UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
LICENCIATURA EN CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
Profesor(es): Nicolas Thériault
Primer Semestre de 2017

Complejidad de Algoritmos – Laboratorio 1

1. Objetivos

El objetivo de este laboratorio es de analizar y aplicar un algoritmo del tipo dividir-y-conquistar, especificamente el algoritmo de Strassen para la multiplicación de matrices.

El laboratorio se trabajará en grupos de 2 o 3 alumnos, entregando un resultado (informe y programas) por grupo.

2. Problema

La multiplicación de matrices, en su descripción clásica para matrices $n \times n$ (n par), se puede escribir con submatrices $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ como:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

La técnica de Strassen consiste en reemplazar estas operaciones con la secuencia de operaciones siguientes: Una primera secuencia de sumas/restas de matrices:

$$\begin{aligned} S_1 &\longleftarrow A_{21} + A_{22} \\ S_2 &\longleftarrow S_1 - A_{11} \\ S_3 &\longleftarrow A_{11} - A_{21} \\ S_4 &\longleftarrow A_{12} - S_2 \\ T_1 &\longleftarrow B_{12} - B_{11} \\ T_2 &\longleftarrow B_{22} - T_1 \\ T_3 &\longleftarrow B_{22} - B_{12} \\ T_4 &\longleftarrow T_2 - B_{21} \end{aligned}$$

seguido de una secuencia de productos de matrices:

$$\begin{aligned} P_1 &\longleftarrow A_{11}B_{11} \\ P_2 &\longleftarrow A_{12}B_{21} \\ P_3 &\longleftarrow S_4B_{22} \\ P_4 &\longleftarrow A_{22}T_4 \\ P_5 &\longleftarrow S_1T_1 \\ P_6 &\longleftarrow S_2T_2 \\ P_7 &\longleftarrow S_3T_3 \end{aligned}$$

y una segunda secuencia de sumas/restas de matrices:

$$\begin{aligned}
U_1 &\longleftarrow P_1 + P_2\\
U_2 &\longleftarrow P_1 + P_6\\
U_3 &\longleftarrow U_2 + P_7\\
U_4 &\longleftarrow U_2 + P_5\\
U_5 &\longleftarrow U_4 + P_3\\
U_6 &\longleftarrow U_3 - P_4\\
U_7 &\longleftarrow U_3 + P_5
\end{aligned}$$

de las cuales obtenemos el producto

$$AB \longleftarrow \begin{pmatrix} U_1 & U_5 \\ U_6 & U_7 \end{pmatrix}$$

Ambas la múltiplicación clásica o la técnica de Strassen se pueden aplicar de forma recursiva para los productos de matrices $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$. Observamos que la suma o resta de dos matrices $n \times n$ (para cualquier n) requiere exactamente n^2 sumas/restas de coeficientes. Para hacer cuentas de operaciones, podemos utilizar la notación A para el costo de una suma/resta de coeficientes, y M para el producto de coeficientes.

3. Se solicita

1. Re-escribir la multiplicación clásica en el mismo formato que se utilizó para el método de Strassen.
2. Verificar algebraicamente que el algoritmo de Strassen es correcto.
3. Obtener relaciones de recurrencias para el análisis dividir-y-conquistar en ambos casos, con una cuenta detallada de las cantidades de sumas/restas necesarias.
4. Resolver (exactamente) la relación de recurrencia para la multiplicación clásica, el costo de la multiplicación de matrices $n \times n$ cuando n es una potencia de 2. Verificar que es de consistente con el costo $n^3M + (n^3 - n^2)A$.
5. Determinar, en termino del cociente M/A, a partir de que valor n_0 de n la técnica de Strassen da ventaja sobre la técnica clásica.
6. Determinar el cociente M/A de su procesador (en puntos flotantes) y el tamaño mínimo n_0 a lo cuál la técnica de Strassen da ventajas.
   Recomendación: para simplificar el item 10, aproximar el valor de n_0 al múltiplo de 16 más cercano.

7. Escribir un algoritmo para multiplicar matrices a costos mínimo, tomando en cuenta el tamaño de las matrices y el cociente M/A.

8. Programar el algoritmo de multiplicación clásica (directa) de matrices $n \times n$, a lo menos hasta $16n_0$.

9. Programar dos versiones del algoritmo inductivo (para matrices con coeficientes de tipo "double"). Una versión debe ser el algoritmo optimizado (con la técnica de Strassen), la otra debe corresponder a la multiplicación clásica (con inducción a partir de n_0).

10. Para $n_1 = kn_0$ con $k \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 16\}$, comprobar los tiempos de multiplicación con el algoritmo clásico y con la técnica de Strassen, utilizando matrices aleatorias. Verificar que ambos algoritmos dan el mismo resultado (dentro de un pequeño margen de error).
Recomendación: comparar con la multiplicación directa también.
Observación: no incluir la generación de las matrices en las mediciones de tiempo.

11. Entregar un informe, idealmente escrito en LaTeX, detallando el análisis teórico, los algoritmos desarrollados, y los resultados de programación obtenidos.

12. Entregar los programas utilizados, bien escritos y documentados, en lenguaje C o C++.

4. Evaluación

La nota del laboratorio se calculará según la ponderación siguiente:

- Análisis [**30 %**]:
  El análisis de complejidad es correcto y completo.

- Informe [**30 %**]:
  El informe detalla el análisis teórico, los algoritmos desarrollados, y los resultados de programación obtenidos.

- Implementación [**40 %**]
  El programa está escrito de forma que puede ser leído y/o re-utilizado fácilmente por otros programadores: la redacción es limpia (con espacios y divisiones claras) y bien documentada, las sub-funciones y las variables tienen nombres naturales (que indican a que sirven) o acompañadas de comentarios aclarando a que sirven. Las diferentes versiones (algoritmos) de la multiplicación matricial dan el mismo resultado (dentro de un pequeño margen de error).