— Vabiration Libres d'une Poutre en Flexion —

par
GAYE, Ibrahima
ZHANG, Xunjie
Compte-rendu du Ex.31 de l'UE Outil de Mathématique

fait le 29 octobre 2016

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction et Séparation des variables

1.1 Introduction

On ne traitera que ici que le probléme d'une poutre droite , de section uniforme , en flexion simple dqns un plan principal . Ce pendant , le plus souvent , la poutre n'est pas contrainte à rester dans ce plan , et il existe une possibilité de déplacement dans la direction perpendiculaire . Si les excitations ne sont pas contenues dans un plan principal , il faut étudier les virations de flexion , dans les 2 plans principaux définis chacun par l'axe de la poutre et l'une des directions principales de la section .

1.2 Séparation des variables

1.2.1 Équation d'Équilibre

Pour une poutre droite de section constante en flexion , et considérons un effort extérieur t_{ext} nul , on a l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial v^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \tag{1.1}$$

Posons : $v(x,t)=\phi(x)q(t)$ et reportons cette expression dans l'équation du mouvement :

$$\phi\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}q \tag{1.2}$$

1.2.2 Séparations

Séparons les termes qui dépendent de t et de x :

$$\frac{1}{q}\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}\frac{1}{\phi} \tag{1.3}$$

1.3 Solution des fonctions

Les 2 membres de cette équation sont indépendants l'un de x , l'autre de t ; ils sont donc constants . Pour que la solution$q(t)$ reste bornée quand le temps tend vers l'infini , cette valeur constante doit être négative .

Trouver $q(t)$ et $\phi(x)$ quand $-\omega^2$ est constant :

$$\frac{1}{q}\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}\frac{1}{\phi} = -\omega^2 \tag{1.4}$$

1.3.1 équation différentielles ordinaires

On en tire 2 équations différentielles ordinaires , l'une en x , l'autre en t , que l'on résout séparément :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d^4\phi}{dx^4} - \omega^4 \frac{\rho S}{EI}\phi & = & 0 \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.5}$$

1.3.2 recherche la solution

On recherche la solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante : $\phi(x) = ae^{sx}$, d'où léquation caractéristique , de degré 4 en S :

$$s^4 - \omega^4 \frac{\rho S}{EI} = 0 \tag{1.6}$$

qui a solutions :

$$s = \pm\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \ , \ s = \pm i\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \tag{1.7}$$

que l'on peut aussi écrire en fonction d'unparamètre γ sans dimension :

$$s = \pm\frac{\gamma}{L} \ , \ s = \pm i\frac{\gamma}{L} \ , \gamma = L\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \tag{1.8}$$

On en déduit l'expression de la forme modale :

$$\phi(x) = ae^{\gamma\frac{x}{L}} + be^{-\gamma\frac{x}{L}} + ce^{i\gamma\frac{x}{L}} + de^{-i\gamma\frac{x}{L}} \tag{1.9}$$

ou encore :

$$\phi(x) = A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L}) \tag{1.10}$$

On recherche l'autre solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante : $q(t) = ae^{bx}$, d'où léquation caractéristique , de degré 2 en t :

$$b^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.11}$$

qui a 2 solutions :

$$b = \pm i\omega \ , \ \omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{1.12}$$

Donc on en déduit l'expression de la forme modale :

$$q(t) = \hat{e}e^{i\omega t} + \hat{f}e^{-i\omega t} \tag{1.13}$$

Ou encore :

$$q(t) = E\sin\omega t + F\cos\omega t \ , \ \omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{1.14}$$

1.4 Solution finalement

On obtient donc finalement :

$$v(x,t) = \phi(x)q(t) \tag{1.15}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi(x) & = & A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L}) \\ q(t) & = & E\sin\omega t + F\cos\omega t \\ \omega & = & \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \end{array}\right. \tag{1.16}$$

— $\phi(x)$ définit la form de la poutre pendant sa vibration . Elle contient les 5 constantes A, B, C et $\gamma(ou\ \omega)$, qui sont fixées par les conditions aux limites .
— $q(t)$ définit le mouvement de la poutre . Elle contient , outre la constante ω déjà évoquée , les 2 constantes E et F , qui sont fixées par les conditions initiales .

