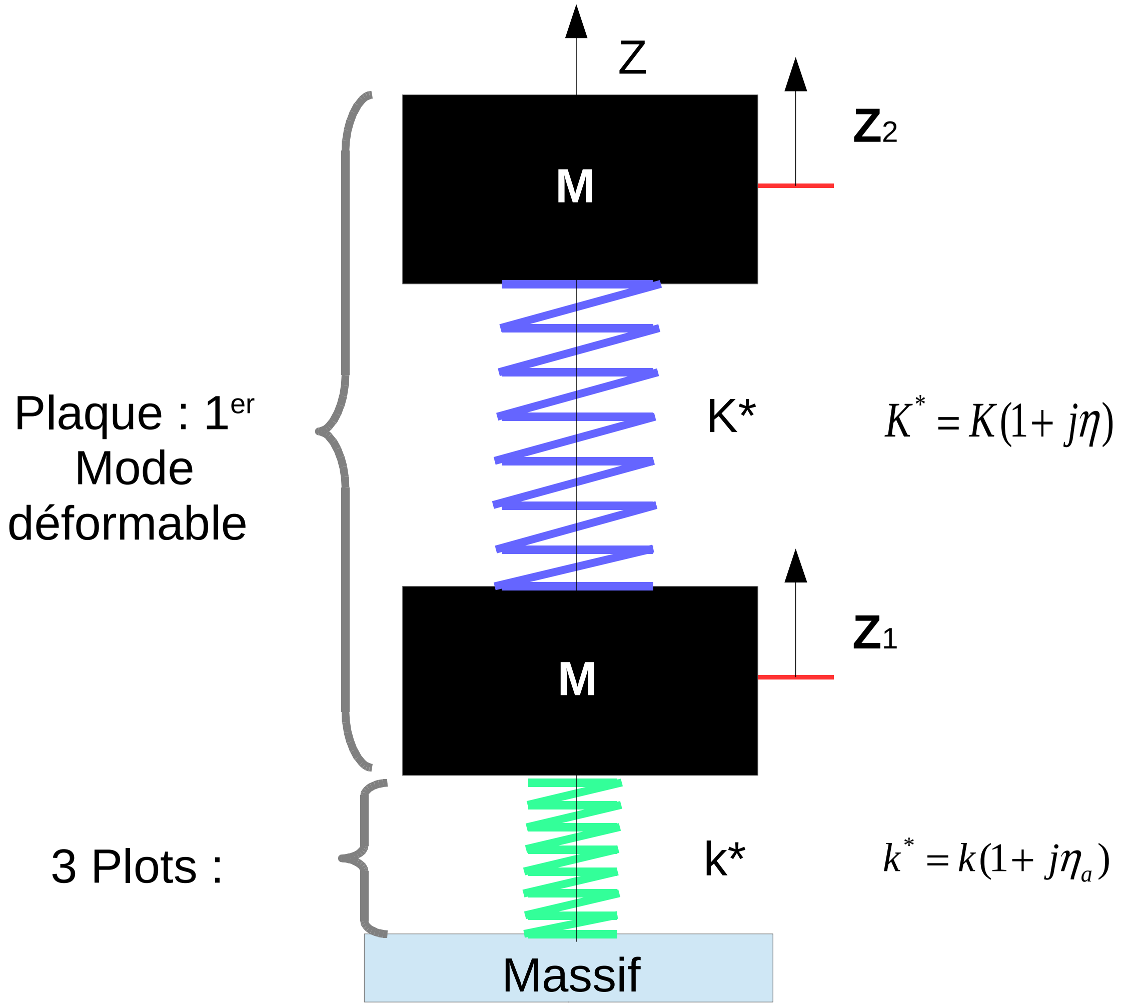
TP 2 : Importance des appuis élastiques sur le comportement Modal expérimental de la plaque (A FAIRE)

Modélisation par un système à 2DL :

Plaque = Système Masse (M) Ressort (K^*) Masse (M) donc libre de se mouvoir
Appuis élastiques = Ressort de raideur k^*
***= raideur complexe pour la prise en compte de l'amortissement structural**



Comment peut on estimer M K et k ? Faire les calculs approchés de ces paramètres

Equations vibratoires du système à 2DL en Vibrations Libres :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* + k^* & -K^* \\ -K^* & K^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Alain Blaise

Posons : $k = \alpha K$ $\eta = \beta \eta_a$ $\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$

$$\begin{bmatrix} K\left[(1+j\beta\eta_a)+\alpha(1+j\eta_a)\right]-\omega^2 M & -K(1+j\beta\eta_a) \\ -K(1+j\beta\eta_a) & K(1+j\beta\eta_a)-\omega^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matrice d'amortissement structural:

$$j\begin{bmatrix} \eta_{11} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{Bmatrix} = j\begin{bmatrix} \left[\beta\eta_a + \alpha\eta_a\right] & -\beta\eta_a \\ -\beta\eta_a & \beta\eta_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{Bmatrix}$$

Trouver les valeurs de :

$$\eta_a \quad \eta \quad \beta$$

Que pouvez vous en conclure ?

