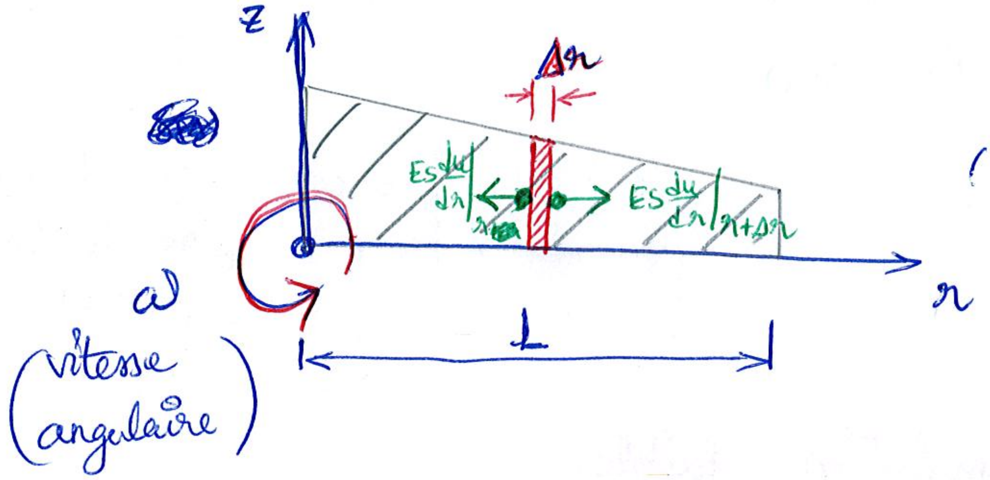
Méthode des Éléments Finis en 1D

à lire && préparer avec
→ Problème ③ de TD°3



(1.1.1) Equation d'équilibre

dans le repere qui tourne à une vitesse angulaire, ω (constante):

$$\sum_i (\vec{f_i}) = 0$$

dans la direction radiale

(i) f_r^{cent} = masse × accélération centrifuge

$$= (\rho S \Delta r)(r\omega^2)$$

$$f_r^c = (\rho\omega^2 S r)\,\Delta r$$

(ii) f_r^{int} = efforts internes = $ES\frac{du}{dr}\Big]_{r+\Delta r} - ES\frac{du}{dr}\Big]_r$

(iii) $$f_r^{int} = \frac{d}{dr}\left(ES\frac{du}{dr}\right)\Delta r$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dr}\left(ES\frac{du}{dr}\right) + \rho\omega^2 S r = 0}$$

⚠ $S = S(r)$

avec $u(r=0)=0$ { Point O est fixe et immobile

$$\left.\left(ES\frac{du}{dr}\right)\right|_{r=L} = 0$$ { pas d'effort sur le bord à $r=L$

1.1.2 Formulation faible

$$\int_0^L \left[\frac{d}{dr}\left(ES\frac{du}{dr}\right) v\right] dr + \int_0^L (\rho\omega^2 S r) v \, dr$$

$$\left\{ \left[ES\, v\frac{du}{dr}\right]_{r=0}^{r=L} - \int_0^L \left(ES\frac{du}{dr}\right)\frac{dv}{dr}\, dr + \int_0^L v(\rho\omega^2 S r)\, dr \right\} = 0$$

puisque $\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=L} = 0$ & en prenant $v(r=0)=0$

