Ecoulement bloqué

par
ZHANG Xunjie
pour le Méthodes numériques pour les EDP M1

fait le 06 avril 2017

Table des matières

1 Problème physique **3**
1.1 Petite Annonce 3
1.2 Rappel 3
1.3 Conditions 4

2 Solution analytique **5**

3 Méthode numérique **6**

4 Resultat **7**
4.1 solution exact 7
4.2 solution nu-1 et nu-10 7

5 Conclusion **8**

Table des figures

4.1 solution exact 7
4.2 solution nu 1 7
4.3 solution nu 10 7

Chapitre 1

Problème physique

1.1 Petite Annonce

Dans cette séance de TP EDP , on veur calculer l'écoulement parallelle instationnaire $u(x, y)$ dans la direction x , entre deux plans stationnaires qui se trouvent à $y = 0$ et $y = h$. Avant $t = 0$, l'écoulement est forcé par un gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho G$, mais à $t \geq 0$ le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ est zéro . Enfin , c'est un modèle d'un écoulement bloqué du coup à $t = 0$.

pour moi ,$G = 8.40$

1.2 Rappel

De façon générale, le bilan de la quantité de mouvement s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho \overrightarrow{v})}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{v} \bigotimes \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{\nabla} \cdot \tau + \rho \overrightarrow{v} \tag{1.1}$$

On fait evolution dans le x direction , et on assume :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big) + g_x \tag{1.2}$$

On simplifie cette équation :

- instationnnaire écoulement ,$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$
- écouplement plaine , u est independent que x
- écoulement idirectional $v = 0$, $w = 0$
- à $t \geq 0$ le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ est zéro
- la force volumique suivant la direction x est null

On trouve l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

1.3 Conditions

Dans l'annonce ci-dessus on peut trouver condition innitiale , à l'instant $t = 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

pour la condition limite :

$$u(0, t) = u(h, t) = 0$$

Chapitre 2

Solution analytique

On rappel la problème :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(0,t) = u(h,t) = 0\,, t > 0 \\ u(y,0) = C(y) \end{array} \right. \tag{2.1}$$

On utilise la méthode de séparation de variables pour trouver la solution ananlytique :

$$u(y,t) = f(t)g(y)$$

et on trouve :

$$\frac{f''(t)}{f(t)} = \beta\nu$$
$$\frac{g''(y)}{g(y)} = \beta$$

La solution élémenttaire peut être écrit sous la form :

$$u_n(y,t) = C_n e^{-\nu(\frac{n\pi}{h})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{h}x)$$

La solution générale s'écrivent :

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu(\frac{n\pi}{h})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{h}x) \tag{2.2}$$

Comment touver C_n ?
On utilise une truc ci-dessus :

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx = 0\,, m = n$$

à $t = 0$, on fait integral à droite et à gauche en mçeme temps pour l'équation 2.2 :

$$C_n = \frac{2}{h}\int_0^h C(y)\sin(\frac{n\pi}{h}y)dy \tag{2.3}$$

On prend $C_n = \frac{4Gh^2}{k^3\pi^3\nu}$ pour la partie suivante .

Chapitre 3

Méthode numérique

On utilise θ schéma pour la simulation numérique :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} = \theta\nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\triangle y^2} + (1-\theta)\nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\triangle y^2} \tag{3.1}$$

Commentez :

- $\theta = 0$, tous les terms evaluat à l'instant t_{n+1} , implicite schéma .
- $\theta = 1$, tous les terms evaluat à l'instant $t-n$, explicite schéma .
- $\theta = \frac{1}{2}$ evaluat moyenne , Crank-Nicolson schémma .

Stabilité :

$$\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = \frac{1 - 4\theta\nu \sin^2(\frac{\omega dx}{2})}{1 + 4(1-\theta)\nu \sin^2(\frac{\omega dx}{2})}$$

Dans l'annonce , $r = \frac{\nu \triangle t}{\triangle y^2}$,

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

Chapitre 4

Resultat

4.1 solution exact

FIGURE 4.1 – solution exact

4.2 solution nu-1 et nu-10

FIGURE 4.2 – solution nu 1

FIGURE 4.3 – solution nu 10

Chapitre 5

Conclusion

Dans cette séance de TP , on étude l'écoulement bloqué instationnaire . Au début on cherche la solution analytique de la problèm , ensuite on fait une simulation utilisant θ-schéma simulation numérique . On utilise Matlab pour programmer les solutions .

Pour la précision , on dit que pour $\theta = \frac{1}{2}$, la précision est $o(\triangle t^2, \triangle h^2)$, par ailleur , la précision est $o(\triangle t, \triangle h)$.