

Vibrations Libres Amorties

par

MAAMIR Mohamed

ZHANG Xunjie

MOHAMED Muhammad

GOETZ Kim

pour le DM de l'UE Introduction aux vibrations des structures M1

fait le 04 novembre 2016

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Objectifs	3
1.2	Problèmes à étudier	3
1.2.1	Paramétrage	3
1.2.2	Schéma pour deux cas	4
2	Résolution du problème	5
2.1	Étude Statique	5
2.1.1	Cas 1 : Force horizontale appliquée sur le bloc	5
2.1.2	Cas 2 : Moment appliquée centre du bloc	7
2.2	Détermination de la raideur équivalente :	8
2.3	Étude Dynamique	12
2.3.1	Formulation complément	12
2.3.2	Force extérieur nulle	12
2.4	Modèles Vibratoires	13
2.5	Réponse en Vibrations Libres	14
2.5.1	Oscillateur sous-amorti	14
2.5.2	Oscillateur sur-amorti	15
2.6	Programmation	16
2.6.1	code de scilab	16
3	Evolution et Résultat en figure	17
4	Conclusion	21

Table des figures

1.1	premier cas	4
1.2	deuxième cas	4
2.1	énoncé	7
2.2	schéma du problème	8
2.3	cas numéro 1	8
2.4	cas numéro 2	9
2.5	10
2.6	11
2.7	modèle 1	13
2.8	modèle2	14
3.1	Réponse en vibrations libre du cas 1 avec différents ϵ	17
3.2	Réponse sous-amortie du cas 1 avec $\epsilon = 0.05$ et différents F	18
3.3	Réponse sous-amortie du cas 2 avec $\epsilon = 0.05$ et $F = 100N$	19
3.4	Réponse sous-amortie du cas 1 et 2 avec $\epsilon = 0.05$ et $F = 100N$. .	20

Chapitre 1

Introduction

Nous devons étudier le dans ce DM deux systèmes en vibrations libres Amorties. Après avoir défini le paramétrage de notre problème, nous étudieront l'influence des modèles d'amortissement sur la réponse du système. Un modèle numérique basé sur nos études analytiques sera programmé sur le logiciel Scilab.

1.1 Objectifs

Etude statique : $K = ?$ Valider .
Etude dynamique : Equation du mouvement ?
Modèles vibratoires ?
Réponse en Vibrations Libres ?
Programmations** de la RvL sous SCILAB*
Et études paramétrées en fonction des :
1 – CI
2 – modèles d'amortissement :

1.2 Problèmes à étudier

On étudie deux poutres déformables parallèles encastrement à la massif , au bout des poutres , il y a un bloc indéformable qui lie avec les deux poutres . On étudie le system dans deux cas : Force extérieure sur la massif perpendiculaire à la poutre , et moment extérieur autour l'axe oz qui est perpendiculaire aux poutres et traverse la centre de la massif .

1.2.1 Paramétrage

On ajoute les paramètres :
 l : longueur du bloc
 e : épaisseur du bloc
 h : longueur des poutres
 m : masse du bloc
 g : accélération de la pesanteur
 ϵ : facteur d'amortie
 K_{eq1}, K_{eq2} : raideur pour cas1 , cas2

