

——Equation de transport——

par
ZHANG Xunjie
pour le Méthodes numériques pour les EDP M1

fait le 15 mai 2017

Table des matières

1	Problème physique	3
2	Solution analytique	4
3	Méthode numérique	6
3.1	Schéma de courant	6
3.1.1	Stabilité	6
3.1.2	Consistance	7
3.2	Schéma de Lax-Wendroff	7
3.2.1	Stabilité	8
3.2.2	Consistance	8
3.3	Schéma de leap-frog	8
3.3.1	Stabilité	9
3.3.2	Consistance	9
4	Etude numérique	10
4.1	Solution exact	10
4.2	Solution exact et scheme courant	11
4.3	Solution exact et scheme laxwendroff	12
4.4	Solution exact et scheme leapfrog	12
5	Erreur numérique	14
5.1	Error spatial	14
5.2	Precision temporelle	15
6	Conclusion	17

Table des figures

4.1	Solution exact à t_0	10
4.2	Solution exact et schéme courant à t_0 pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$	11
4.3	Solution exact et schéme laxwendroff à t_0 pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$. .	12
4.4	Solution exact et schéme leapfrog à t_0 pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$	13
5.1	Error pour les trois schémes	14
5.2	Precision temporelle pour trois scheme	15

Chapitre 1

Problème physique

Dans cette séance de TP EDP , on considère le problème de l'advection d'une impulsion acoustique ; le champ de pression est initialement :

$$P_0(x) = \begin{cases} \cos(kx) \exp(-\alpha x^2) & |x| < 0.5 \\ P_\infty & |x| > 0.5 \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour la continuité de la pression initiale et ses dérivées par rapport à x , on met $\alpha = -2k \tan(\frac{k}{2})$, et $P_\infty = \cos(\frac{k}{2}) \exp(-\frac{\alpha}{4})$.

Enfin, pour obtenir une impulsion utile, on utilisera $k = 37$ Pour la propagation on peut utiliser l'équation de transport,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Où p est la pression et c est la vitesse du son. Sur un domaine $-L \leq x \leq 2L$, les conditions aux limites sont : $p(x = -L) = P_\infty$ et $\frac{\partial p}{\partial x}(x = 2L) = 0$.

Chapitre 2

Solution analytique

La solution générale de ce type de problème avec $c > 0$, s'écrit sous la forme :

$$p(x, t) = P_0(X) \quad X = x - ct \quad (2.1)$$

Alors,

$$P_0(x) = \begin{cases} \cos(kX) \exp(-\alpha X^2) & |x| < 0.5 \\ P_\infty & |x| > 0.5 \end{cases} \quad (2.2)$$

On considère la propagation d'une onde sonore plane dans tube de longueur $2L$ contenant un milieu au repos de densité r_0 et de pression p_0 . Le milieu est perturbé à l'instant initial par une fluctuation de pression $\omega(x)$ ne dépendant que de la direction spatiale x et sans vitesse initial $\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0$. La densité $r(x, t) + r_0$ la pression $p(x, t) + p_0$ et la vitesse $u(x, t)$ du milieu perturbée sont solutions des équations de conservation d'Euler, qui décrivent la dynamique d'un gaz non visqueux.

En supposant que les perturbations sont faibles (hypothèse de l'acoustique), l'équation de conservation de la masse s'écrit au premier ordre :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

De même l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit au premier ordre :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Les fluctuations étant faibles, on peut supposer l'écoulement isentropique :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.5)$$

De ces relations on en déduit un système d'équations hyperbolique sur et :

$$\frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

En dérivant la première équation par rapport à t et la seconde par rapport à x , on obtiens par différence l'équation des ondes pour la fluctuation de pression p :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

Chapitre 3

Méthode numérique

3.1 Schéma de courant

Le schéma s'écrit sous la form suivante :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -c \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (3.1)$$

