

TP N° 1 : Vibrations de flexion d'une poutre

1. Objectifs du TP :

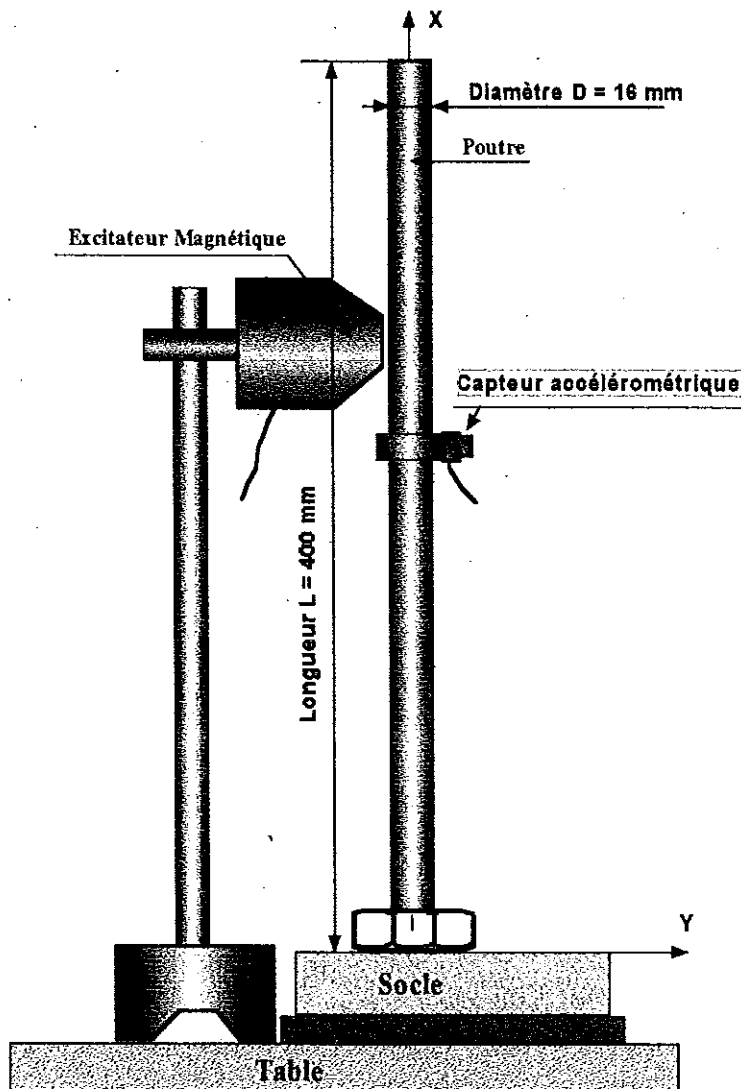
Il s'agit d'étudier le comportement vibratoire dans le domaine des basses fréquences, c'est-à-dire pour les tous premiers modes de vibrations, d'une structure simple telle que la poutre mince et droite en flexion,

Figure 1 : Montage de la poutre.

Cette structure est sollicitée, par l'intermédiaire d'un excitateur magnétique, en régime harmonique afin de pouvoir identifier dans un premier temps par voie expérimentale les caractéristiques¹ modales de la poutre en flexion.

Dans un second temps l'on procédera à une confrontation critique théorie expérience au terme de laquelle on sera amené à préciser les notions de recalage et de limites de modèle.

Figure 1 : Montage de la poutre



Poutre en acier de :

- densité $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
- module de Young $E = 1.8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

¹ Fréquence, déformée et amortissement

2. Dispositif expérimental :

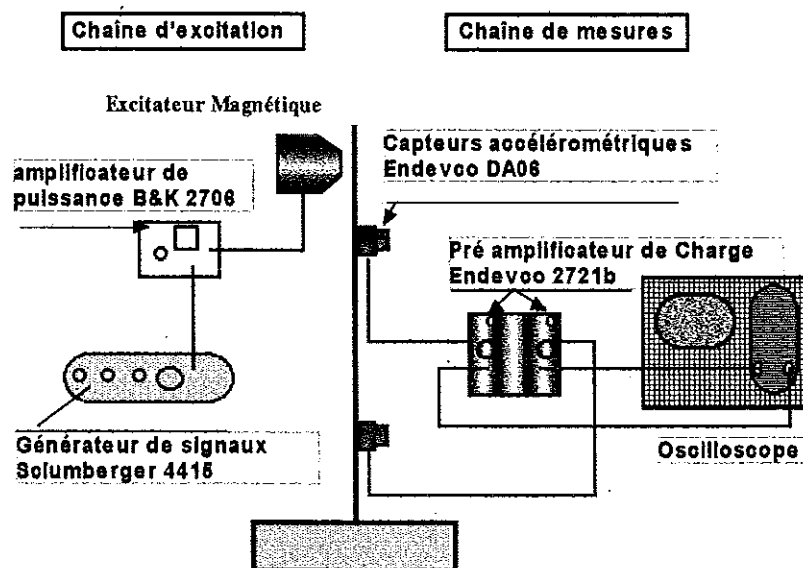
Le dispositif expérimental est constitué d'une chaîne d'excitation, d'une chaîne de mesures et de la structure à analyser Figure 2 Dispositif expérimental .

Le générateur de signaux délivre une tension harmonique, l'amplitude et la fréquence sont réglables. Cette tension est amplifiée (attention à ne pas saturer la chaîne) avant d'alimenter un excitateur électromagnétique dont la force délivrée sera fonction de l'intensité électrique fournie et de l'entrefer excitateur structure. Le signal délivré par le générateur sera visualisé par une entrée de l'oscilloscope.

La chaîne de mesures comporte deux voies de capteurs piézoélectriques (accéléromètres) positionnables le long de la poutre. La charge délivrée par ces capteurs est proportionnelle à l'accélération subie par celui-ci, sa sensibilité est de 2.92 pC/g . Cette charge est convertie en tension (pré amplificateur de charge) dont on règlera le gain de mesure ($100 \text{ } 10 \dots \text{ mV/(m.s}^{-2}\text{)}$). La masse mobile d'un capteur est de 20g .

Enfin, la structure testée est une poutre, à section droite circulaire, de diamètre 16 mm en acier de module de Young $1.8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Elle est visée dans un socle massif en acier.

