UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO UERJ

PPG-EM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Preparado por: Leon Lima

4 de Março de 2015

Considere as equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 && \text{(1a)}\\
\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla P + \nabla \cdot [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu \nabla \mathbf{v} + \mu (\nabla \mathbf{v})^T] + \mathbf{f} && \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

Em muitas aplicações de engenharia, é bastante comum ocorrerem escoamentos de fluidos Newtonianos nos quais os efeitos viscosos são desprezíveis em relação aos efeitos de convecção. A conservação de quantidade de movimento para estes escoamentos pode ser modelada pela equação de quantidade de movimento acima desprezando os termos viscosos, ou seja,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \tag{2}$$

Agora, leve em conta a seguinte identidade:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \tag{3}$$

na qual $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ denota o produto vetorial entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, onde $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ representa o rotacional do campo de velocidade. O escalar v é o módulo da velocidade. É fácil verificar a identidade 3 assumindo uma dimensão e expandindo as operações.

Considere agora que a única força de corpo atuante seja a gravidade, ou seja, $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, onde $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, sendo g o módulo da aceleração da gravidade (constante) e $\mathbf{k}$ um vetor unitário com a mesma direção e sentido oposto ao de $\mathbf{g}$. Assumindo que a coordenada espacial da direção de $\mathbf{k}$ seja z, temos que $\nabla(gz) = g\mathbf{k}$. Ou seja, $\mathbf{f} = \rho \nabla(gz)$.

Inserindo essas considerações na equação 2, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \nabla(gz) \tag{4}$$

É possível observar que todos os termos do lado direito são escritos na forma de gradiente de um campo escalar. A exceção é o termo da pressão, que é multiplicado por $1/\rho$. Será interessante buscarmos uma forma para a equaçao 4 na qual todos os termos são escritos como gradiente de um escalar. Para tanto, vamos supor que o escoamento seja isotérmico. Se fato, muitos escoamentos de interesse possuem distribuição uniforme de temperatura. Nestes casos, a densidade ρ é função apenas da pressão, o que nos permite escrever

$$\frac{d}{dP}\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}=\frac{1}{\rho} \tag{5}$$

De fato, se definirmos a função $h(P)=1/\rho$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_{P_0}^{P}h(P)dP=H(P)-H(P_0) \tag{6}$$

onde $H(P)$ é a primitiva de $h(P)$. Temos, então, que

$$\frac{d}{dP}\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}=\frac{d}{dP}\left[H(P)-H(P_0)\right]=h(P)=\frac{1}{\rho} \tag{7}$$

Dentro demontrado 5, podemos escrever

$$\frac{1}{\rho}\nabla P=\left[\frac{d}{dP}\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}\right]\nabla P \tag{8}$$

Mas, levando em conta a equação 6, e aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\left[\frac{d}{dP}\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}\right]\nabla P=\frac{d}{dP}[H(P)-H(P_0)]\nabla P=\nabla H \tag{9}$$

o que nos permite concluir que

$$\frac{1}{\rho}\nabla P=\nabla\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho} \tag{10}$$

Com isso, o lado direito da equação 4 pode ser reescrito em termos do gradiente de um único campo escalar, isto é,

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-\mathbf{v}\times\mathbf{w}=-\nabla\left[\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz\right] \tag{11}$$

Introduzimos agora s como sendo um parâmetro ao longo de uma curva qualquer do escoamento. A equação 11 projetada nessa curva é dada por

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}-(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}=-\frac{d\mathbf{p}}{ds}\cdot\nabla\left[\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz\right]=-\frac{d}{ds}\left[\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz\right] \tag{12}$$

onde $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ é o vetor unitário tangentes à curva no ponto $\mathbf{p}$. Se essa curva for uma linha de corrente[1], então, sabendo que $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e que $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ tem a mesma direção de $\mathbf{v}$, temos que $(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}=0$. Além disso, é possível mostrar que

$$\frac{d}{ds}\int_{s_0}^{s}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right)ds=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds} \tag{13}$$

[1] Curva formada por todos os pontos nos quais o vetor velocidade é tangente num certo instante do escoamento.

Com isso, para uma linha de corrente, obtemos

$$-\frac{d}{ds}\left[\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz-\int_{s_0}^{s}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right)ds\right]=0 \tag{14}$$

Ou seja, podemos concluir que

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz-\int_{s_0}^{s}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right)ds=\text{constante} \tag{15}$$

Esta é a **equação de Bernoulli**. Ela é válida ao longo de uma linha de corrente para escoamentos onde os efeitos viscosos são muito menores do que os efeitos de convecção e podem, portanto, ser desprezados. Outra hipótese adotada foi a de que o escoamento é isotérmico, ou seja, a densidade é uma função apenas da pressão. **?**] mostra ainda que, para escoamentos potenciais, a equação de Bernoulli é válida em todo o domínio do escoamento.

No entanto, essa equação não está na forma como é normalmente vista. Se considerarmos o estado permanente do escoamento ($\partial\mathbf{v}/\partial t=0$), e que a densidade é constante (para água, a pressões baixas, a densidade de fato tem variações muito baixas com a pressão) temos que

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz=\text{constante} \tag{16}$$

que é a forma popular da equação de Bernoulli. Vamos agora sumarizar as condições para as quais a equação 16 é válida:

1. fluido newtoniano;
2. escoamento invíscido[2];
3. densidade constante[3];
4. válido somente ao longo de uma mesma linha de corrente[4];
5. estado permanente.

[2] Escoamentos nos quais os efeitos viscosos são muito pequenos se comparados aos efeitos convectivos.
[3] Para a equação completa de Bernoulli 15 a restrição é de que a densidade é função apenas da pressão.
[4] Para escoamentos potenciais, a equação de Bernoulli 15 é válida em todo o domínio do escoamento [**?**].