

Ecoulement potentiel 2D

par
CISCARD Julie
ZHANG Xunjie
pour le TP3 de l'UE éléments finis M1

fait le 29 novembre 2016

Table des matières

1.1	Introduction	4
1.1.1	Objectif	4
1.1.2	Problème physique	4
1.1.3	Théorie	5
1.1.4	Approximation par élément finis	8
1.2	COMSOL	9
1.2.1	Etude de écoulement	9
1.2.2	Création du domaine d'écoulement	10
1.2.3	Prise en compte des conditions limites	10
1.2.4	Changement de maillage	10
1.2.5	Création d'un graphique iso-contours	10
1.2.6	Création d'un profil de vitesse	11
1.2.7	Calcul d'une grandeur physique en un point	11
1.2.8	Changement du type d'approximation	11
1.3	Résultats	11
1.3.1	Maillage	11
1.3.2	Fonction de courant	14
1.3.3	Différence de pression	16
1.3.4	Profil de vitesse u	22
1.3.5	Profil de vitesse v	28
1.3.6	Changement l'ordre d'élément	34
1.4	Conclusions	40

Table des figures

1.1	Représentation du problème	5
1.2	Fonction de courant nulle sur l'obstacle	7
1.3	Zone dans laquelle on devrait avoir la vitesse maximum et la pression minimum	8
1.4	Représentation des triangles en fonction du degré d'interpo- lation	9
1.5	Maillage physique plus extra fin sans segements	12
1.6	Maillage physique plus extra fin sans segements	12
1.7	Maillage distance maxi hh	13
1.8	Maillage distance maxi 5*hh	14
1.9	Fonction de courant tous les points surface	15
1.10	isovaleur de fonction de courant tous les points surface . . .	16
1.11	Champ de différence de pression	17
1.12	isovaleur de champ de différence de pression	18
1.13	pression dans le point 1	19
1.14	pression dans le point 1	20
1.15	pression dans le point 1	21
1.16	pression dans le point 1	22
1.17	Vitesse horizontale surface	23
1.18	isovaleur de champ de profie de vitess u	24
1.19	Vitesses horizontales sur les segements	25
1.20	Vitesses horizontales sur les segements avec precisions	26
1.21	Detail de vitesse horizontale sur la segment x=10	27
1.22	vitesse horizontale ponctuel	28
1.23	Vitesse verticale surface	29
1.24	isovaleur de champ de vitesse verticale v	30
1.25	Vitesses verticales sur les segements	31
1.26	Vitesses verticales sur les segements avec precisions	32
1.27	Detail de vitesse verticale sur les segments	33
1.28	vitesse verticale ponctuel	34
1.29	pression-P1	35
1.30	vitesse-P1	35
1.31	pression-P2	36
1.32	vitesse-P2	37

1.33	pression-P3	38
1.34	vitesse-P3	39

1.1 Introduction

1.1.1 Objectif

L'objectif de ce TP est d'utiliser la méthode des éléments finis pour un problème physique en 2 dimensions. Le problème physique étudié ici est l'écoulement potentiel dans un canal avec un obstacle.

Ce Travail Pratique peut avoir comme application les exemples suivant :

- un cours d'eau avec un rocher comme obstacle ;
- un canal aboutissant sur une écluse où l'eau arrive est le bateau est considéré comme un obstacle ;

Nous devons donc à l'aide des condition aux limites, à la fonction de courant ψ , et à l'équation de Bernouilli déterminer la pression ainsi que la vitesse dans le canal.

Enfin ce TP nous permet d'apprendre à manipuler le logiciel **COMSOL**

1.1.2 Problème physique

Nos paramètres initiaux sont les suivants :

- $a = 4$;
- $b = 2$;
- $H = 5b = 10$;
- $L = 5H = 50$;

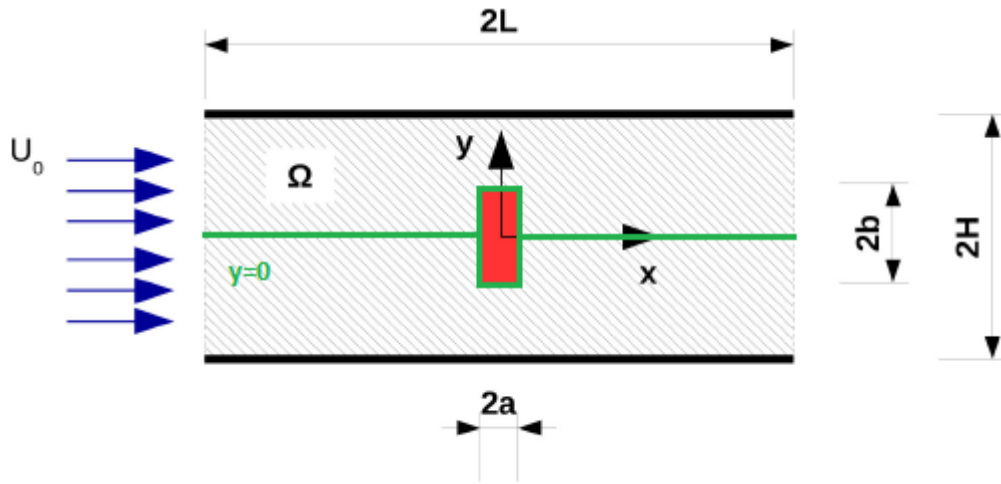


FIGURE 1.1 – Représentation du problème

Le problème physique est le suivant :

- Ecoulement incompressible à potentiel dans le canal avec comme dimension $[100 \times 20]$;
- un obstacle au centre du canal $[8 \times 4]$;

1.1.3 Théorie

L'équation d'équilibre qui régit la fonction de courant $\psi(x, y)$ est l'équation de Laplace en deux dimension.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

La relation qui relie la vitesse \vec{U} à la fonction de courant ψ est la suivante :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ avec } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Les conditions aux limites du problème sont les suivantes :

- Condition à l'entrée du fluide :
 - $u(0, y) = U_0$
 - $v(0, y) = 0$

Ces conditions à l'entrée nous permettent de connaître l'équation de la fonction de courant à l'entrée du canal en intégrant ces deux conditions limites :

- $U_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, y)$ donc on obtient en intégrant sur y $\psi(0, y) = U_0 y + C(x)$
maintenant il faut déterminer la constante avec la vitesse selon v
- $0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ donc on obtient en intégrant sur x $C(x) = 0$

Finalement à l'entrée la fonction de Courant vaut $\psi(0, y) = U_0 y$

- Condition aux parois du canal :

- $u(x, 0) = 0$
- $v(x, 0) = 0$
- $u(x, 20) = 0$
- $v(x, 20) = 0$

Au paroi, la fonction de courant est nulle car y=0, la ligne de courant longe la paroi donc sur la paroi $\psi(x, 0) = U_0 \times 0$

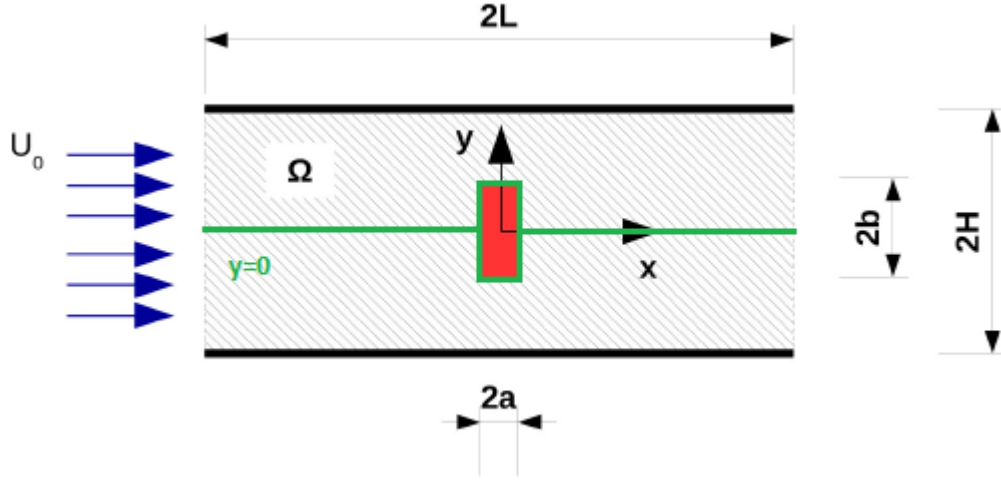


FIGURE 1.2 – Fonction de courant nulle sur l'obstacle

- Condition aux parois de l'obstacle :
 - $\psi(-4, -2) = 0$ jusqu'à $\psi(-4, 2) = 0$
 - $\psi(4, -2) = 0$ jusqu'à $\psi(4, 2) = 0$
 - $\psi(-4, -2) = 0$ jusqu'à $\psi(4, -2) = 0$
 - $\psi(4, 2) = 0$ jusqu'à $\psi(4, 2) = 0$

Pour connaître la pression on utilise l'équation de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z = \text{constante}$$

Dans nos cas, on considère que z varie peu car nous sommes en 2D. Donc l'équation devient :

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{constante}$$

donc , la différence de la pression est en expression :

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho(U^2 - U_0^2) = \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - U_0^2\right)$$

On peut deviner que la vitesse maximum $U_{max} = \max(\vec{U}(x, y))$ quand la vitesse est à la hauteur de l'obstacle. En effet, la réduction de l'aire provoque une accélération du flux. C'est d'ailleurs dans cette zone que la pression sera minimum.

