tout instant , ainsi que la pente de la poutre :

$$\forall t \begin{cases} v(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) &= 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

d'où , on a :

$$\begin{cases} \phi(0) &= B + D = 0 \\ \frac{d\phi}{dx}(0) &= A \frac{\gamma}{L} + C \frac{\gamma}{L} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

On en déduit :



$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.1.3 Résultat par les conditions limites

On cherche solution pour les 4 équations :

$$\begin{cases} A \sinh \gamma + B \cosh \gamma = 0 \\ C \sin \gamma + D \cos \gamma = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

On trouve simplement :

$$\begin{cases} \tanh \gamma - \tan \gamma = 0 \\ B = -A \tanh \gamma = -A \tan \gamma \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.2 Solution analyse

On trouve la solution complète  $v(x, t) = \phi(x)q(t)$  :

$$v(x, t) = \left( A \sinh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) + B \cosh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) + C \sin \left( \gamma \frac{x}{L} \right) + D \cos \left( \gamma \frac{x}{L} \right) \right) \left( E \sin(\omega t) + F \cos(\omega t) \right) \quad (2.9)$$

$$= \left( A \sinh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) - A \tanh \gamma \cosh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) - A \sin \left( \gamma \frac{x}{L} \right) + A \tanh \gamma \cos \left( \gamma \frac{x}{L} \right) \right) \left( E \sin(\omega t) + F \cos(\omega t) \right) \quad (2.10)$$

$$= AE \sin(\omega t) \left( \sinh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma \cosh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma \cos \left( \gamma \frac{x}{L} \right) \right) \quad (2.11)$$

$$+ AF \cos(\omega t) \left( \sinh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma \cosh \left( \gamma \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma \cos \left( \gamma \frac{x}{L} \right) \right) \quad (2.12)$$

$$\omega = \frac{\gamma^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (2.13)$$

## 2.3 Infinité de solutions

On écrit une programme pour trouver les r valeurs , ce que on noté  $\gamma_r$  , et un tracé graphique simple permet d'approcher les solutions . En effect , l'équation peut s'écrire :

$$\tanh \gamma = \tan \gamma \quad (2.14)$$

Les solutions sont données par les intersections des courbes  $\tanh \gamma$  et  $\tan \gamma$  :

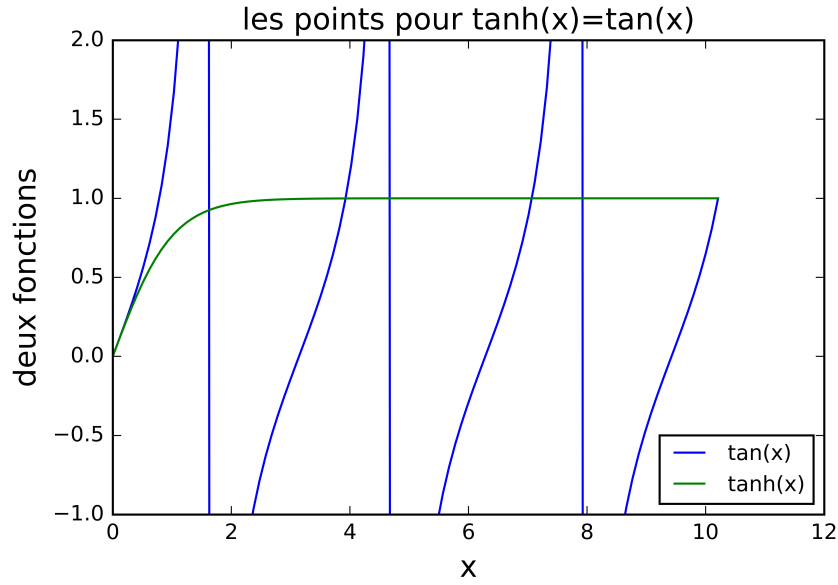


FIGURE 2.1 – infinité points

On constate qu'il existe une infinité de solutions, voisines de  $\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ , etc.