Chapitre 2

Résolution dans le cas de la poutre encastrée-appuie

2.1 conditons limites

Il existe 2 conditions aux limites usuelles pour une poutre en flexion :

2.1.1 extrémité en appui simple à l'abscisse x=L

La flèche esy nulle en tout instant , ainsi que le moment fléchissant :

$$\forall t \left\{ \begin{array}{rcl} v(L,t) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L,t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(L) & = & A\sinh\gamma + B\cosh\gamma + C\sin\gamma + D\cos\gamma = 0 \\ \frac{d^2\phi}{dx^2}(L) & = & \frac{\gamma^2}{L^2}A\sinh\gamma + B\frac{\gamma^2}{L^2}\cosh\gamma - C\frac{\gamma^2}{L^2}\sin\gamma - D\frac{\gamma^2}{L^2}\cos\gamma = 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Et on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A\sinh\gamma + B\cosh\gamma & = & 0 \\ C\sin\gamma + D\cos\gamma & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

2.1.2 Encastrement à l'abscisse x=0

La flèche esy nulle en tout instant , ainsi que la pent de la poutre :

$$\forall t \left\{ \begin{array}{rcl} v(0,t) & = & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

d'où , on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(0) & = & B + D = 0 \\ \frac{d\phi}{dx}(0) & = & A\frac{\gamma}{L} + C\frac{\gamma}{L} = 0 \end{array} \right. \tag{2.5}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ B+D &= 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

2.1.3 Résultat par les conditions limites

On cherche solution pour les 4 équations :

$$\begin{cases} A\sinh\gamma + B\cosh\gamma = 0 \\ C\sin\gamma + D\cos\gamma = 0 \\ A+C=0 \\ B+D=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

On trouve simplement :

$$\begin{cases} \tanh\gamma - \tan\gamma = 0 \\ B = -A\tanh\gamma = -A\tan\gamma \end{cases} \tag{2.8}$$

2.2 Solution analyse

On trouve la solution complète $v(x,t) = \phi(x)q(t)$:

$$v(x,t) = \Big(A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big)\Big(E\sin(\omega t) + F\cos(\omega t)\Big) \tag{2.9}$$

$$= \Big(A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - A\tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - A\sin(\gamma\frac{x}{L}) + A\tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big)\Big(E\sin(\omega t) + F\cos(\omega t)\Big) \tag{2.10}$$

$$= AE\sin(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{2.11}$$

$$+ AF\cos(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{2.12}$$

$$\omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.13}$$

2.3 Infinité de solutions

On écrit une programme pour trouver les r valeurs , ce que on noté γ_r , et un tracé graphique simple permet d'apprecher les solutions . En effect , l'équation peut s'écrire :

$$\tanh\gamma = \tan\gamma \tag{2.14}$$

Les solutions sont données par les intersections des courbes $\tanh\gamma$ et $\tan\gamma$:

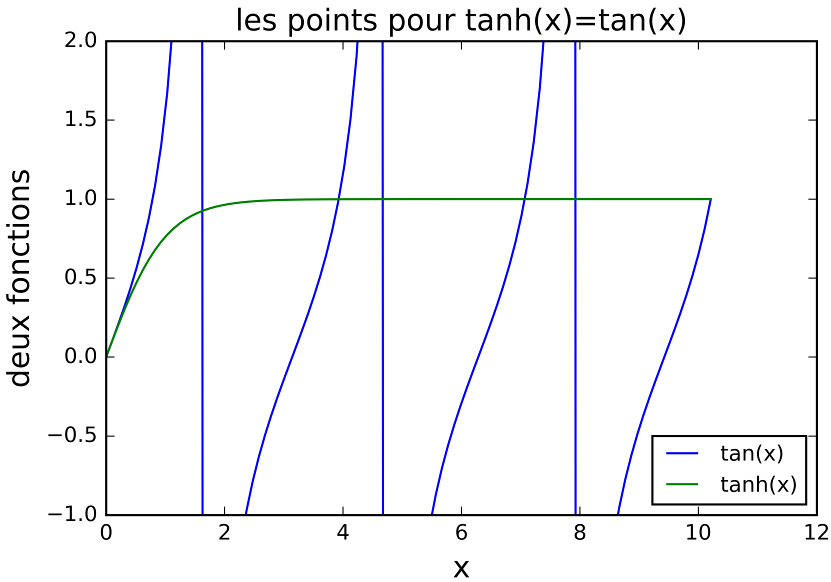

FIGURE 2.1 – infinité points

On constate qu'il esixste une infinité de solution , voisines de $\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, etc.

