— Vabiration Libres d'une Poutre en Flexion —

par
GAYE, Ibrahima
ZHANG, Xunjie
Compte-rendu du Ex.31 de l'UE Outil de Mathématique

fait le 29 octobre 2016

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction et Séparation des variables

1.1 Introduction

On ne traitera que ici que le probléme d'une poutre droite , de section uniforme , en flexion simple dqns un plan principal . Ce pendant , le plus souvent , la poutre n'est pas contrainte à rester dans ce plan , et il existe une possibilité de déplacement dans la direction perpendiculaire . Si les excitations ne sont pas contenues dans un plan principal , il faut étudier les virations de flexion , dans les 2 plans principaux définis chacun par l'axe de la poutre et l'une des directions principales de la section .

1.2 Séparation des variables

1.2.1 Équation d'Équilibre

Pour une poutre droite de section constante en flexion , et considérons un effort extérieur t_{ext} nul , on a l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial v^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \tag{1.1}$$

Posons : $v(x,t)$=$\phi(x)q(t)$ et reportons cette expression dans l'équation du mouvement :

$$\phi\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}q \tag{1.2}$$

1.2.2 Séparations

Séparons les termes qui dépendent de t et de x :

$$\frac{1}{q}\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}\frac{1}{\phi} \tag{1.3}$$

1.3 Solution des fonctions

Les 2 membres de cette équation sont indépendants l'un de x , l'autre de t ; ils sont donc constants . Pour que la solution$q(t)$ reste bornée quand le temps tend vers l'infini , cette valeur constante doit être négative .

Trouver $q(t)$ et $\phi(x)$ quand $-\omega^2$ est constant :

$$\frac{1}{q}\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{El}{\rho S}\frac{d^4\phi}{dx^4}\frac{1}{\phi} = -\omega^2 \tag{1.4}$$

1.3.1 équation différentielles ordinaires

On en tire 2 équations différentielles ordinaires , l'une en x , l'autre en t , que l'on résout séparément :

$$\begin{cases} \frac{d^4\phi}{dx^4} - \omega^4\frac{\rho S}{EI}\phi &= 0 \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q &= 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.3.2 recherche la solution

On recherche la solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante : $\phi(x) = ae^{sx}$, d'où léquation caractéristique , de degré 4 en S :

$$s^4 - \omega^4\frac{\rho S}{EI} = 0 \tag{1.6}$$

qui a solutions :

$$s = \pm\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2}\ ,\ s = \pm i\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \tag{1.7}$$

que l'on peut aussi écrire en fonction d'unparamètre γ sans dimension :

$$s = \pm\frac{\gamma}{L}\ ,\ s = \pm i\frac{\gamma}{L}\ , \gamma = L\sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}\omega^2} \tag{1.8}$$

On en déduit l'expression de la forme modale :

$$\phi(x) = ae^{\gamma\frac{x}{L}} + be^{-\gamma\frac{x}{L}} + ce^{i\gamma\frac{x}{L}} + de^{-i\gamma\frac{x}{L}} \tag{1.9}$$

ou encore :

$$\phi(x) = A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L}) \tag{1.10}$$

On recherche l'autre solution de l'équation sous la forme harmitienne suivante : $q(t) = ae^{bx}$, d'où léquation caractéristique , de degré 2 en t :

$$b^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.11}$$

qui a 2 solutions :

$$b = \pm i\omega\ ,\ \omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{1.12}$$

Donc on en déduit l'expression de la forme modale :

$$q(t) = \hat{e}e^{i\omega t} + \hat{f}e^{-i\omega t} \tag{1.13}$$

Ou encore :

$$q(t) = E\sin\omega t + F\cos\omega t \ , \ \omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{1.14}$$

1.4 Solution finalement

On obtient donc finalement :

$$v(x,t) = \phi(x)q(t) \tag{1.15}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi(x) & = & A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L}) \\ q(t) & = & E\sin\omega t + F\cos\omega t \\ \omega & = & \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \end{array}\right. \tag{1.16}$$

— $\phi(x)$ définit la form de la poutre pendant sa vibration . Elle contient les 5 constantes A, B, C et $\gamma(ou\ \omega)$, qui sont fixées par les conditions aux limites .
— $q(t)$ définit le mouvement de la poutre . Elle contient , outre la constante ω déjà évoquée , les 2 constantes E et F , qui sont fixées par les conditions initiales .