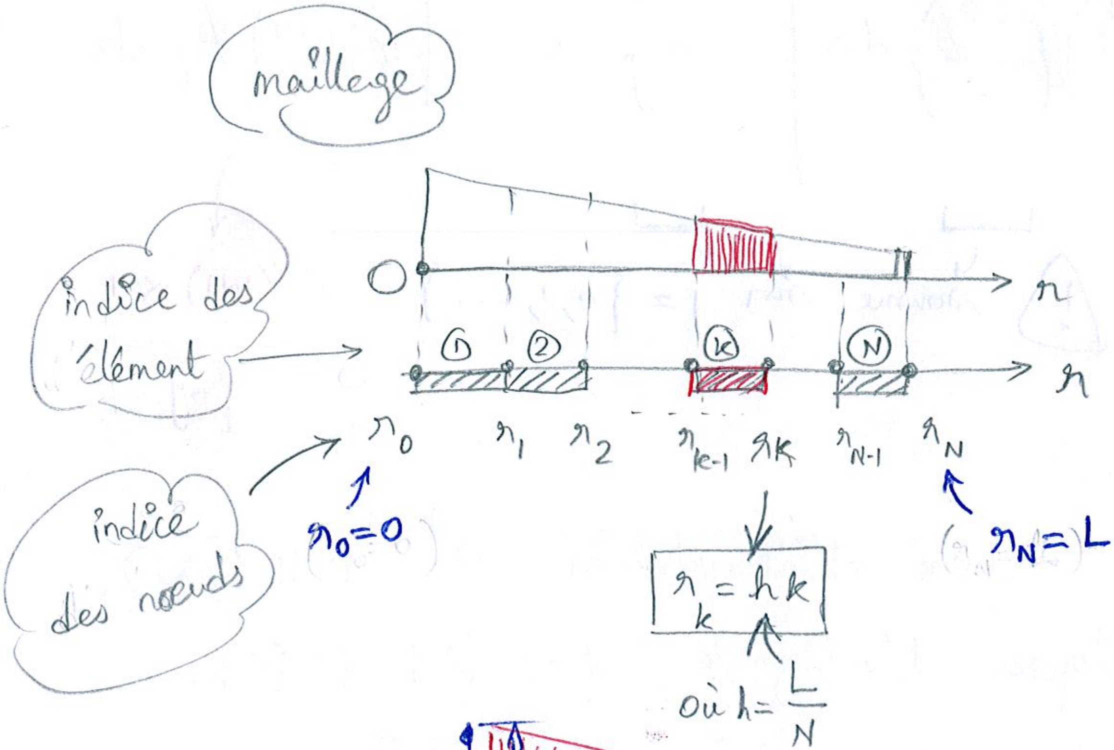
$$\Rightarrow \boxed{\int_0^L ES\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dv}{dr}\right) dr = \int_0^L \left(v\rho\omega^2 S r\right) dr}$$

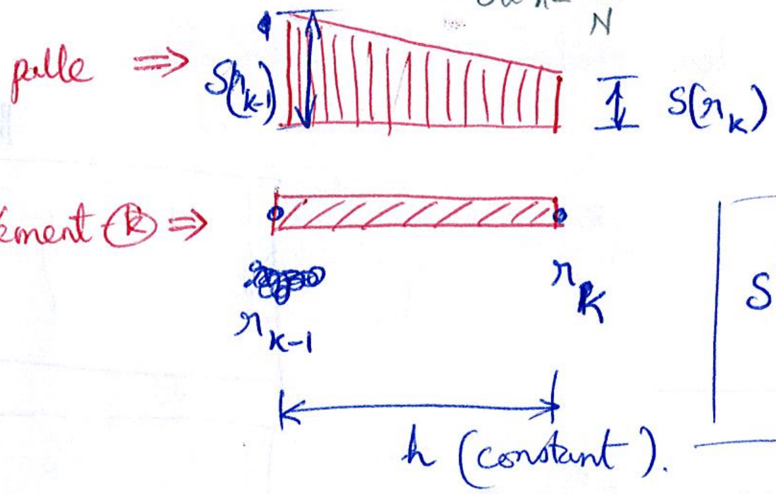
$\forall\, v$ vérifiant $v(r=0)=0$

(1.2.0.1) la forme de l'approximation

$$u^{approx}(r) = a_i \, \phi_i(r)$$

somme sur $i = \{0, 1, 2 \ldots, N\}$





$$\boxed{S_k^{elem} = \left[\frac{S(r_{k-1}) + S(r_k)}{2}\right]}$$

(1.2.0.2) ~~[illegible]~~ Montrer que $\{A\}\{T^h\} = \{B\}$

$$\{T^h\} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

en prenant $v(x) = \delta a_k \, \phi_k(x)$ et

développant la formulation faible ....

$$\underbrace{\left[\int_0^L ES \left(\frac{d\phi_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_j}{dx}\right) dx \right]}_{\substack{[A_{ij}] \\ (N+1) \times (N+1)}} \underbrace{a_j}_{\substack{[T_j] \\ (N+1) \times 1}} = \underbrace{\int_0^L (\rho S \omega^2 x) \, \phi_i \, dx}_{\substack{(N+1) \times 1 \\ [B]}}$$

⚠ somme sur $j = \{0, 1, \dots\}$

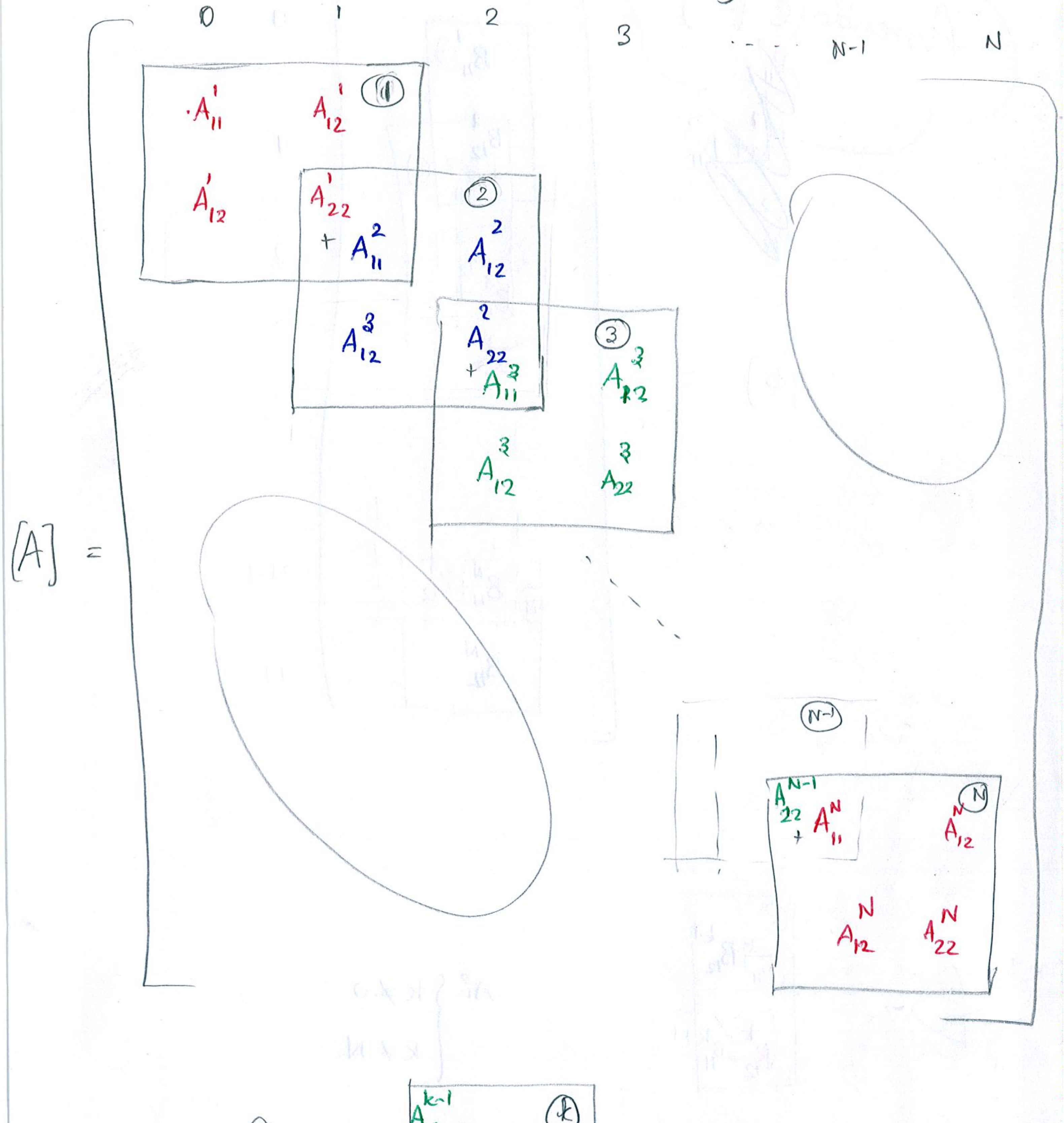
pour un choix d'interpolation $P^{(k=1)}$ (linéaire), on peut développer l'intégrale pour [A] & [B] ... cela nous donne les matrices élémentaire

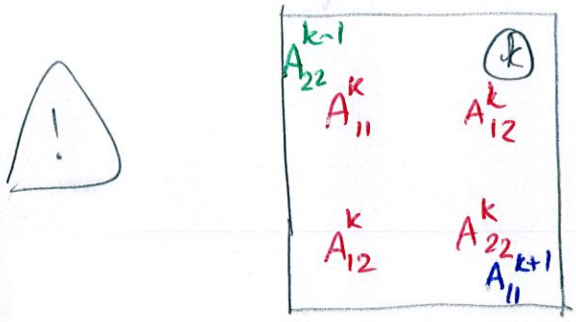
(i) raideur : $A^k = \dfrac{E S_k^{elem}}{h_k} \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}_{\mathbb{K}}$

(ii) second membre : $B^k = \rho S_k^{elem} \omega^2 h_k \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}}}_{M} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix}$

(1.2.1)

Assemblage de [A]

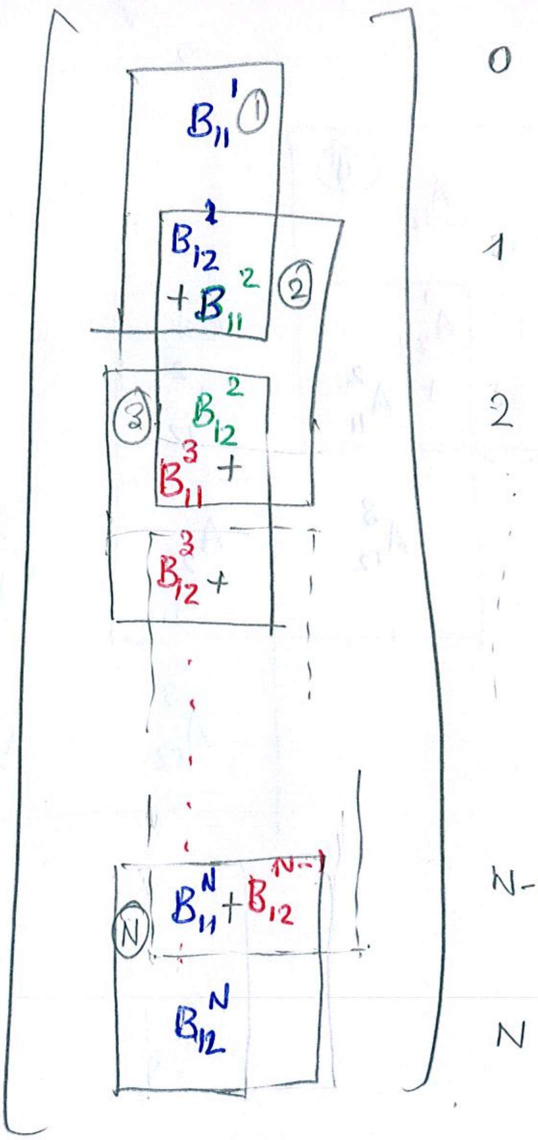


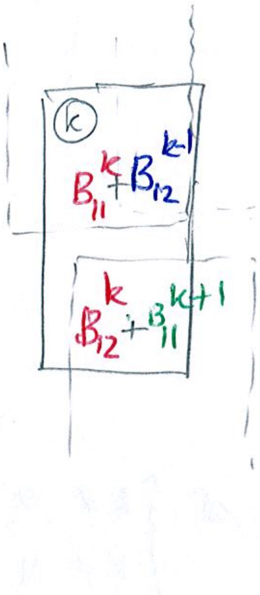


si $\begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq N \end{cases}$

Assemblage [B]