Les valeurs précises peuvent être recherchées numériquement au voisinage de ces valeurs , au moyen d'un programme Matlab très bref :

for γ=1 :4, fzero(@(gamma) tan(gamma)-tanh(gamma) , (4*r*pi-1)/5

On obtient :

$$\gamma_1 = 3.927 \tag{2.15}$$
$$\gamma_2 = 7.069 \tag{2.16}$$
$$\gamma_3 = 10.210 \tag{2.17}$$
$$\gamma_4 = 13.351 \tag{2.18}$$
$$\gamma_5 = 16.493 \tag{2.19}$$
$$\gamma_6 = 19.634 \tag{2.20}$$
$$\gamma_7 = 22.776 \tag{2.21}$$
$$\gamma_8 = 25.918 \tag{2.22}$$
$$\gamma_9 = 29.059 \tag{2.23}$$
$$\gamma_{10} = 32.201 \tag{2.24}$$
$$...... \tag{2.25}$$
$$\gamma_r = (4 * n * pi - 1)/5 \tag{2.26}$$

A chaque solution γ_r corespond une valeur ω_r de la pulsation :

$$\omega_r = \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.27}$$

2.4 Solution générale

Finalement , la solution générale est :

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)(E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \tag{2.28}$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_r(x) & = & A\Big(\sinh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \tanh\gamma_r \cosh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_r \frac{x}{L})} + \tanh\gamma_r \cos{(\gamma_r \frac{x}{L})}\Big) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ \tanh\gamma_r & = & \tan\gamma_r \\ r & = & 1, 2, 3, 4...... \end{cases} \tag{2.29}$$

Chapitre 3

Analyse et Résultat

Dans ce chapitre on étude la solution complète avec les conditions initiales .

3.1 Premier condition

condition initiale $v(x,0) = v_0$

3.1.1 serie de F_r

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)(E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \tag{3.1}$$

$$v(x,0) = AF_r\Big(\sinh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_r \cosh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_r \cos(\gamma_r \frac{x}{L})\Big) \tag{3.2}$$

$$v(x,0) = v_0 \tag{3.3}$$

il reste donc on cherche la serie de F_r dans la équation sommation suivante :

$$\sum_{r=1}^{\infty} AF_r\Big(\sinh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_r \cosh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_r \cos(\gamma_r \frac{x}{L})\Big) = v_0 \tag{3.4}$$

3.1.2 Transformé de Fourier

On fait évolution de la fonction au-dessus , à gauche et à droite , on fait intergarale suivante en même temps :

$$\int_0^L \Big(\sinh(\gamma_k \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_k \cosh(\gamma_k \frac{x}{L}) - \sin(\gamma_k \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_k \cos(\gamma_k \frac{x}{L})\Big)\, \mathrm{d}x \tag{3.5}$$

k est une constante.

et on obtient :

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^L AF_r\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big) \tag{3.6}$$

$$\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L})-\tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L})-\sin(\gamma_r\frac{x}{L})+\tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

$$=\int_0^L v_0\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big)\,\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

On étude le fonction au dessus , on trouve si r est différent que k :

$$\int_0^L\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big) \tag{3.9}$$

$$\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L})-\tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L})-\sin(\gamma_r\frac{x}{L})+\tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x=0 \tag{3.10}$$

si $r=k$:

$$\int_0^L\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big) \tag{3.11}$$

$$\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L})-\tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L})-\sin(\gamma_r\frac{x}{L})+\tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x=L \tag{3.12}$$

donc à gauche de signe égale , on a : ALF_k
et a droite de signe égale , on a :

$$\int_0^L v_0\Big(\sinh(\gamma_k\frac{x}{L})-\tanh\gamma_k\cosh(\gamma_k\frac{x}{L})-\sin(\gamma_k\frac{x}{L})+\tanh\gamma_k\cos(\gamma_k\frac{x}{L})\Big)\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

$$=\frac{Lv_0\Big(\cos(\gamma_k)+\cosh(\gamma_k)+\tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k)-\sinh(\gamma_k))-2\Big)}{\gamma_k} \tag{3.14}$$

et finalement on trouve F_k :

$$F_k=\frac{v_0}{A\,\gamma_k}\Big(\cos(\gamma_k)+\cosh(\gamma_k)+\tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k)-\sinh(\gamma_k))-2\Big) \tag{3.15}$$

k et r sont constantes 1,2 ,3......

$$F_r=\frac{v_0}{A\,\gamma_r}\Big(\cos(\gamma_r)+\cosh(\gamma_r)+\tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r)-\sinh(\gamma_r))-2\Big) \tag{3.16}$$

3.2 Deuxième condition

dans le deuxième condition on a $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0$

3.2.1 Derivée partiel d'équation

On fait la dérivée partielle de $v(x,t)$ sur t

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = AEw\cos(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{3.17}$$

$$- AFw\sin(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{3.18}$$

3.2.2 Nulle de derivation

On a toujour l'équation suivante :

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = AE_r\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r\frac{x}{L}) + \tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big) = 0 \tag{3.19}$$

Donc evidment , $E_r = 0$ pour tous les r .

