

Licenciatura en ciencia de la computación



ALGORITMO DE STRASSEN

Complejidad

Profesor:
Nicolas Thériault

Autor:
Sergio Salinas
Danilo Abellá

Contents

1	Introducción	3
2	Análisis teorico	3
2.1	Demostración Strassen	3
2.2	Análisis complejidad	4
2.2.1	Strassen	4
2.2.2	Multiplicación clásica	4
2.3	Valor de n_0	5
3	Algoritmos Desarrollados	7
4	Información de Hardware y Software	9
4.1	Notebook - Danilo Abellá	9
4.1.1	Software	9
4.1.2	Hardware	9
4.2	Notebook - Sergio Salinas	9
4.2.1	Software	9
4.2.2	Hardware	9
5	Curvas de desempeño de resultados	10
5.1	Multiplicación clasica vs distintos valores de n_0	10
5.2	$n_0 = 16*k, k=\{1,2 \dots 16\}$	12
6	Conclusiones	14

1 Introducción

Este informe trata sobre el algoritmos de multiplicación de Strassen, se verá su demostración, su complejidad y la de la multiplicación normal y se verá su eficiencia.

Los programas fueron escritos en lenguaje C usando el compitalador GCC versión 5.4.

2 Análisis teorico

2.1 Demostración Strassen

Dada la multiplicación de dos matrices A y B

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Se calculan los S y los T de la técnica de Strassen.

$$\begin{aligned} S_1 &= A_{21} + A_{22} \\ S_2 &= A_{21} + A_{22} - A_{11} \\ S_3 &= A_{11} - A_{21} \\ S_4 &= A_{12} - A_{21} - A_{22} + A_{11} \\ T_1 &= B_{12} - B_{11} \\ T_2 &= B_{22} - B_{12} + B_{11} \\ T_3 &= B_{22} - B_{12} \\ T_4 &= B_{22} - B_{12} + B_{11} - B_{21} \end{aligned}$$

Se calculan los P.

$$\begin{aligned} P_1 &= A_{11}B_{21} \\ P_2 &= A_{12}B_{21} \\ P_3 &= A_{12}B_{22} - A_{21}B_{22} - A_{22}B_{22} + A_{11}B_{22} \\ P_4 &= A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{22}B_{21} \\ P_5 &= A_{21}B_{11} - A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} - A_{22}B_{11} \\ P_6 &= A_{21}B_{22} - A_{21}B_{12} + A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{11}B_{22} + A_{11}B_{22} \\ &\quad + A_{11}B_{12} - A_{11}B_{11} \\ P_7 &= A_{11}B_{22} - A_{11}B_{12} - A_{21}B_{22} + A_{21}B_{12} \end{aligned}$$

Se calculan los U

$$\begin{aligned}
 U_1 &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\
 U_2 &= A_{21}B_{22} - A_{21}B_{12} + A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{11}B_{22} + A_{11}B_{12} \\
 U_3 &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} \\
 U_4 &= A_{21}B_{22} + A_{22}B_{22} - A_{11}B_{22} + A_{11}B_{12} \\
 U_5 &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\
 U_6 &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\
 U_7 &= A_{22}B_{22} + A_{21}B_{12}
 \end{aligned}$$

De está forma se obtiene que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} U_1 & U_5 \\ U_6 & U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Con lo que se demuestra que el algoritmo de strassen es equivalente a la multiplicación de matrices.

2.2 Análisis complejidad

2.2.1 Strassen

Strassen hace en total 7 multiplicaciones más 14 sumas (y restas, aunque se tratan como su fueran la misma operación) y además divide el orden de la matriz en dos por cada recurrencia por lo su relación de recurrencia es

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 14n^2$$

Dado el teorema maestro se obtiene que $a = 7$, $b = 2$ y $d = 2$, obteniendo que $7 > 2^2$ por que la complejidad del algoritmos es

$$T(n) \in O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.80735})$$

2.2.2 Multiplicación clásica

La multiplicación clásica de matrices cuadradas de orden 2 debe hacer un total de 8 multiplicaciones escalares y 4 sumas de coste n^2 , por lo que si quiere trabajar con bloques de matrices cuadradas de orden $n = 2^k$ el total de multiplicaciones tendría como relación de recurrencia:

$$T(2^k) = 8 \cdot T(2^{k-1}) + 4(2^k)^2$$

Usando el teorema maestro se obtiene que la complejidad de la multiplicaciones es

$$T(n) \in O(n^{\log_2 8}) = O(n^3)$$

Lo que es consistente con el costo $n^3M + (n^3 - n^2)A$.