1.2.2 Schéma pour deux cas

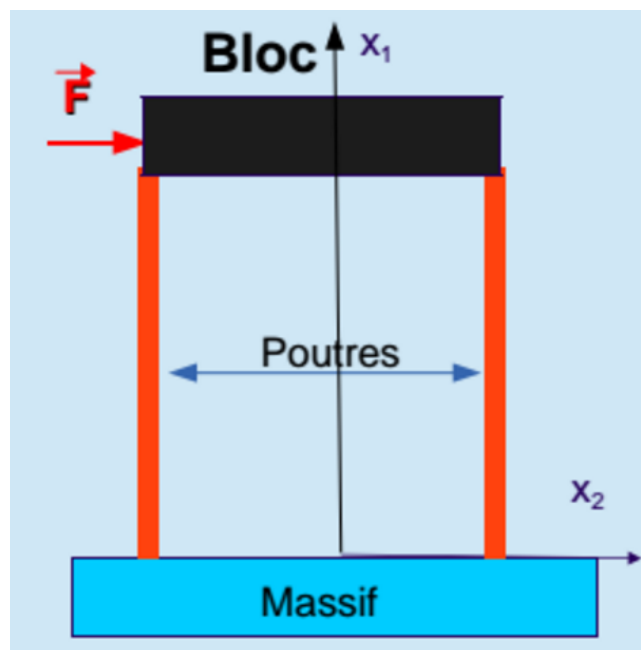


FIGURE 1.1 – premier cas

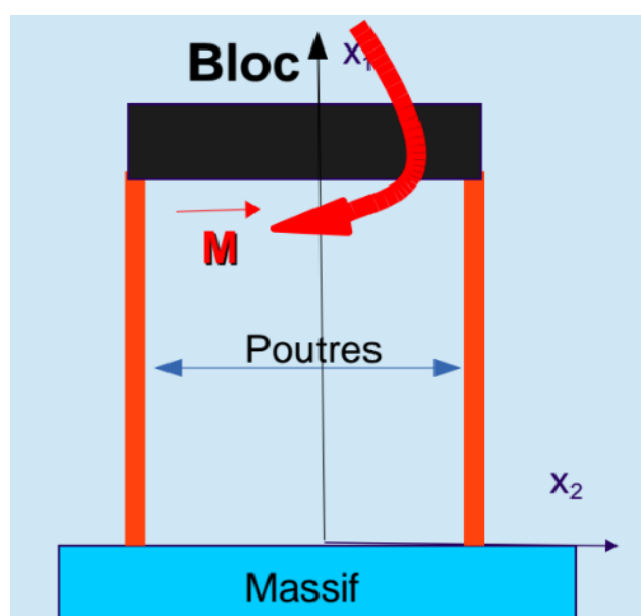


FIGURE 1.2 – deuxième cas

Chapitre 2

Résolution du problème

2.1 Étude Statique

2.1.1 Cas 1 : Force horizontale appliquée sur le bloc

Dans cette partie, on doit trouver le raideur equivalence du système avant d'étudier le vibration. Tout d'abord, il faut que l'on cherche l'équilibre globale pour ce système. Pour simplifier le cas, on isole les 3 solides séparément.

Premièrement, on isole le bloc de masse m , de longueur l et d'épaisseur e en appliquant la force F au côté gauche suivant x_2 . On trouve trois efforts qui applique à chaque poutre :

$$\begin{aligned}X_{1,poutre/bloc} &= -\frac{mg}{2} \\X_{2,poutre/bloc} &= -F \\M_{poutre/bloc} &= m\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ensuite, on isole la poutre de longueur L qui a deux liason encastrements à chaque extrémité et il nous donne 6 inconnues à trouver : $X_{1,sol/poutre}$, $X_{2,sol/poutre}$, $M_{sol/poutre}$, $X_{1,bloc/poutre}$, $X_{2,bloc/poutre}$, $M_{bloc/poutre}$. Dans l'étape précédent, on connaît que :

$$X_{1,bloc/poutre} = \frac{mg}{2} \quad X_{2,bloc/poutre} = F \quad M_{bloc/poutre} = M$$

On cherche les relations en fonction de M qu'il reste inconnue. En appliquant le PFS, on faire le bilan des action extérieurs :

$$\begin{aligned}X_{1,sol/poutre} - \frac{mg}{2} &= 0 \\X_{2,bloc/poutre} + F &= 0 \\M_{sol/poutre} + M + FL &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}X_{1,sol/poutre} &= \frac{mg}{2} \\X_{2,bloc/poutre} &= -F \\M_{sol/poutre} &= -M - FL\end{aligned}\tag{2.3}$$

Ensuite, on cherche les efforts internes : N, T, M_{fz} en appliquant le PFS et en coupant la poutre entre $X_1 \in [0, L]$. On obtient :

$$\begin{aligned} N &= -\frac{mg}{2} \\ T &= F \\ M_{fz} &= M + F(L - x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour trouver la raideur k , on introduit l'équation de la déformée par le champ de déformation et le champs de contraint. On integre 2 fois l'équation pour trouve $V(x)$:

$$\begin{aligned} EIV'' &= M_{fz} = M + F(L - x) \\ EIV' &= Mx + Fx(L - \frac{x}{2}) + A \\ EIV &= \frac{Mx^2}{2} + Fx^2 - (\frac{L}{2} - \frac{x}{6}) + Ax + B \end{aligned} \quad (2.5)$$

On a condition d'encastrement en $x = 0$.

$$V(0) = 0 \quad V'(0) = 0$$

On trouve $A = 0$ et $B = 0$. Pour trouver M , on a condition d'encastrement en $x = L$:

$$\begin{aligned} V'(L) &= 0 \\ ML + F(L^2 - \frac{L^2}{2}) \end{aligned}$$

On trouve $M = -\frac{FL}{2}$ On obtient donc :

$$V(x) = \frac{1}{EI}(F(L\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6})) \quad (2.6)$$

Dans la définition de la raideur, on connaît que :

$$F = KV(X_0)$$

où X_0 est le point d'application de la force. En $x = L$ on a :

$$V(L) = \frac{FL^3}{EI}(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = \frac{FL^3}{12EI}$$

Par identification, on obtient la raideur pour la poutre :

$$K_1 = \frac{12EI}{L^3}$$

Ceci est correspondent au raideur d'une poutre encasté-glissiere. Alors, on peut negliger l'effet de traction-compression sur la poutre.

