

Département Mécanique, Université Claude Bernard Lyon I
Méthodes numériques pour les EDP en
Mécanique/
Numerical methods for PDEs in
Mechanical Engineering

Prof. Peter Spelt
peter.spelt@univ-lyon1.fr

Chapitre 1

Schémas différences finies en 2D

1. Introduction

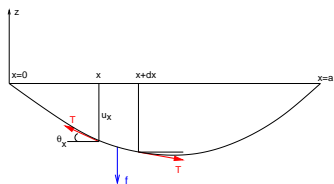
Dans ce chapitre, nous étendrons la démarche d'analyse, décrite au chapitre précédent, à la résolution de problèmes bidimensionnels en espace. Nous étudierons les problèmes classiques de type :

1. elliptique : déformation d'une membrane,
2. hyperbolique : oscillation d'une surface libre,
3. parabolique : dispersion d'un polluant.

2. Équation de Poisson

2.1. Problème physique

On considère une membrane carrée de côté a qui se déforme sous l'effet d'une charge surfacique $f(x, y)$. La membrane est sous tension et fixée sur les bords. On suppose qu'en chacun des points la tension T est

FIGURE 1.1: Équilibre statique d'une membrane dans le plan (x, z)

constante et tangente à la membrane (on néglige les forces élastiques dues à la déformation de la membrane). On note $u(x, y)$ la déformée. Les forces exercées sur un élément de membrane $dx dy$ sont :

1. des forces de tension exercées sur les cotés de l'élément. Pour le coté de longueur dy et d'abscisse x , cette force est perpendiculaire au coté dy et tangente à la surface $u(x, y)$. Elle est située dans le plan (x, z) et a pour composantes :

$$T dy \begin{bmatrix} -\cos \theta_x \\ 0 \\ \sin \theta_x \end{bmatrix}$$

en notant θ_x l'angle de la surface $u(x,y)$ avec l'horizontal. De même pour le coté d'abscisse y , la force de tension s'écrit :

$$Tdy \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \theta_y \\ \sin \theta_y \end{bmatrix}$$

2. des forces de chargement verticales :

$$f(x,y)dxdy$$

L'équilibre statique conduit donc aux équations suivantes :

$$Tdy(\cos \theta_{x+dx} - \cos \theta_x) = 0$$

$$Tdx(\cos \theta_{y+dy} - \cos \theta_y) = 0$$

$$Tdy(\sin \theta_x - \sin \theta_{x+dx}) + Tdx(\sin \theta_y - \sin \theta_{y+dy}) = f(x,y)dxdy$$

avec $\tan \theta_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\tan \theta_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. En supposant que les angles θ sont petits, i.e :

$$\cos \theta_x \approx 1, \sin \theta_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \cos \theta_y \approx 1, \sin \theta_y \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

On effectue des développements limités à l'ordre 1 dans les équations précédentes, qui conduisent à l'équation d'équilibre de la membrane :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (1.1)$$

auquel on ajoute les conditions aux limites :

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, a) = 0$$

En effectuant un changement de variables, on obtiens le problème modèle suivant, qui est une équation de Poisson :

$$\begin{aligned} -\Delta U &= F \quad \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ U(0, y) &= U(1, y) = U(x, 0) = U(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2.2. Étude de la solution analytique

Pour déterminer la solution générale de l'équation de Poisson (1.2), on décompose $U(x, y)$ en série de Fourier vérifiant les conditions aux limites :

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} U_{kp} \sin(k\pi x) \sin(p\pi y) \quad (1.3)$$

En remplaçant dans (1.2), on obtiens :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (k^2 + p^2) \pi^2 U_{kp} \sin(k\pi x) \sin(p\pi y) = F(x, y)$$

d'où les valeurs de U_{kp} , en multipliant cette relation par $\sin(k\pi x) \sin(p\pi x)$. En intégrant sur le domaine Ω et en utilisant l'orthogonalité des fonctions $\sin(k\pi x)$, il vient :

$$U_{kp} = \frac{4}{(k^2 + p^2) \pi^2} \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) \sin(k\pi x) \sin(p\pi y) dx dy \quad (1.4)$$

- **cas d'un chargement constant $F = -1$**

Dans le cas d'un chargement constant $F = -1$, la valeur du coefficient de Fourier U_{kp} se calcule simplement avec Maple et on trouve :

$$U_{kp} = \frac{-4}{(k^2 + p^2)\pi^4 kp} \left(1 - (-1)^k\right) \left(1 - (-1)^p\right)$$

Ce coefficient est non nul si et seulement si k et p sont tous les deux impaires. La solution exacte s'écrit donc :

$$U(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{lm} \sin((2l-1)\pi x) \sin((2m-1)\pi y)$$

$$\text{avec } U_{lm} = \frac{-16}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2)\pi^4(2l-1)(2m-1)}$$

L'allure de la solution est donnée sur la figure (1.2).

La valeur maximale U_{max} de la déformation se trouve au centre et a pour expression :

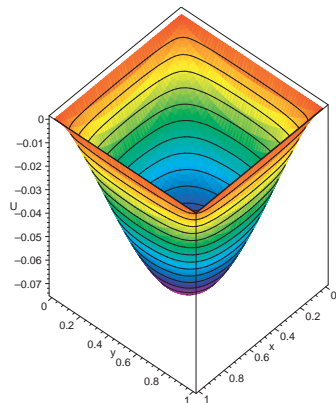


FIGURE 1.2: solution exacte de (1.2) pour $F = -1$

$$U_{max} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{l+1}(-1)^{m+1}}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2)\pi^4(2l-1)(2m-1)}$$

On peut calculer une valeur approchée très précise de cette série avec Maple, et on trouve (pour $m = l = 200$) :

$$U_{max} = -0.07367135123 \quad (1.5)$$

2.3. Schéma aux différences finies pour le laplacien

Sur un maillage de N_x points suivant x et N_y points suivant y (figure 1.3), la discrétisation par différences finies centrées de l'équation (1.2) s'écrit :

$$\frac{-U_{i+1,j} + 2U_{i,j} - U_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{-U_{i,j+1} + 2U_{i,j} - U_{i,j-1}}{dy^2} = F_{i,j} \quad (1.6)$$

$$\forall i = 2, N_x - 1 \quad \forall j = 2, N_y - 1$$

avec les conditions aux limites :

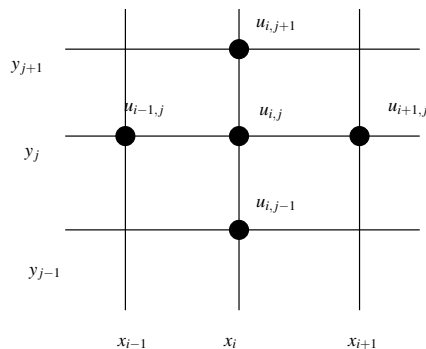


FIGURE 1.3: discrétisation différences finies du laplacien

$$U_{1,j} = U_{N_x,j} = 0 \quad \forall j = 1, N_y \quad \text{et} \quad U_{i,1} = U_{i,N_y} = 0 \quad \forall i = 1, N_x$$

Les pas de discrétisation en espace sont équidistants et vérifient $dx = \frac{1}{N_x-1}$ et $dy = \frac{1}{N_y-1}$.

Ce schéma conduit à un système matriciel de $N = N_x N_y$ inconnues $U_{i,j}$. Pour écrire ce système sous la forme matricielle $\mathcal{A}X = \mathcal{B}$, on doit

transformer la matrice des inconnues $U_{i,j}$ en un vecteur inconnu X_k . Pour cela on numérote les inconnues par lignes, i.e. on effectue la transformation d'indice (i, j) vers le mono-indice $k = i + (j - 1)N_x$. Avec ce changement d'indice, l'équation aux différences (1.6) s'écrit :

$$cU_{k-N_x-1} + bU_{k-1} + aU_k + bU_{k+1} + cU_{k+N_x+1} = F_k$$

pour tous les noeuds internes $k = i + (j - 1)N_x$ avec $1 < i < N_x$ et $1 < j < N_y$ en notant $a = \frac{2}{dx^2} + \frac{2}{dy^2}$, $b = \frac{-1}{dx^2}$ et $c = \frac{-1}{dy^2}$.

Les conditions aux limites s'écrivent $U_k = 0$ pour les noeuds frontières $k = 1 + (j - 1)N_x$, $k = N_x + (j - 1)N_x$ avec $1 < j < N_y$ et $k = i$, $k = i + (N_y - 1)N_x$ avec $1 < i < N_x$.

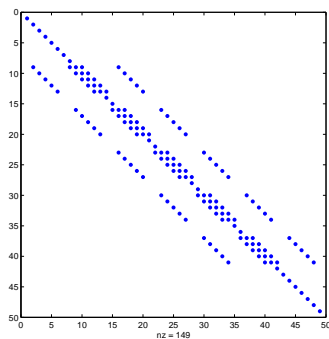
La matrice \mathcal{A} est une matrice penta-diagonale dont la forme est donnée sur la figure (1.4a). On vérifie que la matrice possède bien au maximum 5 coefficients non nuls répartis sur la diagonale de coefficients a , les 2 co-diagonales adjacentes de coefficients b et les 2 co-diagonales distantes de $N_x - 1$ de la diagonale de coefficients c . On constate aussi que la matrice \mathcal{A} est non symétrique, à cause de la façon d'appliquer les conditions aux limites. En effet pour un noeud k sur la frontière, on

applique la condition aux limites $X_k = 0$ dans la ligne k de la matrice en annulant la ligne et en mettant 1 sur la diagonale. On ne tiens pas compte de cette condition aux limites dans les équations où intervient la valeur de X_k , i.e. dans les lignes de \mathcal{A} ayant un coefficient non nul dans la colonne k . Pour conserver la symétrie de la matrice, qui traduit la symétrie du problème physique, il faut aussi annuler les coefficients de la colonne k (figure 1.4b). Dans le cas $X_k = X_0$, il faut en outre retrancher la colonne $X_0 \mathcal{A}_{k,j}$ du second membre \mathcal{B} .

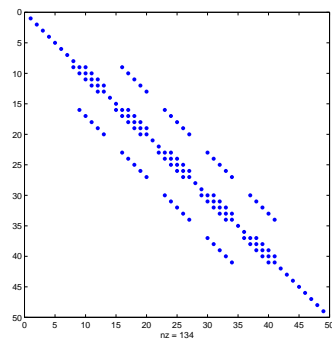
On note aussi que le nombre de coefficients non nuls de la matrice \mathcal{A} est de l'ordre de $5N_x N_y \approx 5N^2$, ce qui est beaucoup plus petit que le nombre de coefficients $N_x^2 N_y^2 \approx N^4$ de la matrice \mathcal{A} . On tiendra compte de ces propriétés lors de la résolution du système matriciel.

- **Précision et erreur de troncature**

On utilise une discrétisation centrée et d'ordre 2 de la dérivée seconde en x et en y , donc l'erreur de troncature du schéma est d'ordre $O(dx^2, dy^2)$. Elle s'écrit :



(a) matrice initiale



(b) matrice symétrisée

FIGURE 1.4: matrice du laplacien pour $N_x = 7$ et $N_y = 7$

$$ErrT = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} dx^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} dy^2 + O(dx^4, dy^4)$$

La précision du schéma (1.6) est donc d'ordre 2 en espace, i.e. en $O(dx^2, dy^2)$.

2.4. Expérimentation numérique avec Matlab

La fonction Matlab **laplace2d** (1.1) calcule la matrice \mathcal{A} et le second membre \mathcal{B} sur un maillage différences finis de $N_x N_y$ points pour une fonction F définie aux noeuds (i, j) du maillage et des conditions aux limites homogènes. Compte tenu des remarques sur la structure de la matrice \mathcal{A} , on utilise une structure de donnée de matrice creuse (*sparse matrix en anglais*) qui permet de ne stocker que les éléments non nuls. Pour cela on stocke les coefficients non nuls de \mathcal{A} dans un vecteur **Ac**, ainsi que leurs indices **(i,j)** dans deux autres vecteurs **I** et **J**. Pour la matrice \mathcal{A} ci dessous :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

on utilise les 3 tableaux suivants :

$$\begin{aligned} Ac &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ I &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ J &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour utiliser cette structure de données avec Matlab, on initialise \mathcal{A} avec la fonction Matlab **spalloc** (ligne 18), qui permet de créer une matrice creuse de $5N$ éléments, au lieu d'utiliser la fonction **zeros(N,N)** qui crée une matrice carrée de N^2 éléments. Pour $N_x = N_y = 100$, on a $N = 10^4$ et le stockage de A sous forme de matrice creuse nécessite alors 640 kilo-octets de mémoire au lieu des 100 méga-octets nécessaire au stockage

de tous les coefficients de \mathcal{A} , ce qui rend la résolution du problème possible sur un ordinateur de bureau. On remarque aussi que la taille nécessaire au stockage de \mathcal{A} est supérieur à $5N$ réels (soit 400 kilo-octets) puisque pour chaque valeur non nulle \mathcal{A}_{pq} on stocke aussi les indices p et q correspondants.

