Licenciatura en ciencia de la computación

Algoritmo de Strassen

Complejidad

Profesor:
Nicolas Thériault

Autor:
Sergio Salinas
Danilo Abellá

Contents

1 Introducción

Este informe trata sobre el algoritmos de multiplicación de Strassen, se verá su demostración, su complejidad y la de la multiplicación normal y se verá su eficiencia.

Los programas fueron escritos en lenguaje C usando el compitalador GCC versión 5.4.

2 Análisis teorico

2.1 Demostración Strassen

Dada la multiplicación de dos matrices A y B

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Se calculan los S y los T de la técnica de Strassen.

$$\begin{aligned} S_1 &= A_{21} + A_{22} \\ S_2 &= A_{21} + A_{22} - A_{11} \\ S_3 &= A_{11} - A_{21} \\ S_4 &= A_{12} - A_{21} - A_{22} + A_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= B_12 - B_{11} \\ T_2 &= B_{22} - B_{12} + B_{11} \\ T_3 &= B_{22} - B_{12} \\ T_4 &= B_{22} - B_{12} + B_{11} - B_{21} \end{aligned}$$

Se calculan los P.

$$\begin{aligned} P_1 &= A_{11}B_{21} \\ P_2 &= A_{12}B_{21} \\ P_3 &= A_{12}B_{22} - A_{21}B_{22} - A_{22}B_{22} + A_{11}B_{22} \\ P_4 &= A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{22}B_{21} \\ P_5 &= A_{21}B_{11} - A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} - A_{22}B_{11} \\ P_6 &= A_{21}B_{22} - A_{21}B_{12} + A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{11}B_{22} + A_{11}B_{22} \\ &\quad + A_{11}B_{12} - A_{11}B_{11} \\ P_7 &= A_{11}B_{22} - A_{11}B_{12} - A_{21}B_{22} + A_{21}B_{12} \end{aligned}$$

Se calculan los U

$$
\begin{aligned}
U_1 &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\
U_2 &= A_{21}B_{22} - A_{21}B_{12} + A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{11}B_{22} + A_{11}B_{12} \\
U_3 &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{22} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{11} \\
U_4 &= A_{21}B_{22} + A_{22}B_{22} - A_{11}B_{22} + A_{11}B_{12} \\
U_5 &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\
U_6 &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\
U_7 &= A_{22}B_{22} + A_{21}B_{12}
\end{aligned}
$$

De está forma se obtiene que

$$
A \cdot B = \begin{pmatrix} U_1 & U_5 \\ U_6 & U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}
$$

Con lo que se demuestra que el algoritmo de strassen es equivalente a la multiplicación de matrices.

2.2 Análisis complejidad

2.2.1 Strassen

Strassen hace en total 7 multiplicaciones más 14 sumas (y restas, aunque se tratan como su fueran la misma operación) y además divide el orden de la matriz en dos por cada recurrencia por lo su relación de recurrencia es

$$
T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 14n^2
$$

Dado el teorema maestro se obtiene que $a = 7$, $b = 2$ y $d = 2$, obteniendo que $7 > 2^2$ por que la complejidad del algoritmos es

$$
T(n) \in O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.80735})
$$

2.2.2 Multiplicación clásica

La multiplicación clásica de matrices cuadradas de orden 2 debe hacer un total de 8 multiplicaciones escalares y 4 sumas de coste n^2, por lo que si quiere trabajar con bloques de matrices cuadradas de orden $n = 2^k$ el total de multiplicaciones tendría como relación de recurrencia:

$$
T(2^k) = 8 \cdot T(2^{k-1}) + 4(2^k)^2
$$

Usando el teorema maestro se obtiene que la complejidad de la multiplicaciones es

$$T(n) \in O(n^{\log_2 8}) = O(n^3)$$

Lo que es consistente con el costo $n^3M + (n^3 - n^2)A$.

2.3 Valor de $\mathbf{n_0}$

Después de probar con varias potencias de 2 se pudo concluir que el punto en donde Strassen lleva ventaja por sobre la multiplicación clásica es en $n_0 = 16$.

Esto es debido a que en los valores menores y mayores a 16 se puede apreciar dos rectas continuas con crecimiento distinto, mientras que cuando n_0 vale 16 se pueden ver los resultados como una sola recta.

3 Algoritmos Desarrollados

Algorithm 1: Strassen. Multiplica dos matrix A y B

Data: Dos matrices A y B de orden n, n_0

Result: Matriz C

if $n \leq n_0$ **then**

  A·B;

else

  Dividir A en A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22};

  Dividir B en B_{11}, B_{12}, B_{21} y B_{22};

  $S_1 \leftarrow A_{21} + A_{22}$; $T_1 \leftarrow B_{12} - B_{11}$;

  $S_2 \leftarrow S_1 - A_{11}$; $T_2 \leftarrow B_{22} - T_1$;

  $S_3 \leftarrow A_{11} - A_{21}$; $T_3 \leftarrow B_{22} - B_{12}$;

  $S_4 \leftarrow A_{12} - S_2$; $T_4 \leftarrow T_2 - B_{21}$;

  if $n/4 \leq n_0$ **then**

    $P_1 \leftarrow A_{11} \cdot B_{11}$; $P_2 \leftarrow A_{12} \cdot B_{21}$;

    $P_3 \leftarrow S_4 \cdot B_{22}$; $P_4 \leftarrow A_{22} \cdot T_4$;

    $P_5 \leftarrow S_1 \cdot T_1$; $P_6 \leftarrow S_2 \cdot T_2$;

    $P_7 \leftarrow S_3 \cdot T_3$;

  else

    $P_1 \leftarrow strassen(A_{11}, B_{11}, n, n_0)$;

    $P_2 \leftarrow strassen(A_{12}, B_{21}, n, n_0)$;

    $P_3 \leftarrow strassen(S_4, B_{22}, n, n_0)$;

    $P_4 \leftarrow strassen(A_{22}, T_4, n, n_0)$;

    $P_5 \leftarrow strassen(S_1, T_1, n, n_0)$;

    $P_6 \leftarrow strassen(S_2, T_2, n, n_0)$;

    $P_7 \leftarrow strassen(S_3, T_3, n, n_0)$;

  end

  $U_1 \leftarrow P_1 + P_2$;

  $U_2 \leftarrow P_1 + P_6$;

  $U_3 \leftarrow U_2 + P_7$;

  $U_4 \leftarrow U_2 + P_5$;

  $U_5 \leftarrow U_4 + P_3$;

  $U_6 \leftarrow U_3 - P_4$;

  $U_7 \leftarrow U_3 + P_5$;

end

return $C \leftarrow \begin{pmatrix} U_1 & U_5 \\ U_6 & U_7 \end{pmatrix}$

Algorithm 2: Multiply Matrix. Multiplica dos matrices A y B

Data: Dos matrices A y B de largo n

Result: La matrix C con la multiplicación de A y B

for $i \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
  for $j \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
    $C_{ij} \leftarrow 0$;
    for $k \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
      $C_i j \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$
    end
  end
end

Algorithm 3: Sum Matrix. Suma dos matrices A y B

Data: Dos matrices A y B de largo n

Result: La matrix C con la suma de A y B

for $i \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
  for $j \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
    $C_i j \leftarrow A_{ij} + B_{ij}$
  end
end

Algorithm 4: Sub Matrix. Resta dos matrices A y B

Data: Dos matrices A y B de largo n

Result: La matrix C con la resta de A y B

for $i \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
  for $j \leftarrow 0 \ldots n\text{-}1$ **do**
    $C_i j \leftarrow A_{ij} - B_{ij}$
  end
end

4 Información de Hardware y Software

4.1 Notebook - Danilo Abellá

4.1.1 Software

- SO: Xubuntu 16.04.1 LTS
- GMP Library
- Mousepad 0.4.0

4.1.2 Hardware

- AMD Turion(tm) X2 Dual-Core Mobile RM-72 2.10GHz
- Memoria (RAM): 4,00 GB(3,75 GB utilizable)
- Adaptador de pantalla: ATI Raedon HD 3200 Graphics

4.2 Notebook - Sergio Salinas

4.2.1 Software

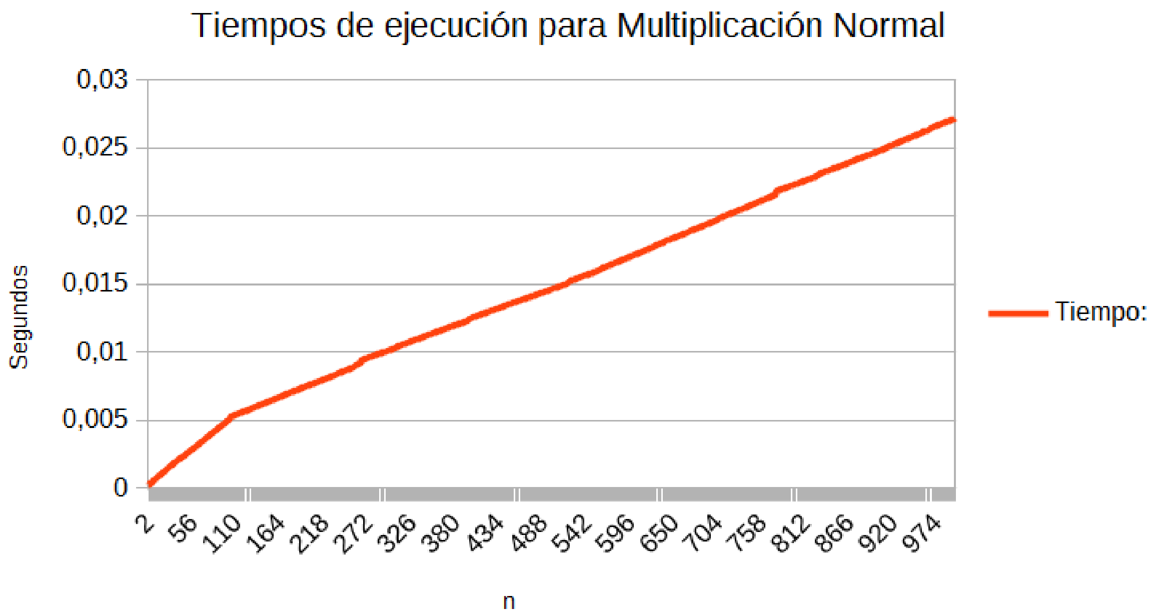
- SO: ubuntu Gnome 16.04 LTS
- Compilador: gcc version 5.4.0 20160609
- Editor de text: Atom

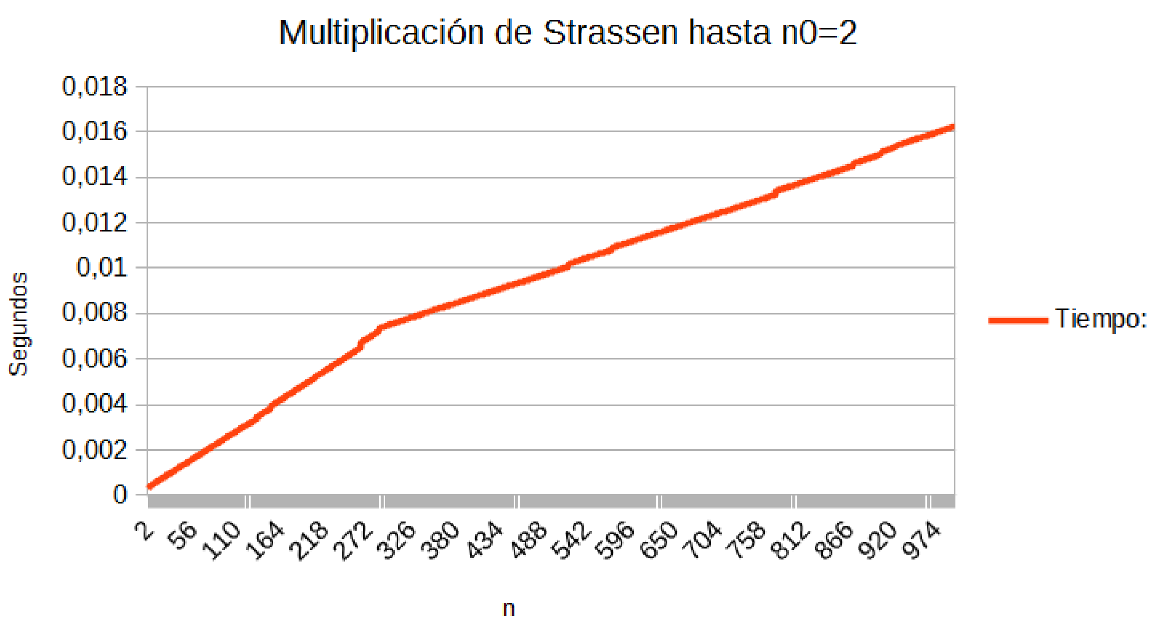
4.2.2 Hardware

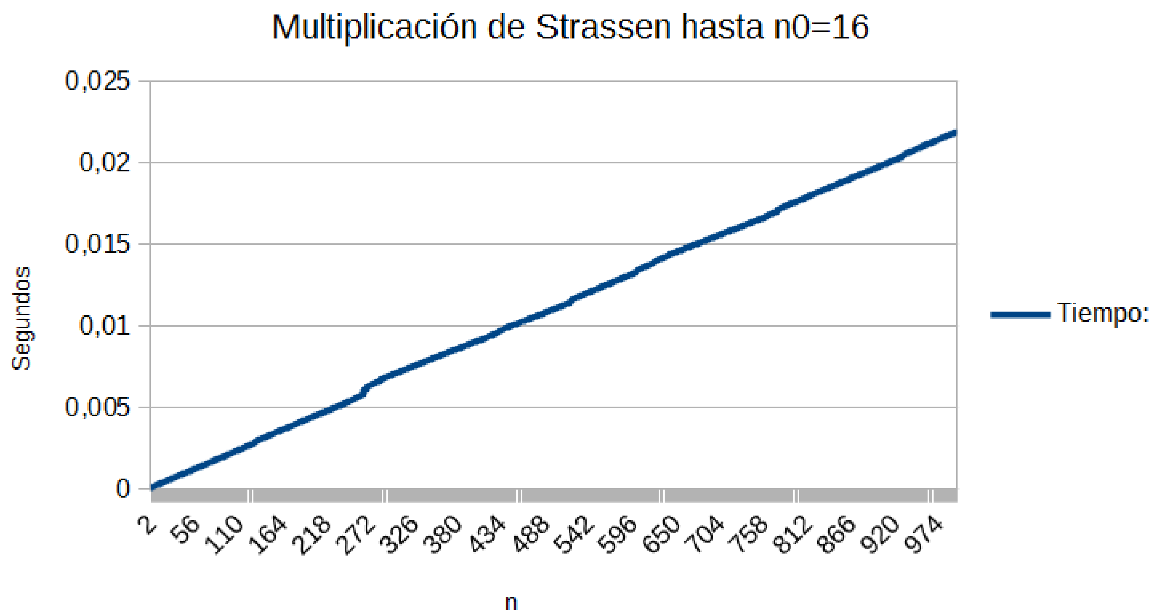
- Procesador: Intel Core i7-6500U CPU 2.50GHz x 4
- Video: Intel HD Graphics 520 (Skylake GT2)

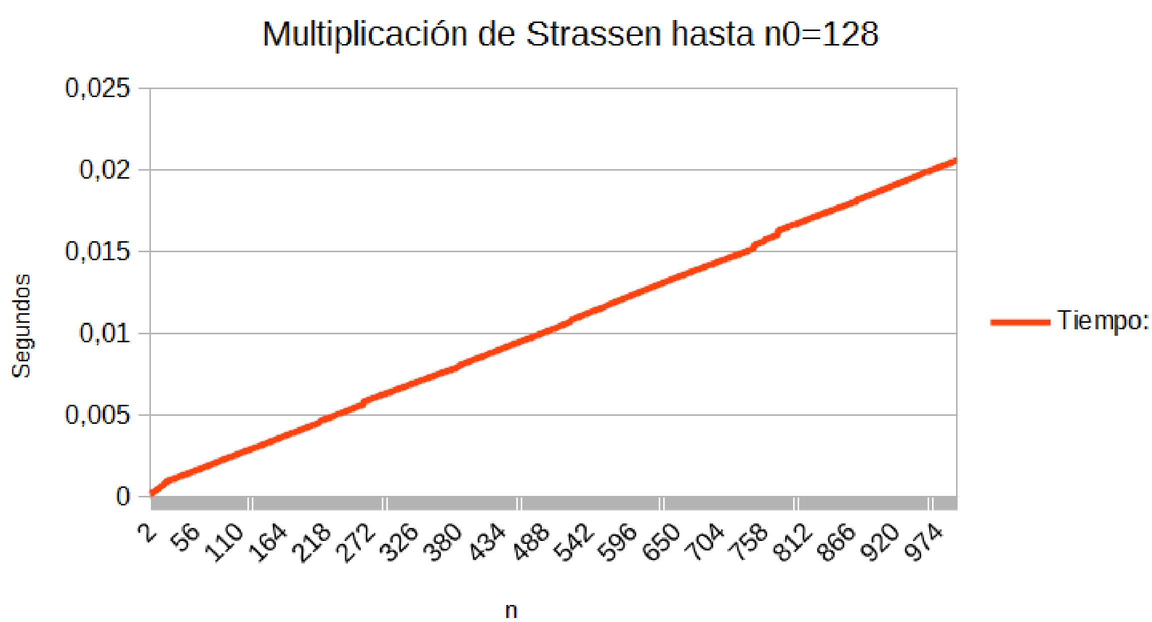
5 Curvas de desempeño de resultados

5.1 Multiplicación clasica vs distintos valores de n_0

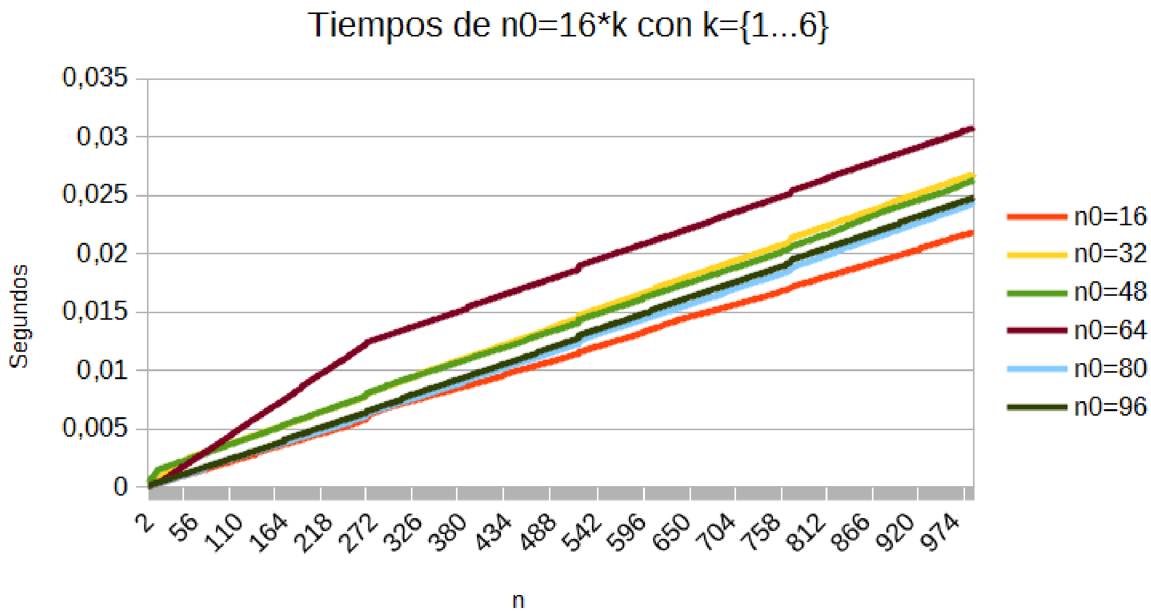


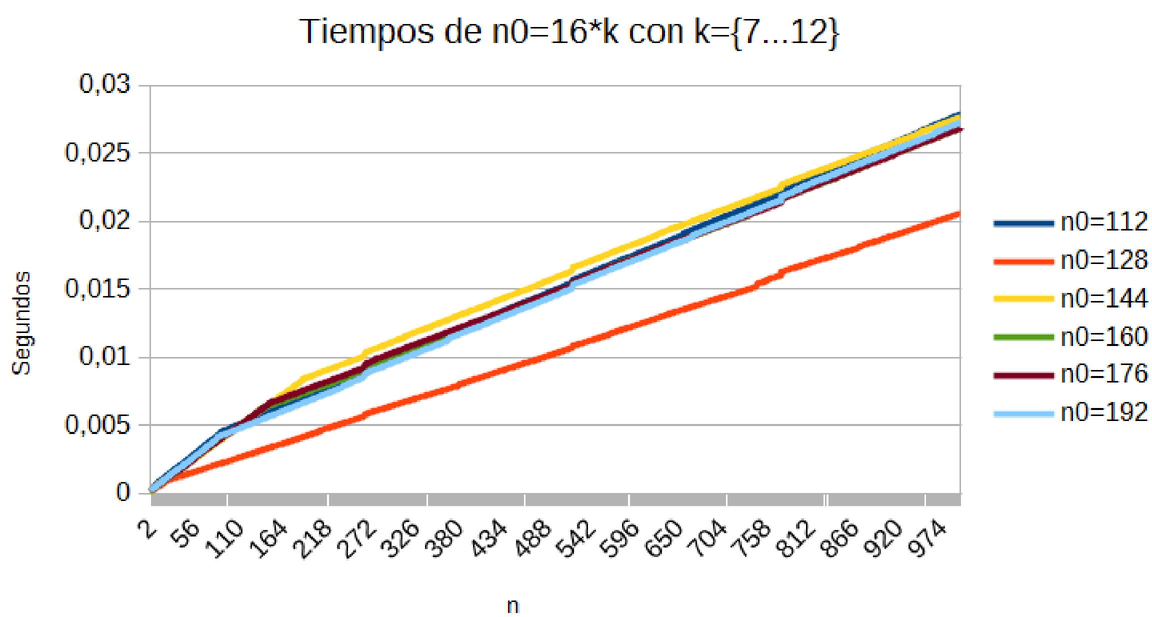


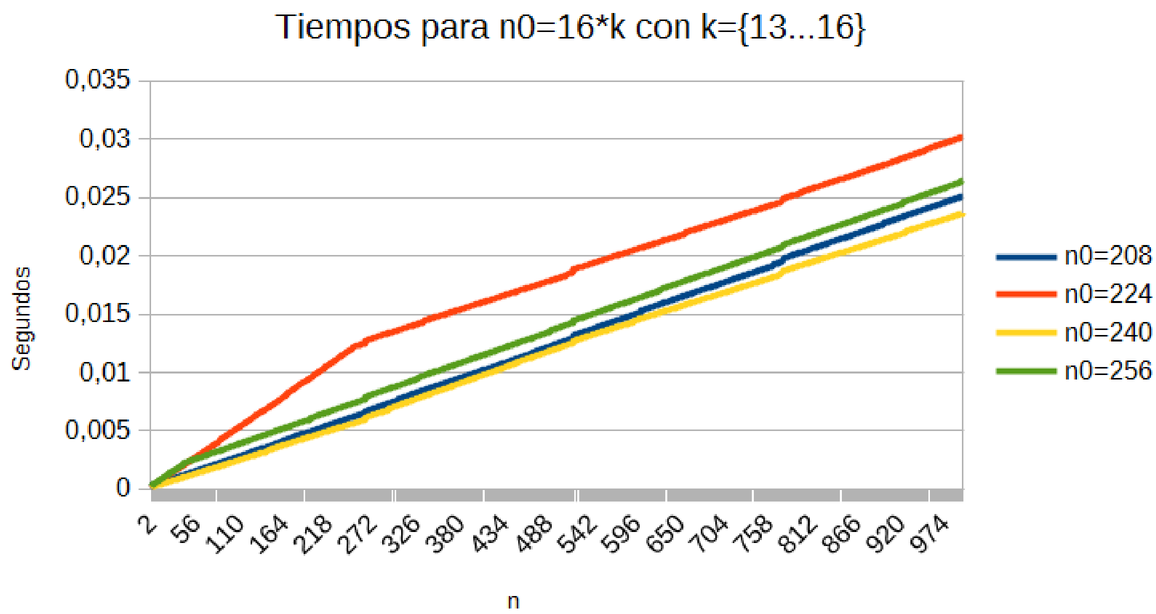

Multiplicación de Strassen hasta n0=16
Segundos
0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
2 56 110 164 218 272 326 380 434 488 542 596 650 704 758 812 866 920 974
n
Tiempo:


Multiplicación de Strassen hasta n0=128
Segundos
0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
2 56 110 164 218 272 326 380 434 488 542 596 650 704 758 812 866 920 974
n
Tiempo:

5.2 n_0 = 16*k, k={1,2 ... 16}






Tiempos para n0=16*k con k={13...16}
Segundos
0,035
0,03
0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
2
56
110
164
218
272
326
380
434
488
542
596
650
704
758
812
866
920
974
n
n0=208
n0=224
n0=240
n0=256

6 Conclusiones

Se puede concluir que la eficiencia de la multiplicación de Strassen ($O(n^{2.807})$) por sobre la clásica ($O(n^3)$) es indiscutible, llegando está última incluso a tomar el doble de tiempo que Strassen cuando aunque la última es más eficiente cuando se trata de matrices de orden estrictamente menores a 16.