

Equation des ondes en 2D

par

ZHANG Xunjie

pour le UE Méthodes numériques pour les EDP Mécanique M1

fait le 31 mai 2017

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Problème physique	3
1.2	Modifications des condition limites	4
2	Solution analytique	5
2.1	Solution analytique en 1D	5
2.2	Solution pour $t \geq \frac{2L}{c_0}$	5
3	Méthodes numérique	6
3.1	Stabilité	6
3.2	Consistance	7
3.3	Dispersion	8
3.4	Conditions initiales sous Matlab	8
3.5	Programmer Matlab	8
4	Etude numérique	9
4.1	Cas test	9
4.2	Precision spatial	10
4.3	Précision temporelle	12
4.4	Nouvelle conditions à $x = -L$	13
5	Conclusion	15

Table des figures

1.1	Problem physique d'etude	3
3.1	Conditions initiales	8
4.1	A $t=1s$, snapshot de la surface libre	9
4.2	La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du temps	10
4.3	La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du temps pour tous les N_x	10
4.4	Error en fonction du N_x logatithmique	11
4.5	pente	11
4.6	La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du CFL logatithmique	12
4.7	L'error en fonction du CFL logatithmique	12
4.8	pente	13
4.9	A $t=1s$, snapshot de la surface libre	13
4.10	A $t=2s$, snapshot de la surface libre	14

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problème physique

On considère des oscillations à la surface d'un liquide contenu dans un generateur des ondes . La surface libre du liquide est à $z = h(x, y, t)$, et paroi à $z = 0$; la frontière du réservoir est de forme carré , i.e. , à $x = \pm L, -L \leq y \leq L$ et $y = \pm L, -L \leq x \leq L$.On néglige les effets de viscosité et on suppose que le fluide est un liquide incompressible .

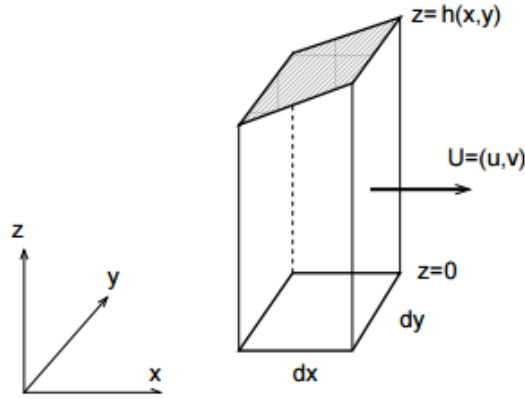


FIGURE 1.1 – Problem physique d'étude

On considère la perturbation de la surface libre $\xi(x, y, t) := h(x, y, t) - h_0$ soit faible , donc on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

où c_0 est la célérité des ondes de surface . Les conditions initiales correspondent à la perturbation et vitesse

$$\xi(x, y, t = 0) = 0 \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, y, t = 0) = 0 \quad (1.2)$$

1.2 Modifications des conditions limites

Bilan de masse pour le cylindre de volume $hdxhy$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Pour obtenir une condition sur ξ , on utilise la combinaison suivant \vec{n} Sauf à $x = L$, la vitesse normale est $u \cdot n = \frac{Ag}{\omega} \sin(\omega t)$

Bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \rho h u}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho h v}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

On considère que le fluide est un liquide incompressible, et que la perturbation de la surface libre $\xi = h - h_0$ est faible.

On peut alors considérer que la répartition de pression reste hydrostatique :

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g(h - z) \quad (1.6)$$

On note que : $h = h_0 = \xi$, $p = p_s + \rho g \xi$, les équations viennent :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

Après dérivations des trois équations, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g h_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \quad (1.8)$$

Donc, dans l'équation 1.7, on trouve

$$c_0 = \sqrt{g h_0}$$

On déduit la condition aux limites sur ξ dans l'équation 1.8

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} \quad (1.9)$$

Donc pour les frontières $x = L$ et $y = \pm L$:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|_{y=\pm L} = 0$$

PPour la frontière $x = -L$:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=-L} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} = -A \cos(\omega t)$$

Chapitre 2

Solution analytique

2.1 Solution analytique en 1D

Pour 1D , on a l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Dans l'équation 2.1 , On remplace ξ par la forme $\xi = B \sin(k(x-x_0) - \omega t)$, $t < \frac{2L}{c_0}$ besoin de montrer,