Pour le second membre \mathcal{B} on transforme la matrice F des valeurs aux noeuds du maillage en un vecteur de colonne de dimension N avec la fonction Matlab **reshape**. La boucle d'assemblage de \mathcal{A} correspond aux lignes 20 à 25, et se fait ligne par ligne en utilisant la structure matricielle de Matlab (ligne 23). Les conditions aux limites sont imposées sur les cotés $x = 0$ et $x = 1$ (lignes 29 à 32) et $y = 0$ et $y = 1$ (lignes 34 à 37), en annulant la ligne et la colonne k de \mathcal{A} ainsi que le second membre \mathcal{B}_k puis en imposant $\mathcal{A}_{k,k} = 1$.

Le script Matlab (1.2) résout numériquement le problème (1.2) dans le cas d'une fonction $F = -1$ (ligne 8). On utilise la fonction **Laplace2d** précédente pour calculer la matrice \mathcal{A} et le second membre \mathcal{B} du problème. On résout le système (ligne 11) avec l'opérateur standard `\` de Matlab, qui pour des matrices creuses utilisent un algorithme de Gauss par bande. C'est la méthode la plus efficace sous Matlab, même si elle


```
1 function [A,B]=laplace2d(F,nx,ny)
2 % entree:
3 % matrice F du second membre Fij valeur de F au noeud (i,j)
4 % nx,ny nombre de points en x et en y
5 % sortie:
6 % matrice A et second membre B
7 % en utilisant un stockage creux
8 % pble  $-\text{lap}(U)=f$  avec des C.L. homogene
9 dx=1/(nx-1); dy=1/(ny-1);
10 % coefficient du schéma pour les nds
11 % (i,j-1) (i-1,j) (i,j) (i+1,j) (i,j+1)
12 coeff=[-1/dy^2,-1/dx^2,2/dx^2+2/dy^2,-1/dx^2,-1/dy^2];
13 % decalage / au noeud (i,j) dans la numérotation
14 num = [ -nx, -1, 0, 1, nx];
15 % assemblage de la matrice pour un stockage par ligne
16 % i.e le noeud (i,j) a pour adresse k=(j-1)*nx+i
17 N=nx*ny; % dimension
18 A=spalloc(N,N,5*N); % matrice creuse de 5 elts maxi / ligne
19 B=reshape(F,N,1);
20 for i=2:nx-1
21     for j=2:ny-1
22         k=(j-1)*nx+i;
23         A(k,k+num)=coeff;
24     end
25 end
26 % conditions aux limites
```

nécessite un stockage temporaire important, de l'ordre de $2N_x^2N_y$ puisque la largeur de bande vaut N_x . En utilisant la structure particulière de la matrice \mathcal{A} (tri-diagonale par blocs), on pourrait utiliser un algorithme très efficace, qui est l'extension de l'algorithme de Thomas. Son principe est décrit dans l'annexe ?? page ??, mais il n'est pas implémenté sous Matlab.

La fin du script permet la visualisation en 3D de la solution calculée.

On a tracé le résultat obtenu pour $N_x = N_y = 21$ sur la figure (1.5). En comparant avec la solution exacte (figure 1.2), on constate une bonne concordance. L'erreur relative sur la valeur maximale de la déformée est inférieure à 3% :

$$Err = \left| \frac{U_{max} - U_{max}^h}{U_{max}} \right| \approx 0.027$$

où on a noté U_{max} la valeur exacte (1.5) et U_{max}^h est la valeur approchée.

Pour terminer cette étude, nous avons effectué une étude de précision en calculant cette erreur relative pour différents maillages (avec un

```
1 % resolution du laplacien
2 clear
3 % dimension
4 nx=21; ny=21;
5 dx=1/(nx-1); dy=1/(ny-1);
6 X=[0:dx:1]; Y=[0:dy:1];
7 % assemblage matrice et 2nd membre
8 F=-ones(nx,ny);
9 [A,B]=laplace2d(F,nx,ny);
10 % resolution
11 U=A\B;
12 % transformation de U en matrice pour visualisation
13 U1=reshape(U,nx,ny);
14 % visualisation
15 surf(X,Y,U1); title ( 'deformee'); shading interp;
```

Programme 1.2: Résolution du problème (1.2)

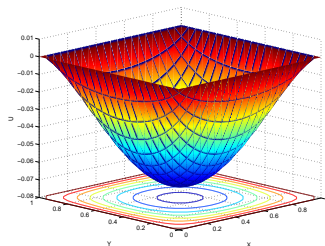


FIGURE 1.5: solution numérique ($N_x = N_y = 11$) du problème (1.2)

nombre de points identique suivant x et y). Chaque maillage est caractérisée par un pas de discrétisation $h = dx = dy$. Sur la figure (1.6), on a tracé l'évolution de l'erreur relative Err en fonction de h , et on trouve sur une échelle logarithmique une droite de pente 2. Cela montre que l'erreur relative est en $O(h^2)$, ce qui confirme le calcul de l'erreur de troncature en $O(dx^2, dy^2)$.

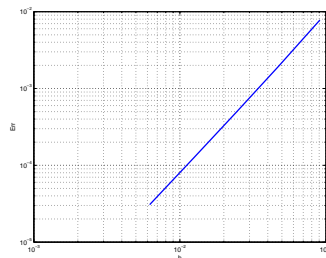


FIGURE 1.6: Erreur relative en fonction du pas h du maillage

3. Équation des ondes

3.1. Problème physique : oscillations d'une surface libre

On s'intéresse aux oscillations de la surface d'un liquide contenu dans un réservoir. Au repos le réservoir contient un liquide sur une hauteur h_0 . La surface du liquide est plane, horizontale et notée Ω . La répartition de pression dans le liquide est hydrostatique :

$$p_s = p_0 + \rho_0 g (h_0 - z)$$

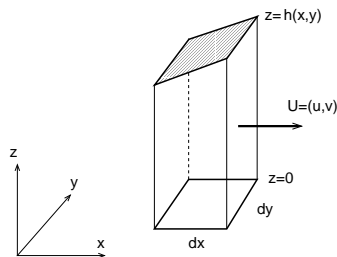


FIGURE 1.7: oscillation de la surface libre

On perturbe la surface $h(x, y, t)$ à l'instant initiale. Celle-ci se met alors à osciller de part et d'autre de sa position initiale h_0 . On néglige les effets de viscosité, et on applique les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à un cylindre élémentaire de base $dx dy$ et de hauteur $h(x, y, t)$ (figure 1.7).

En notant $\vec{U} = [u(x, y, t), v(x, y, t)]$ la vitesse moyenne (suivant z) et ρ la densité, le bilan de masse pour le cylindre de volume $h dx dy$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} = 0$$

De même le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho h u}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho h v}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

On considère que le fluide est un liquide incompressible ($\rho = cste$), et que la perturbation de la surface libre $\xi = h - h_0$ est faible. On peut alors considérer que la répartition de pression reste hydrostatique :

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g (h - z)$$

En notant que $h = h_0 + \xi$, $p = p_s + \rho g \xi$ et en linéarisant les équations précédentes ($\xi \ll h_0$, $\rho g \xi \ll p_s$, $U \ll 1$), il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

En dérivant la première équation par rapport à t , la seconde par rapport à x et la troisième par rapport à y , on obtiens l'équation de propagation de la perturbation ξ de la surface libre en éliminant u et v :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gh_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{1.8}$$

C'est une équation des ondes qui traduit la propagation d'ondes de surface avec une célérité $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

A cette équation, il faut ajouter une condition aux limites sur la frontière Γ du réservoir. La condition physique est la condition de vitesse

normale nulle $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ . Pour obtenir une condition sur ξ , on utilise la combinaison suivant \vec{n} des 2 dernières équations (1.7) :

$$\frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0$$

d'où l'on déduit la condition aux limites sur ξ :

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0 \quad (1.9)$$

Les conditions initiales sont données par la déformation initiale $w(x, y)$ et la vitesse de cette déformation. En supposant la vitesse de déformation initiale nulle, on a donc :

$$\xi(x, y, 0) = w(x, y) , \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (1.10)$$

Le problème modèle associé s'écrit :
Trouvez $u(x, y, t)$ tel que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$u(t=0) = w, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0$$

Dans le cas d'un domaine Ω circulaire de rayon $r = 1$, on peut avantageusement passer en coordonnées polaires (r, θ) . Le problème modèle s'écrit :

Trouver $u(r, \theta, t)$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \text{dans } [0, 1] * [0, 2\pi] \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r=1$$

$$u(t=0) = w, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0$$

3.2. Étude de solutions analytiques

Dans la cas cylindrique (1.12), on a cherché la solution analytique à l'aide du programme Maple (1.3).

On a cherché une solution élémentaire à variables séparées sous la forme d'une onde se propageant à une célérité λ_{c0} et périodique en θ (ligne 7) :

$$u(r, \theta, t) = A(r) e^{Ik\theta} e^{I\lambda_{c0}t} \quad k \in \mathbb{Z}$$

En reportant dans l'équation, on obtiens une équation de Bessel (ligne 9) pour $A(r)$:

$$r^2 \frac{d^2 A}{dr^2} + r \frac{dA}{dr} + (r^2 \lambda^2 - k^2) A = 0$$

dont Maple nous fournit la solution générale avec la fonction **dsolve** (ligne 11). Cette solution générale est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et deuxième espèce : *BesselJ* et *BesselY*. De ces deux familles de fonctions de Bessel, on ne retient que la famille *BesselJ*, qui est la seule a avoir une valeur finie (égale à 1) en $r = 0$. La

```

1 > restart ;with (plots) :
2 # Equation des ondes en polaire
3 > diff (u(r,theta,t),t$2)=c0^2/r*diff (r*diff (u(r,theta,t),r),r)
4     +c0^2/r^2*diff (u(r,theta,t),theta$2);
5 > eq:=%:
6 # Solutions en variables séparées de type onde periodique en theta
7 > u(r,theta,t)=A(r)*exp(l*k*theta)*exp(l*lambda*c0*t);
8 > subs(%,eq):=simplify(%/exp(l*k*theta)/exp(l*lambda*c0*t)/c0^2);
9 eq1:=%:
10 > rhs(eq1)-lhs(eq1);eq2:=%:
11 > dsolve(eq2,A(r));
12 # Modes propres
13 > Ue:=(r,theta,t)->BesselJ(k,lambda*r)*exp(l*k*theta)*exp(l*lambda*c0*t);
14 > subs(r=1,diff (Ue(r,theta,t),r));
15 # Pour chaque valeur de k, on calcule les racines lambda
16 > -BesselJ(k+1,lambda)+k*BesselJ(k,lambda)/lambda=0; eq3:=lhs(%):
17 > plot ({subs(k=0,eq3),subs(k=1,eq3),subs(k=2,eq3)},lambda=0..20);
18 > Um:=(k,p)->BesselJ(k,lambda[k,p]*r)*exp(l*k*theta)*exp(l*lambda[k,p]*c0*
    t);
19 > Uex=sum(sum(C[k,p]*Um(k,p),p=0..M),k=0..N);
20 # Conditions initiales particulieres (avec c0=1)
21 # 1/ mode radial
22 > lambda1:=fsolve(subs(k=0,eq3),lambda,10..12);
23 > Uex1:=BesselJ(0,lambda1*r)*cos(lambda1*t);
24 > animate3d([r*cos(theta),r*sin(theta),Uex1],r=0..1,theta=0..2*Pi,
25     t=0..2*(2*Pi/lambda1),frames=50);

