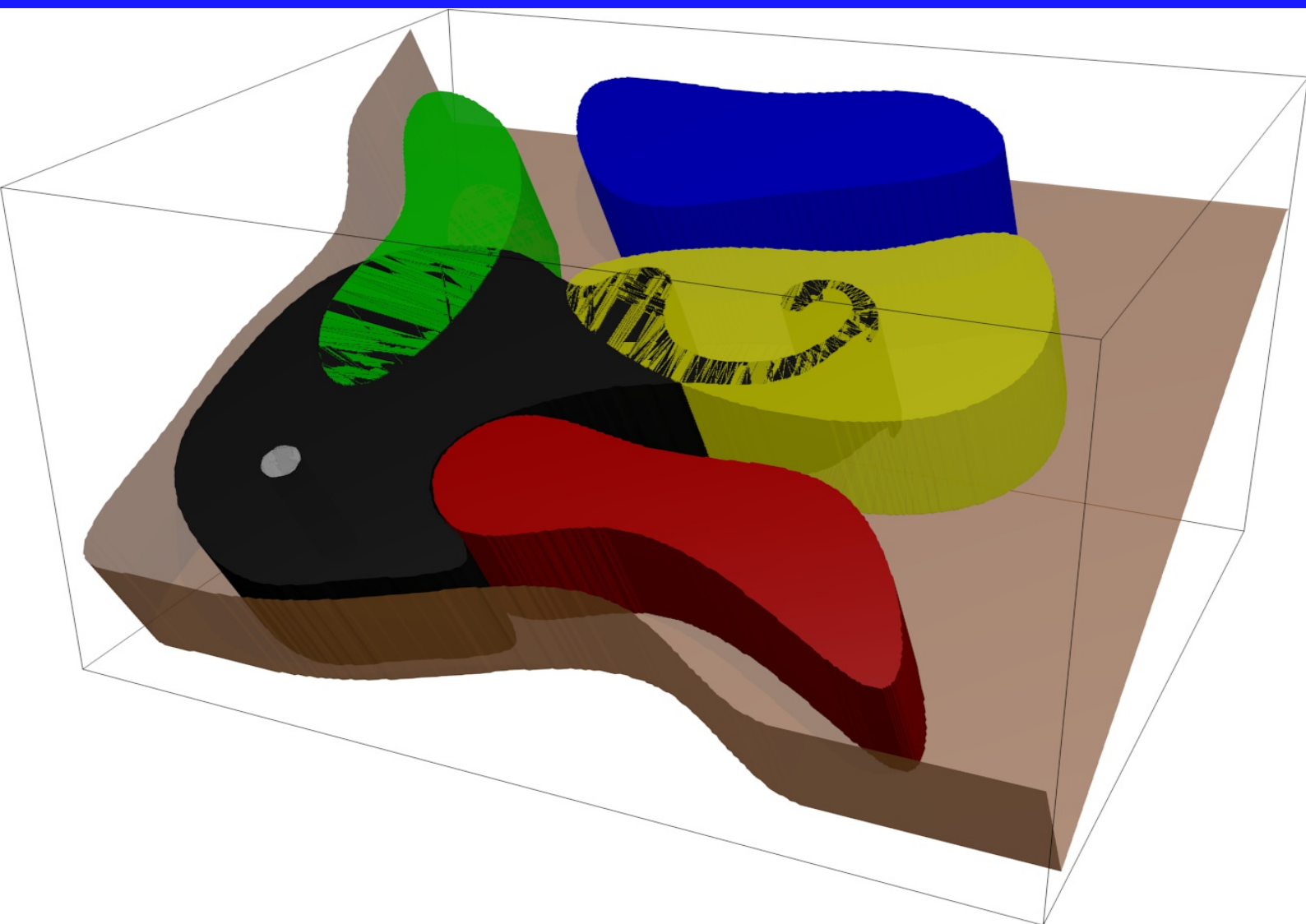


Никольский Д.Н.

**Численное решение задач об эволюции
границы раздела различных жидкостей
в пористых средах со сложной геометрией**



Орел - 2013

НИКОЛЬСКИЙ Д.Н.

**Численное решение задач об эволюции
границы раздела различных жидкостей
в пористых средах со сложной геометрией**

Учебно-методическое пособие

Орел – 2013

УДК 519.711.3:532.685 (072.8)
ББК 22.18:22.25р3

Н641

Печатается по решению
редакционно-издательского
совета ФГБОУ ВПО «Орловский
государственный университет»
(протокол № 11 от 20.06.2013 г.)

Рецензенты:

Сетуха А.В., доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского вычислительного центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Дорофеева В.И., кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Никольский Д.Н. Численное решение задач об эволюции границы раздела различных жидкостей в пористых средах со сложной геометрией. Издательство ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш». 2013. 64 с.

В учебно-методическом пособии приводится создание математической модели процесса эволюции границы раздела различных жидкостей в неоднородной пористой среде со сложной геологической структурой. Пособие может быть использовано магистрантами, обучающимися по направлению 010400.68 «Прикладная математика и информатика» и аспирантами специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение №14.В37.21.0388.

© Д.Н. Никольский, 2013

Содержание

1	Основные законы и граничные условия	5
2	Математическая формулировка краевых задач	7
3	Интегральные представления решений	10
4	Граничные интегральные уравнения	13
5	Уравнение движения границы раздела жидкостей	14
6	Численная схема	18
7	Разработка программного обеспечения	23
8	Тестирование численных решений краевых задач	29
9	Тестирование численных решений задач эволюции	47
10	Моделирование процессов эволюции	58

Предисловие

Пособие посвящено разработке двумерной математической модели процесса эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в неоднородных пористых средах со сложной геологической структурой. В построенной математической модели учтено наличие в пористых средах полупроницаемых и непроницаемых включений, каверн (полостей) со свободной жидкостью.

В пособии продемонстрированы все этапы создания математической модели. Так, в начале выделены основные физические законы, описывающие фильтрацию вязкой несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде, проанализированы граничные условия и выполнена математическая формулировка задачи. Затем, методом нанесения на границы квазипотенциала двойного слоя решение задачи об эволюции сведено к решению системы интегральных и дифференциальных уравнений.

Далее, для основной системы интегральных и дифференциальных уравнений построена численная схема методом дискретных особенностей. Разработаны алгоритмы решения задачи и программное обеспечение. Программное обеспечение написано на языке Python, с использованием пакетов NumPy, SciPy и SymPy. Выполнено тестирование на стационарных и нестационарных задачах, допускающих точное решение. Установлена сходимость численных решений к точным.

Демонстрация возможностей, построенной математической модели, осуществлена на примерах задач о миграции загрязнения от источника к водозабору в однородном и неоднородном пластах. При моделировании пласта, учтены, содержащиеся в нем полупроницаемые и непроницаемые породы, а также полости со свободной жидкостью. Установлен физический смысл результатов моделирования.

Автор благодарит проф. А.В. Сетуху за консультации при подготовке пособия.

1 Основные законы и граничные условия

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона-Маскета. Под пористой средой понимается реальный грунт, который представляет собой систему твердых частиц. Между твердыми частицами имеются свободные промежутки (поры), между которыми фильтруются жидкости. Область D , в которой происходит фильтрация ограничена контурами $L = L_I \cup L_C \cup L_P \bigcup_{i=0}^{\kappa-1} C_i$.

Контур L_I представляет собой непроницаемую границу, а контур L_C ограничивает каверну (полость) со свободной жидкостью в пористой среде. Контур L_P является границей, вдоль которой задано давление фильтрующихся жидкостей. Границы источников (стоков), возмущающих течение, моделируются контурами C_i , $i = \overline{0, \kappa-1}$.

Непроницаемый контур L_I представляет собой границу, разделяющую проницаемый грунт и непроницаемые породы или искусственные сооружения. Контур L_P может моделировать границу раздела грунта и водоема со свободной жидкостью или воздуха (поверхность земли). Также контур L_P может моделировать некоторую границу вдоль которой заданы давления фильтрующихся жидкостей (например, контур в пласте (слое), вдоль которого расположены нагнетательные скважины с заданными давлениями).

Проницаемость пористой среды описывается кусочно-непрерывной функцией $K_s(\mathbf{x}) = K_s K(\mathbf{x})$, $s = 1, 2$, $K(\mathbf{x})$ — непрерывная функция во всей области протекания процесса D , коэффициенты K_1 и K_2 — безразмерные константы, $\mathbf{x} \equiv (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$. Границу, разделяющую среды с различными коэффициентами проницаемости, обозначим L_S . Полагаем, что внутри контура L_S проводимость описывается функцией $K_2(\mathbf{x})$, вне L_S — функцией $K_1(\mathbf{x})$.

Жидкость, фильтрующаяся в среде неоднородна и состоит из двух фаз: жидкостей с плотностями и вязкостями ρ_d и μ_d , $d = 1, 2$. Рассмотрим случай, когда граница L_t раздела этих жидкостей резкая, то есть имеет место «поршневое» вытеснение, когда одна жидкость вытесняет другую полностью без образования переходной зоны. Полагаем, что жидкость с плотностью ρ_2 и вязкостью μ_2 находится внутри контура L_t , ρ_1 и μ_1 — вне. Граница L_t также $L_t \in D$. Ее начальное положение L_0 известно.

Границы L_S и L_t не принадлежат контуру L и входят в область протекания процесса D . Обозначим буквой Ω множество всех точек из области протекания процесса D , не лежащих на границах L_S и L_t : $\Omega = D \setminus L_S \setminus L_t$. Каждая из границ L_i , $i \in M_L$, $M_L \in \{I, C, P, S, t\}$ является замкнутой (в том числе и замыкается на бесконечности) и может состоять из нескольких однотипных компонент $L_i = \bigcup_{j=0}^{N_i} L_{ij}$. Перечисленные границы изображены на рис. 1.