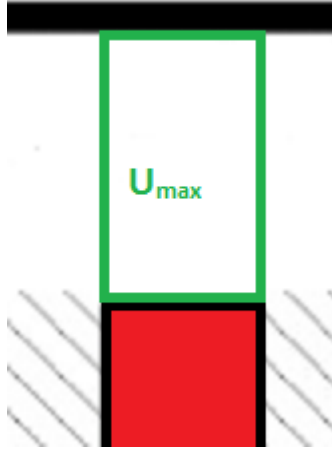


FIGURE 1.3 – Zone dans laquelle on devrait avoir la vitesse maximum et la pression minimum

En utilisant l'équation de bernouilli on peut en déduire que la pression est maximale où la vitesse est minimale.

1.1.4 Approximation par élément finis

Pour résoudre le problème, on cherche une solution approchée $\psi_h(x, y)$. Lors de ce TP, nous allons prendre un maillage triangulaire. Puis nous allons faire varier le nombre et la positions des degrés de liberté pour les approximations P^1, P^2, P^3, P^4, P^5 sur chaque triangle.

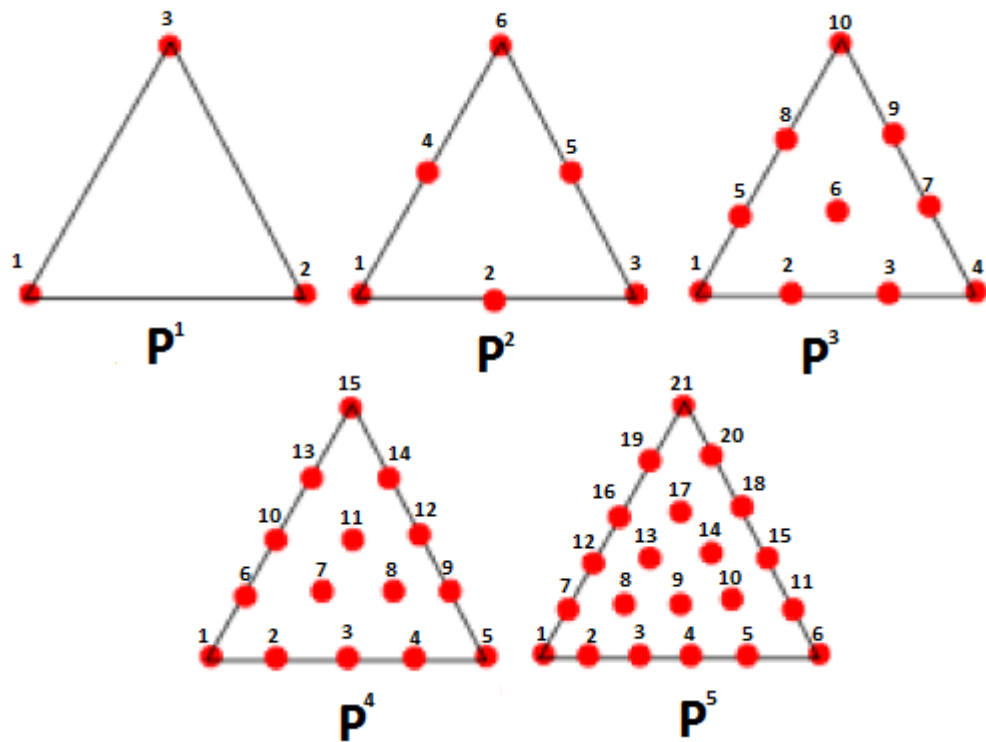


FIGURE 1.4 – Représentation des triangles en fonction du degré d’interpolation

1.2 COMSOL

1.2.1 Etude de écoulement

Pour créer notre modèle, nous avons d’abord créer un **assistant de modélisation** ”préprogrammé” dans un domaine d’espace **2D**. Puis nous avons sélectionner un modèle **mathématiques** car notre écoulement est régi par une **EDP classique**, en locurrence ici **l’équation de Laplace**.

La variable dépendante est ψ qui est un **potentiel de vitesse** (m^2/s) sans terme source. L’étude est **stationnaire**

1.2.2 Création du domaine d'écoulement

- On crée les parois extérieur , clic droit en **Géométrie** , ensuite clic gauche en **rectangle** , et on crée une domaine rectangulaire avec l'origine au centre du rectangle,de largeur $2L = 100$ et hauteur $2H = 20$ et on construit la sélection .
- On crée l'obstacle , clic droit en **Géométrie** , ensuite clic gauche en **rectangle** , et on crée une domaine rectangulaire avec l'origine au centre du rectangle,de largeur $2a = 8$ et hauteur $2b = 4$.
- On fait la différence entre les deux rectangles , clic droit en **Géométrie** , ensuite clic gauche en **Booléens et partitions**,puis on fait la **différence**. Puis on soustrait le rectangle obstacle au rectangle du domaine.

1.2.3 Prise en compte des conditions limites

- On ajoute les Conditions limites sur les parois . On clique droite sur **Equation de Laplace** , ensuite clic gauche en **Conditions Dirichlet** , puis on choisi les frontières des parois extérieurs du domaine et on impose que $\psi = U_0 y$.
- Pour les conditions limites sur l'obstacle , on choisi les bords d'obstacle en fonction : $\psi = 0$.
- Clic gauche en **Construireselections** .

1.2.4 Changement de maillage

- on peut créer un **maillage** controlé par la physique et après on choisi la **taille de l'élément**
- on peut aussi créer un **maillage controlé par l'utilisateur**, à ce moment là, on peut modifié la **taille** en changeant la taille d'élément maximale

Ensuite, on réalise l'**étude** avec le bouton calculer, il est nécessaire de recalculer à chaque fois que l'on modifie le maillage.

1.2.5 Création d'un graphique iso-contours

- pour crée un graphique iso contours, on clique droit sur **Résultats** puis sur **groupe de graphique 2D**. On clique droit sur le groupe de graphique 2D qu'on a crée et on clic sur **isovaleur**, on choisi dans expression ce qu'on veut visualiser avec les isovaleur
- il est possible de modifié les lignes de niveaux dans **niveaux**
- on peut aussi afficher les **valeurs** pour chaque ligne d'isovaleur

1.2.6 Création d'un profil de vitesse

- Pour créer un profil de vitesse, on crée un autre **groupe de graphique 2D** puis on clic droit sur ce groupe de graphique 2D et on choisit **surface**
- on choisit dans l'expression de u avec $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

1.2.7 Calcul d'une grandeur physique en un point

- d'abord, on crée un point avec **géométrie**, on choisit **point** et on le place où on a besoin de connaître la grandeur physique, on entre l'abscisse et l'ordonnée.
- on clique droit **Résultat**, on choisit **groupe de graphique 1D**, on donne l'expression de la grandeur qu'on veut mesurer
- on clique droit sur le **groupe de graphique 1D** qu'on vient de créer on sélectionne **graphique ponctuel** puis on choisit le point qu'on a créé précédemment pour mesurer la grandeur physique à cette endroit.

1.2.8 Changement du type d'approximation

- pour changer le type d'interpolation on clic droit sur **Equation de Laplace**, on choisit **global** puis on clique sur **discrétisation**. Enfin on choisit sur ordre d'élément si on veut P1 on prend linéaire, si on veut P2 on prend quadratique, si on veut P3 on prend Cubique, si on veut P4 on choisit quartique et si on veut P5 on choisit Quintique.

1.3 Résultats

1.3.1 Maillage

Maillage physique fin

Dans le figure 1.6 , on présent les maillages avec triangles . Ce que on utilise en élément finis .

