对偶问题计算示例答案

对偶问题计算示例

- 假设训练集有3个样本点，分别为x1 = (1,1) y1 = -1, x2=(3,3) y2 = 1, x3 = (4,3),y3 = 1
- 写出对偶问题的形式，通过求对偶问题求最大间隔分离超平面

解 根据所给数据，对偶问题是

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j) - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$= \frac{1}{2}(18\alpha_1^2 + 25\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 42\alpha_1\alpha_2 - 12\alpha_1\alpha_3 - 14\alpha_2\alpha_3) - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3$$

解这一最优化问题．将 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 代入目标函数并记为

$$s(\alpha_1,\alpha_2) = 4\alpha_1^2 + \frac{13}{2}\alpha_2^2 + 10\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2$$

对 α_1,α_2 求偏导数并令其为 0，易知 $s(\alpha_1,\alpha_2)$ 在点 $\left(\frac{3}{2},-1\right)^{\mathrm{T}}$ 取极值，但该点不满足约束条件 $\alpha_2 \geqslant 0$，所以最小值应在边界上达到．

当 $\alpha_1 = 0$ 时，最小值 $s\left(0, \frac{2}{13}\right) = -\frac{2}{13}$；当 $\alpha_2 = 0$ 时，最小值 $s\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{4}$．于是 $s(\alpha_1, \alpha_2)$ 在 $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = 0$ 达到最小，此时 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{4}$．

这样，$\alpha_1^* = \alpha_3^* = \frac{1}{4}$ 对应的实例点 x_1, x_3 是支持向量．根据式 (7.25) 和式 (7.26) 计算得

$$w_1^* = w_2^* = \frac{1}{2}$$

$$b^* = -2$$

分离超平面为

$$\frac{1}{2}x^{(1)}+\frac{1}{2}x^{(2)}-2=0$$

分类决策函数为

$$f(x)=\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}x^{(1)}+\frac{1}{2}x^{(2)}-2\right)$$