Фильтрация жидкостей подчиняется закону Дарси и уравнению нераз-

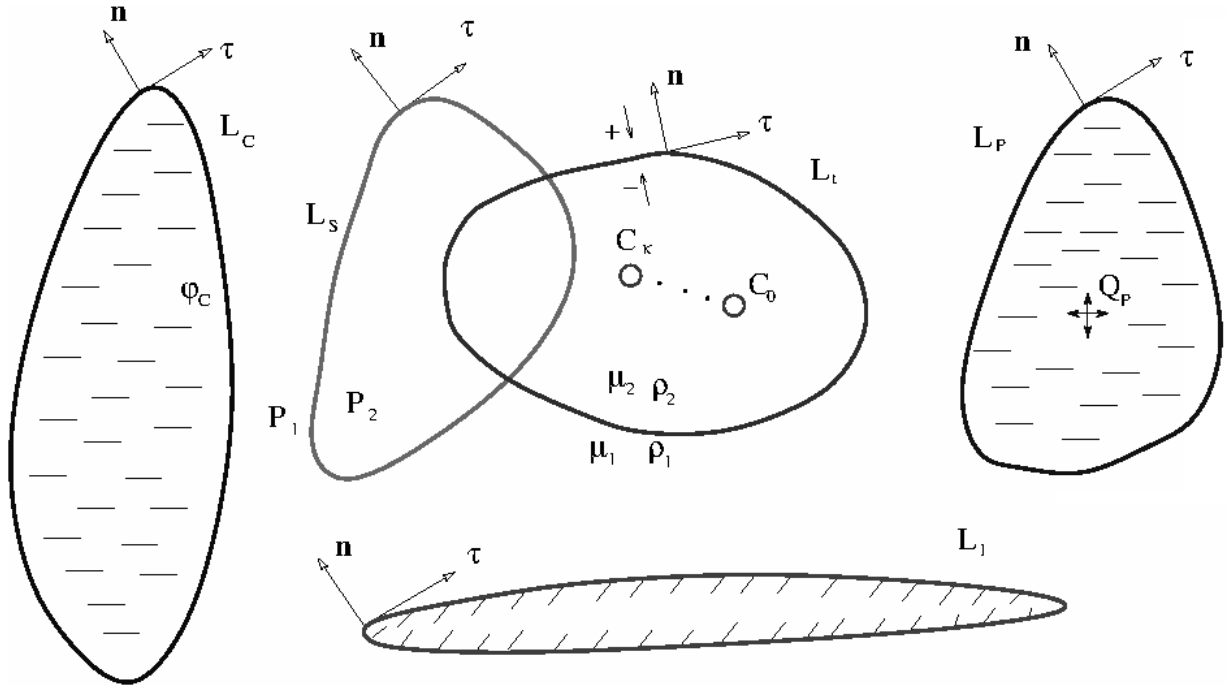


Рис. 1: Геометрия двумерной задачи.

рывности:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) &= K(\mathbf{x}) \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t), \\ \varphi(\mathbf{x}, t) &= K_s \mu_d^{-1} (\rho_d \Pi(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, t)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$i = 1, 2, \quad d = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\text{div } \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{W} — скорость фильтрации, φ — квазипотенциал скорости фильтрации, p — гидростатическое давление, Π — потенциал массовых сил ($\mathbf{F} = \text{grad } \Pi$). Связь физической скорости со скоростью фильтрации определяет закон движения отмеченной частицы:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{W}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.3)$$

Укажем верхний и нижний пределы применимости закона Дарси (1.1) [2]. Верхний его предел ограничивается числом Рейнольдса $R = \frac{va}{\nu} \leq 3 - 10$, где v — скорость фильтрационного потока, a — средний размер частиц грунта, ν — кинематический коэффициент вязкости. То есть, закон Дарси применим для мелкозернистых грунтов и малых скоростей фильтрации. Нижний предел применимости закона Дарси определяется тонкой структурой грунта, когда силы молекулярного сцепления начинают играть существенную роль.

Законы (1.1) — (1.3) записаны в безразмерных величинах. Характерные величины удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} P_0 &= \rho_0 \Pi_0, & \Phi_0 \mu_0 &= P_0, & V_0 L_0 &= K_0 \Phi_0, \\ V_0 T_0 &= m L_0, & \Pi_0 &= g L_0, \end{aligned}$$

где P_0 — характерное давление, ρ_0 — характерная плотность, Π_0 — характерный потенциал массовых сил, Φ_0 — характерный квазипотенциал, μ_0 — характерная вязкость, V_0 — характерная скорость, L_0 — характерный размер, K_0 — характерный коэффициент проницаемости пористой среды, T_0 — характерное время, g — ускорение свободного падения, m — пористость среды.

На границе L_I выполняется условие непротекания:

$$H(\mathbf{x})W_n^+(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in L_I. \quad (1.4)$$

Вдоль границы L_C , ограничивающей полость со свободной жидкостью, частицы жидкости вытекают нормально к поверхности [2]:

$$W_\tau^+(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in L_C. \quad (1.5)$$

На границе L_P выполняется условие:

$$p^+(\mathbf{x}, t) = \zeta(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_P. \quad (1.6)$$

Поверхность L_P может моделировать поверхность земли. В этом случае функция ζ постоянна $\zeta = p_a$, где p_a — атмосферное давление. Если граница L_P моделирует поверхность, разделяющую пористую среду и бассейн со свободной жидкостью, то давление на ее поверхности подчиняется гидростатическому закону $\zeta = p_a + \rho gh$, где h — глубина бассейна.

На границе L_S раздела сред с различными коэффициентами проницаемости пористой среды выполняются условия непрерывности давления и неразрывности фильтрационного потока:

$$p^+(\mathbf{x}, t) = p^-(\mathbf{x}, t), \quad W_n^+(\mathbf{x}, t) = W_n^-(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_S. \quad (1.7)$$

Условия на подвижной границе L_t идентичны условиям (1.7):

$$p^+(\mathbf{x}, t) = p^-(\mathbf{x}, t), \quad W_n^+(\mathbf{x}, t) = W_n^-(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_t. \quad (1.8)$$

В частном случае, поверхность раздела различных жидкостей L_t моделирует границу раздела воды и воздуха.

2 Математическая формулировка краевых задач

Из (1.1) и (1.2) следует, что квазипотенциал скорости фильтрации φ удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$\operatorname{div} (K(\mathbf{x})\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

или в декартовых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(P(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(P(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \equiv (x^0, x^1) \in \Omega. \quad (2.2)$$

Последнее уравнение выписано для случая, когда подошва слоя является плоской (коэффициенты Ляме $H_1 = H_2 = 1$, $H_3 = H$).

Условие отсутствия потока через непроницаемую границу L_I (1.4), с учетом закона Дарси (1.1), имеет вид:

$$(P(\mathbf{x}) \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}))^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in L_I. \quad (2.3)$$

Из (1.5) и (1.1) следует, что на границе раздела пористой среды и свободной жидкости выполняется условие:

$$\varphi^+(\mathbf{x}, t) = \varphi_C, \quad \varphi_C = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in L_C. \quad (2.4)$$

Здесь φ_C — неизвестная константа. Отметим, что мы рассматриваем случай, когда область протекания процесса расположена вне L_C .

На границе с заданным давлением L_P условие (1.6), с учетом выражения для квазипотенциала из (1.1), примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi^+(\mathbf{x}, t) &= \frac{K_s}{\mu_d} (\rho_d \Pi(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in L_P, \\ d &= 1, 2, \quad s = 1, s. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С учетом (1.7) и (1.1), на границе L_S раздела пористой среды с разной проводимостью будут выполняться следующие условия для квазипотенциала φ :

$$\begin{aligned} K_2 \varphi^+(\mathbf{x}, t) &= K_1 \varphi^-(\mathbf{x}, t), \quad (K(\mathbf{x}) \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}))^+ = \\ &= (K(\mathbf{x}) \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}))^-, \quad \mathbf{x} \in L_S. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условия (1.8) на подвижной границе L_t , при подстановке в них выражения (1.1), принимают вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi^+(\mathbf{x}, t) - \mu_2 \varphi^-(\mathbf{x}, t) &= K_s (\rho_1 - \rho_2) \Pi(\mathbf{x}, t), \\ (K(\mathbf{x}) \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}))^+ &= (K(\mathbf{x}) \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}))^-, \\ s &= 1, 2, \quad \mathbf{x} \in L_t. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Источники, возмущающие течение, аппроксимируются точками \mathbf{z}_i , $i = \overline{0, \kappa - 1}$. В окрестностях указанных точек выполнено условие

$$\left| \varphi(\mathbf{x}, t) - \varphi_{0i}(\mathbf{x}, t) \right| \leq B, \quad \mathbf{x} \in O(\mathbf{z}_i, r), \quad i = \overline{0, \kappa - 1}. \quad (2.8)$$

Здесь

$$\varphi_{0i}(\mathbf{x}, t) = -Q_i(t) \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) \quad (2.9)$$

квазипотенциал источника, расположенного в точке \mathbf{z}_i , Q_i — его полная мощность, $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)$ — фундаментальное решение уравнение (2.1) или его функция Грина, r — радиус окрестности, B — константа. Функция $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)$ моделирует нормированный сток, полный расход которого равен -1 . Вид этой функции уточняется далее и зависит от проводимости слоя и учтенных границ.

Полагаем, что скорость фильтрации \mathbf{W} представима в виде

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{W}_*(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

где \mathbf{W}_0 — поле создаваемое источниками в среде без границ L_i , $i \in M_L$, $\mathbf{W}_*(\mathbf{x}, t)$ — неизвестное векторное поле, которое моделируется непрерывной функцией. Полагаем, что оба эти поля удовлетворяют закону Дарси (1.1):

$$\mathbf{W}_0(\mathbf{x}, t) = K(\mathbf{x}) \text{grad} \varphi_0(\mathbf{x}, t), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{W}_*(\mathbf{x}, t) = K(\mathbf{x}) \text{grad} \varphi_*(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

Тогда для квазипотенциала $\varphi(\mathbf{x}, t)$ выполняется принцип суперпозиций:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \varphi_*(\mathbf{x}, t). \quad (2.13)$$

Переформулируем задачу (2.1) — (2.7) для неизвестного квазипотенциала φ_* . Из (2.1) и (2.13) следует, что квазипотенциал φ_* удовлетворяет уравнению (2.1). При этом квазипотенциал невозмущенного течения является решением (2.1). При подстановке (2.13) в (2.3) получим условие на непроницаемой границе L_I :

$$\begin{aligned} (P(\mathbf{x}) \text{grad} (\varphi_*(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x})))^+ &= f_I, \\ f_I &= -P(\mathbf{x}) (\text{grad} \varphi_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in L_I. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Известно, что необходимым условием разрешимости задачи Неймана является следующее выражение:

$$\int_{L_I} f_I(\mathbf{x}, t) dx_{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.15)$$

Условие (2.4) на границе, ограничивающей каверну (полость) со свободной жидкостью, с учетом (2.13) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} 2\varphi_*^+(\mathbf{x}, t) &= f_C(\mathbf{x}, t) + 2\varphi_C, \\ f_C(\mathbf{x}, t) &= 2\lambda_C \varphi_0(\mathbf{x}, t), \quad \lambda_C = -1, \quad \mathbf{x} \in L_C. \end{aligned} \quad (2.16)$$