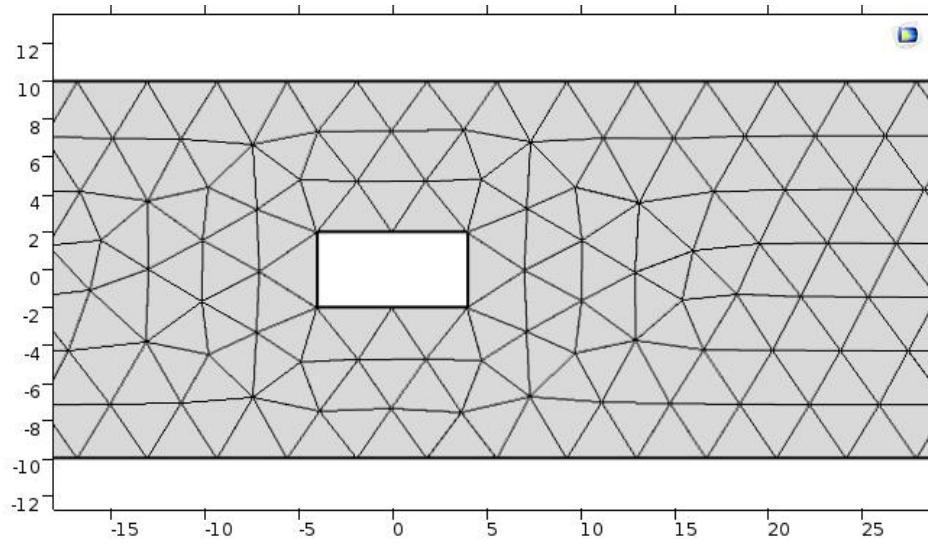


FIGURE 1.5 – Maillage physique plus extra fin sans segments

Maillage physique extra fin

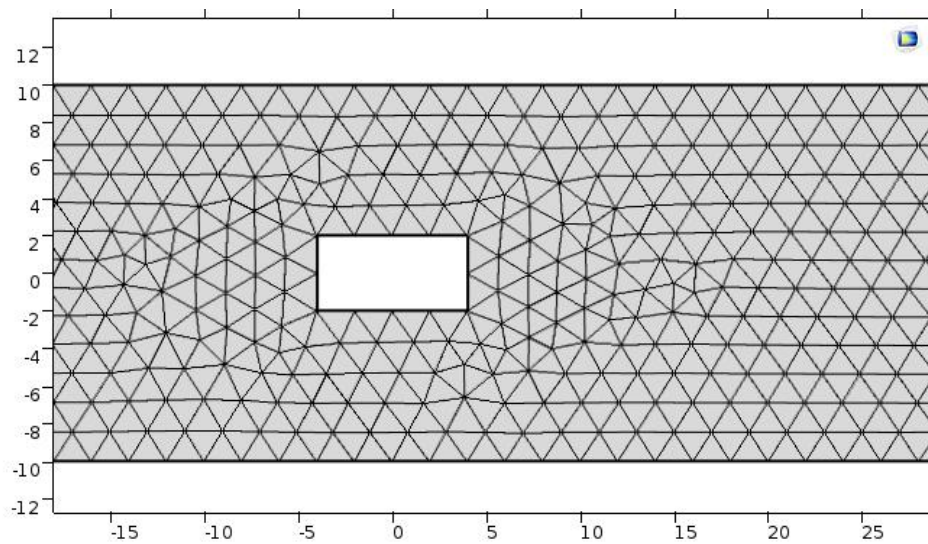


FIGURE 1.6 – Maillage physique plus extra fin sans segments

Dans le figure 1.6 , on présent les maillages avec triangles . Ce que on utilise en élément finis .

Maillage défini par taille d'élé maxi hh avec segments

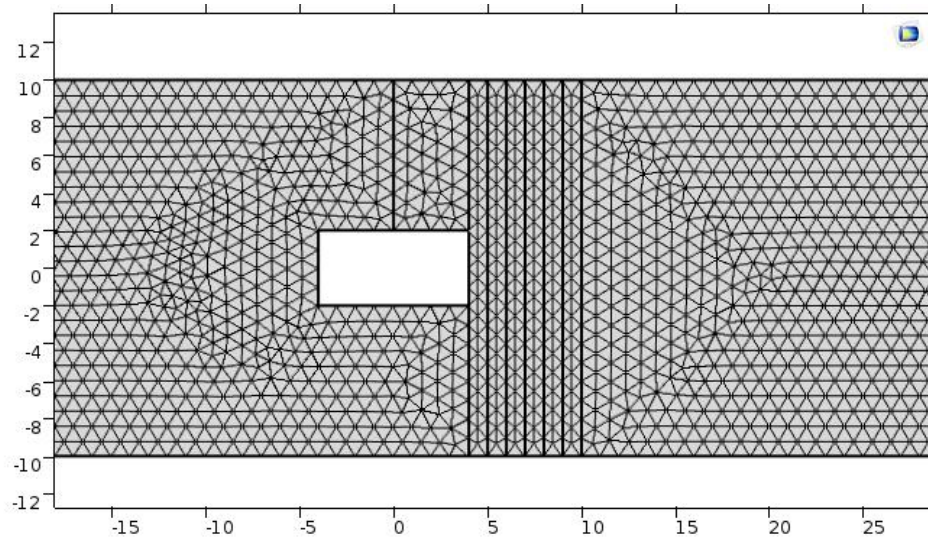


FIGURE 1.7 – Maillage distance maxi hh

Dans le figure 1.7 , on défini les maillages par utilisateur , on fait la distance maximaleest hh , et on consduis le sélection .

Maillage défini par distance maxi $5*hh$

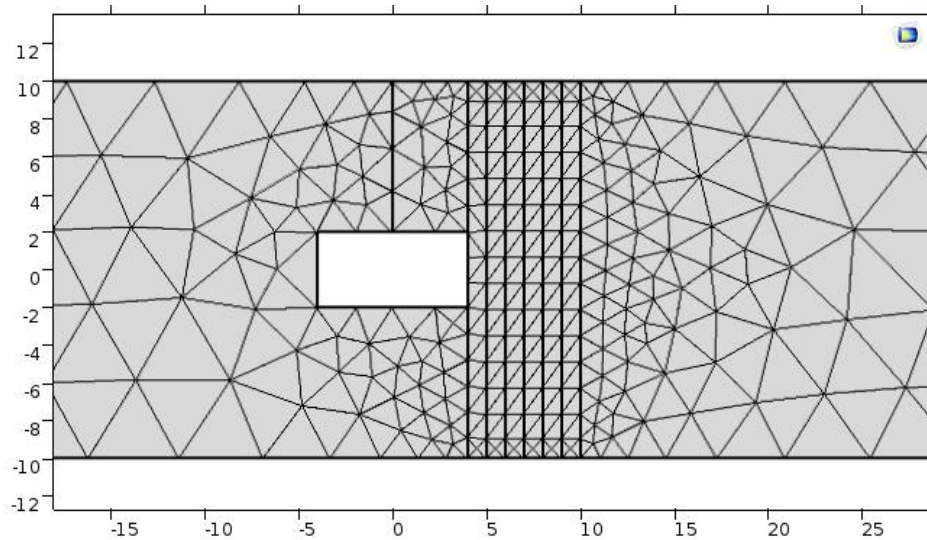


FIGURE 1.8 – Maillage distance maxi $5*hh$

Dans le figure 1.8 , on défini les maillages par utilisateur , on change la distance maximaleest $5*hh$, et on consduis le sélection . On trouve que quand on augemente la distance , nombre des triangles diminue .

1.3.2 Fonction de courant

Profie de fonction de courant

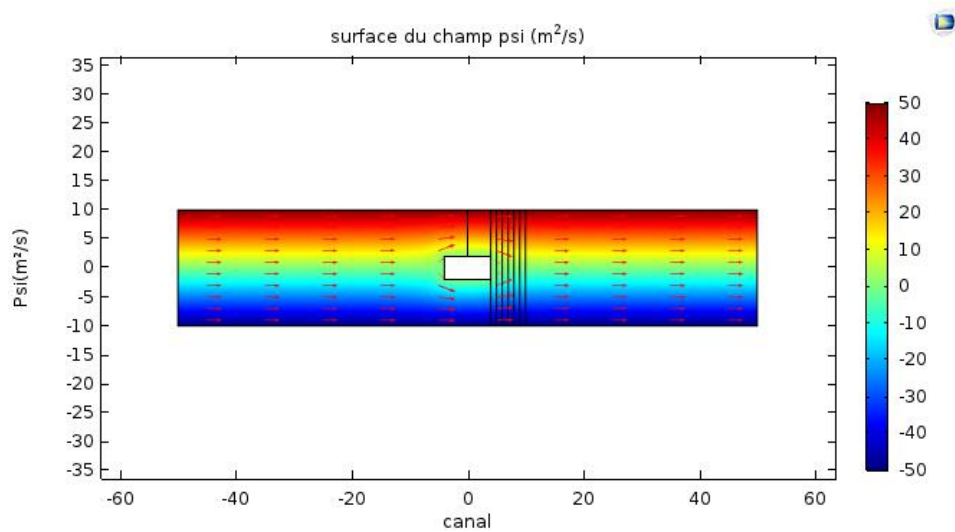


FIGURE 1.9 – Fonction de courant tous les points surface

Dans le figure 1.9 , on présent les fonctions de courants pour tous les points dans la région et on fait flèches sur surface . On peut trouver que suivant le direction \vec{x} la fonction de courant est uniforme ; suivant le direction \vec{y} la fonction de courant augmente linéaire ; autour l'obstacle , la fonction de courant est nulle . Ces résultats est bien verifié les conditions limites .