Figure 2 Dispositif expérimental



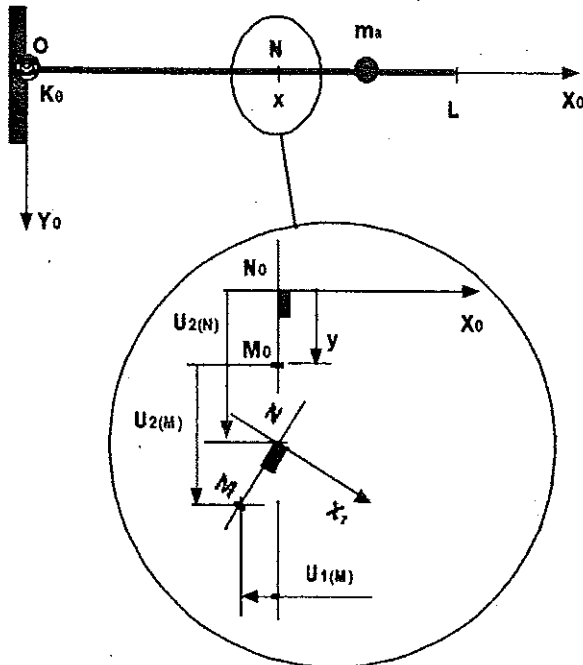
3. Etude théorique² d'une poutre mince en flexion plane et pure :

Nous allons développer successivement les équations du mouvement avec les conditions aux limites associées du problème idéalisé de notre configuration d'essai, intégrant une masse additionnelle m_a , localisée en x_m , ainsi qu'une raideur de rotation K_θ localisée en $x=0$ (modélisation de l'encastrement), Figure 3 Poutre mince en flexion plane et pure, et la solution en terme de schéma modal. Nous adopterons, comme en cours, une approche cinématique à un champ et nous mettrons en œuvre une formulation variationnelle.

² rappel

Puis nous chercherons une solution approchée, par la technique de Rayleigh Ritz et celle des éléments finis³, du problème représentatif du cas test, c'est-à-dire intégrant une masse additionnelle m_a , localisée en x_m , ainsi qu'une raideur de rotation K_0 localisée en $x=0$ (modélisation de l'encastrement).

Figure 3 Poutre mince en flexion plane et pure



Hypothèses :

Géométrique : $d/L \ll 1$

Cinématique :

- petits déplacements et petites rotations
- pas d'allongement de la ligne moyenne
- la normale à la ligne moyenne avant déformation reste normale à la ligne après déformation

• Mise en équation :

➤ Champ de déplacements : $\vec{U}(M,t) = \begin{Bmatrix} U_1(M,t) = -y \cdot \frac{\partial U_2(N,t)}{\partial x} \\ U_2(M,t) = U_2(N,t) \\ U_3(M,t) = 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$ (1.1)

➤ Champ de déformations : $\varepsilon_{xx}(M,t) = \frac{\partial U_1(M,t)}{\partial x} = -y \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2}$ (1.2)
et $\varepsilon_{ij}(M,t) = 0$ pour $(i,j) \neq (x,x)$

➤ Loi de comportement : $\sigma_{xx}(M,t) = E \cdot \varepsilon_{xx}(M,t)$ (1.3)

➤ Calcul des énergies cinétique (e_c), de déformation (e_d) et du travail des charges dynamiques extérieures (vibrations forcées) :

Energie cinétique de la poutre : $e_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \frac{\partial \vec{U}(M,t)}{\partial t}^2 dv$

$$e_c = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \rho \cdot \left(\frac{\partial U_2(M,t)}{\partial t}^2 + y^2 \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x \partial t}^2 \right) ds \cdot dx \quad (1.4)$$

³ A faire à titre d'exercice

$$e_o = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \left(S \cdot \frac{\partial U_2(M,t)}{\partial t} + I_z \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx \quad (1.5)$$

avec $I_z = \int_s y^2 ds$

Energie cinétique de la masse additionnelle :

$$e_{cm} = \frac{1}{2} m_a \frac{\partial U_2(N_{ro},t)}{\partial t}^2 \quad (1.6)$$

Energie de déformation de la poutre : $e_d = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{xx}(M,t) \cdot \varepsilon_{xx}(M,t) dv = e_d = \frac{1}{2} \int_v E \cdot \varepsilon_{xx}^2(M,t) dv$

$$e_d = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2}^2 ds \cdot dx \quad (1.7)$$

Energie de déformation de la raideur de rotation :

$$e_{dK_\theta} = \frac{1}{2} K_\theta (\theta - \theta_0)^2$$

$$\theta = \left. \frac{\partial U_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad \text{et } \theta_0 = 0 \quad (1.8)$$

Travail de la force transversale appliquée en N_f :

$$W_{ext} = \vec{F} \cdot \vec{O_0 M} = F(N_f,t) \cdot U_2(N_f,t) = \int_v F(t) \cdot U_2(M,t) \cdot \delta(M - N_f) dv \quad (1.9)$$

➤ Fonctionnelle d'énergie : $\psi(U_2(N,t)) = \int_{t_0}^{t_1} \{e_o - e_d + W_{ext}\} \cdot dt \quad (1.10)$

Principe d'Hamilton (stationnarité de ψ)

$\rightarrow \delta\psi = 0 \quad \forall \delta U_2$ Cinématiquement Admissible

Soit en négligeant le terme d'inertie rotationnelle :

$$\begin{aligned} \delta\psi = & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ \rho S \cdot \frac{\partial U_2(M,t)}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U_2(M,t)}{\partial t} \right) - E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2} \right) + F(t) \cdot \delta(N - N_f) \cdot \delta U_2(M,t) \right\} dx \cdot dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} m_a \frac{\partial U_2(M,t)}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U_2(M,t)}{\partial t} \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial U_2(M,t)}{\partial x} \right) \right]_0^L + K_\theta \frac{\partial U_2(O,t)}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial U_2(O,t)}{\partial x} \right) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left[E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^3 U_2(N,t)}{\partial x^3} \cdot \delta(U_2(M,t)) \right]_0^L dt = 0 \quad \forall \delta U_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Après une intégration par parties temporelle et deux intégrations par parties spatiales et en sachant que $\delta U_2(N, t_0) = 0 = \delta U_2(N, t_1)$, nous obtenons pour $m_a = 0$:

$$\delta\psi = 0 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ \left[-\rho S \cdot \frac{\partial^2 U_2(M,t)}{\partial t^2} - E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^4 U_2(N,t)}{\partial x^4} + F(t) \cdot \delta(N - N_f) \right] \delta(U_2(N,t)) \right\} \cdot dx \cdot dt$$

$$+ \int_0^L \left[-E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial U_2(M,t)}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^L - K_\theta \frac{\partial U_2(M,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \left[E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^3 U_2(N,t)}{\partial x^3} \cdot \delta (U_2(M,t)) \right]_0^L dt \quad (1.12)$$

Ce qui nous donne :

➤ **Les équations du mouvement :**

$$\rho S \cdot \frac{\partial^2 U_2(M,t)}{\partial t^2} + E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^4 U_2(N,t)}{\partial x^4} = F(t) \cdot \delta(N - N_f) \quad \forall x \in]0, L[\quad (1.13)$$