На границе заданного давления условие (2.5) для квазипотенциала φ_* , с учетом принципа суперпозиций (2.13), примет вид:

$$\begin{aligned} 2\varphi_*^+(\mathbf{x}, t) &= f_P, \quad f_P = 2\lambda_P \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \frac{2K_s}{\mu_d} (\rho_d \Pi(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x}, t)), \\ \lambda_P &= -1, \quad d = 1, 2, \quad s = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in L_P. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Согласно (2.6) и (2.13) на границе скачкообразного изменения коэффициента проницаемости пористой среды выполняется условие:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_S) \varphi_*^+(\mathbf{x}, t) - (1 + \lambda_S) \varphi_*^-(\mathbf{x}, t) &= f_S(\mathbf{x}, t), \\ (K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} (\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x})))^+ &= (K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} (\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x})))^-, \\ f_S &= 2\lambda_S \varphi_0(\mathbf{x}, t), \quad \lambda_S = (K_1 - K_2) / (K_1 + K_2), \quad \mathbf{x} \in L_S. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.7) и (2.13), условия на подвижной границе Γ_t примут вид

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_t) \varphi_*^+(\mathbf{x}, t) - (1 + \lambda_t) \varphi_*^-(\mathbf{x}, t) &= f_t(\mathbf{x}, t), \\ f_t &= 2\lambda_t \varphi_0(\mathbf{x}, t) + 2K_s \alpha \Pi(\mathbf{x}), \quad s = 1, 2, \\ \lambda_t &= (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_1 + \mu_2), \quad \alpha = (\rho_1 - \rho_2) / (\mu_1 + \mu_2), \\ (K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} (\varphi_*(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x})))^+ &= \\ &= (K(\mathbf{x}) \operatorname{grad} (\varphi_*(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x})))^-, \quad \mathbf{x} \in L_t. \end{aligned} \quad (2.19)$$

С учетом условия (2.8) и выражения (2.13), в окрестностях источников квазипотенциал φ_* ограничен:

$$|\varphi_*(\mathbf{x}, t)| \leq B, \quad \mathbf{x} \in O(\mathbf{z}_i, r), \quad i = \overline{0, \kappa - 1}. \quad (2.20)$$

Потребуем выполнение условия затухания возмущения на бесконечности:

$$\varphi_*(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

3 Интегральные представления решений

Решение поставленной задачи будем искать в виде суперпозиций квазипотенциалов двойных слоев, распределенных по границам L_i , $i \in M_L$. Введем операторы квазиотенциала двойного слоя и его скорости и исследуем их свойства.

Оператор квазипотенциала двойного слоя, распределенного по границе L с плотностью g определим следующим образом:

$$\begin{aligned} G[g, L](\mathbf{x}) &= \int_L g(\mathbf{y}) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \mathbf{x} \notin L, \\ \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь Φ_1 — функция Грина или фундаментальное решение уравнения (2.1) из (2.9). Оператор скорости квазипотенциала двойного слоя получим, с использованием закона Дарси (1.1):

$$\mathbf{V}[g, L](\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}) \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} G[g, L](\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Для исследования свойств операторов (3.1) и (3.2) необходимо конкретизировать выражение для функции Грина Φ_1 уравнения (2.1). Ограничимся рассмотрением случая, когда корень из проводимости слоя удовлетворяет гармоническому уравнению $\Delta\sqrt{P} = 0$. С учетом того, что при подстановке $\varphi = U/\sqrt{P}$ уравнение (2.1) может быть представлено в виде [2]:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta\sqrt{P}}{\sqrt{P}},$$

фундаментальное решение уравнения (2.1) примет вид [2]:

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{P(\mathbf{x})P(\mathbf{y})}}, \quad U(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \ln |\mathbf{x}|. \quad (3.3)$$

При подстановке функции Грина Φ_1 (3.3) в оператор квазипотенциала двойного слоя (3.1) получим:

$$\begin{aligned} G[g, L](\mathbf{x}) &= I_1(\mathbf{x}) + I_2(\mathbf{x}) + I_3(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \notin L, \\ I_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{P(\mathbf{x})}} \int_L g(\mathbf{y}) \sqrt{P(\mathbf{y})} \frac{\partial U(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} dl_y, \\ I_2(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\sqrt{P(\mathbf{x})}} \int_L g(\mathbf{y}) \frac{\partial \sqrt{P(\mathbf{y})}}{\partial \mathbf{n}_y} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dl_y, \\ I_3(\mathbf{x}) &= \int_L g(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left(\frac{F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{P(\mathbf{x})P(\mathbf{y})}} \right) dl_y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Первый интеграл I_1 в (3.4) представляет собой потенциал двойного слоя, распределенного по границе L с плотностью $g\sqrt{P}$, второй I_2 — потенциал простого слоя с плотностью $g\frac{\partial\sqrt{P}}{\partial\mathbf{n}}$.

Используя известные свойства потенциалов двойного и простого слоя [4], получим предельные значения оператора квазипотенциала двойного слоя (3.4) на границе L :

$$G^\pm[g, L](\mathbf{x}) = I_1(\mathbf{x}) + I_2(\mathbf{x}) + I_3(\mathbf{x}) \pm \frac{g(\mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in L. \quad (3.5)$$

Здесь первый и третий интегралы (I_1 и I_3) являются обычными, второй интеграл I_2 — абсолютно сходящимся несобственным интегралом второго рода. Действительно, с учетом того, что параметрическое уравнение контура L имеет вид $\mathbf{y}(l)$, представим интеграл I_1 в параметрическом виде:

$$I_1(l_0) = \frac{1}{\sqrt{P(l_0)}} \int_0^{len(L)} g(l) \sqrt{P(l)} \frac{(\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l))\mathbf{n}(l)}{2\pi|\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|^2} dl$$

С учетом разложения в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(l) &= \mathbf{y}(l_0) + \mathbf{y}'(l_0)(l - l_0) + \frac{\mathbf{y}''(l_0)}{2}(l - l_0)^2 + O((l - l_0)^3), \\ \mathbf{n}(l) &= \mathbf{n}(l_0) + \mathbf{n}'(l_0)(l - l_0) + O((l - l_0)^2),\end{aligned}$$

ядро Ω_1 интеграла I_1 имеет устранимый разрыв:

$$\lim_{l \rightarrow l_0} \Omega_1(l, l_0) = \frac{-\mathbf{y}'(l_0)\mathbf{n}'(l_0) - \frac{\mathbf{y}''(l_0)}{2}\mathbf{n}(l_0)}{2\pi}.$$

Рассмотрим теперь параметрическое представление интеграла I_2 :

$$I_2(l_0) = \frac{1}{\sqrt{P(l_0)}} \int_0^{\text{len}(L)} g(l) \frac{\partial \sqrt{P(l)}}{\partial \mathbf{n}(l)} \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)| dl.$$

Его ядро $\Omega_2(l, l_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|$ имеет разрыв при $l = l_0$. Но при этом интеграл от модуля подынтегрального выражения является сходящимся:

$$\lim_{l \rightarrow l_0} \frac{\ln |\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|}{\frac{1}{|\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|}} = \lim_{l \rightarrow l_0} \frac{\frac{1}{|\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|} |\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|'}{\frac{-1}{|\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|^2} |\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|'} = 0,$$

так как подынтегральная функция является бесконечно большой порядка роста ниже чем $\frac{1}{|\mathbf{y}(l_0) - \mathbf{y}(l)|}$.

С учетом (3.4) оператор скорости квазипотенциала двойного слоя (3.2) представим в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}[g, L](\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^5 \mathbf{V}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \notin L, \\ \mathbf{V}_1(\mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{P(\mathbf{x})}}{H(\mathbf{x})} \int_L g(\mathbf{y}) \sqrt{P(\mathbf{y})} \text{grad}_{\mathbf{x}} \frac{\partial U(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} d\mathbf{y}, \\ \mathbf{V}_2(\mathbf{x}) &= -\frac{\text{grad}_{\mathbf{x}} \sqrt{P(\mathbf{x})}}{H(\mathbf{x})} \int_L g(\mathbf{y}) \sqrt{P(\mathbf{y})} \frac{\partial U(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} d\mathbf{y}, \\ \mathbf{V}_3(\mathbf{x}) &= -\frac{\sqrt{P(\mathbf{x})}}{H(\mathbf{x})} \int_L g(\mathbf{y}) \frac{\partial \sqrt{P(\mathbf{y})}}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \text{grad}_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ \mathbf{V}_4(\mathbf{x}) &= -\frac{\text{grad}_{\mathbf{x}} \sqrt{P(\mathbf{x})}}{H(\mathbf{x})} \int_L g(\mathbf{y}) \frac{\partial \sqrt{P(\mathbf{y})}}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ \mathbf{V}_5(\mathbf{x}) &= K(\mathbf{x}) \int_L g(\mathbf{y}) \text{grad}_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \left(\frac{F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{P(\mathbf{x})P(\mathbf{y})}} \right) d\mathbf{y},\end{aligned} \tag{3.6}$$

Используя известные свойства потенциалов двойного и простого слоя и их градиентов [4], найдем предельные значения для (3.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\pm[g, L](\mathbf{x}) = & \mathbf{V}_1(\mathbf{x}) \pm \frac{\sqrt{P(\mathbf{x})}}{2H(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_\mathbf{x}} \left(g(\mathbf{x}) \sqrt{P(\mathbf{x})} \right) \boldsymbol{\tau}_\mathbf{x} + \\ & + \mathbf{V}_2(\mathbf{x}) \mp \frac{\sqrt{P(\mathbf{x})}}{2H(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) \text{grad}_\mathbf{x} \sqrt{P(\mathbf{x})} + \mathbf{V}_3(\mathbf{x}) \pm \frac{\sqrt{P(\mathbf{x})}}{2H(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) \frac{\partial \sqrt{P(\mathbf{x})}}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} \mathbf{n}_\mathbf{x} + \\ & + \mathbf{V}_4(\mathbf{x}) + \mathbf{V}_5(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L. \end{aligned}$$

После упрощения, с учетом

$$\text{grad}_\mathbf{x} \sqrt{P(\mathbf{x})} = \frac{\partial \sqrt{P(\mathbf{x})}}{\partial \boldsymbol{\tau}_\mathbf{x}} \boldsymbol{\tau}_\mathbf{x} + \frac{\partial \sqrt{P(\mathbf{x})}}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} \mathbf{n}_\mathbf{x},$$

получим окончательное выражение для предельных значений оператора скорости квазипотенциала двойного слоя (3.2):

$$\mathbf{V}^\pm[g, L](\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^5 \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \pm \frac{K(\mathbf{x})}{2} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\tau}_\mathbf{x}} \boldsymbol{\tau}_\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

Второй \mathbf{V}_2 и пятый \mathbf{V}_5 интегралы в (3.7) являются обычными определенными интегралами, первый интеграл \mathbf{V}_1 понимается в смысле конечного значения по Адамару, третий \mathbf{V}_3 понимается в смысле главного значения по Коши, четвертый \mathbf{V}_4 представляет собой абсолютно сходящийся несобственный интеграл.

