

**COMPTE RENDU TP1 VIBRATION :**

**INTRODUCTION AUX VIBRATIONS  
DES STRUCTURES**

**GROUPE 2F :**

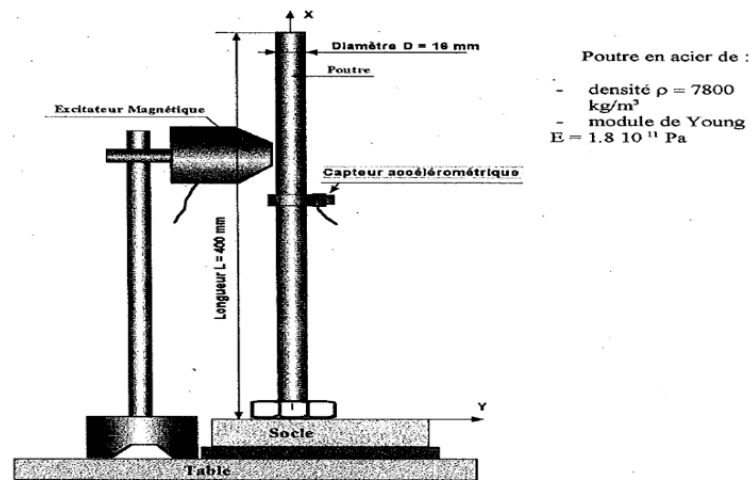
JALLALI MOHAMED P0907035  
DE LAURIERE MALVIN P1411717  
SAID ABDALLAH MOUSTOIFA P1109381

## Introduction :

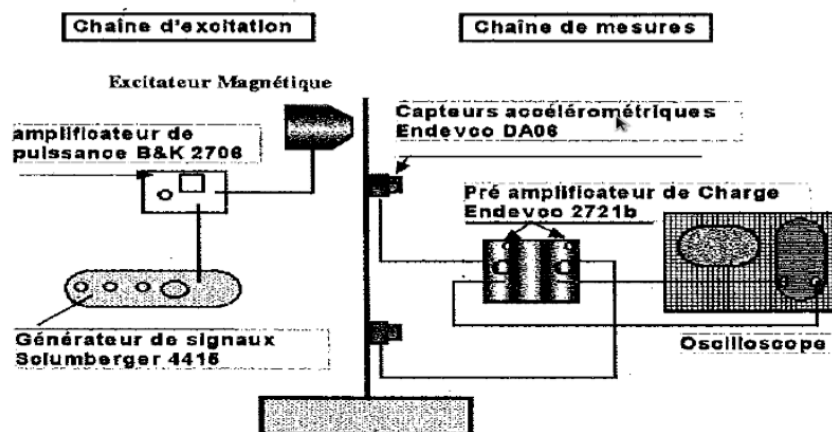
Le but de notre TP est de déterminer les trois premières modes de vibration d'une poutre mince et droite en flexion pur, en faisant l'étude et l'analyse du comportement vibratoire de notre structure dans le domaine des basses fréquences.

## 1. Dispositif expérimentale :

Le système que nous étudions est une poutre mince à section droite circulaire, de diamètre 16mm en acier de module de Young de  $1,8 \cdot 10^{11}$  Pa. Elle est encastrée d'un coté dans un socle massif en acier, et l'autre coté est libre.



Pour réaliser nos mesures, nous disposons d'une chaîne d'excitation qui est constituée d'un amplificateur de puissance, d'un générateur de signaux et d'un excitateur magnétique qui fait vibrer la structure en régime harmonique d'amplitudes et de fréquences réglables ; mais également d'une chaîne de mesure qui est composée de deux accéléromètres et d'un oscilloscope qui permet de mesurer la tension (l'amplitude d'oscillation) ainsi que la fréquence d'oscillation.

