TP 1 - Elements Finis - Mohamed Maamir et Xunjie ZHANG v2016.10.22-3

October 22, 2016

1 TP 1 - Méthode des élémenst finis en 1D

```
In [3]: %matplotlib inline
        %autosave 60
        import numpy as np
        import scipy as sp
        #import scipy.optimize as opt
        import matplotlib.pyplot as plt
```

```
Autosaving every 60 seconds
```

1.1 Introduction

Dans ce *notebook*, nous allons étudier par la méthode des éléments fini en *1D* les **éfforts de traction** sur une poutre en rotation. Pour se faire, nous allons partir de **l'équation d'équilibre** et des conditions aux limites et donner **la formulation faible** du problème. On étudira une approximation de la solution dans le cas ou la solution est un **polynome d'odre 1** et dans le cas où il est **d'odre 2**.

1.2 Problème Physique

1.2.1 Equation d'équilibre

Un petit élément Δr est soumis à : 1. Force centrifuge : $(\rho * S(r) * \omega^2 * r) * \Delta r$ 2. Efforts internes : $ES(r+\Delta r)\frac{du}{dr}|_{r+\Delta r} - ES(r)\frac{du}{dr}|_r = \frac{d}{dr} * [ES(r)\frac{du}{dr}]$

Soit l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{d}{dr}(ES(r)\frac{du}{dr}) + (\rho S(r)\omega^2)r = 0$$

1.2.2 Formulation faible

On retrouve cette formulation faible :

Trouver $u(r)$ **tel que** $u(0) = 0$ **et** $ES(r)\frac{du}{dr}\Big|_{r=L} = 0$ **:**

$$\int_0^L ES(r)\frac{du}{dr}\,dr = \int_0^L (\rho S(r)\omega^2 r)v(r)\,dr$$

1.2.3 solution Analytique

Cas Section Constante On retrouve pour une section constrante une solution :

$$u(r)_{Sconst} = \frac{\rho\omega^2}{2*E}(L^2 r - \frac{r^3}{3})$$

Cas Section fonction de r Pour une section S fonction de r : $s = s(r) = a*r+b$ avec $a = \frac{S(L)-S(0)}{L}$ et $b = S(0)$

Avec les condition limites:

$$u(0) = 0$$

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=L} = 0$$

On trouve une solution analytique :

$$u(r)_{S(r)} = \frac{\omega^2\rho}{36a^3E}\Big(ar(-4a^2r^2-3abr+6b^2)-6(b-2aL)(aL+b)^2\ln(ar+b)+6\ln(b)(b-2aL)(aL+b)^2\Big)$$

Résolu avec Wolfram : This link

1.3 Approximation par éléments finis

1.3.1 Forme de l'approximation dans un maillage

Pour un maillage M^h nous avons une aproximation sur un élément k de la forme :

$$u_k^h = \Big(\frac{U(r_k) - U(r_{k-1})}{r_k - r_{k-1}}\Big)r + (\frac{r_k U(r_{k-1}) - r_{k-1}U(r_k)}{r_k - r_{k-1}}\Big)$$