2.3 Valor de n_0

Después de probar con varias potencias de 2 se pudo concluir que el punto en donde Strassen lleva ventaja por sobre la multiplicación clásica es en $n_0 = 16$.

Esto es debido a que en los valores menores y mayores a 16 se puede apreciar dos rectas continuas con crecimiento distinto, mientras que cuando n_0 vale 16 se pueden ver los resultados como una sola recta.

3 Algoritmos Desarrollados

Algorithm 1: Strassen. Multiplica dos matrix A y B

Data: Dos matrices A y B de orden n, n_0

Result: Matriz C

if $n \leq n_0$ **then**

 | A·B;

else

 Dividir A en A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} ;

 Dividir B en B_{11} , B_{12} , B_{21} y B_{22} ;

$S_1 \leftarrow A_{21} + A_{22}$; $T_1 \leftarrow B_{12} - B_{11}$;

$S_2 \leftarrow S_1 - A_{11}$; $T_2 \leftarrow B_{22} - T_1$;

$S_3 \leftarrow A_{11} - A_{21}$; $T_3 \leftarrow B_{22} - B_{12}$;

$S_4 \leftarrow A_{12} - S_2$; $T_4 \leftarrow T_2 - B_{21}$;

if $n/4 \leq n_0$ **then**

 | $P_1 \leftarrow A_{11} \cdot B_{11}$; $P_2 \leftarrow A_{12} \cdot B_{21}$;

 | $P_3 \leftarrow S_4 \cdot B_{22}$; $P_4 \leftarrow A_{22} \cdot T_4$;

 | $P_5 \leftarrow S_1 \cdot T_1$; $P_6 \leftarrow S_2 \cdot T_2$;

 | $P_7 \leftarrow S_3 \cdot T_3$;

else

 | $P_1 \leftarrow \text{strassen}(A_{11}, B_{11}, n, n_0)$;

 | $P_2 \leftarrow \text{strassen}(A_{12}, B_{21}, n, n_0)$;

 | $P_3 \leftarrow \text{strassen}(S_4, B_{22}, n, n_0)$;

 | $P_4 \leftarrow \text{strassen}(A_{22}, T_4, n, n_0)$;

 | $P_5 \leftarrow \text{strassen}(S_1, T_1, n, n_0)$;

 | $P_6 \leftarrow \text{strassen}(S_2, T_2, n, n_0)$;

 | $P_7 \leftarrow \text{strassen}(S_3, T_3, n, n_0)$;

end

$U_1 \leftarrow P_1 + P_2$;

$U_2 \leftarrow P_1 + P_6$;

$U_3 \leftarrow U_2 + P_7$;

$U_4 \leftarrow U_2 + P_5$;

$U_5 \leftarrow U_4 + P_3$;

$U_6 \leftarrow U_3 - P_4$;

$U_7 \leftarrow U_3 + P_5$;

end

return $C \leftarrow \begin{pmatrix} U_1 & U_5 \\ U_6 & U_7 \end{pmatrix}$

Algorithm 2: Multiply Matrix. Multiplica dos matrices A y B

Data: Dos matrices A y B de largo n**Result:** La matrix C con la multiplicación de A y B

```
for  $i \leftarrow 0 \dots n-1$  do
    for  $j \leftarrow 0 \dots n-1$  do
         $C_{ij} \leftarrow 0$ ;
        for  $k \leftarrow 0 \dots n-1$  do
             $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$ 
        end
    end
end
end
```

Algorithm 3: Sum Matrix. Suma dos matrices A y B

Data: Dos matrices A y B de largo n**Result:** La matrix C con la suma de A y B

```
for  $i \leftarrow 0 \dots n-1$  do
    for  $j \leftarrow 0 \dots n-1$  do
         $C_{ij} \leftarrow A_{ij} + B_{ij}$ 
    end
end
end
```

Algorithm 4: Sub Matrix. Resta dos matrices A y B

Data: Dos matrices A y B de largo n**Result:** La matrix C con la resta de A y B

```
for  $i \leftarrow 0 \dots n-1$  do
    for  $j \leftarrow 0 \dots n-1$  do
         $C_{ij} \leftarrow A_{ij} - B_{ij}$ 
    end
end
end
```