Les valeurs précises peuvent être recherchées numériquement au voisinage de ces valeurs, au moyen d'un programme Matlab très bref :

for  $\gamma=1 :4$ , fzero(@(gamma) tan(gamma)-tanh(gamma) , (4\*r\*pi-1)/5

On obtient :

$$\gamma_1 = 3.927 \quad (2.15)$$

$$\gamma_2 = 7.069 \quad (2.16)$$

$$\gamma_3 = 10.210 \quad (2.17)$$

$$\gamma_4 = 13.351 \quad (2.18)$$

$$\gamma_5 = 16.493 \quad (2.19)$$

$$\gamma_6 = 19.634 \quad (2.20)$$

$$\gamma_7 = 22.776 \quad (2.21)$$

$$\gamma_8 = 25.918 \quad (2.22)$$

$$\gamma_9 = 29.059 \quad (2.23)$$

$$\gamma_{10} = 32.201 \quad (2.24)$$

$$\dots \quad (2.25)$$

$$\gamma_r = (4 * n * \pi - 1)/5 \quad (2.26)$$

A chaque solution  $\gamma_r$  correspond une valeur  $\omega_r$  de la pulsation :

$$\omega_r = \frac{\gamma_r^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (2.27)$$

## 2.4 Solution générale

Finalement , la solution générale est :

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) (E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \quad (2.28)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi_r(x) & = & A \left( \sinh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_r \cosh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_r \cos \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) \right) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ \tanh \gamma_r & = & \tan \gamma_r \\ r & = & 1, 2, 3, 4, \dots \end{array} \right. \quad (2.29)$$

## Chapitre 3

# Analyse et Résultat

Dans ce chapitre on étudie la solution complète avec les conditions initiales .

### 3.1 Premier condition

condition initiale  $v(x, 0) = v_0$

#### 3.1.1 serie de $F_r$

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) (E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \quad (3.1)$$

$$v(x, 0) = AF_r \left( \sinh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_r \cosh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_r \cos \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) \right) \quad (3.2)$$

$$v(x, 0) = v_0 \quad (3.3)$$

il reste donc on cherche la serie de  $F_r$  dans la équation sommation suivante :

$$\sum_{r=1}^{\infty} AF_r \left( \sinh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_r \cosh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_r \cos \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) \right) = v_0 \quad (3.4)$$

#### 3.1.2 Transformé de Fourier

On fait évolution de la fonction au-dessus , à gauche et à droite , on fait intergarale suivante en même temps :

$$\int_0^L \left( \sinh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_k \cosh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_k \cos \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) \right) dx \quad (3.5)$$

$k$  est une constante.

et on obtient :

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^L AF_r \left( \sinh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_k \cosh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_k \cos \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) \right) \quad (3.6)$$

$$\left( \sinh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_r \cosh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_r \cos \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) \right) dx \quad (3.7)$$

$$= \int_0^L v_0 \left( \sinh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_k \cosh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_k \cos \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) \right) dx \quad (3.8)$$

On étudie la fonction au dessus , on trouve si  $r$  est différent que  $k$  :

$$\int_0^L \left( \sinh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_k \cosh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_k \cos \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) \right) \quad (3.9)$$

$$\left( \sinh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_r \cosh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_r \cos \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) \right) dx = 0 \quad (3.10)$$

si  $r = k$  :

$$\int_0^L \left( \sinh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_k \cosh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_k \cos \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) \right) \quad (3.11)$$

$$\left( \sinh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_r \cosh \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_r \cos \left( \gamma_r \frac{x}{L} \right) \right) dx = L \quad (3.12)$$

donc à gauche de signe égale , on a :  $ALF_k$   
et à droite de signe égale , on a :

$$\int_0^L v_0 \left( \sinh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \tanh \gamma_k \cosh \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) + \tanh \gamma_k \cos \left( \gamma_k \frac{x}{L} \right) \right) dx \quad (3.13)$$

$$= \frac{Lv_0 \left( \cos(\gamma_k) + \cosh(\gamma_k) + \tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k) - \sinh(\gamma_k)) - 2 \right)}{\gamma_k} \quad (3.14)$$

et finalement on trouve  $F_k$  :

$$F_k = \frac{v_0}{A \gamma_k} \left( \cos(\gamma_k) + \cosh(\gamma_k) + \tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k) - \sinh(\gamma_k)) - 2 \right) \quad (3.15)$$

