

STRUCTURE D'UN JET LIBRE

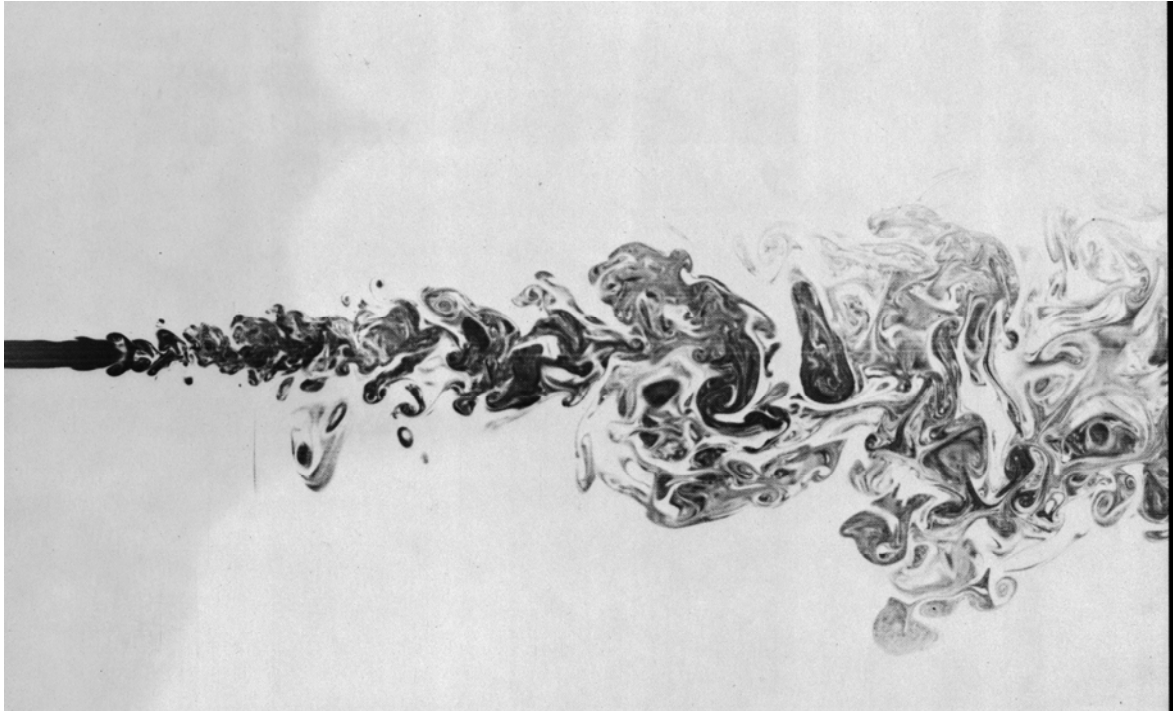


Figure 1.1 Photo d'un jet (Dimotakis et al 1983)

1. Introduction

1.1 Définitions

Le jet est l'écoulement produit par l'injection d'un débit de fluide dans un fluide au repos, à travers un orifice, qui peut être la sortie d'un tuyau ou un trou dans une paroi solide. Si le trou prend la forme d'une fente infinie, le jet est bidimensionnel et connu comme un *jet plan*. Si, par contre, le trou est circulaire, le jet est *axisymétrique* ou *circulaire*. Le fluide ambiant est supposé au repos en dehors du jet, et peut être caractérisé par sa masse volumique ρ et sa viscosité ν ; ici, nous supposons l'écoulement incompressible. L'écoulement du jet est caractérisé par la vitesse à la sortie du jet U_0 et la dimension de la sortie – la demi-largeur de la fente b_0 pour un jet plan et le rayon de l'orifice r_0 pour un jet circulaire.

Les principaux éléments des deux configurations sont montrés dans la figure 1.2.

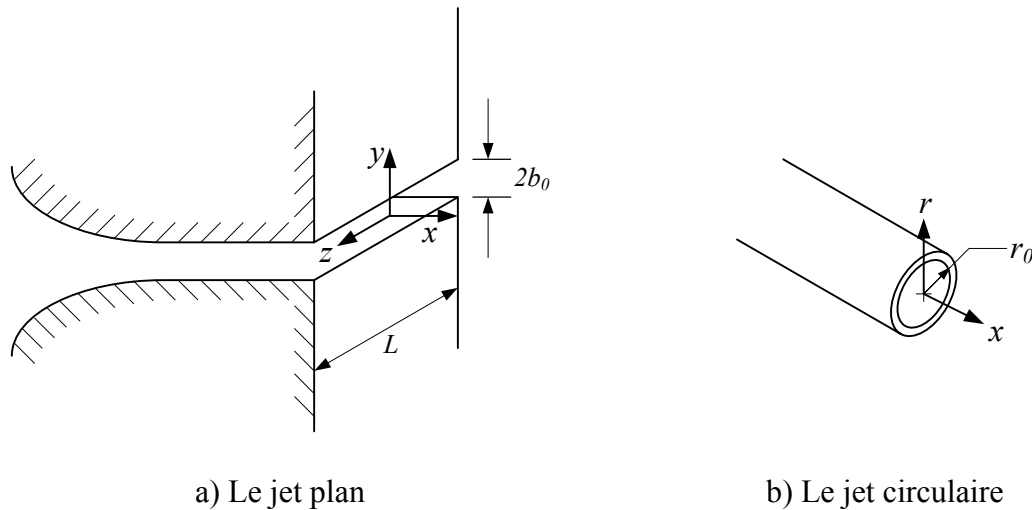


Figure 1.2

1.2 Caractéristiques générales du jet

La figure 1.1 illustre clairement la structure instationnaire d'un jet turbulent. Dans cette expérience, le fluide sortant d'un orifice circulaire à gauche de l'image a été coloré avec un produit fluorescent, et l'écoulement est visualisé par une tranche laser passant par le centre du jet. Cette image met bien en évidence le mélange intense qui se produit dans un jet, grâce à la turbulence qui est générée. Bien que l'écoulement dans un jet soit souvent très turbulent, avec des intensités turbulentes très importantes, les propriétés moyennes des jets sont remarquablement reproductibles, d'un jet à l'autre, et il est possible de modéliser la turbulence dans un jet avec des modèles de turbulence relativement simples.

Des observations expérimentales des jets indiquent que l'écoulement est composé de trois zones distinctes dans la direction axiale (voir figure 1.3). Près de la sortie, dans la zone de développement, l'écoulement est en train de s'établir ; une turbulence intense est générée par le fort cisaillement sur les bords du jet, et cette turbulence pénètre à l'intérieur du jet. La longueur de pénétration augmente avec distance par rapport à la sortie, et à une certaine distance la turbulence pénètre jusqu'à l'axe du jet, et l'écoulement est pleinement développé. La région à l'extérieur du jet, où la turbulence est très importante, est connue comme la *zone de mélange*, et la région à l'intérieur, intouchée par la turbulence, est connue comme le *cône potentiel*. Dans le cône potentiel les vitesses sont sensiblement uniformes à travers le jet, et les fluctuations de vitesses sont de faible intensité. Typiquement, la largeur l_m d'une couche de mélange augmente avec distance par rapport à l'origine x_m comme $l_m \sim x_m/10$ donc la longueur de la zone de développement x_d doit être de l'ordre de $10b_0$ (en fait, des expériences donnent $x_d \sim 12b_0$).

Tout de suite en aval de la zone de développement, il y a la zone de transition, où l'ensemble du jet participe au mélange turbulent.

Après la zone de transition, l'écoulement s'établit, et les profils de vitesse deviennent affines (*self-similar*). Dans cette zone, la vitesse à un endroit donné dépend uniquement de la distance transversale par rapport à l'axe du jet, et de la vitesse axiale au centre du jet.

1.3 L'origine virtuelle

La zone de l'écoulement établi commence à une certaine distance de la sortie du jet, et l'origine apparente des profils de vitesse n'est pas forcément la même que l'origine géométrique du jet. L'origine apparente, connue comme l'*origine virtuelle* du jet et dénotée par x_0 peut être calculée à partir des profils de vitesses. Les résultats expérimentaux semblent montrer que la position est peu sensible à la forme de l'orifice, mais très sensible au niveau de turbulence dans la buse (Flora & Goldschmidt 1969). La plupart des expériences ont localisé l'origine virtuelle en amont de l'orifice, mais certains résultats donnent une position en aval.

1.4 L'entraînement

La largeur du jet augmente avec distance par rapport à la sortie, et cet élargissement implique que du fluide est entraîné dans le jet, de l'extérieur. Autrement dit, le jet induit également un écoulement dans le fluide ambiant, et la forme des lignes de courant à l'extérieur du jet dépend beaucoup des conditions à la sortie du jet. La figure 1.4 montre ces lignes de courant induit par un jet plan, pur le cas où le jet sort d'un tuyau (figure 1.4a) et d'une fente dans une paroi (figure 1.4b). Il est important de remarquer qu'à l'endroit où les lignes de courant pénètrent dans le jet, elles ne sont pas tout-à-fait perpendiculaires à l'axe du jet ; Taylor (1958) a proposé des modèles simples pour le champ de vitesse en dehors du jet, induit par l'entraînement dans le jet. Ces modèles tiennent compte de l'influence de la condition amont sur le mouvement du fluide à l'extérieur du jet. Puisque le fluide entraîné dans le jet apporte de la quantité de mouvement axiale, l'hypothèse qui est souvent faite concernant la conservation de quantité de mouvement dans le jet n'est pas tout-à-fait exacte ; les conséquences de cette observation ont été étudiées par Kotsovinos et Angelides (1991).