4 Información de Hardware y Software

4.1 Notebook - Danilo Abellá

4.1.1 Software

- SO: Xubuntu 16.04.1 LTS
- GMP Library
- Mousepad 0.4.0

4.1.2 Hardware

- AMD Turion(tm) X2 Dual-Core Mobile RM-72 2.10GHz
- Memoria (RAM): 4,00 GB(3,75 GB utilizable)
- Adaptador de pantalla: ATI Raedon HD 3200 Graphics

4.2 Notebook - Sergio Salinas

4.2.1 Software

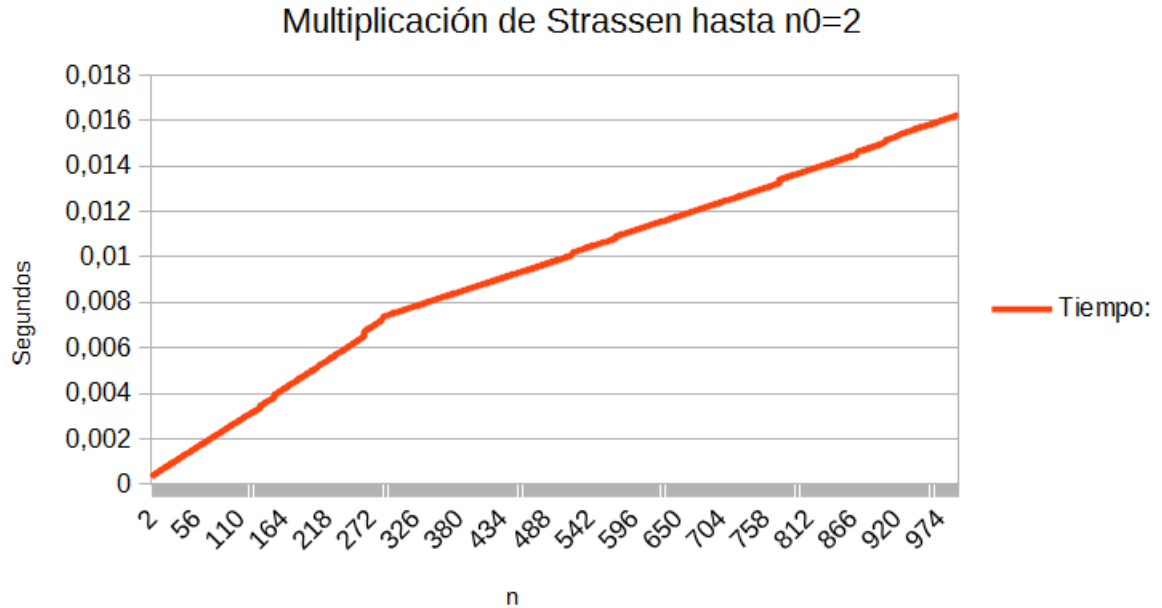
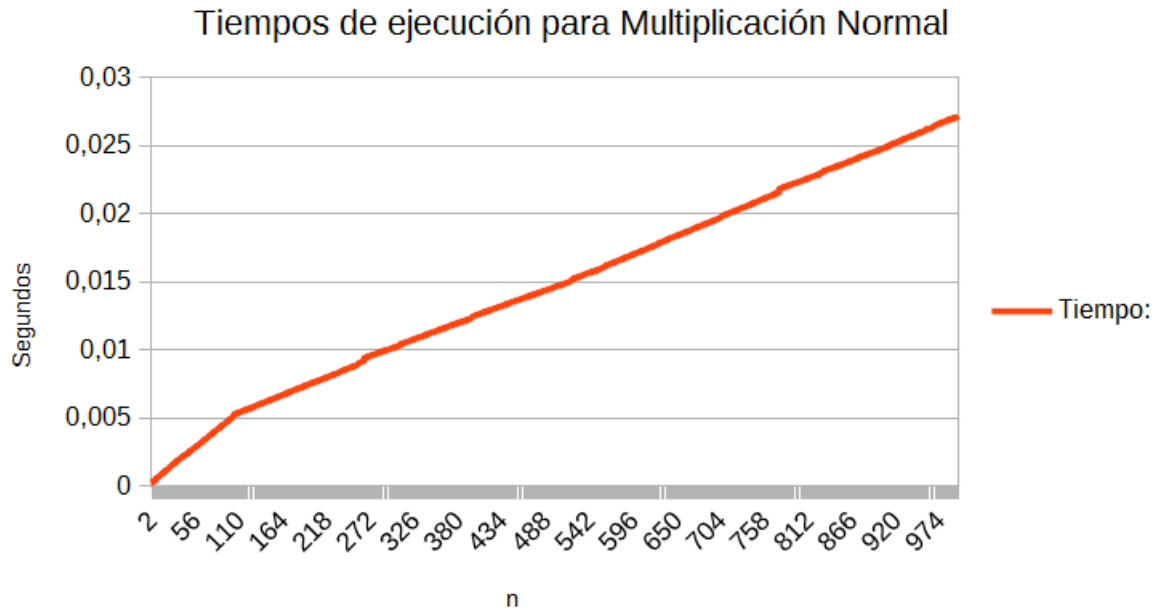
- SO: ubuntu Gnome 16.04 LTS
- Compilador: gcc version 5.4.0 20160609
- Editor de text: Atom

