Equation des ondes en 2D

par
ZHANG Xunjie
pour le UE Méthodes numériques pour les EDP Mécanique M1

fait le 31 mai 2017

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problème physique

On considère des oscillations à la surface d'un liquide contenu dans un generateur des ondes . La surface libre du liquide est à $z = h(x, y, t)$, et paroi à $z = 0$; la frontière du réseroir est de forme carré , i.e. , à $x = \pm L, -L \leq y \leq L et y = \pm L, -L \leq x \leq L$ .On néglige les effects de viscosité et on suppose que le fluide est un liquide incompressible .

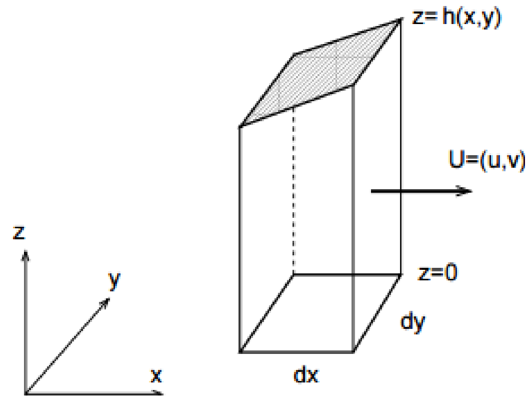


Figure 1.1 – Problem physique d'etude

On considère la perturbation de la surface libre $\xi(x, y, t) := h(x, y, t) - h_0$ soit faible , donc on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \Big(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \Big) \tag{1.1}$$

où c_0 est la célerité des ondes de surface . Les conditions initiales correspondent à la perturbation et vitesse

$$\xi(x, y, t = 0) = 0 \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t, t = 0) = 0 \tag{1.2}$$

1.2 Modifisations des conditions limites

Bilan de masse pour le cylindre de volume $hdxhy$ s'ecrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

Pour obtenir une condition sur ξ , on utilise la combinaison suivant $\vec{n}$ Sauf à $x = L$, la vitesse normale est $u \cdot n = \frac{Ag}{\omega}\sin(\omega t)$

Bilan de quandité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \rho h u}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \rho h v}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

On considère que le fluide est un liquide incompressible , et que la perturbation de la surface libre $\xi = h - h_0$ est faible .

On peut alors considèrerque la répartition de pression reste hydrostatique :

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g(h - z) \tag{1.6}$$

On note que : $h = h_0 = \xi, p = p_s + \rho g \xi$, les équations vient :

$$\frac{\partial \xi}{t} = h_0 \frac{\partial u}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

Après dérivations des trois équations , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g h_0 \Big(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \tag{1.8}$$

Donc , dans l'equation 1.7, on trouve

$$c_0 = \sqrt{g h_0}$$

On déduit la condition aux limites sur ξ dans l'équation 1.8

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\frac{1}{g}\frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} \tag{1.9}$$

Donc pour les frontières $x = L$ et $y = \pm L$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}\Big|_{y \pm L} = 0$$

PPour la frontière $x = -L$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x=-L} = -\frac{1}{g}\frac{\partial \vec{U} \cdot \vec{n}}{\partial t} = -A\cos(\omega t)$$

Chapitre 2

Solution analytique

2.1 Solution analytique en 1D

Pour 1D , on a l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

Dans l'équation 2.1 , On replace ξ par la forme $\xi = B\sin(k(x-x_0)-\omega t)$, $t < \frac{2L}{c_0}$ besion de montrer,

à gauche :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega B\cos(k(x-x_0)) - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 B\sin(k(x-x_0)) - \omega t)$$

à droite :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = kB\cos(k(x-x_0)) - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 B\sin(k(x-x_0)) - \omega t)$$

Droite=gauche ,on trouve :

$$k = \frac{\omega}{c_0}$$

Avec la condition limite $\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=-L} = -A\cos(\omega t)$, on trouve :

$$B = -\frac{A}{k} = -\frac{Ac_0}{\omega}$$

2.2 Solution pour t $\geq \frac{2L}{c_0}$

L'onde arrive la frontière $x = L$ à l'instant $t = \frac{2L}{c_0}$, après l'onde va propager vers la direction opposite avec la même vitesse opposite , donc , quand $t > \frac{2L}{c_0}$, il y aura une superposition de deux ondes avec même ω .

