

Méthode des Différences Finis chapitre 4

Marc Buffat
UFR de Mécanique
Université Claude Bernard, Lyon I

7 avril 2008

Chapitre 4

Schémas différences finies en 2D

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étendrons la démarche d'analyse, décrite au chapitre précédent, à la résolution de problèmes bidimensionnels en espace. Nous étudierons les problèmes classiques de type :

1. elliptique : déformation d'une membrane,
2. hyperbolique : oscillation d'une surface libre,
3. parabolique : dispersion d'un polluant.

4.2 Équation de Poisson

4.2.1 Problème physique

On considère une membrane carrée de côté a qui se déforme sous l'effet d'une charge surfacique $f(x, y)$. La membrane est sous tension et fixée sur les bords. On suppose qu'en chacun des points la tension T est constante et tangente à la membrane (on néglige les forces élastiques dues à la déformation de la membrane). On note $u(x, y)$ la déformée. Les forces exercées sur un élément de membrane $dx dy$ sont :

1. des forces de tension exercées sur les cotés de l'élément. Pour le côté de longueur dy et d'abscisse x , cette force est perpendiculaire au côté dy et tangente à la surface $u(x, y)$. Elle est située dans le plan (x, z) et a pour composantes :

$$T dy \begin{bmatrix} -\cos \theta_x \\ 0 \\ \sin \theta_x \end{bmatrix}$$

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

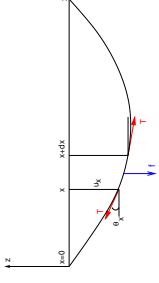


FIG. 4.1 – Équilibre statique d'une membrane dans le plan (x, y)

en notant θ_x l'angle de la surface $u(x, y)$ avec l'horizontal. De même pour le côté d'abscisse y , la force de tension s'écrit :

$$T dx \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \theta_y \\ \sin \theta_y \end{bmatrix}$$

2. des forces de chargement verticales :

$$f(x, y) dx dy$$

L'équilibre statique conduit donc aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} T dy (\cos \theta_{x+dx} - \cos \theta_x) &= 0 \\ T dx (\cos \theta_{y+dy} - \cos \theta_y) &= 0 \\ T dy (\sin \theta_x - \sin \theta_{x+dx}) + T dx (\sin \theta_y - \sin \theta_{y+dy}) &= f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

avec $\tan \theta_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\tan \theta_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. En supposant que les angles θ sont petits, i.e. :

$$\cos \theta_x \approx 1, \sin \theta_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \cos \theta_y \approx 1, \sin \theta_y \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

On effectue des développements limités à l'ordre 1 dans les équations précédentes, qui conduisent à l'équation d'équilibre de la membrane :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (4.1)$$

auquel on ajoute les conditions aux limites :

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, a) = 0$$

En effectuant un changement de variables, on obtiens le problème modèle suivant, qui est une équation de Poisson :

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

$$\begin{aligned}
 -\Delta U &= F & \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\
 U(0, y) &= U(1, y) = U(x, 0) = U(x, 1) = 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2.2 Étude de la solution analytique

Pour déterminer la solution générale de l'équation de Poisson (4.2), on décompose $U(x, y)$ en série de Fourier vérifiant les conditions aux limites :

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} U_{kp} \sin(k\pi x) \sin(p\pi y) \tag{4.3}$$

En remplaçant dans (4.2), on obtiens :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (k^2 + p^2) \pi^2 U_{kp} \sin(k\pi x) \sin(p\pi y) = F(x, y)$$

d'où les valeurs de U_{kp} , en multipliant cette relation par $\sin(k\pi x) \sin(p\pi y)$. En intégrant sur le domaine Ω et en utilisant l'orthogonalité des fonctions $\sin(k\pi x)$, il vient :

$$U_{kp} = \frac{4}{(k^2 + p^2) \pi^2} \int_0^1 \int_0^1 F(x, y) \sin(k\pi x) \sin(p\pi y) dx dy \tag{4.4}$$

cas d'un chargement constant $F = -1$

Dans le cas d'un chargement constant $F = -1$, la valeur du coefficient de Fourier U_{kp} se calcule simplement avec Maple et on trouve :

$$U_{kp} = \frac{-4}{(k^2 + p^2) \pi^4 k p} \left(1 - (-1)^k \right) (1 - (-1)^p)$$

Ce coefficient est non nul si et seulement si k et p sont tous les deux impaires. La solution exacte s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{lm} \sin((2l-1)\pi x) \sin((2m-1)\pi y) \\
 \text{avec } U_{lm} &= \frac{-16}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2) \pi^4 (2l-1)(2m-1)}
 \end{aligned}$$

L'allure de la solution est donnée sur la figure (4.2).

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

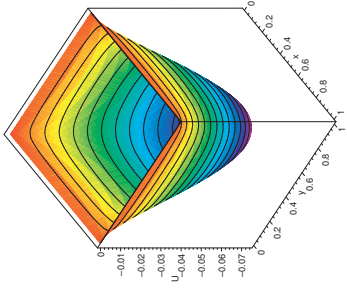


FIG. 4.2 – solution exacte de (4.2) pour $F = -1$

La valeur maximale U_{max} de la déformation se trouve au centre et a pour expression :

$$U_{max} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{l+1}(-1)^{m+1}}{((2l-1)^2 + (2m-1)^2) \pi^4 (2l-1)(2m-1)}$$

On peut calculer une valeur approchée très précise de cette série avec Maple, et on trouve (pour $m = l = 200$) :

$$U_{max} = -0.07367135123 \tag{4.5}$$

4.2.3 Schéma aux différences finies pour le laplacien

Sur un maillage de N_x points suivant x et N_y points suivant y (figure 4.3), la discrétisation par différences finies centrées de l'équation (4.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{-U_{i+1,j} + 2U_{i,j} - U_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{-U_{i,j+1} + 2U_{i,j} - U_{i,j-1}}{dy^2} &= F_{i,j} \\
 \forall i = 2, N_x - 1 \quad \forall j = 2, N_y - 1
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec les conditions aux limites :

$$U_{1,j} = U_{N_x,j} = 0 \quad \forall j = 1, N_y \quad \text{et} \quad U_{i,1} = U_{i,N_y} = 0 \quad \forall i = 1, N_x$$

Les pas de discrétisation en espace sont équidistants et vérifient $dx = \frac{1}{N_x-1}$ et $dy = \frac{1}{N_y-1}$.

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

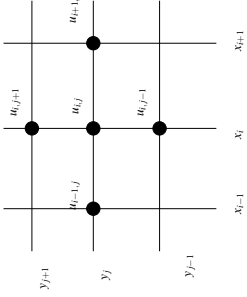


FIG. 4.3 – discrétisation différences finies du laplacien

Ce schéma conduit à un système matriciel de $N = N_x N_y$ inconnues $U_{i,j}$. Pour écrire ce système sous la forme matricielle $\mathcal{A}X = \mathcal{B}$, on doit transformer la matrice des inconnues $U_{i,j}$ en un vecteur inconnu X_k . Pour cela on numérote les inconnues par lignes, i.e. on effectue la transformation d'indice (i, j) vers le mono-indice $k = i + (j - 1)N_x$. Avec ce changement d'indice, l'équation aux différences (4.6) s'écrit :

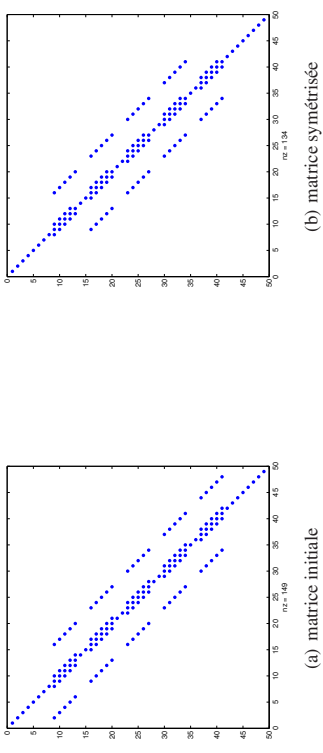
$$cU_{k-N_x-1} + bU_{k-1} + aU_k + bU_{k+1} + cU_{k+N_x+1} = F_k$$

pour tous les noeuds internes $k = i + (j - 1)N_x$ avec $1 < i < N_x$ et $1 < j < N_y$ en notant $a = \frac{2}{dx^2} + \frac{2}{dy^2}$, $b = \frac{1}{dx^2}$ et $c = \frac{1}{dy^2}$.

Les conditions aux limites s'écrivent $U_k = 0$ pour les noeuds frontières $k = 1 + (j - 1)N_x$, $k = N_x + (j - 1)N_x$ avec $1 < j < N_y$ et $k = i + (N_y - 1)N_x$ avec $1 < i < N_x$.

La matrice \mathcal{A} est une matrice penta-diagonale dont la forme est donnée sur la figure (4.4a). On vérifie que la matrice possède bien au maximum 5 coefficients non nuls répartis sur la diagonale de coefficients a , les 2 co-diagonales adjacentes de coefficients b et les 2 co-diagonales distantes de $N_x - 1$ de la diagonale de coefficients c . On constate aussi que la matrice \mathcal{A} est non symétrique, à cause de la façon d'appliquer les conditions aux limites. En effet pour un noeud k sur la frontière, on applique la condition aux limites $X_k = 0$ dans la ligne k de la matrice en annulant la ligne et en mettant 1 sur la diagonale. On ne tiens pas compte de cette condition aux limites dans les équations où intervient la valeur de X_k , i.e. dans les lignes de \mathcal{A} ayant un coefficient non nul dans la colonne k . Pour conserver la symétrie de la matrice, qui traduit la symétrie du problème physique, il faut aussi annuler les coefficients de la colonne k (figure 4.4b). Dans le cas $X_k = X_0$, il faut en outre retrancher la colonne X_0 de la matrice \mathcal{A} .

On note aussi que le nombre de coefficients non nuls de la matrice \mathcal{A} est de l'ordre de $5N_x N_y \approx 5N^2$, ce qui est beaucoup plus petit que le nombre de coeffi-

FIG. 4.4 – matrice du laplacien pour $N_x = 7$ et $N_y = 7$

icients $N_x^2 N_y^2 \approx N^4$ de la matrice \mathcal{A} . On tiendra compte de ces propriétés lors de la résolution du système matriciel.

Précision et erreur de troncature

On utilise une discrétisation centrée et d'ordre 2 de la dérivée seconde en x et en y , donc l'erreur de troncature du schéma est d'ordre $O(dx^2, dy^2)$. Elle s'écrit :

$$ErrT = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} dx^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} dy^2 + O(dx^4, dy^4)$$

La précision du schéma (4.6) est donc d'ordre 2 en espace, i.e. en $O(dx^2, dy^2)$.

4.2.4 Expérimentation numérique avec Matlab

La fonction Matlab **laplace2d** (4.1) calcule la matrice \mathcal{A} et le second membre \mathcal{B} sur un maillage différences finis de $N_x N_y$ points pour une fonction F définie aux noeuds (i, j) du maillage et des conditions aux limites homogènes. Compte tenu des remarques sur la structure de la matrice \mathcal{A} , on utilise une structure de donnée de matrice creuse (*sparse matrix en anglais*) qui permet de ne stocker que les éléments non nuls. Pour cela on stocke les coefficients non nuls de \mathcal{A} dans un vecteur **Ac**, ainsi que leurs indices (**ii,jj**) dans deux autres vecteurs **I** et **J**. Pour la matrice \mathcal{A} ci dessous :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

on utilise les 3 tableaux suivants :

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ I &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ J &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour utiliser cette structure de données avec Matlab, on initialise \mathcal{A} avec la fonction Matlab **spalloc** (ligne 18), qui permet de créer une matrice creuse de $5N$ éléments, au lieu d'utiliser la fonction **zeros(N,N)** qui crée une matrice carrée de N^2 éléments. Pour $N_x = N_y = 100$, on a $N = 10^4$ et le stockage de A sous forme de matrice creuse nécessite alors 640 kilo-octets de mémoire au lieu des 100 méga-octets nécessaire au stockage de tous les coefficients de \mathcal{A} , ce qui rend la résolution du problème possible sur un ordinateur de bureau. On remarque aussi que la taille nécessaire au stockage de \mathcal{A} est supérieur à $5N$ réels (soit 400 kilo-octets) puisque pour chaque valeur non nulle \mathcal{A}_{pq} on stocke aussi les indices p et q correspondants.

Pour le second membre \mathcal{B} on transforme la matrice F des valeurs aux noeuds du maillage en un vecteur de colonne de dimension N avec la fonction Matlab **reshape**. La boucle d'assemblage de \mathcal{A} correspond aux lignes 20 à 25, et se fait ligne par ligne en utilisant la structure matricielle de Matlab (ligne 23). Les conditions aux limites sont imposées sur les cotés $x = 0$ et $x = 1$ (lignes 29 à 32) et $y = 0$ et $y = 1$ (lignes 34 à 37), en annulant la ligne et la colonne k de \mathcal{A} ainsi que le second membre \mathcal{B}_k puis en imposant $\mathcal{A}_{k,k} = 1$.

Le script Matlab (4.2) résout numériquement le problème (4.2) dans le cas d'une fonction $F = -1$ (ligne 8). On utilise la fonction **Laplace2d** précédente pour calculer la matrice \mathcal{A} et le second membre \mathcal{B} du problème. On résout le système (ligne 11) avec l'opérateur standard \backslash de Matlab, qui pour des matrices creuses utilise un algorithme de Gauss par bande. C'est la méthode la plus efficace sous Matlab, même si elle nécessite un stockage temporaire important, de l'ordre de $2N_x^2 N_y$ puisque la largeur de bande vaut N_x . En utilisant la structure particulière de la matrice \mathcal{A} (tri-diagonale par blocs), on pourrait utiliser un algorithme très efficace, qui est l'extension de l'algorithme de Thomas. Son principe est décrit dans l'annexe ?? page ??, mais il n'est pas implémenté sous Matlab.

La fin du script permet la visualisation en 3D de la solution calculée.

