— Vabiration Libres d'une Poutre en Flexion —

par
GAYE, Ibrahima
ZHANG, Xunjie
Compte-rendu du Ex.31 de l'UE Outil de Mathématique

fait le 29 octobre 2016

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction et Séparation des variables

1.1 Introduction

On ne traitera que ici que le probléme d'une poutre droite , de section uniforme , en flexion simple dqns un plan principal . Ce pendant , le plus souvent , la poutre n'est pas contrainte à rester dans ce plan , et il existe une possibilité de déplacement dans la direction perpendiculaire . Si les excitations ne sont pas contenues dans un plan principal , il faut étudier les virations de flexion , dans les 2 plans principaux définis chacun par l'axe de la poutre et l'une des directions principales de la section .

1.2 Séparation des variables

1.2.1 Équation d'Équilibre

Pour une poutre droite de section constante en flexion , et considérons un effort extérieur t_{ext} nul , on a l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial v^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \tag{1.1}$$

Posons : $v(x,t)$=$\phi(x)q(t)$ et reportons cette expression dans l'équation du mouvement :

$$\phi\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}q \tag{1.2}$$

1.2.2 Séparations

Séparons les termes qui dépendent de t et de x :

$$\frac{1}{q}\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}\frac{1}{\phi} \tag{1.3}$$

1.3 Solution des fonctions

Les 2 membres de cette équation sont indépendants l'un de x , l'autre de t ; ils sont donc constants . Pour que la solution$q(t)$ reste bornée quand le temps tend vers l'infini , cette valeur constante doit être négative .

Trouver $q(t)$ et $\phi(x)$ quand $-\omega^2$ est constant :

$$\frac{1}{q}\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}\frac{1}{\phi} = -\omega^2 \tag{1.4}$$

1.3.1 équation différentielles ordinaires

On en tire 2 équations différentielles ordinaires , l'une en x , l'autre en t , que l'on résout séparément :

$$\begin{cases} \frac{d^4\phi}{dx^4} - \omega^4\frac{\rho S}{EI}\phi &= 0 \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q &= 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.3.2 recherche la solution

On recherche la solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante : $\phi(x) = ae^{sx}$, d'où léquation caractéristique , de degré 4 en S :

$$s^4 - \omega^4\frac{\rho S}{EI} = 0 \tag{1.6}$$

qui a solutions :

$$s = \pm\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2}\ ,\ s = \pm i\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \tag{1.7}$$

que l'on peut aussi écrire en fonction d'unparamètre γ sans dimension :

$$s = \pm\frac{\gamma}{L}\ ,\ s = \pm i\frac{\gamma}{L}\ , \gamma = L\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \tag{1.8}$$

On en déduit l'expression de la forme modale :

$$\phi(x) = ae^{\gamma\frac{x}{L}} + be^{-\gamma\frac{x}{L}} + ce^{i\gamma\frac{x}{L}} + de^{-i\gamma\frac{x}{L}} \tag{1.9}$$

ou encore :

$$\phi(x) = A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L}) \tag{1.10}$$

On recherche l'autre solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante : $q(t) = ae^{bx}$, d'où léquation caractéristique , de degré 2 en t :

$$b^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.11}$$

qui a 2 solutions :

$$b = \pm i\omega\ ,\ \omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{1.12}$$

Donc on en déduit l'expression de la forme modale :

$$q(t) = \hat{e}e^{i\omega t} + \hat{f}e^{-i\omega t} \tag{1.13}$$

Ou encore :

$$q(t) = E\sin\omega t + F\cos\omega t \ , \ \omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{1.14}$$

1.4 Solution finalement

On obtient donc finalement :

$$v(x,t) = \phi(x)q(t) \tag{1.15}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x) & = & A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L}) \\ q(t) & = & E\sin\omega t + F\cos\omega t \\ \omega & = & \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \end{array} \right. \tag{1.16}$$

— $\phi(x)$ définit la form de la poutre pendant sa vibration . Elle contient les 5 constantes A, B, C et $\gamma(ou\ \omega)$, qui sont fixées par les conditions aux limites .
— $q(t)$ définit le mouvement de la poutre . Elle contient , outre la constante ω déjà évoquée , les 2 constantes E et F , qui sont fixées par les conditions initiales .