Chapitre 2

Résolution dans le cas de la poutre encastrée-appuie

2.1 conditons limites

Il existe 2 conditions aux limites usuelles pour une poutre en flexion :

2.1.1 extrémité en appui simple à l'abscisse x=L

La flèche esy nulle en tout instant , ainsi que le moment fléchissant :

$$\forall t \left\{ \begin{array}{rcl} v(L,t) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L,t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(L) & = & A\sinh\gamma + B\cosh\gamma + C\sin\gamma + D\cos\gamma = 0 \\ \frac{d^2\phi}{dx^2}(L) & = & \frac{\gamma^2}{L^2} A\sinh\gamma + B\frac{\gamma^2}{L^2}\cosh\gamma - C\frac{\gamma^2}{L^2}\sin\gamma - D\frac{\gamma^2}{L^2}\cos\gamma = 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Et on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A\sinh\gamma + B\cosh\gamma & = & 0 \\ C\sin\gamma + D\cos\gamma & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

2.1.2 Encastrement à l'abscisse x=0

La flèche esy nulle en tout instant , ainsi que la pent de la poutre :

$$\forall t \left\{ \begin{array}{rcl} v(0,t) & = & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

d'où , on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(0) & = & B + D = 0 \\ \frac{d\phi}{dx}(0) & = & A\frac{\gamma}{L} + C\frac{\gamma}{L} = 0 \end{array} \right. \tag{2.5}$$

On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+C &=& 0 \\ B+D &=& 0 \end{array}\right. \tag{2.6}$$

2.1.3 Résultat par les conditions limites

On cherche solution pour les 4 équations :

$$\left\{\begin{array}{c} A\sinh\gamma + B\cosh\gamma = 0 \\ C\sin\gamma + D\cos\gamma = 0 \\ A+C=0 \\ B+D=0 \end{array}\right. \tag{2.7}$$

On trouve simplement :

$$\left\{\begin{array}{c} \tanh\gamma - \tan\gamma = 0 \\ B = -A\tanh\gamma = -A\tan\gamma \end{array}\right. \tag{2.8}$$

2.2 Solution analyse

On trouve la solution complète $v(x,t) = \phi(x)q(t)$:

$$v(x,t) = \Big(A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) + B\cosh(\gamma\frac{x}{L}) + C\sin(\gamma\frac{x}{L}) + D\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big)\Big(E\sin(\omega t) + F\cos(\omega t)\Big) \tag{2.9}$$

$$= \Big(A\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - A\tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - A\sin(\gamma\frac{x}{L}) + A\tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big)\Big(E\sin(\omega t) + F\cos(\omega t)\Big) \tag{2.10}$$

$$= AE\sin(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{2.11}$$

$$+ AF\cos(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{2.12}$$

$$\omega = \frac{\gamma^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.13}$$

2.3 Infinité de solutions

On écrit une programme pour trouver les r valeurs , ce que on noté γ_r , et un tracé graphique simple permet d'apprecher les solutions . En effect , l'équation peut s'écrire :

$$\tanh\gamma = \tan\gamma \tag{2.14}$$

Les solutions sont données par les intersections des courbes $\tanh\gamma$ et $\tan\gamma$:

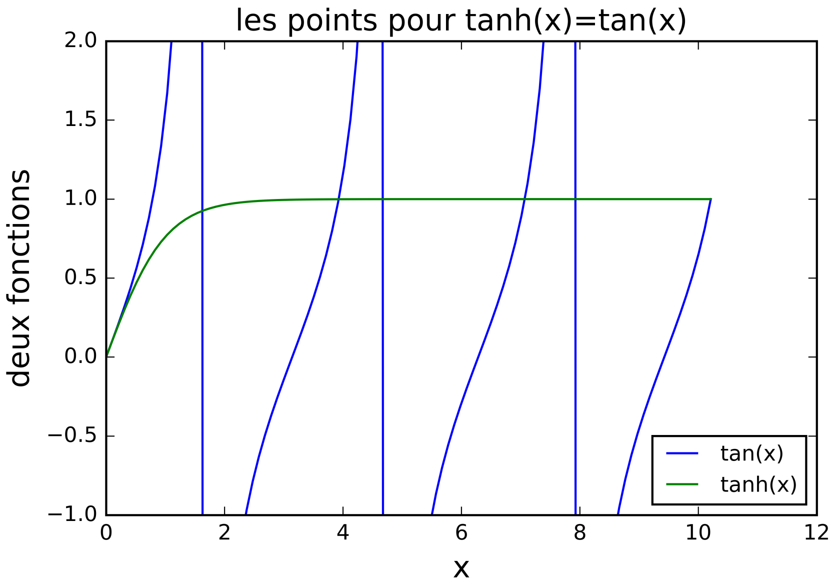

FIGURE 2.1 – infinité points

On constate qu'il esixste une infinité de solution , voisines de $\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, etc.

Les valeurs précises peuvent être recherchées numériquement au voisinage de ces valeurs , au moyen d'un programme Matlab très bref :

for γ=1 :4, fzero(@(gamma) tan(gamma)-tanh(gamma) , (4*r*pi-1)/5

On obtient :

$$\gamma_1 = 3.927 \tag{2.15}$$
$$\gamma_2 = 7.069 \tag{2.16}$$
$$\gamma_3 = 10.210 \tag{2.17}$$
$$\gamma_4 = 13.351 \tag{2.18}$$
$$\gamma_5 = 16.493 \tag{2.19}$$
$$\gamma_6 = 19.634 \tag{2.20}$$
$$\gamma_7 = 22.776 \tag{2.21}$$
$$\gamma_8 = 25.918 \tag{2.22}$$
$$\gamma_9 = 29.059 \tag{2.23}$$
$$\gamma_{10} = 32.201 \tag{2.24}$$
$$...... \tag{2.25}$$
$$\gamma_r = (4 * n * pi - 1)/5 \tag{2.26}$$

A chaque solution γ_r corespond une valeur ω_r de la pulsation :

$$\omega_r = \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.27}$$

2.4 Solution générale

Finalement , la solution générale est :

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)(E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \tag{2.28}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi_r(x) & = & A\Big(\sinh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \tanh \gamma_r \cosh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_r \frac{x}{L})} + \tanh \gamma_r \cos{(\gamma_r \frac{x}{L})} \Big) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ \tanh \gamma_r & = & \tan \gamma_r \\ r & = & 1, 2, 3, 4...... \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Chapitre 3

Analyse et Résultat

Dans ce chapitre on étude la solution complète avec les conditions initiales .

3.1 Premier condition

condition initiale $v(x,0) = v_0$

3.1.1 serie de F_r

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)(E_r \sin \omega t + F_r \cos \omega t) \tag{3.1}$$

$$v(x,0) = AF_r\Big(\sinh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_r \cosh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_r \cos(\gamma_r \frac{x}{L})\Big) \tag{3.2}$$

$$v(x,0) = v_0 \tag{3.3}$$

il reste donc on cherche la serie de F_r dans la équation sommation suivante :

$$\sum_{r=1}^{\infty} AF_r\Big(\sinh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_r \cosh(\gamma_r \frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_r \cos(\gamma_r \frac{x}{L})\Big) = v_0 \tag{3.4}$$

3.1.2 Transformé de Fourier

On fait évolution de la fonction au-dessus , à gauche et à droite , on fait intergarale suivante en même temps :

$$\int_0^L \Big(\sinh(\gamma_k \frac{x}{L}) - \tanh \gamma_k \cosh(\gamma_k \frac{x}{L}) - \sin(\gamma_k \frac{x}{L}) + \tanh \gamma_k \cos(\gamma_k \frac{x}{L})\Big)\,\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

k est une constante.

et on obtient :

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^L AF_r\Big(\sinh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_k} \cosh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_k \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_k} \cos{(\gamma_k \frac{x}{L})}\Big) \tag{3.6}$$

$$\Big(\sinh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_r} \cosh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_r \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_r} \cos{(\gamma_r \frac{x}{L})}\Big) \mathrm{d}x \tag{3.7}$$

$$= \int_0^L v_0\Big(\sinh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_k} \cosh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_k \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_k} \cos{(\gamma_k \frac{x}{L})}\Big)\, \mathrm{d}x \tag{3.8}$$

On étude le fonction au dessus , on trouve si r est différent que k :

$$\int_0^L \Big(\sinh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_k} \cosh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_k \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_k} \cos{(\gamma_k \frac{x}{L})}\Big) \tag{3.9}$$

$$\Big(\sinh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_r} \cosh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_r \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_r} \cos{(\gamma_r \frac{x}{L})}\Big) \mathrm{d}x = 0 \tag{3.10}$$

si $r = k$:

$$\int_0^L \Big(\sinh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_k} \cosh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_k \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_k} \cos{(\gamma_k \frac{x}{L})}\Big) \tag{3.11}$$

$$\Big(\sinh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_r} \cosh{(\gamma_r \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_r \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_r} \cos{(\gamma_r \frac{x}{L})}\Big) \mathrm{d}x = L \tag{3.12}$$

donc à gauche de signe égale , on a : ALF_k
et a droite de signe égale , on a :

$$\int_0^L v_0\Big(\sinh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \tanh{\gamma_k} \cosh{(\gamma_k \frac{x}{L})} - \sin{(\gamma_k \frac{x}{L})} + \tanh{\gamma_k} \cos{(\gamma_k \frac{x}{L})}\Big) \mathrm{d}x \tag{3.13}$$

$$= \frac{Lv_0 \Big(\cos(\gamma_k) + \cosh(\gamma_k) + \tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k) - \sinh(\gamma_k)) - 2\Big)}{\gamma_k} \tag{3.14}$$

et finalement on trouve F_k :

$$F_k = \frac{v_0}{A\,\gamma_k} \Big(\cos(\gamma_k) + \cosh(\gamma_k) + \tanh(\gamma_k)(\sin(\gamma_k) - \sinh(\gamma_k)) - 2\Big) \tag{3.15}$$

k et r sont constantes 1,2 ,3......