3.3 Solution complète

Avec les conditions initiales on arrive :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x,t) & = & \sum_{r=1}^{\infty} AF_r\cos(\omega_r t)\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r\frac{x}{L}) + \tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big) \\ AF_r & = & \frac{v_0}{\gamma_r}\Big(\cos(\gamma_r) + \cosh(\gamma_r) + \tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r) - \sinh(\gamma_r)) - 2\Big) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ E_r & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.20}$$

Chapitre 4

Prénsatations Graphiques

On untilise Jupyter Nootbook pour prensenter les graphiques : pour toutes les valeurs en bosoin , on note 1 ,

$$E = 1 \tag{4.1}$$
$$L = 1 \tag{4.2}$$
$$I = 1 \tag{4.3}$$
$$rho = 1 \tag{4.4}$$
$$S = 1 \tag{4.5}$$

4.1 Graphiques temps fixé

4.1.1 Mode 1 ($\gamma = \gamma_1$)

$\gamma_1 = 3.927$:

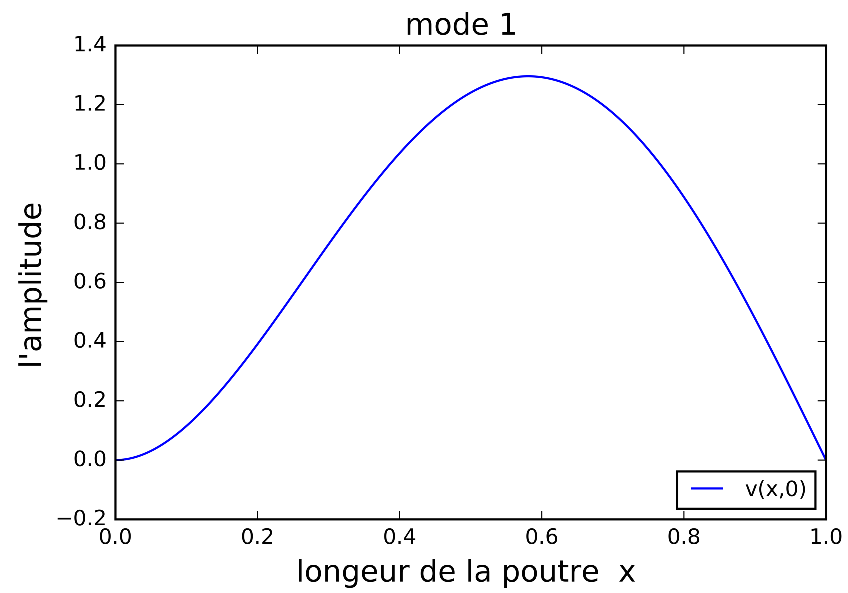

FIGURE 4.1 – t=0 mode 1

4.1.2 Mode 2 ($\gamma = \gamma_2$)

$\gamma_2 = 7.069$:

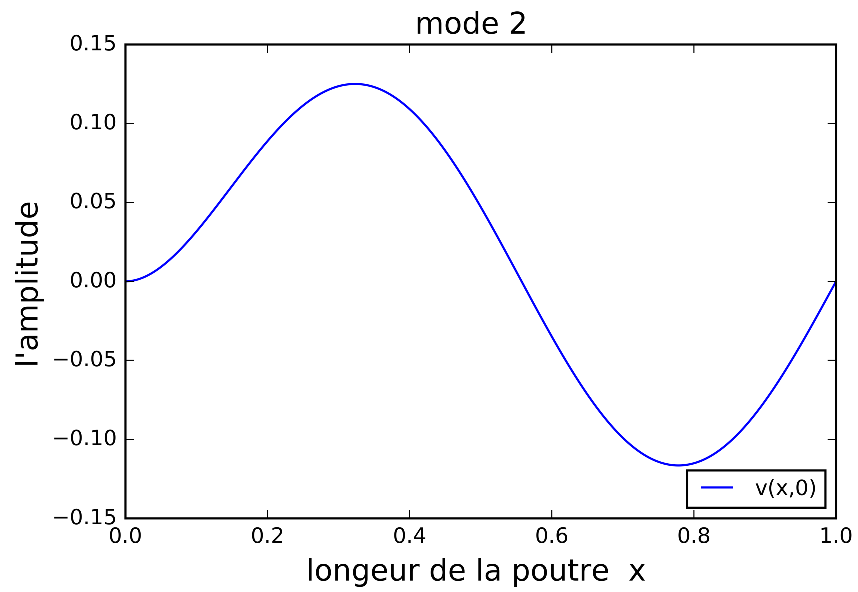

FIGURE 4.2 – t=0 mode 2

4.1.3 V(x,0) total pour γ_1 et γ_2

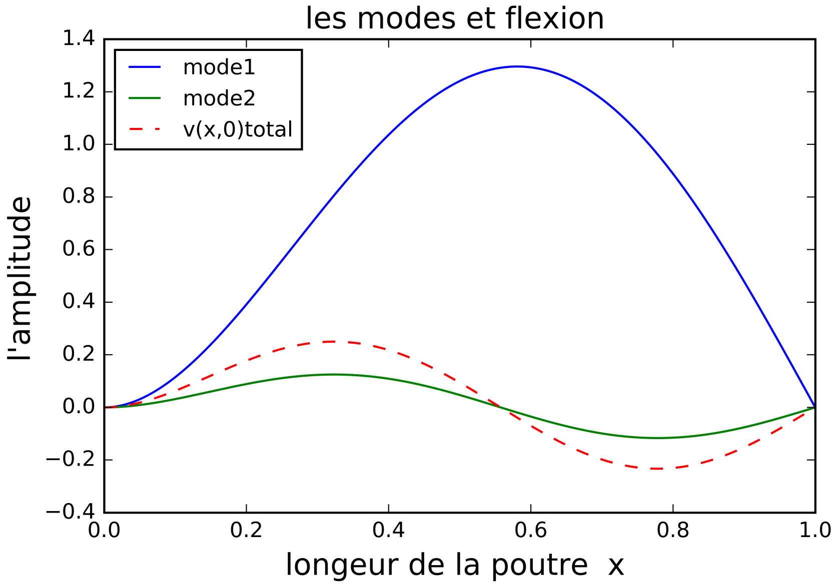

FIGURE 4.3 – 2 modes et vibrations

4.1.4 Mode 5 ($\gamma = \gamma_5$)

$\gamma_5 = 16.493$:

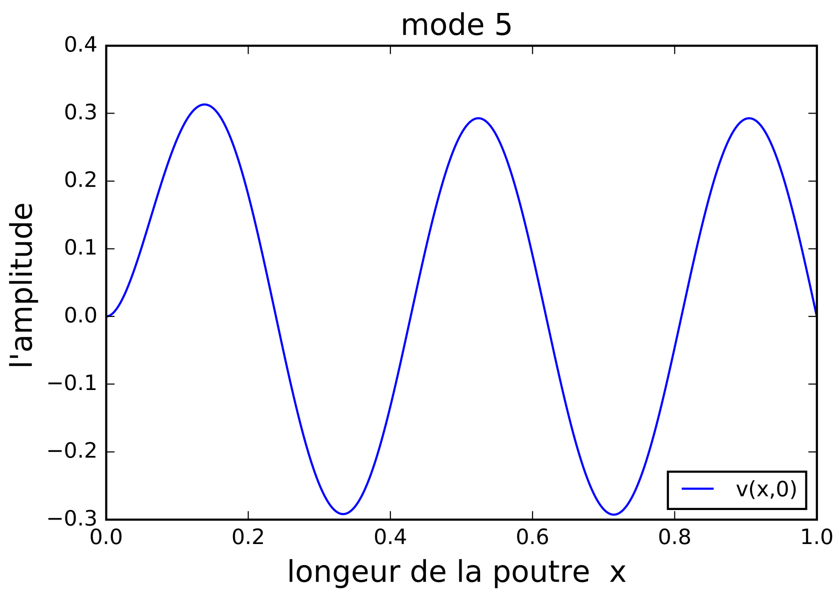

FIGURE 4.4 – t=0 mode 5

4.1.5 V(x,0) total pour γ_1,γ_2,γ_3,γ_4,γ_5

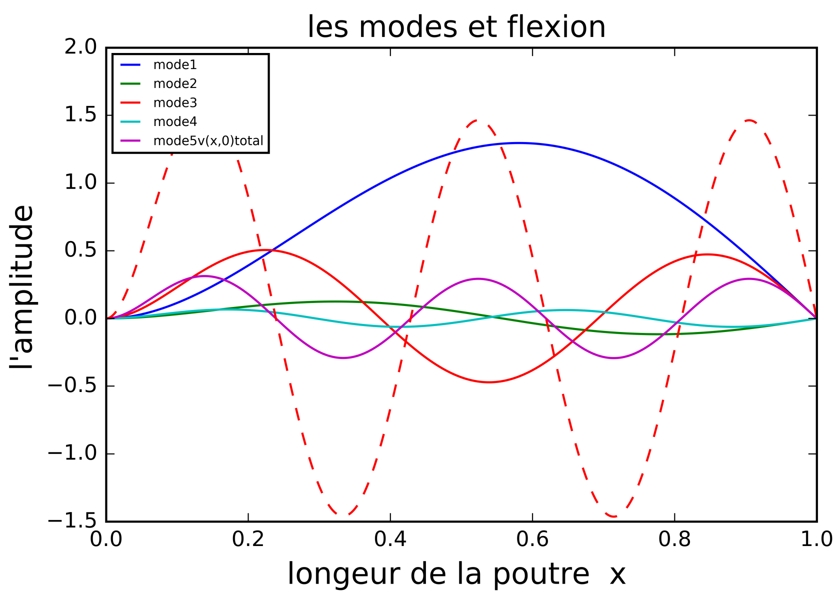

FIGURE 4.5 – 5 modes et vibrations

4.2 Graphiques position fixé

On choisi pa position milieu $x = 0.5$ pour présenter :