Il existe 2 poutres identiques qui supportent le bloc. Pour trouver la raideur en parallele equivalence, on fait la somme de deux raideurs :

$$K_{eq1} = \frac{24EI}{L^3}$$

2.1.2 Cas 2 : Moment appliquée centre du bloc

Le deuxième cas d'étude se présente comme ci dessous :

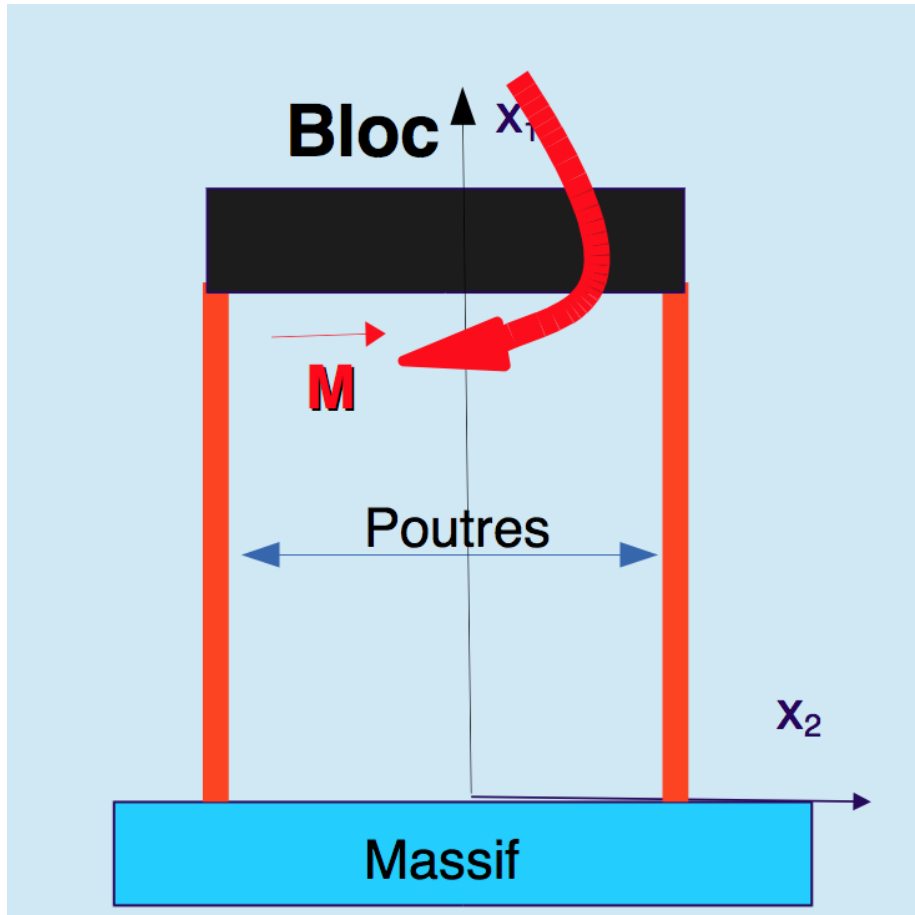


FIGURE 2.1 – énoncé

Nous avons schématisé le problème de la sorte :

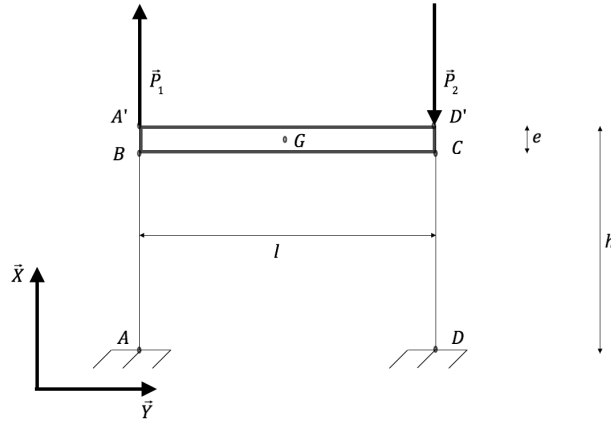


FIGURE 2.2 – schéma du problème

On considère le moment \vec{M} comme étant 2 forces, de même norme, de direction opposée. L'une est appliquée en A', \vec{P}_1 , l'autre en D', \vec{P}_2 . Nous allons diviser l'étude en 2 cas, que nous superposerons ensuite.

2.2 Détermination de la raideur équivalente :

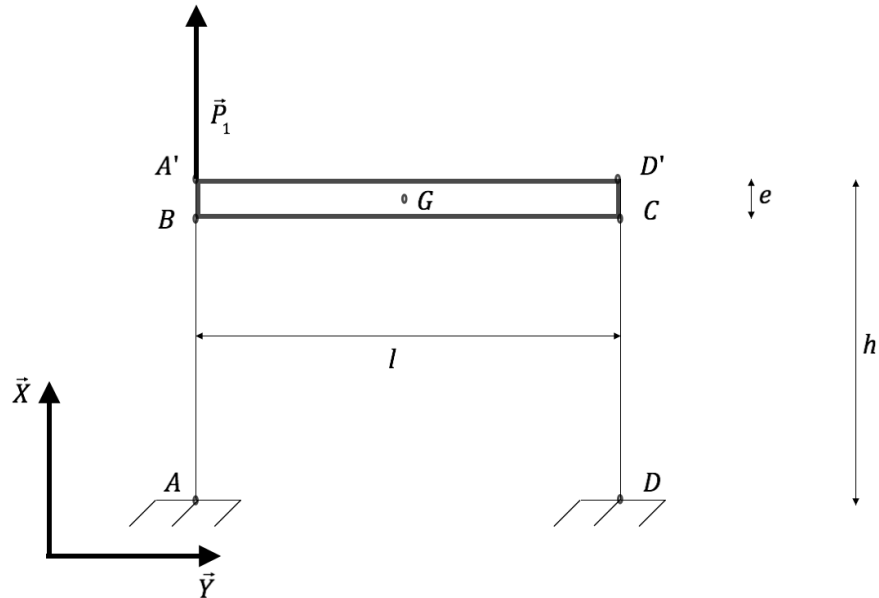


FIGURE 2.3 – cas numéro 1

Dans un premier temps, on considère le cas ci-dessus. En appliquant le PFS on obtient :