$[B] =$





si $\begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq N. \end{cases}$

⚠ Conditions aux limites

- après l'assemblage
- l'introduire en substituant la ligne concernée par l'égalité fournie.

exemple $u(x=0)=a$

$u(x_{(k=0)})=a$

→ ligne n° 0 dans [A] & [B]

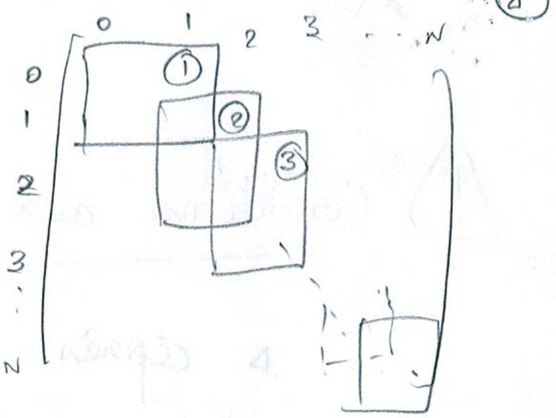
$$\Rightarrow \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{array} \longleftarrow \text{ligne n°0} \longrightarrow \; ; \quad B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ N \end{array}$$

(1.2.1.1) Algorithm pour l'assemblage de [A] & [B]

i) pour [A] :

(i) initialiser [A] = matrice nulle de taille $(N+1)\times(N+1)$

(ii) boucle $i=1$ jusqu'au $i=N$ avec un pas $=1$



$k=1$ pour l'élément 1 :

A[0:1, 0:1]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{calculer} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}^{\text{nouveau}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{(\text{avant})} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11}^{k=1} & \mathbb{K}_{12}^{k=1} \\ \mathbb{K}_{12}^{k=1} & \mathbb{K}_{22}^{k=1} \end{bmatrix}$$

$k=2$ pour l'élément 2 :

$$\text{calculer} \begin{bmatrix} K_{22} & - \\ - & - \end{bmatrix}^{\text{nouveau}} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{22}^{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11}^{k=2} & \mathbb{K}_{12}^{k=2} \\ \mathbb{K}_{12}^{k=2} & \mathbb{K}_{22}^{k=2} \end{bmatrix}$$

A[1:2, 1:2]

$\vdots$

$k=N$ pour l'élément N :

A(N-1:N, N-1:N)

$$\text{Calculer} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}^{\text{nouveau}} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{22}^{N-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11}^{k=N} & \mathbb{K}_{12}^{k=N} \\ \mathbb{K}_{12}^{k=N} & \mathbb{K}_{22}^{k=N} \end{bmatrix}$$

(iii) remplacer la ligne n° 0 d'[A] par la condition aux limites

▷ pareil pour [B] !

9

3.2.9 Etude de la précision

Pour étudier la précision de la méthode des éléments finis $\mathcal{P}^1$, nous avons calculer l'erreur relative moyenne :

$$\frac{||u-u^h||}{||u||} = \sqrt{\frac{\int_0^L (u-u^h)^2 dx}{\int_0^L u^2 dx}}$$

et l'erreur relative sur la condition aux limites en $x = L$:

$$\frac{|-K\left(\frac{du^h}{dx}\right)_L - \phi_e|}{|\phi_e|}$$

en fonction du nombre d'éléments ne du maillage pour des maillages régulièrement espacés (i.e. la taille h des éléments est proportionnelle à $1/ne$). Les résultats sont tracés en échelle logarithmique sur la figure (3.16). On constate que l'erreur relative moyenne varie en $\frac{1}{ne^2}$(i.e. en $\theta(h^2)$) (comparaison avec une droite de pente -2), et que l'erreur relative sur la condition aux limites varie en $\frac{1}{ne}$(i.e. en $\theta(h)$). Ce résultat montre que l'approximation par éléments finis u^h converge vers la solution exacte et que cette convergence est d'ordre 2. Ce résultat est cohérent avec l'erreur d'interpolation, qui comme nous l'avons vu est d'ordre 2 pour une approximation $\mathcal{P}^1$. On peut en fait démontrer que l'erreur par éléments finis est majoré par cette erreur d'interpolation.