Programme 4.1 – Fonction laplace2d : calcul de la matrice du laplacien

```

1 function [A,B]=laplace2d (F,nx,ny)
2 % entree :
3 % matrice F du second membre Fij valeur de F au noeud (i,j)
4 % nx,ny nombre de points en x et en y
5 % sortie :
6 % matrice A et second membre B
7 % en utilisant un stockage creux
8 % pble -lap(U)=f avec des C.L. homogene
9 dx=1/(nx-1); dy=1/(ny-1);
10 % coefficient du shema pour les nds
11 % (i,j-l) (i-l,j) (i,j) (i+l,j) (i,j+l)
12 coeff=[-1/dy^2,-1/dx^2,2/dx^2+2/dy^2,-1/dx^2,-1/dy^2];
13 % decalage / au noeud (i,j) dans la numérotation
14 num = [ -nx, -1, 0, 1, nx ];
15 % assemblage de la matrice pour un stockage par ligne
16 % i.e le noeud (i,j) a pour adresse k=(j-l)*nx+i
17 N=nx*ny; % dimension
18 A=spalloc(N,N,5*N); % matrice creuse de 5 elts maxi / ligne
19 B=reshape(F,N,1);
20 for i=2:nx-1
21     for j=2:ny-1
22         k=(j-1)*nx+i;
23         A(k,k+num)=coeff;
24     end
25 end
26 % conditions aux limites
27 % =====
28 % C.L. sur les frontieres i=l,i=nx (Dirichlet)
29 for j=1:ny
30     k=(j-1)*nx+1; A(k,:)=0; A(:,k)=1.0; B(k)=0;
31     k=(j-1)*nx+nx; A(k,:)=0; A(:,k)=1.0; B(k)=0;
32 end;
33 % C.L. sur les frontieres j=1,j=ny (Dirichlet)
34 for i=1:nx
35     k=i; A(k,:)=0; A(:,k)=0; A(k,k)=1.0; B(k)=0;
36     k=(ny-1)*nx+i; A(k,:)=0; A(:,k)=1.0; B(k)=0;
37 end;
38 % fin

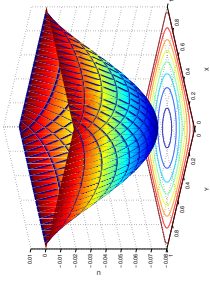
```

Programme 4.2 – Résolution du problème (4.2)

```

1 % resolution du laplacien
2 clear
3 % dimension
4 nx=21; ny=21;
5 dx=1/(nx-1); dy=1/(ny-1);
6 X=[0:dx:1]; Y=[0:dy:1];
7 % assemblage matrice et 2nd membre
8 F=ones(nx,ny);
9 [A,B]=laplace2d(F,nx,ny);
10 % resolution
11 U=A\B;
12 % transformation de U en matrice pour visualisation
13 U1=reshape(U,nx,ny);
14 % visualisation
15 surfc(X,Y,U1); title('deformee'); shading interp;

```

FIG. 4.5 – solution numérique ($N_x = N_y = 11$) du problème (4.2)

On a tracé le résultat obtenu pour $N_x = N_y = 21$ sur la figure (4.5). En comparant avec la solution exacte (figure 4.2), on constate une bonne concordance. L'erreur relative sur la valeur maximale de la déformée est inférieure à 3% :

$$Err = \left| \frac{U_{max} - U_{max}^h}{U_{max}} \right| \approx 0.027$$

où on a noté U_{max} la valeur exacte (4.5) et U_{max}^h est la valeur approchée.

Pour terminer cette étude, nous avons effectué une étude de précision en calculant cette erreur relative pour différents maillages (avec un nombre de points identique suivant x et y). Chaque maillage est caractérisé par un pas de discrétisation $h = dx = dy$. Sur la figure (4.6), on a tracé l'évolution de l'erreur relative Err en fonction de h , et on trouve sur une échelle logarithmique une droite de

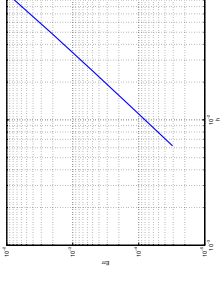
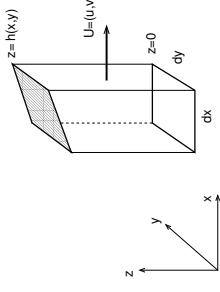
FIG. 4.6 – Erreur relative en fonction du pas h du maillage

FIG. 4.7 – oscillation de la surface libre

pente 2. Cela montre que l'erreur relative est en $O(h^2)$, ce qui confirme le calcul de l'erreur de troncature en $O(dx^2, dy^2)$.

4.3 Équation des ondes

4.3.1 Problème physique : oscillations d'une surface libre

On s'intéresse aux oscillations de la surface d'un liquide contenu dans un réservoir. Au repos le réservoir contient un liquide sur une hauteur h_0 . La surface du liquide est plane, horizontale et notée Ω . La répartition de pression dans le liquide est hydrostatique :

$$p_s = p_0 + \rho_0 g (h_0 - z)$$

On perturbe la surface $h(x, y, t)$ à l'instant initiale. Celle-ci se met alors à osciller de part et d'autre de sa position initiale h_0 . On néglige les effets de viscosité, et on applique les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à un cylindre élémentaire de base $dx dy$ et de hauteur $h(x, y, t)$ (figure 4.7).

En notant $\vec{U} = [u(x, y, t), v(x, y, t)]$ la vitesse moyenne (suivant z) et ρ la densité, le bilan de masse pour le cylindre de volume $h dx dy$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} = 0$$

De même le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho h u}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho h v}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

On considère que le fluide est un liquide incompressible ($\rho = \text{cste}$), et que la perturbation de la surface libre $\xi = h - h_0$ est faible. On peut alors considérer que la répartition de pression reste hydrostatique :

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g(h - z)$$

En notant que $h = h_0 + \xi$, $p = p_s + \rho g \xi$ et en linéarisant les équations précédentes ($\xi \ll h_0$, $\rho g \xi \ll p_s$, $U \ll 1$), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

En dérivant la première équation par rapport à t , la seconde par rapport à x et la troisième par rapport à y , on obtiens l'équation de propagation de la perturbation ξ de la surface libre en éliminant u et v :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g h_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.8)$$

C'est une équation des ondes qui traduit la propagation d'ondes de surface avec une célérité $c_0 = \sqrt{g h_0}$.

A cette équation, il faut ajouter une condition aux limites sur la frontière Γ du réservoir. La condition physique est la condition de vitesse normale nulle $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ . Pour obtenir une condition sur ξ , on utilise la combinaison suivant \vec{n} des 2 dernières équations (4.7) :

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

$$\frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0$$

d'où l'on déduit la condition aux limites sur ξ :

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0 \quad (4.9)$$

Les conditions initiales sont données par la déformation initiale $w(x, y)$ et la vitesse de cette déformation. En supposant la vitesse de déformation initiale nulle, on a donc :

$$\xi(x, y, 0) = w(x, y), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (4.10)$$

Le problème modèle associé s'écrit :

Trouvez $u(x, y, t)$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$u(t=0) = w, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0$$

Dans le cas d'un domaine Ω circulaire de rayon $r = 1$, on peut avantageusement passer en coordonnées polaires (r, θ) . Le problème modèle s'écrit : Trouver $u(r, \theta, t)$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \quad \text{dans } [0, 1] * [0, 2\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \quad \text{en } r=1 \\ u(t=0) &= w, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3.2 Étude de solutions analytiques

Dans la cas cylindrique (4.12), on a cherché la solution analytique à l'aide du programme Maple (4.3).

On a cherché une solution élémentaire à variables séparées sous la forme d'une onde se propageant à une célérité λc_0 et périodique en θ (ligne 7) :

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

Programme 4.3 – Solution analytique de l'équation des ondes (4.12)

```

1 > restart; with (plots):
2 # Equation des ondes en polaire
3 > diff(u(r, theta, t), t$2) = c0^2/r*diff(r*diff(u(r, theta, t), r),
    , r)
4 + c0^2/r^2*diff(u(r, theta, t), theta$2);
5 > eq := %;
6 # Solutions en variables séparées de type onde périodique en theta
7 > u(r, theta, t) = A(r)*exp(I*k*theta)*exp(I*lambda*c0*t);
8 > subs(% , eq): simplify(%/exp(I*k*theta)/exp(I*lambda*c0*t)/
    c0^2);
9 eq1 := %;
10 > rhs(eq1) - lhs(eq1); eq2 := %;
11 > dsolve(eq2, A(r));
12 # Modes propres
13 > Ue := (r, theta, t) -> BesselJ(k, lambda*r)*exp(I*k*theta)*exp(I
    *lambda*c0*t);
14 > subs(r=1, diff(Ue(r, theta, t), r));
15 # Pour chaque valeur de k, on calcule les racines lambda
16 > -BesselJ(k+1, lambda) + k*BesselJ(k, lambda)/lambda = 0; eq3 :=
    lhs(%);
17 > plot({subs(k=0, eq3), subs(k=1, eq3), subs(k=2, eq3)}), lambda
    = 0..20);
18 > Um := (k, p) -> BesselJ(k, lambda[k, p]*r)*exp(I*k*theta)*exp(I*
    lambda[k, p]*c0*t);
19 > Uex = sum(sum(C[k, p]*Um(k, p), p=0..M), k=0..N);
20 # Conditions initiales particulières (avec c0=1)
21 # 1/ mode radial
22 > lambda1 := fsolve(subs(k=0, eq3), lambda, 10..12);
23 > Uex1 := BesselJ(0, lambda1*r)*cos(lambda1*t);
24 > animate3d([r*cos(theta), r*sin(theta), Uex1], r=0..1, theta
    = 0..2*Pi,
    t=0..2*(2*Pi/lambda1), frames=50);
25
26 # 2/ mode angulaire
27 > lambda2 := fsolve(subs(k=1, eq3), lambda, 6..10);
28 > Uex2 := BesselJ(1, lambda2*r)*cos(lambda2*t)*cos(theta);
29 > animate3d([r*cos(theta), r*sin(theta), Uex2], r=0..1, theta
    = 0..2*Pi,
    t=0..2*(2*Pi/lambda2), frames=50);
30

```

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

$$u(r, \theta, t) = A(r)e^{ik\theta}e^{j\lambda c_0 t} \quad k \in \mathbb{Z}$$

En reportant dans l'équation, on obtiens une équation de Bessel (ligne 9) pour $A(r)$:

$$r^2 \frac{d^2 A}{dr^2} + r \frac{dA}{dr} + (r^2 \lambda^2 - k^2)A = 0$$

dont Maple nous fournit la solution générale avec la fonction **dsolve** (ligne 11). Cette solution générale est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et deuxième espèce : *BesselJ* et *BesselY*. De ces deux familles de fonctions de Bessel, on ne retient que la famille *BesselJ*, qui est la seule à avoir une valeur finie (égale à 1) en $r = 0$. La solution élémentaire s'écrit (ligne 13)

$$U_e = \text{BesselJ}(k, \lambda r) e^{ik\theta} e^{j\lambda c_0 t}$$

Cette solution élémentaire doit vérifier la condition à la limite $\frac{\partial U_e}{\partial r} = 0$ en $r = 1$ (ligne 14), ce qui impose pour chaque valeur de k des valeurs de λ particulières. Les valeurs possibles de λ sont les racines de la fonction F_k (ligne 16) :

$$F_k(\lambda) = -\text{BesselJ}(k+1, \lambda) + \frac{k \text{BesselJ}(k+1, \lambda)}{\lambda}$$

On a tracé cette fonction pour différentes valeur de k sur la figure (4.8). Pour une valeur de k fixé, on a une infinité de racines $\lambda_{k,p}$ (c'est l'équivalent des racines $\frac{k\pi}{L}$ des fonctions $\cos \omega x$ en coordonnées cartésiennes). La solution élémentaire dépend donc de deux paramètres entiers k et p :

$$U_e(k, p) = \text{BesselJ}(k, \lambda_{k,p}) e^{ik\theta} e^{j\lambda_{k,p} c_0 t}$$

La solution générale de l'équation des ondes (4.12) est donc une combinaison linéaire de ces solutions élémentaires :

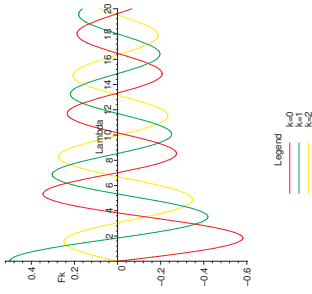
$$U_{ex}(r, \theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} C_{k,p} \text{BesselJ}(k, \lambda_{k,p}) e^{ik\theta} e^{j\lambda_{k,p} c_0 t} \quad (4.13)$$

où $\lambda_{k,p}$ est la $p^{\text{ème}}$ racine de $F_k(\lambda) = 0$. Les coefficients $C_{k,p}$ permettent à U_{ex} de vérifier les conditions initiales. A titre d'exemple, on a déterminé et tracé la solution modale :

$$\text{BesselJ}(k, \lambda_{k,p}) \cos(k\theta) \cos(\lambda_{k,p} c_0 t) \quad (4.14)$$

pour les deux cas particuliers :

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

FIG. 4.8 – fonction $F_k(\lambda)$ pour différentes valeurs de k

1. 3^{ème} mode radiale ($k = 0, p = 3$ et $\lambda_{0,3} \approx 10,173468$), qui ne dépend donc pas de θ (lignes 22 à 24)
2. 3^{ème} mode angulaire ($k = 1, p = 3$ et $\lambda_{1,3} \approx 8,536316$) (lignes 27 à 29)

On a tracé ces deux modes propres sur la figure (4.9), et dans le programme Maple on a l'animation de ces modes avec la commande *animate3d*.

4.3.3 Schéma explicite

La discrétisation de l'équation des ondes (4.11) avec un schéma explicite s'écrit en coordonnées cartésiennes sur un maillage régulier de pas dx et dy :

$$\frac{u_{i,j}^{n+2} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \quad (4.15)$$

C'est l'extension naturelle du schéma explicite ID (?? page ??) du chapitre précédent.