1.3.2 Matrice A*T=B question 2 et 3

1.4 Programme

1.4.1 Fonctions

Ici, nous avons programmer la fonction relative à la section S, ainsi que les deux fonction d'assemblage de A et B. Nous avons aussi programmé la fonction de la solution analytique.

```
In [24]: def section(L,N,k,S0,SL): #Foction S(r)
             a=(SL-S0)/L
             b=S0
             return ((a*(L/N)*(k-1)+b)+a*(L/N)*k+b)/2


         def matrixA(E,L,N,S0,SL): #Algorithme de construction de la Matrice A
             A=np.zeros((N+1,N+1))
             h=L/N
             S1=section(L,N,1,S0,SL)
             SN=section(L,N,N,S0,SL)
             A[0,0]= (E*S1)/h
```

```
    A[0,1]= -(E*S1)/h
    A[1,0]= -(E*S1)/h
    A[1,1]= (E*S1)/h
    i=1
    while i<N:
        S=section(L,N,i,S0,SL)
        A[i,i]=A[i,i]+(E*S)/h
        A[i,i+1]=-(E*S)/h
        A[i+1,i]=-(E*S)/h
        A[i+1,i+1]=(E*S)/h
        i=i+1
    return A

def vecteurB(rho,omega,N,S0,SL): #Algorithme de construction du vecteur B
    B=np.zeros(N+1)
    h=L/N
    S1=section(L,N,1,S0,SL)
    SN=section(L,N,N,S0,SL)
    R=1*L/N #k-0=0 donc r1
    B[0]=rho*omega*omega*S1*h*(R/3)
    B[1]=rho*omega*omega*S1*h*(R/6)
    i=1
    while i<N:
        R1=i*L/N
        R2=(i+1)*L/N
        S=section(L,N,i,S0,SL)
        B[i]=B[i]+rho*omega*omega*S*h*(R1/3+R2/6)
        B[i+1]=rho*omega*omega*S*h*(R1/3+R2/6)
        i=i+1
    return B

def u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,r): #Solution analytique pour S variable.
    a=(SL-S0)/L
    b=S0
    y=((omega**2*rho)/(36*E*a**3))*(a*r*(-4*a**2*r**2-3*a*b*r+6*b**2)-6*(b
    return y
```

1.5 Etude numérique

Dans cette partie nous avons rentré nos paramètres et nous avons dessiné les courbes souhaitées. ### Paramètres du problème:

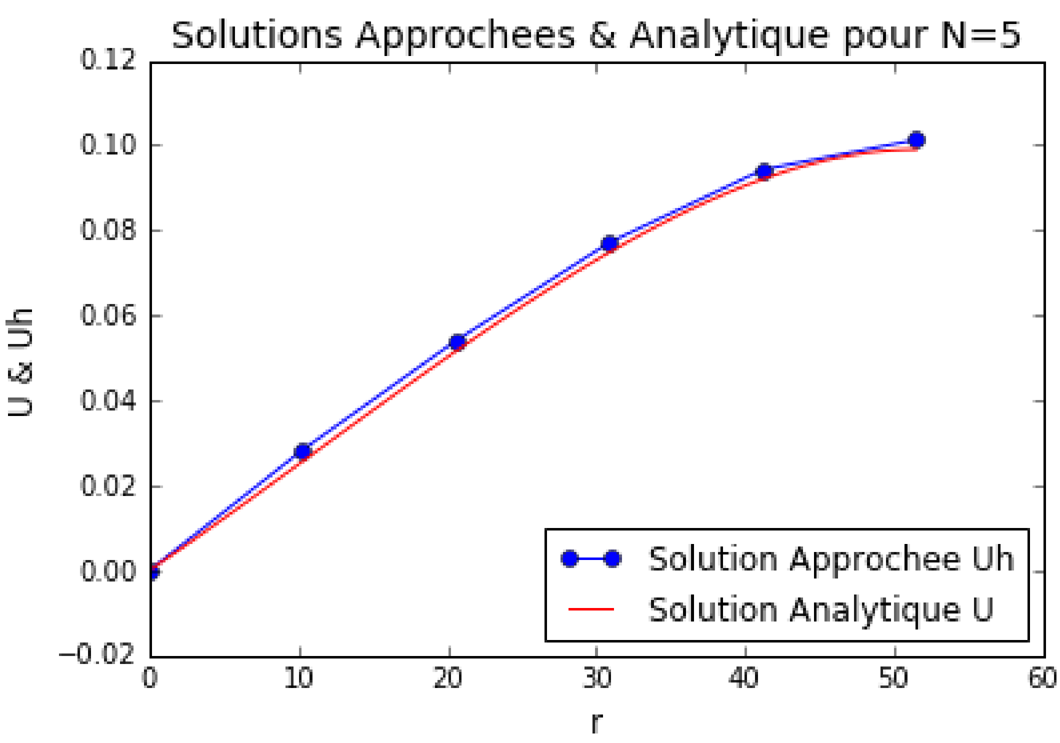
In [25]:
```
#Paramettre du problème:
S0=16.2
SL=6.7
L=51.5
err=0.076
rho=1600
```

```
E=21300*10**6
omega=2*np.pi
N=5 # Première étude avec N=5
```