isole profie de fonction de courant

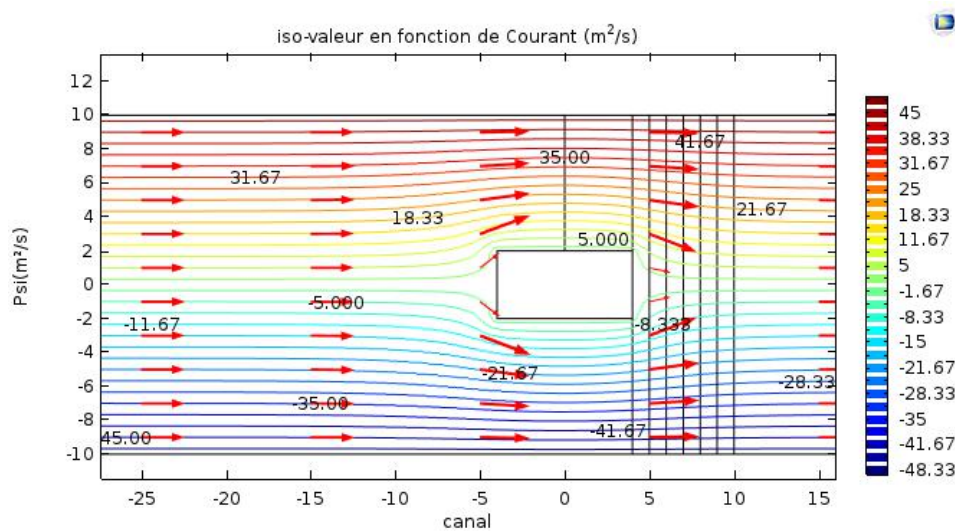


FIGURE 1.10 – iso-valeur de fonction de courant tous les points surface

Dans le figure 1.10 , on isole les fonctions de courants pour tous les points dans la région et on fait flèches sur surface . On a minimisation de fonction de courant sur les deux parois . Autour l'obstacle , la fonction de courant est zero .

1.3.3 Différence de pression

Profil de différence de pression

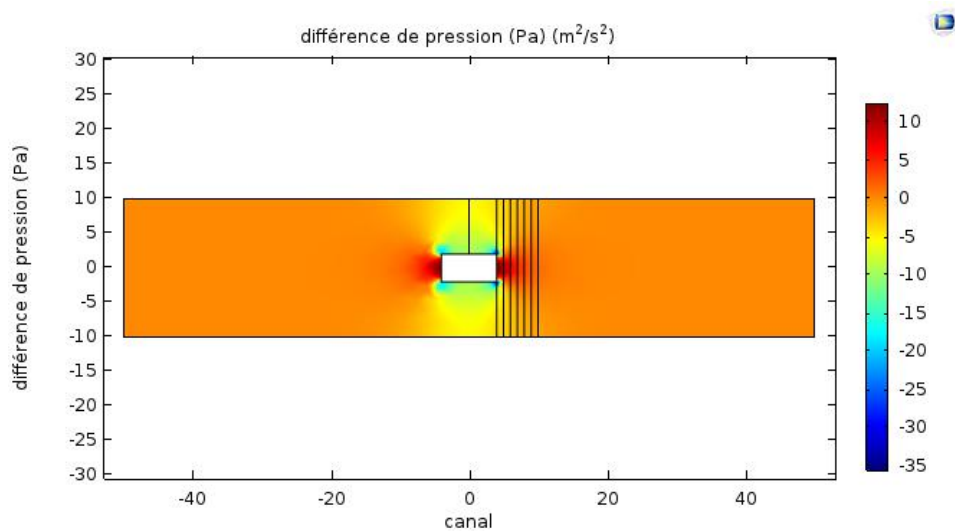


FIGURE 1.11 – Champ de différence de pression

Dans le figure 1.11 , on présent la différence de pression entre le ponit on etude et le point d'entrée . On a pression uniforme dans les région loin d'obstacle . On peut trouver que dans les deux cotés d'obstacle $(a, \pm b)$, la différence de la presssion est minimale . Dans le mid de la frontière dernière $(a, 0)$ on trouve la différence de la pression est maximale .

isole profie de différence de pression

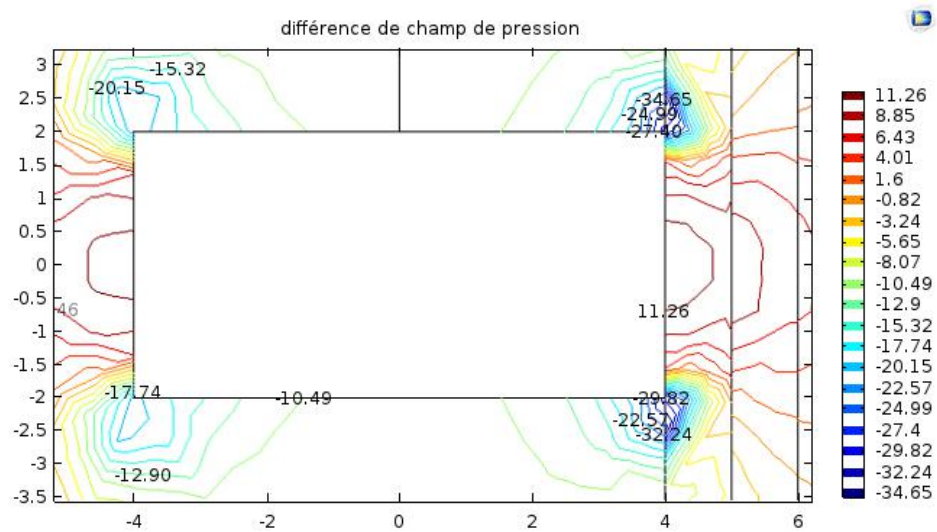


FIGURE 1.12 – isovaleur de champ de différence de pression

Dans le figure 1.12 , on isole les fonctions de courants pour tous les points dans la région et on fait agrandir la région autour d'obstacle .

Différence de pression dans le segments

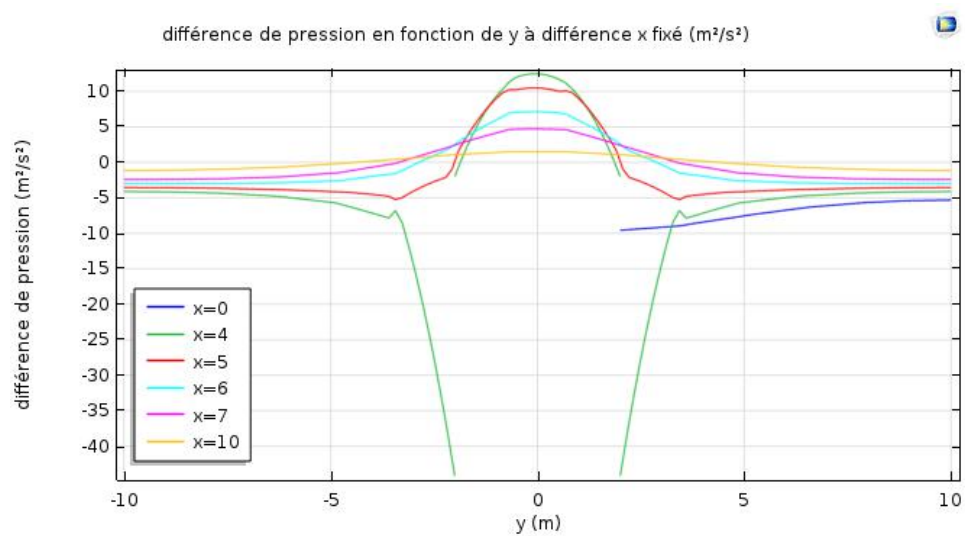


FIGURE 1.13 – pression dans le point 1

Dans le figure 1.16 , on i.....

Precisions différence de pression dans le segments

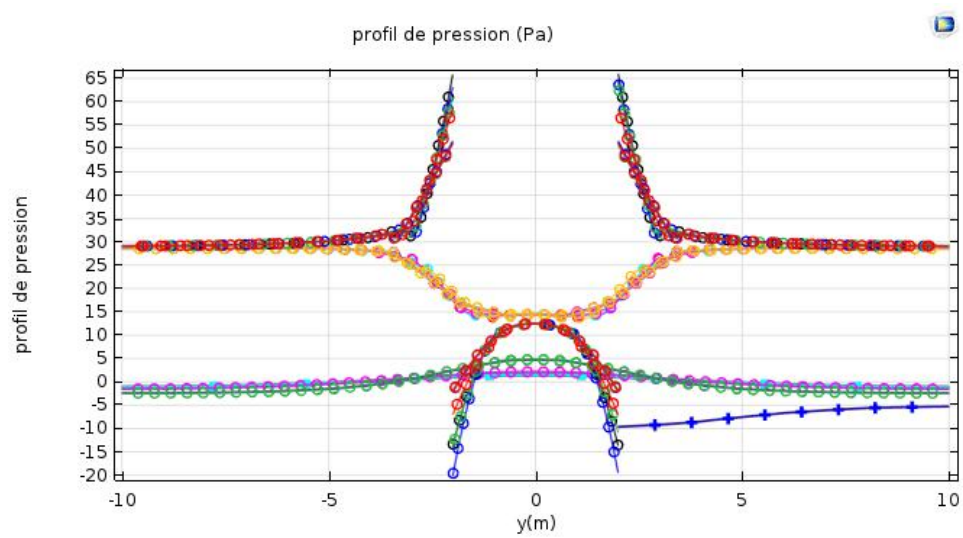


FIGURE 1.14 – pression dans le point 1

Dans le figure 1.16 , on i.....