```

solution élémentaire s'écrit (ligne 13)

$$U_e = BesselJ(k, \lambda r) e^{Ik\theta} e^{I\lambda c_0 t}$$

Cette solution élémentaire doit vérifier la condition à la limite $\frac{\partial U_e}{\partial r} = 0$ en $r = 1$ (ligne 14), ce qui impose pour chaque valeur de k des valeurs de λ particulières. Les valeurs possibles de λ sont les racines de la fonction F_k (ligne 16) :

$$F_k(\lambda) = -BesselJ(k+1, \lambda) + \frac{k BesselJ(k+1, \lambda)}{\lambda}$$

On a tracé cette fonction pour différentes valeur de k sur la figure (1.8). Pour une valeur de k fixé, on a une infinité de racines $\lambda_{k,p}$ (c'est l'équivalent des racines $\frac{k\pi}{2}$ des fonctions $\cos \omega x$ en coordonnées cartésiennes). La solution élémentaire dépend donc de deux paramètres entiers k et p :

$$U_e(k, p) = BesselJ(k, \lambda_{k,p}) e^{Ik\theta} e^{I\lambda_{k,p} c_0 t}$$

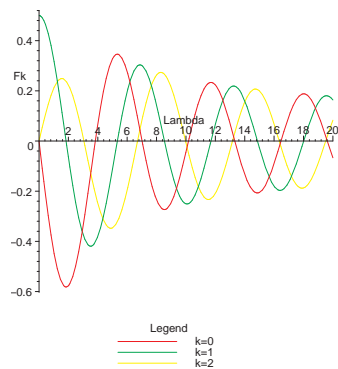


FIGURE 1.8: fonction $F_k(\lambda)$ pour différentes valeurs de k

La solution générale de l'équation des ondes (1.12) est donc une combinaison linéaire de ces solutions élémentaires :

$$U_{ex}(r, \theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} C_{k,p} \text{Bessel}J(k, \lambda_{k,p}) e^{Ik\theta} e^{I\lambda_{k,p}c_0t} \quad (1.13)$$

où $\lambda_{k,p}$ est la $p^{\text{ième}}$ racine de $F_k(\lambda) = 0$. Les coefficients $C_{k,p}$ permettent à U_{ex} de vérifier les conditions initiales. A titre d'exemple, on a déterminé et tracé la solution modale :

$$\text{Bessel}J(k, \lambda_{k,p}) \cos(k\theta) \cos(\lambda_{k,p}c_0t) \quad (1.14)$$

pour les deux cas particuliers :

1. 3^{ième} mode radiale ($k = 0, p = 3$ et $\lambda_{0,3} \approx 10,173468$), qui ne dépend donc pas de θ (lignes 22 à 24)
2. 3^{ième} mode angulaire ($k = 1, p = 3$ et $\lambda_{1,3} \approx 8,536316$) (lignes 27 à 29)

On a tracé ces deux modes propres sur la figure (1.9), et dans le programme Maple on a l'animation de ces modes avec la commande *animate3d*.

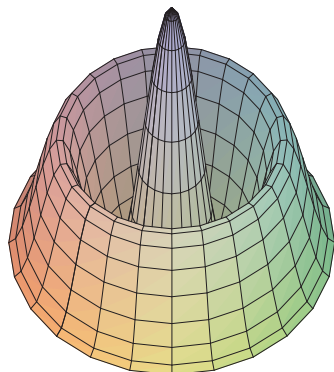
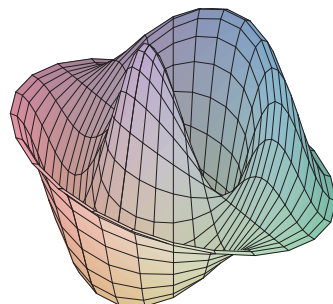
(a) $k=0$ (b) $k=1$

FIGURE 1.9: modes propres de l'équation des ondes

3.3. Schéma explicite

La discrétisation de l'équation des ondes (1.11) avec un schéma explicite s'écrit en coordonnées cartésiennes sur un maillage régulier de pas dx et dy :

$$\frac{u_{i,j}^{n+2} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \quad (1.15)$$

C'est l'extension naturelle du schéma explicite 1D (?? page ??) du chapitre précédent.

Pour discrétiser l'équation en coordonnées polaires (1.15), on discrétise le domaine polaire $\Omega = [0, 1] * [0, 2\pi]$ en (r, θ) avec un pas dr et $d\theta$, ce qui correspond à des points sur des rayons et des cercles dans le domaine physique (x, y) (figure 1.10). On note N_r et N_θ le nombre de noeuds suivant r et θ

En notant $u_{i,j}^n = u(idr, jd\theta, ndt)$ les valeurs aux noeuds, la discrétisation par différences finies explicites de l'équation (1.12) s'écrit :

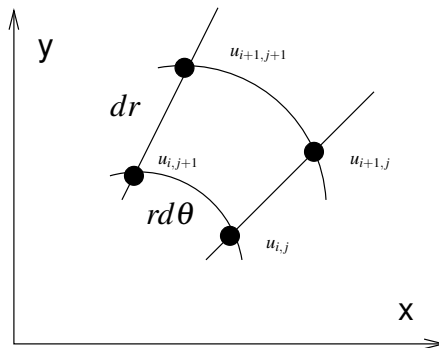
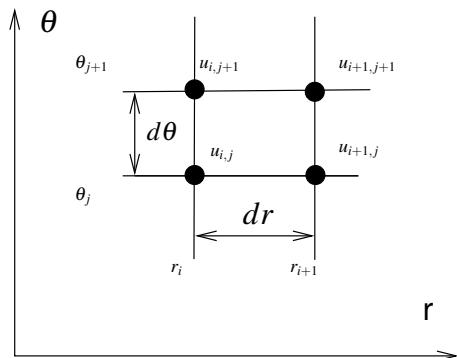


FIGURE 1.10: maillage D.F. en coordonnées polaires

$$\frac{u_{i,j}^{n+2} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dr^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dr} \right. \\ \left. + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{d\theta^2} \right) \quad (1.16)$$

•1.1. conditions aux limites : A cette équation, on ajoute la condition aux limites du problème (1.12) en $r = 1$: $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$. Pour imposer cette condition, on utilise une condition miroir qui permet de calculer la valeur inconnue $u_{N_r+1,j}$ dans l'équation discrète sur $u_{N_r,j}$:

$$u_{N_r+1,j} = u_{N_r-1,j} \quad (1.17)$$

A cette condition physique, il faut ajouter des conditions numériques liées à la transformation en coordonnées polaires :

1. conditions de périodicité en θ

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 2\pi)$$

2. valeur finie en $r = 0$ indépendante de θ

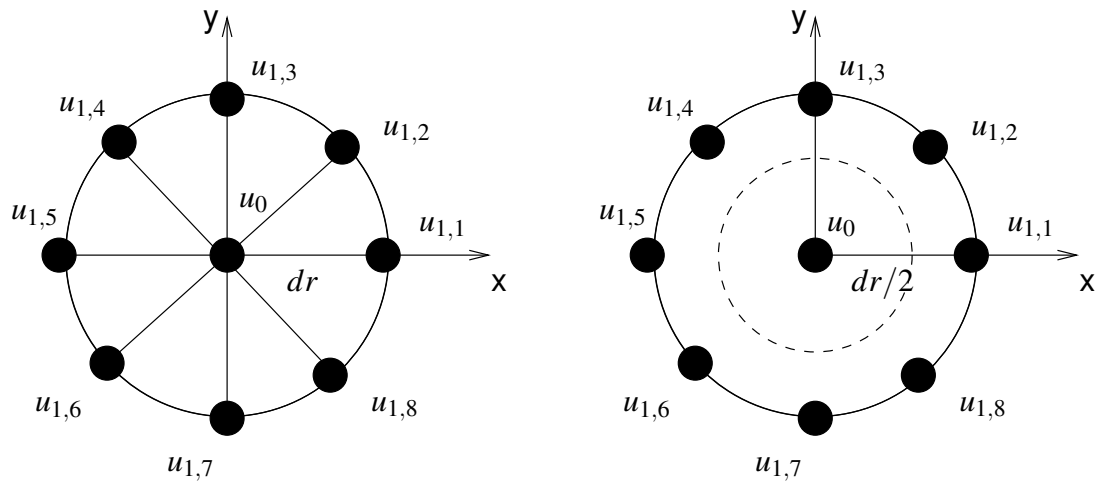
$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) = u_0$$

La première condition traduit une périodicité en θ de période 2π . Elle se traduit au niveau discret par le fait que les équations pour la ligne $\theta = 0$ correspondent aux inconnues $u_{i,1}$ et font intervenir des valeurs en $\theta = -d\theta$ qui ne sont pas définies, i.e. $u_{i,0}^n = u(idr, -d\theta)$. De même les équations pour la dernière ligne $\theta = 2\pi - d\theta$ correspondent aux inconnues u_{i,N_θ} et font intervenir des valeurs en $\theta = 2\pi$ qui ne sont pas définies, i.e. $u_{i,N_\theta+1}^n = u(idr, 2\pi)$. Les conditions de périodicité permettent d'imposer :

$$u_{i,0}^n = u_{i,N_\theta}^n \quad \text{et} \quad u_{i,N_\theta+1}^n = u_{i,1}^n \quad (1.18)$$

dans les équations pour $j = 1$ et $j = N_\theta$.

La seconde condition est nécessaire, car l'équation discrétisée (1.16) dégénère en $r = 0$, de même que l'équation exacte (1.12) à cause des termes en $1/r$.

FIGURE 1.11: conditions aux limites en $r = 0$

Pour lever cette dégénérescence en $r = 0$, on utilise l'équation discrétisée en coordonnées cartésiennes (1.15). Avec les notations de la figure (1.11) et suivant les axes (x, y) , cette équation s'écrit en $r = 0$:

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{1,1}^n - 2u_0^n + u_{1,5}^n}{dr^2} + \frac{u_{1,3}^n - 2u_0^n + u_{1,7}^n}{dr^2} \right)$$

En effectuant une rotation des axes (x, y) de 45 degrés, on obtiens une autre équation équivalente :

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{1,2}^n - 2u_0^n + u_{1,6}^n}{dr^2} + \frac{u_{1,4}^n - 2u_0^n + u_{1,8}^n}{dr^2} \right)$$

La valeur de u_0 étant unique, on choisit la moyenne de ces équations :

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = 4c_0^2 \left(\frac{\left(\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 u_{1,j}^n \right) - u_0^n}{dr^2} \right)$$

soit, de façon générale si on a N_θ noeuds dans la direction θ :

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = 4c_0^2 \left(\frac{\left(\frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} u_{1,j}^n \right) - u_0^n}{dr^2} \right) \quad (1.19)$$

Cette dernière équation peut s'interpréter comme un bilan de flux sur un disque de rayon $dr/2$. En intégrant l'équation (1.12) sur ce disque, il vient, après utilisation du théorème de Green :

$$\int_0^{\frac{dr}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 2\pi s ds = c_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{dr/2} \frac{dr}{2} d\theta$$

On approxime chacun de ses termes par différences finies. Pour le premier terme, on utilise l'approximation de la dérivée seconde en temps en $r = 0$:

$$\int_0^{\frac{dr}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 2\pi r dr \approx \frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} \pi \frac{dr^2}{4}$$

et pour le second l'approximation de la dérivée première en $dr/2$ sur chaque rayon d'angle θ_j

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{dr/2} \approx \frac{u_{1,j} - u_0}{dr}$$

ce qui fournit l'approximation de la seconde intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{dr/2} r d\theta \approx \sum_{j=1}^{N_\theta} \frac{u_{1,j} - u_0}{dr} \frac{dr}{2} \frac{2\pi}{N_\theta}$$

En combinant ces deux approximations, on retrouve l'équation (1.19), qui permet de calculer l'évolution temporelle de la valeur u_0 .