$k$  et  $r$  sont constantes 1,2 ,3.....

$$F_r = \frac{v_0}{A \gamma_r} \left( \cos(\gamma_r) + \cosh(\gamma_r) + \tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r) - \sinh(\gamma_r)) - 2 \right) \quad (3.16)$$

## 3.2 Deuxième condition

dans le deuxième condition on a  $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0$

### 3.2.1 Dérivée partiel d'équation

On fait la dérivée partielle de  $v(x, t)$  sur  $t$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = A E w \cos(\omega t) \left( \sinh\left(\gamma \frac{x}{L}\right) - \tanh \gamma \cosh\left(\gamma \frac{x}{L}\right) - \sin\left(\gamma \frac{x}{L}\right) + \tanh \gamma \cos\left(\gamma \frac{x}{L}\right) \right) \quad (3.17)$$

$$- A F w \sin(\omega t) \left( \sinh\left(\gamma \frac{x}{L}\right) - \tanh \gamma \cosh\left(\gamma \frac{x}{L}\right) - \sin\left(\gamma \frac{x}{L}\right) + \tanh \gamma \cos\left(\gamma \frac{x}{L}\right) \right) \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Nulle de derivation

On a toujours l'équation suivante :

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = A E_r \left( \sinh\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) - \tanh \gamma_r \cosh\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) - \sin\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) + \tanh \gamma_r \cos\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) \right) = 0 \quad (3.19)$$

Donc evidment ,  $E_r = 0$  pour tous les  $r$  .

## 3.3 Solution complète

Avec les conditions initiales on arrive :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v(x, t) & = & \sum_{r=1}^{\infty} A F_r \cos(\omega_r t) \left( \sinh\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) - \tanh \gamma_r \cosh\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) - \sin\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) + \tanh \gamma_r \cos\left(\gamma_r \frac{x}{L}\right) \right) \\ A F_r & = & \frac{v_0}{\gamma_r} \left( \cos(\gamma_r) + \cosh(\gamma_r) + \tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r) - \sinh(\gamma_r)) - 2 \right) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ E_r & = & 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

## Chapitre 4

# Présentations Graphiques

On utilise Jupyter Nootbook pour présenter les graphiques : pour toutes les valeurs en bosoin , on note 1 ,

$$E = 1 \tag{4.1}$$

$$L = 1 \tag{4.2}$$

$$I = 1 \tag{4.3}$$

$$rho = 1 \tag{4.4}$$

$$S = 1 \tag{4.5}$$

### 4.1 Graphiques temps fixé

#### 4.1.1 Mode 1 ( $\gamma = \gamma_1$ )

$\gamma_1 = 3.927$  :

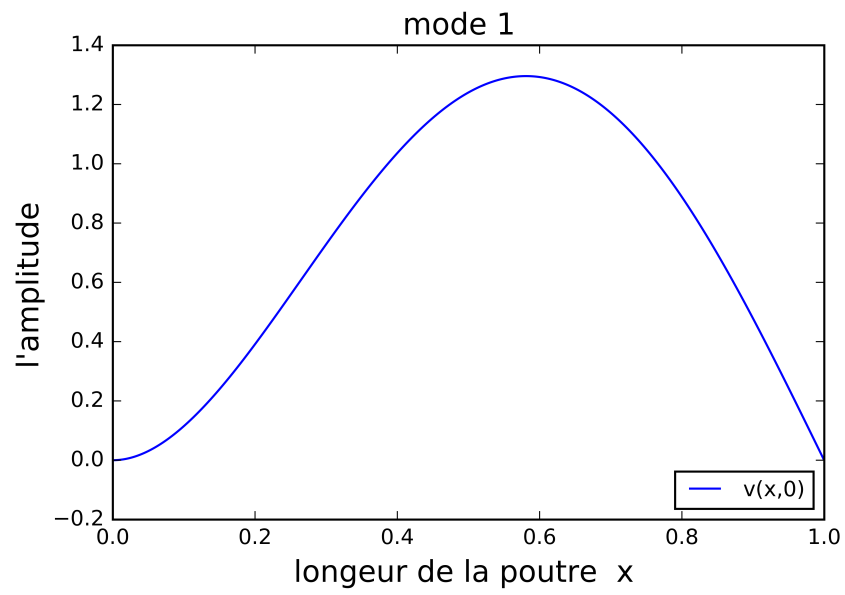


FIGURE 4.1 – t=0 mode 1

#### 4.1.2 Mode 2 ( $\gamma = \gamma_2$ )

$\gamma_2 = 7.069$  :