1.5.1 Etude pour N=5:

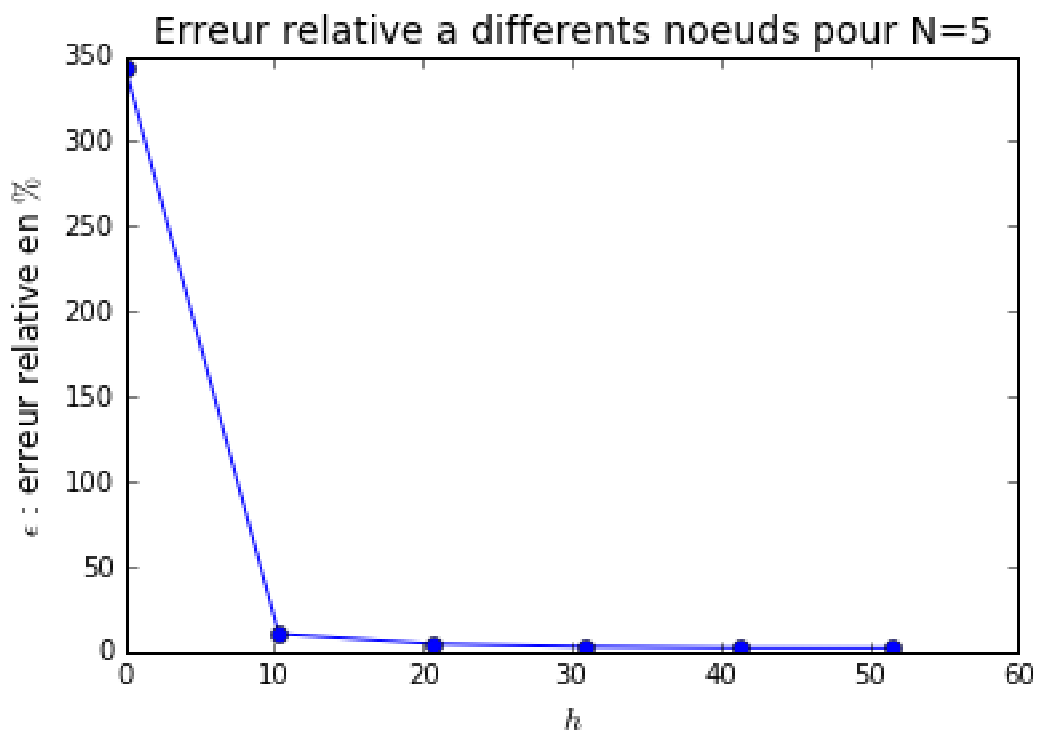
Solution Approchée

In [26]:
```
A=matrixA(E,L,N,S0,SL)
B=vecteurB(rho,omega,N,S0,SL)
#Condition limite:
A[0,0]=1
A[0,1]=0
B[0]=0
uh=np.linalg.solve(A,B) #Resolution du sytème : solution approchée pour N=

x=np.linspace(0,L,100) #Axe horizontale pour la solution analytique
r=np.linspace(0,L,N+1) #Array avec tout les noeuds en fonction de N
u5=u(E,L,rho,omega,N,S0,SL,x)

p1=plt.plot(r,uh,marker='o',label='Solution Approchee Uh')
plt.plot(x,u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,x),'r',label='Solution Analytique U')
plt.legend(loc='lower right')
plt.xlabel('r',fontsize=12)
plt.ylabel('U & Uh',fontsize=12)
plt.title("Solutions Approchees & Analytique pour N="+str(N), fontsize=14)
plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\U Uh N5.
```