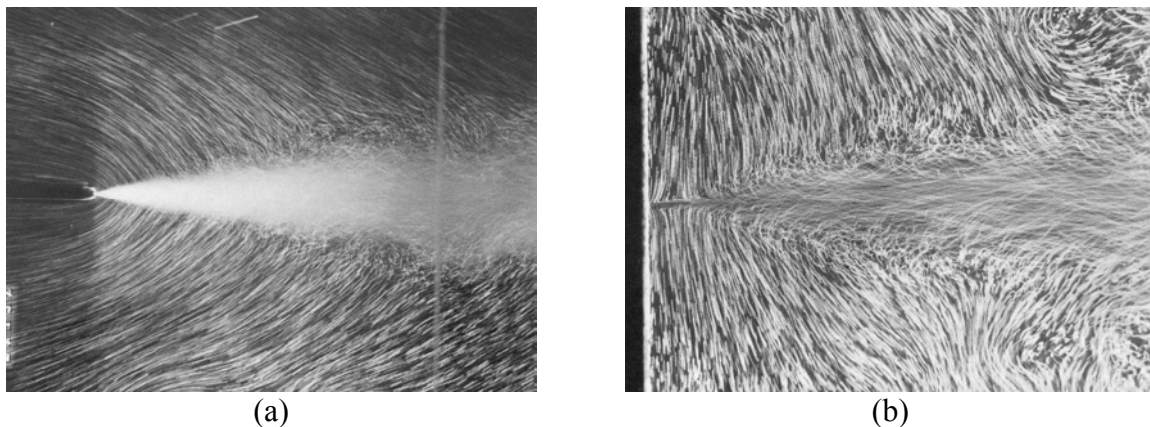


Figure 1.4 : Lignes de courant montrant l'entraînement du fluide dans un jet plan (Werlé 1974).

(a) Un jet plan créé par un tuyau rectangulaire, large.

(b) Un jet sortant d'une fente dans une paroi.

1.5 Les études expérimentales

Il y a eu beaucoup d'études expérimentales des vitesses dans un jet libre, et de sa structure. La plupart des expériences ont été faites dans l'air, avec des mesures de vitesses fait par tube de

Pitot ou par fil chaud. Les conditions expérimentales de certaines études de référence sont résumées dans le tableau 1.1.

Auteur	$h = 2b_0$ (mm)	L (mm)	U_0 (ms ⁻¹)	Re	x_0 / b_0
van der Hegge Zijnen (1958)	5.0	100	40.0	1.3×10^4	1.2
	10.0	250	20.0	1.3×10^4	3.4
Bradbury (1965)	9.5	457	47.5	3.0×10^4	6.0
Heskestad (1965)	12.7	1524	40.2	3.4×10^4	12.0
Gutmark & Wygnanski (1976)	13.0	500	35.0	3.0×10^4	4.0
Everitt & Robins (1978)	3.2	380	75.0	1.6×10^4	
	6.4	380	70.3	3.0×10^4	
	12.7	380	35.4	3.0×10^4	
	19.1	380	58.9	7.5×10^4	
Thomas & Goldschmidt (1986)	6.4	305	15.2	6.0×10^3	-3.2

Tableau 1.1 : Conditions expérimentales dans des études d'un jet plan.

b_0 : demi-hauteur de la fente, L : largeur de la fente, U_0 : vitesse à la sortie,

x_0 : distance à l'origine virtuelle, $Re (=U_0 h / \nu)$: nombre de Reynolds

Il est difficile de mesurer avec précision les vitesses aux bords du jet, à cause d'un niveau de turbulence très élevé, qui peut provoquer même des vitesses axiales négatives. Ni le fil chaud ni le tube de Pitot ne peut détecter un changement de signe de la vitesse, et par conséquent, les vitesses aux bords du jet sont surestimées (voir, par exemple, la figure 31 de l'article de Heskestad 1965). Pour palier à ce problème, certains expérimentateurs ont choisi d'étudier un jet dans un écoulement parallèle, mais à faible vitesse (par exemple, Bradbury (1965), et Everitt & Robins (1978)). Cette approche permet une meilleure résolution des vitesses aux bords du jet, mais le jet n'est plus auto-similaire ; ce problème est discuté en détail par Bradbury (1965) et par Everitt & Robins (1978).

Dans la plupart des études, les vitesses moyennes axiales et transversales (\bar{u} et \bar{v}) ont été mesurées, ainsi que les composants fluctuants (u' et v') et la contrainte de Reynolds ($\overline{u'v'}$). Dans certain cas le troisième composant de vitesse a aussi été mesuré. Quelques expériences ont été consacrées à une étude plus détaillée des caractéristiques statistiques de la turbulence (par exemple Bradbury (1965), Wygnanski & Fiedler (1969), Gutmark & Wygnanski (1976), Everitt & Robins (1978) et Thomas & Goldschmidt (1986)). Mumford(1982) a utilisé une peigne de huit fils chauds pour mesurer les corrélations spatiales des vitesses, afin de reconstruire la structure du champ de vitesse.

2. Analyse Dimensionnelle

2.1 Le jet plan

Notons la vitesse sur l'axe du jet comme u_c ; cette vitesse dépendra de la vitesse à la sortie du jet (supposée uniforme) U_0 et varie avec la distance x par rapport à la sortie du jet. La seule

échelle de longueur dans le problème est la largeur de la fente à la sortie du jet $2b_0$. Nous pouvons donc écrire :

$$u_c = f_1 \{U_0, b_0, \nu, x\} \quad (2.1)$$

Une analyse dimensionnelle du problème montre :

$$\frac{u_c}{U_0} = f_2 \left\{ \frac{x}{b_0}, Re_0 \right\}, \quad (2.2)$$

où $Re_0 (= U_0 b_0 / \nu)$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement à la sortie du jet.

La vitesse axiale u dans le jet, à une distance perpendiculaire y de l'axe du jet dépendra de la vitesse axiale u_c sur l'axe du jet, et de la distance axiale par rapport à la sortie du jet, x ; loin de la sortie, $x \gg b_0$ si bien que l'on peut supposer que b_0 n'a plus d'influence sur l'écoulement. Une deuxième analyse dimensionnelle nous donne alors :

$$\frac{u}{u_c} = g_1 \left\{ \frac{y}{x} \right\}. \quad (2.3)$$

Ce résultat montre que les profils de vitesse sont auto-similaires.

Le flux de quantité de mouvement axiale (par unité de largeur du jet) est donné par :

$$\dot{m}_x = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \rho u_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2 \left\{ \frac{y}{x} \right\} dy = \rho u_c^2 x \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2 \{ \theta \} d\theta = \rho G_2 u_c^2 x \quad (2.4)$$

où $\theta = y/x$. Si on suppose que le gradient de pression axial dans le jet est nul, le flux de quantité de mouvement axiale doit être constant par rapport à x , d'où :

$$u_c \propto U_0 \sqrt{b_0/x} \quad (2.5)$$

(car $\dot{m}_x = \rho U_0^2 2b_0$ à la sortie du jet). Le nombre de Reynolds local, Re_x est défini comme

$$Re_x = \frac{u_c x}{\nu} \propto \frac{U_0 b_0}{\nu} \sqrt{\frac{x}{b_0}} = Re_0 \sqrt{\frac{x}{b_0}}, \quad (2.6)$$

donc il augmente avec la distance par rapport à la sortie du jet, et nécessairement, à partir d'une certaine distance, l'écoulement devient turbulent.

Le débit volumique par unité de largeur dans le jet à une distance x de la sortie est défini comme :

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u dy = u_c \int_{-\infty}^{\infty} g_1 \{ \theta \} x d\theta = u_c x G_1. \quad (2.7)$$

En substituant les résultats des équations (2.4) et (2.5) nous obtenons :

$$q(x) = U_0 \sqrt{\frac{2b_0}{G_2}} G_1 \sqrt{x}. \quad (2.8)$$

Le débit par unité de largeur augmente donc comme \sqrt{x} avec la distance par rapport à la sortie. Cette augmentation est due à l'entraînement de fluide de l'extérieur du jet ; si nous supposons que ce fluide est entraîné avec une vitesse d'entraînement v_e orientée perpendiculairement à l'axe du jet, nous avons :

$$v_e = \frac{1}{2} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{4} U_0 \sqrt{\frac{2b_0}{G_2}} G_1 x^{-1/2} = \frac{1}{4} G_1 u_c. \quad (2.9)$$

Donc le fluide à l'extérieur du jet est entraîné dans le jet, avec une vitesse qui est proportionnelle à la vitesse sur l'axe du jet

2.2 Le jet circulaire

Le même type d'analyse à celle présentée au §2.1 peut être effectué pour un jet circulaire, sortant d'un trou circulaire, de rayon r_0 . Comme pour le jet plan, on obtient :

$$\frac{u_c}{U_0} = f_3 \left\{ \frac{x}{r_0}, Re_0 \right\} \quad (2.10)$$

où $Re_0 (= U_0 r_0 / \nu)$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement à la sortie du jet.

Encore une fois, la vitesse axiale dans le jet, à une distance radiale r de l'axe et à une distance axiale x de la sortie du jet, doit avoir la forme

$$\frac{u}{u_c} = h \left\{ \frac{r}{x} \right\} \quad (2.11)$$

et le flux de quantité de mouvement axiale est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= \rho \int_0^\infty u^2 2\pi r dr = \rho u_c^2 \int_0^\infty h^2 \left\{ \frac{r}{x} \right\} 2\pi r dr = \rho u_c^2 x^2 \int_0^\infty h^2 \{\psi\} 2\pi \psi d\psi \\ &= \rho H_2 u_c^2 x^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $\psi = r/x$. Si on suppose que le gradient de pression axial dans le jet est nul, le flux de quantité de mouvement axiale doit être constant avec x , d'où :

$$u_c \propto U_0 (r_0 / x) \quad (2.13)$$

(car $\dot{M}_x = \rho \pi r_0^2 U_0^2$ à la sortie du jet).

Le nombre de Reynolds local, Re_x est défini comme

$$Re_x = \frac{u_c x}{\nu} \propto \frac{U_0 r_0}{\nu} = Re_0, \quad (2.14)$$

donc il est constant avec la distance de la sortie du jet.