$$F_r = \frac{v_0}{A\,\gamma_r} \Big(\cos(\gamma_r) + \cosh(\gamma_r) + \tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r) - \sinh(\gamma_r)) - 2\Big) \tag{3.16}$$

3.2 Deuxième condition

dans le deuxième condition on a $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0$

3.2.1 Derivée partiel d'équation

On fait la dérivée partielle de $v(x,t)$ sur t

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = AEw\cos(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{3.17}$$

$$- AFw\sin(\omega t)\Big(\sinh(\gamma\frac{x}{L}) - \tanh\gamma\cosh(\gamma\frac{x}{L}) - \sin(\gamma\frac{x}{L}) + \tanh\gamma\cos(\gamma\frac{x}{L})\Big) \tag{3.18}$$

3.2.2 Nulle de derivation

On a toujour l'équation suivante :

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = AE_r\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r\frac{x}{L}) + \tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big) = 0 \tag{3.19}$$

Donc evidment , $E_r = 0$ pour tous les r .

3.3 Solution complète

Avec les conditions initiales on arrive :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x,t) & = & \sum_{r=1}^{\infty} AF_r\cos(\omega_r t)\Big(\sinh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \tanh\gamma_r\cosh(\gamma_r\frac{x}{L}) - \sin(\gamma_r\frac{x}{L}) + \tanh\gamma_r\cos(\gamma_r\frac{x}{L})\Big) \\ AF_r & = & \frac{v_0}{\gamma_r}\Big(\cos(\gamma_r) + \cosh(\gamma_r) + \tanh(\gamma_r)(\sin(\gamma_r) - \sinh(\gamma_r)) - 2\Big) \\ \omega_r & = & \frac{\gamma_r^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ E_r & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.20}$$

Chapitre 4

Prénsatations Graphiques

On untilise Jupyter Nootbook pour prensenter les graphiques : pour toutes les valeurs en bosoin , on note 1 ,

$$E = 1 \tag{4.1}$$
$$L = 1 \tag{4.2}$$
$$I = 1 \tag{4.3}$$
$$rho = 1 \tag{4.4}$$
$$S = 1 \tag{4.5}$$

4.1 Graphiques temps fixé

4.1.1 Mode 1 ($\gamma = \gamma_1$)

$\gamma_1 = 3.927$:

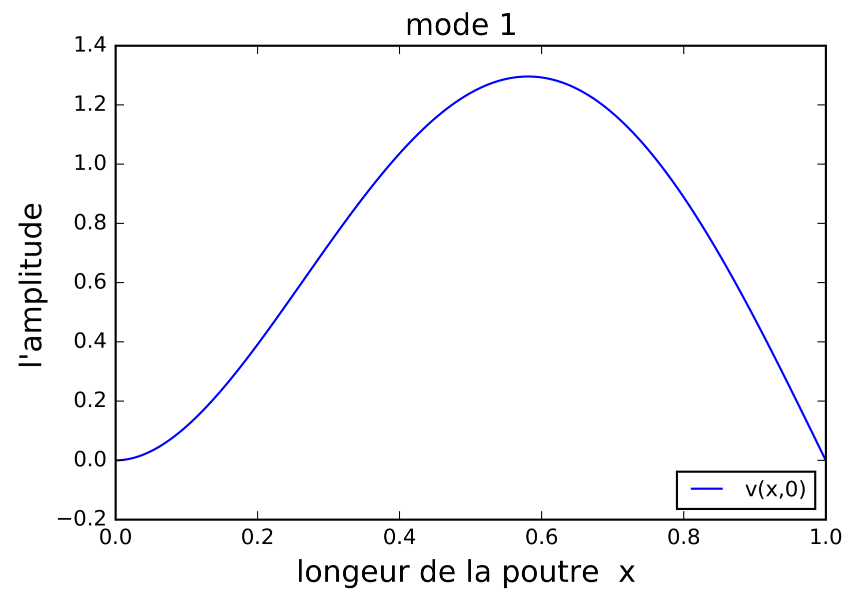

FIGURE 4.1 – t=0 mode 1

4.1.2 Mode 2 ($\gamma = \gamma_2$)

$\gamma_2 = 7.069$:

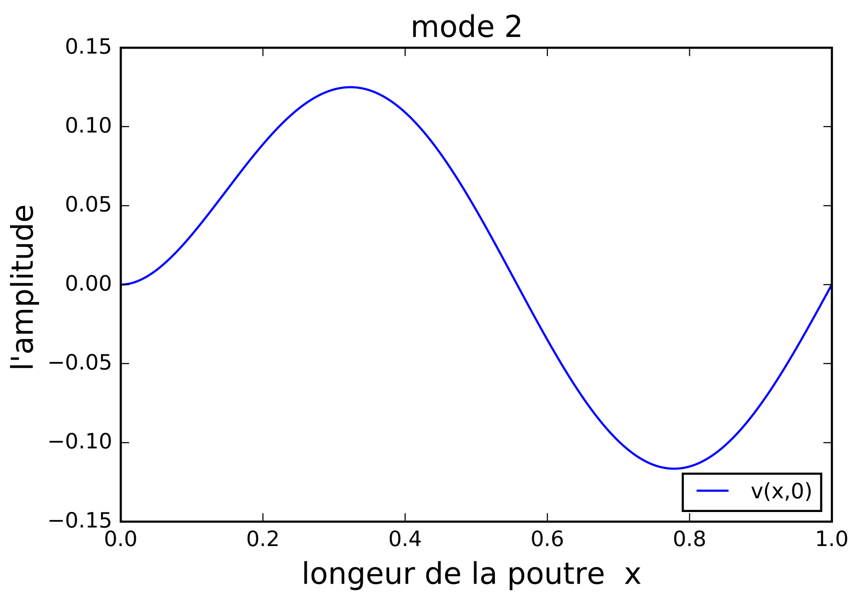

FIGURE 4.2 – t=0 mode 2

4.1.3 V(x,0) total pour γ_1 et γ_2

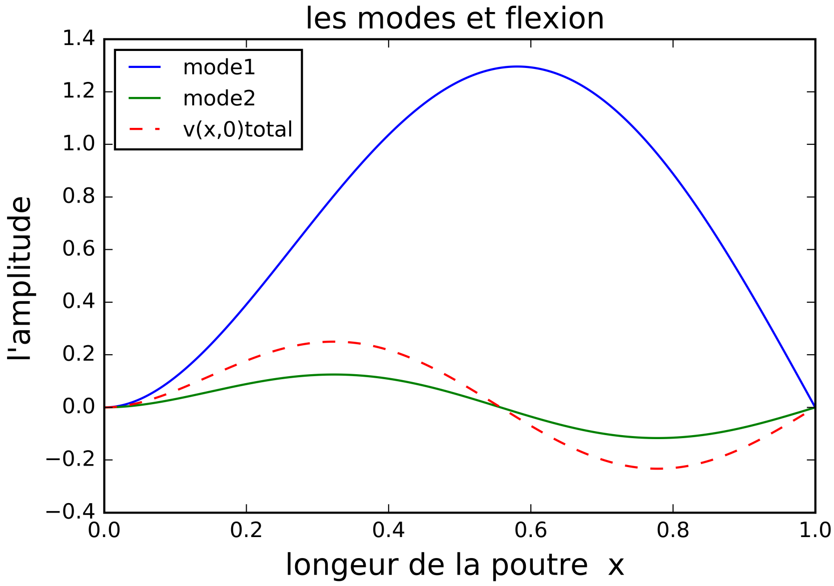

FIGURE 4.3 – 2 modes et vibrations

4.1.4 Mode 5 ($\gamma = \gamma_5$)

$\gamma_5 = 16.493$:

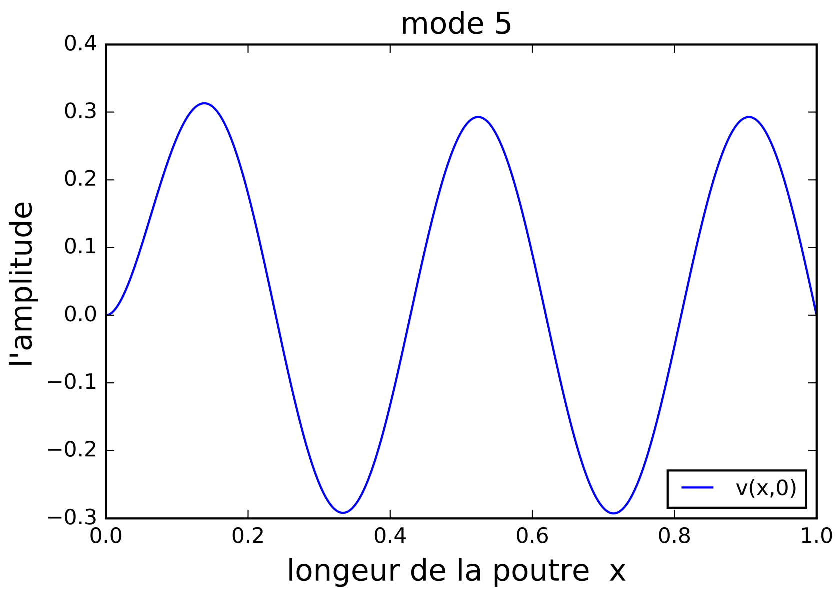

FIGURE 4.4 – t=0 mode 5

4.1.5 V(x,0) total pour γ_1,γ_2,γ_3,γ_4,γ_5

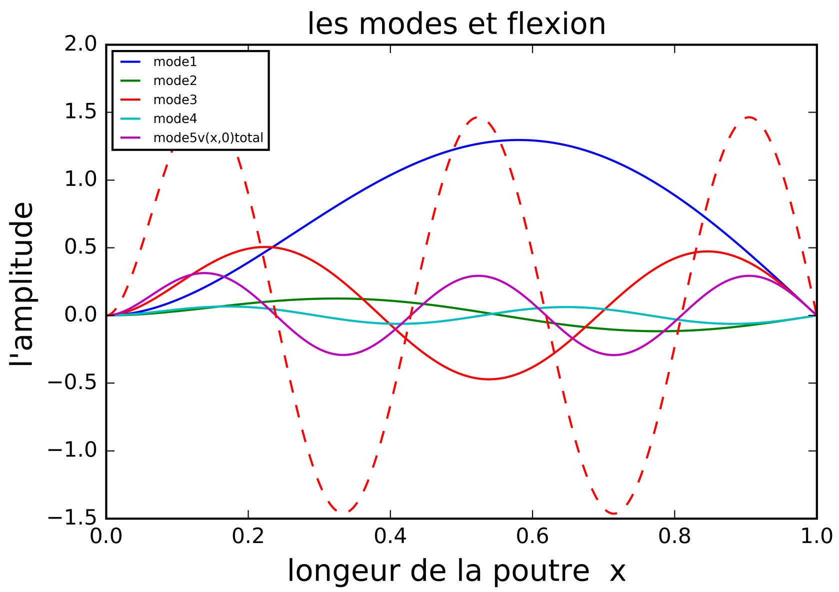

FIGURE 4.5 – 5 modes et vibrations

4.2 Graphiques position fixé

On choisi pa position milieu $x = 0.5$ pour présenter :