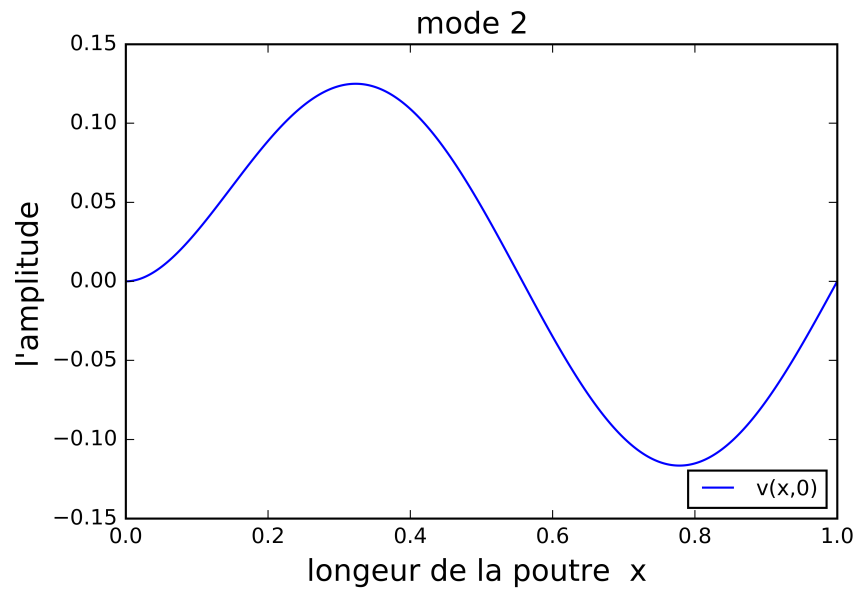


FIGURE 4.2 – t=0 mode 2



### 4.1.3 $V(x,0)$ total pour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$

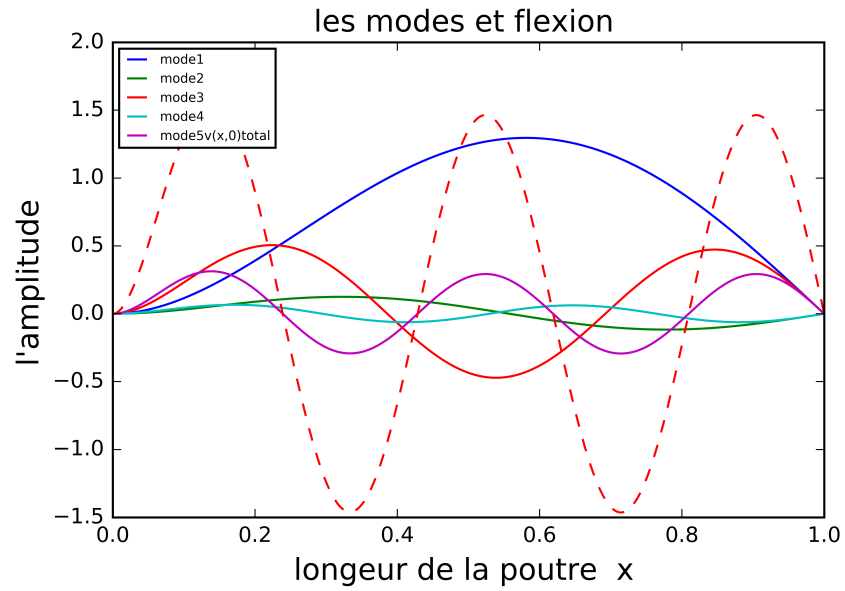


FIGURE 4.3 – 5 modes et vibrations

## 4.2 Graphiques position fixé

On choisi pa position milieu  $x = 0.5$  pour présenter :