Schéma Modal du système à 2DL Conservatif associé :

$$\begin{bmatrix} K\left[(1+\alpha)\right]-\omega_i^2 M & -K \\ -K & K-\omega_i^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{10}=1 \\ z_{20i} \end{Bmatrix}_{\omega_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

tel que dét ( ) = 0 soit

$$0 = \omega_i^4 - \omega_i^2 \frac{K}{M}(2+\alpha) + \alpha\left(\frac{K}{M}\right)^2$$

Alain Blaise

$$\delta = \left(\frac{K}{M}\right)^2 \left(4+\alpha^2\right)$$

Pulsations de résonance :

$$\boxed{\omega_{1,2}^2 = \frac{K}{2M}\left[\left(2+\alpha\right) \pm \left(4+\alpha^2\right)^{0.5}\right]}$$

Vecteurs associés :

$$\left\langle K\left[(1+\alpha\right] - \omega_i^2 M \quad -K\right\rangle \left\{\begin{matrix} 1 \\ z_{20i} \end{matrix}\right\}_{\omega_i} = 0 \quad z_{20i} = 1+\alpha-\omega_i^2 M / K$$

$$\boxed{z_{20i} = \frac{\alpha}{2} \mp \left(1+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)^{0.5}}$$

Observons que $\alpha \ll 1$ **Calculer ce facteur . Que pouvez vous en conclure ?**

$$\left(1+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)^{0.5} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \approx 1$$

Pulsations de résonance et Vecteurs associés :

$$\boxed{\omega_{1,2}^2 \approx \frac{K}{M}\left[1 \pm 1 + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]} \qquad \boxed{z_{20i} \approx \mp 1 + \frac{\alpha}{2} \mp \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

Faire l'application Numérique . Que pouvez vous en conclure ?

Alain Blaise

Amortissements Modaux du système à 2DL :

Pour un mode i :

$$\eta_i = \langle 1 \quad z_{20i} \rangle_{\omega_i} \begin{bmatrix} \eta_{11} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{20i} \end{Bmatrix}_{\omega_i}$$

$$\eta_i = \eta_a \langle 1 \quad z_{20i} \rangle_{\omega_i} \begin{bmatrix} [\beta+\alpha] & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{20i} \end{Bmatrix}_{\omega_i}$$

$$\eta_i = \eta_a(\beta+\alpha+\beta z_{20i}(z_{20i}-2))$$

Pour un mode 1 :

$$z_{201} \approx 1+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \approx 1+\frac{\alpha}{2}$$

$$\eta_1 \approx \alpha\eta_a(1+\frac{\beta\alpha}{4})$$

Faire l'application Numérique . Que pouvez vous en conclure ?

Pour un mode 2 :

$$z_{202} \approx -1+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \approx -1+\frac{\alpha}{2}$$

$$\eta_2 \approx \beta\eta_a(4-2\alpha+\frac{\alpha}{\beta})$$

Faire l'application Numérique . Que pouvez vous en conclure ?

Alain Blaise

Tableau des fréquences de résonance (Leissa)

Frequency parameters $\lambda = \omega a^2\sqrt{\rho/D}$ for F-F-F-F plates ($\nu = 0{\cdot}3$)

Mode sequence	a/b 0·4	2/3	0.86	1·0	1.16	1·5	2·5
1†	13 3·4629 3·37%	22 8·9459 5·81%		22 13·489 5·26%		22 20·128 5·81%	31 21·643 3·37%
2	22 5·2881 7·40%	13 9·6015 3·56%		13 19·789 13·06%		31 21·603 3·56%	22 33·050 7·40%
3	14 9·6220 2·55%	23 20·735 4·37%	10.79 11.21	31 24·432 8·43%	14.52 16.8	32 46·654 4·37%	41 60·137 2·55%
4	23 11·437 5·58%	31 22·353 0·09%		32 35·024 4·20%		13 50·293 0·09%	32 71·484 5·58%
5	15 18·793 2·94%	14 25·867 5·96%		23 35·024 4·20%		41 58·201 5·96%	51 117·45 2·94%
6	24 19·100 3·41%	32 29·973 −1·67%		41 61·526 0·24%		23 67·494 −1·67%	42 119·38 3·41%