$$\begin{aligned} X_A &= P_1 \\ X_D &= 0 \\ Y_A &= Y_D = 0 \\ M_A &= M_D = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nous allons considérer maintenant ce cas suivant :

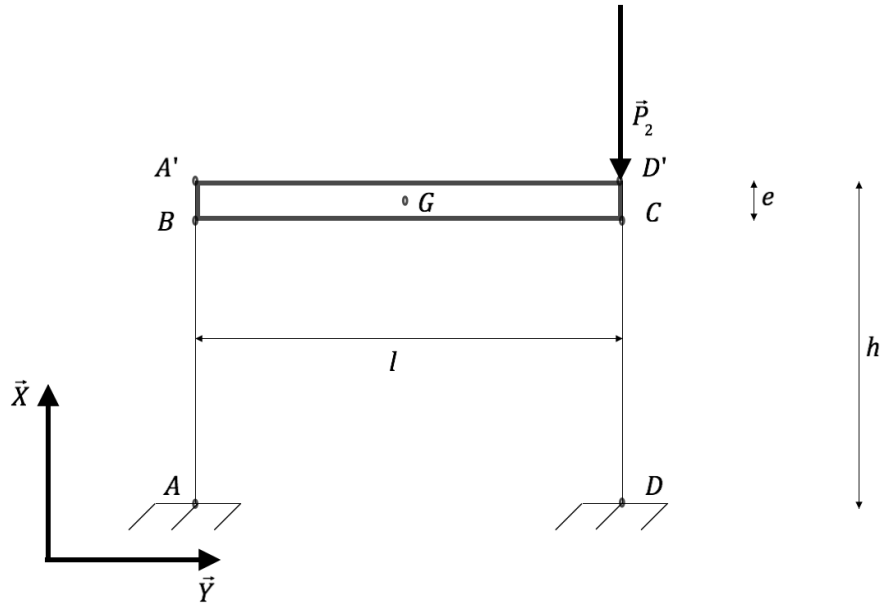


FIGURE 2.4 – cas numéro 2

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ X_D &= -P_2 \\ Y_A &= Y_D = 0 \\ M_A &= M_D = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

On va maintenant calculer le moment \vec{M} :

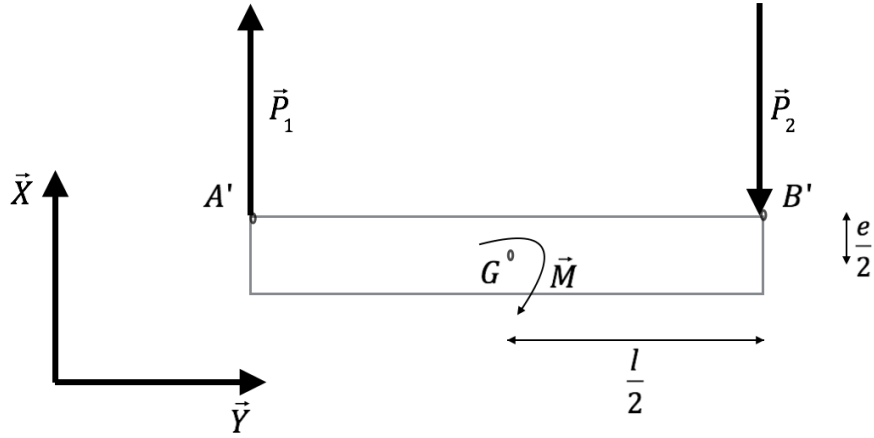


FIGURE 2.5 –

Application du PFS, le point G est l'origine de notre repère :

$$\vec{M} = \vec{M}_{A'} + G\vec{A'} \wedge \vec{P}_1 + \vec{M}_{B'} + G\vec{B'} \wedge \vec{P}_2$$

avec $\vec{M}_{A'} = \vec{M}_{B'} = 0$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= G\vec{A'} \wedge \vec{P}_1 + G\vec{B'} \wedge \vec{P}_2 \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{M} = P_1 \frac{l}{2} - P_2 \frac{l}{2}$$

Comme $P_1 = -P_2$:

$$\vec{M} = P_1 \frac{l}{2} + P_1 \frac{l}{2}$$

$$\vec{M} = P_1 l$$

et $X_A = P_1 = \frac{M}{l}$; $X_D = -\frac{M}{l}$

On va maintenant réaliser une coupe :