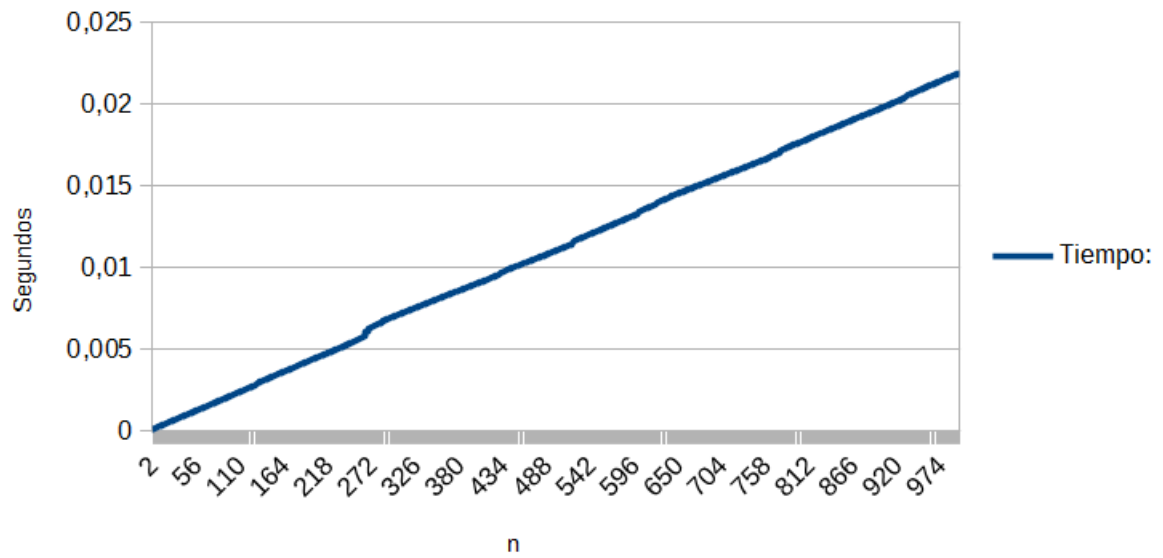
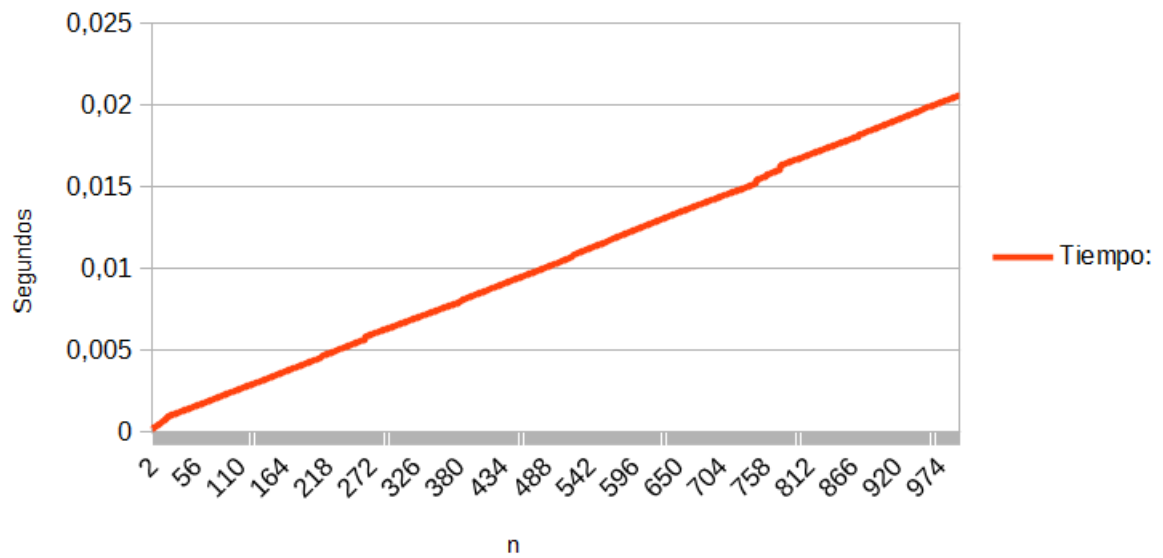
4.2.2 Hardware

- Procesador: Intel Core i7-6500U CPU 2.50GHz x 4
- Video: Intel HD Graphics 520 (Skylake GT2)

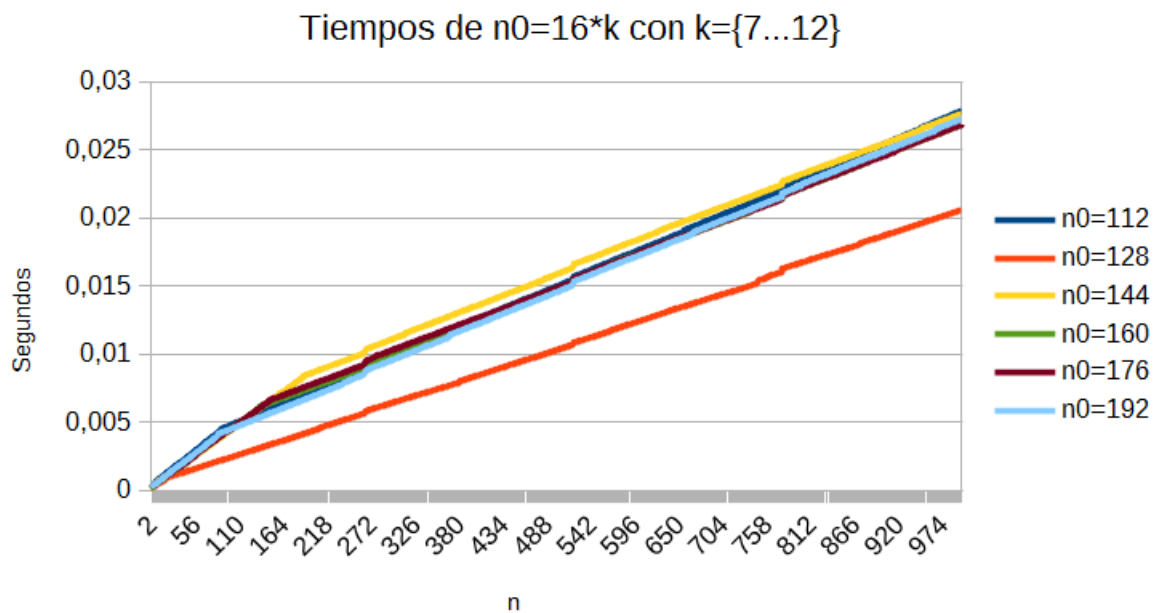
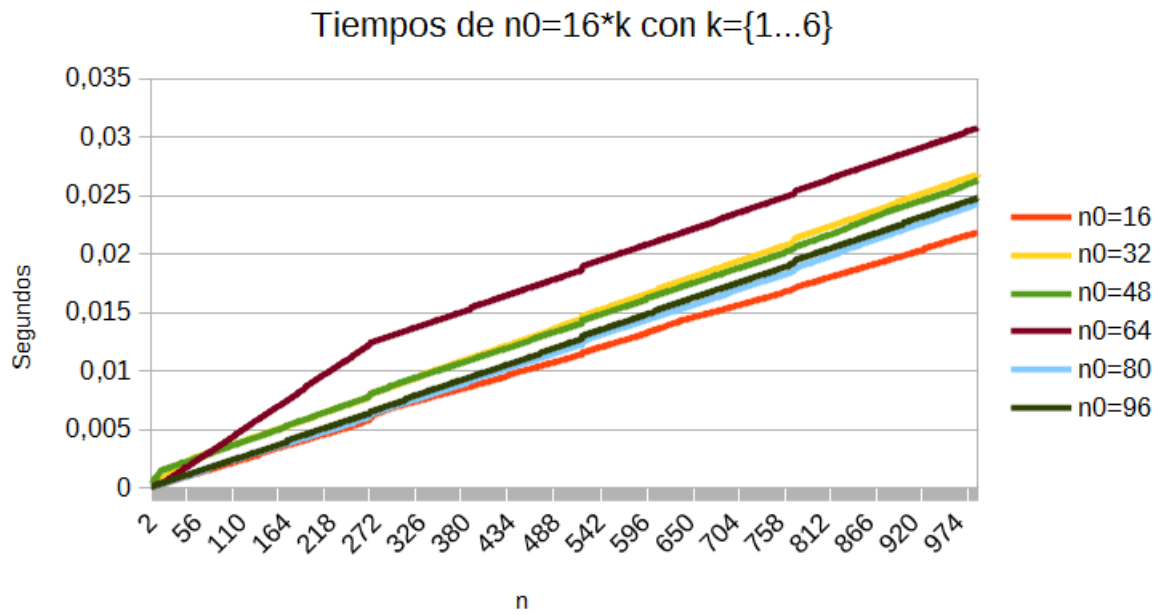
5 Curvas de desempeño de resultados

