> 1.如果环R带乘法单位元1，对任意$a \in R$，请证明$-a=(-1)a$。

证明：

$1a+(-1)a=(1+(-1))a=0a=0$

故$-1a=(-1)a$，由于R带乘法单位元1，所以有$-a=(-1)a$，证毕。

> 2.如果任取环R中的元素x都满足$x^2=x$，请证明环R是交换环。

证明：

任取$a,b \in R$，有：

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a+b$

又因$a^2=a,b^2=b$，故有：$ab+ba=0$，根据加法消去律有：$ab=-(ba)$

$-(ba)=(-(ba))^2=(ba)^2$，$ba=(ba)^2$

故$-(ba)=(ba)$，所以有$ab=ba$，即环R是交换环。

> 3. (新教材)请解释为什么$\mathbb{Z}_n$在加法上的子群都是$\mathbb{Z}_n$的子环。

解：

记$\mathbb{Z}'$为$\mathbb{Z}_n$在加法上的一个子群。我们可知：$\mathbb{Z}'$在模n的加法上封闭，则有：

$$ab=\underbrace{a+\cdots+a}_{b个} \in \mathbb{Z}'$$

则$\mathbb{Z}'$对乘法封闭。由于$\mathbb{Z}'$为环$\mathbb{Z}_n$的加法子群，故对$\mathbb{Z}'$上乘法结合律与对加法的分配律显然。

所以$\mathbb{Z}_n$在加法上的子群都是$\mathbb{Z}_n$的子环。

> 3. (旧教材)记$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}:a,b \in \mathbb{Z}\}$，请证明$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$是环，且是整环。

证明：

任取 $x_1=a_1+b_1\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$，$x_2=a_2+b_2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$，
$x_3=a_3+b_3\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$$x_1+x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \quad (1)$$

$$x_1*x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2)\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \quad (2)$$

根据$(1)(2)$：$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$在加法和乘法上封闭。

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{2} \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} = x_2 + x_1 \tag{4}$$

$$x_1 + 0 = a_1 + b_1\sqrt{2} = 0 + x_1 \tag{5}$$

$$x_1 + (-x_1) = (a_1 - a_1) + (b_1 - b_1)\sqrt{2} = (-x_1) + x_1 = 0 \tag{6}$$

根据$(3)(4)(5)(6)$: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$**在加法**$(+)$**上是一个阿贝尔群。**

$$x_1 * (x_2 * x_3) = (a_1 + b_1\sqrt{2}) * [a_2a_3 + (a_2b_3 + a_3b_2 + b_2b_3)\sqrt{2}]$$

化简为:

$$x_1 * (x_2 * x_3) = [a_1a_2a_3 + 2(a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2 + b_1b_2b_3)] + (a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_1b_2b_3 + a_2a_3b_1)\sqrt{2}$$

$$(x_1 * x_2) * x_3 = [a_1a_2a_3 + 2(a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2 + b_1b_2b_3)] + (a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_1b_2b_3 + a_2a_3b_1)\sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3 \tag{7}$$

根据(7) : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$在乘法$(*)$上满足结合律。

$$x_1 * (x_2 + x_3) = a_1a_2 + a_1a_3 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1)\sqrt{2}$$

$$(x_1 * x_2) + (x_1 * x_3) = a_1a_2 + a_1a_3 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1)\sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 * (x_2 + x_3) = (x_1 * x_2) + (x_1 * x_3) \tag{8}$$

$$(x_1 + x_2) * x_3 = a_1a_3 + a_2a_3 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3 + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_2b_3)\sqrt{2}$$

$$(x_1 * x_3 + x_2 * x_3) = a_1a_3 + a_2a_3 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3 + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_2b_3)\sqrt{2}$$

$$\therefore (x_1 + x_2) * x_3 = (x_1 * x_3 + x_2 * x_3) \tag{9}$$

根据$(8)(9)$: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$**中，乘法对加法满足分配律。**

故$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$是环。

现假设环$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$中存在非零元素x_1与x_2互为零因子。则有

$$x_1 * x_2 = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2)\sqrt{2} = 0$$

即该方程组$(*)$有解:

$$\begin{cases} a_1a_2 = 0 \\ a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 = 0 \end{cases}$$

又因x_1, x_2非零，即

$$a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$$

与$(*)$矛盾。故环$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$中无零因子，即为整环。

证毕。

> 4．证明环$2\mathbb{Z}$不与环$3\mathbb{Z}$同构。

证明：

假设环$2\mathbb{Z}$与环$3Z$同构，则存在双射$\phi: 2\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$。

由于$2 \in 2\mathbb{Z}$，必存在$a \in \mathbb{Z}$使得$\phi(2) = 3a$

$\phi(4) = \phi(2+2) = 3a + 3a = 6a$，$\phi(4) = \phi(2 \cdot 2) = 9a^2$

故$6a = 9a^2$，又$a \in \mathbb{Z}$，故$a = 0$。由于$0 \in 2\mathbb{Z}$为单位元，$\phi(0) \in 3\mathbb{Z}$也为单位元，此时$\phi(0) = 0$，而$\phi(2) = 0$

故不满足双射，与假设矛盾。证毕。