Отметим, что проведенные рассуждения справедливы в более общем случае, когда корень из проводимости слоя описывается метаграммическим законом [6].

4 Граничные интегральные уравнения

Квазипотенциал φ_* будем искать в виде суперпозиций квазипотенциалов двойных слоев, расположенных на границах L_i , $i \in M_L$:

$$\varphi_*(\mathbf{x}, t) = \sum_{i \in M_L} G[g_i, L_i](\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

Подставим (4.1) в (2.14), получим сингулярное интегральное уравнение:

$$\sum_{j \in M_L} V_n[g_j, L_j](\mathbf{x}, t) = f_I(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_I. \quad (4.2)$$

С учетом условия (2.15) однородное уравнение, соответствующее (4.2) имеет одно независимое решение, удовлетворяющее условию $\int_{L_I} g_I(\mathbf{x}, t) d\mathbf{l}_\mathbf{x} \neq 0$. Тогда

неоднородное уравнение имеет одно решение, удовлетворяющее условию:

$$\int_{L_I} g_I(\mathbf{x}, t) dl_{\mathbf{x}} = 0 \quad (4.3)$$

на замкнутой кривой, или

$$g_I(\mathbf{x}_*, t) = 0, \quad \mathbf{x}_* \in L_I \quad (4.4)$$

на разомкнутой и замкнутой кривой. Решение уравнения (4.2) будем искать при условии (4.3) или (4.4).

При подстановке (4.1) в условия на границе раздела пористой среды и свободной жидкости L_C (2.16), границе с заданным давлением L_P (2.17), границе полупроницаемого включения L_S (2.18) и границе раздела жидкостей с различными вязкостями и плотностями (2.19), получим систему интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} & -2\varphi_C \delta_{iC} - Q_P \varphi_P(\mathbf{x}) \delta_{iP} + g_i(\mathbf{x}, t) - \\ & -2\lambda_i \sum_{j \in M_L} G[g_j, L_j](\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_i, \\ & i = C, P, S, t, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где φ_P представляет собой квазипотенциал источника неизвестной мощности Q_P , расположенный внутри границы L_P (для внешней задачи).

Уравнения (4.5) однозначно разрешимы при всех правых частях для $i = S, t$. Однородные уравнения, соответствующие уравнениям (4.5), при $i = C, P$ имеют по одному линейно независимому решению $\psi_i(\mathbf{x}, t)$ в каждый момент времени t и $\int_{L_i} \psi_i(\mathbf{x}, t) dl_{\mathbf{x}} \neq 0$, $i = C, P$. Тогда при выполнении условия $\int_{L_i} f_i(\mathbf{x}, t) \psi_i(\mathbf{x}, t) dl_{\mathbf{x}} = 0$ уравнения (4.5) для $i = C, P$ имеют решения,

определенные с точностью до слагаемого [10]. Для выделения единственных решений дополним эти уравнения условиями

$$\int_{L_i} g_i(\mathbf{x}, t) dl_{\mathbf{x}} = 0, \quad i = C, P. \quad (4.6)$$

5 Уравнение движения границы раздела жидкостей

Второе граничное условие из (1.8) представим в виде

$$W_n^+(\mathbf{x}, t) = W_n^-(\mathbf{x}, t) = D_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_t. \quad (5.1)$$

Здесь D_n — нормальная составляющая скорости движения точек разрыва.

Выясним физический смысл скорости D_n . Для этого в момент времени t_0 возьмем точку $\mathbf{x}_0 \in L_{t_0}$, где L_{t_0} — подвижная граница, и проведем через нее нормальную прямую l_{n_0} . Рассмотрим точки \mathbf{x}_* , получающиеся при пересечении этой прямой (неподвижной) с границей L_{t_0} (подвижной) в момент времени t . В этом случае $D_n = \frac{d\mathbf{x}_*}{dt} \mathbf{n}(t_0)$ при $t = t_0$, где $\mathbf{n}(t_0)$ — орт положительного вектора нормали к поверхности L_{t_0} в момент времени t_0 в точке \mathbf{x}_0 . Вектор $\mathbf{n}(t_0)$ параллелен прямой l_{n_0} .

Теорема 5.1. Пусть $\mathbf{x}(s, t)$ — параметрическое представление границы L_t , и $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0, t_0) \in L$. Будем считать, что $\mathbf{x}(s, t)$ трижды дифференцируема. В этом случае $D_n = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0, s=s_0} \mathbf{n}(t_0)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0, t_0)$, $\boldsymbol{\tau} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial s} \right|_{t=t_0, s=s_0}$. Тогда будем искать точку $\mathbf{x}_*(t)$ в виде $\mathbf{x}_*(t) = \mathbf{x}(s_*(t), t)$, где $s_* = s_*(t)$. Для нахождения $s_*(t)$ возникает уравнение:

$$(\mathbf{x}(s_*, t) - \mathbf{x}(s_0, t_0)) \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде:

$$F(s_*, t) = 0,$$

где $F(s_*, t) = [\mathbf{x}(s_*, t) - \mathbf{x}(s_0, t_0)] \boldsymbol{\tau}$. При этом $F(s_*, t)$ дважды дифференцируемы и $\frac{\partial F(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial s} \boldsymbol{\tau} - \frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial s} \right) \Big|_{s=s_0, t=t_0}$, $\frac{\partial F}{\partial s} \neq 0$, при $s = s_0$, $t = t_0$ — условие невырожденности замены, и $F(s_0, t_0) = 0$. Тогда по теореме о неявной функции в окрестности точки $t = t_0$ существует единственное решение данной системы $s_*(t)$, определенное и дифференцируемое в окрестности точки $t = t_0$ и удовлетворяющее условию $s_*(t_0) = s_0$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_*(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{x}(s_*(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}(s_*(t), t)}{\partial s} \frac{ds_*(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}(s_*(t), t)}{\partial t}, \\ \left. \frac{d\mathbf{x}_*(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \mathbf{n}(t_0) &= \left(\left. \frac{\partial \mathbf{x}(s_*(t), t)}{\partial s} \right|_{t=t_0} \mathbf{n}(t_0) \right) \left. \frac{ds_*(t)}{dt} \right|_{t=t_0} + \\ &+ \left. \frac{\partial \mathbf{x}(s_*(t), t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \mathbf{n}(t_0). \end{aligned}$$

В последнем выражении скалярные произведения в круглых скобках равны нулю, так как это произведения касательных векторов на нормаль. В итоге

$$\left. \frac{d\mathbf{x}_*(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \mathbf{n}(t_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(s_*(t), t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \mathbf{n}(t_0),$$

что и требовалось доказать. □

Пусть L_t подвижный контур, форма которого в каждый момент времени $t \geq 0$ задана параметрически

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t), \quad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{R},$$

причем $\mathbf{x}(s, t)$ — периодическая функция по s с периодом T_s . При этом, для каждого значения s зависимость $\mathbf{x}(s, t)$ как функция от времени задает движение некоторой отмеченной точки контура. При этом

$$\mathbf{W}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial t}$$

есть скорость движения указанной отмеченной точки.

Вектор $\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial s}$ есть вектор касательной к контуру L_t . Будем считать, что функция $\mathbf{x}(s, t)$ один раз непрерывно-дифференцируема по t и функции $\mathbf{x}(s, t)$ и $\frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial t}$ три раза непрерывно-дифференцируема по s . Кроме того, считаем, что $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \geq \theta > 0$, где θ — некоторая константа.

Пусть также $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s, t)$ орт вектор нормали к контуру L_t в точке $\mathbf{x}(s, t)$. Тогда

$$D_n = \text{Pr}_n \mathbf{W}(t, s)$$

есть нормальная скорость движения контура L_t . При этом, в силу второго условия из (1.8) выполняется равенство

$$D_n = W_n^+ = W_n^-. \quad (5.2)$$

Теорема 5.2. Пусть

$$\mathbf{W}^*(s, t) = \gamma \mathbf{W}^+ + (1 - \gamma) \mathbf{W}^-, \quad \gamma \in [0, 1]$$

Можно ввести новый параметр λ , так, что $s = s(\lambda, t)$ и функция $\mathbf{y}(\lambda, t) = \mathbf{x}(s(\lambda, t), t)$ также является периодической с периодом T_s и задает движение контура L_t , причем

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{W}^*(s(\lambda, t), t). \quad (5.3)$$

Доказательство. Пусть $s(\lambda, t)$ некоторая функция, такая, что

$$s(\lambda, t)|_{t=0} = \lambda, \quad \lambda = (-\infty, +\infty). \quad (5.4)$$

Тогда

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}(s(t, \lambda), t)}{\partial t} \right|_{\lambda=\text{const}} = \mathbf{W}(s, t) + \tau \frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial t}.$$

Отметим, что в проекции на вектор \mathbf{n} последнее уравнение выполнено автоматически в силу условия (5.2).

Для выполнения равенства (5.3) запишем уравнение

$$\mathbf{W}(s, t) + \boldsymbol{\tau}(s, t) \frac{\partial s(t, \lambda)}{\partial t} = \mathbf{W}^*(s, t).$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial s(\lambda, t)}{\partial t} = F(s, t), \quad (5.5)$$

где

$$F(\lambda, t) = \frac{(\mathbf{W}(s, t) - \mathbf{W}^*(\lambda, t), \boldsymbol{\tau})}{(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})}.$$

При этом $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) > \theta^2 > 0$ и $F(s, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по s , и имеет ограниченные производные. Тогда уравнение (5.5) имеет для каждого λ решение, удовлетворяющее условию (5.4), определенное при $t \in [0, \infty)$.