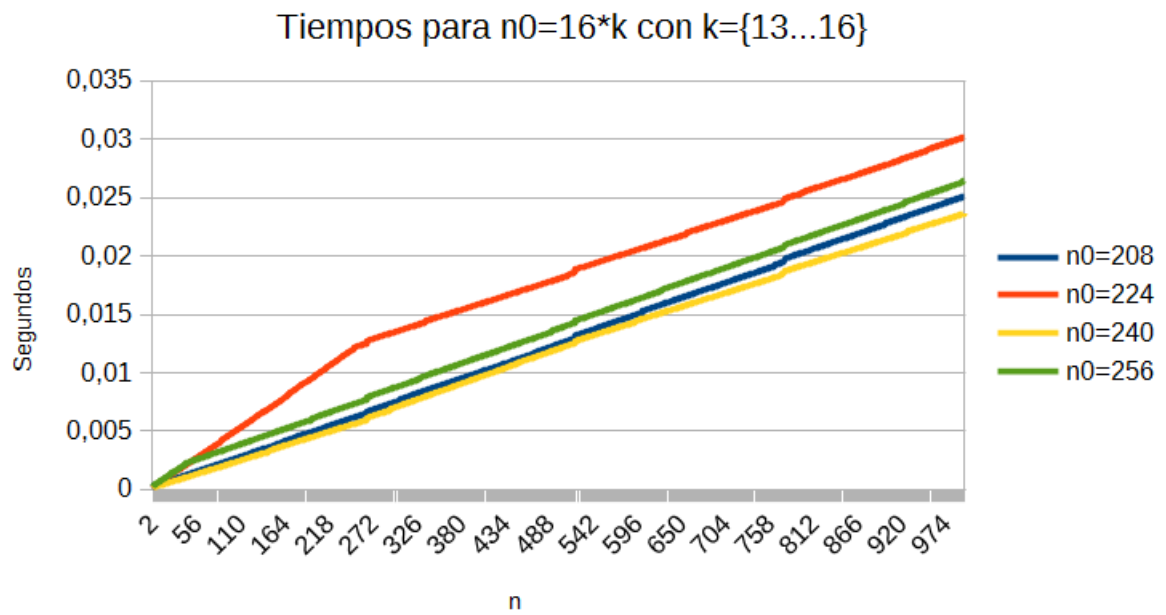
5.1 Multiplicación clásica vs distintos valores de n_0



Multiplicación de Strassen hasta $n_0=16$ Multiplicación de Strassen hasta $n_0=128$ 

5.2 $n_0 = 16 \cdot k$, $k = \{1, 2 \dots 16\}$





6 Conclusiones

Se puede concluir que la eficiencia de la multiplicación de Strassen ($O(n^{2.801})$) por sobre la clásica ($O(n^3)$) es indiscutible, llegando esta última incluso a tomar el doble de tiempo que Strassen cuando aunque la última es más eficiente cuando se trata de matrices de orden estrictamente menores a 16.