Pour discrétiser l'équation en coordonnées polaires (4.15), on discrétise le domaine polaire $\Omega = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ en (r, θ) avec un pas dr et $d\theta$, ce qui correspond à des points sur des rayons et des cercles dans le domaine physique (x, y) (figure 4.10). On note N_r et N_θ le nombre de noeuds suivant r et θ

En notant $u_{i,j}^n = u(idr, jd\theta, ndt)$ les valeurs aux noeuds, la discrétisation par différences finies explicites de l'équation (4.12) s'écrit :

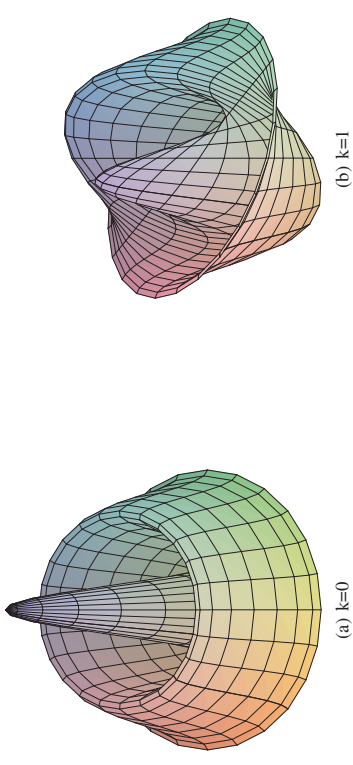


FIG. 4.9 – modes propres de l'équation des ondes

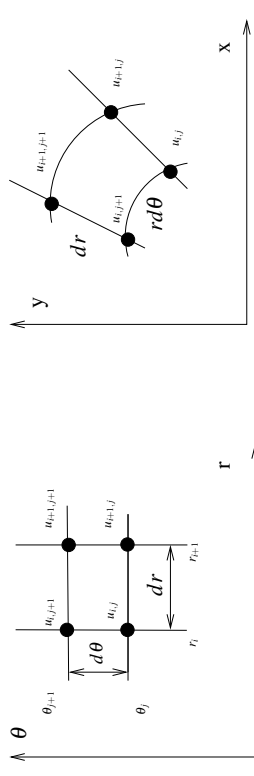


FIG. 4.10 – maillage D.F. en coordonnées polaires

$$\frac{u_{i,j}^{n+2} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dr^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dr} \right) + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{d\theta^2} \quad (4.16)$$

conditions aux limites : A cette équation, on ajoute la condition aux limites du problème (4.12) en $r = 1$: $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$. Pour imposer cette condition, on utilise une condition miroir qui permet de calculer la valeur inconnue $u_{N+1,j}$ dans l'équation discrète sur $u_{N,j}$:

$$u_{N+1,j} = u_{N-1,j} \quad (4.17)$$

A cette condition physique, il faut ajouter des conditions numériques liées à la transformation en coordonnées polaires :

1. conditions de périodicité en θ

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 2\pi)$$

2. valeur finie en $r = 0$ indépendante de θ

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) = u_0$$

La première condition traduit une périodicité en θ de période 2π . Elle se traduit au niveau discret par le fait que les équations pour la ligne $\theta = 0$ correspondent aux inconnues $u_{i,1}$ et font intervenir des valeurs en $\theta = -d\theta$ qui ne sont pas définies, i.e. $u_{i,0}^n = u(idr, -d\theta)$. De même les équations pour la dernière ligne $\theta = 2\pi - d\theta$ correspondent aux inconnues u_{i,N_θ} et font intervenir des valeurs en $\theta = 2\pi$ qui ne sont pas définies, i.e. $u_{i,N_\theta+1}^n = u(idr, 2\pi)$. Les conditions de périodicité permettent d'imposer :

$$u_{i,0}^n = u_{i,N_\theta}^n \quad \text{et} \quad u_{i,N_\theta+1}^n = u_{i,1}^n \quad (4.18)$$

dans les équations pour $j = 1$ et $j = N_\theta$.

La seconde condition est nécessaire, car l'équation discrétisée (4.16) dégenère en $r = 0$, de même que l'équation exacte (4.12) à cause des termes en $1/r$.

Pour lever cette dégénérescence en $r = 0$, on utilise l'équation discrétisée en coordonnées cartésiennes (4.15). Avec les notations de la figure (4.11) et suivant les axes (x, y) , cette équation s'écrit en $r = 0$:

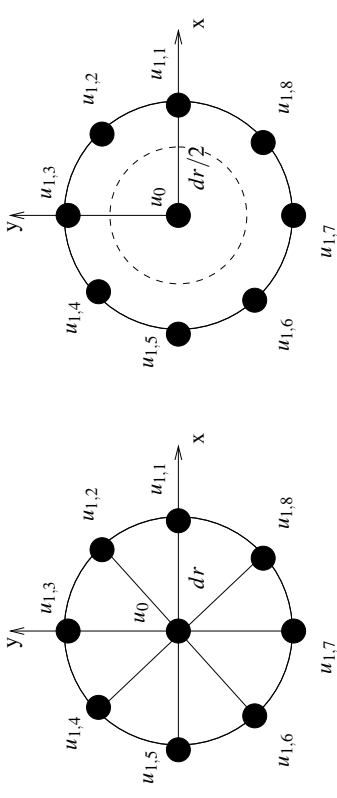


FIG. 4.11 – conditions aux limites en $r = 0$

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{1,1}^n - 2u_0^n + u_{1,5}^n}{dr^2} + \frac{u_{1,3}^n - 2u_0^n + u_{1,7}^n}{dr^2} \right)$$

En effectuant une rotation des axes (x, y) de 45 degrés, on obtiens une autre équation équivalente :

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = c_0^2 \left(\frac{u_{1,2}^n - 2u_0^n + u_{1,6}^n}{dr^2} + \frac{u_{1,4}^n - 2u_0^n + u_{1,8}^n}{dr^2} \right)$$

La valeur de u_0 étant unique, on choisit la moyenne de ces équations :

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = 4c_0^2 \left(\frac{\left(\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 u_{1,j}^n \right) - u_0^n}{dr^2} \right)$$

soit, de façon générale si on a N_θ noeuds dans la direction θ :

$$\frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} = 4c_0^2 \left(\frac{\left(\frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} u_{1,j}^n \right) - u_0^n}{dr^2} \right) \quad (4.19)$$

Cette dernière équation peut s'interpréter comme un bilan de flux sur un disque de rayon $dr/2$. En intégrant l'équation (4.12) sur ce disque, il vient, après utilisation du théorème de Green :

$$\int_0^{\frac{d\theta}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 2\pi r ds = c_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{d\theta/2} \frac{dr}{2}$$

On approxime chacun de ses termes par différences finies. Pour le premier terme, on utilise l'approximation de la dérivée seconde en temps en $r = 0$:

$$\int_0^{\frac{d\theta}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 2\pi r dr \approx \frac{u_0^{n+2} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{dt^2} \pi \frac{dr^2}{4}$$

et pour le second l'approximation de la dérivée première en $dr/2$ sur chaque rayon d'angle θ_j

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{d\theta/2} \approx \frac{u_{1,j} - u_0}{dr}$$

ce qui fournit l'approximation de la seconde intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{d\theta/2} r d\theta \approx \sum_{j=1}^{N_\theta} \frac{u_{1,j} - u_0}{dr} \frac{dr}{2} \frac{2\pi}{N_\theta}$$

En combinant ces deux approximations, on retrouve l'équation (4.19), qui permet de calculer l'évolution temporelle de la valeur u_0 .

condition initiale La résolution numérique du schéma explicite (4.16) nécessite l'initialisation de la solution u^0 à $t = 0$ et u^1 à $t = dt$. On applique la même démarche que pour l'équation des ondes en 1D (paragraphe ?? page ??). Disposant des deux conditions initiales du problème (4.12), la valeur u^0 est donnée par la première condition :

$$u_{i,j}^0 = w(idr, jd\theta) \quad (4.20)$$

et la valeur de u^1 est obtenue à partir d'un développement limité en temps à l'ordre 2 autour de u^0 :

$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{r=0} dt + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{r=0} \frac{dt^2}{2}$$

La valeur de $\frac{\partial u}{\partial t}$ est fournie par la seconde condition initiale, et on utilise l'équation exacte pour calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en fonction du laplacien de w , que l'on discrétise ensuite par différences finies centrées :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{r=0} = c_0^2 \Delta w$$

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

On obtiens ainsi la valeur de u^1 avec une précision $O(dt^2, dx^2)$, identique à celle du schéma :

$$u_{i,j}^1 = w_{i,j} + \frac{c_0^2 dt^2}{2} \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{dr^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2dr} + \frac{1}{r_i^2} \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{d\theta^2} \right) \quad (4.21)$$

Stabilité et précision du schéma

L'étude de la stabilité et de la consistance est effectuée tout d'abord sur l'équation discrétisée en coordonnées cartésiennes (4.15), et nous en déduisons ensuite les propriétés pour l'équation discrétisée en coordonnées polaires (4.16).

Étude de la stabilité : L'étude de la stabilité utilise le programme Maple 4.4. On remplace (ligne 12) dans l'équation discrétisée définie à la ligne 7, la solution approchée $u_{i,j}^n$ par une perturbation, que l'on a décomposé en mode de Fourier suivant x et y (ligne 11) :

$$U p_{i,j}^n = \psi^n e^{i\omega_1 dx} e^{i\omega_2 dy}$$

Après simplification, on obtiens une équation du second degré pour le facteur d'amplification $G = \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n}$ (ligne 19) :

$$G^2 + 2bG + 1 = 0 \quad (4.22)$$

Le coefficient b est simplifié (lignes 21 et 22), et s'exprime en fonction de 2 nombres de Courant $C_{FL_1} = \frac{c_0 dt}{dx}$ et $C_{FL_2} = \frac{c_0 dt}{dy}$ et de $y_1 = \sin \omega_1 \frac{dx}{2}$ et $y_2 = \sin \omega_2 \frac{dy}{2}$:

$$b = -1 + 2C_{FL_1}^2 y_1^2 + 2C_{FL_2}^2 y_2^2$$

Le produit des racines de l'équation (4.22) étant égale à 1, la condition de stabilité $|G| \leq 1$ impose donc que ces racines soient complexes conjuguées, i.e. que le discriminant soit négatif :

$$\Delta = b^2 - 1 \leq 0 \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1]$$

ce qui conduit à la condition (ligne 25 et 26) :

$$C_{FL_1}^2 y_1^2 + C_{FL_2}^2 y_2^2 \leq 1 \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1]$$

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

La condition de stabilité du schéma explicite (4.15) s'écrit donc :

$$C_{FL1}^2 + C_{FL2}^2 \leq 1$$

C'est une condition de Courant :

$$C_{FL} = \frac{c_0 dt}{h} \leq 1 \quad (4.23)$$

basé sur une longueur caractéristique h de la maille différence finie définie par :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} \rightsquigarrow h = \frac{dxdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (4.24)$$

Si les pas de discrétisation sont égaux ($dx = dy$), on a $h = \frac{dx}{\sqrt{2}}$. La condition de stabilité est donc plus sévère en 2D qu'en 1D.

Par analogie, la condition de stabilité du schéma explicite (4.16) en coordonnées polaire est aussi la condition de Courant (4.23). Il faut cependant définir la longueur caractéristique h de la maille en coordonnées polaire. Cette longueur ne doit pas être basée sur les dimensions dr et $d\theta$ de la maille dans l'espace transformé, mais sur les dimensions de la maille dr et $rd\theta$ dans l'espace physique :

$$h = \frac{rdrd\theta}{\sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2}}$$

La maille dans l'espace physique n'étant pas constante (elle dépend de r), on doit prendre la plus petite valeur de h dans le maillage, qui est obtenue pour $r = dr$

$$h_{min} = \frac{dr^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + (drd\theta)^2}} \approx drd\theta$$

ce qui fournit la condition de stabilité du schéma (4.16) :

$$C_{FL} = \frac{c_0 dt}{drd\theta} \leq 1 \quad (4.25)$$

On constate que cette condition en coordonnées polaire est beaucoup plus contraignante que la condition (4.23) en coordonnées cartésiennes. Pour un maillage de N points dans chaque direction, il faut choisir un pas en temps dt tel que $dt \leq c_0 \sqrt{2}/N$ en cartésien et $dt \leq c_0/N^2$ en polaire.