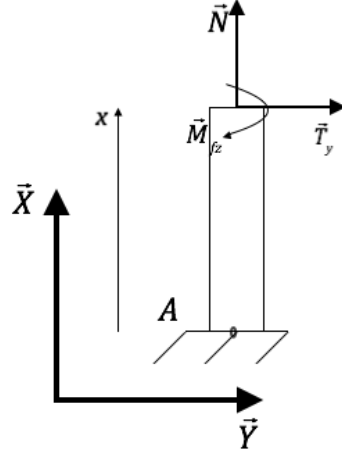


FIGURE 2.6 –

On obtiendra la même chose pour une coupe en B. On va donc écrire le PFS pour les 2 cas :

$$N_{1,2} + X_{A,D} = 0$$

$$T y_{1,2} = 0$$

$$M f z_{1,2} = 0$$

d'où : $N_{1,2} = -X_{A,D}$

Par définition :

$$N = \int \sigma_{xx} dS = \int E \epsilon_{xx} dS = \int E \frac{\partial u}{\partial x} dS$$

donc :

$$N_{1,2} = ES \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x}$$

$$u_{1,2}(x) = -\frac{X_{A,A}}{SE} + C_1$$

$C_1 = 0$ car $u_{1,2}(0) = 0$.

On obtient donc :

$$u_1(x) = \frac{M}{lSE} \cdot x$$

$$u_2(x) = \frac{-M}{lSE} \cdot x$$

On trouve ainsi :

$$u_1(h) = \frac{M}{l} \cdot \frac{h}{SE}$$

On reconnait $P_1 = \frac{M}{l}$ et $\frac{1}{k_1} = \frac{h}{SE}$

$$u_2(h) = -\frac{M}{l} \cdot \frac{h}{SE}$$

On reconnait $P_2 = -\frac{M}{l}$ et $\frac{1}{k_2} = \frac{h}{SE}$

d'où la raideur équivalente :

$$k_1 + k_2$$

$$\boxed{K_{eq2} = \frac{2SE}{h}}$$

2.3 Étude Dynamique

On étudie le système théorique :

2.3.1 Formulation complémente

On simplement note que le déplacement de l'oscillateur est $x(t)$, la force extérieure est $f(t)$, k est raideur de l'oscillateur, et c est coefficient d'amortissement.

La force due à l'amortisseur est : $-c\dot{x}$ et l'application du théorème de la résultante dynamique donne immédiatement :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.9)$$

Pour un solide de moment d'inertie j_{ox} , en mouvement de rotation $\theta(t)$ autour d'un axe x passant par O , lié à un ressort de torsion de raideur k et soumis à un couple extérieur variable $e(t)$, on obtiendrait de même, par application du théorème du moment dynamique :

$$j_{ox}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = e(t) \quad (2.10)$$

Cette relation étant formellement identique à la précédente.

2.3.2 Force extérieur nulle

Pour une force extérieure nulle, $f(t) = 0$, on a l'équation suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.11)$$

Puisque la dissipation d'énergie entraîne l'extinction de la réponse, on cherche une solution $x(t)$ qui présente une valeur asymptotique, de la forme :

$$x(t) = Xe^{st} \quad (2.12)$$

On reporte cette expression dans l'équation du mouvement :

$$mXs^2e^{st} + cXse^{st} + kXe^{st} = 0 \quad (2.13)$$

et on obtient l'équation caractéristique :

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.14)$$

dont la discriminant est : $c^2 - 4km$ qui s'annule si le coefficient d'ammortissement atteint la valeur critique : $c_0 = 2\sqrt{km}$.

2.4 Modèles Vibratoires

On simplifions le système et on étudie les vibrations avec les modèles suivantes :