Detail pression dans le segments

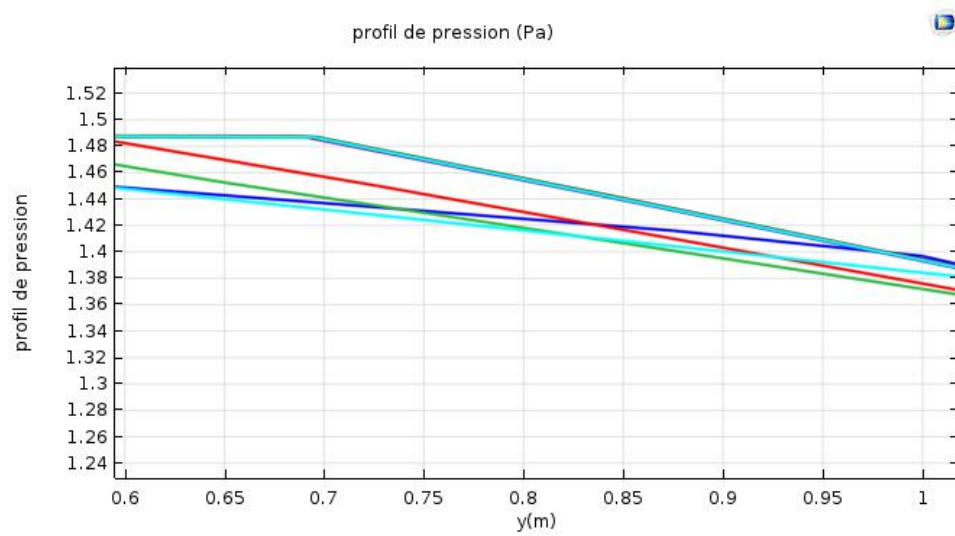


FIGURE 1.15 – pression dans le point 1

Dans le figure 1.15 , on

Différence de pression ponctuel

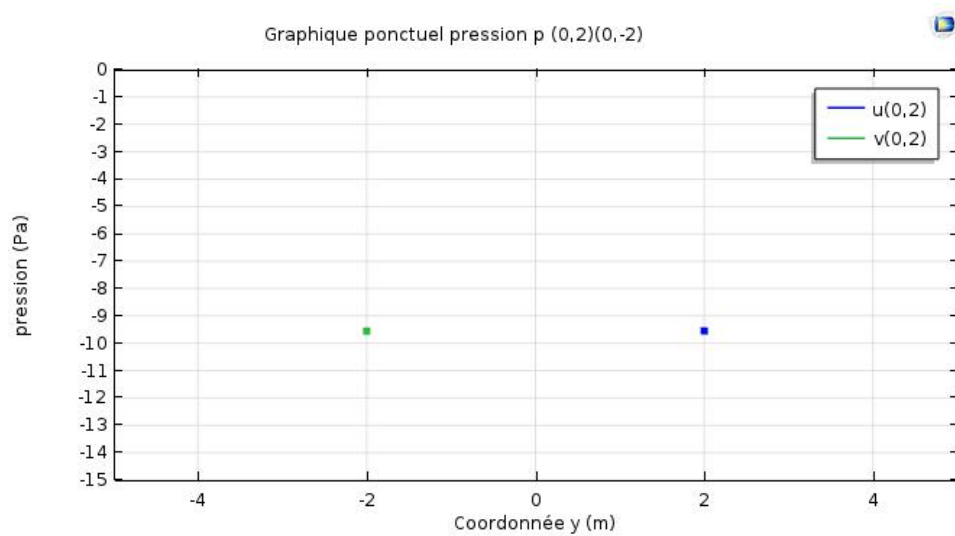


FIGURE 1.16 – pression dans le point 1

Dans le figure 1.16 , on i.....

1.3.4 Profil de vitesse u

Profil de vitesse surface

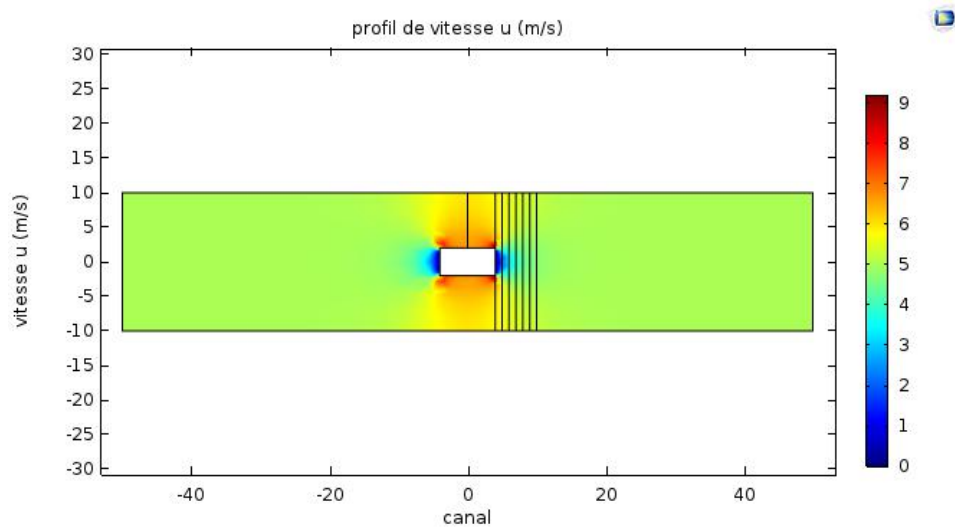


FIGURE 1.17 – Vitesse horizontale surface

Dans le figure 1.17 , on présent la profie de vitesse horizontale u . On a vitesse uniforme u_0 dans les région loin d'obstacle . On peut trouver que dans les quatres cotés d'obstacle $(\pm a, \pm b)$, la vitesse horizontale est maximale et symétrique.

isole profie de vitesse horizontale surface

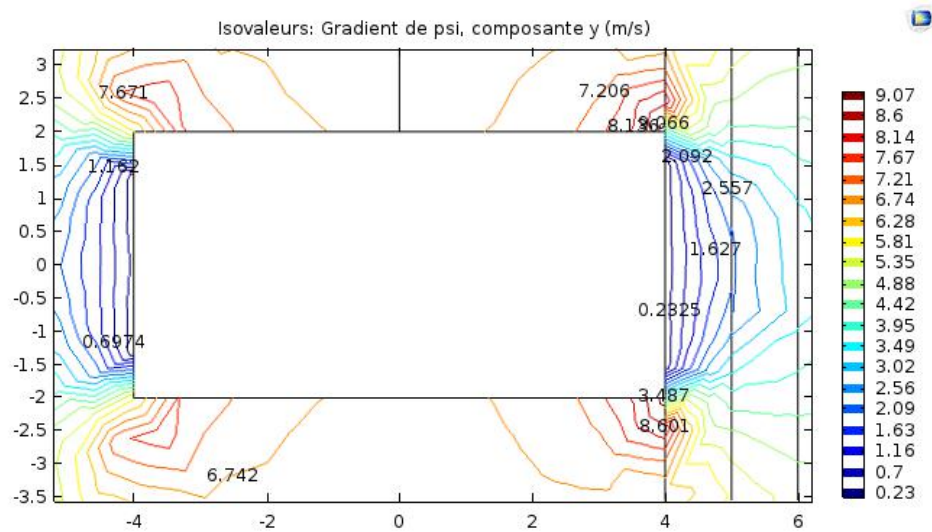


FIGURE 1.18 – isovaleur de champ de profile de vitess u

Dans le figure 1.18 , on isole la profile de vitesse u pour tous les points dans la région et on fait agrandir la région autour d'obstacle pour bien affiché .