à gauche :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega B \cos(k(x-x_0) - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 B \sin(k(x-x_0) - \omega t)$$

à droite :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = k B \cos(k(x-x_0) - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 B \sin(k(x-x_0) - \omega t)$$

Droite=gauche ,on trouve :

$$k = \frac{\omega}{c_0}$$

Avec la condition limite $\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=-L} = -A \cos(\omega t)$, on trouve :

$$B = -\frac{A}{k} = -\frac{A c_0}{\omega}$$

2.2 Solution pour $t \geq \frac{2L}{c_0}$

L'onde arrive la frontière $x = L$ à l'instant $t = \frac{2L}{c_0}$, après l'onde va propager vers la direction opposée avec la même vitesse opposée , donc , quand $t > \frac{2L}{c_0}$, il y aura une superposition de deux ondes avec même ω .

Chapitre 3

Méthodes numérique

3.1 Stabilité

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^n + h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = C_0^2 \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + C_0^2 \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (3.1)$$

$$h_{i,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^n + h_{i,j}^{n-1} = \frac{C_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n) + \frac{C_0^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} (h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n) \quad (3.2)$$

On pose :

$$C_{FL1} = \frac{C_0 \Delta t}{\Delta x}$$

et

$$C_{FL2} = \frac{C_0 \Delta t}{\Delta y}$$

On introduit la perturbation :

$$\varepsilon_{i,j}^n = \psi^n e^{I\omega_1 i \Delta x} e^{I\omega_2 j \Delta y}$$

Donc :

$$\psi^{n+1} - \psi^n + \psi^{n-1} = C_{FL1}^2 (\psi^n e^{I\omega_1 i \Delta x} - 2\psi^n + \psi^n e^{-I\omega_1 i \Delta x}) + C_{FL2}^2 (\psi^n e^{I\omega_2 j \Delta y} - 2\psi^n + \psi^n e^{-I\omega_2 j \Delta y}) \quad (3.3)$$

Or $G = \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = \frac{\psi^n}{\psi^{n-1}}$, on a alors :

$$G - 2 + \frac{1}{G} = 2C_{FL1}^2 (\cos(\omega_1 \Delta x) - 1) + 2C_{FL2}^2 (\cos(\omega_2 \Delta y) - 1)$$

$$G - 2 + \frac{1}{G} = -4C_{FL1}^2 \left(\sin^2\left(\frac{\omega_1 \Delta x}{2}\right) \right) - 4C_{FL2}^2 \left(\sin^2\left(\frac{\omega_2 \Delta y}{2}\right) \right)$$

On pose : $y_1 = \sin\left(\frac{\omega_1 \Delta x}{2}\right)$, $y_2 = \sin\left(\frac{\omega_2 \Delta y}{2}\right)$

$$G^2 + (4C_{FL1}^2 y_1^2 + 4C_{FL2}^2 y_2^2 - 2)G + 1 = 0 \quad (3.4)$$

$$G^2 + 2\alpha G + 1 = 0 \quad (3.5)$$

Avec

$$\alpha = 2C_{FL1}^2 y_1^2 + 2C_{FL2}^2 y_2^2 - 1$$

Pour étudier la stabilité, il faut $|G| \leq 1$.

si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} G_{1,2} &= \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ G_1 * G_2 &= 1 \\ \implies |G_1| &\geq 1 \quad \text{ou} \quad |G_2| \geq 1 \end{aligned}$$

. Donc, il est instable.

si $\Delta \leq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\alpha^2 - 4 \leq 0 \\ \alpha^2 &\leq 1 \\ 1 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

On peut trouver que $C_{FL1}^2 + C_{FL2}^2 \leq 1$

$$C_{FL1}^2 + C_{FL2}^2 = \frac{C_0^2 \Delta t^2}{h^2} = C_{FL}^2 \leq 1$$

Alors :

$$C_{FL} \leq 1$$

3.2 Consistance

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^n + h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = C_0^2 \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + C_0^2 \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (3.6)$$

$$h_{i,j}^{n\pm 1} = h_{i,j}^n \pm dt \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dt^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \pm \frac{dt^3}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + \frac{dt^4}{24} \frac{\partial^4 h}{\partial t^4} \pm \mathcal{O}(dt^5) \quad (3.7)$$

$$h_{i\pm 1,j}^n = h_{i,j}^n \pm dx \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dx^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \pm \frac{dx^3}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{dx^4}{24} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \pm \mathcal{O}(dx^5) \quad (3.8)$$

$$h_{i,j\pm 1}^n = h_{i,j}^n \pm dy \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{dy^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \pm \frac{dy^3}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} + \frac{dy^4}{24} \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} \pm \mathcal{O}(dy^5) \quad (3.9)$$