premier modèle : masse-ressort

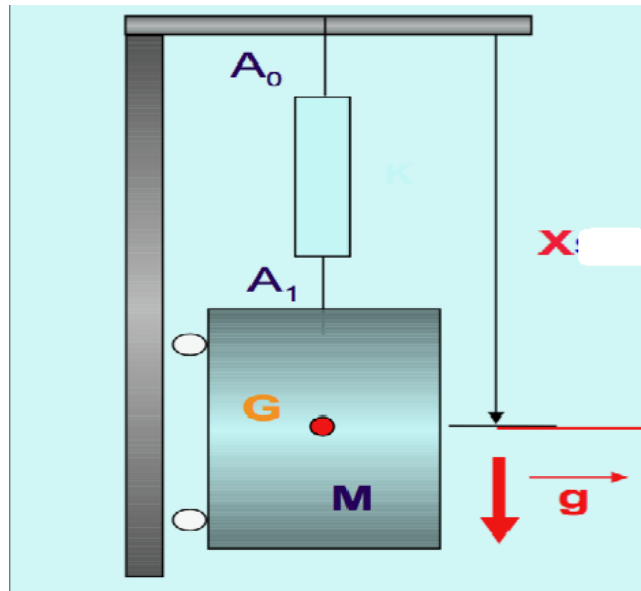


FIGURE 2.7 – modèle 1

deuxième modèle : rotation

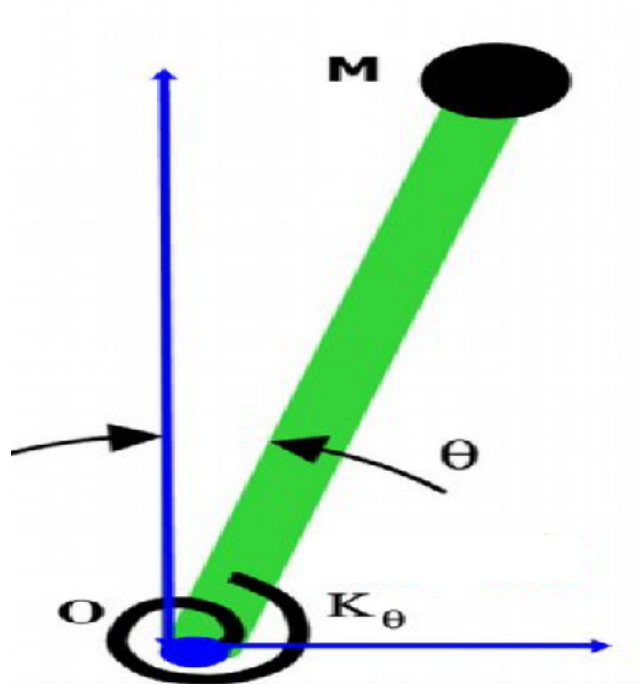


FIGURE 2.8 – modèle2

2.5 Réponse en Vibrations Libres

Une vibration amortisseur génère une force proportionnelle à la vitesse relative de ses extrémités , et de signe opposé à la vitesse .

2.5.1 Oscillateur sous-amorti

Dans les structures vibrantes , l'amortissement est généralement inférieur à la valeur critique , et la discriminant $c^2 - 4km < 0$ qui est négatif . L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$s = -\frac{c}{2m} \pm i \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \quad (2.15)$$

La solution de l'équation du mouvement est alors :

$$x(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t} e^{i \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t} + Be^{-\frac{c}{2m}t} e^{-i \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t} \quad (2.16)$$

Ou encore :

$$x(t) = X e^{-\frac{c}{2m}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t + \varphi\right) \quad (2.17)$$

que l'on met sous la forme :

$$\begin{cases} x(t) &= X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi) \\ \xi &= \frac{c}{2\sqrt{km}} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_d &= \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n \end{cases}$$

Le mouvement est sinusoïdal amorti . Il se compose du produit :

- d'un terme exponentiel à exposant négatif , qui provoque la décroissance de la réponse
- d'un terme sinusoïdal , qui génère les oscillations .

On explique les items suivantes :

- ξ est la **facteur d'amortissement** ou **amortissement réduit** (sans dimension) , généralement exprimé en pourcentage .

Il mesure le rapport entre la valeur effective du coefficient d'amortissement c , et la valeur critique c_0 qui annulerait le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{c_0}$$

Les valeurs courantes de ξ vont 0.1% à 10% environ .

- ω_n est la pulsation naturelle de l'oscillateur non amorti (aussi appelée pulsation propre) , exprimée en radians par seconde . Elle est indépendante du coefficient d'amortissement .

On peut aussi considérer la fréquence naturelle f_n ou fréquence propre , définie par :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ω_d est la **pulsation amortie** , exprimée en radians par seconde (l'indice d provient de l'anglais *damped*)

On peut aussi considérer la fréquence amortie f_d définie par :

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$$

On vérifie aisément que pour $\xi = 10\%$, la différence entre $\omega - \omega_d$ n'est que de 0.5% . On peut donc sans inconvénient confondre pulsation naturelle et pulsation amortie , dans tous les cas où l'amortissement est faible .

- l'amplitude X et la phase φ de la réponse libre sont déterminées par les conditions initiales , au moyen des deux équations :

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

2.5.2 Oscillateur sur-amorti

- Dans le cas où le facteur d'amortissement $\xi = 1$, le coefficient d'amortissement est égal à sa valeur critique : $c_0 = 2\sqrt{km}$, et le discriminant

de l'équation s'annule . Celle-ci admet donc une racine double , réelle :

$$s = -\frac{c_0}{2m} = -sqr{t}\frac{k}{m} = -\omega_n$$

La solution de d'équation du mouvement est alors :

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_n t} \quad (2.18)$$

- Dans le cas où le facteur d'amortissement $\xi > 1$, le coefficient est supérieur que la valeur critique $c_0 = 2\sqrt{km}$, et le discriminant de l'équation caractéristique est positif . Donc celle-ci admet deux racines réelles négatives :

$$s = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

La solution de d'équation du mouvement est alors :

$$x(t) = Ae^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + Be^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.19)$$

2.6 Programmation

2.6.1 code de scilab

Vous pouvez trouver le programme des sources scilab dans l'autre fiche dans le zip.