Le débit dans le jet à une distance x de la sortie est défini comme :

$$Q(x) = \int_0^\infty u 2\pi r dr = u_c x^2 \int_0^\infty h \{\psi\} \psi 2\pi d\psi = u_c x^2 H_1. \quad (2.15)$$

En substituant les résultats des équations (2.12) et (2.13) nous obtenons :

$$Q(x) = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{H_2}} 2H_1 r_0 x. \quad (2.16)$$

Le débit augmente donc avec la distance x par rapport à la sortie. Cette augmentation est due à l'entraînement de fluide de l'extérieur du jet ; si nous supposons que ce fluide est entraîné avec une vitesse d'entraînement v_e orientée perpendiculairement à l'axe du jet, nous avons :

$$2\pi r_e v_e = \frac{dQ}{dx} = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{H_2}} H_1 r_0 = H_1 u_c x, \quad (2.17)$$

où l'entraînement du fluide est supposé se faire à travers une surface fictive, localisée à une distance radial r_e de l'axe. Donc le fluide à l'extérieur du jet est entraîné dans le jet, avec une

vitesse qui est proportionnelle à la vitesse sur l'axe du jet, et l'extérieur du jet croît linéairement avec la distance axiale x :

$$v_e \propto u_c ; r_e \propto x . \quad (2.18)$$

3. Les vitesses moyennes dans le jet

3.1 Le jet plan

Nous supposons que la pression et les vitesses peuvent être exprimées comme la somme d'une composante moyenne et d'une composant fluctuante :

$$u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v'; w = \bar{w} + w'; p = \bar{p} + p' . \quad (3.1)$$

L'équation de continuité pour les vitesses moyennes devient alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 . \quad (3.2)$$

Les trois composantes de l'équation de Navier-Stokes deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'w'}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si nous supposons que l'écoulement moyen est stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et bidimensionnel ($\bar{w} = 0, \partial/\partial z = 0$), les équations deviennent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'v'}{\partial y} \right) \quad (3.8)$$

$$0 = \left(\frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} \right) \quad (3.9)$$

En général les termes visqueux sont petits devant les autres termes, et peuvent être négligés. La largeur du jet est petite par rapport à la distance à l'origine, et u est donc grand devant v

dans une grande partie de l'intérieur du jet. Par conséquence, les gradients transversaux sont plus importants que les gradients longitudinaux. Ces observations, avec d'autres approximations basées sur des résultats expérimentaux permettent de simplifier les équations (3.7) et (3.8), qui deviennent :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} \quad (3.11)$$

Dans de nombreux cas le gradient de pression dans la direction axiale est très faible, et peut être négligé ; l'équation (3.10) devient alors :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (3.12)$$

Les équations (3.6) et (3.12) constituent le modèle de base pour l'écoulement dans un jet plan. Avant de pouvoir résoudre ce système, il faut établir un modèle pour les contraintes de Reynolds : $\overline{u'v'}$. Différents modèles pour ce terme ont été développés par le passé ; Tollmien (1926) proposait un modèle basé sur l'idée de la longueur de mélange ℓ , développé par Prandtl :

$$-\overline{u'v'} = \ell^2 \left| \partial \bar{u} / \partial y \right| \left(\partial \bar{u} / \partial y \right). \quad (3.13)$$

La longueur de mélange doit être proportionnelle à la largeur du jet, et notre analyse dimensionnelle a montré que cette largeur doit être proportionnelle à la distance à la sortie du jet, donc nous pouvons écrire :

$$\ell = \alpha x \quad (3.14)$$

Tollmien a ensuite défini une variable de similarité $\phi = y / \alpha x$ où le coefficient α est défini comme :

$$\alpha = (2a^2)^{1/3}. \quad (3.15)$$

Avec cette substitution, le système d'équations différentielles partielles peut être transformé (avec, en plus, les conditions aux limites nécessaires) en une équation différentielle ordinaire, de deuxième ordre, mais non-linéaire :

$$\begin{aligned} \phi < 0 : \left(\frac{d^2 F}{d\phi^2} \right)^2 + F \frac{dF}{d\phi} &= 0 \\ \phi > 0 : \left(\frac{d^2 F}{d\phi^2} \right)^2 - F \frac{dF}{d\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ϕ	$F(\phi)$	$F'(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$	$F'(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$	$F'(\phi)$
0.00	0.000	1.000	1.00	0.769	0.473	2.00	0.994	0.044
0.10	0.099	0.979	1.10	0.814	0.414	2.10	0.997	0.025
0.20	0.195	0.942	1.20	0.852	0.357	2.20	0.999	0.012
0.30	0.287	0.895	1.30	0.885	0.304	2.30	1.000	0.004
0.40	0.374	0.841	1.40	0.913	0.254	2.40	1.000	0.001
0.50	0.455	0.783	1.50	0.936	0.207	2.50	1.000	0.000
0.60	0.530	0.722	1.60	0.955	0.166			
0.70	0.600	0.660	1.70	0.969	0.128			
0.80	0.662	0.597	1.80	0.980	0.095			
0.90	0.719	0.534	1.90	0.988	0.067			

Tableau 3.1 : Solution numérique de l'équation $F''^2 + FF' = 0$.

qui doit être résolue numériquement. Pour les détails de cette transformation, voir, par exemple, Rajaratnam (1976). Les valeurs de la fonction F et de sa dérivée F' sont données dans le tableau 3.1. Les différentes variables du problème peuvent être exprimées en termes de la fonction F , sa dérivée F' et le coefficient α :

$$\frac{u_c}{U_0} = \left[\int_0^\infty (F')^2 d\phi \right]^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{b_0}{x}} = \frac{1.21}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{b_0}{x}}, \quad (3.17)$$

$$\frac{u}{u_c}(\phi) = F'(\phi), \quad (3.18)$$

$$\frac{v}{u_c}(\phi) = \alpha \left[\phi F'(\phi) - \frac{1}{2} F(\phi) \right], \quad (3.19)$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{u_c^2}(\phi) = \frac{1}{2} \alpha F(\phi) F'(\phi). \quad (3.20)$$

La valeur du coefficient α doit être déterminée empiriquement ; une analyse fait par Abramovich (1963) des résultats obtenus par plusieurs chercheurs a conclu que $0.09 < \alpha < 0.12$ et il a proposé de prendre $\alpha = 0.10$ comme valeur moyenne.

Le profil axial de u_c/U_0 est tracé dans la figure 3.1 et les profils de u/u_c , v/u_c et $\overline{u'v'}/u_c^2$ en fonction de y/x sont tracés dans les figures 3.2, 3.3 et 4. ?.

Goertler (1942) a développé un deuxième modèle pour la contrainte de Reynolds, basé sur l'idée d'une viscosité turbulente :

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.21)$$

Une analyse dimensionnelle montre que la viscosité turbulente doit être une fonction de la distance de la sortie du jet, x , et de la vitesse axiale à cette distance, u_c , d'où :

$$\varepsilon = bxu_c, \quad (3.22)$$

où le coefficient b doit être déterminé empiriquement. Goertler a ensuite défini une variable de similarité, ψ :

$$\psi = \beta \frac{y}{x}, \quad (3.23)$$

où $\beta = 1/\sqrt{4b}$.

Avec cette substitution, et les conditions limites nécessaires, le système d'équations différentielles partielles est transformé en une équation différentielle ordinaire, et linéaire :

$$F^2 + \frac{dF}{d\psi} = 0, \quad (3.24)$$

avec la solution

$$F = \tanh \psi = \tanh \left\{ \beta \frac{y}{x} \right\}. \quad (3.25)$$

Les vitesses sont alors :

$$\frac{u_c}{U_0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tanh^2 \psi)^2 d\psi \right]^{-1/2} \sqrt{2\beta} \sqrt{\frac{b_0}{x}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \beta \sqrt{\frac{b_0}{x}} \quad (3.26)$$

$$\frac{u}{u_c} = 1 - \tanh^2 \psi \quad (3.27)$$

$$\frac{v}{u_c} = \frac{1}{\beta} \left[\psi - \psi \tanh^2 \psi - \frac{1}{2} \tanh \psi \right] \quad (3.28)$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{u_c^2} = \frac{1}{2\beta} \tanh \psi (1 - \tanh^2 \psi) \quad (3.29)$$

Goertler a analysé les résultats de plusieurs expériences, pour conclure que le meilleur accord entre la théorie et les données est obtenu avec $\beta = 7.67$.

Les profils de vitesses moyennes sont tracés dans les figures 3.1, 3.2 et 3.3 ; le profil de la contrainte de Reynolds est tracé dans la figure 4.3.

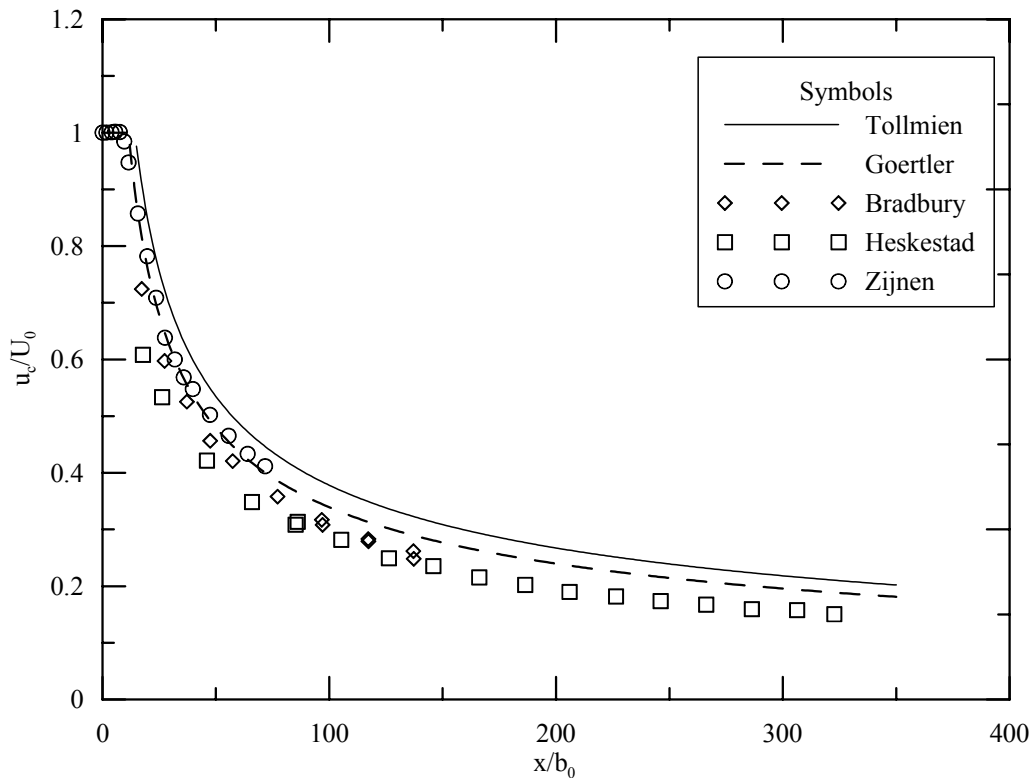


Figure 3.1 Profil de la vitesse moyenne axiale en fonction de la distance par rapport à la sortie du jet.