Далее, так как функция $\frac{\partial F(s, t)}{\partial s}$ дважды непрерывно дифференцируема по s , существует производная $\frac{\partial s}{\partial t} = q(\lambda, t)$, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial q(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(s, t)}{\partial p} q(\lambda, t), \quad q(\lambda, t) = 1 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Заметим, что $\frac{\partial F(s, t)}{\partial s} = F_1(\lambda, t)$ — заданная функция переменных t и λ при найденном $p(\lambda, t)$. Поэтому при каждом λ имеем

$$\frac{dq}{q} = F_1 dt \quad \text{и} \quad q = e^{\int F_1(\lambda, t) dt}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial p(\lambda, t)}{\partial \lambda} > 0$ при всех t и λ , и значит, при каждом t существует обратная зависимость

$$\lambda = \lambda(s, t).$$

Теперь, если положить

$$\mathbf{y}(\lambda, t) = \mathbf{x}(s(\lambda, t), t),$$

то будет выполнено условие (5.3). \square

Из (5.3), получим дифференциальное уравнение движения границы L_t в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \gamma \mathbf{W}^+(\mathbf{x}, t) + (1 - \gamma) \mathbf{W}^-(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_t. \quad (5.6)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда в дифференциальном уравнении (5.6) параметр $\gamma = 1/2$. При этом, с учетом (2.10) и (3.7), дифференциальное уравнение движения границы L_t принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i \in M_L} \mathbf{V}[g_i, L_i](\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in L_t. \quad (5.7)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы раздела жидкостей L_0 известно:

$$\mathbf{x}(s, 0) = \mathbf{x}_0(s). \quad (5.8)$$

В итоге, для математического моделирования процесса эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородной пористой среде, содержащей непроницаемые и полупроницаемые включения, а также каверны со свободной жидкостью необходимо решить систему уравнений, состоящей из сингулярного интегрального уравнения (4.2) с дополнительным условием (4.3), интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода (4.5) с дополнительными условиями (4.6), дифференциального уравнения (5.7) при заданных начальных условиях (5.8).

Неизвестными в этой системе являются функции \mathbf{x} , g_i , $i \in M_L$ и константы φ_C и Q_P .

6 Численная схема

Дискретизация операторов двойного слоя

Построим дискретные аналоги для операторов квазипотенциала двойного слоя (3.1) и его скорости (3.2). Для этого границу L разобьем на n_L приблизительно равных по длине частей и получим множество точек $\{\mathbf{x}_m | m = \overline{0, n_L - 1}\}$, $\mathbf{x}_m \equiv (x_m^0, x_m^1)$. В этом случае граница L представляется системой отрезков с концами \mathbf{x}_m и \mathbf{x}_{m+1} , причем $\mathbf{x}_{n_L} = \mathbf{x}_0$ для замкнутой кривой. Центры отрезков будем обозначать с использованием дробных индексов (см. рис. 2):

$$\mathbf{x}_{m+1/2} = (\mathbf{x}_{m+1} + \mathbf{x}_m) / 2. \quad (6.1)$$

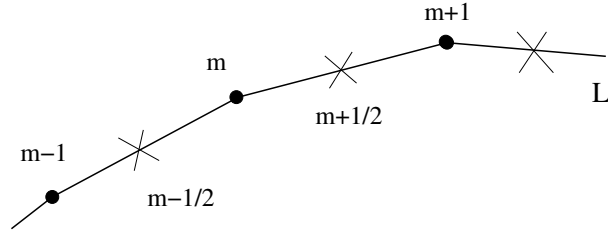


Рис. 2: Множество отрезков.

Длину каждого отрезка обозначим Δl_k и будем вычислять по формуле $\Delta l_k = |\Delta \mathbf{x}_k|$, $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, нормаль вычислим следующим образом

$$\mathbf{n}_{k+1/2} = M_{90^\circ} \boldsymbol{\tau}_{k+1/2}^j, \quad (6.2)$$

где $M_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица поворота на 90° против часовой стрелке, $\boldsymbol{\tau}_{k+1/2} = \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k|}$ — единичный вектор касательной. Вектора касательной и нормали образуют правую двойку $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$.

Полагаем, что плотность потенциала двойного слоя постоянна в пределах каждого отрезка и построим дискретное представление прямого значения оператора потенциала двойного слоя (3.1) в расчетных точках $\mathbf{x}_{k+1/2}$:

$$G_l[g, L](\mathbf{x}_{m+1/2}) = \sum_{k=0}^{n_L-1} g(\mathbf{x}_{k+1/2}) G_l[e, \Delta \mathbf{x}_k](\mathbf{x}_{m+1/2}), \quad (6.3)$$

$$e(x) = 1, \quad m = \overline{0, n_L - 1}.$$

Здесь

$$G_l[e, \Delta \mathbf{x}_k](\mathbf{x}_{m+1/2}) = \begin{cases} \Omega(\mathbf{x}_{m+1/2}, \mathbf{x}_{k+1/2}) \Delta l_k, & m \neq k, \\ 0, & m = k, \end{cases}$$

$$\Omega(\mathbf{x}_{m+1/2}, \mathbf{x}_{k+1/2}) = \left(P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{m+1/2}, \mathbf{y}=\mathbf{x}_{k+1/2}}.$$

Предполагаем, что существуют функции $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ связанные соотношением:

$$P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = - \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\tau}_y}. \quad (6.4)$$

Из выражения (6.4) можно восстановить функцию $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Действительно, с учетом $\mathbf{n} = M_{90^\circ} \boldsymbol{\tau}$ выражение (6.4) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^0} = P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^1}, \quad \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^1} = -P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^0}.$$

Выполняя интегрирование полученных выражений, имеем формулы для восстановления функции $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^1} dy^0 + a(x^0, x^1, y^1) \\ \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int P(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y^0} dy^1 + b(x^0, x^1, y^0)\end{aligned}\tag{6.5}$$

Рассмотрим несколько примеров определения функции $\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по заданной функции $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Так, в наиболее простом случае безграничной однородной пористой среды $P = 1$ указанные функции имеют вид:

$$\Phi_{1h} = -\frac{\ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2\pi}, \quad \Phi_{2h} = -\frac{1}{2\pi} \arctan \frac{x^1 - y^1}{x^0 - y^0}.\tag{6.6}$$

Следует отметить, что функция \arctan является неоднозначной. Но, в дальнейшем мы будем использовать частные производные от этой функции, которые определяются однозначно.

В случае, когда ось абсцисс является непроницаемой и $P = 1$:

$$\begin{aligned}\Phi_{1i} &= -\frac{\ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2\pi} - \frac{\ln |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{y}}|}{2\pi}, \\ \Phi_{2i} &= -\frac{1}{2\pi} \arctan \frac{x^1 - y^1}{x^0 - y^0} + \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{x^1 + y^1}{x^0 - y^0}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Здесь и далее $\tilde{\mathbf{y}} = (y^0, -y^1)$.

Приведем пример для неоднородной пористой среды с проводимостью $P = (x^1)^2$. В качестве $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпишем функцию Грина, учитывающую непроницаемую линию $x^1 = 0$. Функции $\Phi_{1p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Phi_{2p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющие условиям (6.4) имеют вид:

$$\begin{aligned}\Phi_{1p} &= \frac{1}{2\pi x^1 y^1} \ln \frac{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{y}}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \\ \Phi_{2p} &= \frac{x^0 - y^0}{2\pi x^1} \ln \frac{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{y}}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{1}{2\pi} \left(\arctan \frac{x^1 - y^1}{x^0 - y^0} - \arctan \frac{x^1 + y^1}{x^0 - y^0} \right).\end{aligned}\tag{6.8}$$

Используя равенство (6.4) преобразуем выражение для оператора скорости квазипотенциала двойного слоя (3.2) следующим образом:

$$\mathbf{V}[g, L](\mathbf{x}) = - \int_L g(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{y}}} d\mathbf{l}_{\mathbf{y}}.\tag{6.9}$$

Здесь $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}) \text{grad}_{\mathbf{x}} \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. С учетом предположения о постоянстве плотности двойного слоя вдоль каждого отрезка, выполним дискретизацию

оператора (6.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_l[g, L](\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^{n_L-1} g_{k+1/2} \mathbf{V}[e, \Delta \mathbf{x}_k](\mathbf{x}), \\ \mathbf{V}[e, L_k](\mathbf{x}) &= \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) - \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{k+1}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отметим, что оператор скорости квазипотенциала двойного слоя $\mathbf{V}[e, L]$ с единичной плотностью $e = 1$ на отрезке вычисляется точно.

При использовании дискретного аналога оператора скорости двойного слоя (6.10) точка \mathbf{x} может располагаться в серединах отрезков, заменяющих границу L . Например, такая ситуация возникает при решении задачи об обтекании непроницаемой границы L_I . При этом, дискретное представление оператора скорости двойного слоя (6.10) подходит напрямую. Но, возможны ситуации, когда необходимо вычислять значение скорости двойного слоя на концах отрезков, заменяющих границу L , или, вообще, вблизи отрезков. Примеры таких ситуаций — моделирование эволюции границы раздела жидкостей или пересечение двух границ, содержащих двойной слой.

В дальнейшем для вычисления скорости квазипотенциала двойного слоя в любой точке введем оператор $\mathbf{V}_{l\varepsilon}[g, L](\mathbf{x})$ со сглаженным ядром [3], в котором $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ заменяется на $\mathbf{V}_{2\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\mathbf{V}_{2\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta_\varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (6.11)$$

Один из вариантов сглаживающей функции Θ имеет вид:

$$\Theta_\varepsilon(r) = \left[63 \left(\frac{r}{r_\varepsilon} \right)^5 - 90 \left(\frac{r}{r_\varepsilon} \right)^7 + 35 \left(\frac{r}{r_\varepsilon} \right)^9 \right] / 8, \quad r \leq r_\varepsilon, \quad (6.12)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — расстояние от расчетной точки до точки, содержащей особенность, радиус вихря r_ε подбирается в ходе вычислительного эксперимента [5].

Дискретная схема основной системы уравнений

Построим численную схему для основной системы интегральных уравнений (4.2), (4.5) и дифференциального уравнения (5.7). При построении численной схемы для решения интегральных уравнений необходимо выписать уравнения в расчетных точках, выполнив замену непрерывных операторов $G[g, L]$ и $\mathbf{V}[g, L]$ на их дискретные аналоги $G_l[g, L]$ (6.3) и $\mathbf{V}_l[g, L]$ (6.10) для каждого момента времени t_s , $s = 0, 1, \dots$

При составлении дискретного аналога для сингулярного интегрального уравнения (4.2) на непроницаемой границе L_I и дополнительного усло-

вия (4.3) к нему добавляем регуляризующую переменную γ [4]:

$$\begin{aligned} \gamma + \sum_{j \in M_L} \sum_{k=0}^{n_j-1} g_j(\mathbf{x}_{j,k+1/2}, t_s) V_n[e, \Delta \mathbf{x}_{jk}](\mathbf{x}_{I,m+1/2}, t_s) &= f_I(\mathbf{x}_{I,m+1/2}, t_s), \\ \sum_{k=0}^{n_I-1} g_I(\mathbf{x}_{I,k+1/2}, t_s) &= 0, \quad m = \overline{0, n_I - 1}, \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

Если граница L_I моделируется разомкнутым контуром, то используется условие (4.4). Разомкнутый контур используется в случае, когда граница замыкается на большом расстоянии от области протекания процесса.

Дискретные аналоги уравнений типа Фредгольма второго рода (4.5) на границах L_C , L_P , L_S и L_t также выписываем с учетом дополнительных условий (4.6):

$$\begin{aligned} -2\varphi_C(t_s)\delta_{iC} - Q_P(t_s)\varphi_P(\mathbf{x}_{i,m+1/2})\delta_{iP} + g_i(\mathbf{x}_{i,m+1/2}, t_s) - \\ -2\lambda_i \sum_{j \in M_L} \sum_{k=0}^{n_j-1} g_j(\mathbf{x}_{j,k+1/2}, t_s) G_l[e, \Delta \mathbf{x}_{jk}](\mathbf{x}_{i,m+1/2}) &= f_i(\mathbf{x}_{i,m+1/2}, t_s), \\ m = \overline{0, n_I - 1}, \quad i = C, P, S, t, \quad \delta_{ij} &= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \\ \sum_{k=0}^{n_i-1} g_i(\mathbf{x}_{i,k+1/2}, t_s) &= 0, \quad i = C, P, \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (6.14)$$

В качестве регуляризующих переменных в этой системе уравнений выступают неизвестные константы φ_C и Q_P .

Для решения задачи Коши (5.7) и (5.8) воспользуемся явным методом Эйлера. Для этого в точке t_s заменим дифференциал правой разностью (разностью вперед) $\partial \mathbf{x} \approx \mathbf{x}(\theta, t_{s+1}) - \mathbf{x}(\theta, t_s)$. При этом правую часть дифференциального уравнения вычисляем в этой же точке t_s :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t_{s+1},m} &= \mathbf{x}_{t_s,m} + \mathbf{W}_0(\mathbf{x}_{t_s,m}, t_s) \Delta t_s + \\ + \sum_{j \in M_L} \sum_{k=0}^{n_j-1} g_j(\mathbf{x}_{j,k+1/2}, t_s) \mathbf{V}_\varepsilon[e, \Delta \mathbf{x}_{jk}](\mathbf{x}_{t_s,m}) \Delta t_s, \\ m &= \overline{0, n_{t_s} - 1}, \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (6.15)$$

Оператор $\mathbf{V}_\varepsilon[e, \Delta \mathbf{x}_{jk}]$ — представляет собой дискретный аналог оператора скорости квазипотенциала двойного слоя (6.10), в котором используется сглаженное ядро (6.11).

Дискретное представление начальной границы раздела жидкостей L_0 получим из начальных условий (5.8):

$$\mathbf{x}_{t_0,m} = (u(\theta_m), v(\theta_m)), \quad m = \overline{0, n_{t_0} - 1}. \quad (6.16)$$

Здесь u и v — заданные функции.

7 Разработка программного обеспечения

Создадим модуль, содержащий функции для составления интегральных уравнений (6.13)–(6.14) и вычисления значений операторов квазипотенциала двойного слоя (6.3) и его скорости (6.10). Этот модуль будет использоваться для решения как стационарных краевых задач, так и для задач об эволюции границы раздела различных жидкостей.

Для разработки программного обеспечения будем использовать модули **numpy** [12] и **sympy** [15]. Модуль **numpy** предназначен для проведения численные расчетов в матричном виде. Поэтому функции, созданные ниже, работают с массивами вещественных чисел. Причиной использования модуля для символьных вычислений является то, что основная система уравнений содержит символьные операции и функции, которые определяются при решении конкретных задач.

```

1 myeps=0.000001
2 x0, x1, y0, y1=sp.symbols('x0 x1 y0 y1', real=True)
3 sx=[x0, x1]
4 sy=[y0, y1]
5 _Kx_=1
6 _Py_=1
7 _Phi1_=-0.25/sp.pi*sp.log((x0-y0)**2+(x1-y1)**2)
8 _sOmega_=[_Py_*sp.diff(_Phi1_, sy[j]) for j in range(2)]
9 _Phi2_=-0.5/sp.pi*sp.atan((x1-y1)/(x0-y0))
10 _sV2_=[sp.ratsimp(_Kx_*sp.diff(_Phi2_, sx[j])) for j in range(2)]
11 _sVS_=[_Kx_*sp.diff(_Phi1_, sx[j]) for j in range(2)]

```

Листинг 1: Глобальные переменные.

В листинге 1 определены основные переменные, используемые в модуле. Переменная *myeps* в строке 1 определяет некоторое маленькое число. Переменные *x0*, *x1*, *y0* и *y1* в строке 2 соответствуют координатам $\mathbf{x}(x^0, x^1)$ и $\mathbf{y}(y^0, y^1)$. Для удобства использования эти переменные помещены в списки *sx* и *sy*.

В строках 5-11 листинга 1 определены символьные функции, используемые в основной системе уравнений. Несложно догадаться, что имеет место следующее соответствие: *_Kx_* — $K(\mathbf{x})$, *_Py_* — $P(\mathbf{y})$, *_Phi1_* — Φ_1 , *_Phi2_* — Φ_2 , *_sOmega_* — Ω (см. (6.3)), *_sV2_* — \mathbf{V}_2 (см. (6.9)) и *_sVS_* — скорость источника (2.11). Все эти переменные выписаны для случая безграничной однородной пористой среды и будут использоваться по умолчанию.

Координаты точек каждой из границ будем хранить в отдельном двумерном массиве. Устройство этого массива представлено в таблице 1. Вдоль первой оси этого массива хранятся абсциссы точек границы, вдоль второй

$$\begin{array}{c}
\text{x}[:, : n] \\
\begin{array}{c}
\text{x}[0] \\
\text{x}[1]
\end{array}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
x_0^0 & x_1^0 & \dots & x_{n-1}^0 & x_n^0 \\
\hline
x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_{n-1}^1 & x_n^1 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{x}[:, 1:]
\end{array}$$

Таблица 1: Массив \mathbf{x} и его срезы.

оси — ординаты. Для замкнутых кривых первая и последняя точки совпадают: $x_0^0 = x_n^0$ и $x_0^1 = x_n^1$.

В таблице 1 представлены срезы, которые применяются к массивам с координатами точек границы. Срез $\mathbf{x}[i]$ извлекает i -ю строку из массива \mathbf{x} . При $i=0$ вырезается строка с абсциссами, при $i=1$ — с ординатами. Срез $\mathbf{x}[:, : n]$ извлекает из массива \mathbf{x} все строки и все столбцы от 0 до $n - 1$. При выполнении среза $\mathbf{x}[:, 1:]$ кортежем из двух индексов вырезаются все строки, а также все столбцы кроме первого. Указанные срезы используются далее.

```

1 def Normal(x):
2     n=x[0].shape[0]-1
3     return np.array([-x[1, 1:]+x[1, : n], x[0, 1:]-x[0, : n]])

```

Листинг 2: Нормаль.

В листингах 2 и 3 представлен код, для вычисления не нормированного и нормированного векторов нормали. В строке 2 листинга 2 определяется число отрезков, концы которых переданы в массиве \mathbf{x} . Этот массив хранит координаты границы.

В строке 3 листинга 2 выполняется вычисление компонент не нормированного вектора нормали в соответствии с формулой (6.2). Вычисления производятся в матричном виде и операции сложения двух векторов выполняются поэлементно (см. таблицу 2). Аналогичным образом (поэлементно), в листинге 3 выполняется нормировка вектора нормали.

$-\mathbf{x}[1, 1:] + \mathbf{x}[1, : n]$	$-x_1^1 + x_0^1$	$-x_2^1 + x_1^1$	\dots	$-x_n^1 + x_{n-1}^1$
$\mathbf{x}[0, 1:] - \mathbf{x}[0, : n]$	$x_1^0 - x_0^0$	$x_2^0 - x_1^0$	\dots	$x_n^0 - x_{n-1}^0$

Таблица 2: Содержимое массива, возвращаемого функцией *Normal*.

```

1 def normal(x):
2     nr=Normal(x)
3     return nr/np.sqrt(nr[0]**2+nr[1]**2)

```

Листинг 3: Единичный вектор нормали.

Несложно заметить, что в основной системе уравнений требуется вычислять функции вида $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $F(x^0, x^1, y^0, y^1)$. Эти функции заданы в

виде символьных выражений, которые в общем случае могут содержать операции дифференцирования и интегрирования, специальные функции и так далее. Так, например, ядро оператора G_l (6.3) содержит производные от квазипотенциала Φ_1 , которые для разных слоев имеет разное представление.

Разработаем вспомогательную функцию `sF`, которая будет возвращать численный массив, вычисленный в соответствии с символьным выражением `sExpress` и массивом аргументов `M` для него. Символьные переменные `x0`, `x1`, `y0` и `y1`, соответствующие аргументам x^0 , x^1 , y^0 и y^1 приведены в листинге 1 в строках 2–4. Массив аргументов `M` содержит два массива, каждый из которых хранит по два массива со значениями аргументов для матричной функции. Для наглядности, соответствие между переменными представлено в таблице 3.

математические переменные	символьные переменные	массивы со значениями
x^0	<code>x0</code>	<code>M[0,0]</code>
x^1	<code>x1</code>	<code>M[0,1]</code>
y^0	<code>y0</code>	<code>M[1,0]</code>
y^1	<code>y1</code>	<code>M[1,1]</code>

Таблица 3: Соответствие между переменными.

Функция `sF` представлена в строках 13–14 листинга 4. Для преобразования символьного выражения `sExpress` в функцию для матричных расчетов используется функция `lambdify` с параметром `numpy` из пакета `sympy`. Замена переменных происходит в соответствии с таблицей 3.