4.2.1 Mode1 du temps

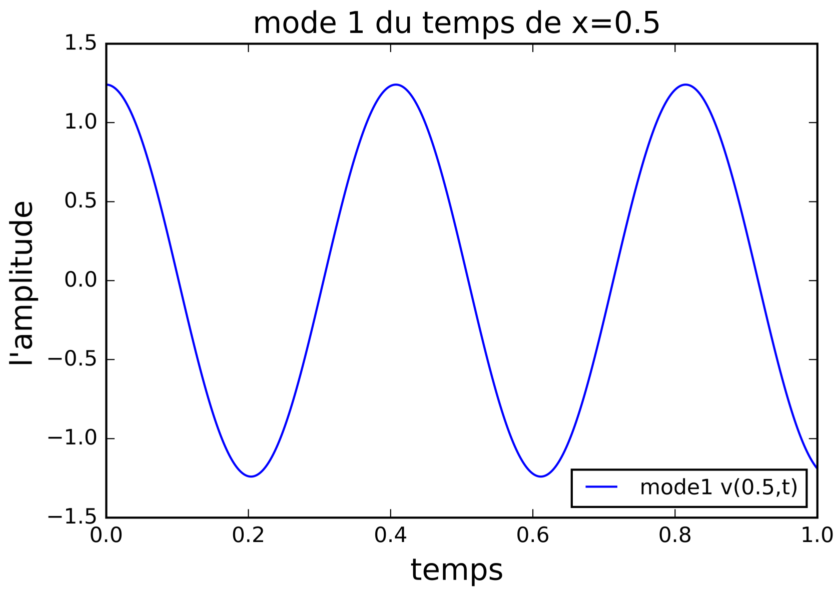

FIGURE 4.6 – mode1 du temps

4.2.2 Mode2 du temps

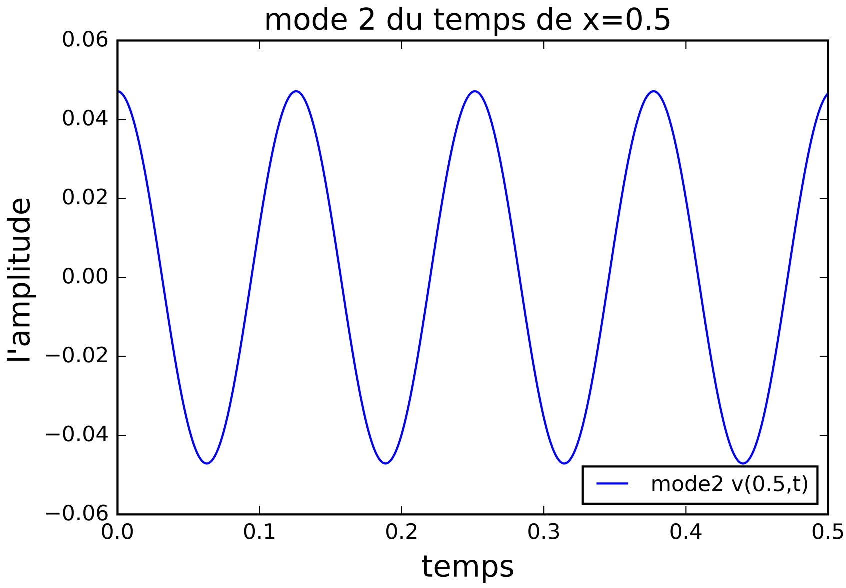

FIGURE 4.7 – mode2 du temps

4.2.3 Viration2 total du temps

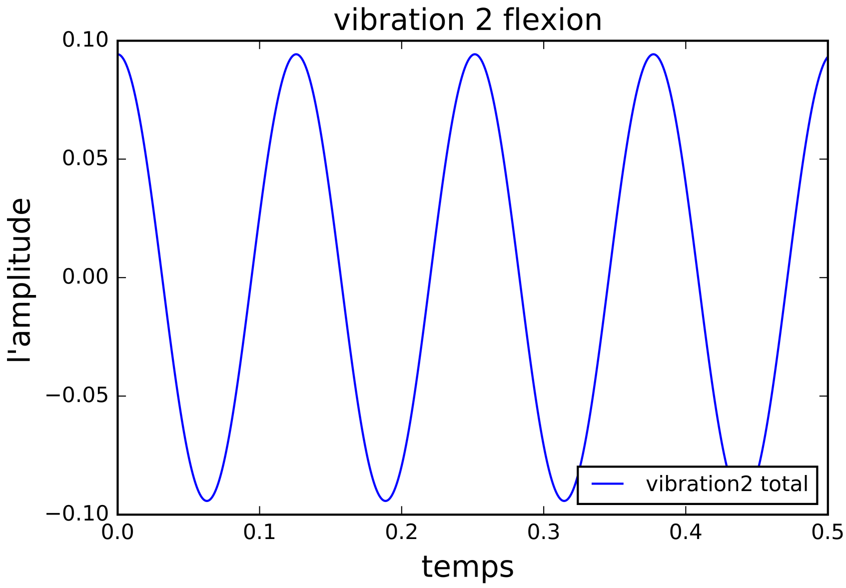

Figure 4.8 – vibration2 du temps

4.2.4 Viration5 total du temps

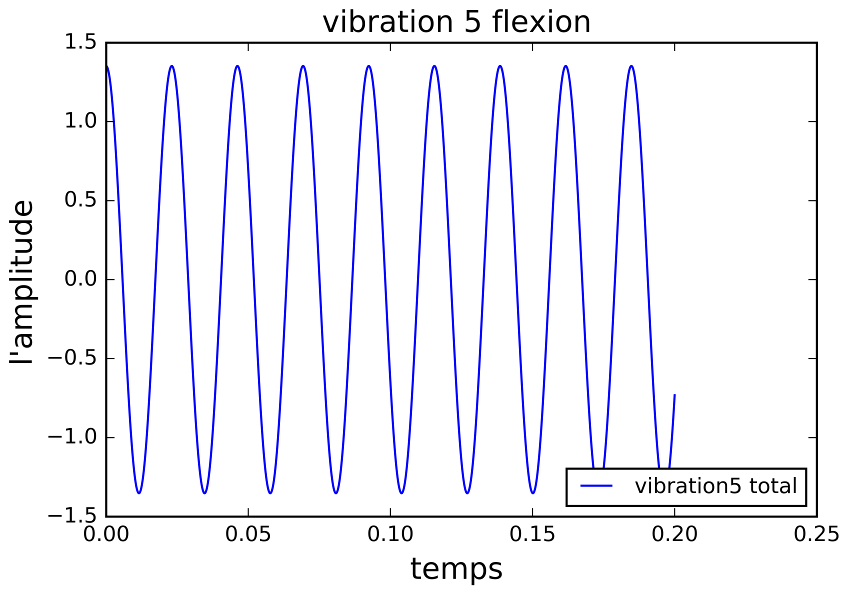

FIGURE 4.9 – vibration5 du temps

Chapitre 5

Conclution

Dans ce

Annexe A

Code Python

A.1 Listes des fonctions

```
def section(L,N,k,S0,SL): #Foction S(r)
    a=(SL-S0)/L
    b=S0
    return ((a*(L/N)*(k-1)+b)+a*(L/N)*k+b)/2


def matrixA(E,L,N,S0,SL): #Algorithme de construction de la Matrice A
    A=np.zeros((N+1,N+1))
    h=L/N
    S1=section(L,N,1,S0,SL)
    SN=section(L,N,N,S0,SL)
    A[0,0]= (E*S1)/h
    A[0,1]= -(E*S1)/h
    A[1,0]= -(E*S1)/h
    A[1,1]= (E*S1)/h
    i=1
    while i<N:
        S=section(L,N,i,S0,SL)