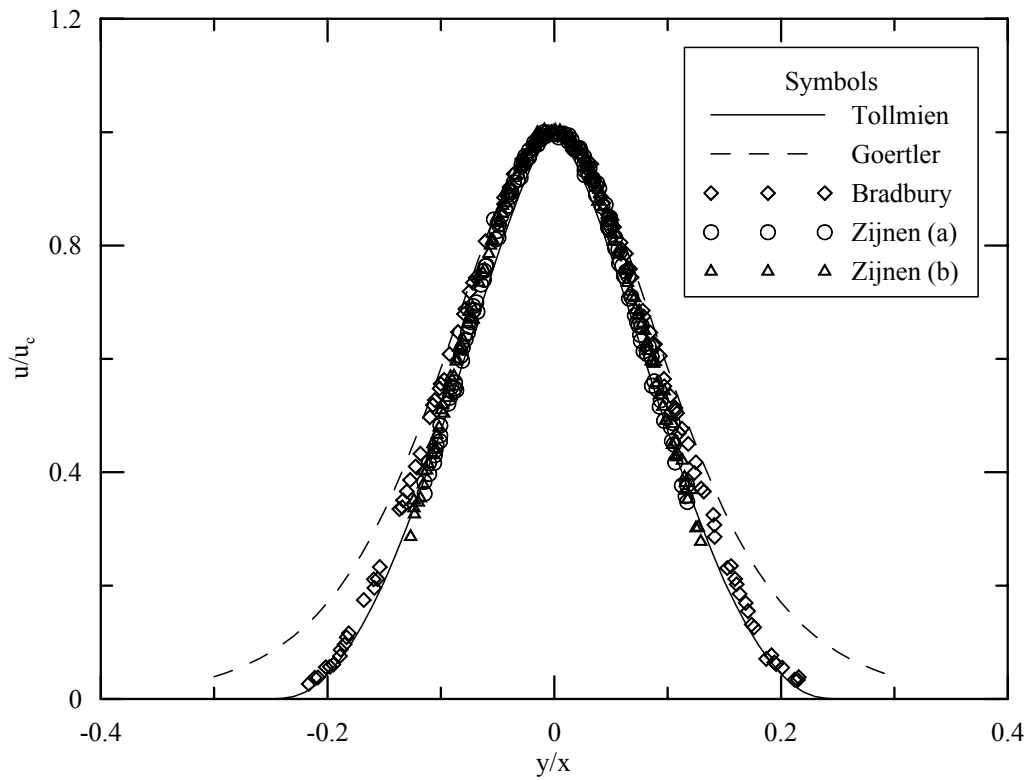


Figure 3.2 Profil transversal de la vitesse moyenne axiale.

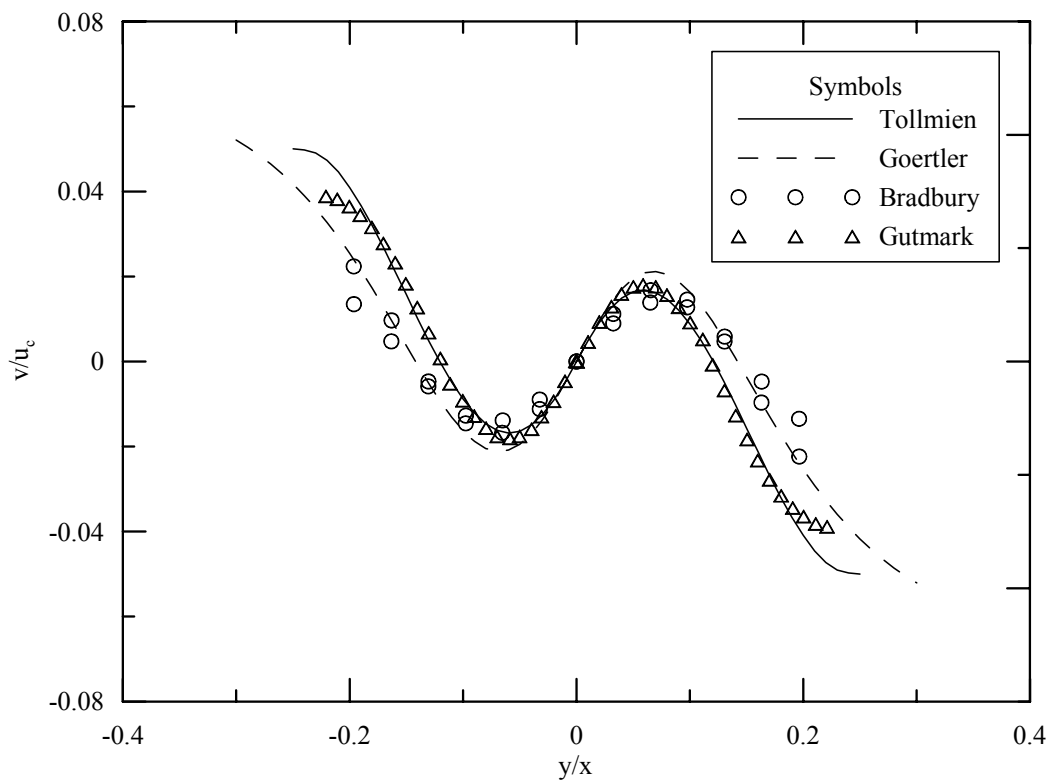


Figure 3.3 Profil transversal de la vitesse moyenne transversale.

3.2 Le jet circulaire

ϕ	$F(\phi)$	$F'(\phi)$
0.00	0.719	0.000
0.10	0.005	0.098
0.20	0.018	0.192
0.30	0.040	0.277
0.40	0.072	0.354
0.50	0.111	0.422
0.60	0.154	0.477
0.70	0.206	0.524
0.80	0.256	0.560
0.90	0.319	0.588
1.00	0.380	0.605
1.10	0.441	0.611

ϕ	$F(\phi)$	$F'(\phi)$
1.20	0.506	0.612
1.30	0.573	0.611
1.40	0.637	0.595
1.50	0.686	0.567
1.60	0.742	0.544
1.70	0.799	0.510
1.80	0.859	0.477
1.90	0.893	0.437
2.00	0.924	0.396
2.10	0.955	0.355
2.20	0.986	0.308
2.30	1.033	0.269

ϕ	$F(\phi)$	$F'(\phi)$
2.40	1.067	0.226
2.50	1.061	0.188
2.60	1.101	0.153
2.70	1.132	0.124
2.80	1.135	0.095
2.90	1.139	0.070
3.00	1.155	0.051
3.10	1.160	0.034
3.20	1.176	0.022
3.30	1.155	0.010
3.40	1.139	0.000

Tableau 3.2 : Solution numérique de l'équation $\left(F'' - \frac{1}{\phi} F'\right)^2 - FF' = 0$

L'analyse de l'écoulement moyen dans le jet circulaire peut être effectué de manière très similaire à celle utilisée pour le jet plan. Avec les mêmes hypothèses sur l'importance relative des différents termes dans l'équation de Navier-Stokes, le système d'équations pour les vitesses moyennes devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{u}r + \frac{\partial}{\partial r} \bar{v}_r r = 0, \quad (3.30)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'v'_r}), \quad (3.31)$$

où \bar{u} et \bar{v}_r sont les vitesses moyennes dans les directions axiales et radiales respectivement. Comme pour le jet plan, le gradient de pression dans la direction axiale est très faible, et peut être négligée ; l'équation (3.31) devient alors :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'v'_r}). \quad (3.32)$$

Tollmien (1926) a obtenu une solution pour ce système, avec un modèle pour la contrainte de Reynolds basé sur le concept d'une longueur de mélange ℓ_r :

$$-\overline{u'v'_r} = \ell_r^2 (\partial \bar{u} / \partial r)^2. \quad (3.33)$$

La longueur de mélange est supposée être proportionnelle à la distance axiale par rapport à la sortie du jet :

$$\ell_r = \alpha_r x \quad (3.34)$$

Définissons une variable de similarité, $\phi = r / \alpha_r x$, où le coefficient α_r est défini comme :

$$\alpha_r = a_r^{2/3}. \quad (3.35)$$

Avec cette substitution et les conditions aux limites, le système d'équations différentielles partielles peut être transformé en une équation différentielle ordinaire non-linéaire, de deuxième ordre :

$$\left(\frac{d^2 F}{d\phi^2} - \frac{1}{\phi} \frac{dF}{d\phi} \right)^2 - F \frac{dF}{d\phi} = 0 \quad (3.36)$$

qui doit être résolue numériquement. Pour les détails de cette transformation voir, par exemple, Rajaratnam (1976). Tollmien (1926) a obtenu une solution par une méthode de

développement limité (voir Abramovich 1963 pour plus de détails de la solution) et les valeurs numériques de la fonction F et de sa dérivée F' sont données dans le tableau 3.2.