Calcul de l'erreur relative pour N=5: On va calculer l'erreur relative sur chaque point de la solution approchée, dans le cas de N=5.

```
In [27]: ur=u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,r) #On calcul les valeurs théoriques pour dife
         error=np.absolute(ur-uh)/ur #formule pour chaque point

         plt.plot(r,error*100,marker='o') #pourcentage
         plt.ylabel('$\epsilon$ : erreur relative en $\%$',fontsize=12)
         plt.xlabel('$h$',fontsize=12)
         plt.title("Erreur relative a differents noeuds pour N="+str(N), fontsize=1
         plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\Erreur r
```

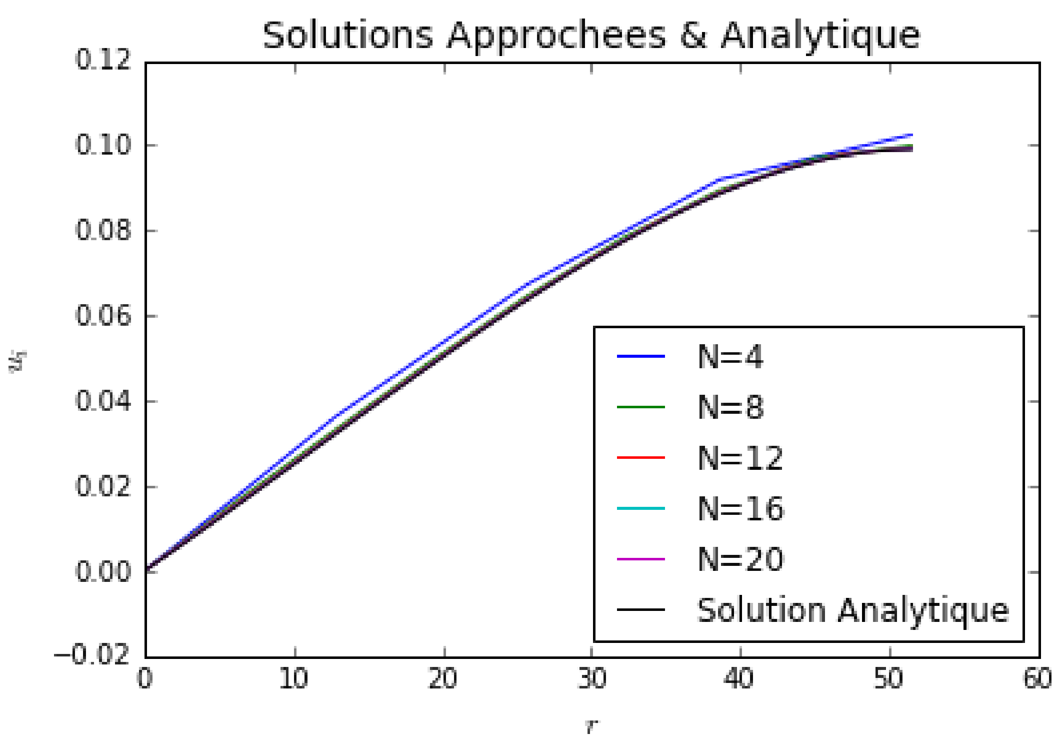


1.6 Calcul avec différents maillages:

Ici, nous avons implementé une boucle afin de tracer l'approximation avec un nombre de neus N croissant.

```
In [28]: #Paramettre du problème:
         S0=16.2
         SL=6.7
```

```
L=51.5
err=0.076
rho=1600