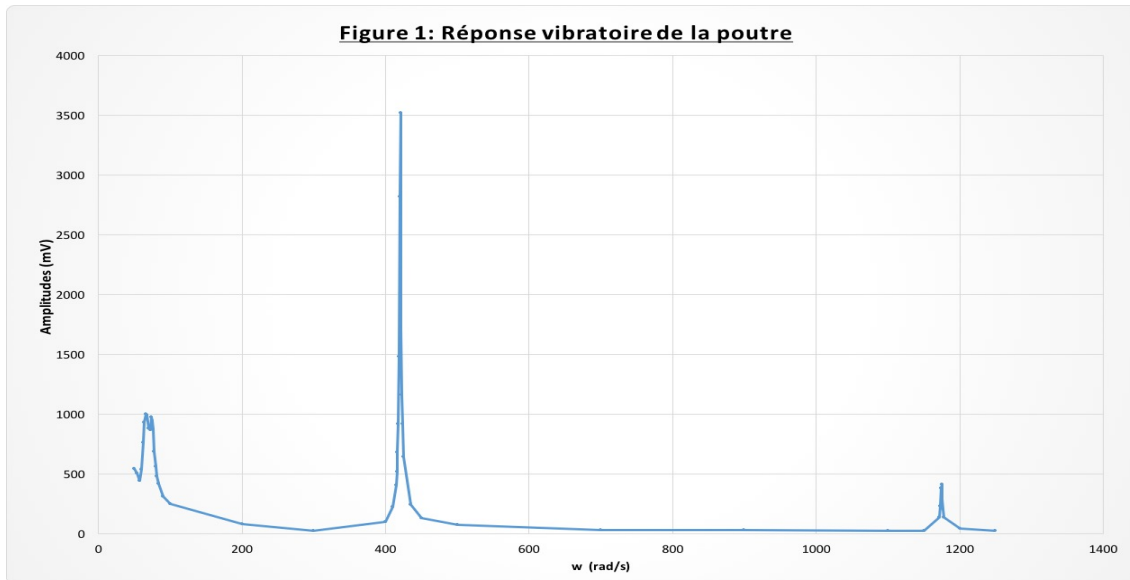


## 2. Pulsation modales : Mode 1, 2 et 3 :

Afin de trouver les trois premiers modes de résonances de la poutre, on a effectué un scan de fréquences entre 50 Hz et 1250 Hz. Les amplitudes mesurées par l'accéléromètre sont moyennées à l'aide d'un oscilloscope.

Les valeurs prélevées : (voir tableau 1 dans l'annexe).

L'amplitude en fonction de la fréquence.



On identifie 3 pics qui correspondent aux 3 premiers modes de résonance de la poutre ainsi que des zones lisses qui correspondent à des zones de non résonances.

À partir du graphe, on peut dédire que :

$$w_1 \approx 66 \text{ Hz}; w_2 \approx 421 \text{ Hz}; w_3 \approx 1175 \text{ Hz}$$

En théorie, l'amplitude de la première résonance est supérieure à celle qui la suit.

$$\text{Amplitude de } M_i > \text{Amplitude de } M_{i+1}$$

Mais cela ne correspond pas à ce que on a tracé. La solution pour avoir une courbe correcte serait de refaire la même étude expérimentale sur un support plus rigide (support fixer à une table équipée d'amortisseur de vibration ou directement fixer au sol).

On peut aussi retrouver les amortissements modaux  $\xi_1$ ;  $\xi_2$  et  $\xi_3$ , en utilisant la méthode à -3 dB.

Le principe de la méthode est dans L'annexe :

On retrouve donc :

$$\xi_1 \approx 4,39 \cdot 10^{-2}; \quad \xi_2 \approx 1,6 \cdot 10^{-2}; \quad \xi_3 \approx 2,44 \cdot 10^{-3}$$

On trouve  $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3$ , mais le facteur de perte n'est pas respecter cela est peut être du aux valeurs qui sont utilisé dans le calcul qui ne vérifient pas la condition de  $X/\sqrt{2}$  avec X est l'amplitude du pic max.

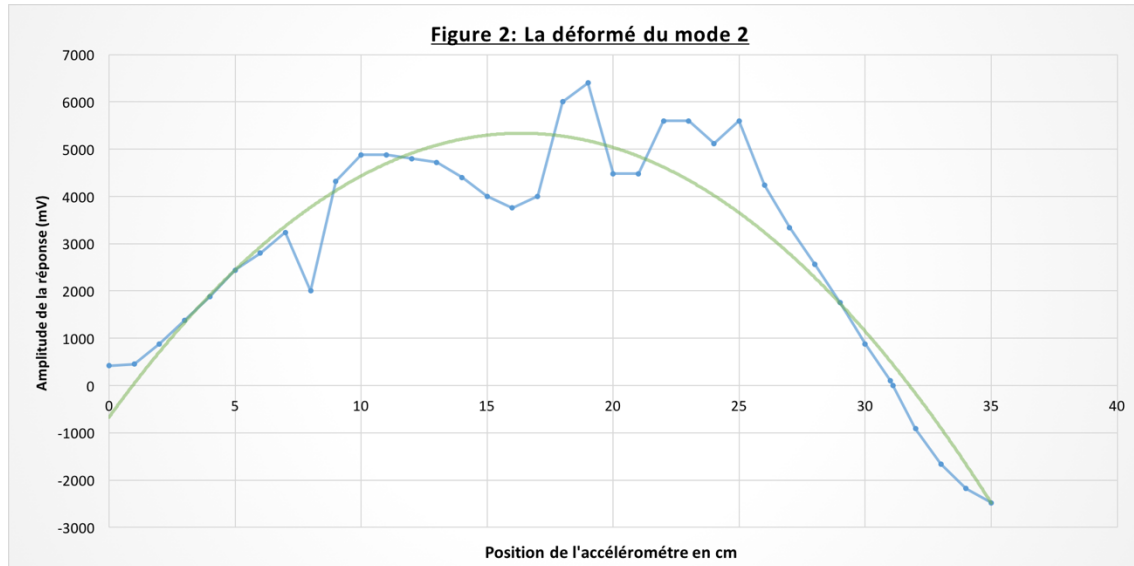
On peut conclure que cette méthode ne montre pas le vrai comportement de la poutre donc elle n'est pas utilisable dans notre cas.

### 3. Modélisation des déformées du mode 2 et du mode 3 :

Pour étudier la déformée de la poutre, on a ajouté un deuxième accéléromètre, qui sera mobile permettant ainsi de balayer toute la longueur de la poutre cm par cm. A chaque nouvelle position de l'accéléromètre, on prélève l'amplitude affichée par l'oscilloscope et la position de l'accéléromètre mobile afin de tracer les déformées.

Les valeurs prélevées : (voir tableau 2 et 3 dans l'annexe).

#### La déformée du mode 2 :

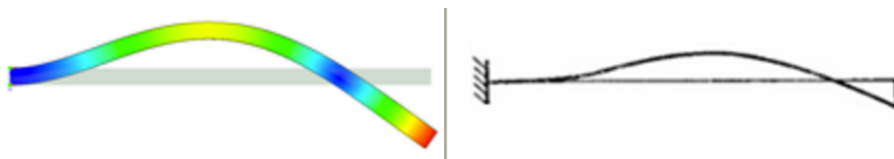


Sur la figure 2, on a tracé l'amplitude de la résonance en fonction de la position de l'accéléromètre 2. On remarque que les deux courbes ne commencent pas à l'origine 0. La courbe verte constitue une image lisse de la courbe bleue. La courbe bleue est le résultat des valeurs prélevées sur l'oscilloscope.

On peut déduire que quand l'accéléromètre mobile est à  $x = 31 \text{ cm}$ , l'amplitude est nulle donc on est sur un nœud de vibration. À partir de cette position ( $x = 31 \text{ cm}$ ), l'amplitude mesurée de l'accéléromètre 2 change de signe.

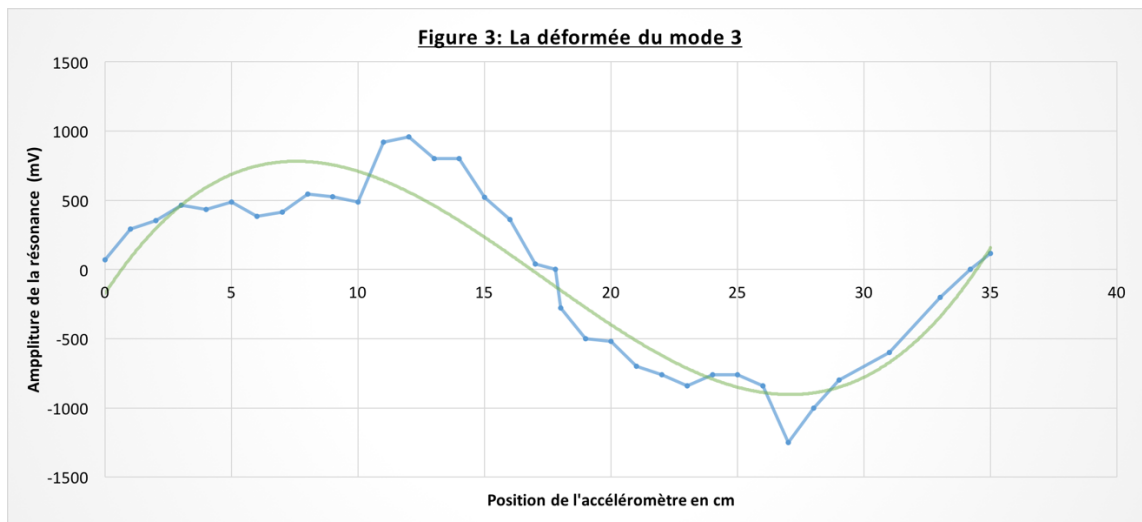
Au niveau de l'encastrement, on remarque que la rotation n'est pas immédiate d'où la concordance avec la théorie. À  $x=0$  la rotation est nulle.

Pour valider nos résultats, on a comparé nos résultats expérimentaux avec des résultats d'une autre manipulation qui avait comme objectif de tracer la déformée d'une poutre encastree libre. La figure suivante représente le mode 1 : la déformée obtenue numériquement en utilisant la méthode des éléments finis et la déformée obtenue analytiquement.



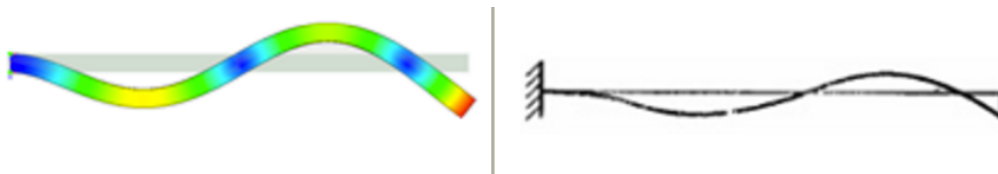
Les figures se ressemblent donc on peut conclure que la méthode de scan nous a permis de tracer la déformée de la poutre et d'identifier la position du nœud de vibration.

### La déformée du mode 3 :



Pour le mode 3, la déformée a changé de signe plusieurs fois. On trouve un changement de signe à  $x = 18 \text{ cm}$  et à  $x = 34 \text{ cm}$ .

La comparaison avec une manipulation numérique et analytique nous permet de valider nos résultats. On a bien deux nœuds et deux ventres ce qui correspond aux caractéristiques du mode 3 de résonances.



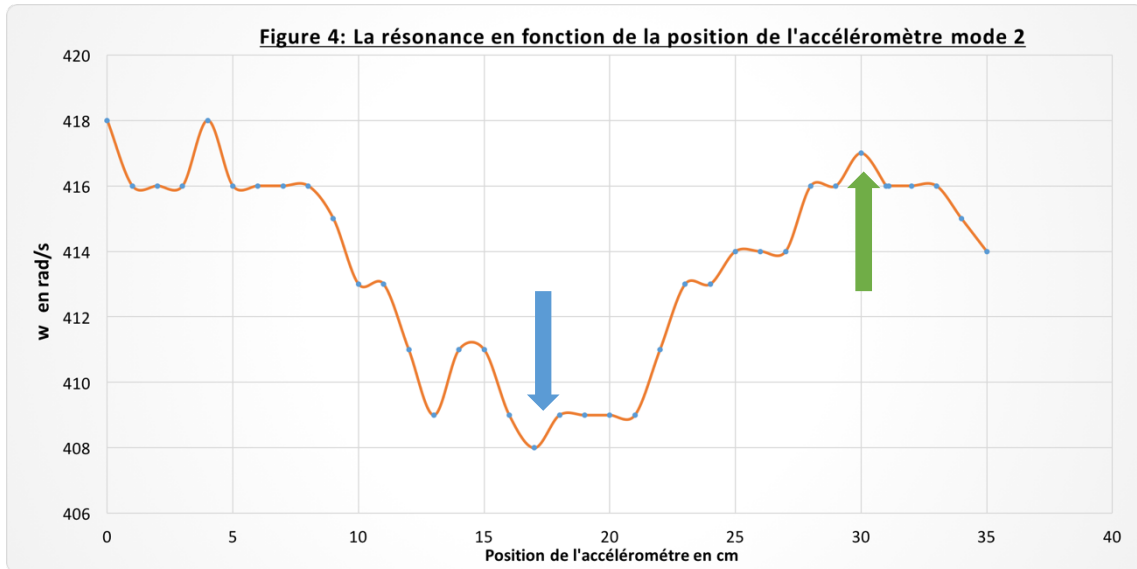
Les graphes obtenus se ressemblent, dans la forme ainsi que dans le nombre de nœuds et de ventre mais pas au niveau de l'encastrement, vu qu'analytiquement, la rotation est nulle à  $x=0$ . On peut supposer que cela est dû aux pertes au niveau de la table vue que le socle ne constitue une base assez rigide pour les fréquences de résonance qu'on utilise.

#### 4. L'influence de la masse additionnelle sur les pulsation $w_1$ et $w_2$ :

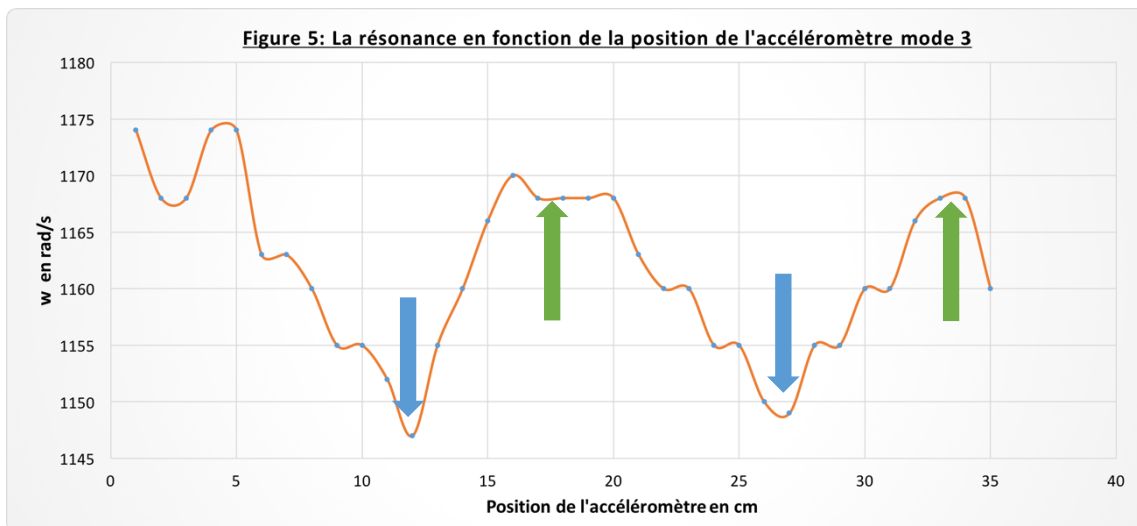
Le second accéléromètre a une masse ( $m_2 = 20g$ ), cette masse a modifié l'énergie cinétique du système donc elle a modifié la pulsation. Pour ce la on a cherché la nouvelle pulsation du mode 2 et du mode 3 exacte (le maximum local avec la prise en compte de  $m_2$ ) en scannant la poutre. Les valeurs prélevées : (voir tableau 2 et 3 dans l'annexe).



Localisation des nœuds et des ventres de vibration :

Pour le mode 2 :



Pour le mode 3 :



Avec :  : Correspond aux ventres  : Correspond aux nœuds

La masse du système en utilisant les données du TP :  $m_{totale} = m_{poutre} + m_{acc.1} \approx 647g$

La masse ajoutée à la poutre n'est que :  $m_{acc.2} = 20g$  mais portant, elle a modifiée considérablement l'énergie cinétique du système d'où le changement de la valeur des résonances comparé aux valeurs prélevés lors de la première manipulation.

Au début de chaque courbe, on remarque une certaine stabilité du graphe dû à l'encastrement de la poutre sur son socle.

## 5. Partie mécanique :

### 5.1 : Estimation de la pulsation de résonance du mode 1 :

Par la méthode de la résistance des matériaux :

On utilise le principe fondamental de la statique pour étudier le comportement de la poutre à un état d'équilibre.

Pour simplifier les équations, on a utilisé les hypothèses données dans l'énoncé du TP.

Les conditions aux limites :

En  $x=0$ , en un encastrement donc :  $v(x=0) = 0$  et  $\frac{\partial v(x=0)}{\partial x} = 0$

L'équation de la déformée :  $v(x) = \frac{F \cdot (3 \cdot L \cdot x^2 - x^3)}{6 \cdot E \cdot I_z}$

On déduit la raideur de la poutre en ( $x=L$ ),  $v(L) = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}$

$$k(L) = \frac{3 \cdot E \cdot I_z}{L^3}$$

On remarque qu'on a un grand encadrement de la résonance. Cela est dû à la d'une masse qui peut être négligée. Dans la suite, on utilisera la méthode de Rayleigh qui nous donnera une meilleure approximation de la pulsation.

Par la méthode de Rayleigh :

Soit la formule de Rayleigh pour la résonance d'une poutre mince :

$$R(\omega) = V_{max} / T_{max}$$

L'énergie potentielle maximale  $V_{max} = 1/2 \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$

L'énergie cinétique maximale  $T_{max} = 1/2 \int_0^L \rho S \dot{v}^2 dx$

$$w_{acc}^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I_z \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^L \rho \cdot S \cdot (v(x))^2 dx + m_{acc} \cdot (v(x=L))^2 \right)}$$

Le choix du polynôme  $v(x)$  doit satisfaire les conditions aux limites :

$$v(x) = a_0 + a_1 \cdot \frac{x}{L} + a_2 \cdot \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

avec  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 0$

$$w_{acc}^2 = \frac{\frac{2 \cdot E \cdot I_z}{L^3} \cdot a_2^2}{\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{5} \cdot \rho \cdot S \cdot L + m_{acc} \right) \cdot a_2^2} = \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{\left( \frac{1}{5} \cdot \rho \cdot S \cdot L + m_{acc} \right) \cdot L^3}$$

$$w_{acc} \approx 499 \text{ rad. s}^{-1}$$

Le résultat trouvé est beaucoup plus significatif. Donc la méthode énergétique permet une meilleure approximation de la fréquence de résonance que la méthode Newtonienne.

## 5.2 : Estimation de l'influence de l'accéléromètre 2 sur la résonance :

Soit la fréquence de résonance :

$$w_1 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}; \text{ avec } m_{eq} = m_{poutre} + m_{acc2}$$

Soit la formule de Rayleigh :

$$w_{acc}^2 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L E.I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \left( \int_0^L \rho.S.(v(x))^2 dx + M_{acc}.(v(x=L))^2 \right)}$$

Afin de simplifier le calcul, on suppose que la masse de la poutre =  $m_{poutre} + m_{acc1}$

Donc la première résonance  $w_1$  :

$$w_1 = \sqrt{\frac{3.E.I_z}{(\rho.S.L + m_{acc}).L^3}} = 205 \text{ rad.s}^{-1}$$

On a une résonance plus petite que la résonance propre  $w_1$  calculer précédemment. On peut dire que la masse ajoutée a diminué la résonance du système donc la masse a agi comme un amortisseur de vibration.

## 6.Conclusion :

Le Tp nous a permis d'étudier le comportement d'une poutre encastree libre. Dans ces trois premiers modes de vibration. On a pu tracer la déformée à partir des valeurs prélevées expérimentalement. Ainsi on a pu valider les tracers obtenus analytiquement en Td, puisque la poutre encastree est un problème très souvent fréquenté en cours et en TD.

On a pu aussi mesurer l'impact de la masse de l'accéléromètre mobile ajoutée à la poutre sur l'énergie cinétique. La masse ajoutée a une poutre influe sur sa fréquence de résonance et agit comme un amortisseur de vibration. Cela a été vérifié expérimentalement et calculé analytiquement pour la première fréquence de résonance.

La comparaison avec une autre manipulation utilisant la méthode des éléments finis, nous a donné l'idée de modéliser la poutre en 3D, choisir un maillage adéquat et effectuer une simulation numérique pour déterminer les caractéristiques des modes vibratoires plus avancés.



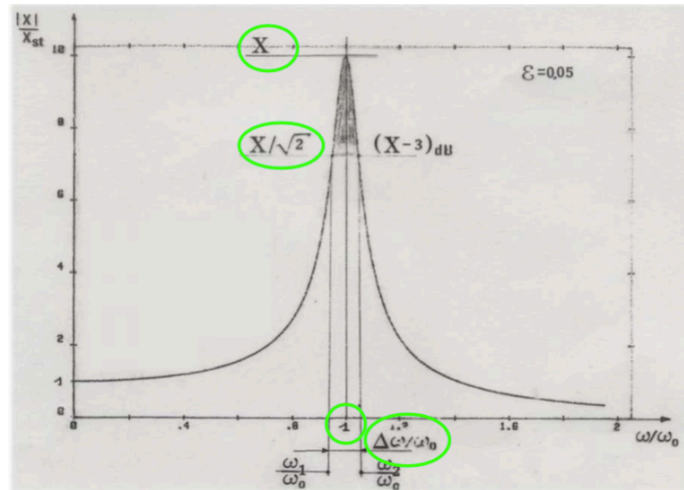
## Annexe :

### Méthode d'Oberst (-3dB) :

Principe : La méthode de la demi-puissance ou du '-3dB' est une méthode simple de mesure de l'amortissement. Il faut pour cela fixer deux points correspondant à une diminution de l'amplitude du pic d'un facteur  $\sqrt{2}$  correspond à une réduction de  $-3\text{dB}$ . L'amortissement se calcule alors avec:

$$\xi = \frac{w_2 - w_1}{2 \cdot w_n}$$

L'amplitude du pics (X) et l'amplitude des valeurs de  $w_1$  et  $w_2$  doivent respecter un facteur de  $X/\sqrt{2}$ .



Le facteur d'amortissement  $\eta$  « sans unité » traduit la capacité d'un matériau à diminuer les amplitudes de vibration. Il mesure aussi son aptitude à dissiper l'énergie mécanique en chaleur.

NB : La méthode et le schéma sont élaborées avec l'aide précieuse du Groupe G2 + le cours.

### Comparaison des résultats :

Les résultats obtenus en été comparer avec une étude analytique et numérique effectuer sur une poutre en utilisant la méthode des éléments finis.

[http://www.autofemsoft.com/examples/fr/determining\\_natural\\_frequenceie.html](http://www.autofemsoft.com/examples/fr/determining_natural_frequenceie.html)

### Étude des 3 premiers modes

Fréquence (Hz)	Amplitude (mV)
50	540
54	504
58	440
60	536
62	760
64	928
66	1000
68	992
70	880
72	870
74	976

75	944
76	872
78	688
80	560
82	480
84	416
90	312
100	248
200	80
300	27
400	102
410	226
415	408
416	520
417	680
418	920
419	1480
420	2820
421	3520
422	1720
423	1160
424	920
425	640
435	244
450	132
500	72
700	32
900	29
1100	24
1150	22
1172	134
1173	230
1174	380
1175	412
1176	288
1177	208
1178	136
1200	40
1250	22

**Tableau 2 :****Mode 2  $\approx$  416 Hz**

Position (cm)	Fréquence CH1 (Hz)	Amplitude CH2 (mV)
0	418	418
1	416	452
2	416	880
3	416	1380
4	418	1880
5	416	2440
6	416	2800
7	416	3240
8	416	2000
9	415	4320
10	413	4880
11	413	4880
12	411	4800
13	409	4720
14	411	4400
15	411	4000
16	409	3760
17	408	4000
18	409	6000
19	409	6400
20	409	4480
21	409	4480
22	411	5600
23	413	5600
24	413	5120
25	414	5600
26	414	4240
27	414	3340
28	416	2560
29	416	1760
30	417	880
31	416	100
31,1	416	0
32	416	-912
33	416	-1660
34	415	-2180
35	414	-2480

**Tableau 3 :****Mode 3  $\approx$  1175 Hz**

Position (cm)	Fréquence CH1 (Hz)	Amplitude CH2 (mV)
0	1174	72
1	1168	292
2	1168	352
3	1174	464
4	1174	432
5	1163	488
6	1163	384
7	1160	416
8	1155	544
9	1155	525
10	1152	488
11	1147	920
12	1155	960
13	1160	800
14	1166	800
15	1170	520
16	1168	360
17	1168	40
17,8	1168	0
18	1168	-280
19	1163	-500
20	1160	-520
21	1160	-700
22	1155	-760
23	1155	-840
24	1150	-760
25	1149	-760
26	1155	-840
27	1155	-1250
28	1160	-1000
29	1160	-800
31	1166	-600
33	1168	-200
34,2	1168	0
35	1160	116