> 1. 设G是群，对任意$n \in N, i \in [0,n], g_i \in G$。证明：$g_0 g_1 \ldots g_n$的逆元是$g_n^{-1} \ldots g_1^{-1} g_0^{-1}$。

证明:

任取$g_i, i \in [0,n] \in G$，存在相应的$g_i^{-1} \in G$，根据封闭性我们有:
$g_0 g_1 \ldots g_n \in G$，$g_n^{-1} \ldots g_1^{-1} g_0^{-1} \in G$

$$(g_0 g_1 \ldots g_n) \cdot (g_n^{-1} \ldots g_1^{-1} g_0^{-1}) = g_0 g_1 \ldots (g_n \cdot g_n^{-1}) \ldots g_1^{-1} g_0^{-1}$$

而对于$i \in [0,n]$，都有$g_i g_i^{-1} = e$，故有:

$$(g_0 g_1 \ldots g_n) \cdot (g_n^{-1} \ldots g_1^{-1} g_0^{-1}) = e$$

故$g_0 g_1 \ldots g_n$的单位元是$g_n^{-1} \ldots g_1^{-1} g_0^{-1}$，证毕。

> 2. 证明：任意群G的两个子群的交集也是群G的子群。

证明:

假设G'和G''是任意群G的两个子群，记H为G'与G''的交集，e是群G中的单位元，则H中必定包含**单位元**e，即$e \in G' \cap G''$，故H非空。在H中任取$a, b \in H$，都有$a, b, a^{-1}, b^{-1} \in G'$且$a, b, a^{-1}, b^{-1} \in G''$

根据群的封闭性有：$a \cdot b \in G'$且$a \cdot b \in G''$

故$a \cdot b \in G' \cap G''$，$H$满足**封闭性。**

而$a^{-1}, b^{-1} \in G' \cap G'' = H$，故$H$中的任意元素都**存在逆元。**

显然H中满足结合律。

故H为群G的子群。证毕。

> 3. 证明或证伪：任意群G的两个子群的并集也是群G的子群

证明:

设群G的子群为G'和G''。存在$a, b \in G' \cup G''$，使得$a \in G$且$a \notin G''$，$b \in G''$且$b \notin G'$，此时$a \cdot b \notin G' \cup G''$可知，两个子群的并集不满足封闭性，不是群$G$的子群。故为伪命题。

> 4. G是阿贝尔群，H和K是G的子群。请证明$HK=\{hk:h\in H,k\in K\}$是群G的子群。如果G不是阿贝尔群，结论是否依然成立?

证明:

任取$h_1k_1,h_2k_2\in HK$，由于$h_1,h_2\in H,k_1k_2\in K$，H和K为群G的子群。故$h_1k_1\in G,h_2k_2\in G$。

由于G为阿贝尔群,有:

$$h_1k_1\cdot h_2k_2=h_1h_2\cdot k_1k_2\in HK$$

故HK中满足**封闭性。**

任取$hk\in HK$，$hk\in G$，根据群G的封闭性，有:

$$(hk)^{-1}=(k^{-1}h^{-1})=(h^{-1}k^{-1})\in HK$$

故HK中对任意元素均存在**逆元**

$$e=e\cdot e\in HK$$

故HK中存在**单位元。**

显然在HK中群操作满足**结合律**。故HK是群G的子群。若G不是阿贝尔群，结论不成立。因为非阿贝尔群不满足交换律。