Следует отметить, что функция `lambdify` выполняет дословную замену имен функций из пакета `sympy` на функции из пакета `numpy`. Поэтому, в случае не совпадения названий заменяемой и заменяющей функций требуется написания собственного словаря (ассоциативного массива). В этом словаре названия заменяемых функций выступают в качестве ключей, а названия заменяющих функций — в качестве значений. Так, например, функцию Бесселя `besselk` из пакета `sympy` можно заменить на функцию `kn` из пакета `scipy` [14]. Для этого вводим словарь, одна из пар которого имеет вид: `mydic = {"besselk": scipy.special.kn}`.

```

1 def withoutZero(sFunc):
2     def wrapped(sExpress, M, minDist=myeps):
3         gd=np.sum([(M[i,1]-M[i,0])**2 for i in range(2)], axis=0)>
4             minDist**2
5         AA=M[0,0].copy()
6         AA[np.logical_not(gd)]+=1
7         result=np.zeros_like(M[0,0])
8         result[gd]=sFunc(sExpress, np.array([[AA,M[0,1]],[M[1,0],M[1,1]]]), minDist)[gd]
9         return result

```

```

9      wrapped.orig=sFunct
10     return wrapped
11
12 @withoutZero
13 def sF(sExpress,M,minDist=myeps):
14     return sp.lambdify((y0,x0,y1,x1),sExpress,modules='numpy')(M
        [0,0],M[0,1],M[1,0],M[1,1])

```

Листинг 4: Вспомогательная функция sF

Функции, которые используются в модуле и скриптах, обладают особенностью. При совпадении точек $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ они становятся бесконечно большими. В алгоритмах не требуется производить вычисления таких значений. Поэтому разработаем декоратор *withoutZero* для функции sF, не допускающий расчетов значений функций при совпадении расчетной точки и точки с особенностью $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Декоратор *withoutZero* приведен в листинге 4. Проверка на совпадение точек с точностью minDist выполняется в строке 3. Массив gd содержит значения **True** для индексов, в которых точки не пересекаются, и **False** — для точек \mathbf{x} , которые попадают в окрестность \mathbf{y} . Для того, чтобы при вычислениях не произошло деление на очень маленькое число, одна из координат расчетной точки \mathbf{x} меняется на единицу в строке 5. Это позволяет выполнять расчеты без сбоев. Результат расчета в точке \mathbf{x} , попавшей в окрестность \mathbf{y} в дальнейшем не используется.

Большинство планируемых вычислений потребуют игнорирования деления на очень маленькое число. Поэтому в строке 12 к функции sF применяется декоратор *withoutZero*. Но, встречаются случаи, когда деление на очень маленькое число не возникает. Эти случаи также предусмотрены в созданном декораторе. В строке 9 имеется поле orig, хранящее ссылку на декорируемую функцию. А в листинге 11 продемонстрировано использование этого поля. При использовании поля orig код, отклоняющий деления на очень маленькое число, не выполняется.

В интегральных и дифференциальных уравнениях основной системы (6.13) – (6.15) используются операторы квазипотенциала двойного слоя и его скорости. Разработаем функции, соответствующие этим операторам. Вначале напомним функцию *MPDL*, вычисляющую матрицу \hat{G} , соответствующую оператору квазипотенциала двойного слоя (6.3). При этом полагаем, что результат работы оператора представим в виде поэлементного произведения этой матрицы на вектор с плотностями в расчетных точках границы:

$$G_l[g, L](\mathbf{x}) = \hat{G} \circledast \hat{g}.$$

Для обозначения операции поэлементного умножения введен оператор \circledast . В общепринятых математических обозначениях поэлементное умножение определяется следующим образом. Пусть \hat{A} и \hat{B} представляют собой матрицы, \hat{x} — вектор строка, \hat{y} — вектор столбец, \hat{e} — вектор строка из единиц.

Тогда

$$\hat{A} \circledast \hat{B} = \hat{A} \circ \hat{B}, \quad \hat{A} \circledast \hat{x} = \hat{A} \circ (\hat{e}^T \otimes \hat{x}), \quad \hat{A} \circledast \hat{y} = \hat{A} \circ (\hat{y} \otimes \hat{e}),$$

где \otimes — тензорное произведение, \circ — произведение по Адамару. В поэлементном виде последние выражения представляются так:

$$\hat{A} \circledast \hat{B} = \begin{pmatrix} A_{00}B_{00} & A_{01}B_{01} & \dots & A_{0,n-1}B_{0,n-1} \\ A_{10}b_{10} & A_{11}b_{11} & \dots & A_{1,n-1}B_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m-1,0}B_{m-1,0} & A_{m-1,1}B_{m-1,1} & \dots & A_{m-1,n-1}B_{m-1,n-1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} \circledast \hat{x} = \begin{pmatrix} A_{00}x_0 & A_{01}x_1 & \dots & A_{0,n-1}x_{n-1} \\ A_{10}x_0 & A_{11}x_1 & \dots & A_{1,n-1}x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m-1,0}x_0 & A_{m-1,1}x_1 & \dots & A_{m-1,n-1}x_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} \circledast \hat{y} = \begin{pmatrix} A_{00}y_0 & A_{01}y_0 & \dots & A_{0,n-1}y_0 \\ A_{10}y_1 & A_{11}y_1 & \dots & A_{1,n-1}y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m-1,0}y_{m-1} & A_{m-1,1}y_{m-1} & \dots & A_{m-1,n-1}y_{m-1} \end{pmatrix}.$$

```

1 def MPDL(x, y, Ny, sOmega=_sOmega_, minDist=myeps):
2     M=np.array([np.meshgrid(y[j], x[j]) for j in range(2)])
3     return np.sum([sF(sOmega[j], M, minDist)*Ny[j] for j in range(2)],
                    axis=0)

```

Листинг 5: Матрица \hat{G} для квазипотенциала двойного слоя.

В листинге 5 приводится реализация функции *MPDL*. Разберем этот код. В строке 2 генерируется список из двух массивов с аргументами для символического выражения *sOmega*, соответствующего ядру квазипотенциала двойного слоя (6.3). Более точно, *sOmega* содержит компоненты градиента от квазипотенциала стока Φ_1 , умноженные на проводимость слоя. Функция *array* создает из сгенерированного списка *numpy*-массив, формат которого соответствует входному параметру функции *sF*. Далее, в строке 3 вычисляется скалярное произведение:

$$(\mathbf{\Omega}, \mathbf{n}_y) = \sum_{i=0}^1 \Omega_i n_i, \quad \text{где} \quad \mathbf{\Omega} = P(\mathbf{y}) \text{grad}_{\mathbf{y}} \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Перемножение массивов в строке 3 при генерации списка происходит поэлементно, как показано выше.

```

1 def PDL(x, y, g, Ny, sOmega=_sOmega_, minDist=myeps):
2     return np.sum(MPDL(x, y, Ny, sOmega, minDist)*g, axis=1)

```

Листинг 6: Квазипотенциал двойного слоя.

В листинге 6 приведена функция *PDL* предназначенная для вычисления квазипотенциала двойного слоя. Эта функция вызывает функцию *MPDL*, возвращающую матрицу \hat{G} . Матрица \hat{G} поэлементно умножается на вектор строку \hat{g} , затем выполняется суммирование элементов, расположенных с столбцах. В итоге, функция *PDL* возвращает вектор со значениями квазипотенциала двойного слоя в расчетных точках.

```

1 def Theta(M, rEps=myeps):
2     R2=np.sum([(M[i,1]-M[i,0])**2 for i in range(2)], axis=0)
3     THETA=np.ones_like(R2)
4     rEps2=rEps**2
5     R2=R2/rEps2; R=R2**.5; R3=R2*R; R5=R3*R2; R7=R5*R2; R9=R7*R2
6     THETA[R2<rEps]=.125*(63.*R5-90.*R7+35.*R9)[R2<rEps]
7     return THETA

```

Листинг 7: Сглаживающая функция Θ .

```

1 def V2(x, y, sV2=_sV2_, rEps=myeps):
2     M=np.array([np.meshgrid(y[j], x[j]) for j in range(2)])
3     return Theta(M, rEps)*np.array([sF(sV2[j], M) for j in range(2)])

```

Листинг 8: Скорость \mathbf{V}_2 (6.11).

Перед написанием функции, вычисляющей скорость квазипотенциала двойного слоя, введем две вспомогательные функции *Theta* и *V2*. Эти функции используются в ядре скорости квазипотенциала двойного слоя (6.9). Функция *Theta* реализует сглаживающую функцию Θ (6.12), а *V2* — функцию $\mathbf{V}_{2\varepsilon}$ (6.11).

Функция *Theta* приведена в листинге 7. Она принимает элементы массива *M*, который состоит из значений переменных x^0, x^1, y^0 и y^1 . Затем, в соответствии с формулой (6.12) выполняются поэлементные матричные операции и возвращается матрица со значениями функции Θ . Функция *V2* в листинге 8 вычисляет массив значений функции $\mathbf{V}_{2\varepsilon}$ из массивов с координатами расчетных точек *x* и координатами точек с особенностями *y*.

```

1 def MVDL(x, b, sV2=_sV2_, rEps=myeps):
2     return -V2(x, b[:, 1:], sV2, rEps)+V2(x, b[:, : b.shape[1]-1], sV2, rEps)

```

Листинг 9: Матрица для скорости квазипотенциала двойного слоя.

```

1 def VDL(x, b, g, sV2=_sV2_, rEps=myeps):
2     return np.sum(MVDL(x, b, sV2, rEps)*g, axis=2)

```

Листинг 10: Скорость квазипотенциала двойного слоя.

В листингах 9 и 10 вычисляются матрица $\hat{\mathbf{V}}$, соответствующая оператору скорости квазипотенциала двойного слоя $\mathbf{V}_{l\varepsilon}[g, L]$, распределенного по границе *L* с плотностью *g* (6.10). Причем, программируется оператор со сглаженным ядром. Как и в случае с квазипотенциалом двойного слоя, оператор скорости квазипотенциала двойного слоя представим в виде поэлементного

произведения матрицы $\hat{\mathbf{V}}$ и вектора-строки \hat{g} :

$$\mathbf{V}_{l\varepsilon}[g, L] = \hat{\mathbf{V}} \circledast \hat{g}.$$

Функция *MVDL* возвращает матрицу $\hat{\mathbf{V}}$. Функция *VDL* использует эту матрицу для вычисления скорости квазипотенциала двойного слоя в расчетных точках. В отличие от функций *MPDL* и *PDL* в функции *MVDL* и *VDL* должны передаваться края отрезков, представляющих границы (см. рисунок 2). Поэтому координаты точки границы в листингах 9 и 10 представлены параметром *b*, отличающимся по названию от параметра *y* в листингах 5 и 6.

```
1 def varphiSources(q, x, z, sPhi1=_Phi1_):
2     M=np.array([np.meshgrid(z[j], x[j]) for j in range(2)])
3     return -np.sum(q*sF.orig(sPhi1, M), axis=1)
```

Листинг 11: Квазипотенциал системы источников.

```
1 def VSources(q, x, z, sVS=_sVS_):
2     M=np.array([np.meshgrid(z[j], x[j]) for j in range(2)])
3     return -np.array([np.sum(q*sF.orig(sVS[j], M), axis=1) for j in
                        range(2)])
```

Листинг 12: Поле скоростей от системы источников.

