

TP 2 : Méthodes des Éléments Finis 1D

Déformation d'une Membrane Circulaire

ATTENTION : Le TP est à préparer avant la séance. Un compte rendu (CR) du minimum 2 pages est exigé ; il faut que le CR soit rédigé en LaTeX et seule la version PDF doit-être déposer sur site pédagogique de l'UFR (moodle) avant la date limite. En revanche, le programme Maple ou Matlab est à déposer sur le moodle à la FIN DE SÉANCE !

Objectif

L'objectif de ce TP est

- d'utiliser la méthode des éléments finis pour des problèmes physiques en une dimension ; ainsi nous allons calculer la déformation d'une membrane simple sous une contrainte symétrique.
- d'apprendre à travailler avec des polynômes de degrés $m \geq 1$ pour les fonctions de formes.
- de commencer à programmer/utiliser le logiciel MAPLE pour des calculs simples.

Problème Physique

On considère la déformation U d'une membrane circulaire de rayon $R = 1$, soumis à une charge $f(r)$ et fixée en $R = 1$. On considère le problème sur $\Omega = [0, 1]$

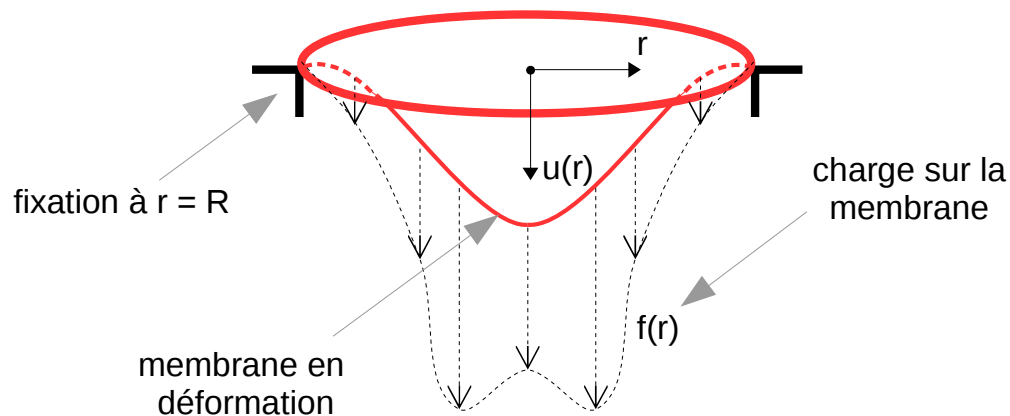


FIGURE 1 – Schéma indiquant la membrane circulaire du rayon R soumise à une charge $f(r)$.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = f(r), \quad (1)$$

$$\text{avec } \frac{dU}{dr} = 0 \text{ à } r = 0 \text{ \& } U = 0 \text{ à } r = 1. \quad (2)$$

Approximation par Éléments Finis

1. Écrire la formulation faible du problème.
2. Si la solution approchée u^h peut-être écrite sous la forme $\sum_{k=0}^{k=N} [a_k \phi_k(r)]$, donner la forme générale du système matricielle $A_{ik} a_k = B_i$ permettant de calculer la solution approchée u^h .
3. Pour calculer la matrice A_{ik} , on détermine la matrice élémentaire sur l'élément de référence $[-1..1]$. Ici, pour la simplicité, nous considérons seulement un élément et sur cet élément de référence, les $m + 1$ fonctions de formes $N_i(\xi)$ (c'est à dire, les fonctions $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$, \dots $N_m(\xi)$, $N_{m+1}(\xi)$) sont des polynômes de degré $m \geq 1$. Écrire les conditions sur chaque $N_i(\xi)$ permettant de déterminer l'expression de ces fonctions.
4. Déterminer les fonctions formes $N_i(\xi)$ pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$ en utilisant Maple (utiliser la fonction Maple *interp* pour faire de l'interpolation avec des conditions sur $N_i(\xi)$ de la question précédente).
5. Calculer avec Maple les composantes des matrices élémentaires pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$ (utiliser la fonction Maple *int* pour calculer les intégrales).
6. Pour calculer le second membre B_i on considérera deux fonctions second membre $f(r)$
 - cas (i) : un second membre régulier $f(r) = 1 - r^4$
 - cas (ii) : un second membre non régulier $f(r) = f_0 \mathcal{H}(r_0 - r)$, où \mathcal{H} est la fonction porte. ATTENTION : chaque groupe devrait utiliser les paramètres (f_0 & r_0) qui ont été attribués pour eux !
7. Calculer le second membre élémentaire pour ces 2 fonctions et ce, pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$. On utilisera Maple pour calculer les intégrales.

Résolution

1. En utilisant les résultats précédents, écrire un programme sous Maple ou Matlab pour calculer u_h avec *un seul élément* et m variant de 1 à 5.
2. Pour le cas (i), on montre que la solution analytique du problème vaut $u(r) = r^6 - r^2 + \frac{2}{9}$.
3. Trouver la valeur analytique pour la déformation au centre de la membrane dans le cas (ii).
4. Étudier l'évolution de l'erreur en fonction de m pour ces 2 cas.
5. Tracer l'erreur relative au centre (en $r = 0$) en fonction du degré du polynôme m .
6. Enfin, écrire un compte rendu contenant un seul chapitre avec
 - Section 1 - Introduction
Ici, il faut introduire le problème physique (avec quelques applications réaliste, si possible), l'objectif du TP, et la théorie (les solutions analytiques, la formulation faible, etc.)
 - Section 2 - Approximation par Éléments Finis
Ici, faire des sous-sections (à utiliser le code *subsection* pour cela) qui concerne chaque $m = 1, 2, 3, \dots$ et donner les calculs/étapes qui vous amènent aux matrices A & B dans chaque cas (i) et (ii).

- Section 3 - Résultats
Ici, afficher vos résultats/graphiques, etc. Il ne faut jamais laisser un graphique sans titres, sans explications/petites-conclusions. Aussi, comparer les erreurs relatives pour divers m et commenter pour chaque charge considérée.
 - Section 4 - Conclusions
Ici, il faut (re)dire tout ce que vous avez fait, obtenu et conclu dans ce TP mais très brièvement et dans des “grandes” lignes. Il faut les lister point par point. Commencer par réciter l’objectif mais en précisant point-par-point ce que vous avez effectué/calculé ; en suite, il faut reprendre les travaux effectués (seuls les plus importants) dans les sections précédents et faire une synthèse. Et finalement, proposer un perspectif ($m > 5$? ou plus qu’un éléments ?)
7. Généralisation dans le cas d’un nombre quelconque d’éléments (*optionnel*).