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

Programme 4.4 – Etude de stabilité et de consistance de l'équation des ondes

```

1 > restart; with (plots) :
2 # Equation des ondes en cartésien
3 > diff (U(x,y,t), t$2)=c0^2*(diff (U(x,y,t), x$2)+
4   diff (U(x,y,t), y$2));
5 > eq:=%;
6 # Equation D.F.
7 > [U[i,j,n+1]-2*U[i,j,n]+U[i,j,n-1])/dt^2=c0^2*((U[i+1,j,n]
8   -2*U[i,j,n]+U[i-1,j,n])/dx^2+(U[i,j+1,n]-
9   2*U[i,j,n]+U[i,j-1,n])/dy^2); eqh:=%;
10 # Etude de stabilité
11 > Up:=(i,j,n)->Psi[n]*exp(I*omega[1]*i*dx)*exp(I*omega[2]*j
12   *dy);
13 > subs (U[i,j,n+1]=Up(i,j,n+1), U[i,j,n-1]=Up(i,j,n-1),
14   U[i,j,n]=Up(i,j,n), U[i-1,j,n]=Up(i-1,j,n),
15   U[i+1,j,n]=Up(i+1,j,n), U[i,j-1,n]=Up(i,j-1,n),
16   U[i,j+1,n]=Up(i,j+1,n), eqh);
17 #
18 > rel1:=simplify(%*exp(-I*omega[1]*i*dx)*exp(-I*omega[2]*j
19   *dy));
20 > simplify (subs (Psi[n+1]=G*Psi[n], Psi[n-1]=Psi[n]/G, rel1*G/
21   Psi[n]));
22 > collect(dt^2*(lhs(%) - rhs(%)), G); G:=0; eq3:=lhs(%):
23   =%;
24 # Racines G complexes conjuguées si Delta<0
25 > Delta:=b^2-1; factor(%);
26 > CFL[1]^2*y[1]^2+CFL[2]^2*y[2]^2<1;
27 # Condition de stabilité
28 > CFL[1]^2+CFL[2]^2<1; cdts:=%;
29 > subs (CFL[1]=c0*dt/dx, CFL[2]=c0*dt/dy, cdts);
30 > dt*c0*sqrt(1/dx^2+1/dy^2)<1;
31 # Erreur de troncature
32 > Uex:=(p,q,r)->U((x+p-i)*dx, y+(q-j)*dy, t+(r-n)*dt);
33 > subs (U[i,j,n]=Uex(i,j,n), U[i,j,n-1]=Uex(i,j,n-1), U[i,j,n
34   +1]=
35   Uex(i,j,n+1), U[i+1,j,n]=Uex(i+1,j,n), U[i-1,j,n]=Uex(i-1,
36   j,n),
37   U[i,j+1,n]=Uex(i,j+1,n), U[i,j-1,n]=Uex(i,j-1,n),
38   lhs(eqh)-rhs(eqh)); rel3:=%;
39 #
40 > U(x,y,t+dt)=convert (mtaylor (U(x,y,t+dt), [dt], 8), diff); S1
41   Marc-BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon
42 > U(x,y,t-dt)=convert (mtaylor (U(x,y,t-dt), [dt], 8), diff); S2
43   :=%;
44 > U(x+dx,y,t)=convert (mtaylor (U(x+dx,y,t), [dx], 8), diff); S3
45   :=%;
46 > U(x-dx,y,t)=convert (mtaylor (U(x-dx,y,t), [dx], 8), diff); S4
47   :=%;
48 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S5
49   :=%;
50 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S6
51   :=%;
52 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S7
53   :=%;
54 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S8
55   :=%;
56 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S9
57   :=%;
58 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S10
59   :=%;
60 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S11
61   :=%;
62 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S12
63   :=%;
64 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S13
65   :=%;
66 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S14
67   :=%;
68 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S15
69   :=%;
70 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S16
71   :=%;
72 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S17
73   :=%;
74 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S18
75   :=%;
76 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S19
77   :=%;
78 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S20
79   :=%;
80 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S21
81   :=%;
82 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S22
83   :=%;
84 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S23
85   :=%;
86 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S24
87   :=%;
88 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S25
89   :=%;
90 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S26
91   :=%;
92 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S27
93   :=%;
94 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S28
95   :=%;
96 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S29
97   :=%;
98 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S30
99   :=%;
100 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S31
101   :=%;
102 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S32
103   :=%;
104 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S33
105   :=%;
106 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S34
107   :=%;
108 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S35
109   :=%;
110 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S36
111   :=%;
112 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S37
113   :=%;
114 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S38
115   :=%;
116 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S39
117   :=%;
118 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S40
119   :=%;
120 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S41
121   :=%;
122 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S42
123   :=%;
124 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S43
125   :=%;
126 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S44
127   :=%;
128 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S45
129   :=%;
130 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S46
131   :=%;
132 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S47
133   :=%;
134 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S48
135   :=%;
136 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S49
137   :=%;
138 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S50
139   :=%;
140 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S51
141   :=%;
142 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S52
143   :=%;
144 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S53
145   :=%;
146 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S54
147   :=%;
148 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S55
149   :=%;
150 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S56
151   :=%;
152 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S57
153   :=%;
154 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S58
155   :=%;
156 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S59
157   :=%;
158 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S60
159   :=%;
160 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S61
161   :=%;
162 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S62
163   :=%;
164 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S63
165   :=%;
166 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S64
167   :=%;
168 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S65
169   :=%;
170 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S66
171   :=%;
172 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S67
173   :=%;
174 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S68
175   :=%;
176 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S69
177   :=%;
178 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S70
179   :=%;
180 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S71
181   :=%;
182 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S72
183   :=%;
184 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S73
185   :=%;
186 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S74
187   :=%;
188 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S75
189   :=%;
190 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S76
191   :=%;
192 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S77
193   :=%;
194 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S78
195   :=%;
196 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S79
197   :=%;
198 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S80
199   :=%;
200 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S81
201   :=%;
202 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S82
203   :=%;
204 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S83
205   :=%;
206 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S84
207   :=%;
208 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S85
209   :=%;
210 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S86
211   :=%;
212 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S87
213   :=%;
214 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S88
215   :=%;
216 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S89
217   :=%;
218 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S90
219   :=%;
220 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S91
221   :=%;
222 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S92
223   :=%;
224 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S93
225   :=%;
226 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S94
227   :=%;
228 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S95
229   :=%;
230 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S96
231   :=%;
232 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S97
233   :=%;
234 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S98
235   :=%;
236 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S99
237   :=%;
238 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S100
239   :=%;
240 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S101
241   :=%;
242 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S102
243   :=%;
244 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S103
245   :=%;
246 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S104
247   :=%;
248 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S105
249   :=%;
250 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S106
251   :=%;
252 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S107
253   :=%;
254 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S108
255   :=%;
256 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S109
257   :=%;
258 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S110
259   :=%;
260 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S111
261   :=%;
262 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S112
263   :=%;
264 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S113
265   :=%;
266 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S114
267   :=%;
268 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S115
269   :=%;
270 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S116
271   :=%;
272 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S117
273   :=%;
274 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S118
275   :=%;
276 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S119
277   :=%;
278 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S120
279   :=%;
280 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S121
281   :=%;
282 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S122
283   :=%;
284 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S123
285   :=%;
286 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S124
287   :=%;
288 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S125
289   :=%;
290 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S126
291   :=%;
292 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S127
293   :=%;
294 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S128
295   :=%;
296 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S129
297   :=%;
298 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S130
299   :=%;
300 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S131
301   :=%;
302 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S132
303   :=%;
304 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S133
305   :=%;
306 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S134
307   :=%;
308 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S135
309   :=%;
310 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S136
311   :=%;
312 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S137
313   :=%;
314 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S138
315   :=%;
316 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S139
317   :=%;
318 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S140
319   :=%;
320 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S141
321   :=%;
322 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S142
323   :=%;
324 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S143
325   :=%;
326 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S144
327   :=%;
328 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S145
329   :=%;
330 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S146
331   :=%;
332 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S147
333   :=%;
334 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S148
335   :=%;
336 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S149
337   :=%;
338 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S150
339   :=%;
340 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S151
341   :=%;
342 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S152
343   :=%;
344 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S153
345   :=%;
346 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S154
347   :=%;
348 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S155
349   :=%;
350 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S156
351   :=%;
352 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S157
353   :=%;
354 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S158
355   :=%;
356 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S159
357   :=%;
358 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S160
359   :=%;
360 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S161
361   :=%;
362 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S162
363   :=%;
364 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S163
365   :=%;
366 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S164
367   :=%;
368 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S165
369   :=%;
370 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S166
371   :=%;
372 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S167
373   :=%;
374 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S168
375   :=%;
376 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S169
377   :=%;
378 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S170
379   :=%;
380 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S171
381   :=%;
382 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S172
383   :=%;
384 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S173
385   :=%;
386 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S174
387   :=%;
388 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S175
389   :=%;
390 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S176
391   :=%;
392 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S177
393   :=%;
394 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S178
395   :=%;
396 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S179
397   :=%;
398 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S180
399   :=%;
400 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S181
401   :=%;
402 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S182
403   :=%;
404 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S183
405   :=%;
406 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S184
407   :=%;
408 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S185
409   :=%;
410 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S186
411   :=%;
412 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S187
413   :=%;
414 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S188
415   :=%;
416 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S189
417   :=%;
418 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S190
419   :=%;
420 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S191
421   :=%;
422 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S192
423   :=%;
424 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S193
425   :=%;
426 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S194
427   :=%;
428 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S195
429   :=%;
430 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S196
431   :=%;
432 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S197
433   :=%;
434 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S198
435   :=%;
436 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S199
437   :=%;
438 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S200
439   :=%;
440 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S201
441   :=%;
442 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S202
443   :=%;
444 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S203
445   :=%;
446 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S204
447   :=%;
448 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S205
449   :=%;
450 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S206
451   :=%;
452 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S207
453   :=%;
454 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S208
455   :=%;
456 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S209
457   :=%;
458 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S210
459   :=%;
460 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S211
461   :=%;
462 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S212
463   :=%;
464 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S213
465   :=%;
466 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S214
467   :=%;
468 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S215
469   :=%;
470 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S216
471   :=%;
472 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S217
473   :=%;
474 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S218
475   :=%;
476 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S219
477   :=%;
478 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S220
479   :=%;
480 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S221
481   :=%;
482 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S222
483   :=%;
484 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S223
485   :=%;
486 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S224
487   :=%;
488 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S225
489   :=%;
490 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S226
491   :=%;
492 > U(x,y+dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y+dy,t), [dy], 8), diff); S227
493   :=%;
494 > U(x,y-dy,t)=convert (mtaylor (U(x,y-dy,t), [dy], 8), diff); S228
495   :=%;
496
```

Erreur de troncature : Le calcul Maple (lignes 32 à 44 du programme 4.4) fournit l'erreur de troncature pour le schéma (4.15) en cartésien :

$$E_t = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} dt^2 - \frac{c_0^2 \partial^4 u}{12 \partial x^4} dx^2 - \frac{c_0^2 \partial^4 u}{12 \partial y^4} dy^2 + O(dt^4, dx^4, dy^4)$$

Le schéma explicite (4.15) est donc d'ordre 2 en temps et en espace (i.e. a une précision en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$).

Par analogie, on en déduit que le schéma explicite (4.16) est aussi d'ordre 2 en temps et en espace (i.e. a une précision en $O(dt^2, dr^2, d\theta^2)$).

Enfin on note que ces schémas explicites (4.15) et (4.16) sont des schémas dispersifs, mais non dissipatifs comme en 1D (*puisque le facteur d'amplification G à un module égal à 1*).

4.3.4 Expérimentation numérique avec Matlab

Le programme Matlab (4.5) implémente le schéma explicite en cordonnées polaires (4.16). Les paramètres du calcul sont définies sur les lignes 3 à 13, avec un C_{FL} défini par la relation (4.25). Pour tenir compte simplement des conditions de périodicité, la solution approchée $u_{t,j}^i$ est définie comme un tableau de dimension $N_r * (N_\theta + 1)$, i.e. avec r variant de 0 ($i = 1$) à 1 ($i = N_r$) et θ de 0 ($j = 1$) à $2\pi + d\theta$ ($j = N_\theta + 1$). La solution initiale w est définie sur les lignes 14 à 21 comme combinaison linéaire des 2 modes propres (4.15). Cette solution initiale permet l'initialisation des champs U_{r0} (lignes 24 à 26). La seconde condition initiale (4.21) est appliquée lors de la première itération en temps en notant que cette condition est dans notre cas équivalente à l'équation aux différences (4.16) pour $n = 1$ avec $u_{t,j}^{-1} = u_{t,j}^1$, i.e. l'équivalent d'une condition miroir à l'instant initiale. Cette condition peut alors être implémentée en initialisant u^0 et u^{-1} avec w , et en calculant u^1 à la première itération avec la formule générale (4.16), et un coefficient c_0^2 divisé par deux (ligne 37).

Dans les itérations en temps (lignes 34 à 57), on utilise l'équation aux différences (4.16) pour les noeuds internes $1 < i < N_r$, $1 < j < N_\theta$ en utilisant la programmation matricielle Matlab (ligne 40). La condition aux limites en $r = 1$ fournit la valeur aux noeuds frontières $i = N_r$ (ligne 45). Les conditions de périodicité fournissent les valeurs aux noeuds frontières $j = 1$ et $j = N_\theta + 1$ (lignes 49 à 50). Enfin l'équation pour les noeuds en $r = 0$ est écrite aux lignes 52 à 54.

Sur la figure (4.12), on a tracé la solution calculée au bout d'une période, avec $C_{FL} = 0.9$, $N_r = 80$ et $N_\theta = 50$, pour les deux conditions initiales étudiées analytiquement au paragraphe 4.3.2 page 14. Elles se comparent parfaitement aux solutions analytiques de la figure (4.9).