•.2. condition initiale La résolution numérique du schéma explicite (1.16) nécessite l'initialisation de la solution u^0 à $t = 0$ et u^1 à $t = dt$. On applique la même démarche que pour l'équation des ondes en 1D (paragraphe ?? page ??). Disposant des deux conditions initiales du problème (1.12), la valeur u^0 est donnée par la première condition :

$$u_{i,j}^0 = w(idr, jd\theta) \quad (1.20)$$

et la valeur de u^1 est obtenue à partir d'un développement limité en temps à l'ordre 2 autour de u^0 :

$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} dt + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{t=0} \frac{dt^2}{2}$$

La valeur de $\frac{\partial u}{\partial t}$ est fournie par la seconde condition initiale, et on utilise l'équation exacte pour calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en fonction du laplacien de w , que l'on discrétise ensuite par différences finies centrées :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{t=0} = c_0^2 \Delta w$$

On obtiens ainsi la valeur de u^1 avec une précision $O(dt^2, dx^2)$, identique à celle du schéma :

$$u_{i,j}^1 = w_{i,j} + \frac{c_0^2 dt^2}{2} \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{dr^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2dr} \right. \\ \left. + \frac{1}{r_i^2} \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{d\theta^2} \right) \quad (1.21)$$

● Stabilité et précision du schéma

L'étude de la stabilité et de la consistance est effectuée tout d'abord sur l'équation discrétisée en coordonnées cartésiennes (1.15), et nous en déduisons ensuite les propriétés pour l'équation discrétisée en coordonnées polaires (1.16).

● **Étude de la stabilité :** L'étude de la stabilité utilise le programme Maple 1.4. On remplace (ligne 12) dans l'équation discrétisée définie à la ligne 7, la solution approchée $u_{i,j}^n$ par une perturbation, que l'on a décomposé en mode de Fourier suivant x et y (ligne 11) :

$$Up_{i,j}^n = \psi^n e^{I\omega_1 dx} e^{I\omega_2 dy}$$

Après simplification, on obtiens une équation du second degré pour le facteur d'amplification $G = \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n}$ (ligne 19) :

$$G^2 + 2bG + 1 = 0 \quad (1.22)$$

Le coefficient b est simplifié (lignes 21 et 22), et s'exprime en fonction de 2 nombres de Courant $C_{FL1} = \frac{c_0 dt}{dx}$ et $C_{FL2} = \frac{c_0 dt}{dy}$ et de $y_1 = \sin \omega_1 \frac{dx}{2}$ et $y_2 = \sin \omega_2 \frac{dy}{2}$:

$$b = -1 + 2C_{FL1}^2 y_1^2 + 2C_{FL2}^2 y_2^2$$

Le produit des racines de l'équation (1.22) étant égale à 1, la condition de stabilité $|G| \leq 1$ impose donc que ces racines soient complexes conjuguées, i.e. que le discriminant soit négatif :

$$\Delta = b^2 - 1 \leq 0 \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1]$$

ce qui conduit à la condition (ligne 25 et 26) :

$$C_{FL1}^2 y_1^2 + C_{FL2}^2 y_2^2 \leq 1 \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1]$$

La condition de stabilité du schéma explicite (1.15) s'écrit donc :

$$C_{FL_1}^2 + C_{FL_2}^2 \leq 1$$

C'est une condition de Courant :

$$C_{FL} = \frac{c_0 dt}{h} \leq 1 \quad (1.23)$$

basé sur une longueur caractéristique h de la maille différence finie définie par :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} \rightsquigarrow h = \frac{dxdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (1.24)$$

Si les pas de discrétisation sont égaux ($dx = dy$), on a $h = \frac{dx}{\sqrt{2}}$. La condition de stabilité est donc plus sévère en 2D qu'en 1D.

Par analogie, la condition de stabilité du schéma explicite (1.16) en coordonnée polaire est aussi la condition de Courant (1.23). Il faut cependant définir la longueur caractéristique h de la maille en coordonnée polaire. Cette longueur ne doit pas être basée sur les dimensions dr et

```

1 > restart ;with (plots) :
2 # Equation des ondes en cartisien
3 > diff (U(x,y,t),t$2)=c0^2*(diff (U(x,y,t),x$2)+
4                               diff (U(x,y,t),y$2));
5 > eq:=%;
6 # Equation D.F.
7 > (U[i,j,n+1]-2*U[i,j,n]+U[i,j,n-1])/dt^2=c0^2*((U[i+1,j,n]-
8           2*U[i,j,n]+U[i-1,j,n])/dx^2+(U[i,j+1,n]-
9           2*U[i,j,n]+U[i,j-1,n])/dy^2); eqh:=%;
10 # Etude de stabilite
11 > Up:=(i,j,n)->Psi[n]*exp(l*omega[1]*i*dx)*exp(l*omega[2]*j*dy);
12 > subs(U[i,j,n+1]=Up(i,j,n+1),U[i,j,n-1]=Up(i,j,n-1),
13       U[i,j,n]=Up(i,j,n),U[i-1,j,n]=Up(i-1,j,n),
14       U[i+1,j,n]=Up(i+1,j,n),U[i,j-1,n]=Up(i,j-1,n),
15       U[i,j+1,n]=Up(i,j+1,n),eqh);
16 #
17 > rel1 := simplify (%*exp(-l*omega[1]*i*dx)*exp(-l*omega[2]*j*dy)):
18 > simplify (subs(Psi[n+1]=G*Psi[n],Psi[n-1]=Psi[n]/G,rel1*G/Psi[n]));
19 > collect (dt^2*(lhs(%) - rhs(%)),G)=0;eq3:=lhs(%):
20 # calcul du coefficient de G
21 > coeff (eq3,G):expand(%);
22 > subs(cos(omega[1]*dx)=1-2*y[1]^2,cos(omega[2]*dy)=1-2*y[2]^2,
23       dx=dt*c0/CFL[1],dy=dt*c0/CFL[2],%):simplify(%);b:=%/2;
24 # Racines G complexes conjuguées si Delta<0
25 > Delta:=b^2-1;factor(%);
26 > CFL[1]^2*y[1]^2+CFL[2]^2*y[2]^2<1;

```

$d\theta$ de la maille dans l'espace transformé, mais sur les dimensions de la maille dr et $rd\theta$ dans l'espace physique :

$$h = \frac{rdrd\theta}{\sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2}}$$

La maille dans l'espace physique n'étant pas constante (elle dépend de r), on doit prendre la plus petite valeur de h dans le maillage, qui est obtenue pour $r = dr$

$$h_{min} = \frac{dr^2d\theta}{\sqrt{dr^2 + (drd\theta)^2}} \approx drd\theta$$

ce qui fournit la condition de stabilité du schéma (1.16) :

$$C_{FL} = \frac{c_0 dt}{drd\theta} \leq 1 \quad (1.25)$$

On constate que cette condition en coordonnée polaire est beaucoup plus contraignante que la condition (1.23) en coordonnées cartésiennes. Pour un maillage de N points dans chaque direction, il faut choisir un pas en temps dt tel que $dt \leq c_0\sqrt{2}/N$ en cartésien et $dt \leq c_0/N^2$ en polaire.

• **Erreur de troncature :** Le calcul Maple (lignes 32 à 44 du programme 1.4) fournit l'erreur de troncature pour le schéma (1.15) en cartésien :

$$E_t = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} dt^2 - \frac{c_0^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx^2 - \frac{c_0^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} dy^2 + O(dt^4, dx^4, dy^4)$$

Le schéma explicite (1.15) est donc d'ordre 2 en temps et en espace (i.e. a une précision en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$).

Par analogie, on en déduit que le schéma explicite (1.16) est aussi d'ordre 2 en temps et en espace (i.e. a une précision en $O(dt^2, dr^2, d\theta^2)$).

Enfin on note que ces schémas explicites (1.15) et (1.16) sont des schémas dispersifs, mais non dissipatifs comme en 1D (*puisque le facteur d'amplification G à un module égal à 1*).

3.4. Expérimentation numérique avec Matlab

Le programme Matlab (1.5) implémente le schéma explicite en coordonnées polaires (1.16). Les paramètres du calcul sont définies sur les lignes 3 à 13, avec un C_{FL} définit par la relation (1.25). Pour tenir compte

simplement des conditions de périodicité, la solution approchée $u_{i,j}^n$ est définie comme un tableau de dimension $N_r * (N_\theta + 1)$, i.e. avec r variant de 0 ($i = 1$) à 1 ($i = N_r$) et θ de 0 ($j = 1$) à $2\pi + d\theta$ ($j = N_\theta + 1$). La solution initiale w est définie sur les lignes 14 à 21 comme combinaison linéaire des 2 modes propres (1.15). Cette solution initiale permet l'initialisation des champs Un_0 (lignes 24 à 26). La seconde condition initiale (1.21) est appliquée lors de la première itération en temps en notant que cette condition est dans notre cas équivalente à l'équation aux différences (1.16) pour $n = 1$ avec $u_{i,j}^{-1} = u_{i,j}^1$, i.e. l'équivalent d'une condition miroir à l'instant initiale. Cette condition peut alors être implémentée en initialisant u^0 et u^{-1} avec w , et en calculant u^1 à la première itération avec la formule générale (1.16), et un coefficient c_0^2 divisé par deux (ligne 37).

Dans les itérations en temps (lignes 34 à 57), on utilise l'équation aux différences (1.16) pour les noeuds internes $1 < i < N$, $1 < j < N_\theta$ en utilisant la programmation matricielle Matlab (ligne 40). La condition aux limites en $r = 1$ fournit la valeur aux noeuds frontières $i = N$ (ligne 45). Les conditions de périodicité fournissent les valeurs aux noeuds frontières $j = 1$ et $j = N_\theta + 1$ (lignes 49 à 50). Enfin l'équation pour les noeuds en $r = 0$ est écrite aux lignes 52 à 54.


```
1 % equation des ondes en polaire
2 % schema explicite
3 clear ;
4 R1=1;
5 Ntheta=50; Nr=80;
6 dtheta=2*pi/(Ntheta-1);dr=R1/(Nr-1);
7 R=[0:dr:R1]';
8 Theta=[0:dtheta:2*pi];
9 % pts du maillage
10 X=R*cos(Theta); Y=R*sin(Theta);
11 % parametre
12 c0=1; CFL=0.9;
13 dt=CFL*dr*dtheta/c0
14 % cdts initial
15 k1=0; a1=1.0;
16 lambda1=fzero(inline('0*besselj(0,r)-r*besselj(1,r)'),10)
17 BJ1=inline('besselj(0,r)', 'r');
18 k2=1; a2=0.5;
19 lambda2=fzero(inline('1*besselj(1,r)-r*besselj(2,r)'),10)
20 BJ2=inline('besselj(1,r)', 'r');
21 W=(a1*BJ1(lambda1*R)*cos(k1*Theta)+...
22     a2*BJ2(lambda2*R)*cos(k2*Theta));
23 % initialisation
24 Un0=zeros(Nr,Ntheta+1);
25 Un0(:,1:Ntheta)=W; Un0(:,Ntheta+1)=Un0(:,2);
26 Un=Un0;Un1=Un;
```

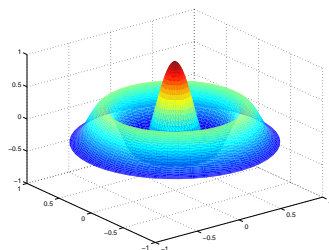
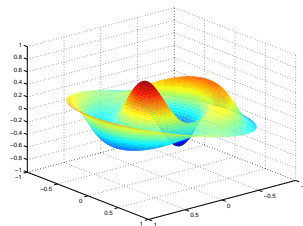
(a) $k=0$ (b) $k=1$

FIGURE 1.12: solutions numériques de l'équation des ondes

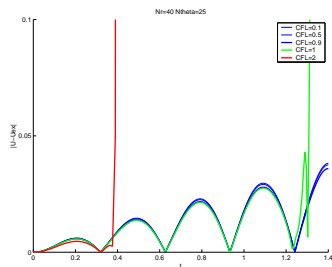
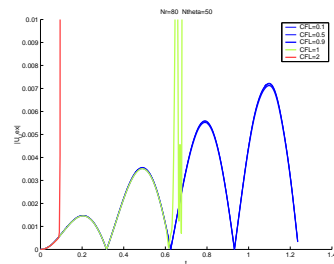
Sur la figure (1.12), on a tracé la solution calculée au bout d'une période, avec $C_{FL} = 0.9$, $N_r = 80$ et $N_\theta = 50$, pour les deux conditions initiales étudiées analytiquement au paragraphe 3.2 page 27. Elles se comparent parfaitement aux solutions analytiques de la figure (1.9).

