EQUAÇÃO DE ORR-SOMMERFELD

Preparado por: Leon Lima

4 de Março de 2015

1 Introdução

Escoamentos turbulentos são gerados por perturbações introduzidas no regime laminar. Em escoamentos laminares instáveis, eventuais perturbações geram oscilações crescentes que conduzem à turbulência. A estabilidade hidrodinâmica do regime transicional entre o escoamento laminar e o turbulento é, portanto, de grande relevância, tendo sido alvo de muitos estudos desde o início do século XX [1].

A equação de Orr-Sommerfeld modela o comportamento de um escoamento laminar paralelo incompressível quanto às oscilações geradas a partir de uma perturbação.

O texto que segue busca apresentar passo a passo o procedimento matemático para se chegar à equação de Orr-Sommerfeld, abrindo mão do rigor matemático. Parte deste texto teve como base o livro de Schlichting and Gersten [1].

2 Desenvolvimento

Seja $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ o campo de velocidade de um escoamento incompressível, em duas dimensões, com propriedades constantes e sem o termo de forças. As equações de Navier-Stokes para este escoamento é expressa por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

Seja Ψ a função de corrente deste escoamento, i.e.,

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{4a}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{4b}$$

Na sequência do desenvolvimento, as derivadas parciais de um dado campo serão denotadas através de um subescrito indicando a variável em relação à qual o campo foi derivado, e.g., $\partial\Psi/\partial t$ será denotada por Ψ_t, e $\partial/\partial x(\partial\Psi/\partial t)$ será Ψ_{tx}.

As equações de Navier-Stokes (eqs. 1-3) podem ser escritas em termos da função de corrente, resultando em

$$\begin{aligned}
\Psi_{yt} + \Psi_y \Psi_{yx} - \Psi_x \Psi_{yy} &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \left[\Psi_{yxx} + \Psi_{yyy}\right] && \text{(5a)} \\
-\Psi_{xt} - \Psi_y \Psi_{xx} + \Psi_x \Psi_{xy} &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \left[-\Psi_{xxx} - \Psi_{xyy}\right] && \text{(5b)}
\end{aligned}$$

Derivando a equação 5a em relação a y e a equação 5b em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi_{yty} + \Psi_{yy}\Psi_{yx} + \Psi_y \Psi_{yxy} - \Psi_{xy}\Psi_{yy} - \Psi_{yyy}\Psi_x &= -\frac{1}{\rho} p_{xy} + \nu \left[\Psi_{yxxy} + \Psi_{yyyy}\right] && \text{(6a)} \\
-\Psi_{xtx} - \Psi_{yx}\Psi_{xx} - \Psi_y \Psi_{xxx} + \Psi_{xx}\Psi_{xy} + \Psi_{xyx}\Psi_x &= -\frac{1}{\rho} p_{yx} + \nu \left[-\Psi_{xxxx} - \Psi_{xyyx}\right] && \text{(6b)}
\end{aligned}$$

Subtraindo a equação 6b da 6a, chegamos a

$$\nabla^2\Psi_t + \Psi_{yx}\nabla^2\Psi + \Psi_y\nabla^2\Psi_x - \Psi_{xy}\nabla^2\Psi - \Psi_x\nabla^2\Psi_y = \nu\left[\nabla^2\Psi_{xx} + \nabla^2\Psi_{yy}\right] \tag{7}$$

onde ∇^2 representa o operador laplaciano. Considerando que $\Psi_{yx}\nabla^2\Psi = \Psi_{xy}\nabla^2\Psi$, a equação 7 pode ser reescrita como

$$\nabla^2\Psi_t + \Psi_y\nabla^2\Psi_x - \Psi_x\nabla^2\Psi_y = \nu\nabla^2\left(\nabla^2\Psi\right) \tag{8}$$

Considere agora a introdução de uma perturbação no escoamento através da função de corrente, a qual pode ser decomposta num campo base $\overline{\Psi}$ e uma flutuação $\hat{\Psi}$, i.e.,

$$\Psi = \overline{\Psi} + \hat{\Psi} \tag{9}$$

Substituindo na equação 8, obtemos

$$\nabla^2\overline{\Psi}_t + \nabla^2\hat{\Psi}_t + (\overline{\Psi}_y + \hat{\Psi}_y)\nabla^2(\overline{\Psi}_x + \hat{\Psi}_x) - (\overline{\Psi}_x + \hat{\Psi}_x)\nabla^2(\overline{\Psi}_y + \hat{\Psi}_y) = \nu\nabla^2\left(\nabla^2\overline{\Psi}\right) + \nu\nabla^2\left(\nabla^2\hat{\Psi}\right) \tag{10}$$

Considere agora a hipótese de que o escoamento base, com campo de velocidade $\mathbf{V} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$, seja desenvolvido, i.e., $U = U(y)$, resultando em $\partial U/\partial x = 0$. Supondo condição de não-deslizamento na parede, pela conservação de massa, temos que $V = 0$, o que implica em $\overline{\Psi}_x = 0$. Levando em conta que o escoamento base $\overline{\Psi}$ é solução para a equação 8, a equação 10 pode ser dada por

$$\nabla^2\hat{\Psi}_t + \overline{\Psi}_y\nabla^2\hat{\Psi}_x + \hat{\Psi}_y\nabla^2\hat{\Psi}_x - \hat{\Psi}_x\nabla^2\overline{\Psi}_y - \hat{\Psi}_x\nabla^2\hat{\Psi}_y = \nu\nabla^2\left(\nabla^2\hat{\Psi}\right) \tag{11}$$