On peut remplacer l'équation 3.6 par les équations avants. Donc il est :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{dt^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial t^4} + \mathcal{O}(dt^4) = C_0^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{dx^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) + \mathcal{O}(dx^4) + C_0^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{dy^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} \right) + \mathcal{O}(dy^4)$$

On obtient donc l'erreur troncature :

$$ErrT = \frac{dt^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial t^4} - C_0^2 \frac{dx^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - C_0^2 \frac{dy^2}{12} \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \mathcal{O}(dt^4, dx^4, dy^4) \quad (3.10)$$

Ce schéma est consistant. Il est conditionnellement stable et consistant.

3.3 Dispersion

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 h}{\partial t^4} &= C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right) + C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right) \\ &= C_0^4 \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + C_0^4 \left(\frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2} \right)\end{aligned}$$

En remplaçant le $\frac{\partial^4 h}{\partial t^4}$ dans l'équation 4.9, on obtient :

$$ErrT = \frac{C_0^2 dx^2}{12} (C_{FL}^2 - 1) * \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{C_0^2 dy^2}{12} (C_{FL}^2 - 1) * \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \frac{dt^2 C_0^4}{6} \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2} + O(dt^2, dx^2, dy^2)$$

On peut dire que l'erreur de troncature est principalement de la dispersion numérique.

3.4 Conditions initiales sous Matlab

```
% initialisation
Un0=zeros(Nx,Ny);
Un=Un0;
Un1=Un;
```

FIGURE 3.1 – Conditions initiales

Dans la figure 3.1 , $Un0 = zeros(Nx, Ny)$, $Un = Un0$ est bien correspondant à condition initial $\xi(x, y, t = 0) = 0$. Et $Un1 = Un$ est satisfait à la condition initail $\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, y, t = 0) = 0$

3.5 Programmer Matlab

Sur moodle , vous pouvez trouver les codes Matlab .

Chapitre 4

Etude numérique

4.1 Cas test

Au début on s'intéresse à $t = 1s$:

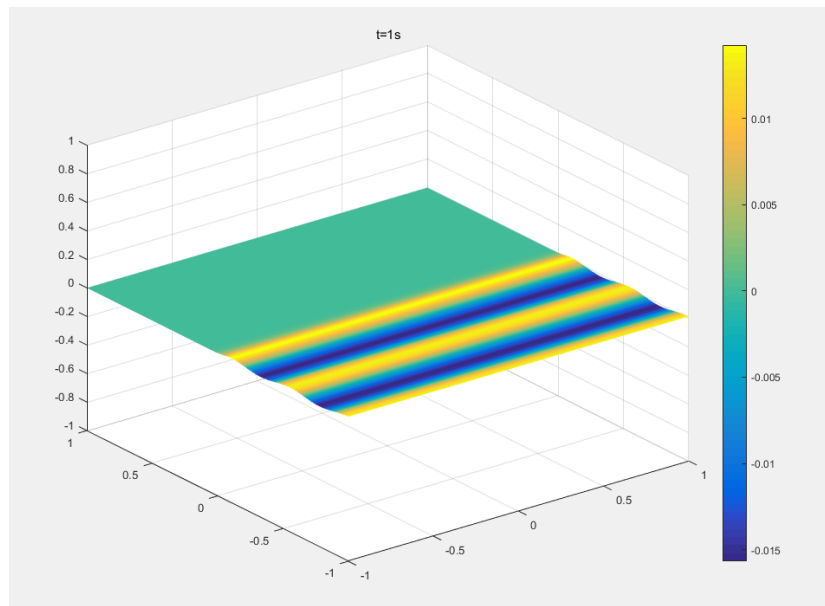


FIGURE 4.1 – A $t=1s$, snapshot de la surface libre

C'est la snapshot à l'instante $t=1s$. Dans le 4.1 on voit qu'il y a pas de vibration , parce-que l'onde ne propage pas cette zone . donc il est une plant initiale . Le point intéressé $(0,0)$ commence vibration après cette l'instante .