➤ **et les Conditions aux Limites** associées pour N en $x=0, L$:

$$U_2(N,t) = 0 \quad \text{ou} \quad U_2(N,t) \neq 0 \rightarrow E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^3 U_2(N,t)}{\partial x^3} \cdot n(N) = 0$$

$$\frac{\partial U_2(N,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial U_2(N,t)}{\partial x} \neq 0 \rightarrow -E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 U_2(N,t)}{\partial x^2} \cdot n(N) = K_\theta \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \delta_{(x=0)} \quad (1.14)$$

avec $n(0) = -1$ $n(L) = 1$ $\delta_{(x=0)} = 0$ si $x \neq 0$

• **Résolution en terme de schéma modal pour $m_s=0$:**

➤ Solution générale de l'équation du mouvement (sans second membre):

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre en temps et du quatrième ordre en espace, cherchons une solution par séparation des variables :

$$U_2(N,t) = f(t) \cdot V(x) \quad (1.15)$$

Nous aboutissons à deux équations différentielles couplées :

$$-\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{EI_z}{\rho S} \cdot \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} = \omega^2 \quad \text{avec } \omega \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

soit :

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + \omega^2 \cdot f(t) = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{EI_z}{\rho S} \cdot \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} - \omega^2 V(x) = 0 \quad (1.18)$$

La solution de (1.17) est harmonique et de la forme :

$$f(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} \quad (1.19)$$

celle de (1.18) est de la forme $V(x) = B e^{kx}$ soit encore telle que :

$$\left[\frac{EI_z}{\rho S} \cdot k^4 - \omega^2 \right] B e^{kx} = 0 \quad (1.20)$$

les solutions non triviales nous sont données par :

$$k^4 = \omega^2 \left(\frac{EI_z}{\rho S} \right)^{-1} \quad (1.21)$$

qui définit la relation de dispersion entre le nombre d'onde spatial k et la pulsation ω , nous obtenons finalement :

$$V(x) = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx} + B_3 e^{jkx} + B_4 e^{-jkx} \text{ avec } k = \omega^{1/2} \left(\frac{EI}{\rho S} \right)^{-1/4}$$

ou sous une forme équivalente :

$$V(x) = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(kx) + C_3 \sin(kx) + C_4 \cos(kx) \quad (1.22)$$

Il nous reste à imposer les Conditions initiales du mouvement (position et vitesse) ainsi que les conditions aux limites pour trouver une solution en terme de réponse en vibrations libres. Mais ce calcul de réponse n'intervient pas puisque nous traitons le cas d'une réponse forcée de structure pour des conditions initiales identiquement nulles .

➤ Schéma modal de la poutre en flexion Encastree Libre (cas A) – Appuyée « élastique » Libre (Cas B):

Nous allons chercher le schéma modal du système conservatif associé à notre problème physique : la poutre mince en flexion plane et pure encastree libre cas A, et appuyée avec une liaison élastique en rotation de raideur K_0 libre cas B, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(\omega_i, \phi_i(x))$ solutions de (1.18) et des conditions aux limites associées à notre problème et issues de (1.14) soit :

Cas A : Encastree Libre

Conditions cinématiques en $x=0$: $\phi(0,t) = 0$ et $\left. \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$

Conditions mécaniques en $x=L$: $EI_z \left. \frac{\partial^3 \phi(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0$ et $EI_z \left. \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (1.23)$

Ce qui revient à résoudre un système linéaire homogène après avoir substitué (1.22) dans (1.23) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & k & 0 \\ k^2 \sinh(kL) & k^2 \cosh(kL) & -k^2 \sin(kL) & -k^2 \cos(kL) \\ k^3 \cosh(kL) & k^3 \sinh(kL) & -k^3 \cos(kL) & k^3 \sin(kL) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

Pour que (1.24) possède une solution non triviale il faut que le déterminant associé soit nul, soit l'équation transcendante aux fréquences:

$$\cosh(kL) \cdot \cos(kL) = -1 \quad (1.25)$$

Les premiers racines de (1.25) sont (calculs Maple par exemple) :

$$\begin{aligned} k_1 L &= 1.8751, k_2 L = 4.6941 \\ k_3 L &= 7.8548, k_4 L = 10.996 \end{aligned} \quad (1.26)$$

qui d'après la relation de dispersion (1.21) nous donne les pulsations de résonance de la structure en vibrations libres non amorties. Les déformées modales associées sont obtenues après résolution du système linéaire non homogène issu de (1.24), soit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_i & 0 & k_i \\ k_i^2 \sinh(k_i L) & k_i^2 \cosh(k_i L) & -k_i^2 \sin(k_i L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ k_i^2 \cos(k_i L) \end{Bmatrix} C_4 \quad (1.27)$$

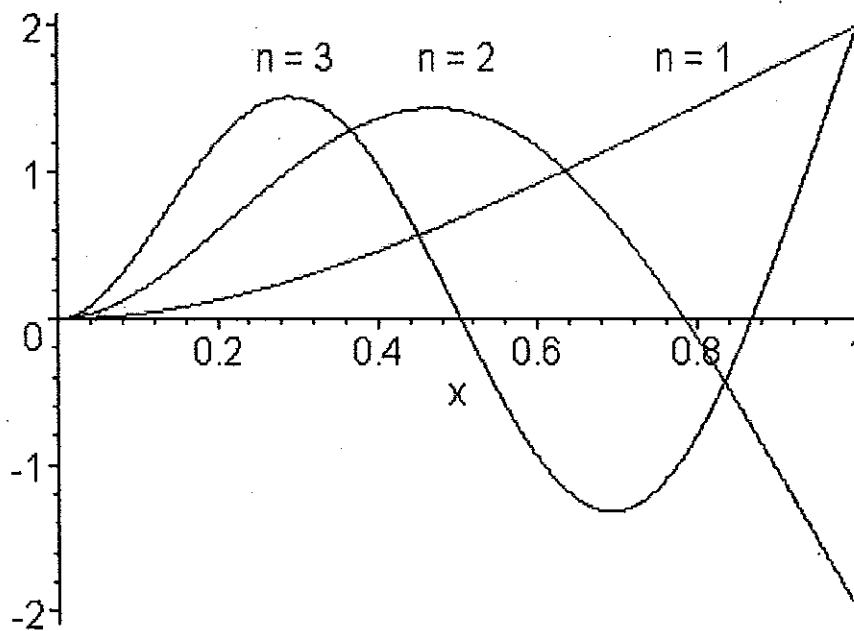
ou encore après résolution, C étant une constante arbitraire :

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= C \left(\cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - \alpha_i (\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)) \right) \\ \alpha_i &= \frac{(\cosh(k_i L) + \cos(k_i L))}{(\sinh(k_i L) + \sin(k_i L))} \end{aligned} \quad (1.28)$$

La Figure 4 Trois premières déformées de flexion, donne une représentation de la ligne moyenne déformée pour les trois premiers modes de flexion de la poutre mince Encastrée Libre d'une longueur $L=1\text{m}$.

