> 1.定义映射$\phi : G \to G$为：$\phi : g \to g^2$。请证明ϕ是一种群同态当且仅当G是阿贝尔群。

证明：

$\Rightarrow$：由于ϕ是群同态，任取$a, b \in G$，有$\phi(ab) = (ab)^2 = \phi(a)\phi(b) = a^2b^2$，故$(ab)^2 = a^2b^2 \in G$，故$G$是阿

贝尔群。

$\Leftarrow$：由于G为阿贝尔群，任取$a, b \in G$，有$ab = ba$，
$\phi(ab) = (ab)^2 = abab = aabb = \phi(a)\phi(b)$，群操作得以

保持，故ϕ是一种群同态。

> 2.设$\phi : G \to G$是一种群同态。请证明：如果G是循环群，则$\phi(G)$也是循环群；如果G是交换群，则$\phi(G)$也是交换群。

证明：

i. 假设$G =< g >$为循环群，g为其生成元。根据ϕ为群同态，即证：
$< \phi(g) >= \phi(G)$。

任取$[\phi(g)]^i \in < \phi(g) >, i \in \mathbb{Z}$，由于$\phi$为群同态，群操作得以保持，有
$[\phi(g)]^i = \phi(g^i) \in \phi(G)$，所以有

$< \phi(g) > \subseteq \phi(G)$。

任取$\phi(g^i) \in \phi(G), i \in \mathbb{Z}$，$\phi(g^i) = [\phi(g)]^i \in < \phi(g) >$，所以有
$\phi(G) \subseteq < \phi(g) >$

故$< \phi(g) >= \phi(G)$。$\phi(G)$是由$\phi(g)$生成的循环群，证毕。

ii. 假设G为交换群，任取$a, b \in \phi(G)$，存在$a', b' \in G$使得
$\phi(a') = a, \phi(b') = b$

$ab = \phi(a')\phi(b') = \phi(a'b') = \phi(b'a') = \phi(b')\phi(a') = ba$，故$\phi(G)$为交换群。证毕。

> 3. 证明：如果H是群G上指标为2的子群，则H是G的正规子群。

证明：

由于H在G上指标为2，故G被划分成了两个不同的左陪集。

任取$g \in H$，根据群的封闭性，有$gH = H = Hg$

任取$g \in G - H$，根据封闭性，有$gH = G - H = Hg$

故任取$g \in G$，都有$gH = Hg$，H是G的正规子群。

> 4.给定任意群G，H是群G的正规子群。请证明，如果群G是阿贝尔群，则商群G/H也是阿贝尔群。

证明:

由于G为阿贝尔群，任取$a, b \in G$，都有$ab = ba$

对于商群G/H，任取$aH, bH \in G/H$，且$a \in G, b \in G$，$(aH)(bH) = abH$

$(bH)(aH) = baH = abH = (aH)(bH)$，故商群$G/H$满足交换律，也是阿贝尔群。证毕。

> 5.给定任意群G，H是群G的正规子群。请证明，如果群G是循环群，则商群G/H也是循环群。

证明:

假设$G =< g >$是循环群，g为其生成元。即证：$< gH >= G/H$

任取$(gH)^i \in < gH >, i \in \mathbb{Z}$，$(gH)^i = \underbrace{gHgH \ldots gH}_{i\text{个}}$，又因$H$为正规子群，

故有$gH = Hg$，则$(gH)^i = g^i H \in G/H$，故$< gH > \subseteq G/H$。

任取$g^i H \in G/H, i \in \mathbb{Z}$，根据商群群操作，$g^i H = (gH)^i \in < gH >$，故$G/H \subseteq < gH >$。

故$< gH >= G/H$，商群G/H是由gH生成的循环群，证毕。