Chapitre 3

Evolution et Résultat en figure

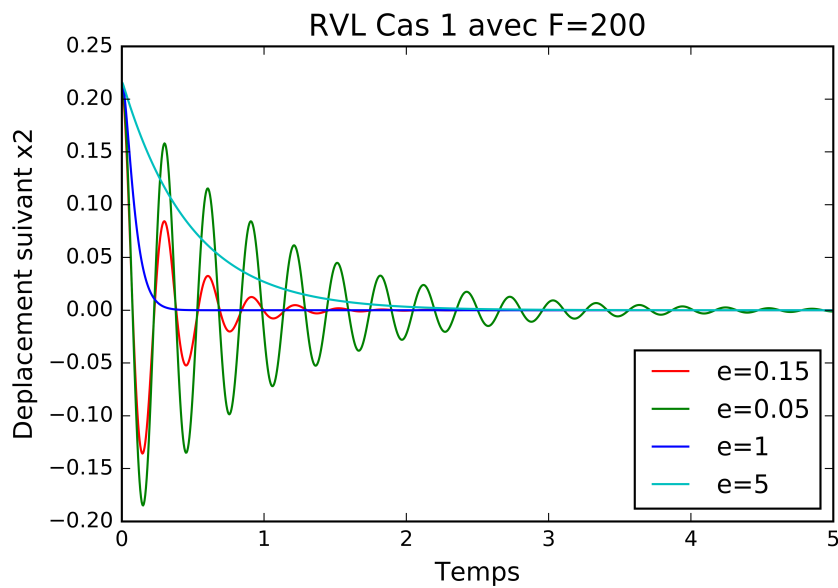


FIGURE 3.1 – Réponse en vibrations libre du cas 1 avec différents ϵ

Nous avons tracé la réponse en vibration du cas 1 suivant différents facteurs d'amortissement. On peut voir sur la figure 3.1 la réponse sous-amortie qui définit une fonction sinusoïdale qui diminue en fonction du temps de manière inversement exponentielle. On retrouve bien le terme sinusoïdal et le terme exponentiel de la solution de l'équation du mouvement dans le cas sous-amorti ($\epsilon < 1$). Pareillement, dans le cas où $1 < \epsilon$, c'est-à-dire dans le cas d'une sur amortissement, la structure met se remet dans sa configuration initiale sans osciller. Par ailleurs, plus on augmente ϵ plus le retour vers la position d'équilibre

prendra plus de temps.

On notera qu'un léger déphasage survient dans le cas du sous-amortissement. En effet, la pulsation en amortissement dépend du facteur ϵ :

$$\omega_d = \sqrt{1 - \epsilon^2} \omega_n = \sqrt{1 - \epsilon^2} * \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}$$

De la même façon qu'on trouvera une pulsation différente si on change K_{eq} ou M_{eq}

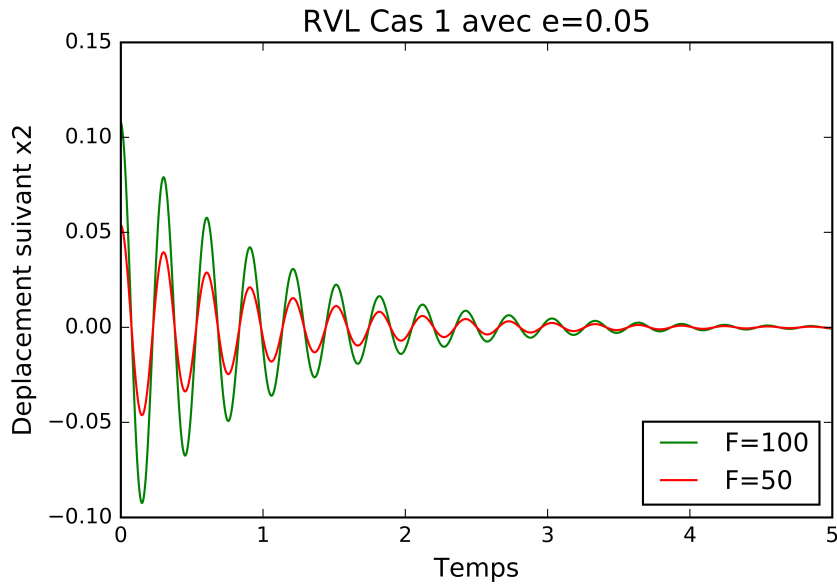


FIGURE 3.2 – Réponse sous-amortie du cas 1 avec $\epsilon = 0.05$ et différents F

Dans la figure 3.2, nous avons seulement changé la force initialement appliquée. La force appliquée \vec{F} produit un déplacement initial x_0 qui nous sert à trouver les constantes d'intégration de l'équation du mouvement. L'action initiale étant constante, on peut dire que la vitesse initiale est nulle :

$$\dot{x}_0 = 0$$

On trouve donc cette relation de proportionnalité :

$$x_0 = \frac{F}{K_{eq}} \quad (3.1)$$

On remarque ainsi que, comme prévu sur la solution analytique, on changeant la force initiale, on change de manière proportionnelle l'amplitude de la réponse. Les particularités temporelles ne changent pas (c.-à-d. la réponse, garde la même fréquence de vibration ($f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$ peut importe la sollicitation initiale). En effet, la fréquence de vibrations ne dépend pas de \vec{F} :

$$f_d = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} * \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}}{2\pi}$$