Chapitre 3

Méthodes numérique

3.1 Stabilité

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n} + h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = C_0^2 \frac{h_{i+1,j}^{n} - 2h_{i,j}^{n} + h_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + C_0^2 \frac{h_{i,j+1}^{n} - 2h_{i,j}^{n} + h_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{3.1}$$

$$h_{i,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n} + h_{i,j}^{n-1} = \frac{C_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}(h_{i+1,j}^{n} - 2h_{i,j}^{n} + h_{i-1,j}^{n}) + \frac{C_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}(h_{i,j+1}^{n} - 2h_{i,j}^{n} + h_{i,j-1}^{n}) \tag{3.2}$$

On pose :

$$C_{FL1} = \frac{C_0 \Delta t}{\Delta x}$$

et

$$C_{FL12} = \frac{C_0 \Delta t}{\Delta y}$$

On introduit la perturbation :

$$\varepsilon_{i,j}^{n} = \psi^n e^{I\omega_1 i \Delta x} e^{I\omega_2 j \Delta y}$$

Donc :

$$\psi^{n+1} - \psi^n + \psi^{n-1} = C_{FL1}^2(\psi^n e^{I\omega_1 i\Delta x} - 2\psi^n + \psi^n e^{-I\omega_1 i\Delta x} + C_{FL2}^2(\psi^n e^{I\omega_2 i\Delta y} - 2\psi^n + \psi^n e^{-I\omega_2 i\Delta y}) \tag{3.3}$$

Or $G = \frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} = \frac{\psi n}{\psi^{n-1}}$, on a alors :

$$G - 2 + \frac{1}{G} = 2C_{FL1}^2(\cos(\omega_1 \Delta x) - 1) + 2C_{FL2}^2(\cos(\omega_2 \Delta y) - 1)$$

$$G - 2 + \frac{1}{G} = -4C_{FL1}^2(\sin^2(\frac{\omega_1 \Delta x)}{2}) - 4C_{FL2}^2(\sin^2(\frac{\omega_2 \Delta y)}{2})$$

On pose : $y_1 = sin(\frac{\omega_1 \Delta x}{2})$, $y_2 = sin(\frac{\omega_2 \Delta y}{2})$

$$G^2 + (4C_{FL1}^2 y_1^2 + 4C_{FL2}^2 y_2^2 - 2)G + 1 = 0 \tag{3.4}$$

$$G^2 + 2\alpha G + 1 = 0 \tag{3.5}$$

Avec

$$\alpha = 2C_{FL1}^2 y_1^2 + 2C_{FL2}^2 y_2^2 - 1$$

Pour étudier la stabilité, il faut $\left|G\right| \leq 1$.

si $\Delta > 0$:

$$G_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

$$G_1 * G_2 = 1$$

$$\Longrightarrow \left|G_1\right| \geq 1 \quad ou \quad \left|G_2\right| \geq 1$$

. Donc, il est instable.

si $\Delta \leq 0$:

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4 \leq 0$$

$$\alpha^2 \leq 1$$

$$1 \leq \alpha \leq 1$$

On peut trouver que $C_{FL1}^2 + C_{FL2}^2 \leq 1$

$$C_{FL1}^2 + C_{FL2}^2 = \frac{C_0^2 \Delta t^2}{h^2} = C_{FL}^2 \leq 1$$

Alors :

$$C_{FL} \leq 1$$

3.2 Consistance

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^n + h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = C_0^2 \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + C_0^2 \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{3.6}$$

$$h_{i,j}^{n\pm1} = h_{i,j}^n \pm dt\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dt^2}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \pm \frac{dt^3}{6}\frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + \frac{dt^4}{24}\frac{\partial^4 h}{\partial t^4} \pm \bigcirc(dt^5) \tag{3.7}$$

$$h_{i\pm1,j}^n = h_{i,j}^n \pm dx\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dx^2}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \pm \frac{dx^3}{6}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{dx^4}{24}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \pm \bigcirc(dx^5) \tag{3.8}$$

$$h_{i,j\pm1}^n = h_{i,j}^n \pm dy\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{dy^2}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \pm \frac{dy^3}{6}\frac{\partial^3 h}{\partial y^3} + \frac{dy^4}{24}\frac{\partial^4 h}{\partial y^4} \pm \bigcirc(dy^5) \tag{3.9}$$