Les différentes variables du problème peuvent être exprimées en termes de la fonction F , sa dérivée F' et le coefficient α_r :

$$\frac{u_c}{U_0} = \left[\int_0^\infty \phi^{-1} F'^2 d\phi \right]^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_r} \frac{r_0}{x} = \frac{0.966}{\alpha_r} \frac{r_0}{x} \quad (3.37)$$

$$\frac{u}{u_c} = \frac{1}{\phi} F' \quad (3.38)$$

$$\frac{v_r}{u_c} = \alpha_r \left(F' - \frac{1}{\phi} F \right) \quad (3.39)$$

$$-\frac{\overline{u'v'_r}}{u_c^2} = \alpha_r \frac{FF'}{\phi^2} \quad (3.40)$$

La valeur du coefficient α_r doit être déterminée empiriquement ; une analyse des résultats de différentes expériences faites dans diverses conditions donne $0.066 < \alpha_r < 0.084$, et il est conseillé de prendre $\alpha_r \approx 0.077$ comme valeur moyenne.

Il est également possible de développer une solution aux équations (3.30) et (3.32) avec un modèle de viscosité turbulente. Goertler a suggéré de prendre :

$$-\overline{u'v'_r} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}, \text{ avec } \varepsilon = b_r x u_c. \quad (3.41)$$

Puisque la vitesse axiale au centre du jet est proportionnelle à x^{-1} , la viscosité turbulente est constante, indépendante de la position dans le jet. Le coefficient b_r est à déterminer empiriquement.

Pour résoudre les équations, nous définissons une variable de similarité :

$$\psi = \beta_r \frac{r}{x} \text{ avec } \beta_r = b_r^{-1/2}. \quad (3.42)$$

Après plusieurs manipulations, le système d'équations peut être réduit à :

$$F \frac{dF}{d\psi} = \frac{dF}{d\psi} - \psi \frac{d^2 F}{d\psi^2}, \quad (3.43)$$

et avec les conditions aux limites, la solution est donnée par :

$$F = \frac{0.5\psi^2}{1 + 0.125\psi^2}. \quad (3.44)$$

Les vitesses moyennes sont alors :

$$\frac{u_c}{U_0} = \left[\int_0^\infty \frac{F'^2}{\psi} d\psi \right]^{-1/2} \frac{\beta_r}{\sqrt{2}} \frac{r_0}{x} = \frac{\beta_r}{1.61} \frac{r_0}{x} \quad (3.45)$$

$$\frac{\bar{u}_r}{u_c} = \frac{1}{[1 + 0.125\psi^2]^2} \quad (3.46)$$

$$\frac{\bar{v}_r}{u_c} = \frac{1}{2\beta_r} \frac{\psi - 0.125\psi^3}{[1 + 0.125\psi^2]^2} \quad (3.47)$$

$$\frac{\overline{u'v_r'}}{u_c^2} = \frac{1}{\beta_r} \frac{0.5\psi}{[1+0.125\psi^2]^3} \quad (3.48)$$

Les profils de vitesse sont tracés dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6.

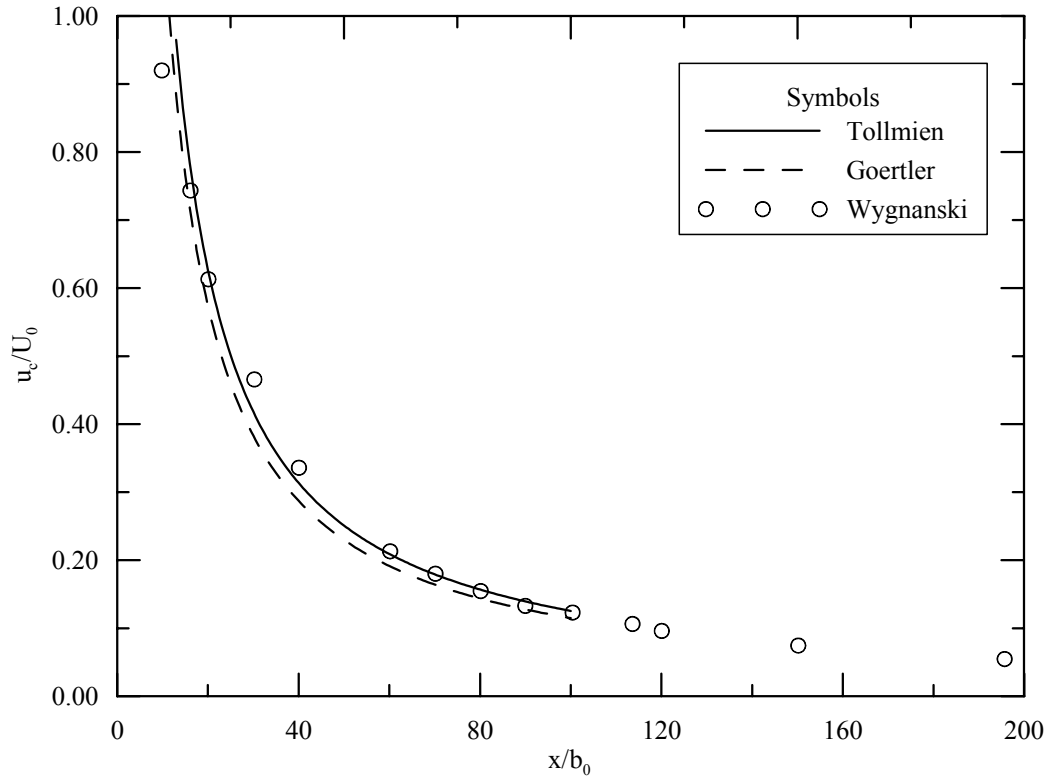


Figure 3.4 Profil axial de la vitesse moyenne axiale.

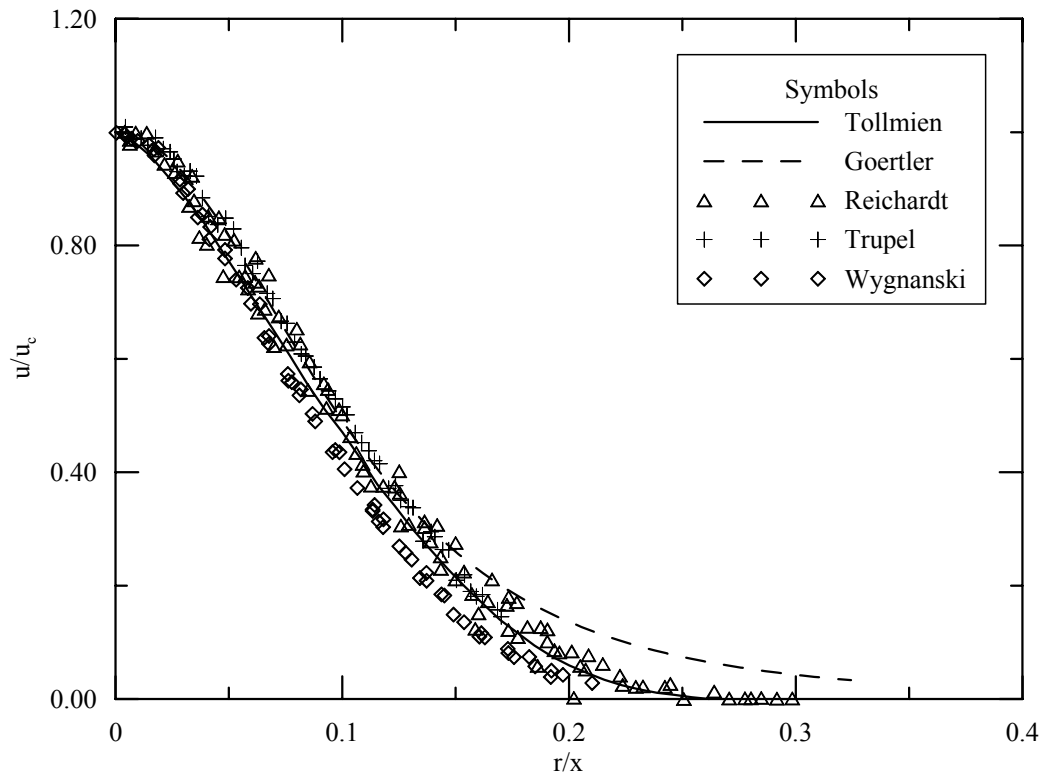


Figure 3.5 Profil radial de la vitesse axiale fluctuante.

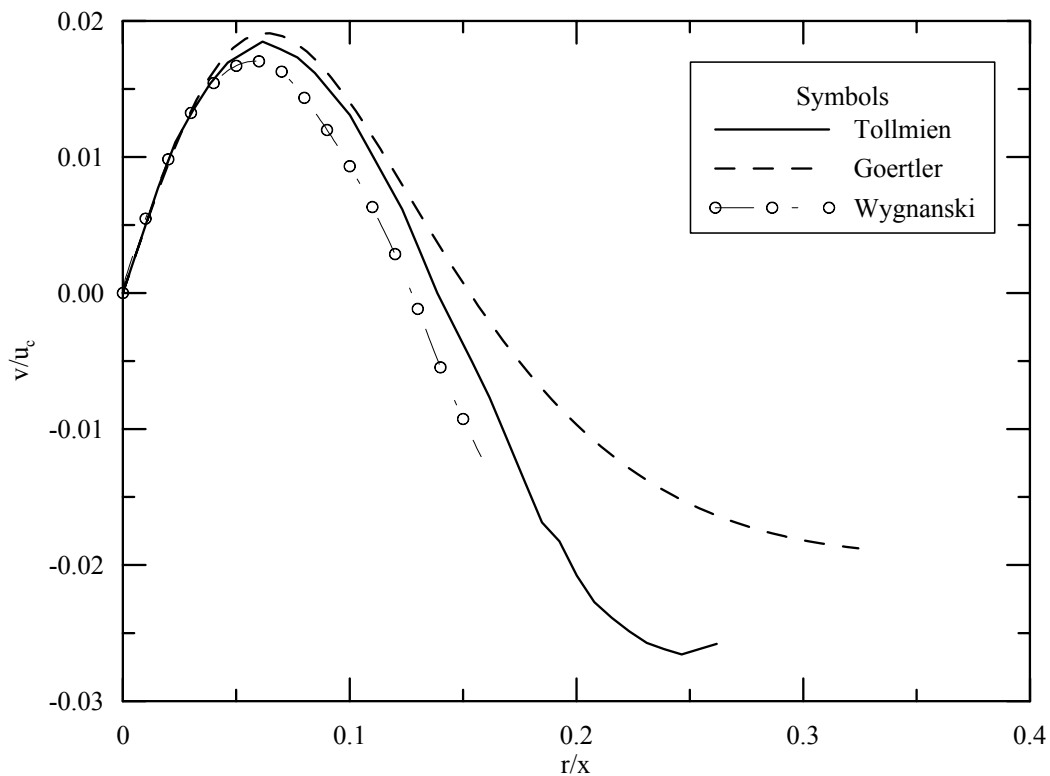


Figure 3.6 Profil radial de la vitesse transversale moyenne.

