

# **Vibrations d'une Disque**

par

MAAMIR Mohamed

ZHANG Xunjie

MOHAMED Muhammad

GOETZ Kim

pour le DM de l'UE Introduction aux vibrations des structures M1

fait le 08 janvier 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Théorie</b>	<b>4</b>
2.1	modes antisymétriques . . . . .	6
2.1.1	2 DDL . . . . .	6
2.1.2	N DDL . . . . .	7
2.2	modes symétriques . . . . .	9
2.2.1	2 DDL . . . . .	9
2.2.2	N DDL . . . . .	9
2.3	équations du mouvement . . . . .	11
2.3.1	2 DDL . . . . .	11
2.3.2	N DDL . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Numérique sur SCILAB</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>

# Table des figures

1.1	Cas d'étude. . . . .	3
2.1	Cas d'étude. . . . .	4
2.2	Modèle utilisé pour déterminer les modes antisymétriques de notre cas d'étude. . . . .	6
2.3	Modèle utilisé pour déterminer les modes antisymétriques de notre cas d'étude. . . . .	7
2.4	Modèle utilisé pour déterminer les modes symétriques. . . . .	9
2.5	Modèle utilisé pour déterminer les modes antisymétriques de notre cas d'étude. . . . .	9

# Chapitre 1

## Introduction

Nous allons étudier dans ce DM un système en vibrations forcées amorties. Dans une première partie théorique nous allons modéliser le système à 2 puis N degrés de liberté, dresser les équations du mouvement et calculer la réponse en vibrations forcées.

Dans la seconde partie, nous traitons le problème de manière numérique sous Scilab. Analyse modale pour différents degrés de liberté et calcul de la réponse en vibrations forcées en fonction de  $\omega$ .

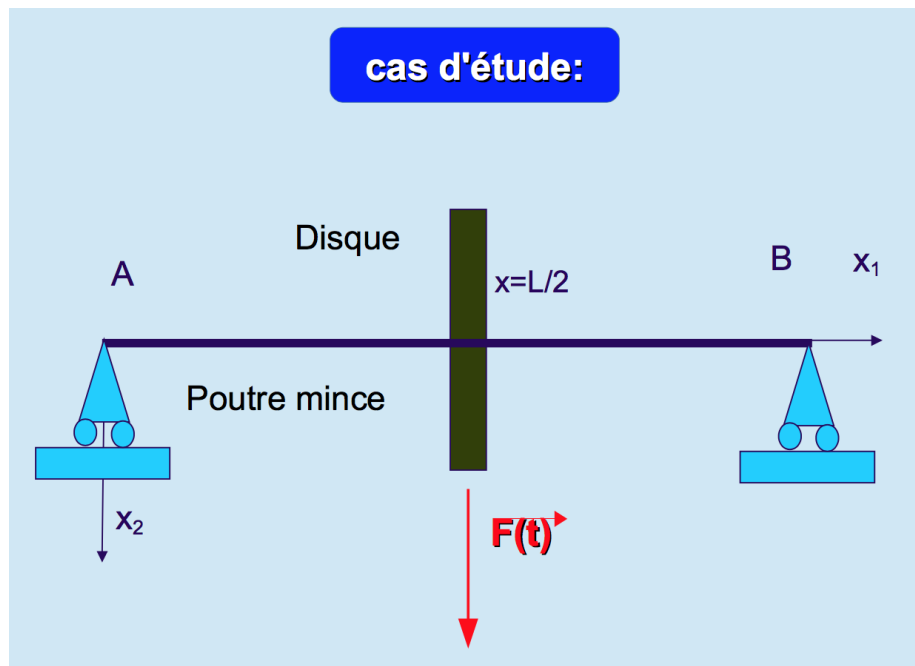


FIGURE 1.1 – Cas d'étude.

## Chapitre 2

## Théorie

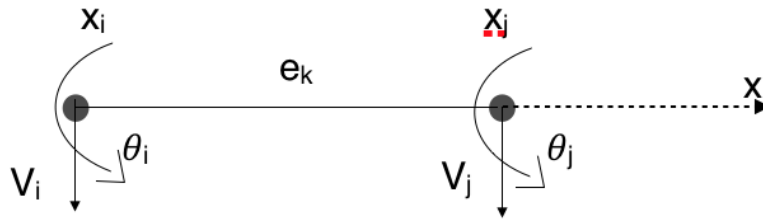


FIGURE 2.1 – Cas d'étude.

On pose que le déplacement est en expression suivante :

$$v(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{L} + a_2 \frac{x^2}{L^2} + a_3 \frac{x^3}{L^3}, \quad \Omega = [x_i, x_j] \quad (2.1)$$

et rotation :

$$\theta(x) = a_1 \frac{1}{L} + a_2 \frac{2x}{L^2} + a_3 \frac{3x^2}{L^3}, \quad \Omega = [x_i, x_j] \quad (2.2)$$

On a déplacement et rotation sur 0 et  $\frac{L}{2}$ , ce que on note  $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$

- $v_i$  est déplacement d'une extrémité à  $x=x_i$  qui est toujours nulle .
- $\theta_i$  est la rotation d'une extrémité à  $x=x_i$
- $v_j$  est déplacement d'autre extrémité à  $x=x_j$  .
- $\theta_j$  est la rotation d'autre extrémité à  $x=x_j$

Il y a 4 conditions , donc on peut camculer la expression de  $v(x)$  :

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{2}{L} & \frac{3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Ensuite , on trouver le relation suivante :

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ -3 & -2L & 3 & -L \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

et on reprend  $v(x)$  :

$$v(x) = v_j + L\theta_i \frac{x}{L} + (-3v_i - 2L\theta_i + 3v_j - L\theta_j) \frac{x^2}{L^2} + (2v_i + L\theta_i - 2v_j + L\theta_j) \frac{x^3}{L^3} \quad (2.3)$$

On noté  $\xi = \frac{x}{L}$  :

$$v(x) = v_i + L\theta_i\xi + (-3v_i - 2L\theta_i + 3v_j - L\theta_j)\xi^2 + (2v_i + L\theta_i - 2v_j + L\theta_j)\xi^3$$

$$v(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j + (-\xi^2 + \xi^3)L\theta_j$$

on noté :

$$\begin{aligned} \phi_i &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \phi_j &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \psi_i &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \\ \psi_j &= (-\xi^2 + \xi^3)L \end{aligned}$$

$$v(x) = \phi_i v_i + \phi_j \theta_i + \psi_i v_j + \psi_j \theta_j$$

On cherche la matrice de la masse par  $v(x)$  :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S \dot{v}^2 \frac{dx}{L}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S (\phi_i \dot{v}_i + \phi_j \dot{\theta}_i + \psi_i \dot{v}_j + \psi_j \dot{\theta}_j)^2 d\xi$$

Après les calculs on trouve la matrice  $\widehat{M}$  :

$$\widehat{M} = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \psi_i & \phi_i \phi_j & \phi_i \psi_j \\ \psi_i \phi_i & \psi_i^2 & \psi_i \phi_j & \psi_i \psi_j \\ \phi_j \phi_i & \phi_j \psi_i & \phi_j^2 & \phi_j \psi_j \\ \psi_j \phi_i & \psi_j \psi_i & \psi_j \phi_j & \psi_j^2 \end{bmatrix} dx$$

Nous allons diviser l'étude de notre système en 2 parties : l'étude des modes symétriques et l'étude des modes antisymétriques, associées à 2 modèles spécifiques.

## 2.1 modes antisymétriques



FIGURE 2.2 – Modèle utilisé pour déterminer les modes antisymétriques de notre cas d'étude.

### 2.1.1 2 DDL

#### méthode des matrices

L'équation du mouvement est de la forme générale :

$$\left[ -\omega^2 \rho S \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

### 2.1.2 N DDL

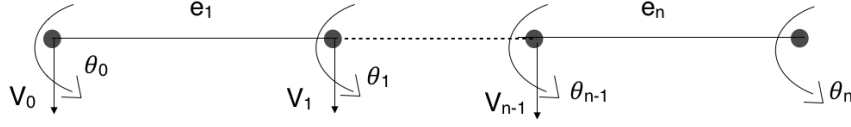


FIGURE 2.3 – Modèle utilisé pour déterminer les modes antisymétriques de notre cas d'étude.

#### matrice élémentaire de masse

On cherche la matrice de la masse par  $v(x)$  :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S \dot{v}^2 \frac{dx}{L}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S (\phi_i \dot{v}_i + \phi_j \dot{\theta}_i + \psi_i \dot{v}_j + \psi_j \dot{\theta}_j)^2 d\xi$$

Après les calculs on trouve la matrice  $\widehat{M}$  :

$$\widehat{M} = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \psi_i & \phi_i \phi_j & \phi_i \psi_j \\ \psi_i \phi_i & \psi_i^2 & \psi_i \phi_j & \psi_i \psi_j \\ \phi_j \phi_i & \phi_j \psi_i & \phi_j^2 & \phi_j \psi_j \\ \psi_j \phi_i & \psi_j \psi_i & \psi_j \phi_j & \psi_j^2 \end{bmatrix} dx$$

$$\widehat{M}_1 = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_i^2 & \psi_i \phi_j & \psi_i \psi_j \\ 0 & \phi_j \psi_i & \phi_j^2 & \phi_j \psi_j \\ 0 & \psi_j \psi_i & \psi_j \phi_j & \psi_j^2 \end{bmatrix} dx \quad \widehat{M}_n = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \psi_i & 0 & \phi_i \psi_j \\ \psi_i \phi_i & \psi_i^2 & 0 & \psi_i \psi_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_j \phi_i & \psi_j \psi_i & 0 & \psi_j^2 \end{bmatrix} dx$$



**matrice élémentaire de raideur**

$$\widehat{K}_{ij} = \begin{bmatrix} K & 0 & -K & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 & -K_\theta \\ -K & 0 & K & 0 \\ 0 & -K_\theta & 0 & K_\theta \end{bmatrix}_{v_i \theta_i v_j \theta_j}$$

$$\widehat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_\theta \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & -K_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_0 \theta_0 v_1 \theta_1} \quad \widehat{K}_n = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_{n-1} \theta_{n-1} v_n \theta_n}$$

**matrice élémentaire de amortissement**

$$\widehat{\lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 & -\lambda_\theta \\ -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda_\theta & 0 & \lambda_\theta \end{bmatrix}_{v_i \theta_i v_j \theta_j}$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_\theta \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_0 \theta_0 v_1 \theta_1} \quad \widehat{\lambda}_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_\theta \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_{n-1} \theta_{n-1} v_n \theta_n}$$

## 2.2 modes symétriques



FIGURE 2.4 – Modèle utilisé pour déterminer les modes symétriques.

### 2.2.1 2 DDL

méthode des matrices

### 2.2.2 N DDL

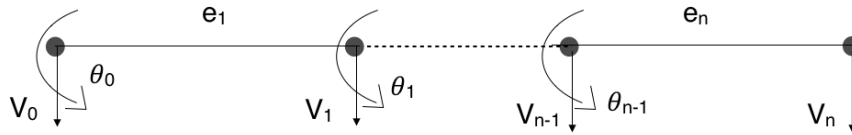


FIGURE 2.5 – Modèle utilisé pour déterminer les modes antisymétriques de notre cas d'étude.

**matrice élémentaire de masse**

On cherche la matrice de la masse par  $v(x)$  :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S \dot{v}^2 \frac{dx}{L}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho S (\phi_i \dot{v}_i + \phi_j \dot{\theta}_i + \psi_i \dot{v}_j + \psi_j \dot{\theta}_j)^2 d\xi$$

Après les calculs on trouve la matrice  $\widehat{M}$  :

$$\widehat{M} = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \psi_i & \phi_i \phi_j & \phi_i \psi_j \\ \psi_i \phi_i & \psi_i^2 & \psi_i \phi_j & \psi_i \psi_j \\ \phi_j \phi_i & \phi_j \psi_i & \phi_j^2 & \phi_j \psi_j \\ \psi_j \phi_i & \psi_j \psi_i & \psi_j \phi_j & \psi_j^2 \end{bmatrix} dx$$

$$\widehat{M}_1 = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_i^2 & \psi_i \phi_j & \psi_i \psi_j \\ 0 & \phi_j \psi_i & \phi_j^2 & \phi_j \psi_j \\ 0 & \psi_j \psi_i & \psi_j \phi_j & \psi_j^2 \end{bmatrix} dx \quad \widehat{M}_n = \rho S \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \psi_i & \phi_i \phi_j & 0 \\ \psi_i \phi_i & \psi_i^2 & \psi_i \phi_j & 0 \\ \phi_j \phi_i & \phi_j \psi_i & \phi_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

**matrice élémentaire de raideur**

$$\widehat{K}_{ij} = \begin{bmatrix} K & 0 & -K & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 & -K_\theta \\ -K & 0 & K & 0 \\ 0 & -K_\theta & 0 & K_\theta \end{bmatrix}_{v_i \theta_i v_j \theta_j}$$

$$\widehat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_\theta \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & -K_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_0 \theta_0 v_1 \theta_1} \quad \widehat{K}_n = \begin{bmatrix} K & 0 & -K & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 & 0 \\ -K & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_{n-1} \theta_{n-1} v_n \theta_n}$$

**matrice élémentaire de amortissement**

$$\widehat{\lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 & -\lambda_\theta \\ -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda_\theta & 0 & \lambda_\theta \end{bmatrix}_{v_i \theta_i v_j \theta_j}$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_\theta \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda_\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_0 \theta_0 v_1 \theta_1} \quad \widehat{\lambda}_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{v_{n-1} \theta_{n-1} v_n \theta_n}$$

## 2.3 équations du mouvement

### 2.3.1 2 DDL

L'équation du mouvement est de la forme générale :

$$\left[ -\omega^2 \rho S \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 N DDL

$$\left[ -\omega^2 \rho S \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \cdots & \cdots & \lambda_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & \cdots & K_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & \cdots & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X_{10} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{N0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ F \end{pmatrix}$$

## Chapitre 3

# Numérique sur SCILAB

## Chapitre 4

# Conclusion

Dans ce DM, nous avons étudié le modèle vibratoire de deux cas de sollicitations sur une même structure. Grâce à une étude statique, nous avons pu établir un modèle vibratoire de la structure et simuler son comportement avec des paramètres physiques et des conditions initiales différentes. Ce modèle a été trouvé en respectant les hypothèses de départ et en s'abstrayant de certains effets comme l'absence de cisaillement au niveau des liaisons, la négligence des masses des poutres verticales ainsi que la négligence de la compression dans le cas 1. N'oublions pas non plus que le bloc a été considéré comme indéformable ce qui ne peut être le cas dans la réalité.

Nous avons pu constater que tant qu'on reste dans le domaine élastique de la structure, la réponse vibratoire dépendait du facteur d'amortissement, de la raideur, de la masse et de la sollicitation initiale. Ainsi, ce sont ces paramètres qu'il faut étudier et modifier si l'on veut changer les propriétés vibratoires de la structure.

Pour conclure, nous pouvons dire que ce DM nous aura permis, en équipe, de mettre en pratique la théorie sur les modèles vibratoire dans le cas des vibrations libres amorties. Cette étude est restée dans un cadre simplifié avec des hypothèses qui reste applicable dans certains cas seulement. Il ne faut jamais perdre de l'oeil les hypothèses de départ qui nous ont permis de construire un modèle.