On peut remplacer l'équation 3.6 par les équations avants. Donc il est :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{dt^2}{12}\frac{\partial^4 h}{\partial t^4} + \bigcirc(dt^4) = C_0^2(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{dx^2}{12}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}) + \bigcirc(dx^4) + C_0^2(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{dy^2}{12}\frac{\partial^4 h}{\partial y^4}) + \bigcirc(dy^4)$$

On obtient donc l'erreur troncature :

$$ErrT = \frac{dt^2}{12}\frac{\partial^4 h}{\partial t^4} - C_0^2\frac{dx^2}{12}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - C_0^2\frac{dy^2}{12}\frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \bigcirc(dt^4, dx^4, dy^4) \tag{3.10}$$

Ce schéma est consistant.Il est conditionnellement stable et consistant.

3.3 Dispersion

On a :

$$\frac{\partial^4 h}{\partial t^4} = C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}) = C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}) + C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2})$$

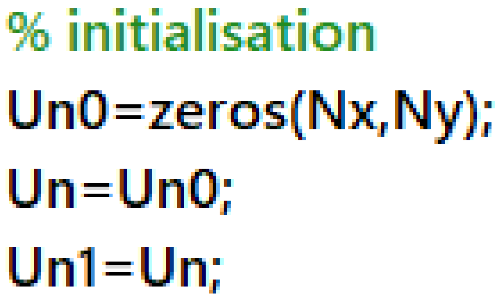
$$= C_0^4(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2}) + C_0^4(\frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2})$$

En remplaçant le $\frac{\partial^4 h}{\partial t^4}$ dans l'équation 4.9, on obtient :

$$ErrT = \frac{C_0^2 dx^2}{12}(C_{FL}^2 - 1) * \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{C_0^2 dy^2}{12}(C_{FL}^2 - 1) * \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \frac{dt^2 C_0^4}{6} \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2} + \bigcirc(dt^2, dx^2, dy^2)$$

On peut dire que l'erreur de troncature est principalement de la dispersion numérique.

3.4 Conditions initials sous Matlab



```
% initialisation
Un0=zeros(Nx,Ny);
Un=Un0;
Un1=Un;
```

FIGURE 3.1 – Conditions initials

Dans la figure 3.1 , $Un0 = zeros(Nx, Ny)$,$Un = Un0$ est bien correspondant à condition initial $\xi(x, y, t = 0) = 0$. Et $Un1 = Un$ est satisfait à la condition initail $\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, y, t = 0) = 0$

3.5 Programmer Matlab

Sur moodle , vous pouvez trouver les codes Matlab .

Chapitre 4

Etude numérique

4.1 Cas test

Au début on s'interes à t = 1s :

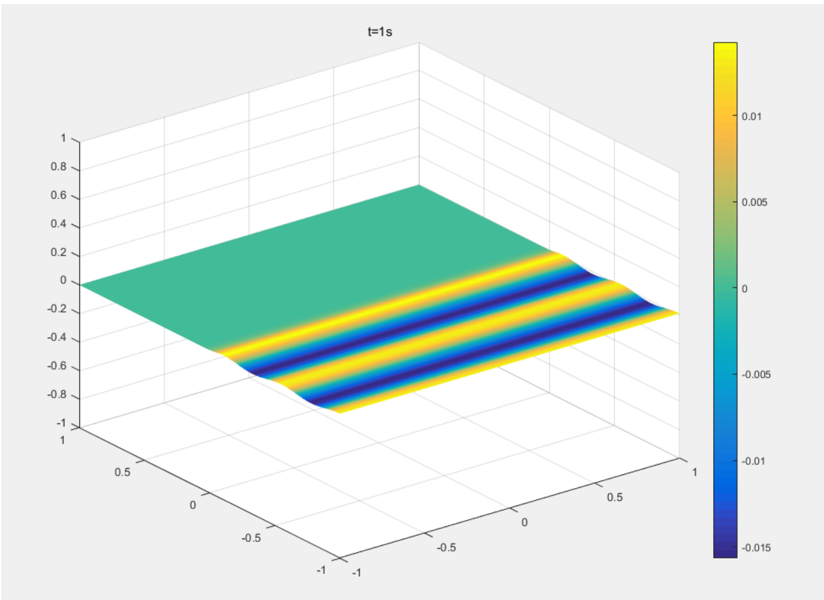


FIGURE 4.1 – A t=1s , snapshot de la surface libre

C'est la snapshot à l'instante t=1s . Dans le 4.1 on voir il y a pas de vibration , parce-que l'onde ne propage pas cette zone . donc il est une plant initiale . Le point intéressé (0,0) commence vibration après cette l'instante .