Pour tester la stabilité du schéma, nous avons fait varier le pas en temps pour deux maillages donnés : $(N_r = 40, N_\theta = 25)$ et $(N_r = 80, N_\theta = 50)$ avec la condition initiale suivante :

$$BesselJ(0, \lambda_{0,3}) \cos(\lambda_{0,3} c_0 t) + \frac{1}{2} BesselJ(1, \lambda_{1,3}) \cos(\theta) \cos(\lambda_{1,3} c_0 t)$$

Nous avons ensuite calculé l'erreur en $r = 0$ en comparant la solution approchée sur l'axe $u_{1,1}$ et la solution exacte $u_{ex} = \cos(c_0 \lambda_{0,3} t)$ sur un temps τ de l'ordre de deux périodes $\tau \approx 1.4$. On a tracé ces évolutions sur la figure (1.13). On constate bien que la solution diverge dès que le nombre de Courant (1.25) est supérieur ou égale à 1. On peut aussi noter que si l'on choisit une condition initiale ne dépendant pas de θ , la solution reste stable pour des C_{FL} beaucoup plus grands (i.e. $C_{FL} \leq N_\theta$), ce qui montre que l'instabilité la plus sévère proviens de la discrétisation du terme en θ . Théoriquement au bout d'un nombre très grand d'itérations, les erreurs d'arrondis devraient pouvoir déstabiliser la solution, mais ici la symétrie des calculs fait que ces erreurs sont indépendantes de θ et la solution non perturbée reste stable.

Pour étudier la précision du calcul, nous avons calculer l'erreur au centre pour différents maillages avec un $C_{FL} = 0.9$ avec la même condition initiale. La solution au centre étant indépendante de θ , nous avons

(a) $N_r = 40, N_\theta = 25$ (b) $N_r = 80, N_\theta = 50$ FIGURE 1.13: évolution de l'erreur sur l'axe en fonction du C_{FL}

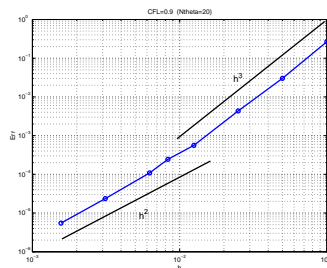


FIGURE 1.14: erreur sur l'axe en fonction de la taille du maillage

uniquement fait varier la discrétisation suivant r en choisissant des valeurs de N_r de 10 à 640. La taille caractéristique du maillage est $h \approx \frac{1}{N_r}$, et nous avons tracé l'erreur sur l'axe en fonction de h sur la figure (1.14).

On constate sur cette figure que l'erreur se comporte à la limite en $O(h^2)$, ce qui était prévue par la théorie. Cela montre que notre condition en $r = 0$ préserve la précision d'ordre 2 du schéma.

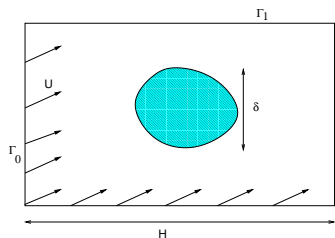


FIGURE 1.15: diffusion d'une tache de polluant

4. Équation de convection-diffusion

4.1. Problème physique : dispersion d'un polluant

On considère le problème de la dispersion d'un polluant à la surface d'un liquide en mouvement (figure 1.15). Le polluant est miscible dans le liquide, mais plus léger. On suppose que la vitesse du fluide est horizontale. On peut alors considérer que le polluant diffuse essentiellement à la surface, et négliger les variations suivant la vertical z .

En notant C la fraction massique de polluant et ρ la densité du fluide, l'équation d'équilibre pour C traduit que la variation temporelle de la quan-

tité de polluant $\rho C dx dy dz$ dans un volume élémentaire $dx dy dz$ est égale à un bilan de flux de C sur les facettes du volume. A travers une facette de surface dS et de normale sortante \vec{n} , il existe un flux de diffusion $\lambda \vec{\nabla} C \cdot \vec{n} dS$ (λ est le coefficient de diffusion) et un flux de convection $-\rho C \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ (\vec{V} est la vitesse du fluide). L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} C) - \text{div}(\rho C \vec{V})$$

Compte tenu de l'équation de conservation de la masse du fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

cette équation s'écrit :

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} C)$$

Compte tenu de l'hypothèse d'indépendance des quantités par rapport à z , et en supposant en outre que la densité ρ et le coefficient de diffusion λ sont constants, il vient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_1 \frac{\partial C}{\partial x} + V_2 \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = 0$$

A cette équation il faut ajouter la condition initiale $C(x, y, t = 0) = w(x, y)$ et des conditions aux limites sur les frontières Γ du domaine Ω . On suppose que le polluant se trouve initialement à l'intérieur du domaine Ω et a pour dimension caractéristique δ (figure 1.15). On distingue les frontières entrantes Γ_0 , i.e. telle que $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$ et les frontières sortantes Γ_1 , i.e. telle que $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$. Si la convection est prépondérante sur la diffusion, le flux entrant sur les frontières Γ_0 est un flux de convection qui apporte du fluide non pollué dans le domaine Ω . La condition sur Γ_0 est une condition de Dirichlet $C_{\Gamma_0} = 0$. Sur les frontières Γ_1 , le fluide transporte le polluant vers l'extérieur : on impose alors une condition aux limites de Neumann $\frac{\partial C}{\partial n_{\Gamma_1}} = 0$, qui autorise la sortie du polluant du domaine Ω .

Pour un domaine carré de dimension H , et une vitesse \vec{V} avec des composantes positives $V_1 > 0$ et $V_2 > 0$, la frontière Γ_0 correspond aux deux cotés $x = 0$ et $y = 0$ et la frontière Γ_1 aux deux autres cotés opposés $x = H$ et $y = H$.

En notant $\kappa = \frac{\lambda}{\rho}$, le problème modèle s'écrit pour un domaine Ω carré de dimension caractéristique H :

Trouver $u(x, y, t)$ tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_1 \frac{\partial u}{\partial x} + V_2 \frac{\partial u}{\partial y} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{sur } \Omega = [0, H] * [0, H] \quad (1.26)$$

$$u_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0(x = 0, y = 0), \quad \text{et } \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1(x = H, y = H)$$

$$u(x, y, t = 0) = w(x, y)$$

4.2. Étude de la solution exacte

Le problème (1.26) est un problème d'évolution parabolique caractéristique des problèmes de mécanique des fluides, avec un terme de convection et un terme de diffusion. Nous allons tout d'abord effectuer une analyse d'ordre de grandeur de chacun de ces termes.

- **Analyse en ordre de grandeur**

Soit δ la dimension caractéristique de la tache initiale, l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (1.26) s'écrit, en notant τ un temps caractéristique :

$$\frac{\Delta C}{\tau} + V_1 \frac{\Delta C}{\delta} + V_2 \frac{\Delta C}{\delta} - \lambda \left(\frac{\Delta C}{\delta^2} + \frac{\Delta C}{\delta^2} \right) = 0$$

Si on considère uniquement la diffusion, le temps caractéristique vaut :

$$\tau_d \approx \frac{\delta^2}{\lambda}$$

On retrouve le temps caractéristique de diffusion (relation ?? page ??) calculé pour l'équation de la chaleur. Le temps caractéristique τ_d vérifie une relation du type (à rapprocher de la condition de stabilité ?? page ?? pour une équation de diffusion) :

$$\frac{\lambda \tau_d}{\delta^2} \approx 1 \tag{1.27}$$

C'est le temps caractéristique de décroissance exponentielle des phénomènes de diffusion.

Si on considère uniquement la convection, le temps caractéristique vaut :

$$\tau_c \approx \frac{\delta}{V}$$

Ce temps correspond au temps de transport de la tache par le champ de vitesse sur une distance égale à la dimension de la tache. Ce temps caractéristique τ_c vérifie donc une relation du type (à rapprocher de la condition de stabilité de Courant ?? page ??) :

$$\frac{V \tau_c}{\delta} \approx 1 \quad (1.28)$$

Pour notre problème, on peut définir un autre temps caractéristique de convection : le temps de sortie τ_s du polluant hors du domaine Ω . Il est basé sur la dimension caractéristique L du domaine et vérifie :

$$\frac{V \tau_s}{L} \approx 1 \quad (1.29)$$

Enfin le rapport entre les temps caractéristiques de diffusion τ_d et de convection τ_c est le nombre de Péclet :

$$\frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{V \delta}{\lambda} = P_e \quad (1.30)$$

qui caractérise l'importance relative du terme de convection par rapport au terme de diffusion.

- **Diffusion convection d'une gaussienne**

Considérons la condition initiale suivante :

$$w(x, y) = e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{y-y_0}{\sigma_0}\right)^2} \quad (1.31)$$

qui décrit une tache gaussienne d'amplitude 1 centrée en (x_0, y_0) , de rayon σ_0 .

S'il n'y a pas de convection, cette tache diffuse de façon auto-similaire , i.e. son amplitude diminue et son rayon augmente en conservant une forme gaussienne :

$$u(x, y, t) = A(t) e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma(t)}\right)^2} e^{-\left(\frac{y-y_0}{\sigma(r)}\right)^2}$$

En utilisant la conservation globale de u dans tout le domaine :

$$\int \int u(x, y, t) dx dy = \int \int w(x, y) dx dy = cste \quad \forall t$$

on en déduit la relation entre l'amplitude $A(t)$ et le rayon $\sigma(t)$:

$$\frac{\pi}{4} A(t) \sigma^2(t) = \frac{\pi}{4} \sigma_0^2$$

(l'intégrale d'une gaussienne vaut : $\int e^{-(x/\sigma)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma$).

On cherche donc une solution de diffusion de l'équation (1.26) (avec $V = 0$) sous la forme :

$$u(x, y, t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma(t)} \right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma(t)}\right)^2} e^{-\left(\frac{y-y_0}{\sigma(r)}\right)^2}$$

En reportant cette relation dans l'équation (1.26) on obtiens l'équation d'évolution de $\sigma(t)$:

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = -2\frac{\kappa}{\sigma(t)}$$

dont la solution vérifiant $\sigma(0) = \sigma_0$ est :

$$\sigma(t) = \sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2} \quad (1.32)$$

La solution de diffusion de l'équation (1.26) s'écrit donc :

$$u(x, y, t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2} e^{-\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2} \quad (1.33)$$

L'amplitude de cette gaussienne décroît donc suivant la loi :

$$A(t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2 \quad (1.34)$$

En prenant en compte la convection par un champ de vitesse sans cisaillement, cette tache gaussienne est transportée sans déformation et diffuse le long des trajectoires du champ de vitesse comme précédemment. Pour un champ de vitesse constant, les trajectoires sont des droites :

$$x(t) = x_0 + V_1 t, \quad y(t) = y_0 + V_2 t$$

la solution de convection-diffusion de l'équation (1.26) s'écrit donc :

$$u(x, y, t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_0-V_1 t}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2} e^{-\left(\frac{y-y_0-V_2 t}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2} \quad (1.35)$$

Cette solution est une solution en milieu infini et ne tiens pas compte des conditions aux limites du problème (1.26). Elle constitue cependant une bonne approximation de la solution, si la dimension de la tache σ_0 est petite devant la dimension L du domaine Ω .

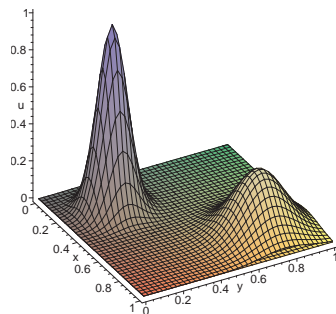
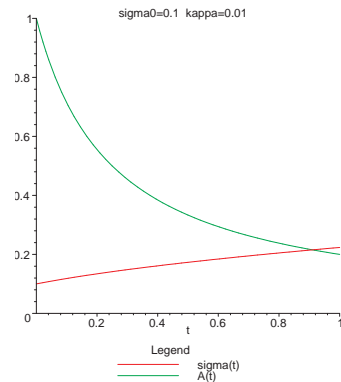
(a) solution a $t=0$ et $t=0.5$ (b) amplitude $A(t)$ et taille $\sigma(t)$

FIGURE 1.16: convection diffusion d'une gaussienne (1.35)

On a tracé l'évolution de cette solution (1.35) sur la figure (1.16) pour $\kappa = 0.01$, $\sigma_0 = 0.1$ et $\vec{V} = [1., 1.]$. Pour ces valeurs des paramètres, un domaine de longueur $H = 1$, une position initiale $x_0 = \frac{H}{4}$ et $y_0 = \frac{H}{4}$, le temps caractéristique de diffusion vaut $\tau_d \approx 1.$, celui de convection $\tau_c \approx 0.1$, et le nombre de Péclet $P_e \approx 10$. Le problème est donc à convection dominante. Au bout d'un temps $T_f = 0.5$ ($T_f < \tau_s = 1.0$), la tache est à la frontière du domaine avec une amplitude qui a diminué d'un tiers : $A(T_f) \approx 0.33333$.