E=21300*10**6
omega=2*np.pi
Nmin=4 #nombre de noeud minimal
Nmax=20 #nombre de noeud maximal

for i in range (Nmin,Nmax+1,4):
    N=i
    x=np.linspace(0,L,100)
    r=np.linspace(0,L,N+1)
    A=matrixA(E,L,N,S0,SL)
    B=vecteurB(rho,omega,N,S0,SL)
    #Condition limite:
    A[0,0]=1
    A[0,1]=0
    B[0]=0
    uh=np.linalg.solve(A,B)
    plt.plot(r,uh,label='N='+str(N),)
plt.plot(x,u2(E,L,rho,omega,N,S0,SL,x),'k',label='Solution Analytique')
plt.legend(loc='lower right')
plt.xlabel('$r$',fontsize=12)
plt.ylabel('$u_{i}$',fontsize=12)
plt.title("Solutions Approchees & Analytique", fontsize=14)
plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\Solution
```

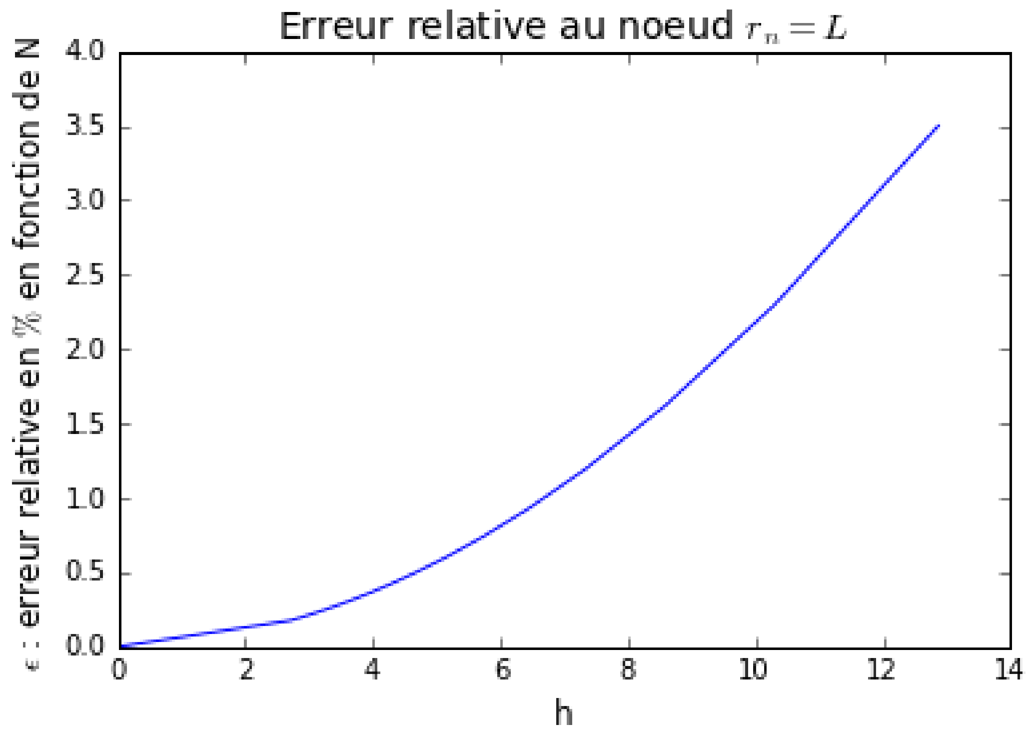


1.7 Erreur Relative en fonction de H

Dans cette partie nous avons calculé et tracé l'érreur relative en fonction de l'évolution de h, c'est a dire en fonction du nombre de noeud. L'érreur relative a été calculé au noeud $r_n = L$.