Figure 4 Trois premières déformées de flexion

Déformées Modales



Cas B : Appuyée avec K_θ Libre

Conditions cinématiques en $x=0$: $\phi(0,t) = 0$ et $EI_z \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = K_\theta \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$

Conditions mécaniques en $x=L$: $E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^3 \phi(L,t)}{\partial x^3} = 0$ et $-E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 \phi(L,t)}{\partial x^2} = 0$ (1.29)

Ce qui revient à résoudre un système linéaire homogène après avoir substitué (1.22) dans (1.29) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha_{K_0} & k & \alpha_{K_0} & k \\ k^2 \sinh(KL) & k^2 \cosh(KL) & -k^2 \sin(KL) & -k^2 \cos(KL) \\ k^3 \cosh(KL) & k^3 \sinh(KL) & -k^3 \cos(KL) & k^3 \sin(KL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

$$\alpha_{K_0} = \frac{K_0}{EI_z}$$

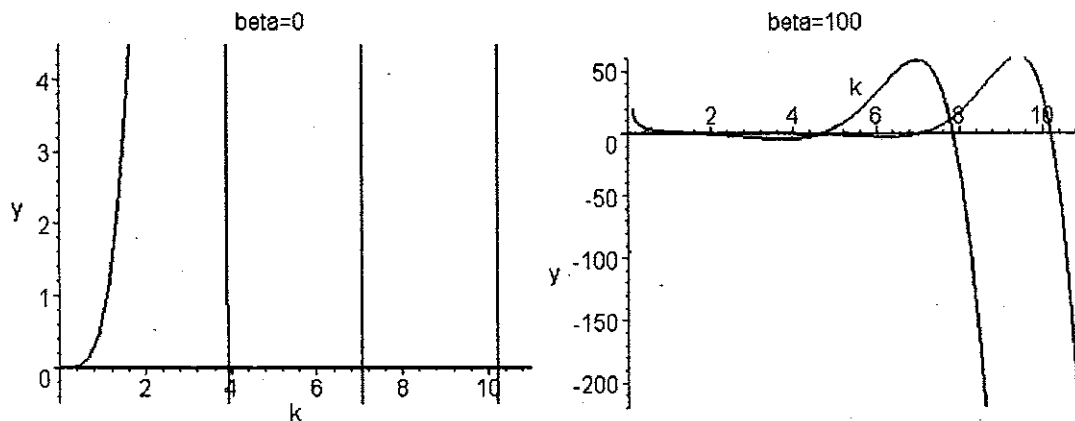
Pour que (1.30) possède une solution non triviale il faut que le déterminant associé soit nul, soit l'équation transcendante aux fréquences:

$$\beta(1 + \cosh(kL) * \cos(kL)) = kL * (\cosh(kL) * \sin(kL) - \sinh(kL) * \cos(kL)) \quad (1.31)$$

Afin de localiser les racines associées à (1.31) pour $\beta = \frac{K_0 L}{EI_z} = 0$ et 100, traçons les courbes

Figure 5 Localisation des premières racines.

Figure 5 Localisation des premières racines



Les premiers racines de (1.31) pour :

➤ $\beta = 0$

La première racine : $k_1 L = 0$ qui correspond à un mode de corps solide rigide⁴

Les trois suivantes qui sont à associer aux modes de corps solide déformables :

$$KL_1 = 3.9266 \quad KL_2 = 7.0686$$

$$KL_3 = 10.2102$$

➤ $\beta = 100$

$$KL_1 = 1.8568, KL_2 = 4.6497$$

$$KL_3 = 7.7826, KL_4 = 10.8975$$

(1.32)

qui d'après la relation de dispersion (1.21) nous donne les pulsations de résonance de la structure en vibrations libres non amorties.

Les déformées modales associées sont obtenues après résolution du système linéaire non homogène issu de (1.30) analogue à (1.27) pour les racines non nulles. Ou encore après résolution pour $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$, C étant une constante arbitraire :

⁴ mouvement de rotation de la poutre indéformable autour de son appui en $x=0$

$$\beta = 0 \quad \phi_i(x) = C(\sin(k_i x) + \alpha_i \sinh(k_i x))$$

$$\beta \neq 0 \quad \phi_i(x) = C((\gamma_i - \kappa_i) \sinh(k_i x) - \cosh(k_i x) - (\gamma_i + \kappa_i) \sin(k_i x) + \cos(k_i x)) \quad (1.33)$$

$$\text{avec } \alpha_i = \frac{\sin(k_i L)}{\sinh(k_i L)} \quad \kappa_i = \frac{2k_i L}{\beta} \frac{\alpha_i}{1 + \alpha_i} \quad \gamma_i = \frac{\cosh(k_i L) + \cos(k_i L)}{\sin(k_i L) + \sinh(k_i L)}$$

La Figure 6 quatre premières déformées pour donne une représentation de la ligne moyenne déformée pour les quatre premiers modes de flexion de la poutre mince Appuyée Libre d'une longueur $L=1\text{m}$.

Figure 6 quatre premières déformées pour $\beta = 0$

Déformées Modales

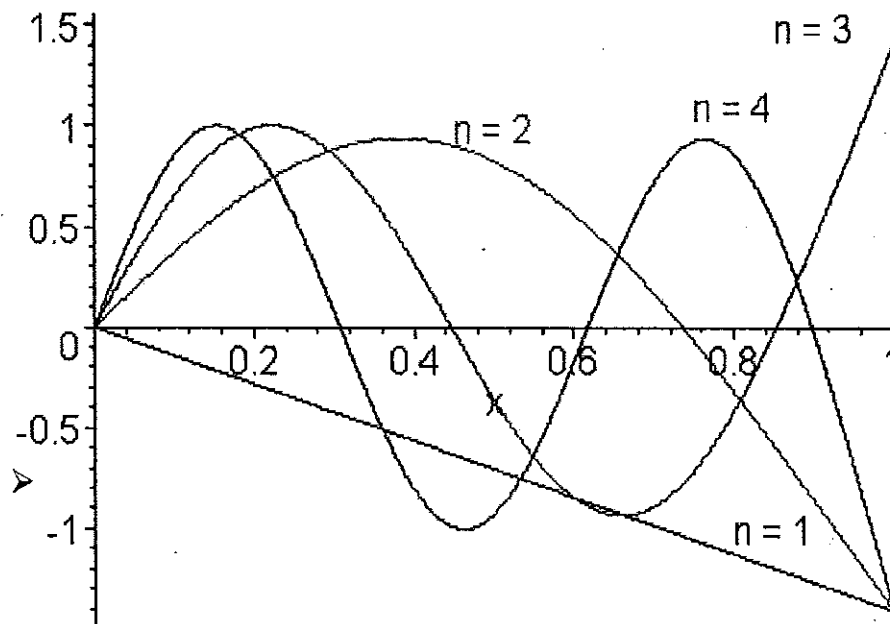
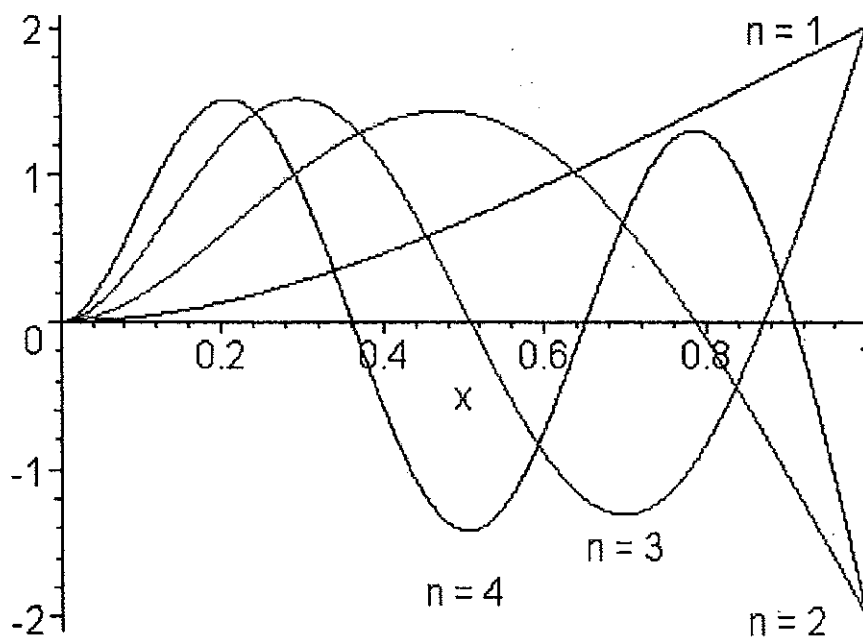


Figure 7 quatre premières déformées pour $\beta = 100$

Déformées Modales



► PROPRIETES d'orthogonalité des déformées modales :

Nous avons démontré en cours que :

$$M_{ij} = \rho S \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} \rho S L * \zeta & \text{si } i = j \text{ et } \begin{cases} \zeta = \zeta_r & \text{si mode rigide } \beta=0 \\ \zeta = 1 & \text{si mode élastique} \end{cases} \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$K_{ij} = EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx = \begin{cases} \text{si } i = j \begin{cases} 0 & \text{si mode rigide } \beta=0 \\ \frac{EI_z (k_i L)^4}{L^3} & \text{si mode élastique} \end{cases} \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.34)$$

• **Résolution approchée pour $m_a \neq 0$ et $K_\theta \neq 0$ par la Méthode de Rayleigh Ritz :**

Elle consiste en la recherche d'une solution approchée de la forme, les $\varphi_i(x)$ sont données :

$$U_2(x,t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \varphi_i(x) = \langle \dots \varphi_i(x) \dots \rangle \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{Bmatrix} \text{ tel que}$$

$$\{\varphi_i(x)\} \text{ Cinématiquement Admissibles} \quad (1.35)$$

et formant une base complète

Substituons (1.35) dans (1.10) nous obtenons :

$$\psi(U_2(x,t)) \approx \psi(a_i(t))$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ \rho S \cdot \left\langle \frac{\partial a_i(t)}{\partial t} \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ \varphi_i(x) \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \varphi_j(x) \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial a_j(t)}{\partial t} \\ \vdots \end{Bmatrix} - E \cdot I_z \cdot \left\langle \dots a_i(t) \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ a_j(t) \\ \vdots \end{Bmatrix} \right\} dx \cdot dt \quad (1.36)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} m_a \left\langle \frac{\partial a_i(t)}{\partial t} \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ \varphi_i(x_m) \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \varphi_j(x_m) \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial a_j(t)}{\partial t} \\ \vdots \end{Bmatrix} - K_\theta \left\langle \dots a_i(t) \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} \vdots \\ a_j(t) \\ \vdots \end{Bmatrix} dt$$

Expression qui peut se mettre sous une forme canonique :

$$\psi(a_i(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial a_i(t)}{\partial t} \right\rangle \left[[M_{ij}] + [m_{aj}] \right] \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial a_j(t)}{\partial t} \\ \vdots \end{Bmatrix} - \left\langle \dots a_i(t) \dots \right\rangle \left[[K_{ij}] + [K_{\theta ij}] \right] \begin{Bmatrix} \vdots \\ a_j(t) \\ \vdots \end{Bmatrix} dt$$

$$M_{ij} = \int_0^L \rho S \begin{Bmatrix} \vdots \\ \varphi_i(x) \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \varphi_j(x) \dots \right\rangle dx \quad m_{aj} = m_a \begin{Bmatrix} \vdots \\ \varphi_i(x_m) \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \varphi_j(x_m) \dots \right\rangle \quad (1.37)$$

$$K_{ij} = \int_0^L E \cdot I_z \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} \dots \right\rangle dx \quad K_{\theta ij} = K_\theta \begin{Bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \vdots \end{Bmatrix} \left\langle \dots \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \dots \right\rangle$$

où l'on reconnaît les opérateurs de masse et de raideur du système discrétisé à N degrés de libertés.

Par application du

➤ Principe d'Hamilton (stationnarité de ψ) $\rightarrow \delta\psi = 0 \forall \delta a_i$

et après intégration par parties temporelle ou application des équations de Lagrange, nous obtenons le système d'équations différentielles homogène à résoudre, problème de valeurs propres généralisé, soit :

$$[\mathcal{M}_y] \left\{ \frac{\partial^2 a_j(t)}{\partial t^2} \right\} + [\mathcal{K}_y] \left\{ a_j(t) \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (1.38)$$

Le schéma modal associé à (1.38), Cf. cours, soit : $(\omega_i, \vec{v}_i = \left\{ a_i(t) \right\}_{a_i})$ pour $i=1$ à N (1.39)

nous donne une approximation du schéma modal des N premiers modes de flexion de notre cas test, soit d'après (1.35) :

$$\left(\omega_i, \Phi_i(x) = \left\langle \dots \varphi_j(x) \dots \right\rangle \left\{ a_j(t) \right\}_{\omega_i} \right) \text{ pour } i=1 \text{ à } N \quad (1.40)$$

➤ Construction des fonctions d'approximation $\varphi_i(x)$ pour notre cas test :

Les conditions aux limites cinématiques à satisfaire sont :

$$\begin{aligned} \text{en } x=0 \quad \varphi_j(x=0) &= 0 \text{ et } \left. \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \neq 0 \\ \text{en } x=L \quad \varphi_j(x=L) &\neq 0 \text{ et } \left. \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \right|_{x=L} \neq 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Dans notre cas l'idéal serait d'utiliser les fonctions développées en (1.33) qui possèdent les propriétés (1.34) et qui nous donnerait la meilleure convergence pour un nombre de fonctions fixé⁵.