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

Programme 4.5 – Résolution numérique de l'équation des ondes (4.11)

```

1 % equation des ondes en polaire
2 % schema explicite
3 clear;
4 RI=1;
5 Ntheta=50; Nr=80;
6 dtheta=2*pi/(Ntheta-1); dr=RI/(Nr-1);
7 R=[0:dr:RI]';
8 Theta=[0:dtheta:2*pi];
9 % pts du maillage
10 X=R*cos(Theta); Y=R*sin(Theta);
11 % parametre
12 c0=1; CFL=0.9;
13 dt=CFL*dr*dtheta/c0
14 % cdis initial
15 k1=0; a1=1.0;
16 lambda1=fzero(inline('0*besselj(0,r)-r*besselj(1,r)'),10)
17 BJ1=inline('besselj(0,r)','r');
18 k2=1; a2=0.5;
19 lambda2=fzero(inline('1*besselj(1,r)-r*besselj(2,r)'),10)
20 BJ2=inline('besselj(1,r)','r');
21 W=(a1*BJ1(lambda1*R)*cos(k1*Theta)+...
22 a2*BJ2(lambda2*R)*cos(k2*Theta));
23 % initialisation
24 Un0=zeros(Nr,Ntheta+1);
25 Un0(:,1:Ntheta)=W; Un0(:,Ntheta+1)=Un0(:,2);
26 Un=Un0; Unl=Un;
27 % noeuds internes
28 I=[2:Nr-1]; J=[2:Ntheta];
29 RI=R(1)*ones(1,Ntheta-1);
30 % schema D.F.
31 Tf=2*(2*pi/c0/lambda1);
32 nit=round(Tf/dt)
33 % iteration
34 for it=1:nit
35     coef=c0^2*dt^2;
36     if (it==1) coef=coef/2; end;
37     % noeuds internes
38     Un(I,J)=2*Un(I,J)-Un0(I,J)+...
39     (coef/dtheta^2)*(Un(I,J+1)-2*Un(I,J)+Un(I,J-1))./(RI.^2)+...
40     (coef/(2*dt))*(Un(I+1,J)-Un(I-1,J))./RI+...
41     (coef/dr^2)*(Un(I+1,J)-2*Un(I,J)+Un(I-1,J));
42     % C.L. en r=1
43     Un(Nr,J)=2*Un(Nr,J)-Un0(Nr,J)+...
44     (coef/dtheta^2)*(Un(Nr,J+1)-2*Un(Nr,J)+Un(Nr,J-1))./(R(Nr))+...
45     (coef/dr^2)*(Un(Nr-1,J)-2*Un(Nr,J)+Un(Nr-1,J));
46     % periodicitie
47     MarU=FFA(Nr,Ntheta+1,Ntheta+1,Ntheta);
48     Unl(1:Nr,Ntheta+1)=Unl(1:Nr,2);
49     % C.L. en r=0
50     Un=sum(Un(2,2:Ntheta))/(Ntheta-1);
51     Unl=2*Un(1,1)-Un0(1,1)+(4*coef/dr^2)*(Um-Un(1,1));
52     Unl(1,1:Ntheta+1)=Uml;
53     % iteration suivante
54     Un0=Un; Un=Unl;

```

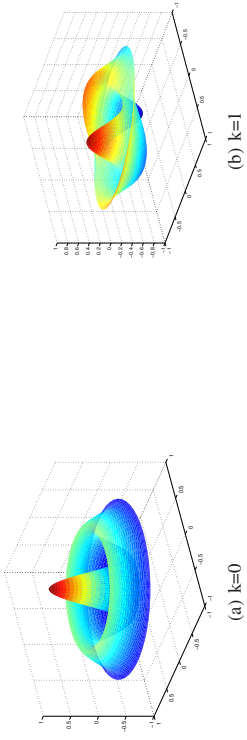


FIG. 4.12 – solutions numériques de l'équation des ondes

Pour tester la stabilité du schéma, nous avons fait varier le pas en temps pour deux maillages donnés : ($N_r = 40$, $N_\theta = 25$) et ($N_r = 80$, $N_\theta = 50$) avec la condition initiale suivante :

$$BesselJ(0, \lambda_{0,3}) \cos(\lambda_{0,3} c_0 t) + \frac{1}{2} BesselJ(1, \lambda_{1,3}) \cos(\theta) \cos(\lambda_{1,3} c_0 t)$$

Nous avons ensuite calculé l'erreur en $r = 0$ en comparant la solution approchée sur l'axe $u_{1,1}$ et la solution exacte $u_{ex} = \cos(c_0 \lambda_{0,3} t)$ sur un temps τ de l'ordre de deux périodes $\tau \approx 1.4$. On a tracé ces évolutions sur la figure (4.13). On constate bien que la solution diverge dès que le nombre de Courant (4.25) est supérieur ou égale à 1. On peut aussi noter que si l'on choisit une condition initiale ne dépendant pas de θ , la solution reste stable pour des C_{FL} beaucoup plus grands (i.e. $C_{FL} \leq N_\theta$), ce qui montre que l'instabilité la plus sévère proviens de la discrétisation du terme en θ . Théoriquement au bout d'un nombre très grand d'itérations, les erreurs d'arrondis devraient pouvoir déstabiliser la solution, mais ici la symétrie des calculs fait que ces erreurs sont indépendantes de θ et la solution non perturbée reste stable.

Pour étudier la précision du calcul, nous avons calculé l'erreur au centre pour différents maillages avec un $C_{FL} = 0.9$ avec la même condition initiale. La solution au centre étant indépendante de θ , nous avons uniquement fait varier la discrétisation suivant r en choisissant des valeurs de N_r de 10 à 640. La taille caractéristique du maillage est $h \approx \frac{1}{N_r}$, et nous avons tracé l'erreur sur l'axe en fonction de h sur la figure (4.14).

On constate sur cette figure que l'erreur se comporte à la limite en $O(h^2)$, ce qui était prévue par la théorie. Cela montre que notre condition en $r = 0$ préserve la précision d'ordre 2 du schéma.

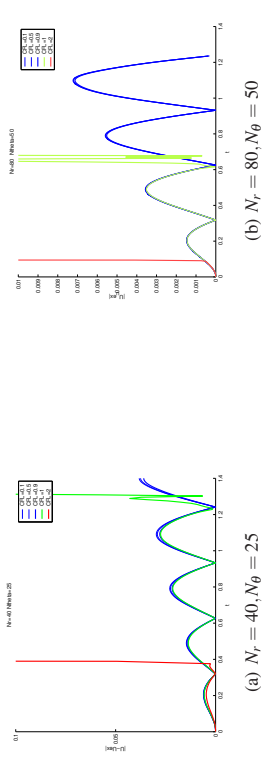
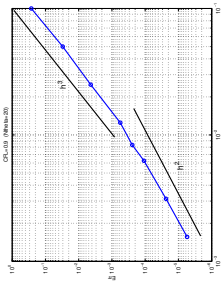
FIG. 4.13 – évolution de l'erreur sur l'axe en fonction du C_{FL} 

FIG. 4.14 – erreur sur l'axe en fonction de la taille du maillage

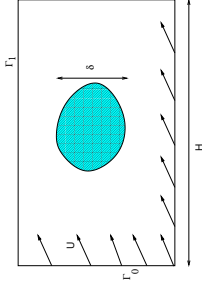


FIG. 4.15 — diffusion d'une tache de polluant

4.4 Équation de convection-diffusion

4.4.1 Problème physique : dispersion d'un polluant

On considère le problème de la dispersion d'un polluant à la surface d'un liquide en mouvement (figure 4.15). Le polluant est miscible dans le liquide, mais plus léger. On suppose que la vitesse du fluide est horizontale. On peut alors considérer que le polluant diffuse essentiellement à la surface, et négliger les variations suivant la verticale z .

En notant C la fraction massique de polluant et ρ la densité du fluide, l'équation d'équilibre pour C traduit que la variation temporelle de la quantité de polluant $\rho C dx dy dz$ dans un volume élémentaire $dx dy dz$ est égale à un bilan de flux de C sur les facettes du volume. À travers une facette de surface dS et de normale sortante \vec{n} , il existe un flux de diffusion $\lambda \vec{\nabla} C \cdot \vec{n} dS$ (λ est le coefficient de diffusion) et un flux de convection $-\rho C \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ (\vec{V} est la vitesse du fluide). L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} C) - \text{div}(\rho C \vec{V})$$

Compte tenu de l'équation de conservation de la masse du fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

cette équation s'écrit :

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} C)$$

Compte tenu de l'hypothèse d'indépendance des quantités par rapport à z , et en supposant en outre que la densité ρ et le coefficient de diffusion λ sont constants, il vient :

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_1 \frac{\partial C}{\partial x} + V_2 \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = 0$$

À cette équation il faut ajouter la condition initiale $C(x, y, t=0) = w(x, y)$ et des conditions aux limites sur les frontières Γ du domaine Ω . On suppose que le polluant se trouve initialement à l'intérieur du domaine Ω et a pour dimension caractéristique δ (figure 4.15). On distingue les frontières entrantes Γ_0 , i.e. telle que $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$ et les frontières sortantes Γ_1 , i.e. telle que $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$. Si la convection est prépondérante sur la diffusion, le flux entrant sur les frontières Γ_0 est un flux de convection qui apporte du fluide non pollué dans le domaine Ω . La condition sur Γ_0 est une condition de Dirichlet $C_{\Gamma_0} = 0$. Sur les frontières Γ_1 , le fluide transporte le polluant vers l'extérieur : on impose alors une condition aux limites de Neumann $\frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0$, qui autorise la sortie du polluant du domaine Ω .

Pour un domaine carré de dimension H , et une vitesse \vec{V} avec des composantes positives $V_1 > 0$ et $V_2 > 0$, la frontière Γ_0 correspond aux deux cotés $x = 0$ et $y = 0$ et la frontière Γ_1 aux deux autres cotés opposés $x = H$ et $y = H$.

En notant $\kappa = \frac{\lambda}{\rho}$, le problème modèle s'écrit pour un domaine Ω carré de dimension caractéristique H :

Trouver $u(x, y, t)$ tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_1 \frac{\partial u}{\partial x} + V_2 \frac{\partial u}{\partial y} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{sur } \Omega = [0, H] \times [0, H] \quad (4.26)$$

$$u_{\Gamma_0} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 (x=0, y=0), \quad \text{et } \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 (x=H, y=H)$$

$$u(x, y, t=0) = w(x, y)$$

4.4.2 Étude de la solution exacte

Le problème (4.26) est un problème d'évolution parabolique caractéristique des problèmes de mécanique des fluides, avec un terme de convection et un terme de diffusion. Nous allons tout d'abord effectuer une analyse d'ordre de grandeur de chacun de ces termes.

Analyse en ordre de grandeur

Soit δ la dimension caractéristique de la tache initiale, l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (4.26) s'écrit, en notant τ un temps caractéristique :

$$\frac{\Delta C}{\tau} + V_1 \frac{\Delta C}{\delta} + V_2 \frac{\Delta C}{\delta} - \lambda \left(\frac{\Delta C}{\delta^2} + \frac{\Delta C}{\delta^2} \right) = 0$$

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

Si on considère uniquement la diffusion, le temps caractéristique vaut :

$$\tau_d \approx \frac{\delta^2}{\lambda}$$

On retrouve le temps caractéristique de diffusion (relation ?? page ??) calculé pour l'équation de la chaleur. Le temps caractéristique τ_d vérifie une relation du type (à rapprocher de la condition de stabilité ?? page ?? pour une équation de diffusion) :

$$\frac{\lambda \tau_d}{\delta^2} \approx 1 \quad (4.27)$$

C'est le temps caractéristique de décroissance exponentielle des phénomènes de diffusion.

Si on considère uniquement la convection, le temps caractéristique vaut :

$$\tau_c \approx \frac{\delta}{V}$$

Ce temps correspond au temps de transport de la tache par le champ de vitesse sur une distance égale à la dimension de la tache. Ce temps caractéristique τ_c vérifie donc une relation du type (à rapprocher de la condition de stabilité de Courant ?? page ??) :

$$V \frac{\tau_c}{\delta} \approx 1 \quad (4.28)$$

Pour notre problème, on peut définir un autre temps caractéristique de convection : le temps de sortie τ_s du polluant hors du domaine Ω . Il est basé sur la dimension caractéristique L du domaine et vérifie :

$$V \frac{\tau_s}{L} \approx 1 \quad (4.29)$$

Enfin le rapport entre les temps caractéristiques de diffusion τ_d et de convection τ_c est le nombre de Péclet :

$$\frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{V \delta}{\lambda} = P_e \quad (4.30)$$

qui caractérise l'importance relative du terme de convection par rapport au terme de diffusion.

Diffusion convection d'une gaussienne

Considérons la condition initiale suivante :

$$w(x, y) = e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma_0}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{\sigma_0}\right)^2} \quad (4.31)$$

qui décrit une tache gaussienne d'amplitude 1 centrée en (x_0, y_0) , de rayon σ_0 . S'il n'y a pas de convection, cette tache diffuse de façon auto-similaire, i.e. son amplitude diminue et son rayon augmente en conservant une forme gaussienne :

$$u(x, y, t) = A(t) e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma(t)}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{\sigma(t)}\right)^2}$$

En utilisant la conservation globale de u dans tout le domaine :

$$\iint u(x, y, t) dx dy = \iint w(x, y) dx dy = cst \quad \forall t$$

on en déduit la relation entre l'amplitude $A(t)$ et le rayon $\sigma(t)$:

$$\frac{\pi}{4} A(t) \sigma^2(t) = \frac{\pi}{4} \sigma_0^2$$

(l'intégrale d'une gaussienne vaut : $\int e^{-(x/\sigma)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma$).

On cherche donc une solution de diffusion de l'équation (4.26) (avec $V = 0$) sous la forme :

$$u(x, y, t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma(t)}\right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma(t)}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{\sigma(t)}\right)^2}$$

En reportant cette relation dans l'équation (4.26) on obtiens l'équation d'évolution de $\sigma(t)$:

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = -2 \frac{\kappa}{\sigma(t)}$$

dont la solution vérifiant $\sigma(0) = \sigma_0$ est :

$$\sigma(t) = \sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2} \quad (4.32)$$

La solution de diffusion de l'équation (4.26) s'écrit donc :

$$u(x, y, t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}}\right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}}\right)^2} \quad (4.33)$$

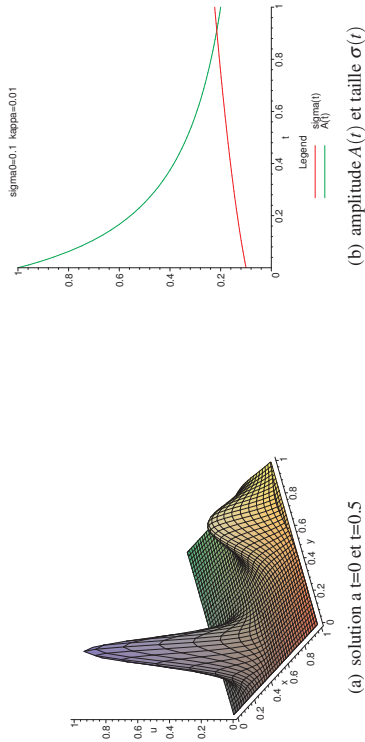


FIG. 4.16 – convection diffusion d'une gaussienne (4.35)

L'amplitude de cette gaussienne décroît donc suivant la loi :

$$A(t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2 \quad (4.34)$$

En prenant en compte la convection par un champ de vitesse sans cisaillement, cette tache gaussienne est transportée sans déformation et diffuse le long des trajectoires du champ de vitesse comme précédemment. Pour un champ de vitesse constant, les trajectoires sont des droites :

$$x(t) = x_0 + V_1 t, \quad y(t) = y_0 + V_2 t$$

la solution de convection-diffusion de l'équation (4.26) s'écrit donc :

$$u(x,y,t) = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2 e^{-\left(\frac{x-x_0-V_1 t}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2} e^{-\left(\frac{y-y_0-V_2 t}{\sqrt{4\kappa t + \sigma_0^2}} \right)^2} \quad (4.35)$$

Cette solution est une solution en milieu infini et ne tiens pas compte des conditions aux limites du problème (4.26). Elle constitue cependant une bonne approximation de la solution, si la dimension de la tache σ_0 est petite devant la dimension L du domaine Ω .