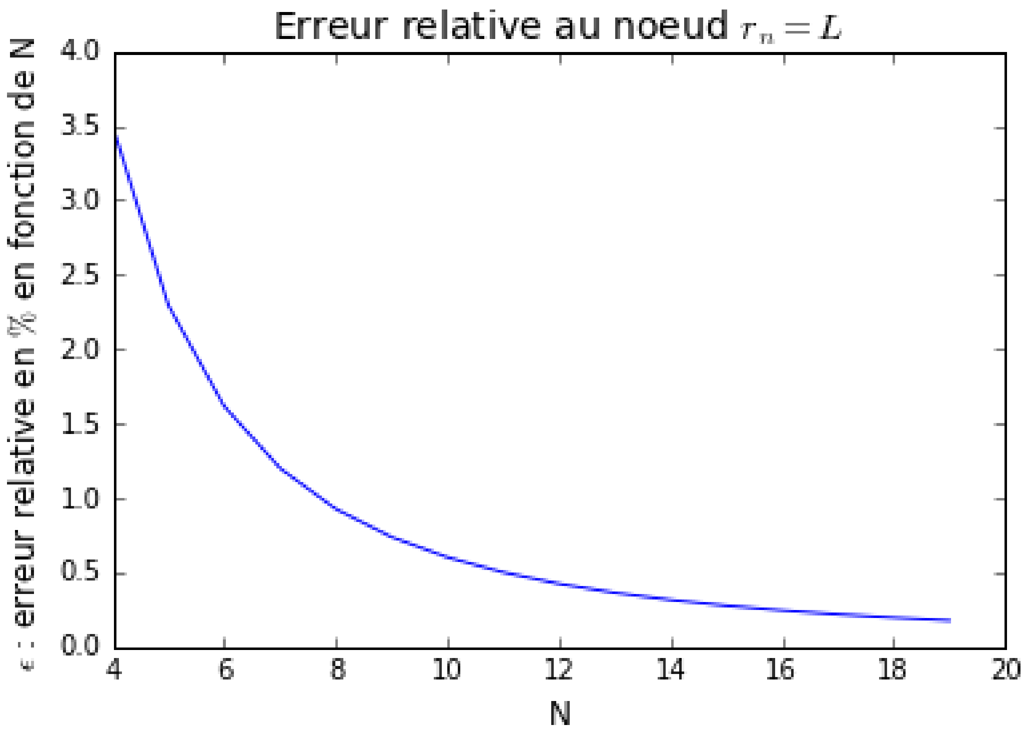
$$Err = \frac{||u - u_h||}{||u||}$$

```
In [31]: error=np.zeros(Nmax)
         H=np.zeros(Nmax)
         for i in range (Nmin,Nmax):
             N=i
             h=L/N
             x=np.linspace(0,L,100)
             r=np.linspace(0,L,N+1)
             A=matrixA(E,L,N,S0,SL)
             B=vecteurB(rho,omega,N,S0,SL)
             #Condition limite:
             A[0,0]=1
             A[0,1]=0
             B[0]=0
             uh=np.linalg.solve(A,B)
             U=u(E,L,rho,omega,N,S0,SL,r)
             error[i-Nmin]=(np.absolute(U[N]-uh[N])/U[N])
             H[i-Nmin]=h
         plt.plot(H,error*100,label='$Err(h)$')
         plt.ylabel('$\epsilon$ : erreur relative en $\%$ en fonction de N',fontsiz
         plt.xlabel('h',fontsize=12)
         plt.title("Erreur relative au noeud $r_{n}=L$", fontsize=14)
         plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\Erreur r
```




```
In [32]: plt.plot(L/H,error*100,label='$Err(N)$')
         plt.ylabel('$\epsilon$ : erreur relative en $\%$ en fonction de N',fontsiz
         plt.xlabel('N',fontsize=12)
         plt.title("Erreur relative au noeud $r_{n}=L$", fontsize=14)
         plt.savefig('D:\Google Drive - Mohamed\Cours\S1\Element Fini\TP 1\Erreur r
```

```
C:\Users\p1006370\AppData\Local\Continuum\Anaconda2\lib\site-packages\ipykernel\__m
  if __name__ == '__main__':
```


Erreur relative au noeud $r_n = L$
ϵ : erreur relative en % en fonction de N
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
4
6
8
10
12
14
16
18
20
N

In [ ]: