—— Méthodes des Éléments Finis en 1D ——

par
MAAMIR, Mohamed
ZHANG, Xunjie
Compte-rendu du TP 1 de l'UE Méthodes des Éléments Finis

fait le 22 octobre 2016

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction et Modélisation par Éléments Finis

1.1 Introduction

Dans le cadre de ce premier TP de MEF, nous avons étudié le déplacement des éléments d'une pale (de section variable)en rotation constante et soumise seulement à la force centrifuge. Dans un premier temps, nous avons fait l'étude mathématique du modèle et trouvé une solution analytique des déplacements $u(r)$.Par la suite, grâce aux méthodes des éléments finis en 1D, nous avons construit un système linéaire à résoudre avec les outils numériques. Nous avons programmé sur Python un algorithme permettant de construire les éléments du système à résoudre pour trouver les valeurs approchées de $u(r)$ sur différents points du maillage. La résolution de ce système de manière numérique nous a permis de construire cette approximation. Par la suite, nous avons étudié les erreurs relatives et l'effet du changement de la densité du maillage dans la solution trouvée. Ce compte-rendu décrit précisément les étapes de résolutions analytiques et numériques. De même, nous y analysons les résultats trouvés.

1.2 Problème Physique

1.2.1 Équation d'équilibre

Un petit élément de la pale de largeur δr et de section $S(r)$ est soumis aux actions suivantes :

1. Force centrifuge : $(\rho * S(r) * \omega^2 * r) * \Delta r$
2. Efforts internes : $ES(r+\Delta r)\frac{du}{dr}|_{r+\Delta r} - ES(r)\frac{du}{dr}|_r = \frac{d}{dr} * [ES(r)\frac{du}{dr}(r)]$

On retrouve donc à l'état d'équilibre l'équation suivante :

$$\frac{d}{dr}(ES(r)\frac{du}{dr}) + (\rho S(r)\omega^2)r = 0 \tag{1.1}$$

1.3 Formulation Faible

Pour une fonction test $v(r)$, on retrouve une formulation faible de la forme :

Trouver $u(r)$ tel que $u(0) = 0$ et $\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=L} = 0$:

$$\int_0^L ES(r)\frac{du}{dr}\ dr = \int_0^L \big(\rho S(r)\omega^2 r\big)v(r)\ dr \tag{1.2}$$

1.3.1 solution Analytique

L'équation d'équilibre est une **équation différentielle linéaire d'ordre deux**. Sa résolution est possible et est de manière relativement simple. De plus, nous avons **deux conditions limites** qui vont pouvoir nous aider à trouver les valeurs des constantes d'intégration.

1. Dirichlet : $u(0) = 0$
2. Neumann : $\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=L} = 0$

Cas d'une Section Constante

Si on considère la section S_{const} comme étant constante, en intégrant l'équation d'équilibre (1.1) et en utilisant les conditions limites de Dirichlet et de Neumann, on retrouve une solution analytique de la forme :

$$u(r)_{S_{const}} = \frac{\rho\omega^2}{2 * E}\big(L^2 r - \frac{r^3}{3}\big) \tag{1.3}$$

Cas d'une Section non-constante

Dans notre TP, nous avons considéré la section comme étant variable linéairement et étant de la forme :

$$S = S(r) = a * r + b$$

avec

$$a = \frac{S(L) - S(0)}{L}, b = S(0)$$

En intégrant l'équation d'équilibre (1.1)avec les mêmes conditions limites que précédemment on retrouve une solution analytique de la forme :

$$\begin{aligned} u(r)_{S(r)} = \frac{\omega^2\rho}{36a^3E}\Big(&ar(-4a^2r^2 - 3abr + 6b^2) - 6(b - 2aL)(aL + b)^2\ln(ar + b) \\ &+ 6\ln(b)(b - 2aL)(aL + b)^2\Big) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Résolu avec Wolfram Alpha® : This link

1.4 la forme d'approximation par interpolation

1.4.1 Interpolation d'ordre 1

Dans le cas d'une interpolation d'ordre 1, chaque nœud d'un maillage est relié au suivant par une fonction affine de la forme : $f(x) = \alpha * x + \beta$.

Pour un maillage M^h avec N éléments e_k et $N+1$ nœuds r_k, avec $k \in [0, N], k \in \mathbb{Z}$, nous pouvons facilement déduire la forme de l'interpolation sur chaque élément e_k :

$$u_k^h = \Big(\frac{U(r_k) - U(r_{k-1})}{r_k - r_{k-1}}\Big) r + (\frac{r_k U(r_{k-1}) - r_{k-1} U(r_k)}{r_k - r_{k-1}}\Big) \tag{1.5}$$

1.4.2 Interpolation d'ordre 2

1.5 Expressions des matrices A et B

(avec démonstrations)

Chapitre 2

Résolution numérique

2.1 Algorithme

2.2 Programme

- les commentaires sur la programmation/program, - validation du code.

Chapitre 3

Résultats et Conclusions

3.1 Paramétrage du Problème

avec des sections qui indiquent les résultats obtenus-demandés des commentaires critiques, conclusion finale qui synthétise tous les résultats principaux obtenus, et finalement, perspectives de vos travaux.

3.2 Résultats

3.2.1 Erreur relative en fontion de N

peut importe N, l'erreur est tjr tres elevé sur le premier noeud,meme si les valeur sont tres nuls pour la solution analytique et la solution aprroché. Cest du au approximation de l'ordinateur et du fait que les deux valeurs tendent vers zero. La solution analytique etant théoriquement zero, nous somme supposé trouvé une erreur relative infinie. On peux ne pas prendre en compte ce premier terme et se concentrer sur les suivant. On voit que l'érreur diminue

on est en dessous de $err = 0.06$ a partir de $h =$, soit $N \geq$

3.3 Conclusion

methode simple et rapide requiere la connaissance de la solution analytique et du modèle pour connaitre a quel N la solution devient plus petites que lerreur tolerées

Annexe A

Code Python

Les annexes (codes python/matlab/etc.)