On a tracé l'évolution de cette solution (4.35) sur la figure (4.16) pour $\kappa = 0.01$, $\sigma_0 = 0.1$ et $\vec{V} = [1., 1.]$. Pour ces valeurs des paramètres, un domaine de

longueur $H = 1$, une position initiale $x_0 = \frac{H}{4}$ et $y_0 = \frac{H}{4}$, le temps caractéristique de diffusion vaut $\tau_d \approx 1.$, celui de convection $\tau_c \approx 0.1$, et le nombre de Péclet $P_e \approx 10$. Le problème est donc à convection dominante. Au bout d'un temps $T_f = 0.5$ ($T_f < \tau_c = 1.0$), la tache est à la frontière du domaine avec une amplitude qui a diminuée d'un tiers : $A(T_f) \approx 0.33333$.

Modes propres de diffusion

Pour rechercher des solutions vérifiant les conditions aux limites, on détermine tout d'abord les modes propres de diffusion en utilisant la méthode de séparation de variable décrite au paragraphe ?? page ?? Le calcul est identique, et on montre facilement que les modes propres sont les fonctions suivantes :

$$u_{p,q}(x,y,t) = \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{(2q+1)\pi y}{2L}\right) e^{-\left(\left(\frac{(2p+1)\pi}{2L}\right)^2 + \left(\frac{(2q+1)\pi}{2L}\right)^2\right)\kappa t} \quad (4.36)$$

qui vérifient les conditions aux limites :

$$u_{p,q}(0,y,t) = u_{p,q}(x,0,t) = 0 \quad (\Gamma_0), \quad \frac{d}{dx}u_{p,q}(H,y,t) = \frac{d}{dy}u_{p,q}(x,H,t) = 0 \quad (\Gamma_1)$$

La solution générale de diffusion est alors une combinaison linéaire de ses modes :

$$u(x,y,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{p,q} u_{p,q}(x,y,t)$$

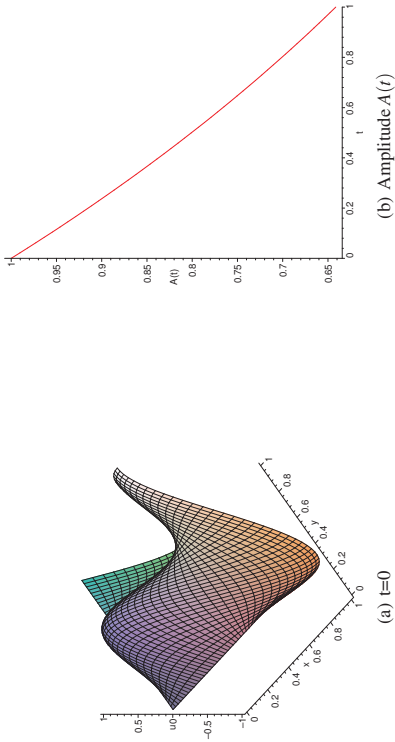
On a tracé sur la figure (4.17) le mode $p = 1$ et $q = 1$, ainsi que l'évolution temporelle de son amplitude pour les mêmes paramètres que précédemment ($\kappa = 0.01$, $L = 1$). Sur un temps $T_f = 0.5$, l'amplitude de ce mode décroît de 0.8.

Si on prend en compte la convection dans le cas d'un champ de vitesse sans cisaillement, la solution initiale est convectée sans déformation et diffusée le long des trajectoires. Par contre, il n'existe pas de solutions analytiques simples qui vérifient les conditions aux limites de (4.26).

En considérant une taille de structure $\delta = \frac{2}{3\pi}L$, le temps caractéristique de diffusion vaut $\tau_d \approx 4.5$, le temps caractéristique de convection $\tau_c \approx 0.2$, et le nombre de Péclet $P_e \approx 21$.

4.4.3 Discretisation par différences finies

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'une discrétisation précise de problème parabolique est le schéma de Crank Nicholson. Appliquée à l'équation

Fig. 4.17 – mode propre de diffusion $p = 1$ $q = 1$

(4.26), il s'écrit pour un maillage cartésien de N_x points suivant x et N_y points suivant y , et de pas dx et dy :

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} = & -\frac{V_1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2dx} + \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} \right) \\
 & - \frac{V_2}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} \right) \\
 & + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{dx^2} + \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{dy^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \right)
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

C'est un schéma inconditionnellement stable d'ordre 2 en temps et en espace, i.e. en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$.

A chaque itération en temps, on a à résoudre un système d'équations linéaire $\mathcal{A}x = \mathcal{B}$, de $N = N_x N_y$ inconnues $\{u_{i,j}^{n+1}\}$. La matrice \mathcal{A} est une matrice pentadiagonale, qui a la même structure que la matrice du laplacien au paragraphe 4.2.3 page 6. Pour des très gros maillages, le coût de résolution de ce système linéaire en utilisant les méthodes de résolution du paragraphe 4.2.3 page 6 peut devenir rapidement prohibitif.

On va donc étudier dans le paragraphe suivant une méthode alternative : la méthode des directions alternées implicites.

4.4.4 Méthode des directions alternées implicites

Le principe des méthodes des directions alternées implicites, notées ADI (ADI=Alternated Directions Implicit) est le sigle classique des directions alternées en anglais), est de décomposer les opérateurs spatiaux suivant les directions d'espace x et y . On écrit l'équation (4.26) sous la forme symbolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1(u) + L_2(u) \quad (4.38)$$

où L_1 et L_2 sont les deux opérateurs suivants :

$$L_1 = V_1 \frac{\partial}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_2 = V_2 \frac{\partial}{\partial y} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.39)$$

En notant u^n , u^{n+1} , $u^{n+\frac{1}{2}}$ les solutions au temps $t^n = ndt$, $t^{n+1} = (n+1)dt$ et $t^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})dt$, les développements limités de $u^{n+\frac{1}{2}}$ peuvent s'écrire de façon symbolique :

$$\begin{aligned}
 u^{n+\frac{1}{2}} &= \left(e^{\frac{dt}{2} \frac{\partial}{\partial x}} \right) u^n = \left(e^{\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^n \\
 u^{n+\frac{1}{2}} &= \left(e^{-\frac{dt}{2} \frac{\partial}{\partial x}} \right) u^{n+1} = \left(e^{-\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^{n+1}
 \end{aligned}$$

On a utilisé dans ces relations le fait que u^n et u^{n+1} sont solutions de l'équation exacte (4.26) pour remplacer $\frac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de $L_1(u)$ et $L_2(u)$.

En combinant ces deux équations, il vient :

$$\left(e^{-\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^{n+1} = \left(e^{\frac{dt}{2} (L_1 + L_2)} \right) u^n \quad (4.40)$$

En utilisant un développement au premier ordre des exponentielles,

$$\left(1 - \frac{dt}{2} (L_1 + L_2) \right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{dt}{2} (L_1 + L_2) \right) u^n$$

on obtiens le schéma suivant, dans lequel il suffit d'inclure l'approximation spatiale des opérateurs L_1 et L_2 :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} = \frac{L_1(u^{n+1}) + L_1(u^n)}{2} + \frac{L_2(u^{n+1}) + L_2(u^n)}{2} \quad (4.41)$$

C'est le schéma classique de Crank Nicholson (4.37).

Pour les schémas ADI, on effectue tout d'abord une factorisation formelle dans (4.40) :

$$\left(e^{-\frac{dt}{2}L_1}e^{-\frac{dt}{2}L_2}\right)u^{n+1} = \left(e^{\frac{dt}{2}L_1}e^{\frac{dt}{2}L_2}\right)u^n \quad (4.42)$$

avant le développement limité des exponentielles :

$$\left(1 - \frac{dt}{2}L_1\right)\left(1 - \frac{dt}{2}L_2\right)u^{n+1} = \left(1 + \frac{dt}{2}L_1\right)\left(1 + \frac{dt}{2}L_2\right)u^n \quad (4.43)$$

Formellement, on a un schéma de type Crank Nicholson d'ordre 2 mais avec une erreur de troncature différente. Pour résoudre, on introduit la solution intermédiaire u^* telle que :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{dt}{2}L_1\right)u^* &= \left(1 + \frac{dt}{2}L_2\right)u^n \\ \left(1 - \frac{dt}{2}L_2\right)u^{n+1} &= \left(1 + \frac{dt}{2}L_1\right)u^* \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ces deux équations sont équivalentes à l'équation (4.42). Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier la première par $1 + \frac{dt}{2}L_1$ et la seconde par $1 - \frac{dt}{2}L_1$ et de les combiner. L'intérêt de cette procédure par rapport à Crank Nicholson classique est que dans la première équation (4.43), on est implicite suivant L_1 (i.e. suivant x) et explicite suivant L_2 (i.e. suivant y), et vice-versa dans la seconde. La résolution de ces deux équations sera donc plus facile que la résolution du schéma de Crank Nicholson (4.41), dans lequel on est implicite suivant les 2 directions L_1 et L_2 .

On discrétise ensuite les opérateurs L_1 et L_2 avec des différences finies centrées sur un maillage cartésien de N_x points suivant x et N_y points suivant y , et de pas dx et dy :

$$\begin{aligned} L_1(u_{i,j}) &= -V_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2dx} + \kappa \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{dx^2} \\ L_2(u_{i,j}) &= -V_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2dy} + \kappa \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{dy^2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\frac{u_{i,j}^* - u_{i,j}^n}{dt/2} = -V_1 \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2dx} + \kappa \frac{u_{i+1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i-1,j}^*}{dx^2} - V_2 \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} + \kappa \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \quad (4.46)$$

On obtiens le schéma ADI suivant pour l'équation (4.26) :

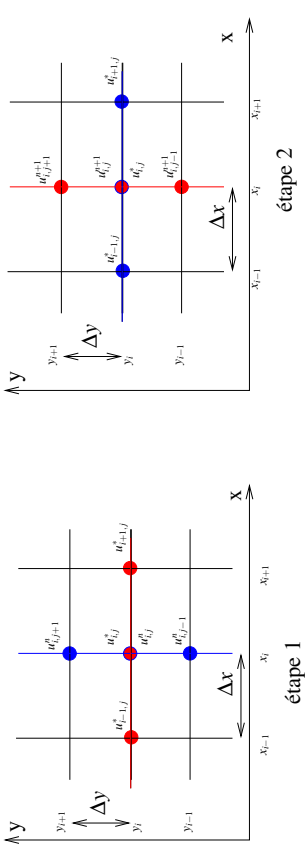


FIG. 4.18 – schéma ADI 4.44 et 4.45

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^*}{dt/2} = -V_1 \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2dx} + \kappa \frac{u_{i+1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i-1,j}^*}{dx^2} - V_2 \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} + \kappa \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{dy^2} \quad (4.45)$$

Ces équations ADI correspondent à deux discrétisations de l'équation (4.26) à $t^{n+\frac{1}{2}}$ avec un pas en temps $\frac{dt}{2}$. La première correspond à une discrétisation entre t^n et $t^{n+\frac{1}{2}}$ avec une implicitation dans la direction x et la seconde à une discrétisation entre $t^{n+\frac{1}{2}}$ et t^n avec une implicitation dans la direction y (figure 4.18). La variable intermédiaire $u_{i,j}^*$ correspond donc à une approximation de $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$.

La première équation (4.44) couple les valeurs inconnues $u_{i,j}^*$ par ligne (figure 4.18), i.e. les valeurs inconnues sur la ligne $j \in \{1, \dots, N_y\}$ sont indépendantes des valeurs sur les autres lignes. Elles sont solutions du système linéaire tri-diagonal $\mathcal{A}^1 x = \mathcal{B}^1$ de dimension N_x suivant :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & d_1^1 & d_2^1 & d_3^1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_{i-1,j}^* \\ u_{i,j}^* \\ u_{i+1,j}^* \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ c_1^1 u_{i,j-1}^n + c_2^1 u_{i,j}^n + c_3^1 u_{i,j+1}^n \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

avec $a_1^1 = \frac{-\kappa}{d\bar{t}} - \frac{V_1}{2d\bar{x}}$, $a_2^1 = \frac{2}{d\bar{t}} + \frac{2\kappa}{d\bar{x}}$, $a_3^1 = \frac{-\kappa}{d\bar{x}} + \frac{V_1}{2d\bar{x}}$, et $c_1^1 = \frac{\kappa}{d\bar{y}^2} + \frac{V_2}{2d\bar{y}}$, $c_2^1 = \frac{2}{d\bar{t}} - \frac{2\kappa}{d\bar{y}^2}$, $c_3^1 = \frac{\kappa}{d\bar{y}^2} - \frac{V_2}{2d\bar{y}}$.

Le second membre \mathcal{B}^1 peut s'écrire sous la forme d'un produit matrice vecteur $\mathcal{B}^1 = \mathcal{C}^1 \{u_{i,j}^n\}$ avec une matrice \mathcal{C}^1 tridiagonale :

$$\mathcal{B}^1 = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i,j-1}^n \\ u_{i,j}^n \\ u_{i,j+1}^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs inconnues $u_{i,j}^{n+1}$, il faut donc résoudre N_y systèmes linéaires tri-diagonaux de dimension N_x .