### 4.2.1 Model du temps

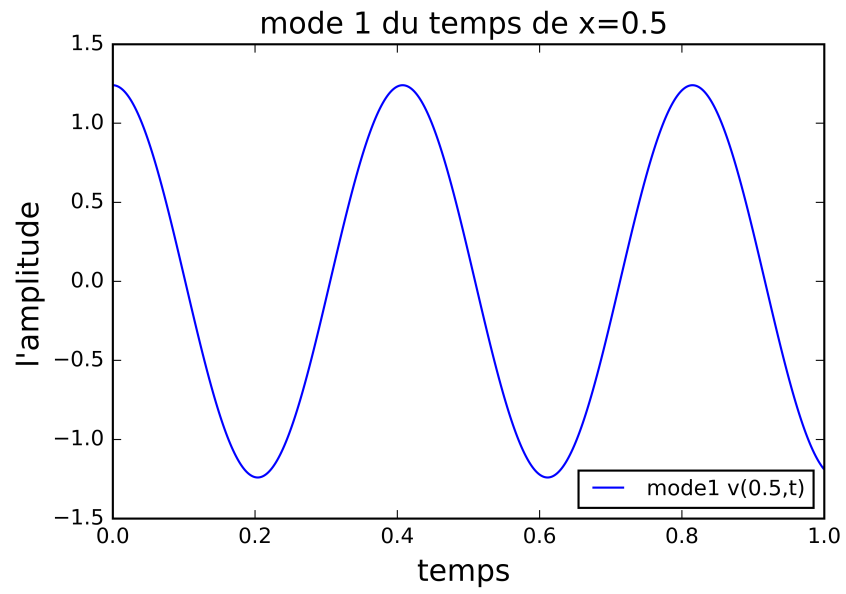


FIGURE 4.4 – mode1 du temps

#### 4.2.2 Viration2 total du temps

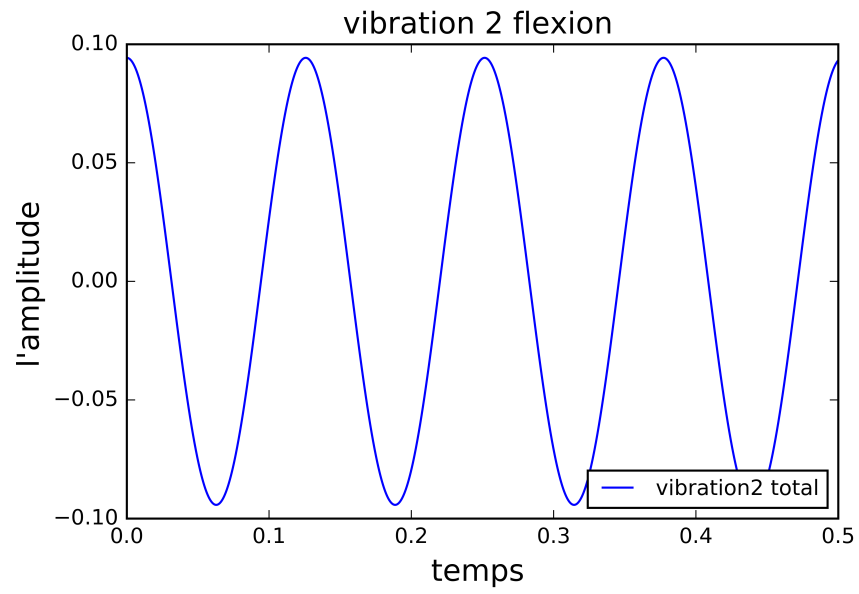


FIGURE 4.5 – vibration2 du temps

### 4.2.3 Viration5 total du temps

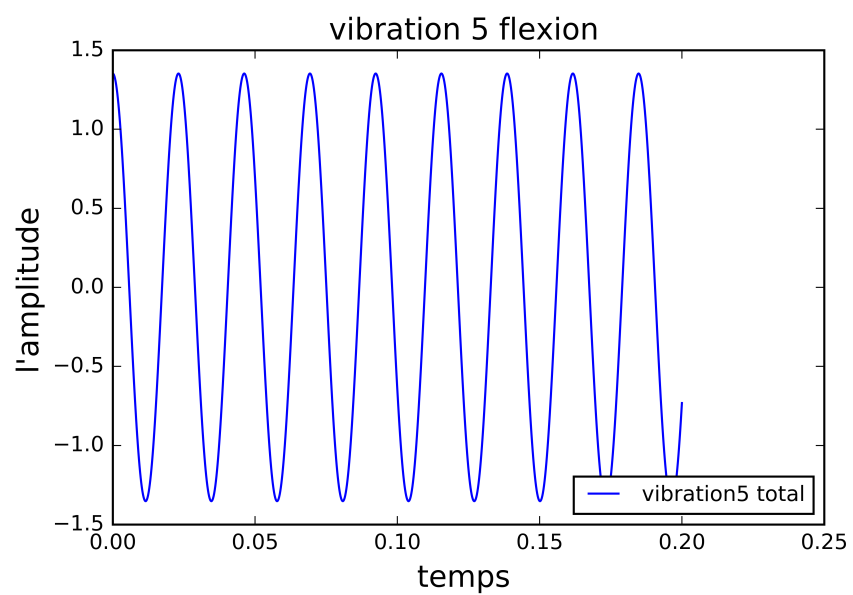


FIGURE 4.6 – vibration5 du temps

## Chapitre 5

# Conclusion

Dans cet examen on fait l'étude vibratoire des différents modes de vibration d'une poutre encastree en appuie (E-A). On a utilise des resultats mathematiques generaux qu'on a applique aux comportements de la poutre qu'on etudie condition limitites, condition initials...

Cette etude nous a permit d'utiliser des outils mathematiques tres avance afin de trouver certains inconnues de notre probleme comme les series de fourier et autres.

cette examen nous a permit aussi d'utiliser certains outils numeriques afin de verifier les solutions qu'on obtient ou bien de trouver des inconnues de notre probleme ou une liste de valeurs qui peut aller jusqu'a n valeurs difficile a trouver sans machine comme le calcul de gamma par exemple... Et parmi ces outils qu'on a utiliser durant ce homework on peut citer matlab, python, wolfram...

Donc pour terminer on peut dire que ce travail de maison nous aura permit de pratiquer le travail en equipe et surtout aussi de redécouvrir des methodes mathematique ou numerique deja fait durant nos etudes et de se rendre comptes de leur vrais importance dans la resolution de probleme mecanique, physique...

# Annexe A

## Code Python

### A.1 Listes des fonctions

---

```
## trouver les valeurs de gamma
x=np.linspace(0,13*np.pi/4,num=100)