4.2.1 Mode1 du temps

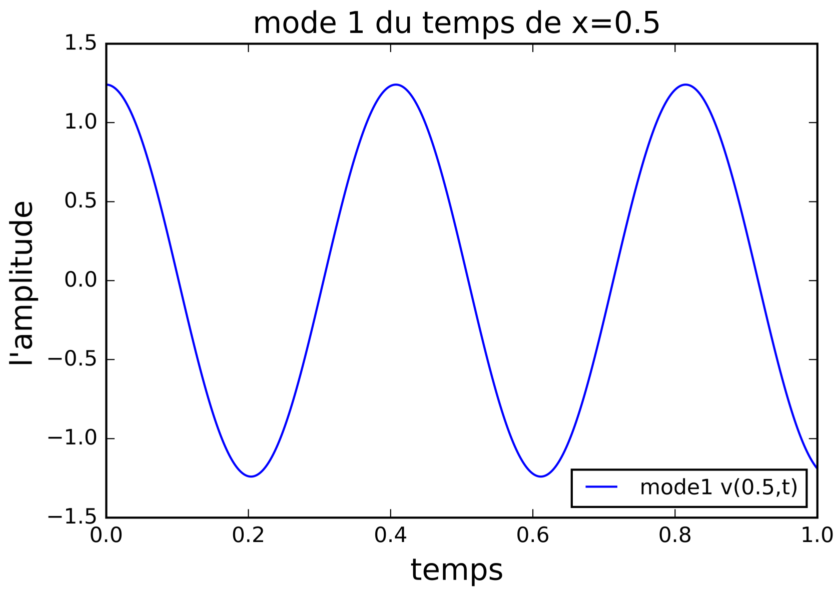

FIGURE 4.6 – mode1 du temps

4.2.2 Mode2 du temps

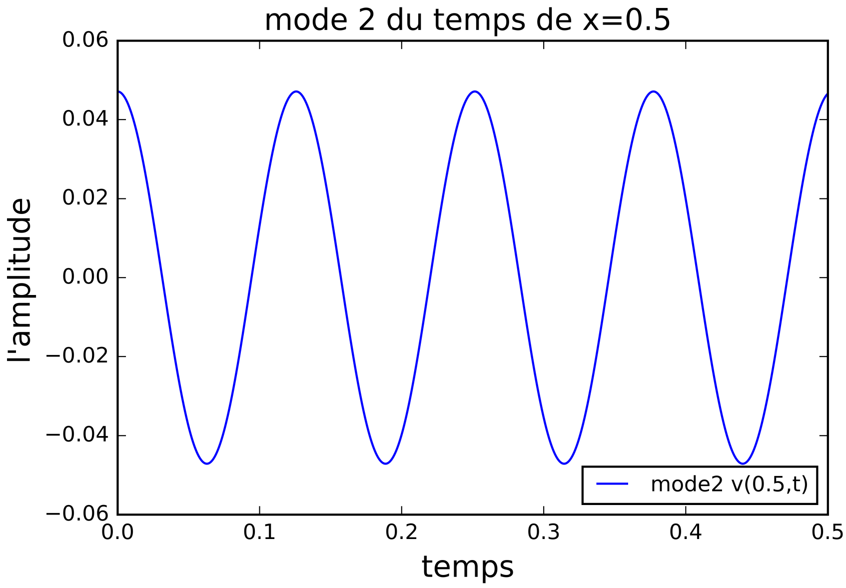

FIGURE 4.7 – mode2 du temps

4.2.3 Viration2 total du temps

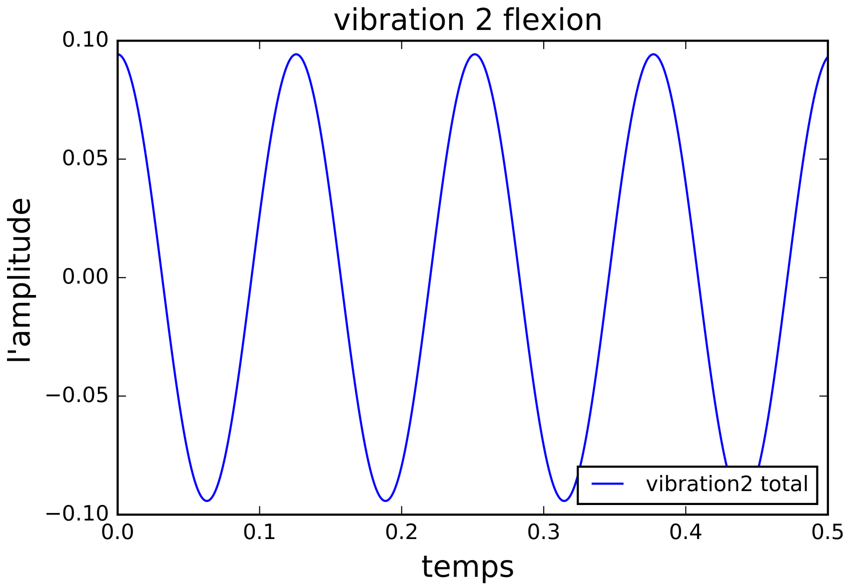

FIGURE 4.8 – vibration2 du temps

4.2.4 Viration5 total du temps

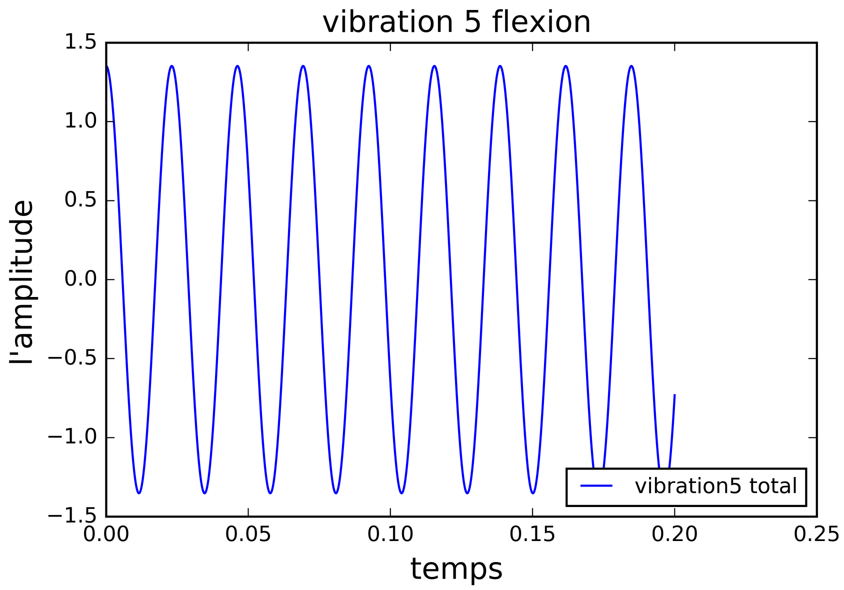

Figure 4.9 – vibration5 du temps

Chapitre 5

Conclution

Dans ce

Annexe A

Code Python

A.1 Listes des fonctions

```
## trouver les valeurs de gamma
x=np.linspace(0,13*np.pi/4,num=100)
plt.ylim(-1,2)
plt.plot(x,np.tan(x))
plt.plot(x,np.tanh(x))
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel("deux fonctions", fontsize=14)
plt.title("les points pour tanh(x)=tan(x)", fontsize=14)
plt.legend(['tan(x)','tanh(x)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ figuretanh.png',dpi=800)



# definir r_k , k= 1, 2 ,3, 4, 5, 6 ,....
def r_k(n):
    A=np.linspace(1,n,n)
    for i in range(1,n+1):
        A[i-1]=np.pi*(4*i+1)/4
    return A
    while i<N:
        S=section(L,N,i,S0,SL)
        A[i,i]=A[i,i]+(E*S)/h
        A[i,i+1]=-(E*S)/h
        A[i+1,i]=-(E*S)/h
        A[i+1,i+1]=(E*S)/h
        i=i+1
    return A


# def phi_k pla variation en fonction de x
def phi_k(r,L):
```

```
    y=np.sinh(r*x/L)-np.tanh(r)*np.cosh(r*x/L)-np.sin(r*x/L)+np.tanh(r)
        *np.cos(r*x/L)
    return y


#  somme de  phi(x) sans l'implitude
def somme_phi_k(n,L):
    y=0
    for i in r_k(n):
        y=y+phi_k(i,L)
        i=i+1
    return y


# definir v_k
def V_k(n,v0,L):
    A=np.linspace(0,n-1,n)
    i=0
    for r in r_k(n):
        A[i]=(np.cos(r)+np.cosh(r)+np.tanh(r)*(np.sin(r)-np.sinh(r))-2)
            /r
        i=i+1
    return A



# definie omega
def omega_k(n,L,E,I,rho,S):
    A=np.linspace(0,n-1,n)
    i=0
    for r in r_k(n):
        A[i]=(r*r)/(L*L)*np.sqrt(E*I/(rho*S))
        i=i+1
    return A


#  definir les modes
def mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S):
    i=0
    for r in r_k(n):
        y=V_k(n,v0,L)[i]*phi_k(r,L)*np.cos(omega_k(n,L,E,I,rho,S)[i]*t)
        i=i+1
    return y



#defnir u_k sans somme
def u_k(n,t,v0,L,E,I,rho,S):
    i=0
    for r in r_k(n):
```

```
        y=V_k(n,v0,L)[i]*phi_k(r,L)*np.cos(omega_k(n,L,E,I,rho,S)[i]*t)
        i=i+1
    return y


#definir vibration total
def v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S):
    y=0
    for i in range(1,n+1):
        y=y+u_k(n,t,v0,L,E,I,rho,S)
        i=i+1
    return y

def intergral f(r)*f(k)
def function(x):
    r=3.927
    k=7.069
    return  (np.sinh(r*x)-np.tanh(r)*np.cosh(r*x)-np.sin(r*x)+np.tanh(r
        )*np.cos(r*x))*(np.sinh(k*x)-np.tanh(k)*np.cosh(k*x)-np.sin(k*x
        )+np.tanh(k)*np.cos(k*x))
quad(function,0,1)
```

A.2 Les graphiques

A.2.1 tan(gamma)=tan(gamma)

```
x=np.linspace(0,13*np.pi/4,num=100)