On introduit une petite perturbation :

$$p_i^n = p_i^n + \varepsilon_i^n \quad (3.2)$$

en même temps

$$C_{FL} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$
$$\beta = \omega dx$$

on introduit Fourier mode :

$$\varepsilon_i^n = \psi^n e^{I\omega dx} \quad (3.3)$$

3.1.1 Stabilité

$$\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = 1 - C_{FL}(\cos \beta - 1) - C_{FL} \sin \beta \quad (3.4)$$

On se trouve la fraction est une valeur complexe, donc on cherche la module de cette valeur :

$$\left| \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} \right| \leq 1$$

et on retrouve la résultat :

$$\left| C_{FL} \right| \leq 1 \quad (3.5)$$

3.1.2 Consistance

On utilise Taylor Series pour trouver la consistance :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(i,n)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{(i,n)} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \Big|_{(i,n)} + \dots \quad (3.6)$$

D'où, U_i^n est la solution exacte .

et on trouve :

$$Err = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Big|_{(i,n)} - \frac{c\Delta x}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_{(i,n)} + o(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3.7)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial p}{\partial x} \right) = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ Err &= \frac{\Delta t c^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_{(i,n)} - \frac{c\Delta x}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_{(i,n)} + o(\Delta t^2, \Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

On a

$$C_{FL} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

Finalement,

$$Err = \frac{c\Delta x}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} (C_{FL} - 1) + o(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3.9)$$

On peut dire que il y a une diffusion avec coefficient $\frac{c\Delta x}{2} (C_{FL} - 1)$

3.2 Schéma de Lax-Wendroff

Le schéma s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x} (p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n) \quad (3.10)$$

On introduit une petite perturbation :

$$p_i^n = p_i^n + \varepsilon_i^n \quad (3.11)$$

en même temps

$$\begin{aligned} C_{FL} &= \frac{c\Delta t}{\Delta x} \\ \beta &= \omega dx \end{aligned}$$

on introduit la transformée de Fourier :

$$\varepsilon_i^n = \psi^n e^{I\omega dx} \quad (3.12)$$

3.2.1 Stabilité

$$\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = 1 - 2C_{FL}^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - IC_{FL}(1 - \sin \beta) \quad (3.13)$$

On se trouve la fraction est une valeur complex , donc on cherche la module de cette valeur :

$$\left| \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} \right| \leq 1$$

et on retrouve la résultat :

$$\left| C_{FL} \right| \leq 1 \quad (3.14)$$

3.2.2 Consistance

On utilise Taylor Series pour trouver la consistance :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(i,n)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{(i,n)} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \Big|_{(i,n)} + \dots \quad (3.15)$$

D'ou , U_i^n est la solution exact .

et on a :

$$Err = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) - \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n)$$

on trouve :

$$Err = \frac{c\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Big|_{(i,n)} + o(\Delta t^2, \Delta^4) \quad (3.16)$$

On peut dire que il y a une dispersion avec coefficient $\frac{c\Delta x^2}{6}$

3.3 Schéma de leap-frog

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^{n-1}}{\Delta t} = -c \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (3.17)$$

On introduce une petite perturbation :

$$p_i^n = p_i^n + \varepsilon_i^n \quad (3.18)$$

en même temps

$$C_{FL} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$\beta = \omega dx$$

on introduce Fouriere mode :

$$\varepsilon_i^n = \psi^n e^{I\omega dx} \quad (3.19)$$

3.3.1 Stabilité

On substrust et on trouve :

$$\frac{\psi_i^{n+1}}{\psi_i^n} = \frac{\psi_i^{n-1}}{\psi_i^n} - 2IC_{FL} \sin \beta \quad (3.20)$$

Cette valeur de stabilité est une trois-étage , on pose :

$$\frac{\psi_i^{n+1}}{\psi_i^n} = \frac{\psi_i^{n-1}}{\psi_i^n} = G$$

on a :

$$G^2 + 2IC_{FL} \sin \beta - 1 = 0 \quad (3.21)$$

Les solutions sont :

$$G_{1,2} = -IC_{FL} \sin \beta \pm (1 - C_{FL}^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}$$

Ici , on sépare les résultat et discuss :