Chapitre 2

Résolution dans le cas de la poutre encastrée-appuie

2.1 conditons limites

Il existe 2 conditions aux limites usuelles pour une poutre en flexion :

2.1.1 extrémité en appui simple à l'abscisse x=L

La flèche esy nulle en tout instant , ainsi que le moment fléchissant :

$$\forall t \left\{ \begin{array}{rcl} v(L,t) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L,t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(L) & = & A \sinh\gamma + B\cosh\gamma + C\sin\gamma + D\cos\gamma = 0 \\ \frac{d^2\phi}{dx^2}(L) & = & \frac{\gamma^2}{L^2} A\sinh\gamma + B\frac{\gamma^2}{L^2}\cosh\gamma - C\frac{\gamma^2}{L^2}\sin\gamma - D\frac{\gamma^2}{L^2}\cos\gamma = 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Et on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A\sinh\gamma + B\cosh\gamma & = & 0 \\ C\sin\gamma + D\cos\gamma & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

2.1.2 Encastrement à l'abscisse x=0

La flèche esy nulle en tout instant , ainsi que la pent de la poutre :

$$\forall t \left\{ \begin{array}{rcl} v(0,t) & = & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

d'où , on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(0) & = & B + D = 0 \\ \frac{d\phi}{dx}(0) & = & A\frac{\gamma}{L} + C\frac{\gamma}{L} = 0 \end{array} \right. \tag{2.5}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A + C & = & 0 \\ B + D & = & 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

2.1.3 Résultat par les conditions limites

On cherche solution pour les 4 équations :

$$\begin{cases} A \sinh\gamma + B \cosh\gamma = 0 \\ C \sin\gamma + D \cos\gamma = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

On trouve simplement :

$$\begin{cases} \tanh\gamma - \tan\gamma = 0 \\ B = -A \tanh\gamma = -A \tan\gamma \end{cases} \tag{2.8}$$

2.2 Solution analyse

On trouve la solution complète $v(x,t) = \phi(x)q(t)$:

$$v(x,t) = \Big(A \sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B \cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C \sin(\gamma\frac{x}{L}) + D \cos(\gamma\frac{x}{L})\Big)\Big(E \sin(\omega t) + F \cos(\omega t)\Big) \tag{2.9}$$

$$= \Big(A \sinh(\gamma\frac{x}{L}) - A \tanh\gamma \cosh(\gamma\frac{x}{L}) - A \sin(\gamma\frac{x}{L}) + A \tanh\gamma \cos(\gamma\frac{x}{L})\Big)\Big(E \sin(\omega t) + F \cos(\omega t)\Big) \tag{2.10}$$

$$= AE \sin(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma \cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma \cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{2.11}$$

$$+ AF \cos(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma \cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma \cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{2.12}$$

$$\omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.13}$$

2.3 Infinité de solutions

On écrit une programme pour trouver les r valeurs , ce que on noté γ_r , et un tracé graphique simple permet d'apprecher les solutions . En effect , l'équation peut s'écrire :

$$\tanh\gamma = \tan\gamma \tag{2.14}$$

Les solutions sont données par les intersections des courbes $\tanh\gamma$ et $\tan\gamma$:

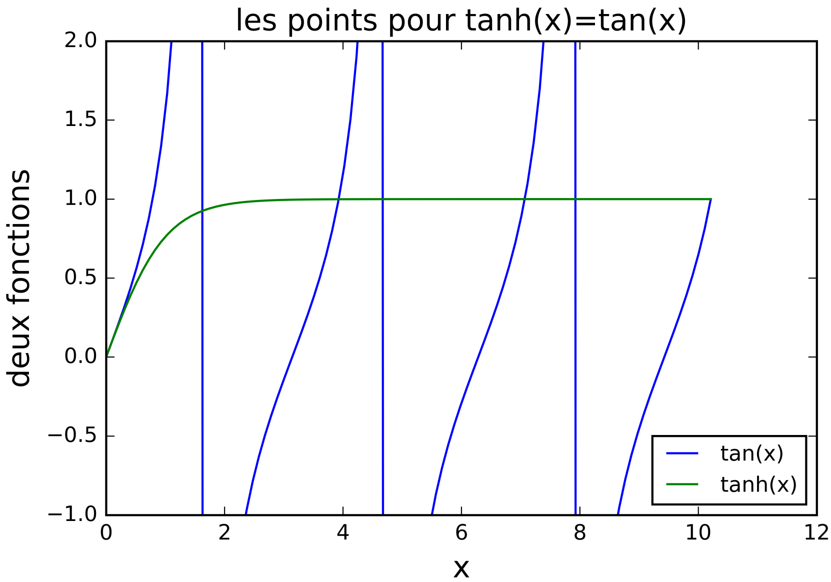

FIGURE 2.1 – infinité points

On constate qu'il esixste une infinité de solution , voisines de $\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, etc.