Uma outra hipótese é a de pequenas perturbações. Isso faz com que os dois termos da equação 11 com produto entre flutuações possam ser desprezados, resultando em

$$\nabla^2\hat{\Psi}_t + \overline{\Psi}_y\nabla^2\hat{\Psi}_x - \hat{\Psi}_x\nabla^2\overline{\Psi}_y = \nu\nabla^2\left(\nabla^2\hat{\Psi}\right) \tag{12}$$

o que, levando em conta que $\overline{\Psi}_y = U$ e que $\nabla^2 U = U''$ (uma vez que $\partial U/\partial x = 0$), pode ser reescrito como

$$\nabla^2\hat{\Psi}_t + U\nabla^2\hat{\Psi}_x - \hat{\Psi}_x U'' = \nu\nabla^2\left(\nabla^2\hat{\Psi}\right) \tag{13}$$

Considere que a perturbação $\hat{\Psi}$ consista de uma onda simples (único modo) propagando na direção x, dada por

$$\hat{\Psi}(x,y,t) = \phi(y)\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \tag{14}$$

onde k é um número real tal que $2\pi/k$ é o comprimento de onda da perturbação, e ω é um número complexo cuja parte real ω_r é a frequência do modo e a parte imaginária ω_i é o fator de amplificação. Se $\omega_i > 0$, o escoamento laminar é instável, enquanto que, se $\omega_i < 0$, ele é estável.

Vamos agora escrever cada uma das parcelas da equação 13 introduzindo a perturbação definida por 14.

$$\begin{aligned}
\nabla^2\hat{\Psi}_t &= (k^2\phi - \phi'')i\omega\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} && \text{(15a)}\\
U\nabla^2\hat{\Psi}_x &= U(\phi'' - k^2\phi)ik\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} && \text{(15b)}\\
\hat{\Psi}_x U'' &= ikU''\phi\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} && \text{(15c)}\\
\nu\nabla^2(\nabla^2\hat{\Psi}) &= (-2k^2\phi'' + k^4\phi + \phi'''')\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} && \text{(15d)}
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$ é comum a todos os termos, a equação 13 resulta em

$$(k^2\phi - \phi'')i\omega + U(\phi'' - k^2\phi)ik - U''ik\phi = \nu(-2k^2\phi'' + k^4\phi + \phi'''') \tag{16}$$

dividindo a equação 16 por ik, obtemos

$$(k\phi - \phi''/k)\omega + U(\phi'' - k^2\phi) - U''\phi = \frac{\nu}{ik}(-2k^2\phi'' + k^4\phi + \phi'''') \tag{17}$$

Definindo $c = w/k$ e rearranjando, chegamos a

$$(U - c)(\phi'' - k^2\phi) - U''\phi = \frac{\nu}{ik}(-2k^2\phi'' + k^4\phi + \phi'''') \tag{18}$$

Esta equação diferencial de perturbação é o ponto de partida para a teoria de estabilidade de escoamentos laminares, e é chamada de Equação de Orr-Sommerfeld, em honra a William McFadden Orr (1907) e Arnold Sommerfeld (1908). Em sua forma adimensional, ela é dada por

$$(U - c)(\phi'' - k^2\phi) - U''\phi = \frac{1}{ik\,\mathrm{Re}}(-2k^2\phi'' + k^4\phi + \phi'''') \tag{19}$$

Aqui, evidentemente, as variáveis devem ser interpretadas como adimensionalizadas.

3 Problema de auto-valor

É usual que se possa controlar o comprimento de onda da perturbação $2\pi/k$, e que o Re seja um parâmetro conhecido do escoamento, de maneira que a solução da equação de Orr-Sommerfeld forneça, para um par (k, Re), o valor de ω, através do qual a estabilidade do escoamento laminar base é avaliada.

A equação de Orr-Sommerfeld pode ser rearranjada de tal forma que obtemos

$$-\frac{1}{ik\,\mathrm{Re}}\phi'''' + \left(U - c + \frac{2k}{i\,\mathrm{Re}}\right)\phi'' + \left(ck^2 - Uk^2 - U + \frac{2k}{i\,\mathrm{Re}}\right)\phi = 0 \tag{20}$$

Discretizando o domínio de U e ϕ, as derivadas ϕ'''' e ϕ'' podem ser aproximadas, em diferenças finitas centradas de 2ª ordem, respectivamente por

$$\phi'''' \approx \frac{\phi_{i-2} - 4\phi_{i-1} + 6\phi_i - 4\phi_{i+1} + \phi_{i+2})}{\Delta y^4} \tag{21}$$

$$\phi'' \approx \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta y^2} \tag{22}$$

onde i é o índice identificador do nó. A forma discreta da equação 20 pode ser expressa na forma matricial da seguinte forma:

$$-\frac{1}{ik\,\mathrm{Re}}\mathbf{M}\phi + \left(U - c + \frac{2k}{i\,\mathrm{Re}}\right)\mathbf{N}\phi + \left(ck^2 - Uk^2 - U + \frac{2k}{i\,\mathrm{Re}}\right)\phi = 0 \tag{23}$$

Definindo a matriz $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{ik\,\mathrm{Re}}\mathbf{M} + \left(U - c + \frac{2k}{i\,\mathrm{Re}}\right)\mathbf{N} \tag{24}$$

e o campo escalar λ tal que

$$\lambda = -\left(ck^2 - Uk^2 - U + \frac{2k}{i\,\mathrm{Re}}\right) \tag{25}$$

podemos estabelecer o problema de auto-valor expresso por

$$\mathbf{A}\phi = \lambda\phi \tag{26}$$

em que λ são os auto-valores da matriz $\mathbf{A}$.

Referências

[1] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer, 2000.