Profile de vitesse horizontale sur les segments

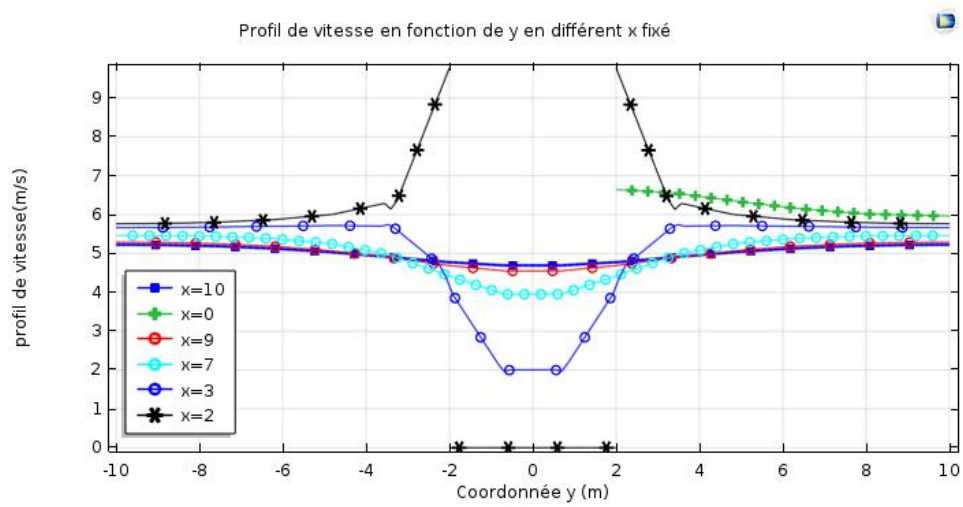


FIGURE 1.19 – Vitesses horizontales sur les segements

Dans le figure 1.19 , on présent la fonction de vitesse u dans les segements

Précisions profie de vitesse horizontale sur les segements

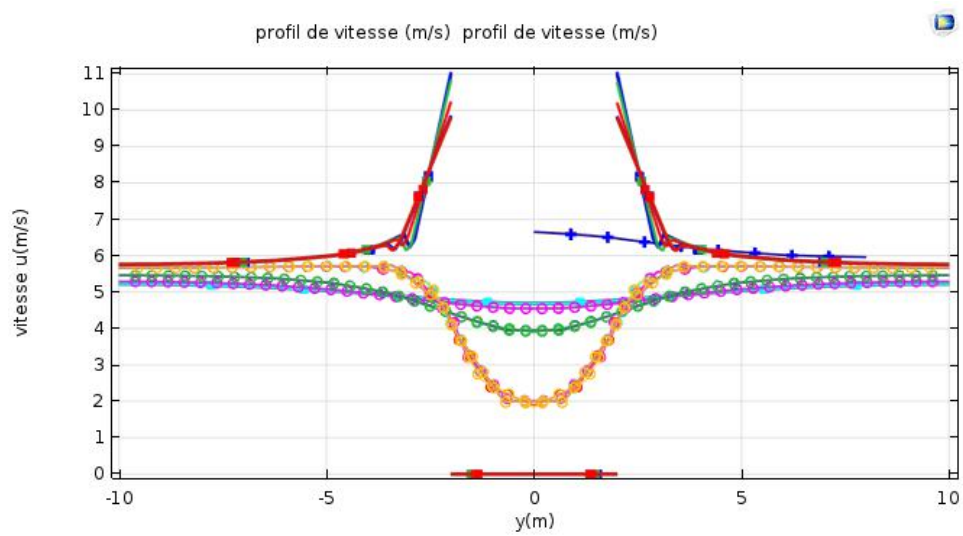


FIGURE 1.20 – Vitesses horizontales sur les segments avec precisions

Dans le figure 1.20 , on présent la fonction de vitesse u dans les segments

Detail de vitesse horizontale sur les segments

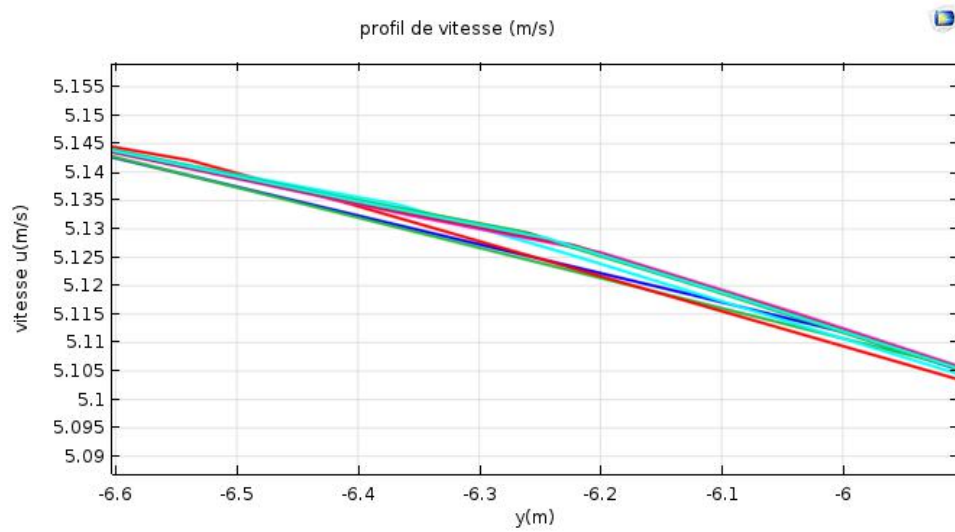


FIGURE 1.21 – Detail de vitesse horizontale sur la segment $x=10$

Dans le figure 1.21 , on présent la fonction de vitesse u dans les segments

Vitesse horizontale ponctuel

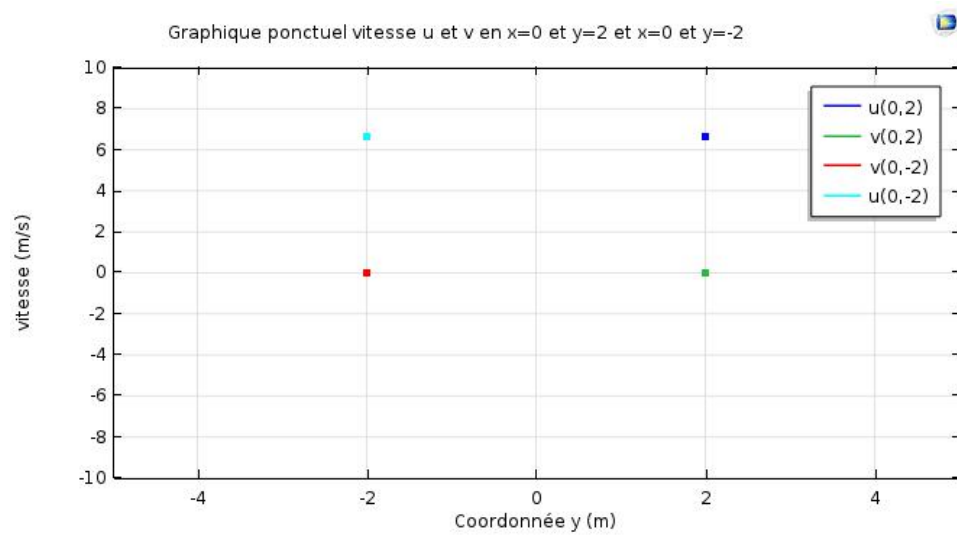


FIGURE 1.22 – vitesse horizontale ponctuel

Dans le figure 1.22 , on i

1.3.5 Profil de vitesse v

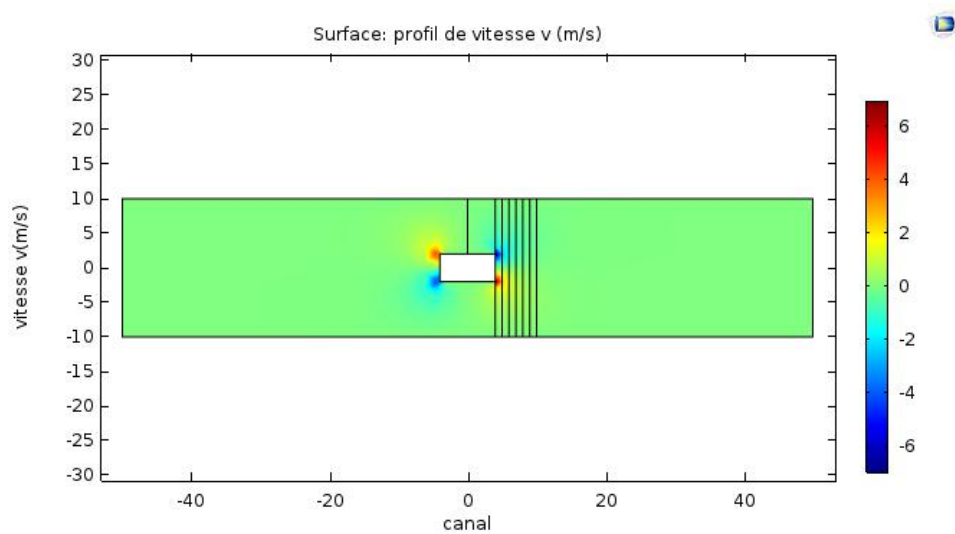


FIGURE 1.23 – Vitesse verticale surface

Dans le figure 1.23 , on présent la profie de vitesse horizontale v . On a vitesse uniforme 0 dans les région loin d'obstacle . On peut trouver que dans les quatres cotés d'obstacle $(\pm a, \pm b)$, la vitesse horizontale est maximale et antisymétrique .