Pour représenter le mouvement de corps rigide (mouvement de rotation autour de l'appui en $x=0$) nous retenons la forme suivante et vérifiant (1.41) :

$$\varphi_0(x) = \frac{x}{L} \quad (1.42)$$

Pour représenter les mouvements de corps déformables et respecter l'évolution croissante du nombre d'onde k Cf. (1.26), nous retenons une forme polynomiale respectant (1.41), soit :

$$\varphi_i(x) = \left(\frac{x}{L} \right)^i \quad i > 1 \quad (1.43)$$

Substituons dans (1.37) et tenons compte des propriétés (1.34), nous obtenons :

⁵ A titre d'exercice vous pouvez faire le calcul pour le premier mode

Pour le mode rigide

$$M_{11} = \rho S \int_0^L \varphi_1^2(x) dx = \rho S \cdot \frac{L}{3}$$

$$\text{et } m_{a11} = m_a \cdot \varphi_1^2(x_m) = m_a \cdot \left(\frac{x_m}{L}\right)^2 \quad (1.44)$$

$$K_{11} = EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} dx = 0$$

$$\text{et } K_{\theta 11} = K_\theta \cdot \left. \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0}^2 = \frac{K_\theta}{L^2}$$

Pour les modes élastiques :

$$M_{ij} = \rho S \int_0^L \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) dx = \rho S \cdot L \frac{1}{(1+i+j)}$$

$$\text{et } m_{a ij} = m_a \cdot \varphi_i(x_m) \cdot \varphi_j(x_m) = m_a \cdot \left(\frac{x_m}{L}\right)^{i+j} \quad (1.45)$$

$$K_{ij} = EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx = \frac{EI_z}{L^3} \frac{ij(i-1)(j-1)}{(i+j-3)}$$

$$\text{et } K_{\theta ij} = K_\theta \cdot \left. \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Pour les couplage mode rigide - modes élastiques :

$$M_{1j} = \rho S \int_0^L \varphi_1(x) \cdot \varphi_j(x) dx = \rho S L \frac{1}{(j+2)}$$

$$\text{et } m_{a 1j} = m_a \cdot \varphi_1(x_m) \cdot \varphi_j(x_m) = m_a \cdot \left(\frac{x_m}{L}\right)^{j+1} \quad (1.46)$$

$$K_{1j} = EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx = 0$$

$$\text{et } K_{\theta 1j} = K_\theta \cdot \left. \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Nous remarquons dans les expressions (1.44) à (1.46) la présence de termes non nuls traduisant le couplage par effet de masse induit par m_a .

Substituons dans (1.38) et cherchons une solution temporelle harmonique, nous obtenons, en posant :

$$\delta_m = \frac{m_a}{\rho S L} \quad \beta = \frac{K_\theta L}{EI_z} \quad \Omega = \omega^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S L^4}}$$

$$\delta_{mij} = \frac{1}{(1+i+j)} \quad \chi_{ij} = \left(\frac{x_m}{L}\right)^{i+j} \quad \delta_{k_{ij}} = \frac{ij(i-1)(j-1)}{(i+j-3)}$$

$$\begin{bmatrix} \beta - \Omega \left(\frac{1}{3} + \delta_m \left(\frac{x_m}{L} \right)^2 \right) & \dots & \dots & \dots & -\Omega \left(\delta_{m_{1j}} + \delta_m \chi_{1j}^2 \right) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \delta_{k_{ii}} - \Omega \left(\delta_{m_{ii}} + \delta_m \chi_{ii}^2 \right) & \dots & \delta_{k_{ij}} - \Omega \left(\delta_{m_{ij}} + \delta_m \chi_{ij}^2 \right) \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \delta_{k_{ij}} - \Omega \left(\delta_{m_{ij}} + \delta_m \chi_{ij}^2 \right) & \dots & \delta_{k_{jj}} - \Omega \left(\delta_{m_{jj}} + \delta_m \chi_{jj}^2 \right) \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i'} \\ \vdots \\ a_{j'} \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

➤ APPLICATION NUMERIQUE : $x_m = L$ $\chi_i = \sqrt{\Omega}$ les résultats donnés dans le Tableau 1 Trois premières résonances Etude paramétrée, sont obtenus pour N=4.

Tableau 1 Trois premières résonances Etude paramétrée

| β | δ_m | χ_1 | χ_2 | χ_3 |
|---------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 500 | 0 | 3.503076281 | 22.14543386 | 116.9136600 |
| | 0.05 | 3.196728568 | 20.38410596 | 97.49354734 |
| | 0.1 | 2.957333911 | 19.34554753 | 90.37364589 |
| | 1.0 | 1.552367347 | 16.21730785 | 77.18971758 |
| 100 | 0 | 3.448641669 | 21.81470612 | 112.2569691 |
| | 0.05 | 3.149096142 | 20.08809126 | 94.58324201 |
| | 0.1 | 2.957333911 | 19.34554753 | 90.37364589 |
| | 1 | 1.533027057 | 15.97619780 | 75.33867056 |
| 10 | 0 | 3.448641669 | 21.81470612 | 112.2569691 |
| | 0.05 | 2.725124629 | 18.01569621 | 77.10574719 |
| | 0.1 | 2.532155245 | 17.10030896 | 72.89998686 |
| | 1 | 1.355336612 | 14.23192949 | 63.94714829 |

