Méthodes numériques pour les EDP
TP3: Equation des ondes en 2D

Prof. Peter Spelt, Département Mécanique, Université Claude Bernard Lyon 1,
peter.spelt@univ-lyon1.fr.

1. Problème physique

On considère des oscillations à la surface d'un liquide contenu dans un generateur des ondes. La surface libre du liquide est à $z = h(x, y, t)$, et le paroi à $z = 0$; la frontière du réservoir est de forme carré, i.e., à $x = \pm L$, $-L \leq y \leq L$ et $y = \pm L$, $-L \leq x \leq L$ (voir aussi les notes de cours sur oscillations d'une surface libre, partie 2D). On néglige les effets de viscosité et on suppose que le fluide est un liquide incompressible. On considère la perturbation de la surface libre $\xi(x, y, t) := h(x, y, t) - h_0$ soit faible, donc on obtient l'équation de propagation (voir notes des cours)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right), \tag{1}$$

où c_0 est la célerité des ondes de surface. Les conditions initiales correspondent à la perturbation et vitesse nulle,

$$\xi(x, y, t = 0) = 0, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, y, t = 0) = 0. \tag{2}$$

Formuler les conditions aux limites: A la frontière, on obtient un condition au limite de type Neumann; la vitesse normale est zéro sauf à $x = -L$, où la vitesse normale est $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (Ag/\omega)\sin(\omega t)$ (avec $\mathbf{n}$ la normale sortante), à cause du generateur des ondes; A et ω sont constantes. ***Donc quelles sont les conditions aux limites?***

Dans votre CR, en utilisant les notes de cours, expliquer les principales étapes pour obtenir (1) et la condition au limite à la frontière (demi page - une page max), exprimer c_0 en fonction de l'accéleration de la gravité, et formuler une groupe sans dimension importante pour cette problème.

2. Solution analytique

Dans votre CR montrer que une solution analytique de (1) en 1D est, pour $t < 2L/c_0$, de la forme $\xi(x, t) = B\sin(k(x - x_0) - \omega t)$ (avec $x_0 = -L$); cette solution ne vérifie pas les conditions initiales (2), mais pourrait être utile plus tard quand même. Expliquer pourqoui $k = \omega/c_0$ et $B = -A/k = -Ac_0/\omega$. Enfin, ***dans votre CR***, expliquer comment modifier cette solution analytique pour $t \geq 2L/c_0$.

3. Méthodes numériques

Pour le problème (1) - (2), $-L \leq x \leq L$, $-L \leq y \leq L$, avec les conditions aux limites de Neumann précisées ci-dessus, on propose le schéma différences finies centrés,

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1} - 2\xi_{i,j}^{n} + \xi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = c_0^2 \frac{\xi_{i+1,j}^{n} - 2\xi_{i,j}^{n} + \xi_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + c_0^2 \frac{\xi_{i,j+1}^{n} - 2\xi_{i,j}^{n} + \xi_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}. \tag{3}$$

Dans votre CR, commenter les résultats des études de stabilité et de consistance de ce schéma, et préciser si ce schéma est convergent. Expliquer, ***dans votre CR***, l'erreur de troncature est principalement de la diffusion numérique et/ou de la dispersion numérique.

Pour progammer ce schéma sous Matlab, compléter le code fourni pour le TP3 sur Moodle. Utiliser un maillage de $N_x \times N_y$ points. ***Dans votre CR***, préciser comment les conditions initiales sont représentées dans le code.

4. Etude numérique

Comme cas test, nous utiliserons ici $L = 1$, $c_0 = 1$ et $\omega = 1a.b$ où ab sont les 2 dernières chiffres de votre no. étudiant (example: $\omega = 14.5$ si les 2 dernières chiffres sont 45).

1) Faire une simulation avec $N_x = N_y = 101$; montrer un snapshot à $t = 1$, et vérifier bien que les ondes restent quasiment 2D dans ce cas test. Déterminer $\xi(x = 0, y = 0, t)$ comme fonction de t pour $0 \leq t \leq 4$. Qu'est-ce-que ce passe à $t \geq 3$ dans la simulation?

2) Etude de convergence: Utiliser votre code pour $0 \leq t \leq 4$ pour $N_x = N_y = 51, 101, 201, 401$ en utilisant $C_{FL} = c_0 \Delta t/\Delta x = 0.5$. En utilisant $\xi(x = 0, y = 0, t)$ vs t, pour chaque simulation, déterminer l'amplitude, et comparer avec la solution analytique (Sec. 2). Tracer l'erreur en fonction de $N_x = N_y$ en utilisant une échelle logarithmique pour les axes. Conclusion concernant la précision du schéma?

3) Déterminer la précision temporelle des schémas en traçant le même erreur en fonction du C_{FL} pour $N_x = N_y = 101$. Commenter les résultats obtenues. Conclusion?

4) Modifier votre code pour un condition au limite modifié à $x = -L$: à $L \geq |y| \geq L/10$, utiliser une vitesse normale nulle (à $|y| < L/10$ nous utilisons la même qu'en avant). Presenter un snapshot de la surface libre à $t = 1$.

Instructions de depôt sur Moodle

Créez un dossier NOM_Prenom (sans accent ni espace) qui contient:
- votre fichier Matlab (vérifiez que votre programme s'exécute correctement)
- votre CR au format PDF et appelé NOM_Prenom_CR.pdf

Compressez le dossier NOM_Prenom en .zip et déposez NOM_Prenom.zip sur Moodle.