De même la seconde équation (4.45) couple les valeurs inconnues $u_{i,j}^{n+1}$ par colonne (figure 4.18), i.e. les valeurs inconnues sur la colonne i $\{u_{i,j}^{n+1}\}_{j=1,N_y}$ sont indépendantes des valeurs sur les autres colonnes. Elles sont solutions du système linéaire tri-diagonal $\mathcal{A}^2 x = \mathcal{B}^2$ de dimension N_y suivant :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i,j-1}^{n+1} \\ u_{i,j}^{n+1} \\ u_{i,j+1}^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ c_1^2 u_{i-1,j}^* + c_2^2 u_{i,j}^* + c_3^2 u_{i+1,j}^* \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

avec $a_1^2 = \frac{-\kappa}{d\bar{y}} - \frac{V_2}{2d\bar{y}}$, $a_2^2 = \frac{2}{d\bar{t}} + \frac{2\kappa}{d\bar{y}^2}$, $a_3^2 = \frac{-\kappa}{d\bar{y}^2} + \frac{V_2}{2d\bar{y}}$, et $c_1^1 = \frac{\kappa}{d\bar{x}^2} + \frac{V_1}{2d\bar{x}}$, $c_2^1 = \frac{2}{d\bar{t}} - \frac{2\kappa}{d\bar{x}^2}$, $c_3^1 = \frac{\kappa}{d\bar{x}^2} - \frac{V_1}{2d\bar{x}}$.

Le second membre \mathcal{B}^2 peut encore s'écrire sous la forme d'un produit matrice vecteur $\mathcal{B}^2 = \mathcal{C}^2 \{u_{i,j}^*\}$:

$$\mathcal{B}^2 = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i-1,j}^* \\ u_{i,j}^* \\ u_{i+1,j}^* \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pour déterminer valeurs inconnues $u_{i,j}^{n+1}$, il faut donc résoudre N_x systèmes linéaires tri-diagonaux de dimension N_y .

A chaque itération en temps, on résoud N_y systèmes tri-diagonaux de rang N_x et N_x systèmes tri-diagonaux de rang N_y , ce qui est beaucoup plus efficace que la résolution d'un seul système linéaire de rang $N_x N_y$.

Pour les conditions aux limites, il faut modifier la première et la dernière ligne de ces systèmes linéaires. Pour les conditions de Dirichlet sur Γ_0 , on modifie la première ligne de \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2 :

$$\mathcal{A}_{1,j \neq 1}^1 = 0, \mathcal{A}_{1,1}^1 = 1, \mathcal{B}_1^1 = 0 \text{ et } \mathcal{A}_{1,j \neq 1}^2 = 0, \mathcal{A}_{1,1}^2 = 1, \mathcal{B}_1^2 = 0 \quad (4.48)$$

Cette condition fixe la valeur de la première ligne de u^* : $\{u_{i,1}^*\}_{i=1,N_x} = 0$ et la première colonne de u^{n+1} : $\{u_{i,j}^{n+1}\}_{j=1,N_y} = 0$.

Pour les conditions de Neumann sur Γ_1 , on utilise une condition miroir, qui modifie la dernière ligne de \mathcal{A}^1 et \mathcal{A}^2 :

$$\mathcal{A}_{N_x, N_x-1}^1 = a_1^1 + a_3^1 \text{ et } \mathcal{A}_{N_x, N_y-1}^2 = a_1^2 + a_3^2 \quad (4.49)$$

De même le second membre \mathcal{B}^1 de l'étape 1 pour la ligne $j = N_y$ est modifié :

$$\mathcal{B}_i^1 = (c_1^1 + c_3^1) u_{i, N_y-1}^n + c_2^1 u_{i, N_y}^n \quad (4.50)$$

ainsi que le second membre \mathcal{B}^2 de l'étape 2 pour la colonne $i = N_x$:

$$\mathcal{B}_j^2 = (c_1^2 + c_3^2) u_{N_x-1, j}^* + c_2^2 u_{N_x, j}^* \quad (4.51)$$

Stabilité et précision du schéma ADI

Étude de la stabilité : L'étude de la stabilité utilise le programme Maple 4.6.

On définit les deux étapes (4.44 et 4.45) du schéma ADI (lignes 6 à 13), puis on introduit une perturbation U_p décomposée en mode de Fourier (ligne 15), que l'on introduit dans les deux équations (lignes 16 et 22). On calcule l'amplification du mode pour chacune de ces équations : i.e. $\frac{\psi^*}{\psi^m}$ pour la première (ligne 20) et $\frac{\psi^{n+1}}{\psi^m}$ pour la seconde (ligne 22). D'où l'on déduit le facteur d'amplification global du schéma $G = \frac{\psi^{n+1}}{\psi^m}$ (ligne 29) :

$$G = \frac{a_1 - 1 + Ib_1}{a_1 + 1 + Ib_1} \frac{a_2 - 1 + Ib_2}{a_2 + 1 + Ib_2}$$

avec $a_1 = \frac{\kappa d\bar{t}}{d\bar{x}^2} (1 - \cos \omega_1 d\bar{x})$, $a_2 = \frac{\kappa d\bar{t}}{d\bar{y}^2} (1 - \cos \omega_2 d\bar{y})$, $b_1 = \frac{V_1 d\bar{t}}{d\bar{x}}$, $b_2 = \frac{V_2 d\bar{t}}{d\bar{y}}$.
Le carré du module de G vaut :

Programme 4.6 – Etude de la stabilité du schéma ADI (4.44)

```

1 > restart;
2 # Equation de convection-diffusion
3 > diff(U(x,y,t),t)+V1*diff(U(x,y,t),x)+V2*diff(U(x,y,t),y)=
4 > kappa*(diff(U(x,y,t),x$2)+diff(U(x,y,t),y$2)); eq:=%;
5 # Schema ADI
6 > (U[ns,i,j]-U[ns,i,j])/(dt/2)+V1*(U[ns,i+1,j]-U[ns,i-1,j])/
7 (2*dx)+V2*(U[ns,i,j+1]-U[ns,i,j-1])/(2*dy)=kappa*((U[ns,i+1,j]
8 -2*U[ns,i,j]+U[ns,i-1,j])/dx^2+U[ns,i,j+1]-2*U[ns,i,j]+
9 U[ns,i,j-1])/dy^2); eqh1:=%;
10 > (U[n+1,i,j]-U[ns,i,j])/(dt/2)+V1*(U[ns,i+1,j]-U[ns,i-1,j])/
11 (2*dx)+V2*(U[n+1,i,j+1]-U[n+1,i,j-1])/(2*dy)=kappa*((U[ns,i+1,j]
12 -2*U[ns,i,j]+U[ns,i-1,j])/dx^2+U[n+1,i,j+1]-2*U[n+1,i,j]+
13 U[n+1,i,j-1])/dy^2); eqh2:=%;
14 # Etude de la Stabilité
15 > Up:=(n,i,j)->Psi[n]*exp(I*omega[1]*i*dx)*exp(I*omega[2]*j*dy);
16 > subs(U[ns,i,j]=Up(ns,i,j),U[ns,i,j]=Up(ns,i,j),
17 U[ns,i+1,j]=Up(ns,i+1,j),U[ns,i-1,j]=Up(ns,i-1,j),
18 U[ns,i,j+1]=Up(ns,i,j+1),U[ns,i,j-1]=Up(ns,i,j-1),eqh1);
19 > rel1:=simplify(%*exp(-I*omega[1]*i*dx)*exp(-I*omega[2]*j*dy));
20 > Psi[ns]/Psi[n]=solve(subs(Psi[ns]=G*Psi[n],rel1),G); rel1:=%;
21 #
22 > subs(U[ns,i,j]=Up(ns,i,j),U[n+1,i,j]=Up(n+1,i,j),
23 U[ns,i+1,j]=Up(ns,i+1,j),U[ns,i-1,j]=Up(ns,i-1,j),
24 U[n+1,i,j+1]=Up(n+1,i,j+1),U[n+1,i,j-1]=Up(n+1,i,j-1),eqh2);
25 > rel2:=simplify(%*exp(-I*omega[1]*i*dx)*exp(-I*omega[2]*j*dy));
26 > Psi[n+1]/Psi[ns]=solve(subs(Psi[n+1]=G*Psi[ns],rel2),G);
27 rel22:=%;
28 # Facteur d'amplification
29 > G:=rhs(rel1)*rhs(rel22);
30 # Etude de chaque terme
31 > A1=r1*(1-cos(omega[1]*dx)); A2=r2*(1-cos(omega[2]*dy));
32 > rel1:=[%,%]; rel11:={r1=kappa*dt/dx^2,r2=kappa*dt/dy^2};
33 > B1=CFL1*sin(omega[1]*dx)/2; B2=CFL2*sin(omega[2]*dy)/2;
34 > rel2:=[%,%]; rel22:={CFL1=V1*dt/dx,CFL2=V2*dt/dy};
35 > 'G'=((A1-1)+I*B1)/((A1+1)+I*B1)*(((A2-1)+I*B2)/((A2+1)+I*B2));
36 GG:=rhs(%);
37 # Verification
38 > Gsubs(rel1,rel2,rel11,rel22,GG):simplify(%):rhs(%) - lhs(%);
39 # Calcul du carré du module de G
40 > GG;
41 > G1:=((A1-1)+I*B1)/((A1+1)+I*B1);
42 GIM=((A1-1)^2+B1^2)/((A1+1)^2+B1^2);
43 > G2:=((A2-1)+I*B2)/((A2+1)+I*B2);
44 G2M=((A2-1)^2+B2^2)/((A2+1)^2+B2^2);
45 # GIM et G2M sont donc <1 ==> donc stable

```

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

$$G^2 = \frac{(a_1 - 1)^2 + b_1^2}{(a_1 + 1)^2 + b_1^2} + \frac{(a_2 - 1)^2 + b_2^2}{(a_2 + 1)^2 + b_2^2} \leq 1 \quad \forall \omega_1, \omega_2$$

Il est plus petit que 1 puisque a_1 et a_2 sont positifs.

Le schéma ADI (4.44 et 4.45) est donc inconditionnellement stable.

Étude de la consistance : Pour étudier la consistance, on utilise le programme Maple 4.7, qui est la suite du programme précédant 4.7.

Pour cela on fait la demi somme des deux équations (4.44 et 4.45) pour obtenir une équation discrète équivalente à l'équation exacte (4.26) (ligne 3) :

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} = & -V_1 \left(\frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2dx} \right) \\
 & - \frac{V_2}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} \right) \\
 & + \kappa \left(\frac{u_{i+1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i-1,j}^*}{dx^2} \right) \\
 & + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j-1}^{n+1}}{dy^2} \right)
 \end{aligned} \quad (4.52)$$

En comparant cette équation (4.52) au schéma de Crank Nicholson (4.37), on peut retrouver ce dernier en remplaçant simplement dans (4.52) les valeurs de $u_{i,j}^*$ par la moyenne $\frac{1}{2}(u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1})$. Ce schéma ADI est donc bien équivalent au schéma de Crank Nicholson. Les valeurs intermédiaires $u_{i,j}^*$ sont des approximations de la solution à $t = (n + \frac{1}{2})dt$.

Dans l'équation équivalente (4.52), on substitue la solution approchée par la solution exacte (lignes 6 à 15), et on effectue des développements limités autour de $u_{i,j}^* = u(i\Delta x, j\Delta y, (n + \frac{1}{2}))$ (lignes 18 à 45). Après soustraction de l'équation exacte, on obtient l'erreur de troncature E_t , qui est en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$.

Le schéma ADI (4.44 et 4.45) est donc consistant avec l'équation exacte (4.26), et est d'ordre 2 en temps et en espace, i.e. en $O(dt^2, dx^2, dy^2)$.

4.4.5 Expérimentation numérique avec Matlab

Le programme Matlab (4.8) implémente le schéma ADI en utilisant une programmation matricielle.

Marc BUFFAT, UFR Mécanique, UCBLyon

Programme 4.7 – Etude de la consistance du schéma ADI (4.44)

```

45 # Erreur de troncature dvt de taylor autour de t=n+1/2
46 # Equation equivalente
47 > 1/2*eqh1+1/2*eqh2:=eqh12:=lhs(%) - rhs (%);
48
49 # substitution de la solution exacte dans cette equation
50 > Uex:=(r,p,q)->U(x+(p-i)*dx,y+(q-j)*dy,t+(t-n-1/2)*dt);
51
52 > subs(U[n,i,j]=Uex(n,i,j),
53 U[n,i+1,j]=Uex(n,i+1,j),U[n,i-1,j]=Uex(n,i-1,j),
54 U[n,i,j+1]=Uex(n,i,j+1),U[n,i,j-1]=Uex(n,i,j-1),
55 U[n+1,i,j]=Uex(n+1,i,j),
56 U[n+1,i+1,j]=Uex(n+1/2,i,j),
57 U[ns,i+1,j]=Uex(n+1/2,i+1,j),U[ns,i-1,j]=Uex(n+1/2,i-1,j),
58 U[ns,i,j+1]=Uex(n+1/2,i,j+1),U[ns,i,j-1]=Uex(n+1/2,i,j-1),
59 eqh12:=eqh3:=%;
60
61 # Developpement de Taylor autour de t=n+1/2
62 > k:=6;
63 > U(x,y,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y,t-dt/2),[dt],k),diff);
64 S1:=%;
65 > U(x,y+dy,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y+dy,t-dt/2),[dy],dt),
66 k),diff); S2:=%;
67 > U(x,y-dy,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y-dy,t-dt/2),[dy],dt),
68 k),diff); S3:=%;
69 > U(x+dx,y,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x+dx,y,t-dt/2),[dx],dt),
70 k),diff); S4:=%;
71 > U(x-dx,y,t-dt/2)=convert(mtaylor(U(x-dx,y,t-dt/2),[dx],dt),
72 k),diff); S5:=%;
73 > U(x,y+dy,t)=convert(mtaylor(U(x,y+dy,t),[dy],k),diff);
74 S6:=%;
75 > U(x,y-dy,t)=convert(mtaylor(U(x,y-dy,t),[dy],k),diff);
76 S7:=%;
77 > U(x+dx,y,t)=convert(mtaylor(U(x+dx,y,t),[dx],k),diff);
78 S8:=%;
79 > U(x-dx,y,t)=convert(mtaylor(U(x-dx,y,t),[dx],k),diff);
80 S9:=%;
81 > U(x,y,t+dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y,t+dt/2),[dt],k),diff);
82 S10:=%;
83 > U(x,y+dy,t+dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y+dy,t+dt/2),[dy],dt),
84 k),diff); S11:=%;
85 > U(x,y-dy,t+dt/2)=convert(mtaylor(U(x,y-dy,t+dt/2),[dy],dt),
86 k),diff); S12:=%;
87 > U(x+dx,y,t+dt/2)=convert(mtaylor(U(x+dx,y,t+dt/2),[dx],dt),
88 k),diff); S13:=%;
89 > U(x-dx,y,t+dt/2)=convert(mtaylor(U(x-dx,y,t+dt/2),[dx],dt),
90 k),diff); S14:=%;
91 # substitution dans l'équation discrete - equation exacte
92 M:=B6/FB4/S2E3/M64n8h6e,S6C8I9y8S8,S9,S10,S11,S12,S13,S14,eqh3)-
93 (lhs(eq)-rhs(eq));
94 > simplify(%):collect(%,{dt,dx,dy});
95 # Schema d'ordre 2 en dt,dx et dy

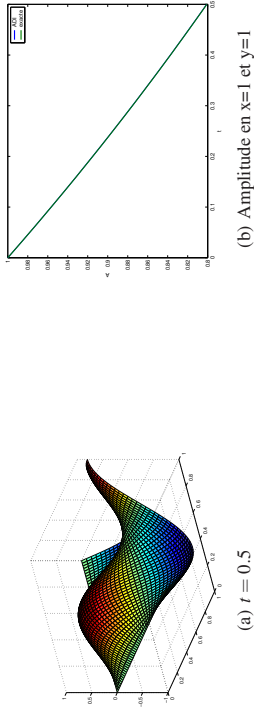
```

Programme 4.8 – Résolution numérique de l'équation (4.27)

```

1 % resolution ADI
2 clear
3 % maillage
4 L=1; H=1;
5 Nx=51; dx=L/(Nx-1); X=[0:dx:L];
6 Ny=51; dy=H/(Ny-1); Y=[0:dy:H];
7 % champ vitesse
8 v1=1; v2=1;
9 % parametres
10 kappa=0.01; dt=0.001; Tf=0.5; nit=round(Tf/dt)
11 % champ initial
12 delta=(0.1)^2; x0=L/4; y0=H/4;
13 U1=exp(-(X-x0).^2/delta)*exp(-(Y-y0).^2/delta);
14 Un=U1; Us=U1; Un1=U1;
15 % matrices 3D
16 I1=ones(1,Nx); I2=ones(1,Ny);
17 A1=[-kappa/dx^2-v1/(2*dx); 2/dt+2*kappa/dx^2; ...
18 -kappa/dx^2+v1/(2*dx)]*I1;
19 C1=[ kappa/dy^2+v2/(2*dy); 2/dt-2*kappa/dy^2; ...
20 kappa/dy^2-v2/(2*dy)]*I1;
21 A2=[-kappa/dy^2-v2/(2*dy); 2/dt+2*kappa/dy^2; ...
22 -kappa/dy^2+v2/(2*dy)]*I2;
23 C2=[ kappa/dx^2+v1/(2*dx); 2/dt-2*kappa/dx^2; ...
24 kappa/dx^2-v1/(2*dx)]*I2;
25 % C.L de Dirichlet en i=1 j=1
26 A1(:,1)=0; A1(2,1)=1; C1(:,1)=0;
27 A2(:,1)=0; A2(2,1)=1; C2(:,1)=0;
28 % C.L de Neumann sur les frontieres i=Nx j=Ny
29 A1(1,Nx)=A1(1,Nx)+A1(3,Nx); A1(3,Nx)=0;
30 A2(1,Ny)=A2(1,Ny)+A2(3,Ny); A2(3,Ny)=0;
31 % iterations en temps
32 for it=1:nit
33 % 1ere etape ADI
34 Us(1:Nx,1)=0;
35 for j=2:Ny-1
36 B1=C1(1,1:Nx)*Us(1:Nx,j-1)+C1(2,1:Nx)*Un(1:Nx,j)+...
37 C1(3,1:Nx)*Us(1:Nx,j+1);
38 Us(1:Nx,j)=tridiag(A1,B1);
39 end;
40 B1=C1(2,1:Nx)*Us(1:Nx,Ny)+C1(1,1:Nx)+...
41 C1(3,1:Nx)*Us(1:Nx,Ny-1);
42 Us(1:Nx,Ny)=tridiag(A1,B1);
43 % 2nd etape ADI
44 Un1(1,1:Ny)=0;
45 for i=2:Nx-1
46 B2=C2(1,1:Ny)*Us(i-1,1:Ny)+C2(2,1:Ny)*Us(i,1:Ny)*...
47 +C2(3,1:Ny)+C2(3,1:Ny)*Us(Nx-1,1:Ny);
48 Marc=BUFFAC2UBR Manique;USC(BHybn1:Ny);
49 Un1(i,1:Ny)=tridiag(A2,B2);
50 end;
51 B2=C2(2,1:Ny)*Us(Nx,1:Ny)*...
52 (C2(1,1:Ny)+C2(3,1:Ny))*Us(Nx-1,1:Ny);
53 Un1(Nx,1:Ny)=tridiag(A2,B2);
54 % iteration suivante
55 Un=Un1;

```


FIG. 4.19 – solution de diffusion avec le schéma ADI (mode propre $p = 1, q = 1$)

Les paramètres du calcul sont définis aux lignes 4 à 10. Les matrices tri-diagonales sont construites sur les lignes 17 à 24, puis on applique les conditions aux limites (lignes 26 à 30).

La boucle en temps (lignes 32 à 55) inclut les deux étapes ADI et utilise la fonction **tridiag** (?? page ??) pour la résolution des systèmes linéaires tri-diagonaux.

Mode propre de diffusion : Pour valider ce programme, nous avons tout d'abord simulé la diffusion du mode propre (4.36) $p = 1$ et $q = 1$ avec un maillage de $N_x = N_y = 51$ points dans chaque direction et un paramètre $\kappa = 0.01$. La solution calculée au bout d'un temps $T_f = 0.5$ avec $dt = 0.01$ est tracée sur la figure (4.19). L'allure de la solution (figure 4.19a) coïncide bien avec la solution exacte (figure 4.17a), ce qui confirme le tracé de l'évolution temporelle de la solution au point $x = 1, y = 1$ comparée à la solution exacte (figure 4.19b).

Pour tester la précision d'intégration en temps du schéma, nous avons calculé l'erreur au point $(x = 1, y = 1)$ au bout du temps $T_f = 4$ (de l'ordre du temps caractéristique de diffusion), en fonction du pas d'intégration en temps dt . Le résultat de la figure (4.20a) montre que pour les pas en temps choisis l'erreur est quasiment indépendante du pas en temps dt , et est donc essentiellement une erreur de discrétisation spatiale. On note que les pas en temps choisis sont tels que le pas en temps est beaucoup plus faible que le temps caractéristique de diffusion : $dt \ll \tau_d \approx 4.5$.

Nous l'avons vérifié en faisant varier le nombre de points du maillage de $N_x = N_y = 11$ à $N_x = N_y = 101$ avec un pas en temps $dt = 0.1$ fixé. L'évolution de l'erreur en fonction du pas de discrétisation spatiale $h = dx = dy$ est tracée sur la figure (4.20b), et on constate que l'erreur décroît en $O(h^2)$.

Pour cette condition initiale, nous avons aussi fait une simulation avec une

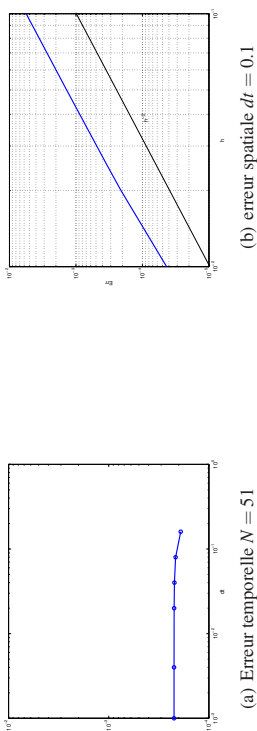


FIG. 4.20 – Erreur numérique du schéma ADI (cas de diffusion)

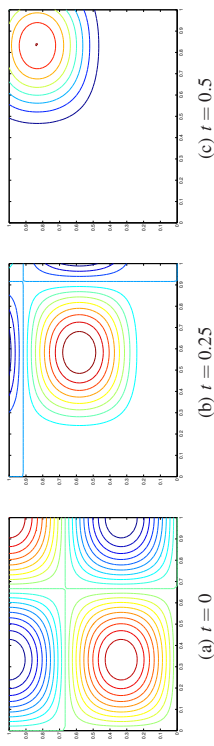


FIG. 4.21 – Iso-valeurs de la solution (cas de convection-diffusion)

vitesse de convection non nulle ($V_1 = V_2 = 1$). Ce cas correspond à un nombre de Péclet $Pe = 200$. Les iso-valeurs de la solution sont tracées sur la figure (4.21).

On note la convection sans déformation de la solution initiale, ce qui confirme que la condition aux limites sur Γ_1 autorise la sortie des structures hors du domaine. On a aussi comparé l'évolution temporelle du maximum de la solution exacte de diffusion et du maximum de la solution calculée, que l'on a tracé sur la figure (4.22a). On vérifie ainsi que la décroissance de la solution est une décroissance visqueuse.

Nous avons ensuite étudié l'influence du pas d'intégration en temps dt , en traçant sur la figure (4.22b) l'écart en fonction de dt entre le maximum de la solution exacte de diffusion et le maximum de la solution calculée. On constate que cet écart croît rapidement en dessous d'une valeur $dt = 0.1$. Cette valeur est justement de l'ordre de grandeur du temps caractéristique de convection $\tau_c \approx 0.2$.

En conclusion sur cette simulation, on note que le choix des paramètres numériques a été fixé par la physique du problème, et non par des conditions numériques de stabilité :

1. la maillage $N_x = N_y = 51$ permet de décrire finement la condition initiale

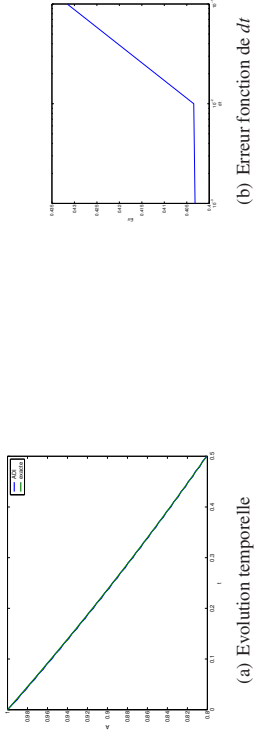


FIG. 4.22 – Erreur numérique du schéma ADI

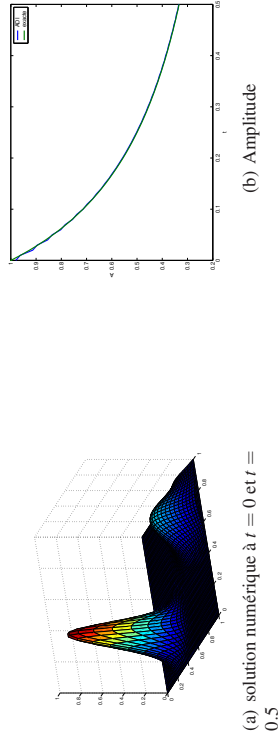


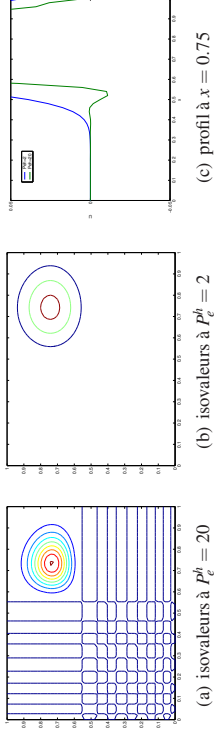
FIG. 4.23 – Convection d'une gaussienne

2. le pas en temps $dt = 0.01$ vérifie $dt \ll \tau_d$ et $dt \ll \tau_c$.

Convection d'une gaussienne : Le second cas de calcul correspond à la condition initiale gaussienne (4.31), avec les mêmes paramètres qu'au paragraphe 4.4.2 page 33.

Pour un maillage $N_x = N_y = 51$ et un pas en temps $dt = 0.01$, on a tracé sur la figure (4.23a) la solution à $t = 0$ et à $t = 0.5$. Cette solution se compare très bien avec la solution exacte tracée sur la figure (4.16). On a aussi comparé l'évolution temporelle de l'amplitude de la tache gaussienne calculée avec le schéma ADI avec l'expression analytique (4.34). Ces deux courbes coïncident, ainsi que le montre la figure (4.23b).

Nous avons effectué une seconde simulation avec un coefficient de diffusion plus petit $\kappa = 0.001$. Dans ce cas, la solution numérique présente des oscillations (figure 4.24). Pour cette valeur de κ , le nombre de Péclet de maille :

FIG. 4.24 – Convection d'une gaussienne ($P_e^h = 20$)

$$P_e^h = \frac{V h}{\kappa}$$

vaut $P_e^h = 20$ au lieu de $P_e^h = 2$ avec la valeur de κ précédente. Sur le tracé des iso-valeurs (4.24a), on constate l'apparition de légères oscillations, caractérisées par la présence de nombreuses lignes iso-valeurs $u = 0$, qui n'existent pas à $P_e^h = 2$ (figure 4.24b). Le tracé d'un profil à $x = 0.75$ (figure 4.24c) montre bien l'apparition d'une oscillation numérique au pied de la tache gaussienne. Ces oscillations numériques sont de même nature que celles étudiées au paragraphe ?? page ?? du chapitre précédent. Elles apparaissent dès que le Péclet de maille P_e^h devient plus grand que 2 et indiquent que le maillage n'est plus suffisamment fin pour capter la solution de convection avec ce schéma centré.