- **Modes propres de diffusion**

Pour rechercher des solutions vérifiant les conditions aux limites, on détermine tout d'abord les modes propres de diffusion en utilisant la méthode de séparation de variable décrite au paragraphe ?? page ?. Le calcul est identique, et on montre facilement que les modes propres sont les fonctions suivantes :

$$u_{p,q}(x,y,t) = \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{(2q+1)\pi y}{2L}\right) e^{-\left(\left(\frac{(2p+1)\pi}{2L}\right)^2 + \left(\frac{(2q+1)\pi}{2L}\right)^2\right)\kappa t} \quad (1.36)$$

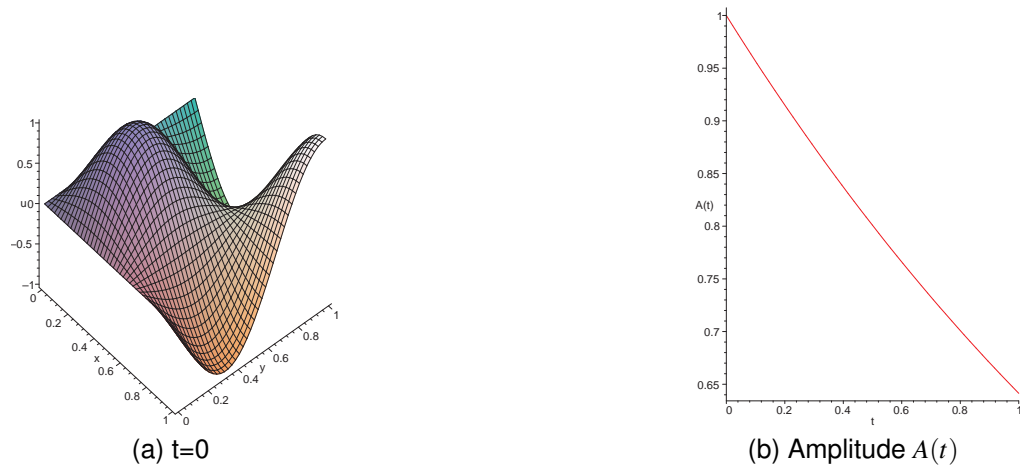
qui vérifient les conditions aux limites :

$$u_{p,q}(0,y,t) = u_{p,q}(x,0,t) = 0 \quad (\Gamma_0) \quad , \quad \frac{d}{dx}u_{p,q}(H,y,t) = \frac{d}{dy}u_{p,q}(x,H,t) = 0 \quad (\Gamma_1)$$

La solution générale de diffusion est alors une combinaison linéaire de ses modes :

$$u(x,y,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{p,q} u_{p,q}(x,y,t)$$

On a tracé sur la figure (1.17) le mode $p = 1$ et $q = 1$, ainsi que l'évolution temporelle de son amplitude pour les mêmes paramètres que précédemment ($\kappa = 0.01$, $L = 1$). Sur un temps $T_f = 0.5$, l'amplitude de ce mode décroît de 0,8.

FIGURE 1.17: mode propre de diffusion $p = 1$ $q = 1$

Si on prend en compte la convection dans le cas d'un champ de vitesse sans cisaillement, la solution initiale est convectée sans déformation et diffusée le long des trajectoires. Par contre, il n'existe pas de solutions analytiques simples qui vérifient les conditions aux limites de (1.26).

En considérant une taille de structure $\delta = \frac{2}{3\pi}L$, le temps caractéristique de diffusion vaut $\tau_d \approx 4.5$, le temps caractéristique de convection $\tau_c \approx 0,2$, et le nombre de Péclet $P_e \approx 21$.

4.3. Discrétisation par différences finies

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'une discrétisation précise de problème parabolique est le schéma de Cranck Nicholson. Appliquée à l'équation (1.26), il s'écrit pour un maillage cartésien de N_x points suivant x et N_y points suivant y , et de pas dx et dy :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} = & -\frac{V_1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2dx} + \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} \right) \\
& - \frac{V_2}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{dx^2} + \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{dy^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.37}$$

C'est un schéma inconditionnellement stable d'ordre 2 en temps et en espace, i.e. en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$.

A chaque itération en temps, on a à résoudre un système d'équations linéaire $\mathcal{A}x = \mathcal{B}$, de $N = N_x N_y$ inconnues $\{u_{i,j}^{n+1}\}$. La matrice \mathcal{A} est une matrice penta-diagonale, qui a la même structure que la matrice du laplacien au paragraphe 2.3 page 9. Pour des très gros maillages, le coût de

résolution de ce système linéaire en utilisant les méthodes de résolution du paragraphe 2.3 page 9 peut devenir rapidement prohibitif.

On va donc étudier dans le paragraphe suivant une méthode alternative : la méthode des directions alternées implicites.

4.4. Méthode des directions alternées implicites

Le principe des méthodes des directions alternées implicites, notées ADI (ADI=Alternated Directions Implicit est le sigle classique des directions alternées en anglais), est de décomposer les opérateurs spatiaux suivant les directions d'espace x et y . On écrit l'équation (1.26) sous la forme symbolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1(u) + L_2(u) \quad (1.38)$$

où L_1 et L_2 sont les deux opérateurs suivants :

$$L_1 = V_1 \frac{\partial}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_2 = V_2 \frac{\partial}{\partial y} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.39)$$

En notant $u^n, u^{n+1}, u^{n+\frac{1}{2}}$ les solutions au temps $t^n = ndt, t^{n+1} = (n+1)dt$ et $t^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})dt$, les développements limités de $u^{n+\frac{1}{2}}$ peuvent s'écrire de façon symbolique :

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= \left(e^{\frac{dt}{2} \frac{\partial}{\partial t}} \right) u^n = \left(e^{\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^n \\ u^{n+\frac{1}{2}} &= \left(e^{-\frac{dt}{2} \frac{\partial}{\partial t}} \right) u^{n+1} = \left(e^{-\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^{n+1} \end{aligned}$$

On a utilisé dans ces relations le fait que u^n et u^{n+1} sont solutions de l'équation exacte (1.26) pour remplacer $\frac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de $L_1(u)$ et $L_2(u)$.

En combinant ces deux équations, il vient :

$$\left(e^{-\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^{n+1} = \left(e^{\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^n \quad (1.40)$$

En utilisant un développement au premier ordre des exponentielles,

$$\left(1 - \frac{dt}{2} (L_1 + L_2) \right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{dt}{2} (L_1 + L_2) \right) u^n$$

on obtiens le schéma suivant, dans lequel il suffit d'inclure l'approximation spatiale des opérateurs L_1 et L_2 :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} = \frac{L_1(u^{n+1}) + L_1(u^n)}{2} + \frac{L_2(u^{n+1}) + L_2(u^n)}{2} \quad (1.41)$$

C'est le schéma classique de Cranck Nicholson (1.37).

Pour les schémas ADI, on effectue tout d'abord une factorisation formelle dans (1.40) :

$$\left(e^{-\frac{dt}{2}L_1} e^{-\frac{dt}{2}L_2} \right) u^{n+1} = \left(e^{\frac{dt}{2}L_1} e^{\frac{dt}{2}L_2} \right) u^n$$

avant le développement limité des exponentielles :

$$\left(1 - \frac{dt}{2}L_1 \right) \left(1 - \frac{dt}{2}L_2 \right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{dt}{2}L_1 \right) \left(1 + \frac{dt}{2}L_2 \right) u^n \quad (1.42)$$

Formellement, on a un schéma de type Cranck Nicholson d'ordre 2 mais avec une erreur de troncature différente. Pour résoudre, on introduit la solution intermédiaire u^* telle que :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{dt}{2}L_1\right)u^* &= \left(1 + \frac{dt}{2}L_2\right)u^n \\ \left(1 - \frac{dt}{2}L_2\right)u^{n+1} &= \left(1 + \frac{dt}{2}L_1\right)u^*\end{aligned}\tag{1.43}$$

Ces deux équations sont équivalentes à l'équation (1.42). Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier la première par $1 + \frac{dt}{2}L_1$ et la seconde par $1 - \frac{dt}{2}L_1$ et de les combiner. L'intérêt de cette procédure par rapport à Cranck Nicholson classique est que dans la première équation (1.43), on est implicite suivant L_1 (i.e. suivant x) et explicite suivant L_2 (i.e. suivant y), et vice-versa dans la seconde. La résolution de ces deux équations sera donc plus facile que la résolution du schéma de Cranck Nicholson (1.41), dans lequel on est implicite suivant les 2 directions L_1 et L_2 .

On discrétise ensuite les opérateurs L_1 et L_2 avec des différences finies centrées sur un maillage cartésien de N_x points suivant x et N_y points suivant y , et de pas dx et dy :

$$\begin{aligned}
L_1(u_{i,j}) &= -V_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2dx} + \kappa \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{dx^2} \\
L_2(u_{i,j}) &= -V_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2dy} + \kappa \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{dy^2}
\end{aligned}$$

On obtiens le schéma ADI suivant pour l'équation (1.26) :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^* - u_{i,j}^n}{dt/2} &= -V_1 \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2dx} + \kappa \frac{u_{i+1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i-1,j}^*}{dx^2} \\
&\quad - V_2 \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} + \kappa \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^*}{dt/2} &= -V_1 \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2dx} + \kappa \frac{u_{i+1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i-1,j}^*}{dx^2} \\
&\quad - V_2 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} + \kappa \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{dy^2}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

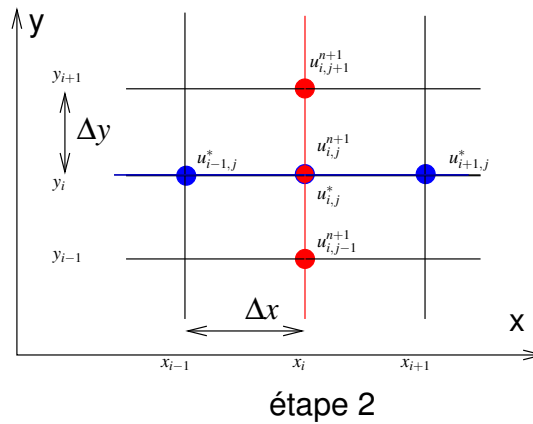
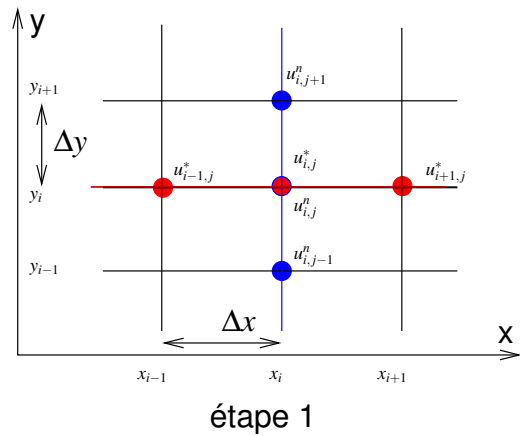


FIGURE 1.18: schéma ADI 1.44 et 1.45

Ces équations ADI correspondent à deux discrétisations de l'équation (1.26) à $t^{n+\frac{1}{2}}$ avec un pas en temps $\frac{dt}{2}$. La première correspond à une discrétisation entre t^n et $t^{n+\frac{1}{2}}$ avec une implicitation dans la direction x et la seconde à une discrétisation entre $t^{n+\frac{1}{2}}$ et t^n avec une implicitation dans la direction y (figure 1.18). La variable intermédiaire $u_{i,j}^*$ correspond donc à une approximation de $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$.