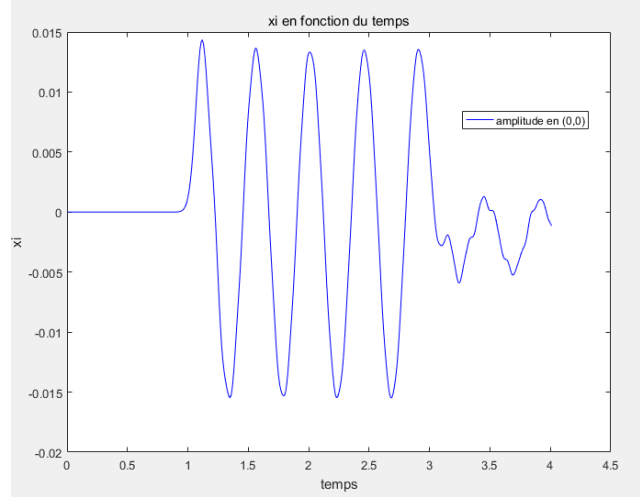


FIGURE 4.2 – La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du temps

Dans la figure 4.2 , on remarque qu'avant l'instante $t=1s$, il n'y a pas de vibration , c'est bien satisfait la figure 4.1 . A l'instante $t=3s$, l'onde revient à la position $(0,0)$, donc il aura une superposition , donc l'amplitude ou ξ va changer . Pour moi , $\omega = 14.0$, c'est une superposition diminuée.

4.2 Precision spatial

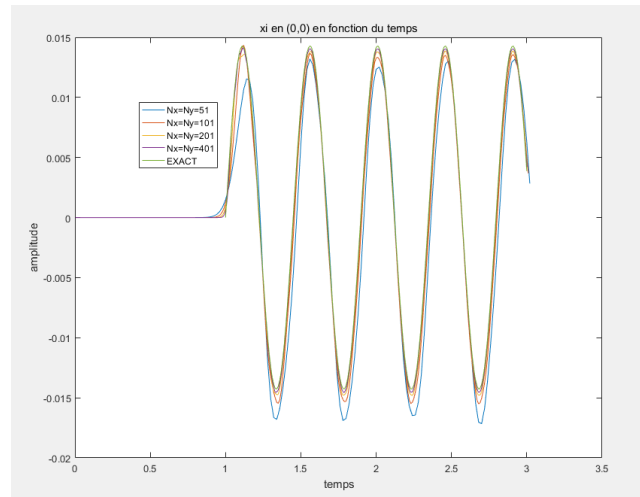


FIGURE 4.3 – La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du temps pour tous les N_x

Dans la figure 4.3 , on trace les fonctions de $\xi(0,0,t)$ pour tous les N_x ,ansique la solution exact . On trace les fonctions jusqu'à $t=3s$, parce-que d'après $t=3s$,

il y a une superposition . A cause de sans vibration avant $t=1s$ pour la solution exact de point $(0,0)$, on utilise deux façons pour programmer . Une façon , c'est fonction heaviside , une autre est changer t par $t-1$. , ça va dire que la solution va transposer à droite en 1 second .

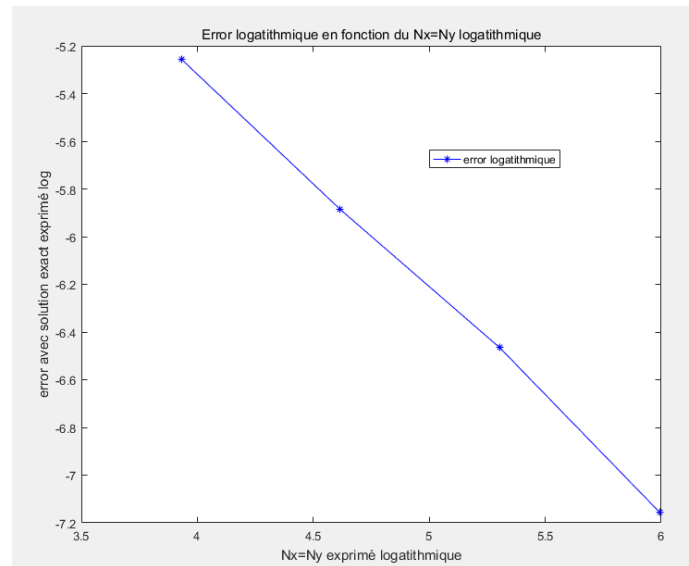


FIGURE 4.4 – Error en fonction du Nx logarithmique

Dans le figure 4.5 on trace error en fonction du Nx logarithmique . L'error est l'différence absolue maximale entre solution simulation et solution exact sur le point $(0,0)$ pendant 3 seconds .