➤ **Réponse forcée résolution approchée :**

Nous allons calculer la réponse forcée de la poutre en flexion : cas test, dans la configuration suivante : force harmonique appliquée en $x_f = L$, deux capteurs l'un en $x_m = L$, l'autre au point de mesure de la réponse vibratoire en x_r . Pour cela nous utiliserons le schéma modal associé au système conservatif, et introduirons un modèle d'amortissement modal de

type visqueux⁶ $\varepsilon = 0.05$, approximé par la technique de Rayleigh Ritz (Cf. ci-dessus) avec un développement tronqué à $N=4$, soit :

$$U_2(N,t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \Phi_i(x) \approx \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \langle \dots \varphi_i(x) \dots \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ a_i \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\omega_i} = \sum_{i=1}^N \bar{\eta}_i e^{j\omega t} \langle \dots \varphi_i(x) \dots \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ a_i \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\omega_i} \quad (1.48)$$

que nous substituons dans (1.10), ce qui nous donne après extrémalisation le système linéaire complexe découplé à résoudre :

pour $i = 1, N$

$$(-m_i \omega^2 + j\omega \lambda_i + k_i) \bar{\eta}_i = \Phi_i$$

$$(1 + j2\varepsilon_i \frac{\omega}{\omega_i} - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}) \bar{\eta}_i = \frac{\Phi_i}{k_i}$$

$$\text{avec : } m_i = \langle 1 \dots a_i \dots \rangle_{\omega_i} [M] \begin{Bmatrix} 1 \\ a_i \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\omega_i} \text{ masse modale}$$

$$k_i = \langle 1 \dots a_i \dots \rangle_{\omega_i} [K] \begin{Bmatrix} 1 \\ a_i \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\omega_i} = m_i \omega_i^2 \text{ raideur modale}$$

$\lambda_i \varepsilon_i$ amortissement et tau d'amortissement visqueux modal

$$\Phi_i = F_0 \langle 1 \dots a_i \dots \rangle_{\omega_i} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \varphi_i(x_F) \\ \vdots \end{Bmatrix} \text{ action généralisée du mode } i \quad (1.49)$$

Soit finalement, en terme de déplacement transversal d'un point de la ligne moyenne de la poutre en flexion, en x :

$$U_2(N,t) \approx \sum_{i=1}^N \frac{F_0 \langle 1 \dots a_i \dots \rangle_{\omega_i} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \varphi_i(x_F) \\ \vdots \end{Bmatrix}}{k_i (1 + j2\varepsilon_i \frac{\omega}{\omega_i} - (\frac{\omega}{\omega_i})^2)} \langle \dots \varphi_i(x) \dots \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ a_i \\ \vdots \end{Bmatrix}_{\omega_i} e^{j\omega t} \quad (1.50)$$

Nous représentons, Figure 8 configuration de , le déplacement transverse normé pour une poutre avec une masse en L pour différentes valeurs de x :

1, .9, .85, .8, .7, .6, .5, .4, .3, .2

avec le code de couleurs :

[black , magenta , yellow , brown , red , orange , pink , violet , red , blue]

Les premières fréquences de résonance sont données par :

⁶ Nous nous plaçons dans le cadre d'un amortissement modal faible et par conséquent nous négligeons le couplage intermodal induit par l'amortissement.

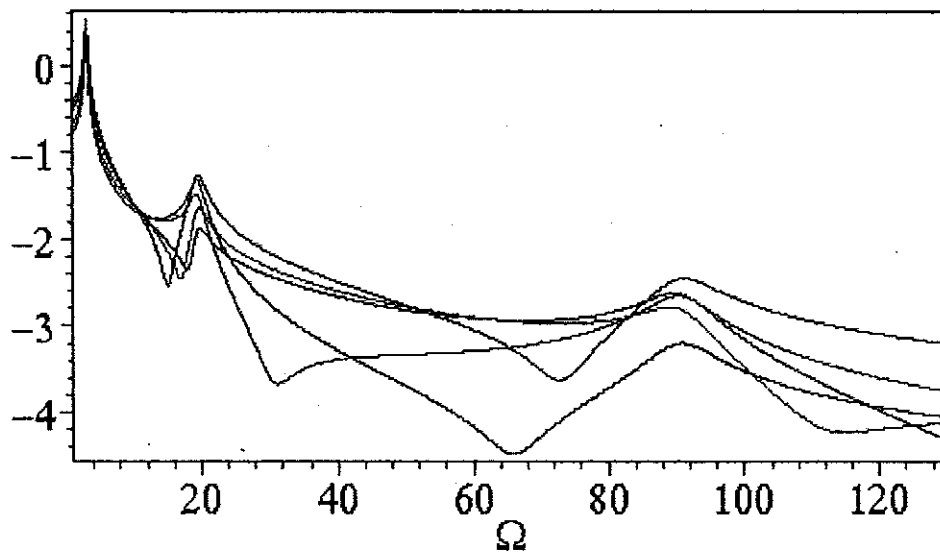
- sans masse ajoutée : $\Omega_1 = 3.448$ $\Omega_2 = 21.815$ $\Omega_3 = 112.257$
- avec une masse ajoutée : $\Omega_1 = 3.025$ $\Omega_2 = 19.52$ $\Omega_3 = 90.632$

Nous simulons ensuite l'essai avec la présence d'une seconde masse mobile (capteur) et représentons, Figures 9 Simulation de l'essai, le déplacement transverse pour une poutre avec une masse en L pour différentes positions du capteur mobil, soit pour les valeurs de x :