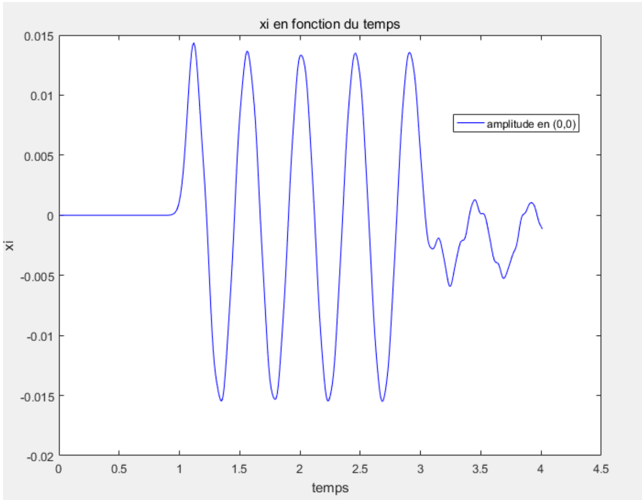


FIGURE 4.2 – La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du temps

Dans la figure 4.2 , on remarque qu'avant l'instante t=1s , il n'y a pas de vibration , c'est bien satisfait la figure 4.1 . A l'instante t=3s , l'onde revient à la position (0,0) , donc il aura une superposition , donc l'amplitude ou ξ va changer . Pour moi , $\omega = 14.0$, c'est une superposition diminuée.

4.2 Precision spatial

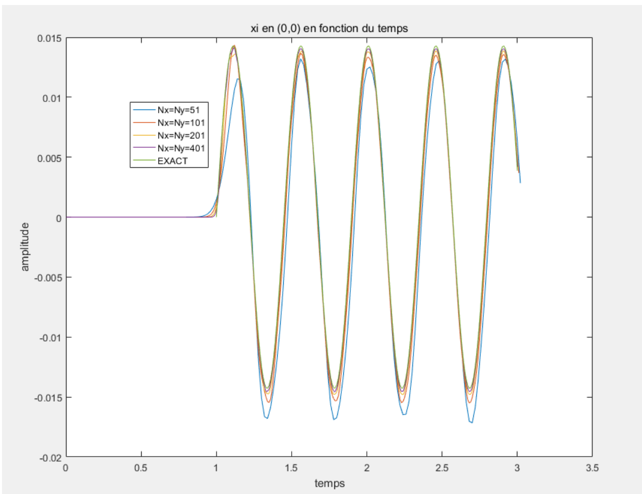


FIGURE 4.3 – La fonction de $\xi(0,0,t)$ en fonction du temps pour tous les Nx

Dans la figure 4.3 , on trace les fonctions de $\xi(0,0,t)$ pour tous les Nx ,ansique la solution exact . On trace les fonctions jusqu'à t=3s , parce-que d'après t=3s , il y a une superposition . A cause de sans vibration avant t=1s pour la solution exact de point (0,0) , on utilise deux façons pour pragrammer . Une façon , c'est fonction heaviside , une autre est changer t par t-1. , çava va dire que la solution va transpose à droite en 1 second .

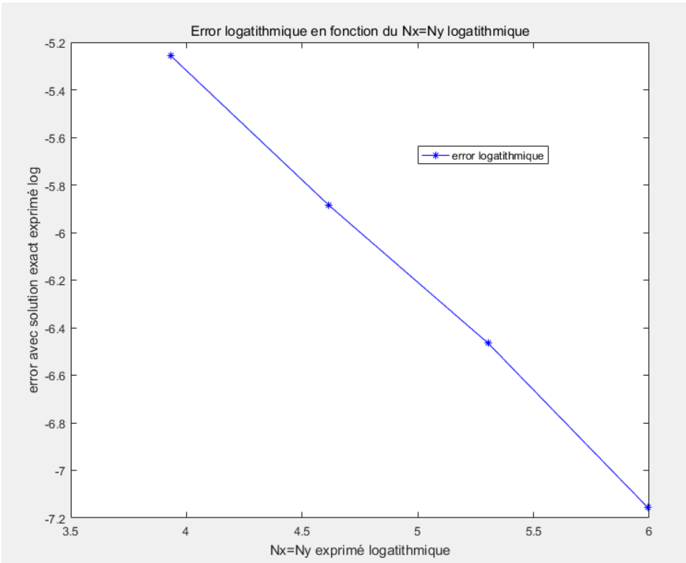


FIGURE 4.4 – Error en fonction du Nx logatithmique

.

Dans le figure 4.5 on trace error en fonction du Nx logatithmique . L'error est l'différence absolute maximale entre solution simulation et solution exact sur le point (0,0) pendant 3 seconds .

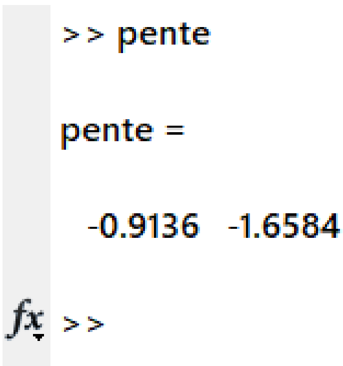


FIGURE 4.5 – pente

Dans la figure 4.5 , Nx=[51,101,201,401] .Sous matlab , on trouve la pente est prêsque -1 , il est bien satifait théorique analytique en calculant l'error troncature .

4.3 Précision temporelle

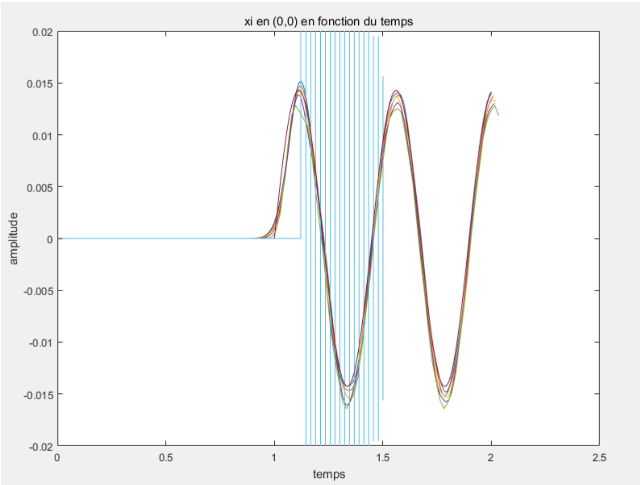


FIGURE 4.6 – La fonction de $\xi(0, 0, t)$ en fonction du CFL logatithmique

Dans la figure 4.6 , on trace les fonction des CFL , CFL=[0.1,0.3,0.5,0.7,0.9,1.1], la ligne blue est sous la fonction CFL=1.1 , il diverge avec les solutions simulations d'autres .

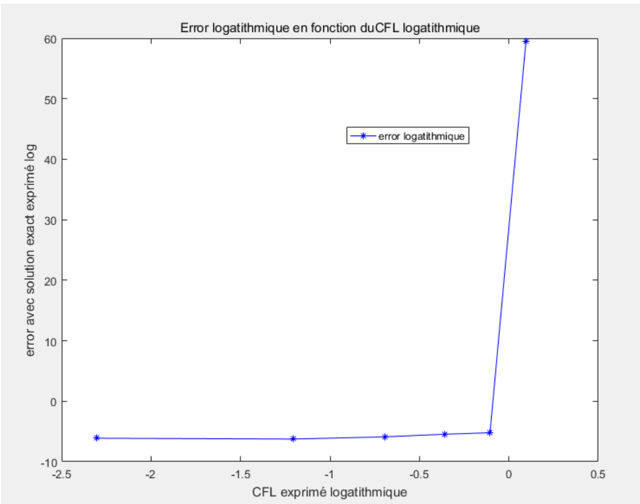


FIGURE 4.7 – L'error en fonction du CFL logatithmique

Dans la figure 4.7 , l'error logatithmique est convergente quand CFL sont [0.1,0.3,0.5,0.7,0.9] , d'autre part , quand CFL est supérieur que 1 , l'error est plus grande qu'avant , c'est bien satisfait que CFL≤ 1 .

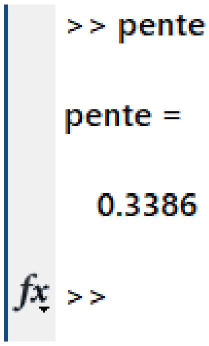


FIGURE 4.8 – pente

Dans la figure 4.8 , sous matlab , on trouve la pent est 0.34 pour l'error logatithmique en fonction CFL logatithmique . Dans l'analythique théorie , quand CFL augmente , dt augemente , error augement , donc la pente est positive .