plt.ylim(-1,2)
plt.plot(x,np.tan(x))
plt.plot(x,np.tanh(x))
plt.xlabel('x', fontsize=14)
plt.ylabel("deux fonctions", fontsize=14)
plt.title("les points pour tanh(x)=tan(x)", fontsize=14)
plt.legend(['tan(x)','tanh(x)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ figuretanh.png',dpi=800)
```

A.2.2 Mode 1

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=1
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
```

```
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('longeur de la poutre  x ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1  ", fontsize=14)
plt.legend(['v(x,0)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode1.png',dpi=800)
```

A.2.3 Mode 2

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=2
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode12(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode1t.png',dpi=800)
```

A.2.4 Mode 5

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=5
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 1 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode12(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode1t.png',dpi=800)
```

A.2.5 5 modes total

```
x=np.linspace(0,1,num=1000)
n=5
t=0
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(x,v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S),'r--')
for i in range(1,n+1):
     plt.plot(x,u_k(i,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("vibration 5 flexion ", fontsize=14)
plt.legend(['vibration5 total','mode2','mode3','mode4','mode5''v(x,0)
    total'],loc='upper left', fontsize = 8)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ modee5vt.png',dpi=800)
```

A.2.6 flexion à x=0.5 mode 1

```
t=np.linspace(0,0.5,num=1000)
n=1
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.plot(t,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 2 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode5 v(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM-math\ mode1t.png',dpi=800)
```

A.2.7 flexion à x=0.5 mode 2

```
t=np.linspace(0,0.5,num=1000)
n=2
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
```

```
S=1
plt.plot(t,mode(n,t,v0,L,E,I,rho,S))
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("mode 2 du temps de x=0.5 ", fontsize=14)
plt.legend(['mode5 v(0.5,t)'],loc='lower right', fontsize = 10)
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ mode2t.png',dpi=800)
```

A.2.8 flexion à x=0.5 total 5 modes

```
t=np.linspace(0,0.5,num=100)
n=5
x=0.5
v0=1
E=1
L=1
I=1
rho=1
S=1
plt.xlabel('temps ', fontsize=14)
plt.ylabel("l'amplitude", fontsize=14)
plt.title("vibration 5 flexion ", fontsize=14)
plt.legend(['vibration5 total','mode2','mode3','mode4','mode5''v(x,0)
    total'],loc='upper left', fontsize =10 )
plt.savefig('D:\Tous Les TP\DM—math\ modee5vt.png',dpi=800)
plt.plot(t,v_x_t(n,v0,L,x,t,E,I,rho,S))
```