plt.ylim(-1,2)
plt.plot(x,np.tan(x))
plt.plot(x,np.tanh(x))
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel("deux fonctions", fontsize=14)
plt.title("les points pour tanh(x)=tan(x)", fontsize=14)
plt.legend(['tan(x)', 'tanh(x)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ figuretanh.png',dpi=800)
```

```
# definir r_k , k= 1, 2 ,3, 4, 5, 6 ,....
```

```
def r_k(n):
    A=np.linspace(1,n,n)
    for i in range(1,n+1):
        A[i-1]=np.pi*(4*i+1)/4
    return A
while i<N:
    S=section(L,N,i,S0,SL)
    A[i,i]=A[i,i]+(E*S)/h
    A[i,i+1]=-(E*S)/h
    A[i+1,i]=-(E*S)/h
    A[i+1,i+1]=(E*S)/h
    i=i+1
return A
```

```
# def phi_k pla variation en fonction de x
```

```
def phi_k(r,L):
```

```

y=np.sinh(r*x/L)-np.tanh(r)*np.cosh(r*x/L)-np.sin(r*x/L)+np.tanh(r)
    *np.cos(r*x/L)
return y

# somme de phi(x) sans l'implitude
def somme_phi_k(n,L):
    y=0
    for i in r_k(n):
        y=y+phi_k(i,L)
        i=i+1
    return y

# definir v_k
def V_k(n,v0,L):
    A=np.linspace(0,n-1,n)
    i=0
    for r in r_k(n):
        A[i]=(np.cos(r)+np.cosh(r)+np.tanh(r)*(np.sin(r)-np.sinh(r))-2)
            /r
        i=i+1
    return A

# definir omega
def omega_k(n,L,E,I,rho,S):
    A=np.linspace(0,n-1,n)
    i=0
    for r in r_k(n):
        A[i]=(r*r)/(L*L)*np.sqrt(E*I/(rho*S))
        i=i+1
    return A

# definir les modes
def mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S):
    i=0
    for r in r_k(n):
        y=V_k(n,v0,L)[i]*phi_k(r,L)*np.cos(omega_k(n,L,E,I,rho,S)[i]*t)
        i=i+1
    return y

#definir u_k sans somme
def u_k(n,t,v0,L,E,I,rho,S):
    i=0
    for r in r_k(n):