4.4 Nouvelle conditions à $x = -L$

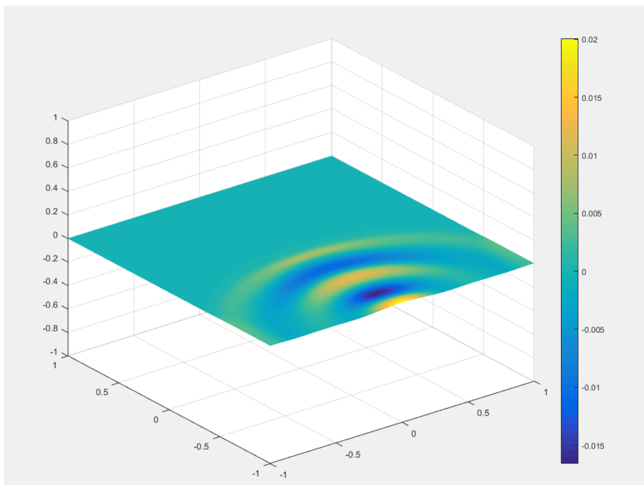


FIGURE 4.9 – A t=1s , snapshot de la surface libre

Dans la figure 4.9 , on trace la snapshot à t=1s , pour cette nouvelle conditions limtes on ajoute $\left.\frac{\partial \xi}{\partial y}\right|_{-L,\frac{L}{10}<|y|<L} = 0$ .Et on pour $|y| < \frac{L}{10}$, on utilise la même qu'en avant . On remarque l'on va propager vers autour de l'entrée .

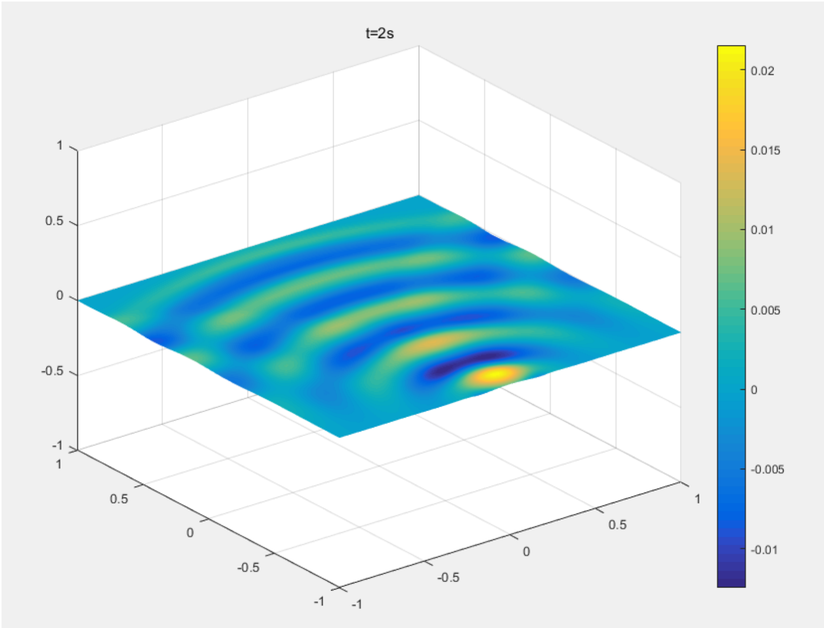


FIGURE 4.10 – A t=2s , snapshot de la surface libre

Dans la figure 4.10 , on trace la snapshot à l'instant t=2s , et on peut voir les arcs évidament , on dit que si on a un'entrée ponctuel au milieu , on peut voir les cercles autour de la centre .

Chapitre 5

Conclusion

Dans cette séance de TP , on a fait une bonne etude d'équation des ondes en 2D .Au début , on modifie les conditions limites de Neumann à partie l'quation de masse et quantité de mouvement , ensuite on cherche la solution exact . ensuite on utilise matlab pour faire les simulations . On programmer les codes et on trouver les résultats .

On etude la stabilité et consistance , on retrouve dans le code , l'erreur spatial diminue quand Nx augement .Pour l'erreur temporelle , on lasse Nx constante , on introduit une serie de CFL , on on dit quand CFL est inférieur ou égale que 1 , la solution similation converge la solution numérique .