1, .9, .85, .8, .7, .6, .5, .4, .3, .2

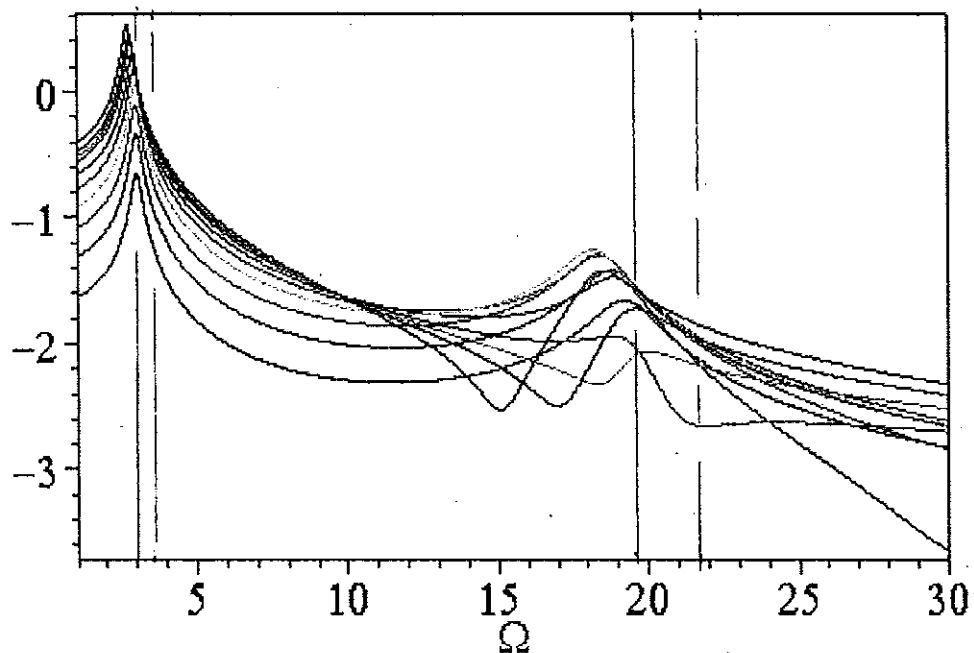
Figure 8 configuration de référence

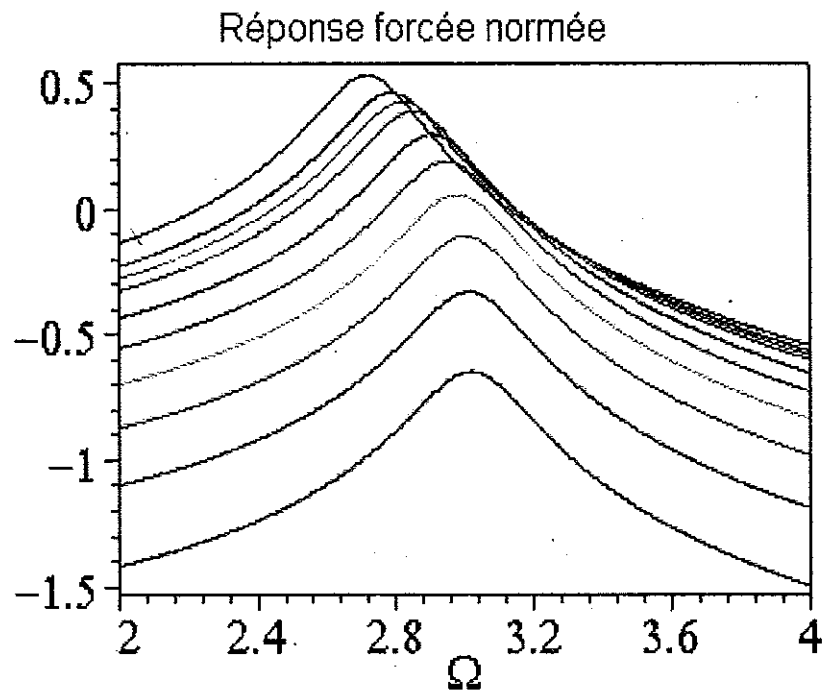
Réponse forcée normée



Figures 9 Simulation de l'essai

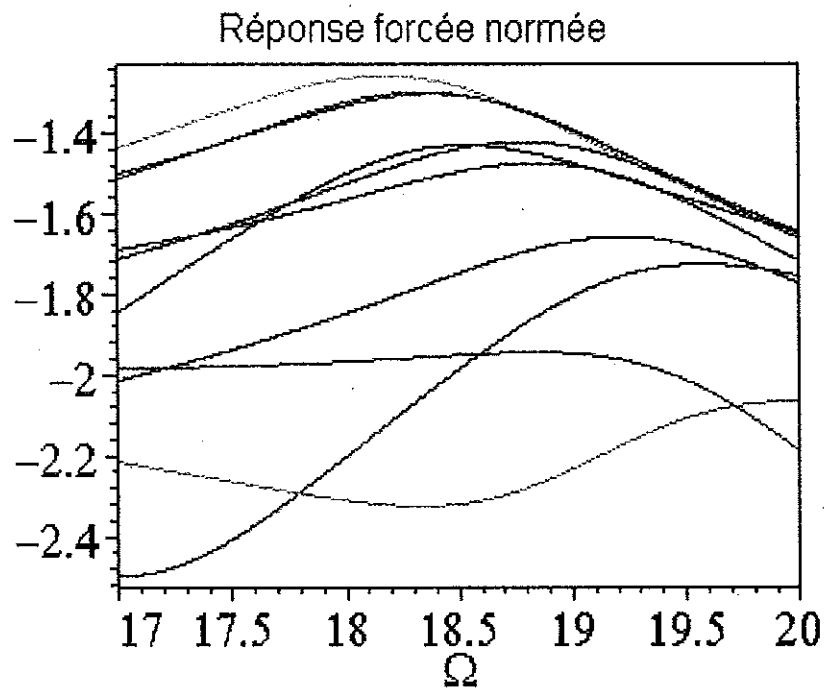
Réponse forcée normée





code de couleurs :

[black , magenta , yellow , brown , red , orange , pink , violet , red , blue]



4. Etude à réaliser :

➤ Etude théorique :

1. En utilisant les résultats donnés en 3. calculer les trois premières fréquences de résonance de la poutre à tester.
2. En utilisant la technique de Rayleigh calculer une approximation de la première fréquence de résonance. Pour cela vous construirez une fonction d'approximation cinématiquement admissible à base de fonctions trigonométriques.
3. Comparer, puis valider votre résultat en vous servant des résultats fournis en 3. . Quelles sont vos conclusions ?

➤ Etude expérimentale :

1. Identification des trois premières fréquences de résonance

- Définir une configuration de mesure⁷ qui vous semble la plus appropriée pour atteindre les objectifs.
- Pour cette configuration, tracer la courbe de réponse forcée. Le balayage fréquentiel sera grossier, puis plus fin dans les zones de résonance et couvrira la gamme de fréquence 50Hz 4kHz.
- L'évolution fréquentielle est elle conforme à la théorie et comment peut on identifier les conditions aux limites de la structure testée ?
- Déterminer l'amortissement dans chaque zone de résonance par la méthode de la bande passante à -3dB. Que pouvez vous en conclure ?

2. Importance des conditions expérimentales :

- Influence des capteurs :

Ceux-ci n'étant pas sans masse évaluer leur influence en vous servant d'une part des résultats théoriques précédant, puis d'autre part en procédant à l'étude expérimentale de l'évolution des deux premières fréquences de résonance mesurées en fonction de la position du capteur. En déduire quelle est la meilleure estimation des deux premières fréquences de résonance cherchées de la poutre seule.

Que pouvez vous en conclure en ce qui concerne l'identification des deux autres résonances ?

Proposer une nouvelle approche expérimentale, en la justifiant, qui vous permettrait d'obtenir un meilleur résultat.

3. Déformées de la poutre :

✓ Après vous être calé ~~sur~~ successivement sur chacune des fréquences de résonance identifiées vous procéderez à la mesure de l'amplitude vibratoire le long de la poutre, puis vous réaliserez le tracé sur papier millimétré de la déformée ainsi obtenue. Enfin, vous localiserez la position du ou des nœuds de vibration et déterminerez le rapport du maximum des amplitudes relevées pour chaque mode en prenant comme référence celui du mode un.

Sur quel mode de vibration les contraintes dynamiques normales sont-elles les plus importantes ?

⁷ Position des capteurs de mesure et de l'excitation