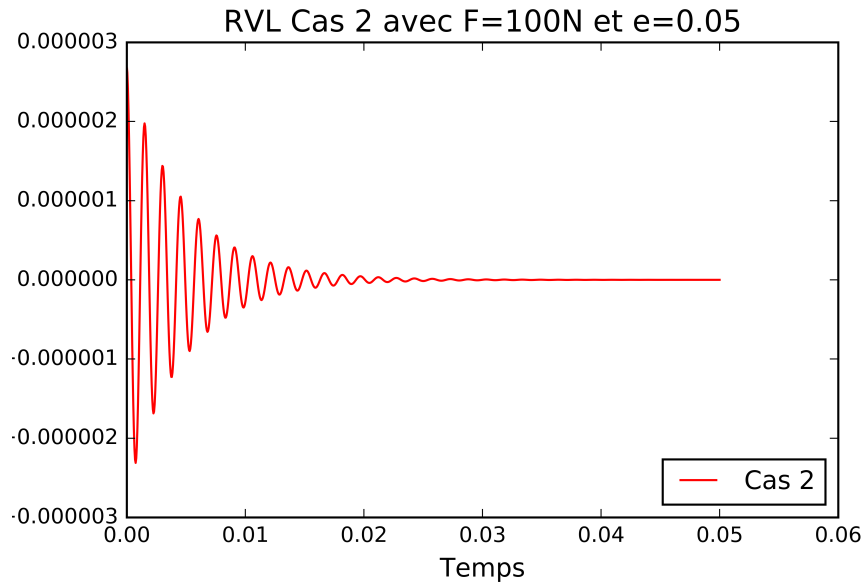


FIGURE 3.3 – Réponse sous-amortie du cas 2 avec $\epsilon = 0.05$ et $F = 100N$

L'étude numérique est appliquée au cas 2. La réponse vibratoire dépend des mêmes équations du mouvement que le cas 1. À la différence que la raideur change dans ce cas. Ainsi, il est plus intéressant pour nous d'étudier le cas où les deux systèmes soit initialement chargés de façons équivalentes ,c.-à-d. avec un déplacement initial équivalent.

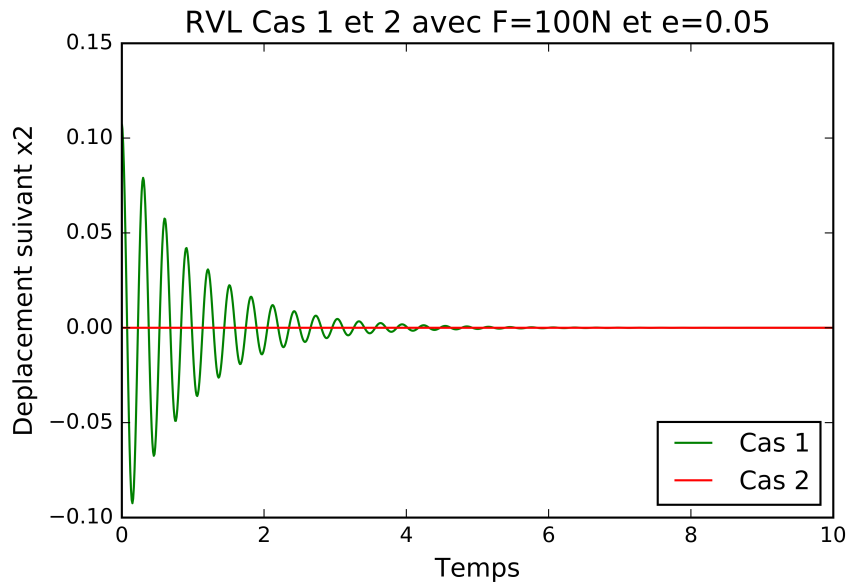


FIGURE 3.4 – Réponse sous-amortie du cas 1 et 2 avec $\epsilon = 0.05$ et $F = 100N$

Nous avons donc tracé les réponses en vibrations libres dans ce cas où les systèmes possèdent les mêmes propriétés physiques et la même condition initiale. On remarque tout de suite que la réponse en traction-compression (cas 2) est beaucoup plus faible que celle en flexion. Dans notre configuration géométrique, la raideur du cas 1 est plus faible que celle du cas 2. Ceci nous conforte dans notre hypothèse où nous avons négligé les effets de la traction-compression sur les poutres verticale dans le premier cas. Ainsi :

$$K_{eq1} \ll K_{eq2}$$

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce DM , on étudie les vibrations libres amorties sur le système "masse sur deux poutres parallèles" . On recherche les formulations de vibrations libres amorties , on obtient la solution analytique .

On trouve la vibration libre amortie est correspondent au facteur d'amortissement . Ainsi que on écrit la programme scilab , on étudie les graphiques et on retiendra que le facteur d'amortissement est une principale caractéristique d'un oscillateur . L'étude d'un système implique généralement l'enregistrement du graphe de sa réponse. La fréquence de vibrations ne dépend pas de force appliquée ou la position initiale . Dû à l'amortissement , la vibration s'arrête au bout d'un certain temps. Nous avons réduit notre problème à des modèles élémentaires.

Pour conclure, on peut dire que ce devoir à la maison nous aura permis de pratiquer le travail en equipe et aussi de mettre en pratique la théorie sur les vibrations libres amorties et ainsi se rendre compte de leur importance dans la resolution de problème mécanique .