        A[i,i]=A[i,i]+(E*S)/h
        A[i,i+1]=-(E*S)/h
        A[i+1,i]=-(E*S)/h
        A[i+1,i+1]=(E*S)/h
        i=i+1
    return A

def vecteurB(rho,omega,N,S0,SL): #Algorithme de construction du vecteur B
    B=np.zeros(N+1)
    h=L/N
    S1=section(L,N,1,S0,SL)
    SN=section(L,N,N,S0,SL)
    R=1*L/N #k-0=0 donc r1
```

```
    B[0]=rho*omega*omega*S1*h*(R/3)
    B[1]=rho*omega*omega*S1*h*(R/6)
    i=1
    while i<N:
        R1=i*L/N
        R2=(i+1)*L/N
        S=section(L,N,i,S0,SL)
        B[i]=B[i]+rho*omega*omega*S*h*(R1/3+R2/6)
        B[i+1]=rho*omega*omega*S*h*(R1/3+R2/6)
        i=i+1
    return B

def u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,r): #Solution analytique pour S variable.
    a=(SL-S0)/L
    b=S0
    y=((omega**2*rho)/(36*E*a**3))*(a*r*(-4*a**2*r**2-3*a*b*r+6*b**2)
        -6*(b-2*a*L)*((a*L+b)**2)*np.log(a*r+b)+6*np.log(b)*(b-2*a*L)*(
        a*L+b)**2)
    return y
```