Profie de vitesse verticale surface

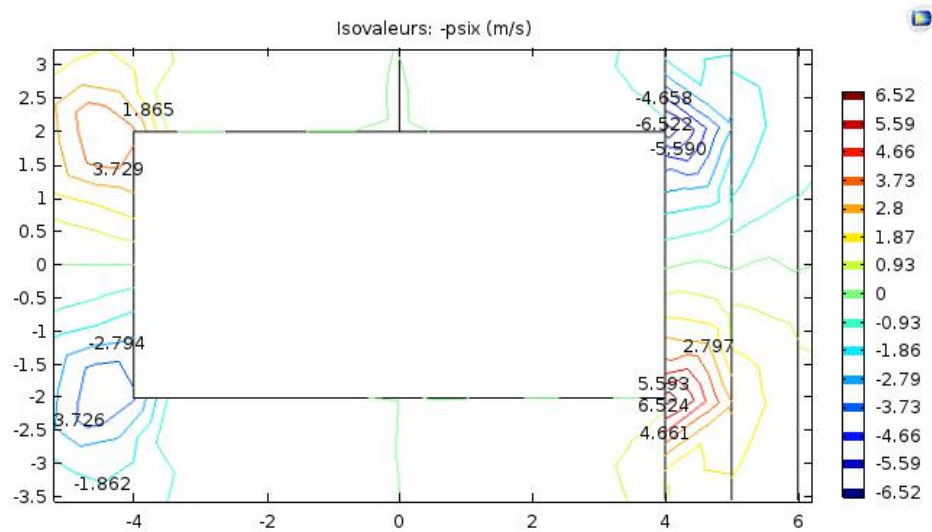


FIGURE 1.24 – isovaleur de champ de vitesse verticale v

Dans le figure 1.24 , on isole la profie de vitesse v pour tous les points dans la région et on fait agrandir la région autour d'obstacle pour bien affiché

Profie de vitesse verticale sur les segements

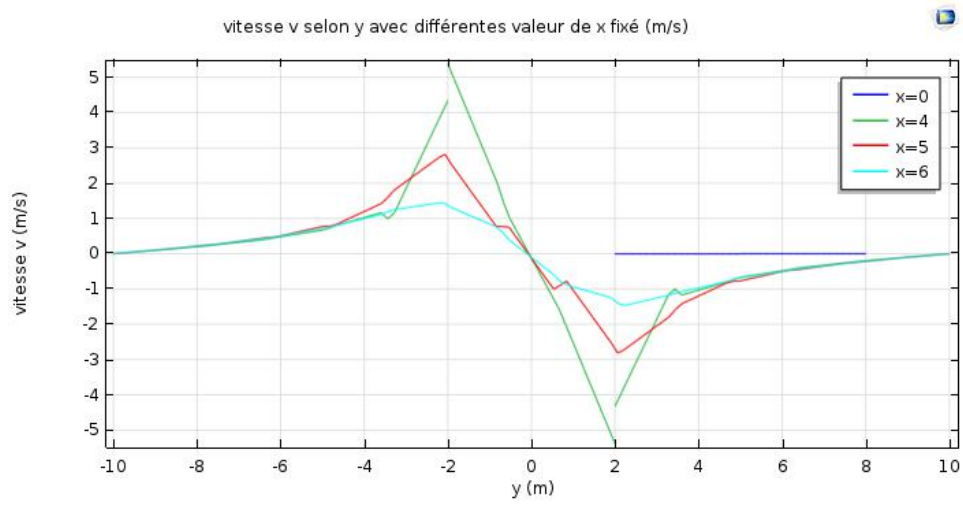


FIGURE 1.25 – Vitesses verticales sur les segments

Dans le figure 1.25 , on présent la fonction de vitesse u dans les segments

Précisions profie de vitesse verticale sur les segments

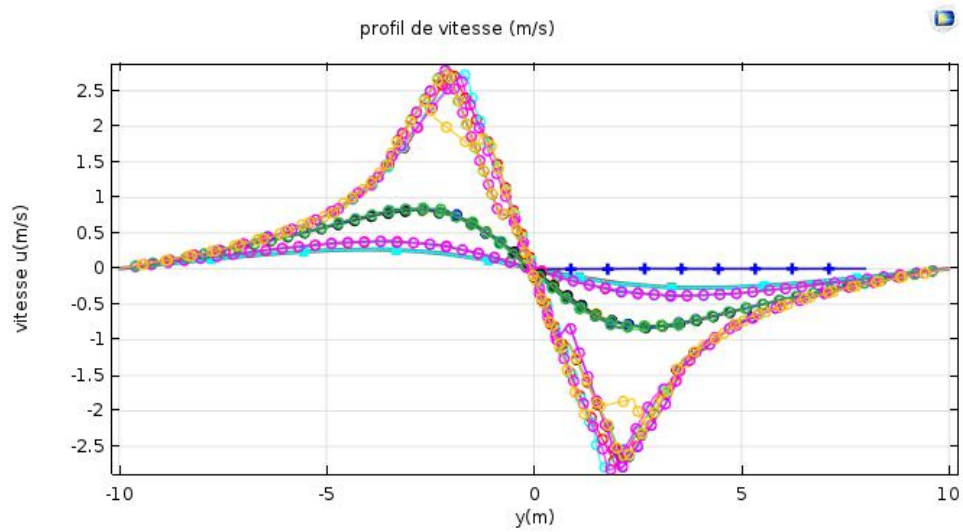


FIGURE 1.26 – Vitesses verticales sur les segments avec precisions

Dans le figure 1.26 , on présent la fonction de vitesse v dans les segments

Detail de vitesse verticale sur les segments

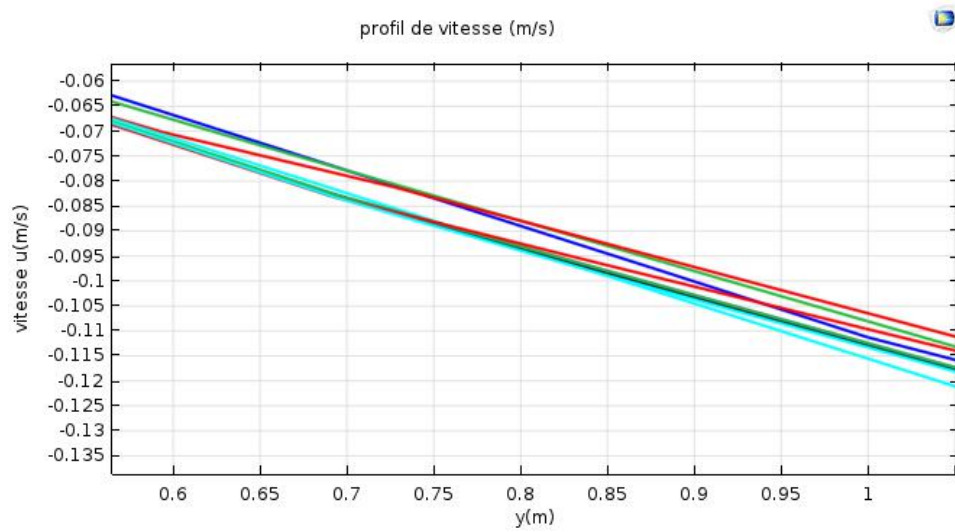


FIGURE 1.27 – Detail de vitesse verticale sur les segments

Dans le figure 1.27 , on présent la fonction de vitesse v dans les segements

Vitesse verticale ponctuel

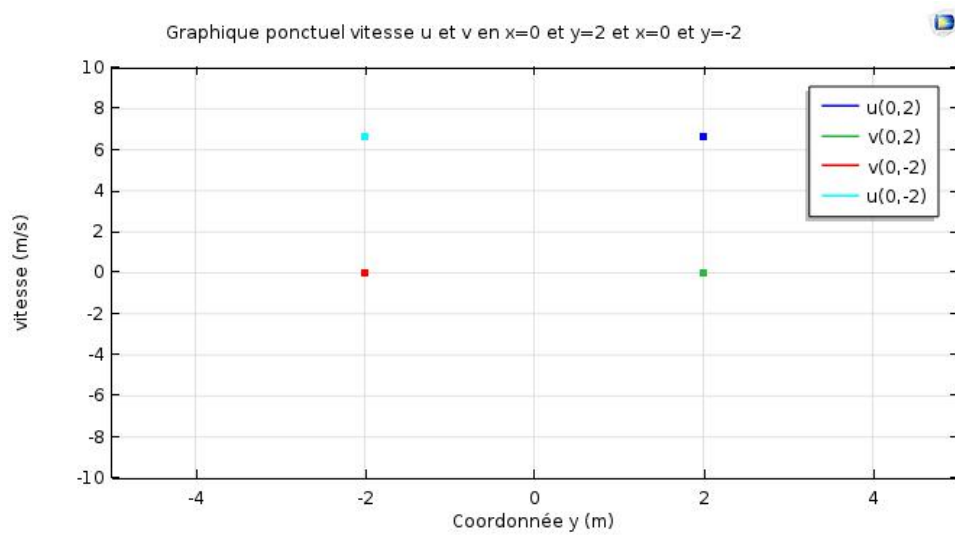


FIGURE 1.28 – vitesse verticale ponctuel

Dans le figure 1.34 , on —————

1.3.6 Changement l'ordre d'élément

P1

.....