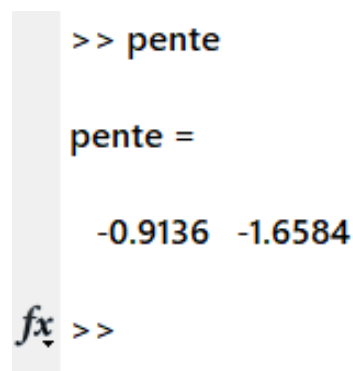


FIGURE 4.5 – pente

Dans la figure 4.5 , $Nx=[51,101,201,401]$. Sous matlab , on trouve la pente est prèsque -1 , il est bien satisfait théorique analytique en calculant l'error

troncature .

4.3 Précision temporelle

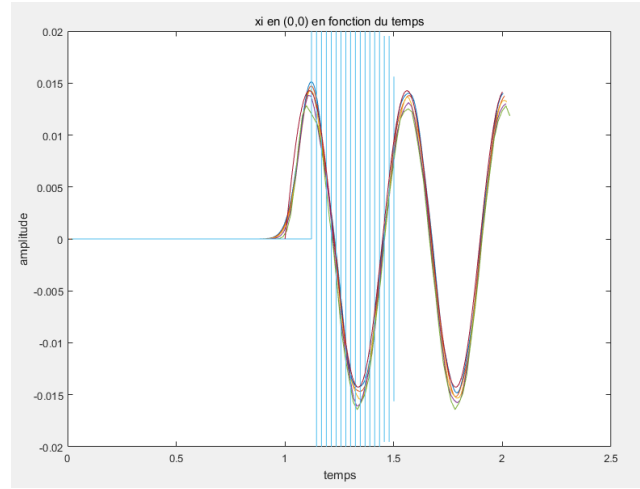


FIGURE 4.6 – La fonction de $\xi(0, 0, t)$ en fonction du CFL logarithmique

Dans la figure 4.6 , on trace les fonction des CFL , $CFL=[0.1,0.3,0.5,0.7,0.9,1.1]$, la ligne blue est sous la fonction $CFL=1.1$, il diverge avec les solutions simulations d'autres .

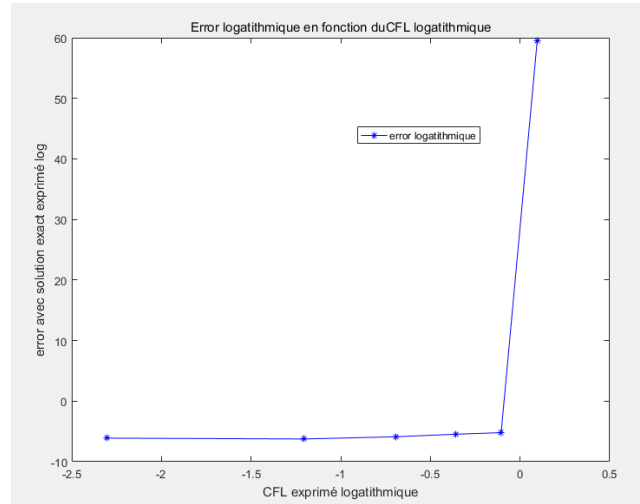


FIGURE 4.7 – L'error en fonction du CFL logarithmique

Dans la figure 4.7 , l'error logarithmique est convergente quand CFL sont $[0.1,0.3,0.5,0.7,0.9]$, d'autre part , quand CFL est supérieur que 1 , l'error est plus grande qu'avant , c'est bien satisfait que $CFL \leq 1$.

```
>> pente

pente =

    0.3386

fx >>
```

FIGURE 4.8 – pente

Dans la figure 4.8 , sous matlab , on trouve la pente est 0.34 pour l'error logarithmique en fonction CFL logarithmique . Dans l'analytique théorie , quand CFL augmente , dt augmente , error augmente , donc la pente est positive .