A.1.1 Paramètres du problème

```
#Paramettre du probleme:
S0=16.2
SL=6.7
L=51.5
err=0.076
rho=1600
E=21300*10**6
omega=2*np.pi
N=5 # Premiere etude avec N=5
```

A.2 Étude pour N=5

A.2.1 Solution approchée pour N=5

```
A=matrixA(E,L,N,S0,SL)
B=vecteurB(rho,omega,N,S0,SL)
#Condition limite:
A[0,0]=1
A[0,1]=0
B[0]=0
uh=np.linalg.solve(A,B) #Resolution du syteme : solution approchee pour
    N=5

x=np.linspace(0,L,100) #Axe horizontale pour la solution analytique
r=np.linspace(0,L,N+1) #Array avec tout les noeuds en fonction de N
```

```
u5=u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,x)

p1=plt.plot(r,uh,marker='o',label='Solution Approchee Uh')
plt.plot(x,u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,x),'r',label='Solution Analytique U
    ')
plt.legend(loc='lower right')
plt.xlabel('r',fontsize=12)
plt.ylabel('U & Uh',fontsize=12)
plt.title("Solutions Approchees & Analytique pour N="+str(N), fontsize
    =14)
plt.savefig('D:\Google Drive − Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\U Uh
    N5.png',dpi=800)
```

A.2.2 Erreur relative pour N=5

```
ur=u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,r) #On calcul les valeurs theoriques pour
    differents noeuds (array "r")
error=np.absolute(ur−uh)/ur #formule pour chaque point

plt.plot(r,error*100,marker='o') #pourcentage
#plt.axhline(y=err*100, hold=None)
plt.ylabel('$\epsilon$ : erreur relative en $\%$',fontsize=12)
plt.xlabel('$h$',fontsize=12)
plt.title("Erreur relative a differents noeuds pour N="+str(N),
    fontsize=14)
plt.savefig('D:\Google Drive − Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\
    Erreur relative N5.png',dpi=800)
```

A.3 Étude pour différents N

A.3.1 Solutions Approchées pour différents N

```
#Parametttre du probleme:
S0=16.2
SL=6.7
L=51.5
err=0.076
rho=1600
E=21300*10**6
omega=2*np.pi
Nmin=4 #nombre de noeud minimal
Nmax=20 #nombre de noeud maximal

for i in range (Nmin,Nmax+1,4):
    N=i
    x=np.linspace(0,L,100)
    r=np.linspace(0,L,N+1)
```

```
    A=matrixA(E,L,N,S0,SL)
    B=vecteurB(rho,omega,N,S0,SL)
    #Condition limite:
    A[0,0]=1
    A[0,1]=0
    B[0]=0
    uh=np.linalg.solve(A,B)
    plt.plot(r,uh,label='N='+str(N),)
plt.plot(x,u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,x),'k',label='Solution Analytique')
plt.legend(loc='lower right')
plt.xlabel('$r$',fontsize=12)
plt.ylabel('$u_{i}$',fontsize=12)
plt.title("Solutions Approchees & Analytique", fontsize=14)
plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\Solutions Approchees & Analytique.png',dpi=800)
```

A.3.2 Erreur relative en fonction de h

```
error=np.zeros(Nmax)
H=np.zeros(Nmax)
for i in range (Nmin,Nmax):
    N=i
    h=L/N
    x=np.linspace(0,L,100)
    r=np.linspace(0,L,N+1)
    A=matrixA(E,L,N,S0,SL)
    B=vecteurB(rho,omega,N,S0,SL)
    #Condition limite:
    A[0,0]=1
    A[0,1]=0
    B[0]=0
    uh=np.linalg.solve(A,B)
    U=u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,r)
    error[i-Nmin]=(np.absolute(U[N]-uh[N])/U[N])
    H[i-Nmin]=h
plt.plot(H,error,label='$Err(h)$')
#plt.axhline(y=err, hold=None) #tracer ligne pour errmax
plt.ylabel('$\epsilon$ : erreur relative en $\%$ en fonction de N',
    fontsize=12)
plt.xlabel('h',fontsize=12)
plt.title("Erreur relative au noeud $r_{n}=L$", fontsize=14)
plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\Erreur relative fct de h.png',dpi=800)
```

A.3.3 Erreur relative en fonction de N

```
plt.plot(L/H,error*100,label='$Err(N)$')
```

```
plt.ylabel('$\epsilon$ : erreur relative en $\%$ en fonction de N',
    fontsize=12)
plt.xlabel('N',fontsize=12)
plt.title("Erreur relative au noeud $r_{n}=L$", fontsize=14)
plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\
    Erreur relative fct de N.png',dpi=800)
```

A.4 Étude de l'erreur relative en fonction du polynôme interpolation