4. Les vitesses turbulentes

4.1 Le jet plan

Les profils longitudinaux de la composante axiale de la turbulence sont tracés dans la figure 4.1. On voit clairement qu'il faut beaucoup plus de temps avant que la turbulence ne devienne auto similaire – le rapport u'/u_c devient à peu près constant à partir de $x/b_0 \sim 50$. Les profils transversaux de la composante axiale de la turbulence (figure 4.2) montrent une structure symétrique à deux bosses, produites par un fort cisaillement sur les bords du jet. Il est également à noter que les profils de u'/u_c et de v'/u_c montrent beaucoup plus de variabilité entre expériences ; les quantités turbulentes (mis à part les contraintes de Reynolds) sont beaucoup moins reproductibles que les quantités moyennes.

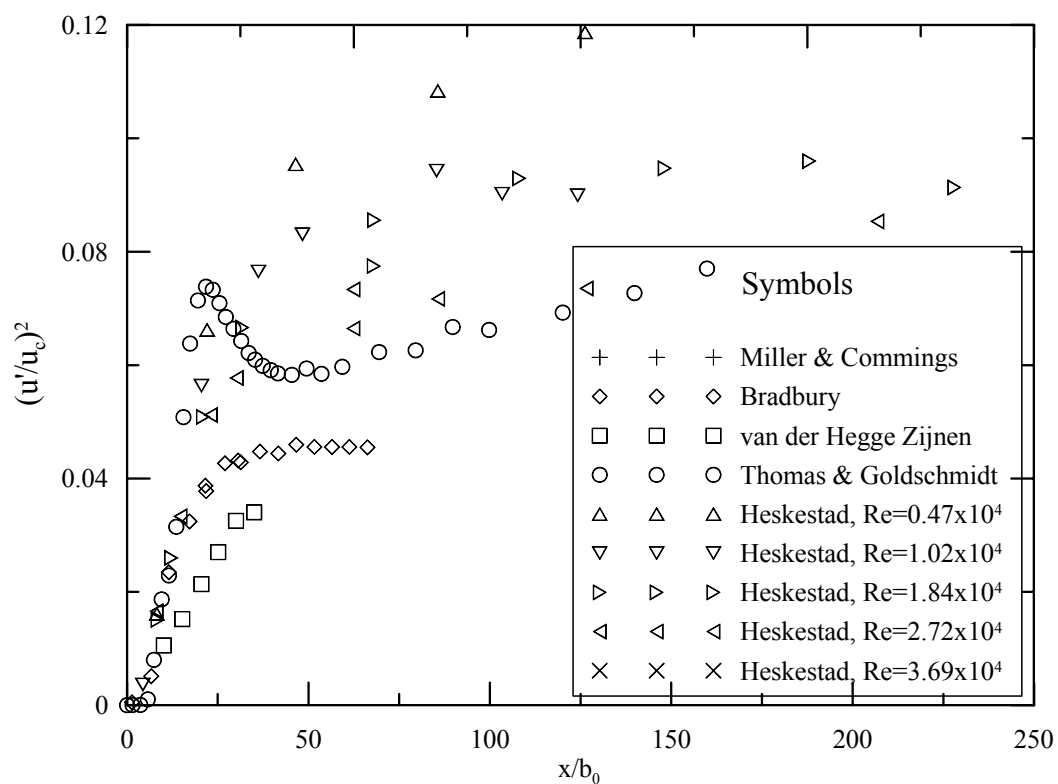


Figure 4.1 Profil axial de la vitesse axiale fluctuante.

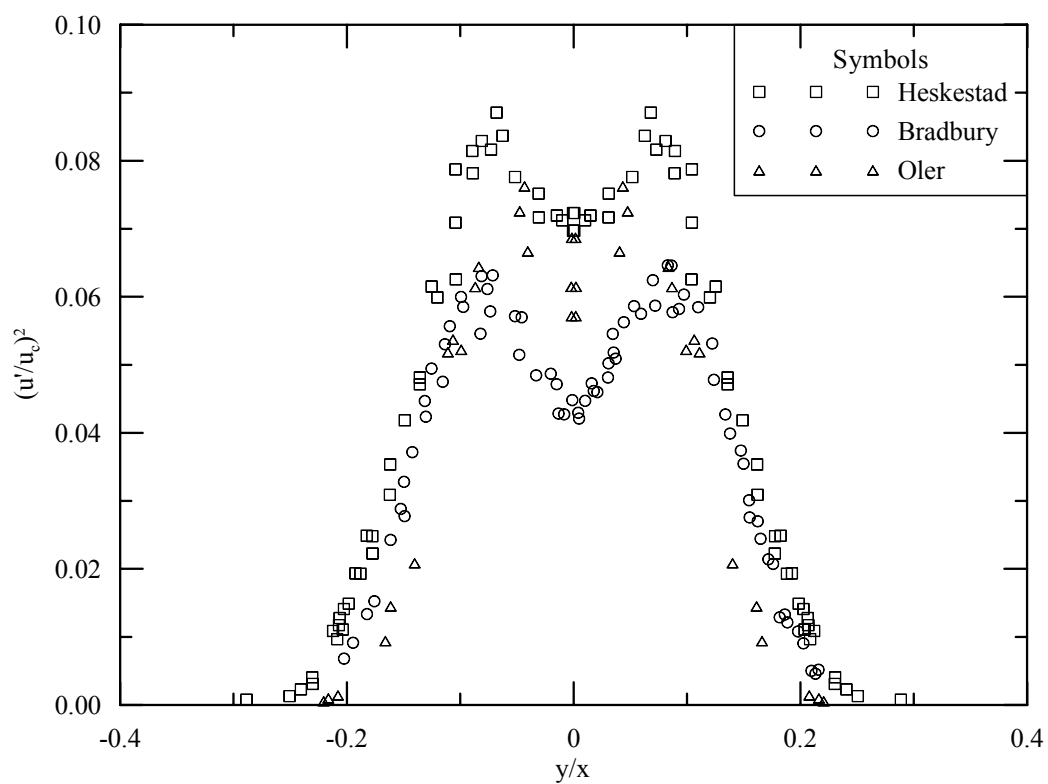


Figure 4.2 Profil transversal de la vitesse axiale fluctuante.

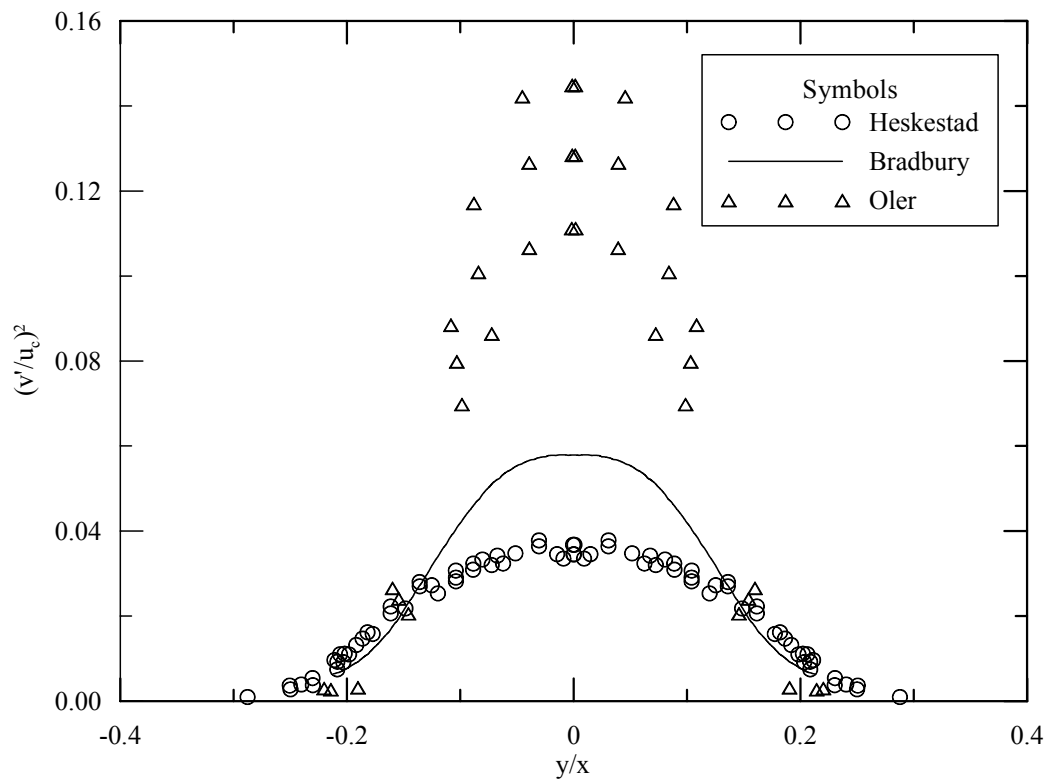


Figure 4.3 Profil transversal de la vitesse transversale fluctuante.