```

```

        y=V_k(n,v0,L)[i]*phi_k(r,L)*np.cos(omega_k(n,L,E,I,rho,S)[i]*t)
        i=i+1
    return y

#definir vibration total
def v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S):
    y=0
    for i in range(1,n+1):
        y=y+u_k(n,t,v0,L,E,I,rho,S)
        i=i+1
    return y

def intergral f(r)*f(k)
def function(x):
    r=3.927
    k=7.069
    return (np.sinh(r*x)-np.tanh(r)*np.cosh(r*x)-np.sin(r*x)+np.tanh(r)
            )*np.cos(r*x))*(np.sinh(k*x)-np.tanh(k)*np.cosh(k*x)-np.sin(k*x)
            )+np.tanh(k)*np.cos(k*x))
quad(function,0,1)

```

---

## A.2 Les graphiques

### A.2.1 $\tan(\gamma)=\tan(\gamma)$

---

```

x=np.linspace(0,13*np.pi/4,num=100)
plt.ylim(-1,2)
plt.plot(x,np.tan(x))
plt.plot(x,np.tanh(x))
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel("deux fonctions", fontsize=14)
plt.title("les points pour tanh(x)=tan(x)", fontsize=14)
plt.legend(['tan(x)', 'tanh(x)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ figuretanh.png',dpi=800)

```

---

### A.2.2 Mode 1

---

```

x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=1
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1

```



```

plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('longueur de la poutre x ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 ", fontsize=14)
plt.legend(['v(x,0)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode1.png',dpi=800)

```

---

### A.2.3 Mode 2

---

```

n=2
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode12(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode1t.png',dpi=800)

```

---

### A.2.4 Mode 5

---

```

x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=5
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode12(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode1t.png',dpi=800)

```

---

### A.2.5 5 modes total

---

```

x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=5
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,v_x-t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S),'r—')
for i in range(1,n+1):
    plt.plot(x,u_k(i,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("vibration 5 flexion ", fontsize=14)
plt.legend(['vibration5 total','mode2','mode3','mode4','mode5'+'v(x,0)
total'],loc='upper left', fontsize = 8)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ modee5vt.png',dpi=800)

```

---

### A.2.6 flexion à $x=0.5$ mode 1

---

```

t=np.linspace(0,0.5,num=1000)
n=1
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(t,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 2 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode5 v(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode1t.png',dpi=800)

```

---

### A.2.7 flexion à $x=0.5$ mode 2

---

```

t=np.linspace(0,0.5,num=1000)
n=2
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1

```

```

S=1
plt.plot(t,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 2 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode5 v(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode2t.png',dpi=800)

```

---

## A.2.8 flexion à x=0.5 total 5 modes

---

```

t=np.linspace(0,0.5,num=100)
n=5
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("vibration 5 flexion ", fontsize=14)
plt.legend(['vibration5 total','mode2','mode3','mode4','mode5''v(x,0)
total'],loc='upper left', fontsize = 10 )
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ modee5vt.png',dpi=800)
plt.plot(t,v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S))

```

---