Les valeurs précises peuvent être recherchées numériquement au voisinage de ces valeurs , au moyen d'un programme Matlab très bref :

for γ=1 :4, fzero(@(gamma) tan(gamma)-tanh(gamma) , (4*r*pi-1)/5

On obtient :

$$\gamma_1 = 3.927 \tag{2.15}$$
$$\gamma_2 = 7.069 \tag{2.16}$$
$$\gamma_3 = 10.210 \tag{2.17}$$
$$\gamma_4 = 13.351 \tag{2.18}$$
$$\gamma_5 = 16.493 \tag{2.19}$$
$$\gamma_6 = 19.634 \tag{2.20}$$
$$\gamma_7 = 22.776 \tag{2.21}$$
$$\gamma_8 = 25.918 \tag{2.22}$$
$$\gamma_9 = 29.059 \tag{2.23}$$
$$\gamma_{10} = 32.201 \tag{2.24}$$
$$...... \tag{2.25}$$
$$\gamma_r = (4 * n * pi - 1)/5 \tag{2.26}$$

A chaque solution γ_r corespond une valeur ω_r de la pulsation :

$$\omega_r = \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.27}$$

2.4 Solution générale

Finalement , la solution générale est :

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)(E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \tag{2.28}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi_r(x) & = & A\Big(\sinh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \tanh \gamma_r \cosh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_r \frac{x}{L})} + \tanh \gamma_r \cos{(\gamma_r \frac{x}{L})} \Big) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ \tanh \gamma_r & = & \tan \gamma_r \\ r & = & 1, 2, 3, 4...... \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Chapitre 3

Analyse et Résultat

Dans ce chapitre on étude la solution complète avec les conditions initiales .

3.1 Premier condition

condition initiale $v(x,0) = v_0$

3.1.1 serie de F_r

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)(E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \tag{3.1}$$

$$v(x,0) = AF_r \Big(\sinh (\gamma_r \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_r \cosh (\gamma_r \frac{x}{L}) - \sin (\gamma_r \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_r \cos (\gamma_r \frac{x}{L}) \Big) \tag{3.2}$$

$$v(x,0) = v_0 \tag{3.3}$$

il reste donc on cherche la serie de F_r dans la équation sommation suivante :

$$\sum_{r=1}^{\infty} AF_r \Big(\sinh (\gamma_r \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_r \cosh (\gamma_r \frac{x}{L}) - \sin (\gamma_r \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_r \cos (\gamma_r \frac{x}{L}) \Big) = v_0 \tag{3.4}$$

3.1.2 Transformé de Fourier

On fait évolution de la fonction au-dessus , à gauche et à droite , on fait intergarale suivante en même temps :

$$\int_0^L \Big(\sinh (\gamma_k \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_k \cosh (\gamma_k \frac{x}{L}) - \sin (\gamma_k \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_k \cos (\gamma_k \frac{x}{L}) \Big) \, \mathrm{d}x \tag{3.5}$$

k est une constante.

et on obtient :

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^L AF_r\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big) \tag{3.6}$$

$$\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L})-\tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L})-\sin(\gamma_r\frac{x}{L})+\tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

$$=\int_0^L v_0\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big)\,\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

On étude le fonction au dessus , on trouve si r est différent que k :

$$\int_0^L\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big) \tag{3.9}$$

$$\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L})-\tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L})-\sin(\gamma_r\frac{x}{L})+\tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x=0 \tag{3.10}$$

si $r=k$:

$$\int_0^L\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big) \tag{3.11}$$

$$\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L})-\tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L})-\sin(\gamma_r\frac{x}{L})+\tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x=L \tag{3.12}$$

donc à gauche de signe égale , on a : ALF_k
et a droite de signe égale , on a :

$$\int_0^L v_0\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

$$=\frac{Lv_0\Big(\cos(\gamma_k)+\cosh(\gamma_k)+\tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k)-\sinh(\gamma_k))-2\Big)}{\gamma_k} \tag{3.14}$$

et finalement on trouve F_k :

$$F_k=\frac{v_0}{A\,\gamma_k}\Big(\cos(\gamma_k)+\cosh(\gamma_k)+\tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k)-\sinh(\gamma_k))-2\Big) \tag{3.15}$$

k et r sont constantes 1,2 ,3......

$$F_r=\frac{v_0}{A\,\gamma_r}\Big(\cos(\gamma_r)+\cosh(\gamma_r)+\tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r)-\sinh(\gamma_r))-2\Big) \tag{3.16}$$

3.2 Deuxième condition

dans le deuxième condition on a $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0$

3.2.1 Derivée partiel d'équation

On fait la dérivée partielle de $v(x,t)$ sur t

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = AEw\cos(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{3.17}$$

$$- AFw\sin(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{3.18}$$

3.2.2 Nulle de derivation

On a toujour l'équation suivante :

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = AE_r\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r\frac{x}{L}) + \tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big) = 0 \tag{3.19}$$

Donc evidment , $E_r = 0$ pour tous les r .

3.3 Solution complète

Avec les conditions initiales on arrive :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x,t) & = & \sum_{r=1}^{\infty} AF_r\cos(\omega_r t)\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r\frac{x}{L}) + \tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big) \\ AF_r & = & \frac{v_0}{\gamma_r}\Big(\cos(\gamma_r) + \cosh(\gamma_r) + \tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r) - \sinh(\gamma_r)) - 2\Big) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ E_r & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.20}$$

Chapitre 4

Prénsatations Graphiques

On untilise Jupyter Nootbook pour prensenter les graphiques : pour toutes les valeurs en bosoin , on note 1 ,

$$E = 1 \tag{4.1}$$

$$L = 1 \tag{4.2}$$

$$I = 1 \tag{4.3}$$

$$rho = 1 \tag{4.4}$$

$$S = 1 \tag{4.5}$$

4.1 Graphiques temps fixé

4.1.1 Mode 1 ($\gamma = \gamma_1$)

$\gamma_1 = 3.927$:

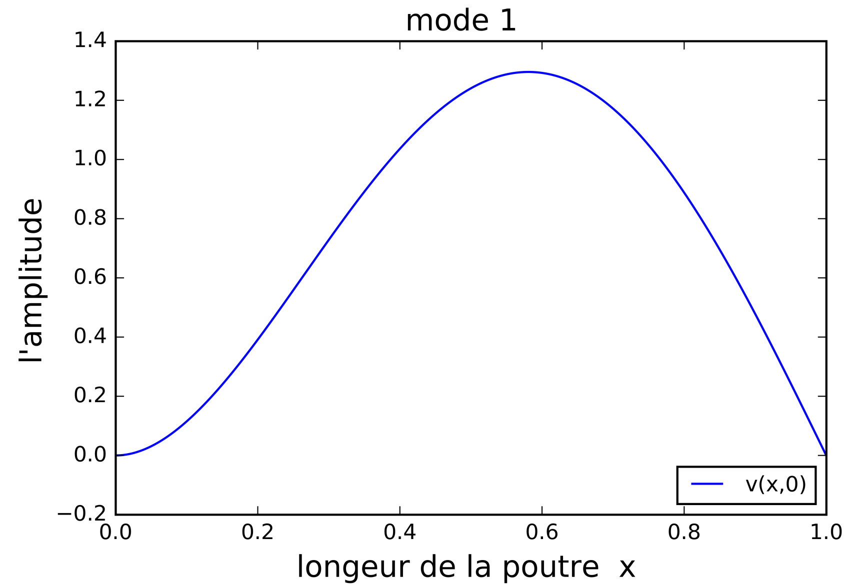

FIGURE 4.1 – t=0 mode 1

4.1.2 Mode 2 ($\gamma = \gamma_2$)

$\gamma_2 = 7.069$:

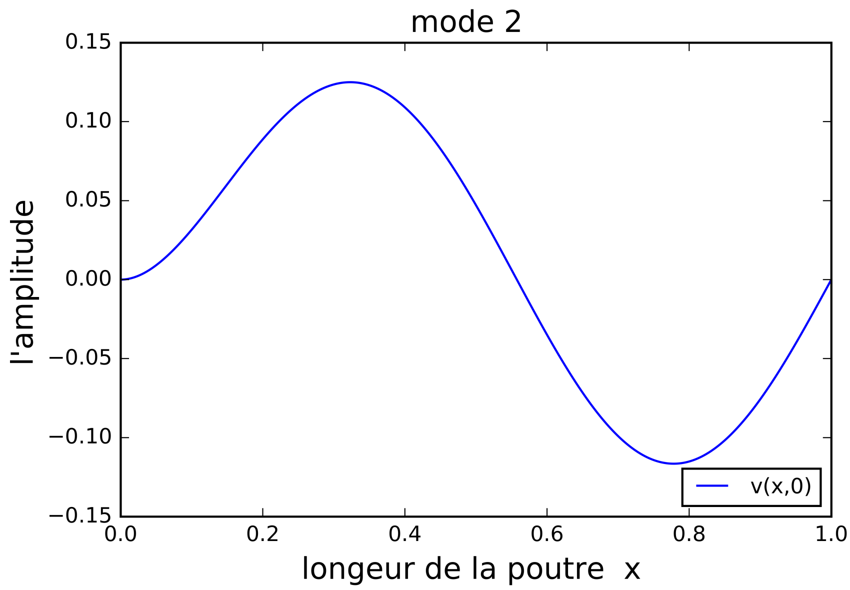

FIGURE 4.2 – t=0 mode 2

4.1.3 V(x,0) total pour γ_1 et γ_2

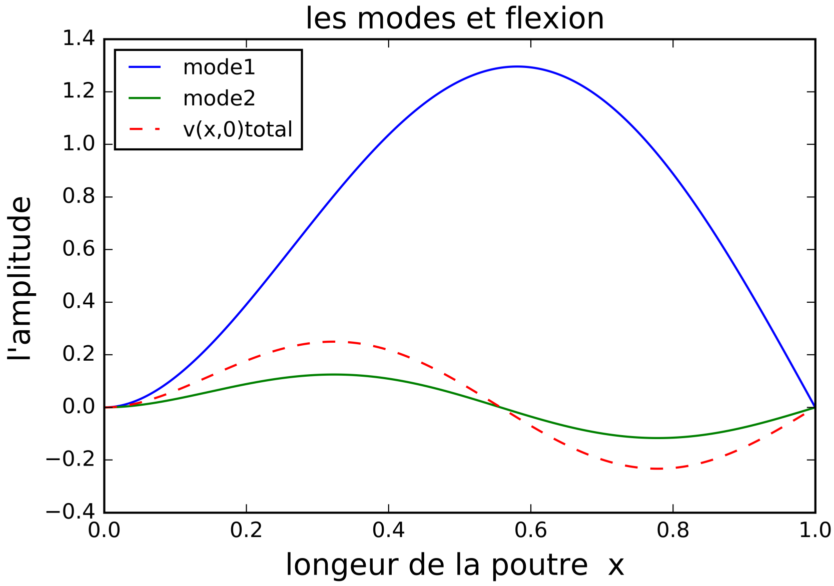

Figure 4.3 – 2 modes et vibrations

4.1.4 Mode 5 ($\gamma = \gamma_5$)

$\gamma_5 = 16.493$:

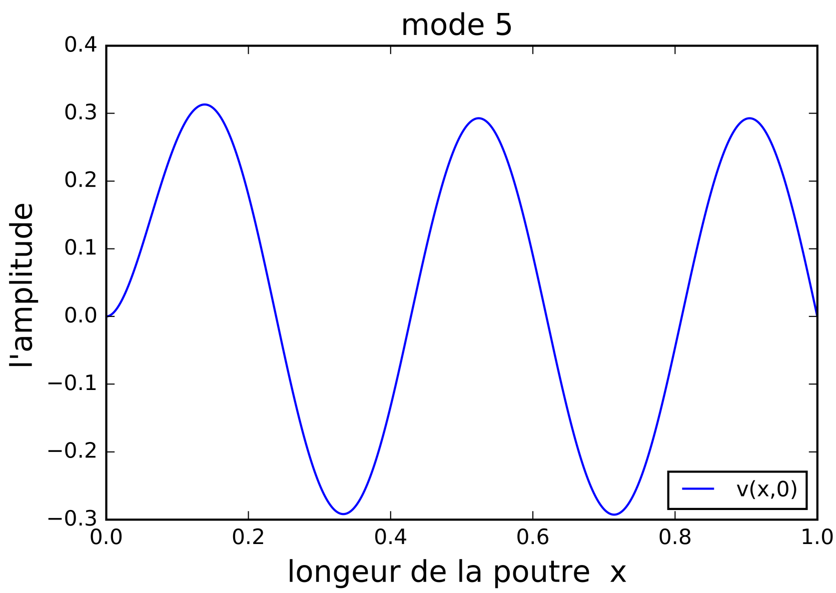

FIGURE 4.4 – t=0 mode 5

4.1.5 V(x,0) total pour γ_1,γ_2,γ_3,γ_4,γ_5

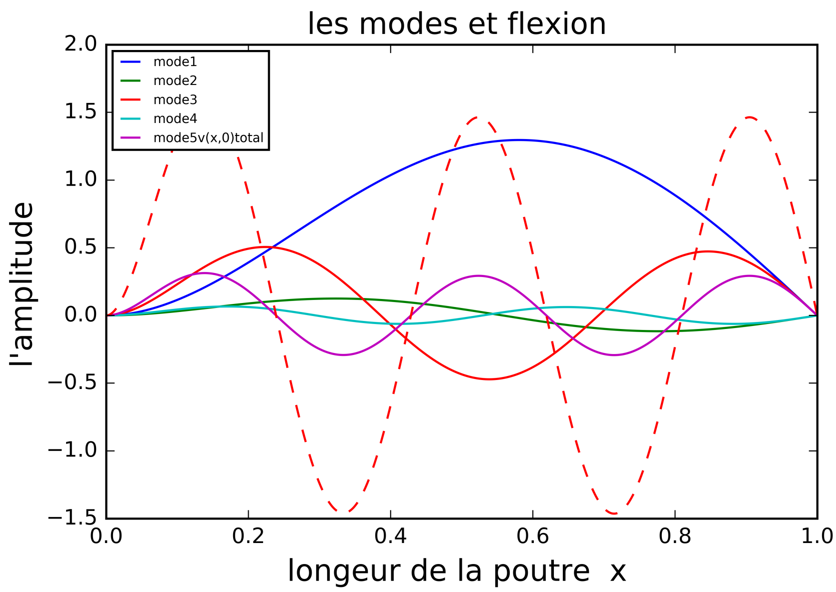

FIGURE 4.5 – 5 modes et vibrations

4.2 Graphiques position fixé

On choisi pa position milieu $x = 0.5$ pour présenter :

4.2.1 Mode1 du temps

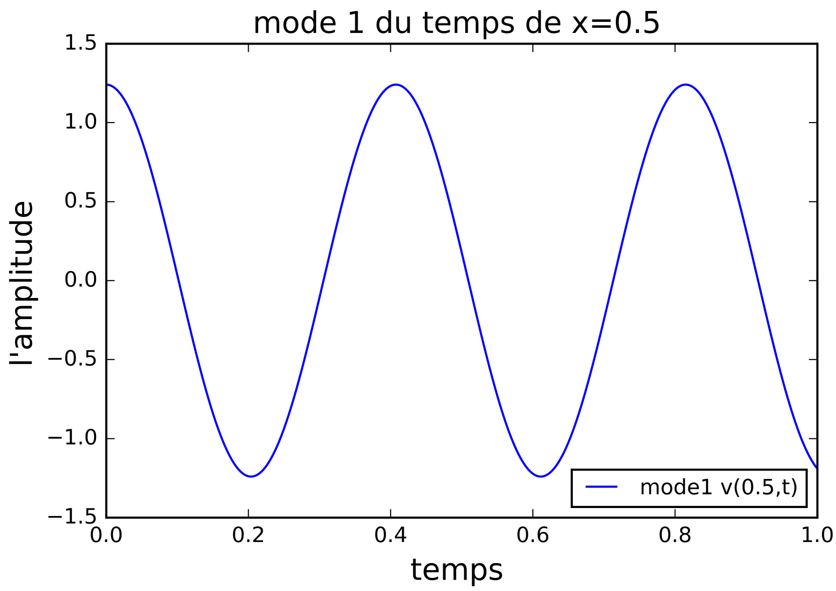

FIGURE 4.6 – mode1 du temps

4.2.2 Mode2 du temps

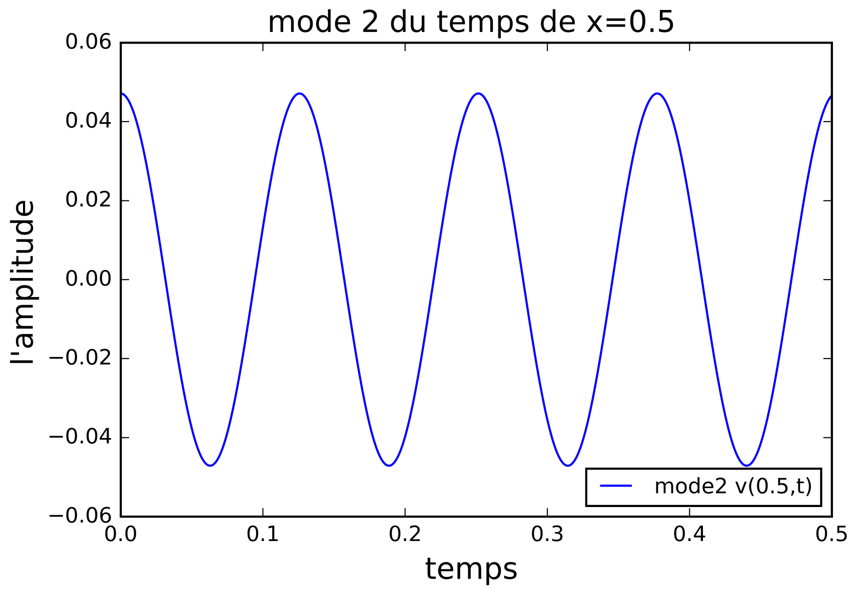

Figure 4.7 – mode2 du temps

4.2.3 Viration2 total du temps

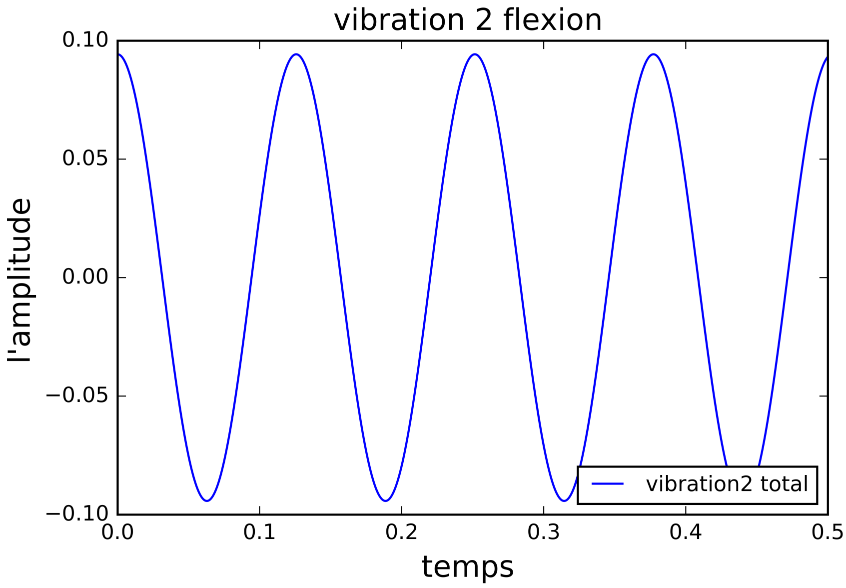

FIGURE 4.8 – vibration2 du temps

4.2.4 Viration5 total du temps

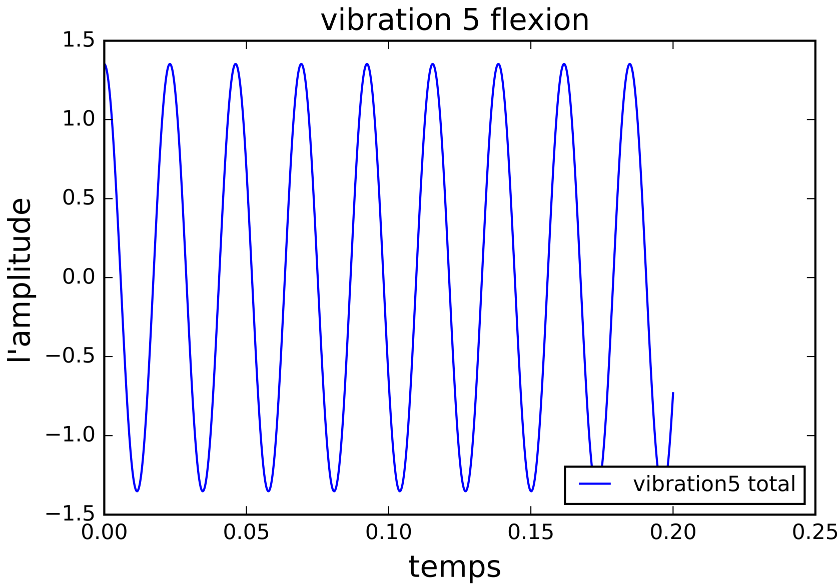

FIGURE 4.9 – vibration5 du temps

Chapitre 5

Conclution

Dans cet examen on fait l'etude vibratoir des différentes modes de vibration d'une poutre encastrée en appuie (E-A). On a utiliser des resultats mathematiques généraux qu'on à appliqué aux comportements de la poutre qu'on etudie condition limitites, condition initials...

Cette étude nous à permit d'utiliser des outils mathématiques trés avancé afin de trouver certains inconnues de notre probléme comme les series de fourier et autres.

cette examen nous à permit aussi d'utiliser certains outils numeriques afin de verifier les solutions qu'on obtient ou bien de trouver des inconnues de notre probléme ou une liste de valeurs qui peut aller jusqu'a n valeurs difficil à trouver sans machine comme le calcul de gamma par exemple...
Et parmi ces outils qu'on à utiliser durant ce homework on peut citer matlab, pyhton,wolfram...

Donc pour terminer on peut dire que ce travail de maison nous aura permit de pratiquer le travail en equipe et surtout aussi de redécouvrire des methodes mathematique ou numerique déja fait durant nos etudes et de se rendre comptes de leur vrais importance dans la resolution de probléme mécanique, physique...

Annexe A

Code Python

A.1 Listes des fonctions

```
## trouver les valeurs de gamma
x=np.linspace(0,13*np.pi/4,num=100)
plt.ylim(-1,2)
plt.plot(x,np.tan(x))
plt.plot(x,np.tanh(x))
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel("deux fonctions", fontsize=14)
plt.title("les points pour tanh(x)=tan(x)", fontsize=14)
plt.legend(['tan(x)','tanh(x)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ figuretanh.png',dpi=800)



# definir r_k , k= 1, 2 ,3, 4, 5, 6 ,....
def r_k(n):
    A=np.linspace(1,n,n)
    for i in range(1,n+1):
        A[i-1]=np.pi*(4*i+1)/4
    return A
    while i<N:
        S=section(L,N,i,S0,SL)
        A[i,i]=A[i,i]+(E*S)/h
        A[i,i+1]=-(E*S)/h
        A[i+1,i]=-(E*S)/h
        A[i+1,i+1]=(E*S)/h
        i=i+1
    return A


# def phi_k pla variation en fonction de x
def phi_k(r,L):
```

```
    y=np.sinh(r*x/L)-np.tanh(r)*np.cosh(r*x/L)-np.sin(r*x/L)+np.tanh(r)
        *np.cos(r*x/L)
    return y


# somme de  phi(x) sans l'implitude
def somme_phi_k(n,L):
    y=0
    for i in r_k(n):
        y=y+phi_k(i,L)
        i=i+1
    return y


# definir v_k
def V_k(n,v0,L):
    A=np.linspace(0,n-1,n)
    i=0
    for r in r_k(n):
        A[i]=(np.cos(r)+np.cosh(r)+np.tanh(r)*(np.sin(r)-np.sinh(r))-2)
            /r
        i=i+1
    return A



# definie omega
def omega_k(n,L,E,I,rho,S):
    A=np.linspace(0,n-1,n)
    i=0
    for r in r_k(n):
        A[i]=(r*r)/(L*L)*np.sqrt(E*I/(rho*S))
        i=i+1
    return A


# definir les modes
def mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S):
    i=0
    for r in r_k(n):
        y=V_k(n,v0,L)[i]*phi_k(r,L)*np.cos(omega_k(n,L,E,I,rho,S)[i]*t)
        i=i+1
    return y



#defnir u_k sans somme
def u_k(n,t,v0,L,E,I,rho,S):
    i=0
    for r in r_k(n):
```

```
        y=V_k(n,v0,L)[i]*phi_k(r,L)*np.cos(omega_k(n,L,E,I,rho,S)[i]*t)
        i=i+1
    return y


#definir vibration total
def v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S):
    y=0
    for i in range(1,n+1):
        y=y+u_k(n,t,v0,L,E,I,rho,S)
        i=i+1
    return y

def intergral f(r)*f(k)
def function(x):
    r=3.927
    k=7.069
    return  (np.sinh(r*x)-np.tanh(r)*np.cosh(r*x)-np.sin(r*x)+np.tanh(r
        )*np.cos(r*x))*(np.sinh(k*x)-np.tanh(k)*np.cosh(k*x)-np.sin(k*x
        )+np.tanh(k)*np.cos(k*x))
quad(function,0,1)
```

A.2 Les graphiques

A.2.1 tan(gamma)=tan(gamma)

```
x=np.linspace(0,13*np.pi/4,num=100)
plt.ylim(-1,2)
plt.plot(x,np.tan(x))
plt.plot(x,np.tanh(x))
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel("deux fonctions", fontsize=14)
plt.title("les points pour tanh(x)=tan(x)", fontsize=14)
plt.legend(['tan(x)','tanh(x)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ figuretanh.png',dpi=800)
```

A.2.2 Mode 1

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=1
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
```

```
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('longeur de la poutre  x ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1  ", fontsize=14)
plt.legend(['v(x,0)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode1.png',dpi=800)
```

A.2.3 Mode 2

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=2
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode12(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode1t.png',dpi=800)
```

A.2.4 Mode 5

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=5
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode12(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode1t.png',dpi=800)
```

A.2.5 5 modes total

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=5
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S),'r--')
for i in range(1,n+1):
     plt.plot(x,u_k(i,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("vibration 5 flexion ", fontsize=14)
plt.legend(['vibration5 total','mode2','mode3','mode4','mode5''v(x,0)
    total'],loc='upper left', fontsize = 8)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ modee5vt.png',dpi=800)
```

A.2.6 flexion à x=0.5 mode 1

```
t=np.linspace(0,0.5,num=1000)
n=1
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(t,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 2 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode5 v(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode1t.png',dpi=800)
```

A.2.7 flexion à x=0.5 mode 2

```
t=np.linspace(0,0.5,num=1000)
n=2
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
```

```
S=1
plt.plot(t,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 2 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode5 v(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode2t.png',dpi=800)
```

A.2.8 flexion à x=0.5 total 5 modes

```
t=np.linspace(0,0.5,num=100)
n=5
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("vibration 5 flexion ", fontsize=14)
plt.legend(['vibration5 total','mode2','mode3','mode4','mode5''v(x,0)
    total'],loc='upper left', fontsize =10 )
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ modee5vt.png',dpi=800)
plt.plot(t,v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S))
```