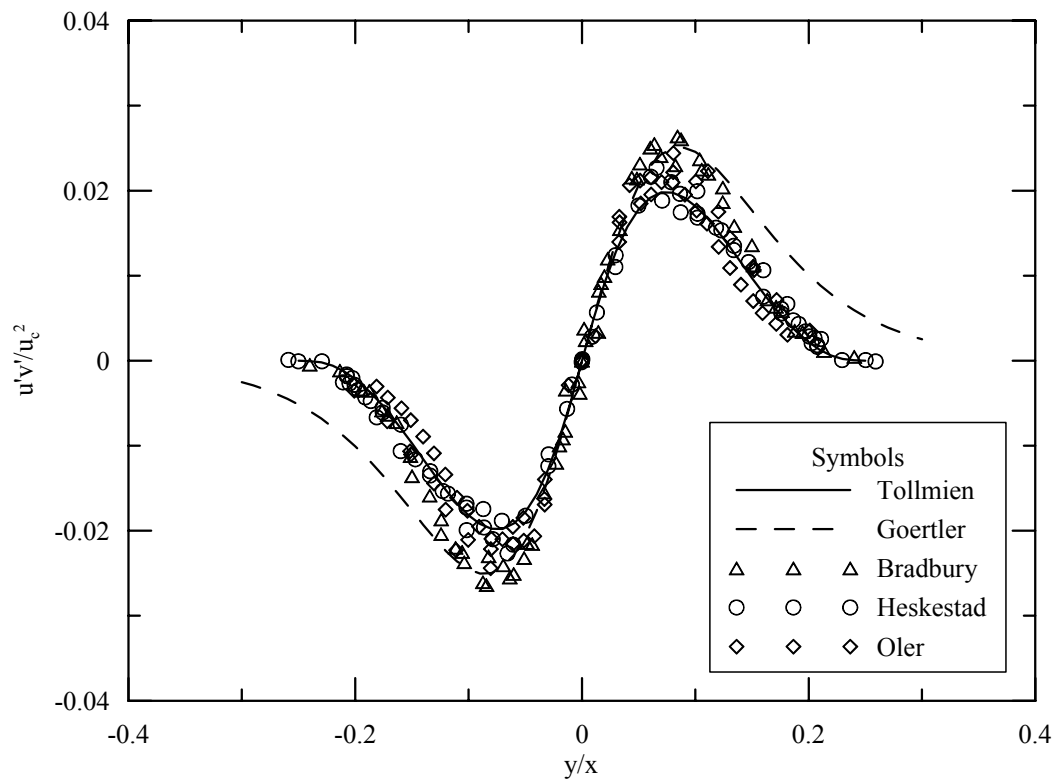


Figure 4.4 Profil transversal de la contrainte de Reynolds.

4.2 Le jet circulaire

Les profils axiaux des trois composants de la vitesse fluctuante (figure 4.5) confirment ce qui a été observé pour le jet plan – la turbulence devient autosimilaire beaucoup plus loin de l'origine que les vitesses moyennes. Par contre la structure à deux bosses dans les profils de la

composante axiale de la vitesse fluctuante (figure 4.6) est beaucoup moins évidente que pour le jet plan.

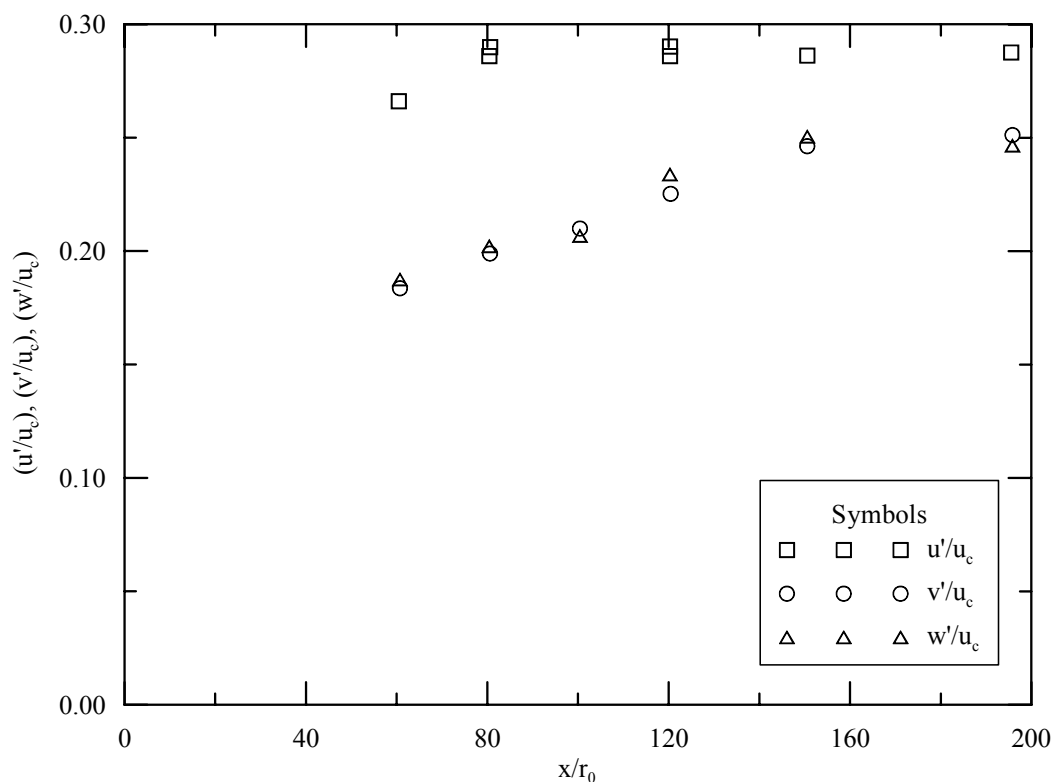


Figure 4.5 Profils axiaux des trois composants de la vitesse fluctuante.

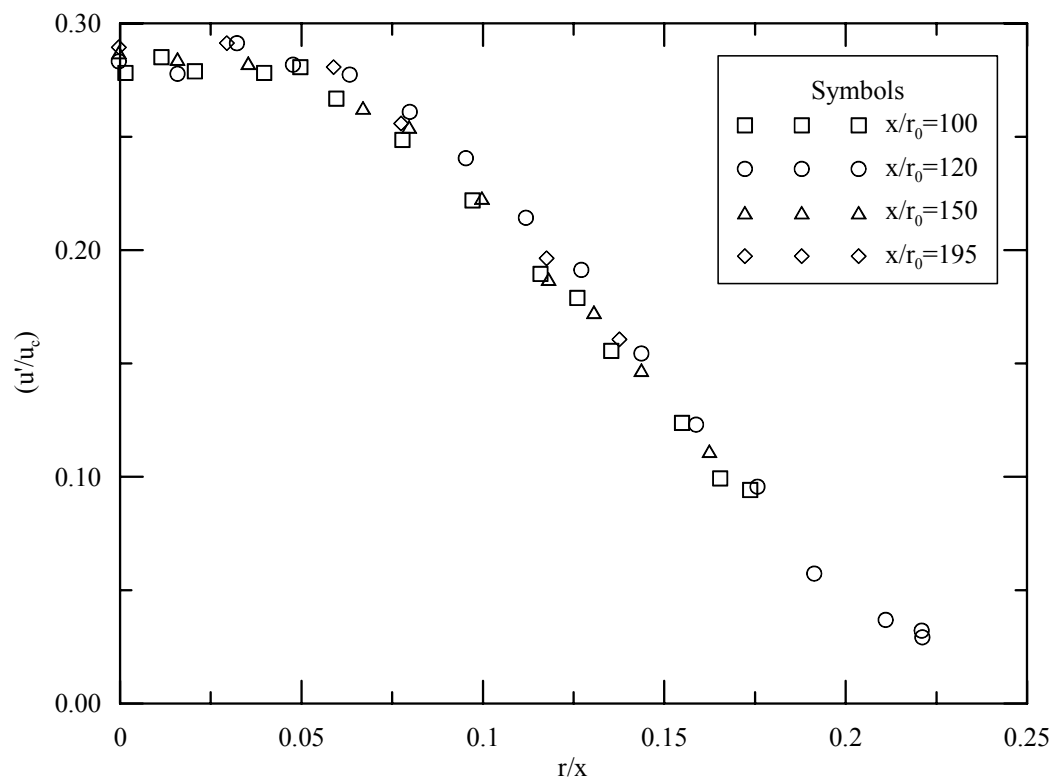


Figure 4.6 Profil radial de la vitesse axiale fluctuante.

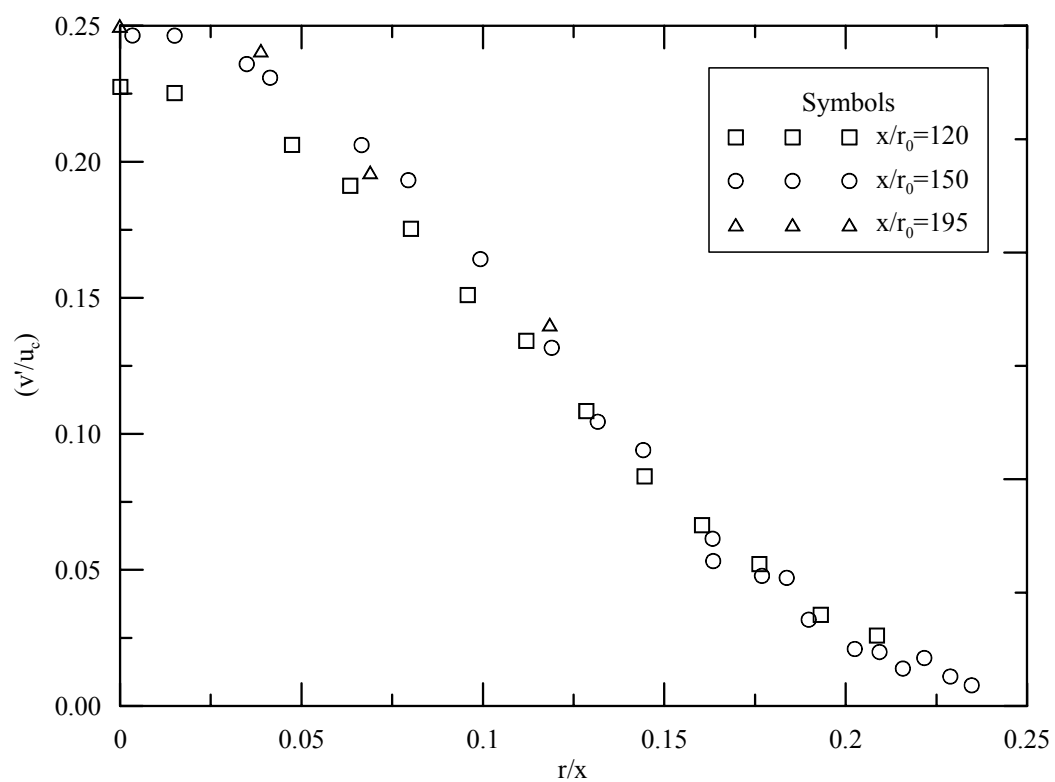


Figure 4.7 Profil radial de la vitesse radiale fluctuante.