La première équation (1.44) couple les valeurs inconnues $u_{i,j}^*$ par ligne (figure 1.18), i.e. les valeurs inconnues sur la ligne j $\{u_{i,j}^*\}_{i=1,N_x}$ sont indépendantes des valeurs sur les autres lignes. Elles sont solutions du système linéaire tri-diagonal $\mathcal{A}^1_x = \mathcal{B}^1$ de dimension N_x suivant :

$$\begin{bmatrix}
 \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\
 \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 u_{i-1,j}^* \\
 u_{i,j}^* \\
 u_{i+1,j}^* \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 \vdots \\
 c_1^1 u_{i,j-1}^n + c_2^1 u_{i,j}^n + c_3^1 u_{i,j+1}^n \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 \quad (1.46)$$

avec $a_1^1 = \frac{-\kappa}{dx^2} - \frac{V_1}{2dx}$, $a_2^1 = \frac{2}{dt} + \frac{2\kappa}{dx^2}$, $a_3^1 = \frac{-\kappa}{dx^2} + \frac{V_1}{2dx}$, et $c_1^1 = \frac{\kappa}{dy^2} + \frac{V_2}{2dy}$, $c_2^1 = \frac{2}{dt} - \frac{2\kappa}{dy^2}$, $c_3^1 = \frac{\kappa}{dy^2} - \frac{V_2}{2dy}$.

Le second membre \mathcal{B}^1 peut s'écrire sous la forme d'un produit matrice vecteur $\mathcal{B}^1 = \mathcal{C}^1 \{u_{i,j}^n\}$ avec une matrice \mathcal{C}^1 tridiagonale :

$$\mathcal{B}^1 = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i,j-1}^n \\ u_{i,j}^n \\ u_{i,j+1}^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs inconnues $u_{i,j}^*$, il faut donc résoudre N_y systèmes linéaires tri-diagonaux de dimension N_x .

De même la seconde équation (1.45) couple les valeurs inconnues $u_{i,j}^{n+1}$ par colonne (figure 1.18), i.e. les valeurs inconnues sur la colonne i $\{u_{i,j}^{n+1}\}_{j=1,N_y}$ sont indépendantes des valeurs sur les autres colonnes. Elles sont solutions du système linéaire tri-diagonal $\mathcal{A}^2_x = \mathcal{B}^2$ de dimension N_y suivant :

$$\begin{bmatrix}
 \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\
 \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 u_{i,j-1}^{n+1} \\
 u_{i,j}^{n+1} \\
 u_{i,j+1}^{n+1} \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 \vdots \\
 c_1^2 u_{i-1,j}^* + c_2^2 u_{i,j}^* + c_3^2 u_{i+1,j}^* \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 \quad (1.47)$$

avec $a_1^2 = \frac{-\kappa}{dy} - \frac{V_2}{2dy}$, $a_2^2 = \frac{2}{dt} + \frac{2\kappa}{dy^2}$, $a_3^2 = \frac{-\kappa}{dy^2} + \frac{V_2}{2dy}$, et $c_1^1 = \frac{\kappa}{dx^2} + \frac{V_1}{2dx}$, $c_2^1 = \frac{2}{dt} - \frac{2\kappa}{dx^2}$, $c_3^1 = \frac{\kappa}{dx^2} - \frac{V_1}{2dx}$.

Le second membre \mathcal{B}^2 peut encore s'écrire sous la forme d'un produit matrice vecteur $\mathcal{B}^2 = \mathcal{C}^2 \{u_{i,j}^*\}$:

$$\mathcal{B}^2 = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i-1,j}^* \\ u_{i,j}^* \\ u_{i+1,j}^* \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pour déterminer valeurs inconnues $u_{i,j}^{n+1}$, il faut donc résoudre N_x systèmes linéaires tri-diagonaux de dimension N_y .

A chaque itération en temps, on résout N_y systèmes tri-diagonaux de rang N_x et N_x systèmes tri-diagonaux de rang N_y , ce qui est beaucoup plus efficace que la résolution d'un seul système linéaire de rang $N_x N_y$.

Pour les conditions aux limites, il faut modifier la première et la dernière ligne de ces systèmes linéaires. Pour les conditions de Dirichlet sur Γ_0 , on modifie la première ligne de \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2 :

$$\mathcal{A}_{1,j \neq 1}^1 = 0, \mathcal{A}_{1,1}^1 = 1, \mathcal{B}_1^1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{1,j \neq 1}^2 = 0, \mathcal{A}_{1,1}^2 = 1, \mathcal{B}_1^2 = 0 \quad (1.48)$$

Cette condition fixe la valeur de la première ligne de u^* : $\{u_{i,1}^*\}_{i=1,N_x} = 0$ et la première colonne de u^{n+1} : $\{u_{1,j}^{n+1}\}_{j=1,N_y} = 0$.

Pour les conditions de Neumann sur Γ_1 , on utilise une condition miroir, qui modifie la dernière ligne de \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2 :

$$\mathcal{A}_{N_x, N_{x-1}}^1 = a_1^1 + a_3^1 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{N_y, N_{y-1}}^2 = a_1^2 + a_3^2 \quad (1.49)$$

De même le second membre \mathcal{B}^1 de l'étape 1 pour la ligne $j = N_y$ est modifié :

$$\mathcal{B}_i^1 = (c_1^1 + c_3^1)u_{i, N_{y-1}}^n + c_2^1 u_{i, N_y}^n \quad (1.50)$$

ainsi que le second membre \mathcal{B}^2 de l'étape 2 pour la colonne $i = N_x$:

$$\mathcal{B}_j^2 = (c_1^2 + c_3^2)u_{N_x-1, j}^* + c_2^2 u_{N_x, j}^* \quad (1.51)$$

- **Stabilité et précision du schéma ADI**

- **Étude de la stabilité :** L'étude de la stabilité utilise le programme Maple 1.6.

```

1 > restart :
2 # Equation de convection–diffusion
3 > diff (U(x,y,t), t)+V1*diff (U(x,y,t), x)+V2*diff (U(x,y,t), y)=
4 > kappa*(diff (U(x,y,t), x$2)+diff (U(x,y,t), y$2));eq:=%:
5 # Schema ADI
6 > (U[ns,i,j]–U[n,i,j ])/( dt/2)+V1*(U[ns,i+1,j]–U[ns,i–1,j ])/
7 (2*dx)+V2*(U[n,i,j+1]–U[n,i,j–1 ])/(2*dy)=kappa*((U[ns,i+1,j]
8 –2*U[ns,i,j]+U[ns,i–1,j ])/ dx^2+(U[n,i,j+1]–2*U[n,i,j]+
9 U[n,i,j–1 ])/dy^2); eqh1:=%:
10 > (U[n+1,i,j]–U[ns,i,j ])/( dt/2)+V1*(U[ns,i+1,j]–U[ns,i–1,j ])/
11 (2*dx)+V2*(U[n+1,i,j+1]–U[n+1,i,j–1 ])/(2*dy)=kappa*((U[ns,i+1,j]
12 –2*U[ns,i,j]+U[ns,i–1,j ])/ dx^2+(U[n+1,i,j+1]–2*U[n+1,i,j]+
13 U[n+1,i,j–1 ])/dy^2); eqh2:=%:
14 # Etude de la Stabilité
15 > Up:=(n,i,j)–>Psi[n]*exp(l*omega[1]*i*dx)*exp(l*omega[2]*j*dy);
16 > subs(U[ns,i,j]=Up(ns,i,j), U[n,i,j]=Up(n,i,j),
17 U[ns,i+1,j]=Up(ns,i+1,j), U[ns,i–1,j]=Up(ns,i–1,j),
18 U[n,i,j+1]=Up(n,i,j+1), U[n,i,j–1]=Up(n,i,j–1),eqh1):
19 > rel1 := simplify (%*exp(–l*omega[1]*i*dx)*exp(–l*omega[2]*j*dy)):
20 > Psi[ns]/Psi[n]=solve(subs(Psi[ns]=G*Psi[n],rel1), G);rel11:=%:
21 #
22 > subs(U[ns,i,j]=Up(ns,i,j), U[n+1,i,j]=Up(n+1,i,j),
23 U[ns,i+1,j]=Up(ns,i+1,j), U[ns,i–1,j]=Up(ns,i–1,j),
24 U[n+1,i,j+1]=Up(n+1,i,j+1), U[n+1,i,j–1]=Up(n+1,i,j–1),eqh2):
25 > rel2 := simplify (%*exp(–l*omega[1]*i*dx)*exp(–l*omega[2]*j*dy)):
26 > Psi[n+1]/Psi[ns]=solve(subs(Psi[n+1]=G*Psi[ns],rel2), G);

```

On définit les deux étapes (1.44 et 1.45) du schéma ADI (lignes 6 à 13), puis on introduit une perturbation U_p décomposée en mode de Fourier (ligne 15), que l'on introduit dans les deux équations (lignes 16 et 22). On calcul l'amplification du mode pour chacune de ces équations : i.e. $\frac{\psi^*}{\psi^n}$ pour la première (ligne 20) et $\frac{\psi^{n+1}}{\psi^*}$ pour la seconde (ligne 22). D'où l'on déduit le facteur d'amplification global du schéma $G = \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n}$ (ligne 29) :

$$G = \frac{a_1 - 1 + Ib_1}{a_1 + 1 + Ib_1} \frac{a_2 - 1 + Ib_2}{a_2 + 1 + Ib_2}$$

avec $a_1 = \frac{\kappa dt}{dx^2}(1 - \cos \omega_1 dx)$, $a_2 = \frac{\kappa dt}{dy^2}(1 - \cos \omega_2 dy)$, $b_1 = \frac{V_1 dt}{dx}$, $b_2 = \frac{V_2 dt}{dx}$.

Le carré du module de G vaut :

$$G^2 = \frac{(a_1 - 1)^2 + b_1^2}{(a_1 + 1)^2 + b_1^2} + \frac{(a_2 - 1)^2 + b_2^2}{(a_2 + 1)^2 + b_2^2} \leq 1 \quad \forall \omega_1, \omega_2$$

Il est plus petit que 1 puisque a_1 et a_2 sont positifs.

Le schéma ADI (1.44 et 1.45) est donc inconditionnellement stable.

• **Étude de la consistance :** Pour étudier la consistance, on utilise le programme Maple 1.7, qui est la suite du programme précédent 1.7.

Pour cela on fait la demi somme des deux équations (1.44 et 1.45) pour obtenir une équation discrète équivalente à l'équation exacte (1.26) (ligne 3) :

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} = & -V_1 \left(\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2dx} \right) \\
 & - \frac{V_2}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} \right) \\
 & + \kappa \left(\frac{u_{i+1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i-1,j}^*}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{dy^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

En comparant cette équation (1.52) au schéma de Cranck Nichol-

```

46 # Erreur de troncature dvt de taylor autour de t=n+1/2
47 # Equation equivalente
48 > 1/2*eqh1+1/2*eqh2:eqh12:=lhs(%) - rhs(%):
49 # substitution de la solution exacte dans cette equation
50 > Uex:=(r,p,q) -> U(x+(p-i)*dx,y+(q-j)*dy,t+(r-n-1/2)*dt);
51 > subs(U[n,i,j]=Uex(n,i,j),
52       U[n,i+1,j]=Uex(n,i+1,j), U[n,i-1,j]=Uex(n,i-1,j),
53       U[n,i,j+1]=Uex(n,i,j+1), U[n,i,j-1]=Uex(n,i,j-1),
54       U[n+1,i,j]=Uex(n+1,i,j),
55       U[n+1,i+1,j]=Uex(n+1,i+1,j), U[n+1,i-1,j]=Uex(n+1,i-1,j),
56       U[n+1,i,j+1]=Uex(n+1,i,j+1), U[n+1,i,j-1]=Uex(n+1,i,j-1),
57       U[ns,i,j]=Uex(n+1/2,i,j),
58       U[ns,i+1,j]=Uex(n+1/2,i+1,j), U[ns,i-1,j]=Uex(n+1/2,i-1,j),
59       U[ns,i,j+1]=Uex(n+1/2,i,j+1), U[ns,i,j-1]=Uex(n+1/2,i,j-1),
60       eqh12); eqh3:=%:
61 # Developpement de Taylor autour de t=n+1/2
62 > k:=6:
63 > U(x,y,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y,t-dt/2),[dt],k),diff):
64 S1:=%:
65 > U(x,y+dy,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y+dy,t-dt/2),[dy,dt],
66 k),diff): S2:=%:
67 > U(x,y-dy,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y-dy,t-dt/2),[dy,dt],
68 k),diff): S3:=%:
69 > U(x+dx,y,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x+dx,y,t-dt/2),[dx,dt],
70 k),diff): S4:=%:
71 > U(x-dx,y,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x-dx,y,t-dt/2),[dx,dt],

```

son (1.37), on peut retrouver ce dernier en remplaçant simplement dans (1.52) les valeurs de $u_{i,j}^*$ par la moyenne $\frac{1}{2}(u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1})$. Ce schéma ADI est donc bien équivalent au schéma de Cranck Nicolson. Les valeurs intermédiaires $u_{i,j}^*$ sont des approximations de la solution à $t = (n + \frac{1}{2})dt$.

Dans l'équation équivalente (1.52), on substitue la solution approchée par la solution exacte (lignes 6 à 15), et on effectue des développements limités autour de $u_{i,j}^* = u(idx, jdy, (n + \frac{1}{2}))$ (lignes 18 à 45). Après soustraction de l'équation exacte, on obtient l'erreur de troncature E_t , qui est en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$.

Le schéma ADI (1.44 et 1.45) est donc consistant avec l'équation exacte (1.26), et est d'ordre 2 en temps et en espace, i.e. en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$.

4.5. Expérimentation numérique avec Matlab

Le programme Matlab (1.8) implémente le schéma ADI en utilisant une programmation matricielle.

Les paramètres du calcul sont définis aux lignes 4 à 10. Les matrices tridiagonales sont construites sur les lignes 17 à 24, puis on applique les conditions aux limites (lignes 26 à 30).

```

1  % resolution ADI
2  clear
3  % maillage
4  L=1; H=1;
5  Nx=51; dx=L/(Nx-1); X=[0:dx:L];
6  Ny=51; dy=H/(Ny-1); Y=[0:dy:H];
7  % champ vitesse
8  v1=1; v2=1;
9  % parametres
10 kappa=0.01; dt=0.001; Tf=0.5; nit=round(Tf/dt)
11 % champ initial
12 delta=(0.1)^2; x0=L/4; y0=H/4;
13 Ui=exp(-(X-x0).^2/delta)*exp(-(Y-y0).^2/delta);
14 Un=Ui; Us=Ui; Un1=Ui;
15 % matrices 3D
16 l1=ones(1,Nx); l2=ones(1,Ny);
17 A1=[-kappa/dx^2-v1/(2*dx); 2/dt+2*kappa/dx^2; ...
18      -kappa/dx^2+v1/(2*dx)]*l1;
19 C1=[ kappa/dy^2+v2/(2*dy); 2/dt-2*kappa/dy^2; ...
20      kappa/dy^2-v2/(2*dy)]*l1;
21 A2=[-kappa/dy^2-v2/(2*dy); 2/dt+2*kappa/dy^2; ...
22      -kappa/dy^2+v2/(2*dy)]*l2;
23 C2=[ kappa/dx^2+v1/(2*dx); 2/dt-2*kappa/dx^2; ...
24      kappa/dx^2-v1/(2*dx)]*l2;
25 % C.L de Dirichlet en i=1 j=1
26 A1(:,1)=0; A1(2,1)=1; C1(:,1)=0;

```

La boucle en temps (lignes 32 à 55) inclut les deux étapes ADI et utilise la fonction **tridiag** (?? page ??) pour la résolution des systèmes linéaires tri-diagonaux.

●**3. Mode propre de diffusion :** Pour valider ce programme, nous avons tout d'abord simulé la diffusion du mode propre (1.36) $p = 1$ et $q = 1$ avec un maillage de $N_x = N_y = 51$ points dans chaque direction et un paramètre $\kappa = 0.01$. La solution calculée au bout d'un temps $T_f = 0.5$ avec $dt = 0.01$ est tracée sur la figure (1.19). L'allure de la solution (figure 1.19a) coïncide bien avec la solution exacte (figure 1.17a), ce que confirme le tracé de l'évolution temporelle de la solution au point $x = 1$, $y = 1$ comparée à la solution exacte (figure 1.19b).

Pour tester la précision d'intégration en temps du schéma, nous avons calculé l'erreur au point $(x = 1, y = 1)$ au bout du temps $T_f = 4$ (de l'ordre du temps caractéristique de diffusion), en fonction du pas d'intégration en temps dt . Le résultat de la figure (1.20a) montre que pour les pas en temps choisis l'erreur est quasiment indépendante du pas en temps dt , et est donc essentiellement une erreur de discrétisation spatiale. On note

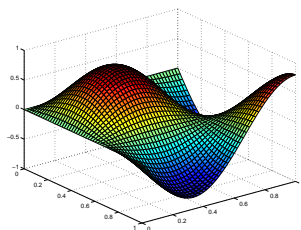
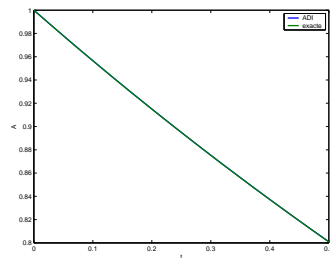
(a) $t = 0.5$ (b) Amplitude en $x=1$ et $y=1$

FIGURE 1.19: solution de diffusion avec le schéma ADI (mode propre $p = 1, q = 1$)

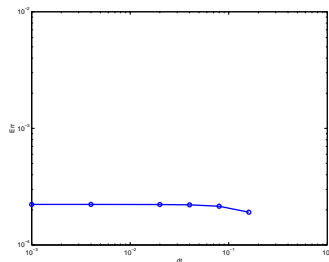
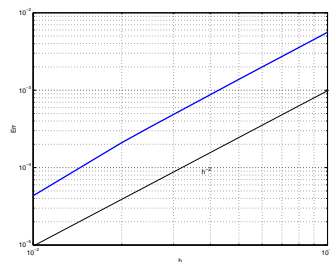
(a) Erreur temporelle $N = 51$ (b) erreur spatiale $dt = 0.1$

FIGURE 1.20: Erreur numérique du schéma ADI (cas de diffusion)

que les pas en temps choisis sont tels que le pas en temps est beaucoup plus faible que le temps caractéristique de diffusion : $dt \ll \tau_d \approx 4.5$

Nous l'avons vérifié en faisant varier le nombre de points du maillage de $N_x = N_y = 11$ à $N_x = N_y = 101$ avec un pas en temps $dt = 0.1$ fixé. L'évolution de l'erreur en fonction du pas de discrétisation spatiale $h = dx = dy$ est tracée sur la figure (1.20b), et on constate que l'erreur décroît en $O(h^2)$.

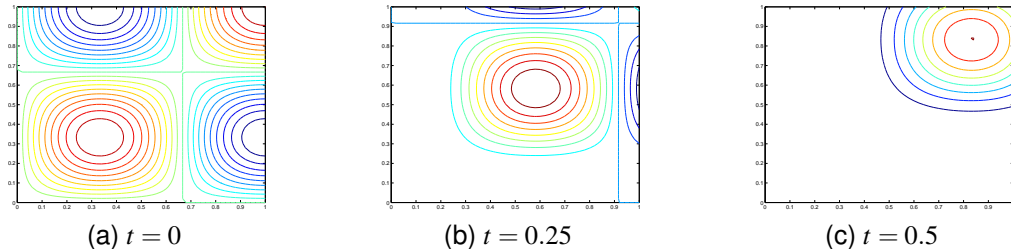
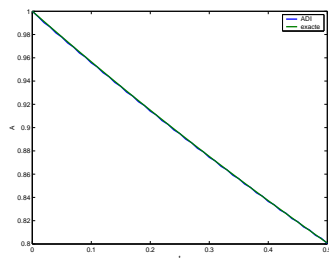


FIGURE 1.21: Iso-valeurs de la solution (cas de convection-diffusion)

Pour cette condition initiale, nous avons aussi fait une simulation avec une vitesse de convection non nulle ($V_1 = V_2 = 1$). Ce cas correspond à un nombre de Péclet $P_e = 200$. Les iso-valeurs de la solution sont tracées sur la figure (1.21).

On note la convection sans déformation de la solution initiale, ce qui confirme que la condition aux limites sur Γ_1 autorise la sortie des structures hors du domaine. On a aussi comparé l'évolution temporelle du maximum de la solution exacte de diffusion et du maximum de la solu-



(a) Evolution temporelle

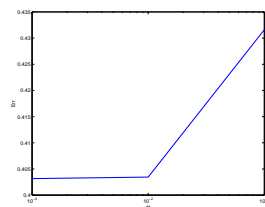
(b) Erreur fonction de dt

FIGURE 1.22: Erreur numérique du schéma ADI

tion calculée, que l'on a tracé sur la figure (1.22a). On vérifie ainsi que la décroissance de la solution est une décroissance visqueuse.

Nous avons ensuite étudié l'influence du pas d'intégration en temps dt , en traçant sur la figure (1.22b) l'écart en fonction de dt entre le maximum de la solution exacte de diffusion et le maximum de la solution calculée. On constate que cet écart croît rapidement en dessus d'une valeur $dt = 0.1$. Cette valeur est justement de l'ordre de grandeur du temps ca-

ractéristique de convection $\tau_c \approx 0.2$.

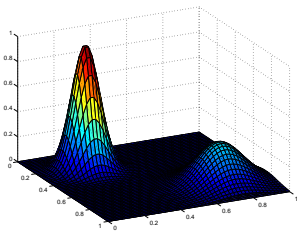
En conclusion sur cette simulation, on note que le choix des paramètres numériques a été fixé par la physique du problème, et non par des conditions numériques de stabilité :

1. la maillage $N_x = N_y = 51$ permet de décrire finement la condition initiale
2. le pas en temps $dt = 0.01$ vérifie $dt \ll \tau_d$ et $dt \ll \tau_c$.

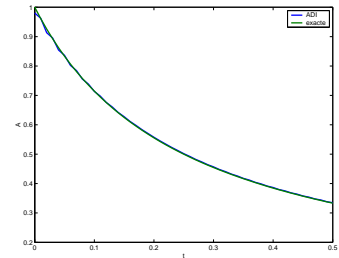
•.4. Convection d'une gaussienne : Le second cas de calcul correspond à la condition initiale gaussienne (1.31), avec les mêmes paramètres qu'au paragraphe • page 65.

Pour un maillage $N_x = N_y = 51$ et un pas en temps $dt = 0.01$, on a tracé sur la figure (1.23a) la solution à $t = 0$ et à $t = 0.5$. Cette solution se compare très bien avec la solution exacte tracée sur la figure (1.16). On a aussi comparé l'évolution temporelle de l'amplitude de la tache gaussienne calculée avec le schéma ADI avec l'expression analytique (1.34). Ces deux courbes coïncident, ainsi que le montre la figure (1.23b).

Nous avons effectué une seconde simulation avec un coefficient de

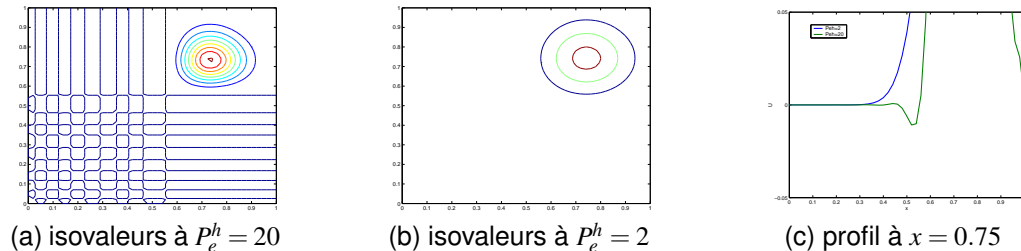


(a) solution numérique à $t = 0$ et $t = 0.5$



(b) Amplitude

FIGURE 1.23: Convection d'une gaussienne

FIGURE 1.24: Convection d'une gaussienne ($P_e^h = 20$)

diffusion plus petit $\kappa = 0.001$. Dans ce cas, la solution numérique présente des oscillations (figure 1.24). Pour cette valeur de κ , le nombre de Péclet de maille :

$$P_e^h = \frac{V h}{\kappa}$$

vaut $P_e^h = 20$ au lieu de $P_e^h = 2$ avec la valeur de κ précédente. Sur le tracé des iso-valeurs (1.24a), on constate l'apparition de légères oscil-

lations, caractérisées par la présence de nombreuses lignes iso-valeurs $u = 0$, qui n'existent pas à $P_e^h = 2$ (figure 1.24b). Le tracé d'un profil à $x = 0.75$ (figure 1.24c) montre bien l'apparition d'une oscillation numérique au pied de la tache gaussienne. Ces oscillations numériques sont de même nature que celles étudiées au paragraphe ?? page ?? du chapitre précédent. Elles apparaissent dès que le Péclet de maille P_e^h devient plus grand que 2 et indiquent que le maillage n'est plus suffisamment fin pour capter la solution de convection avec ce schéma centré.