01 Novembro 2024

**MAP0214**
**Prof. Arnaldo Gammal**

## 4o. PROGRAMA - Equações Diferenciais Ordinárias

**I-** Resolver usando Euler e Runge-Kutta Clássico (4a. ordem-RK4) a equação diferencial ordinária de 2a. ordem $\ddot{y} = \dot{y} + y - t^3 - 3t^2 + 7t + 1$ para $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = -1$. Esta equação pode pode ser escrita em termos de duas equações de 1a. ordem na forma $\dot{y} = z$ e $\dot{z} = g(t, y, z)$ onde $g(t, y, z) = z + y - t^3 - 3t^2 + 7t + 1$. Calcular $y(5)$, $dy/dt(5)$ usando passo $h(= 0.01)$ e comparar os resultados com o exato. Obs. solução analítica $y = t^3 - t$. Dupla precisão! Experimente rodar em precisão simples! Para RK4 use uma rotina **seguindo a sequência**:

subrotina $rk4(t_i, y_i, z_i, h)$
$k_{1y} = h \times z_i$
$k_{1z} = h \times g(t_i, y_i, z_i)$
$k_{2y} = h \times (z_i + k_{1z}/2)$
$k_{2z} = h \times g(t_i + h/2, y_i + k_{1y}/2, z_i + k_{1z}/2)$
$k_{3y} = h \times (z_i + k_{2z}/2)$
$k_{3z} = h \times g(t_i + h/2, y_i + k_{2y}/2, z_i + k_{2z}/2)$
$k_{4y} = h \times (z_i + k_{3z})$
$k_{4z} = h \times g(t_i + h, y_i + k_{3y}, z_i + k_{3z})$
$y_i = y_i + (k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})/6$
$z_i = z_i + (k_{1z} + 2k_{2z} + 2k_{3z} + k_{4z})/6$
$t_i = t_i + h$
fim

### II-EQUAÇÃO DE DUFFING, "DOUBLE WELL POTENTIAL" ( POTENCIAL POÇO DUPLO)

1)ESPAÇO DE FASE

a) Substitua a eq. anterior do item I) pela do potencial poço duplo $\ddot{x} - \frac{1}{2}x(1 - 4x^2) = 0$ com $x(0) = -0.5$ para os casos $\dot{x}(0) = 0.1$ , 0.25, 0.5. Construa os digramas de espaço de fase $\dot{x}(t) \times x(t)$. Basta evoluir $rk4(t_i, x_i, v_i, h)$ , $v = \dot{x}$ (velocidade).

b) Inclua amortecimento com $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \frac{1}{2}x(1 - 4x^2) = 0$ e com $x(0) = -0.5$, $\dot{x}(0) = 0.5$ e $2\gamma = 0.25$, 0.8. Construa os gráficos de espaço de fase.

c) Force o sistema com $\ddot{x} + 0.25\dot{x} - 0.5x(1 - 4x^2) = F \cos \omega t$ [1,2]. Usando $x(0) = -0.5$ , $\dot{x}(0) = 0.5$ e $\omega = 1$, vá aumentado a intensidade da força $F$ com valores 0.11, 0.115, 0.14. Force bastante o sistema com $F = 0.35$. Em todo este item remova o transiente (=transitório) para construir os diagramas de espaço de fase.

Quem são os atratores em cada um desses casos nos itens a,b,c?

**2) DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO**

Uma secção de Poincaré corresponde neste caso a uma "fotografia estroboscópica" do Espaço de Fase a cada período do elemento forçador [2]. Pode ser imaginada como cortes periódicos no atrator tridimensional desenhado com $\dot{x}(t) \times x(t) \times t$.

Construa outro programa com eq. e mesmas condições iniciais 1)c). Para um dado $F$ faça secções de Poincaré e determine o valor dos pontos $x$ nas secções. Varie o $F$ de 0 até 0.35 e plote $x$ ( em $\omega t = 2\pi n + \text{cte}$) em função de $F$, **sem ligar** os pontos. Escolha por simplicidade cte = 0. Estime o valor da **constante de Feigenbaum** $\delta$ a partir do diagrama de bifurcação.

Sugestão: escolhemos $h$ como uma fração do período como por exemplo $h = 0.001 * 2\pi/\omega$ e após 1000 passos teremos andado um período.

Sugestão de Programa:

Repetir de $F = 0$ até $F = 0.35$ passo $\Delta F = 0.00025$
  colocar condições iniciais
  $h = 0.01 * 2\pi/\omega$
  Evoluir o transiente com 200000 passos
    call $rk4(t_i, x_i, v_i, h)$
  fim do transiente
  $h = 0.001 * 2\pi/\omega$
  Fazer de $i = 1$ até 100 ! evolução de 100 períodos
    Fazer de $j = 1$ até 1000 ! evolui um período
      call $rk4(t_i, x_i, v_i, h)$
    fim do loop em $j$
    imprime $F$, $x_i$ ! imprime a cada período $2\pi/\omega$
  fim do loop em $i$
fim do loop de $F$

**3) MAPA DE POINCARÉ**

No programa 2) remova o loop de $F$. Fixe $F = 0.26$ e faça $i$ ir até 20000. No comando "imprime", imprima também $v_i (\equiv \dot{x}(t))$. Coloque os pontos $(x_i, v_i)$ num gráfico $\dot{x}(t) \times x(t)$. **Não ligue os pontos**.

ATENÇÃO ao que dever ser entregue: Programa item I), os valores de $y(5)$, $dy/dt(5)$ por Euler e por RK Clássico, os gráficos sugeridos em II-1a,b,c; a resposta à pergunta II-1d, a estimativa para a constante de Feigenbaum $\delta$ e todos os gráficos sugeridos em 2) e 3). Programas de itens II-1c) e II-2).

Referências


[1] M. J. Feigenbaum, Universal behavior in nonlinear systems, Physica D **7**, 16-39 (1983).
[2] F. C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics, An Introduction for Applied Scientists and Engineers,* John Wiley & Sons, 1992.
[3] G. L. Baker and J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics, an introduction*, Cambridge University Press, 1990, p.44.
[4] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos Dynamics, an introduction*, VCH, Weinheim, 2nd. ed., 1989.
[5] P. Cvitanović, *Universality in Chaos*, Institute of Physics Publishing, London, 1989, p.10.