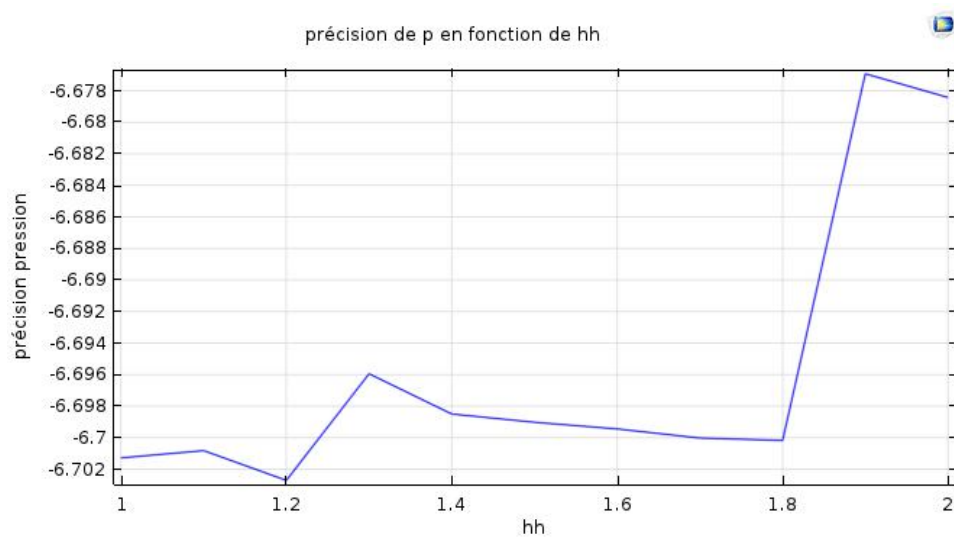


FIGURE 1.29 – pression-P1

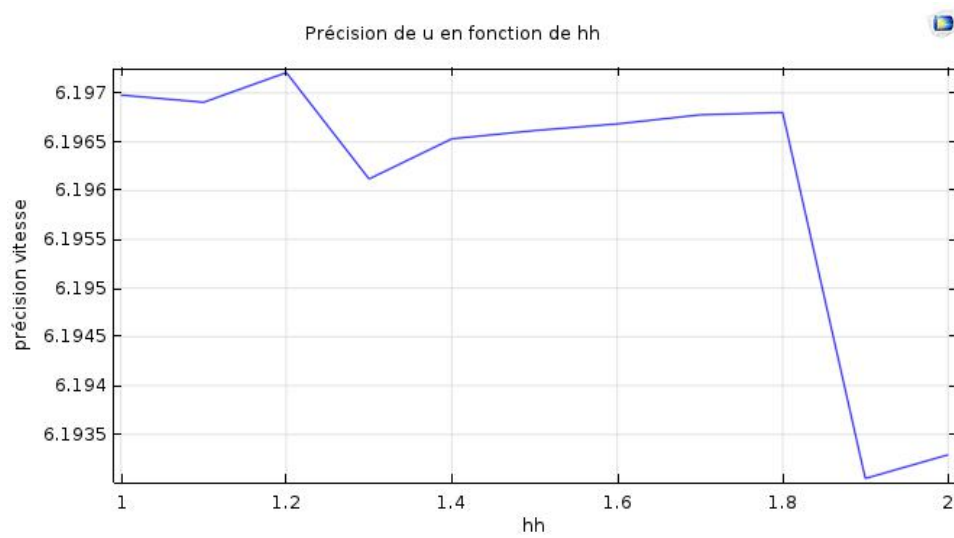


FIGURE 1.30 – vitesse-P1

P2



FIGURE 1.31 – pression-P2

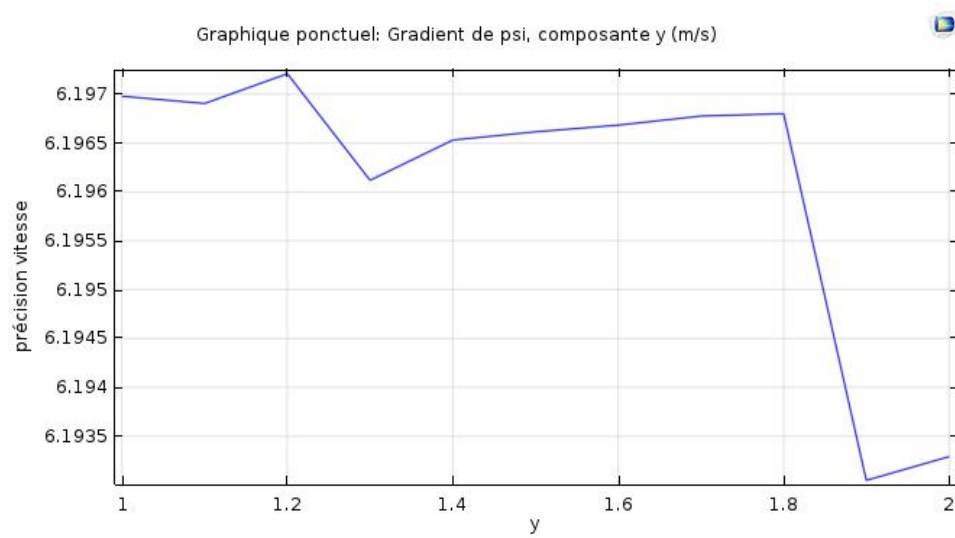


FIGURE 1.32 – vitesse-P2

P3



FIGURE 1.33 – pression-P3

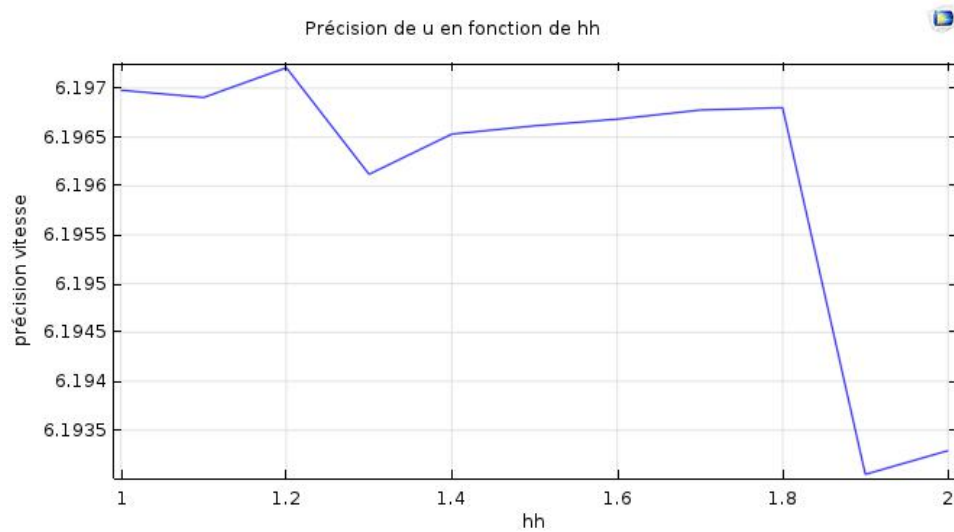


FIGURE 1.34 – vitesse-P3

Nous trouvons que la vitesse et la pression suivant P^1, P^2, P^3 est la même. Cela veut dire que notre précision est déjà trop grande pour voir une différence suivant le polynôme d'interpolation.

1.4 Conclusions

Lors de ce TP, nous avons appris à utiliser le logiciel **COMSOL**, notamment en créant un domaine d'écoulement qui dépend d'une équation (l'équation de Laplace) et non du type d'écoulement (ce que nous avons pu voir dans un précédent TP avec M.SPELT où l'étude était basée sur un écoulement à régime laminaire).

Le principal objectif de ce TP était de calculer la vitesse dans l'écoulement ainsi que la pression et de la comparer avec les résultats obtenus en théorie pour savoir si nos hypothèses étaient correctes. Ensuite nous avons étudié les conséquences du changement de maillage, pour un maillage assez gros nous avons pu remarquer que les différences entre les courbes étaient importantes. Puis, en affinant un peu plus nous avons des courbes proches les unes des autres assez rapidement.

Ensuite, nous avons changé le type d'interpolation avec un maillage grossier et fin et nous avons remarqué que si nous prenions un degré d'interpolation assez important il n'était pas nécessaire de prendre un maillage très fin car la précision de notre modèle ne variait pas énormément. De même si on prend un maillage extra fin, il n'est pas nécessaire de prendre un degré d'interpolation très élevé (P^1 étant suffisant dans ce cas).

Enfin, suite à notre TP, il serait possible d'étudier la fonction de courant suivant différents types d'obstacle pour savoir si la forme ou l'allure de l'obstacle influe sur la vitesse et la pression et si oui de quelle manière. Nous pourrions aussi changer la viscosité pour savoir si la variation de vitesse et de pression serait toujours aussi grande aux points critiques.