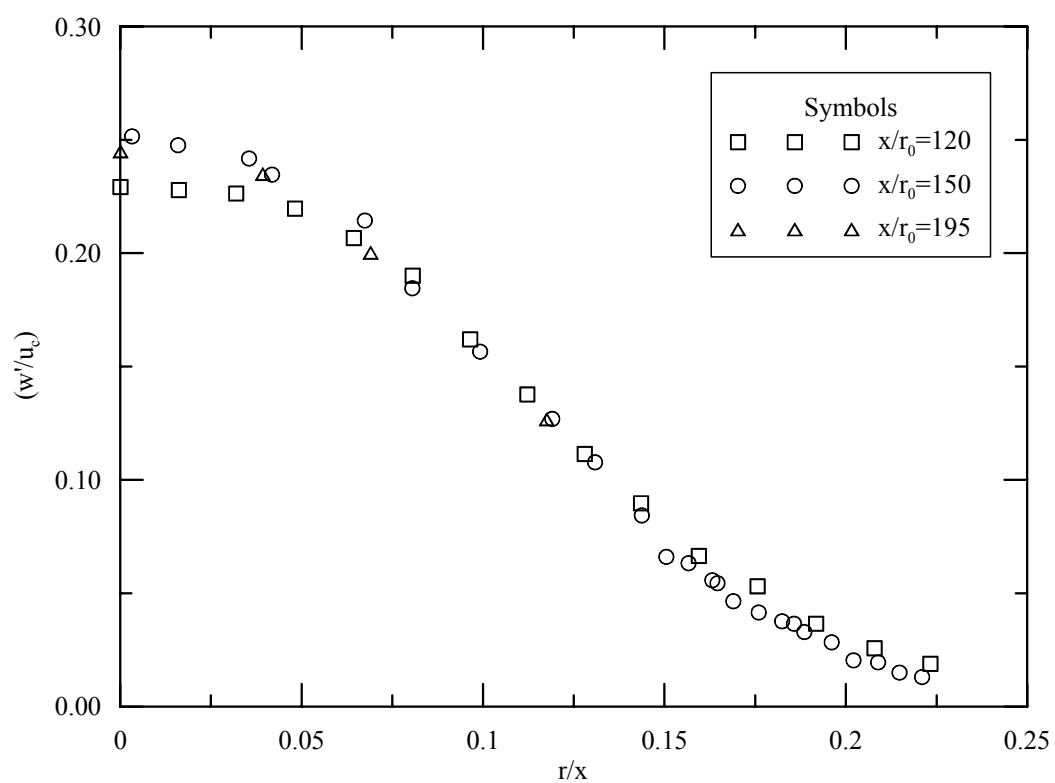


Figure 4.8 Profil radial de la vitesse circumférentielle fluctuante.

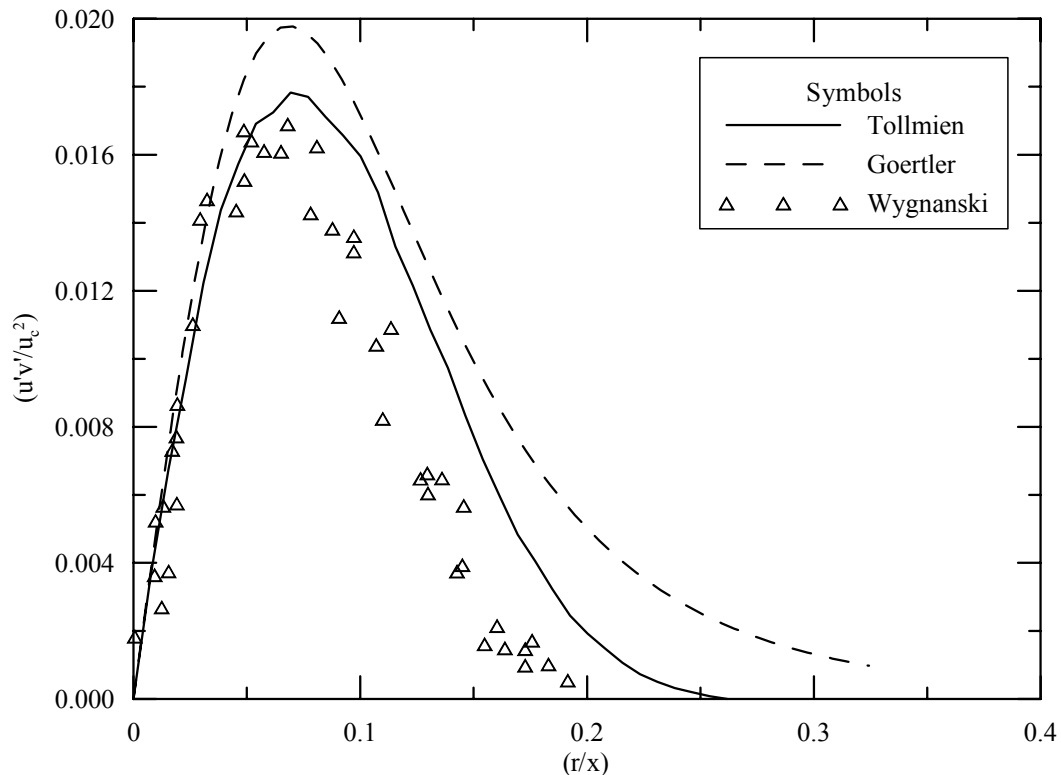


Figure 4.9 Profil radial de la contrainte de Reynolds.

5. Bibliographie

- ABRAMOVICH, G.N. (1963) The theory of turbulent jets. Traduction en anglais publiée par MIT Press, Massachusetts
- BRADBURY, L.J.S. (1965) The structure of a self preserving turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, **23**, pp. 31-64
- BRADSHAW, P. (1977) Effect of external disturbances on the spreading rate of a plane turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, **80**, pp. 795-797
- DIMOTAKIS, P.E., LY, R.C. & PAPANTONIOU, D.Z. (1981) *Proc XV Int. Symp. Fluid Dyn.* Jachranka, Pologne. (voir aussi VAN DYKE, M. 1982 An Album of Fluid Motion. Parabolic Press).
- DIMOTAKIS, P.E., MIAKE-LY, R.C. & PAPANTONIOU, D.Z. (1983) Structure and dynamics of round turbulent jets. *Phys. Fluids*, **26**, pp. 3185-3192.
- EVERITT, K.W. & ROBINS, A.G. (1978) The development and structure of turbulent plane jets. *J. Fluid Mech.*, **88**, pp. 563-583.
- FLORA, J.J. & GOLDSCHMIDT, V.W. (1969) Virtual origins of a free plane turbulent jet. *J.A.I.A.A.*, **7**, pp. 2344-2346.
- GOERTLER, H. (1942) Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Nährungsansatzes. *Z.A.M.M.*, **22**, pp. 244-254.
- GUTMARK, E. & WYGNANSKI, I. (1976) The planar turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, **73**, pp. 465-495.

- HESKESTAD, G. (1965) Hot-wire measurements in a plane turbulent jet. *Trans A.S.M.E., J. Appl. Mech.*, pp. 721-734.
- HESKESTAD, G. (1966) Hot-wire measurements in a radial turbulent jet. *Trans A.S.M.E., J. Appl. Mech.*, pp. 417-424.
- KOTSOVINOS, N.E. & ANGELIDES, P.B. (1991) The momentum flux in turbulent submerged jets. *J. Fluid Mech.*, **229**, pp. 453-470.
- MILLER, D.R. & COMINGS, E.W. (1957) Static pressure distribution in the free turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, **3**, pp. 1-16.
- MUMFORD, J.C. (1982) The structure of the large eddies in fully developed turbulent shear flows. Part 1. The plane jet. *J. Fluid Mech.*, **118**, pp. 241-268.
- OLER, J.W. (1980) Coherent structures in the similarity region of a two-dimensional turbulent jet: a vortex street. Ph.D. thesis, School of Mechanical Engineering, Purdue University.
- OLER, J.W. & GOLDSCHMIDT, V.W. (1982) A vortex-street model of the flow in the similarity region of a two-dimensional free turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, **123**, pp. 523-535.
- RAJARATNAM, N. (1976) Turbulent jets. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- REICHARDT, H. (1942) Forsch. a. d. Geb. Ing. Wesens 13 B; V.D.I. Forsch. heft **414**; 2ème ed. 1951
- TAYLOR, G.I. (1958) Flow induced by jets. *J. Aero/Space Sciences*, **XXV**, pp. 464-465.
- THOMAS, F.O. & GOLDSCHMIDT, V.W. (1986) Structural characteristics of a developing turbulent planar jet. *J. Fluid Mech.*, **163**, pp. 227-256.
- TOLLMIE, W. (1926) Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. *Z.A.M.M.*, **6**, pp. 468-478. (Traduction en anglais : N.A.C.A. TM 1085, 1945)
- WERLÉ, H. (1974) Le tunnel hydrodynamique au service de la recherche aérospatiale. Publ. No 156 ONERA France (voir aussi VAN DYKE, M. 1982 An Album of Fluid Motion Parabolic Press).
- WYGNANSKI, I. & FIEDLER, H. (1969) Some measurements in the self-preserving jet. *J. Fluid Mech.*, **38**, pp. 577-612.
- ZIJNEN, B.G. VAN DER HEGGE (1958a) Measurements of the velocity distribution in a plane turbulent jet of air. *Appl. Sci. Res.*, **A 7**, pp. 256-276.
- ZIJNEN, B.G. VAN DER HEGGE (1958b) Measurements of turbulence in a plane jet of air. *Appl. Sci. Res.*, **A 7**, pp. 293-313.