- $\Delta \geq 0$, $G_{1,2} = 1$ et on trouve la condition , $|C_{FL}| \leq 1$
- $\Delta < 0$, $G_{1,2} = -I(C_{FL} \sin \beta \pm \sqrt{C_{FL}^2 \sin^2 \beta})$ est une valeur complexe , on essaie cherche la module de cette valeur ,

$$|G_{1,2}|^2 = \text{Im}\{G_{1,2}\}^2 = (C_{FL} \sin \beta \pm \sqrt{C_{FL}^2 \sin^2 \beta - 1})^2$$

on s'interest à G_2 , et :

$$G_2^2 = (C_{FL} \sin \beta + \sqrt{C_{FL}^2 \sin^2 \beta - 1})^2$$

$$G_2^2 > (C_{FL} \sin \beta)^2 > 1$$

on dit que pour $\Delta < 0$, il n'y pas de consistance .

Donc , pour la stabilité de la schéma Leap-Frog , quand $|C_{FL}| \leq 1$, elle est stabilité avec condition .

3.3.2 Consistance

$$Err = \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} \Big|_{(i,n)} + \frac{c\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Big|_{(i,n)} + o(\Delta t^4, \Delta x^4) \quad (3.22)$$

On a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial p}{\partial x} \right) = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

on retrouve :

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -c^3 \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}$$

Donc au final :

$$Err = \frac{1}{12} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Big|_{(i,n)} (-c^3 \Delta t^2 + c\Delta x^2) + o(\Delta t^4, \Delta x^4) \quad (3.23)$$

On dit que cette schéma transpose avec dispersion , sa coefficient est $\frac{1}{12}(-c^3 \Delta t^2 + c\Delta x^2)$.

Chapitre 4

Etude numérique

4.1 Solution exact

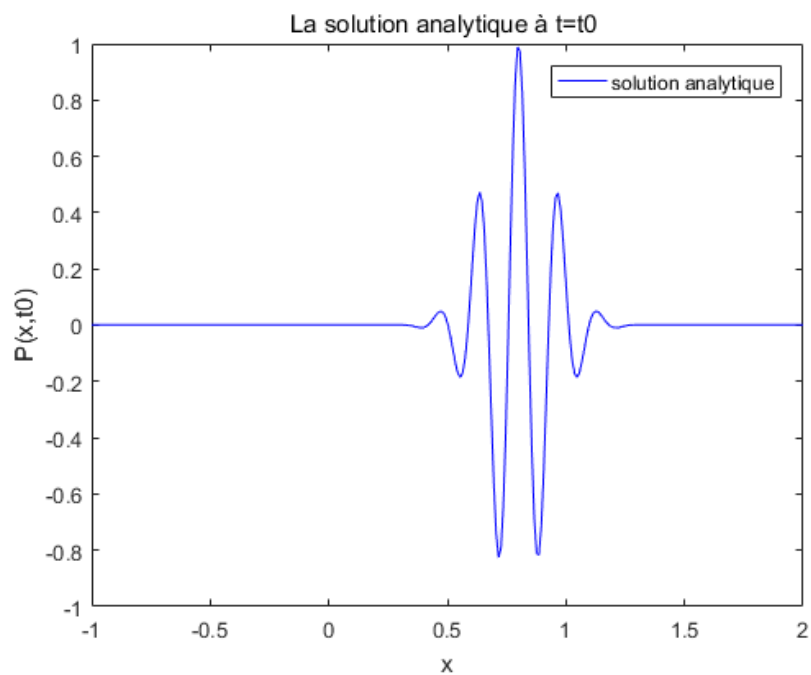


FIGURE 4.1 – Solution exact à t_0

Commentaire :

Au début , on plot cette figure de la solution exact à l'instant t_0 . A la vue de la figure , on dit que il est presque vrai , parce-que on trouve l'axe symétrique $esx = 0.8$, c'est la solution transport de la solution P_0 .

4.2 Solution exact et schéma courant

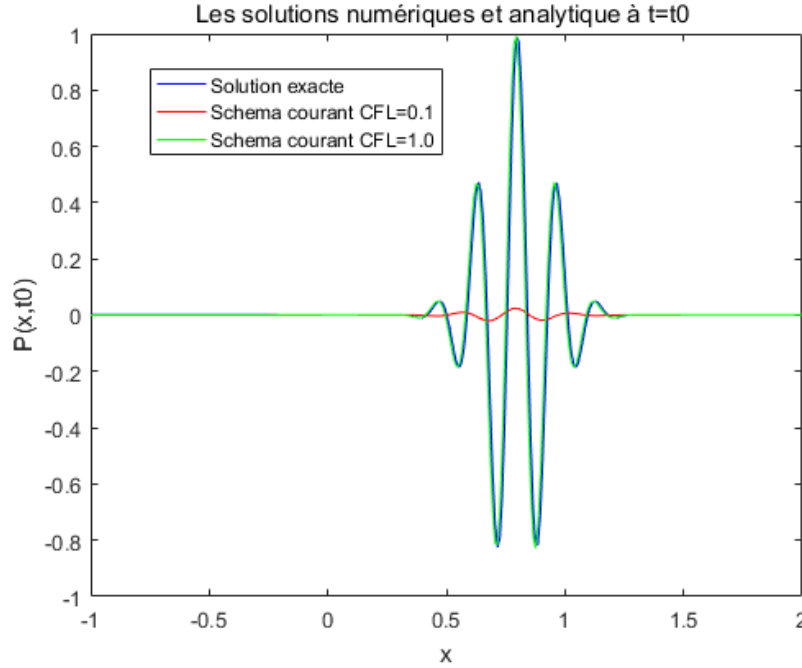


FIGURE 4.2 – Solution exact et schéma courant à t_0 pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$

Commentaire : On fait la courant schéma pour different C_{FL} , dans la figure on se trouve , quand C_{FL} égale 1 , la solution exact et la solution numérique sont de chevauchement des deux fonctions . On retrouve la même résultat dans la presentation $Err, \frac{c\Delta x}{2}(C_{FL} - 1)$ est nul , donc les deux solution soit paraille . Aussi , quand C_{FL} est petite , il y a une grand diffusion. Et le schéma de Leapfrog a une grande dispersion .

4.3 Solution exact et schéma laxwendroff

Commentaire : Dans la figure 4.3 on presente les solution exact et solution de lax wendroff pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$, les solution sont similaire que la solution exact . Ils convergent .

4.4 Solution exact et schéma leapfrog

Commentaire : Dans la figure4.4 on presente les solution exact et solution de la schéma leapfrog pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$, les solution sont similaire que la solution exact . Ils convergent .

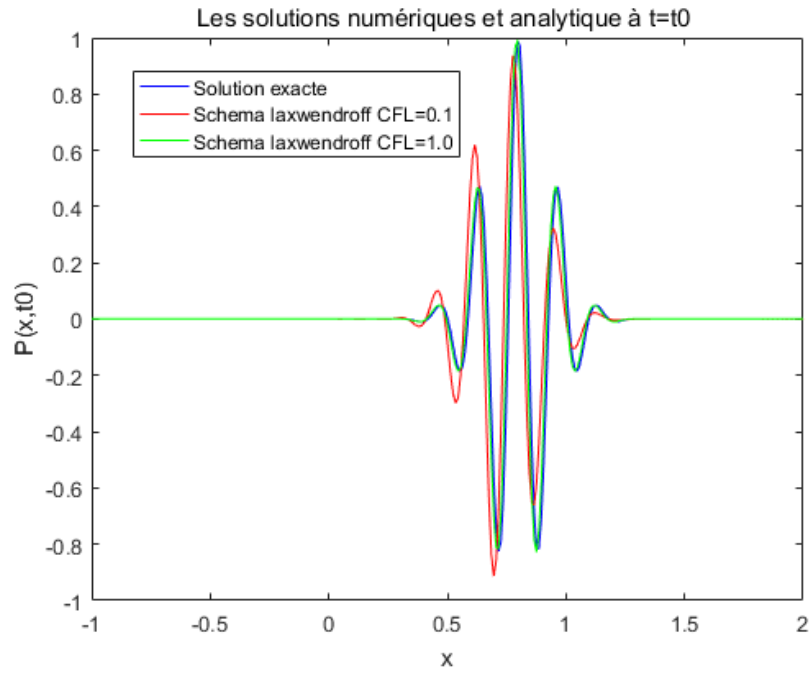


FIGURE 4.3 – Solution exact et schéma laxwendroff à t_0 pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$

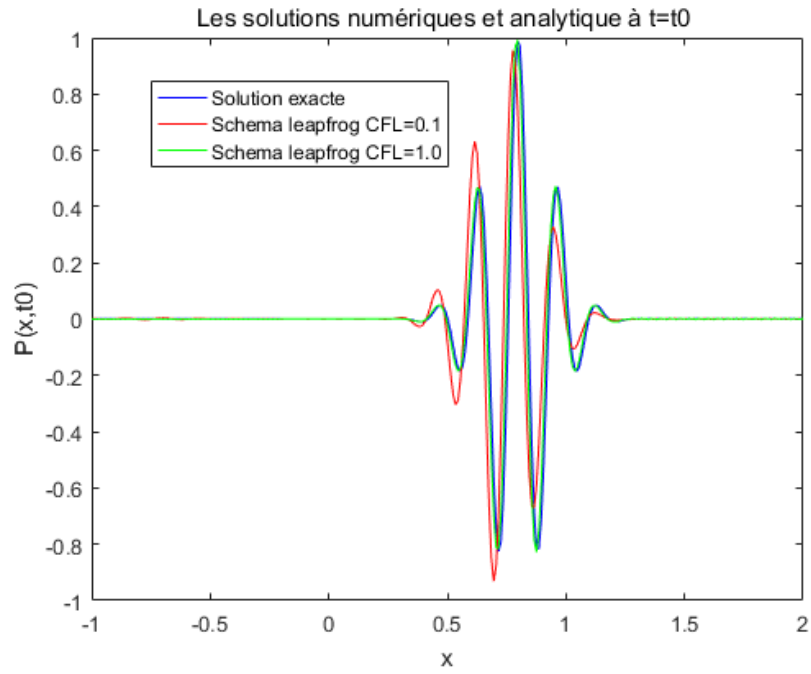


FIGURE 4.4 – Solution exact et schéma leapfrog à t_0 pour $C_{FL} = 0.1, 1.0$

Chapitre 5

Erreur numérique

5.1 Error spatial

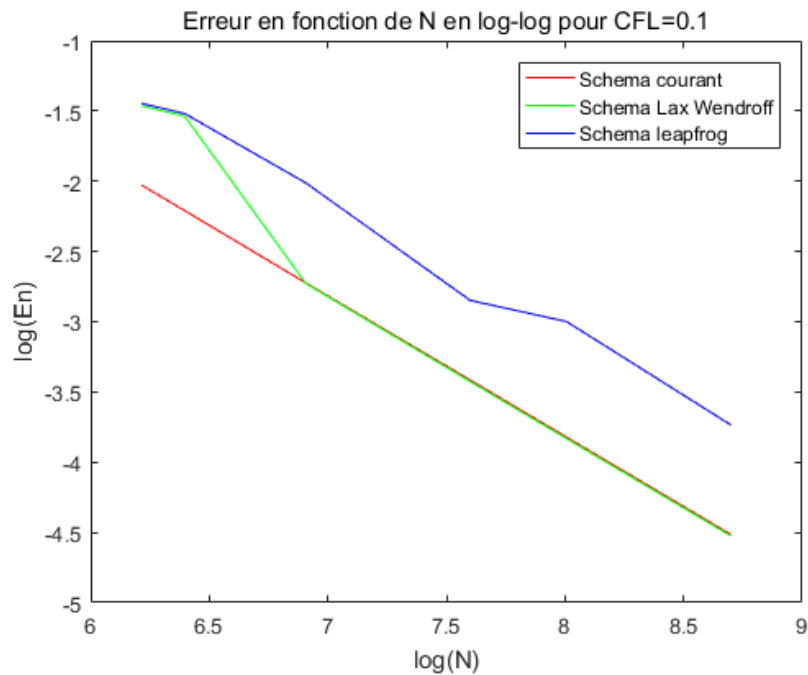


FIGURE 5.1 – Error pour les trois schémas

On va étudier la convergence spatiale de ces trois schémas. On va calculer l'erreur spatiale en fonction de N en utilisant une échelle logarithmique pour les axes, et en déduire la précision spatiale des schémas. Ici, on prend les discrétisations de $N = [500, 600, 1000, 2000, 3000, 6000]$. Dans tous les schémas, on obtient les coefficients comme le figure au dessus.1, ça veut dire que le schéma de courant est une erreur d'ordre 1 en N . Et les deux autres ont des pentes vers

2. Donc ses erreurs sont d'ordre 2 en N . Dans la code , on peut aussi trouve la pente .

5.2 Precision temporelle

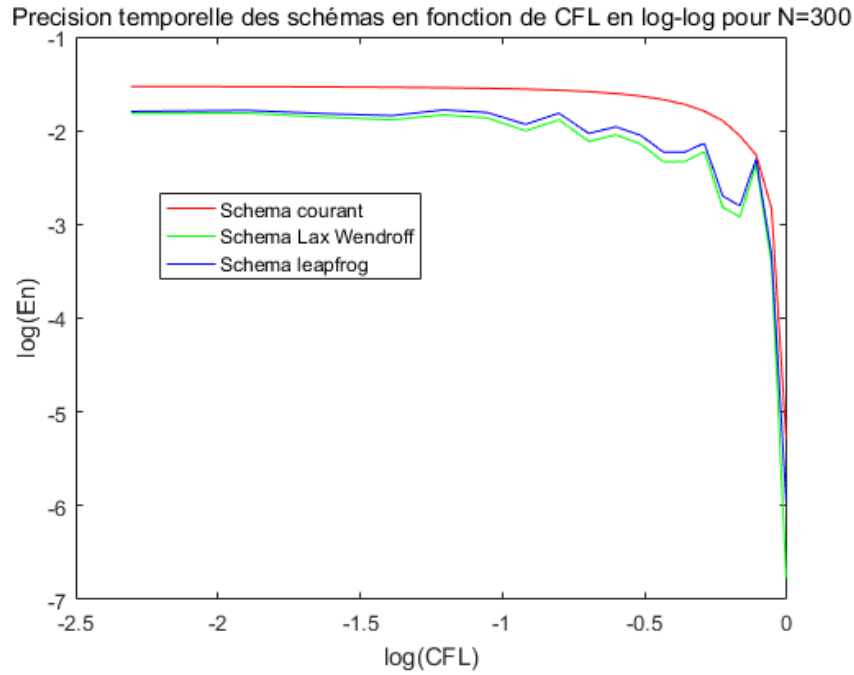


FIGURE 5.2 – Precision temporelle pour trois scheme

On remarque que pour soit, l'erreur pour ces trois schémas est quasiment constante puisque pour 1, des pas en temps sont inférieurs à des pas en espace, l'erreur est donc contrôlée par la précision spatiale. Par contre, pour, soit, les trois schémas sont vérifiés pas par les conditions de stabilité des trois schémas. Les erreurs augmentent très rapidement. Et quand , les erreurs commencer à décroître. Dans la code , on peut aussi trouve la pente .

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette séance de TP , on étudie équation transport . Au début on cherche la solution analytique de la problème , ensuite on fait une simulation utilisant trois schéma , schéma courant , schéma lax wendroff , et schéma leapfrog . On utilise Matlab pour programmer les solutions .

Pour la schéma courant il y a une diffusion , et pour les autres deux , il y a une dispersion . Les trois schéma sont stables avec conditions .

Pour la précision , on dit que pour la schéma courant , la précision est $o(\Delta t^2, \Delta x^2)$, pour la schéma courant , la précision est $o(\Delta t^2, \Delta x^4)$, pour la schéma courant , la précision est $o(\Delta t^4, \Delta x^4)$.