4.4 Nouvelle conditions à $x = -L$

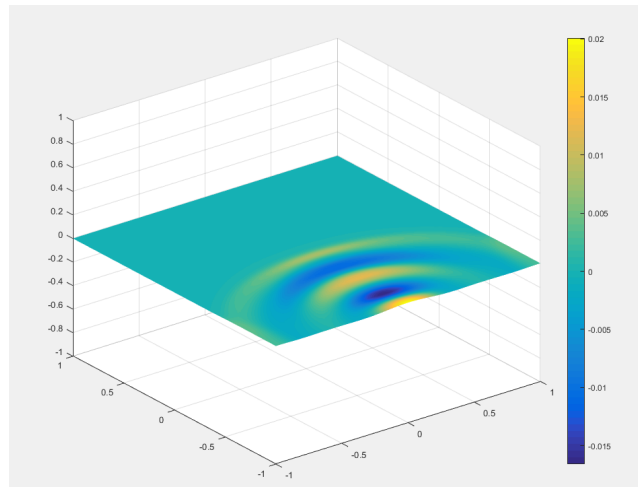


FIGURE 4.9 – A $t=1s$, snapshot de la surface libre

Dans la figure 4.9 , on trace la snapshot à $t=1s$, pour cette nouvelle conditions limites on ajoute $\frac{\partial \xi}{\partial y} \Big|_{-L, \frac{L}{10} < |y| < L} = 0$.Et on pour $|y| < \frac{L}{10}$, on utilise la même qu'en avant . On remarque l'on va propager vers autour de l'entrée .

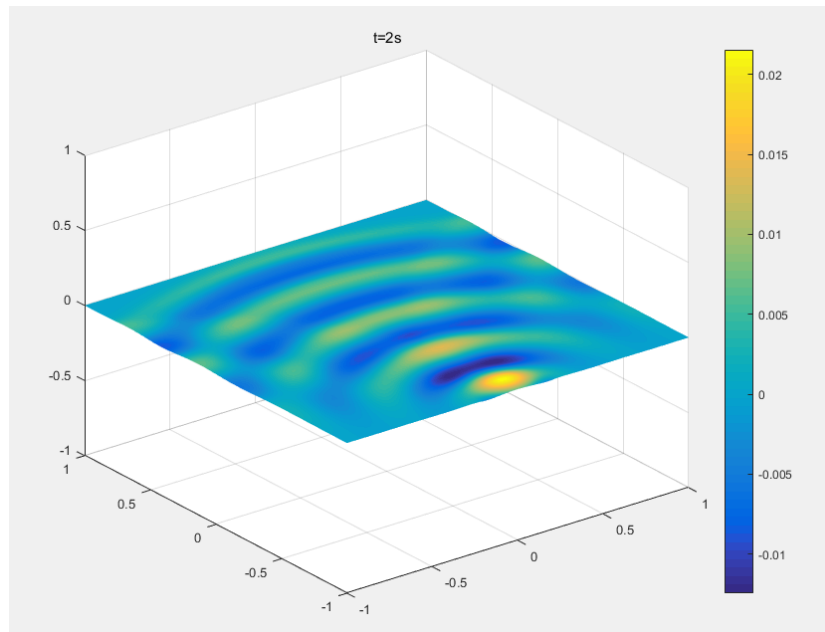


FIGURE 4.10 – A $t=2\text{s}$, snapshot de la surface libre

Dans la figure 4.10 , on trace la snapshot à l'instant $t=2\text{s}$, et on peut voir les arcs évidemment , on dit que si on a un'entrée ponctuel au milieu , on peut voir les cercles autour de la centre .

Chapitre 5

Conclusion

Dans cette séance de TP , on a fait une bonne etude d'équation des ondes en 2D .Au début , on modifie les conditions limites de Neumann à partir l'equation de masse et quantité de mouvement , ensuite on cherche la solution exact . ensuite on utilise matlab pour faire les simulations . On programmer les codes et on trouver les résultats .

On etude la stabilité et consistance , on retrouve dans le code , l'erreur spatial diminue quand N_x augement .Pour l'erreur temporelle , on lasse N_x constante , on introduit une serie de CFL , on on dit quand CFL est inférieur ou égale que 1 , la solution simulation converge la solution numérique .