В листингах 11 и 12 приводится реализация функций *varphiSources* и *VSources*, предназначенных для вычислений значений квазипотенциала системы источников и их скоростей в расчетных точках *x*. Мощности источников и их координаты хранятся в массивах *q* и *z*. Расчеты квазипотенциала и его скорости для каждого их источников производятся по формулам (2.9) и (2.11).

Разработанных матричных функций достаточно, чтобы решать поставленные в пособии задачу об эволюции и краевые задачи. Но, следует отметить, что могут возникать ситуации, когда решение в матричном виде получить не удастся. В этом случае, при написании кода организация циклических процессов для поэлементных алгоритмов в Python является не желательной. И, более оптимальным способом написания программного обеспечения является разработка функций на языке C или C++ и подключение их к проекту на Python с использованием пакетов *ctypes*, *scipy.weave* и других.

8 Тестирование численных решений краевых задач

Рассмотрим случай однородной пористой среды. Для такой среды коэффициент проводимости $P = 1$, причем $K = 1$ и $H = 1$. При этом эллиптическое уравнение (2.2) принимает вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{02}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{12}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8.1)$$

Для уравнения Лапласа (8.1), приведенные выше краевые задачи в случае канонических кривых имеют точные решения. Последнее позволяет провести тестирование численных решений и разработанного программного обеспечения.

Обтекание кругового полупроницаемого включения источником

Пусть область, в которой происходит процесс, окружностью L_S делится на две части: с постоянной проницаемостью K_2 внутри и постоянной проницаемостью K_1 вне. Радиус окружности равен R . Фильтрация однородной жидкости описывается потенциалом φ , который удовлетворяет уравнению Лапласа (8.1) во всей области протекания процесса, кроме окружности L_S $\Omega = D \setminus L_S$. На окружности L_S выполняются условия сопряжения (2.6), которые в полярных координатах (ϱ, ϑ) имеют вид:

$$K_2\varphi^+(\varrho, \vartheta) = K_1\varphi^-(\varrho, \vartheta), \quad \left(\frac{\partial\varphi(\varrho, \vartheta)}{\partial\varrho}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi(\varrho, \vartheta)}{\partial\varrho}\right)^-, \quad \varrho = R. \quad (8.2)$$

Полярная система координат связана с центром окружности L_S .

Течение возмущается источником, расположенным в точке $\mathbf{z} = (z^0, z^1)$. Потенциал этого источника в безграничной среде имеет вид:

$$\varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = -q\Phi_{1h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad (8.3)$$

Здесь Φ_{1h} — фундаментальное решение уравнения Лапласа (8.1), моделирующее сток в однородной безграничной среде полным расходом равным -1 (6.6).

Согласно [2] решение задачи сопряжения (8.1) и (8.2) можно найти методом изображения особых точек. В этом методе, потенциал источника, моделирующий обтекание полупроницаемой окружности, кроме заданного источника определяется источником, расположенным в инверсной точке. На рисунке 3 представлены источники, суперпозиция которых представляет собой решение поставленной задачи сопряжения. Сток в центре окружности соответствует стоку, отображенному из бесконечно удаленной точки.

Следует, отметить, что при выводе основных уравнений для численного решения краевых задач, потенциал φ был представлен в виде суммы двух потенциалов: потенциал источника φ_{0h} и неизвестного потенциала φ_* . На неизвестный потенциал φ_* было наложено дополнительное ограничение:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{0h}(\mathbf{x}) + \varphi_*(\mathbf{x}), \quad \varphi_*(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (8.4)$$

Теорема 8.1. *Потенциалы, соответствующие схеме на рис. 3, и, представляющие собой решение (8.1) и (8.2), с учетом (8.3) и (8.4), имеют вид:*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \lambda_K \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{z}}) - \lambda_K \varphi_{0h}(\mathbf{x}), \\ \varphi_2 &= (1 - \lambda_K) \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \frac{q\lambda_K K_2}{2\pi K_1} \ln z. \end{aligned} \quad (8.5)$$

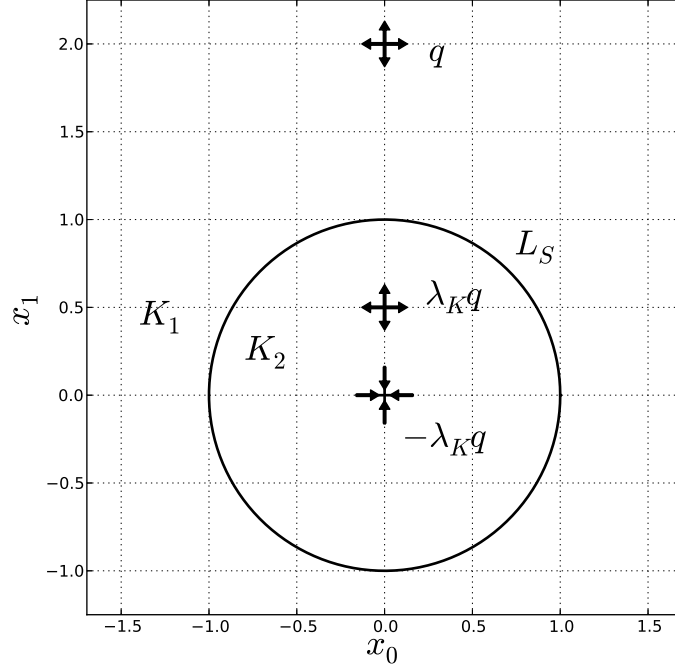


Рис. 3: Схема расположения источников для точного решения задачи сопряжения на окружности для безграничной среды.

Здесь φ_1 описывает процесс вне окружности L_S , а φ_2 — внутри, $\tilde{\mathbf{z}}$ — инверсная точка, такая что $z\tilde{z} = R^2$, причем $z = |\mathbf{z}|$ и $\tilde{z} = |\tilde{\mathbf{z}}|$.

Доказательство. Справедливость (8.5) проверяем непосредственной подстановкой в (8.1) и (8.2). Уравнение Лапласа (8.1) выполняется вследствие того, что все слагаемые (8.5) содержат его фундаментальные решения Φ_1 (8.3).

Для проверки выполнения граничных условий (8.2) представим решения (8.5) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varrho z \cos \delta} + \lambda_K \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\varrho^2 + \frac{R^4}{z^2} - 2\varrho \frac{R^2}{z} \cos \delta} - \\ &- \lambda_K \frac{q}{2\pi} \ln \varrho, \quad \varphi_2 = (1 - \lambda_K) \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varrho z \cos \delta} - \frac{q\lambda_K K_2}{2\pi K_1} \ln z. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь δ — угол между векторами \mathbf{z} и \mathbf{x} .

Несложно заметить, что на окружности L_S имеют место выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{2\pi} (1 + \lambda_K) \ln \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \delta} - \frac{q\lambda_K}{2\pi} \ln z, \quad \varrho = R, \\ \varphi_2 &= \frac{q}{2\pi} (1 - \lambda_K) \ln \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \delta} - \frac{q\lambda_K K_2}{2\pi K_1} \ln z, \quad \varrho = R, \end{aligned}$$

а, значит, выполняется первое граничное условие из (8.2):

$$K_2 \varphi_1 = K_1 \varphi_2 = \frac{qK_1 K_2}{\pi(K_1 + K_2)} \ln \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \delta} - \frac{q\lambda_K K_2}{2\pi} \ln z, \quad \varrho = R.$$

Дифференцируя (8.6) по полярному радиусу ϱ , получим выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} &= \frac{q}{2\pi} \frac{\varrho - z \cos \delta}{\varrho^2 + z^2 - 2\varrho z \cos \delta} + \frac{q\lambda_K}{2\pi} \frac{\varrho z \cos \delta - R^2}{\varrho(\frac{\varrho^2 z^2}{R^2} + z^2 - 2\varrho z \cos \delta)}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho} &= \frac{q(1 - \lambda_K)}{2\pi} \frac{\varrho - z \cos \delta}{\varrho^2 + z^2 - 2\varrho z \cos \delta}.\end{aligned}$$

Из последних выражений следует, что на окружности L_S выполняется и второе граничное условие из (8.2):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho} = \frac{q(1 - \lambda_K)}{2\pi} \frac{R - z \cos \delta}{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \delta}, \quad \varrho = R.$$

Потенциал φ_1 можно представить в виде суммы потенциалов φ_{0h} из (8.3) и потенциала φ_* , который имеет вид:

$$\varphi_*(\mathbf{x}) = \lambda_K \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{z}}) - \lambda_K \varphi_{0h}(\mathbf{x}).$$

Вычисляя предел от последнего выражения

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_*(\mathbf{x}) &= \lambda_K \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \sqrt{x^2 + \tilde{z}^2 + 2x\tilde{z} \cos \delta} - \ln x \right) = \\ &= \lambda_K \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{1 + \frac{\tilde{z}^2}{x^2} - \frac{2\tilde{z} \cos \delta}{x}} \rightarrow 0,\end{aligned}$$

видим, что дополнительное условие (8.4) также выполняется.

В итоге, мы убедились в справедливости решений (8.5). \square

Точные выражения для скоростей \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 — вне и внутри окружности L_S получим из закона Дарси (1.1), который с учетом однородности среды $K = 1$ примет вид:

$$\mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \text{grad} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2. \quad (8.7)$$

Численное решение задачи сопряжения (8.1) и (8.2), согласно (4.5) сводится к решению уравнения Фредгольма второго рода на границе L_S :

$$\begin{aligned}g_S(\mathbf{x}) - 2\lambda_K G_h[g_S, L_S](\mathbf{x}) &= 2\lambda_K \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in L_S, \\ G_h[g_S, L_S](\mathbf{x}) &= \int_{L_S} g(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi_{1h}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} dl_y,\end{aligned} \quad (8.8)$$

Решение этого уравнения единственно при $|\lambda_K| < 1$. Численная схема (8.8) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}g(\mathbf{x}_{m+1/2}) - 2\lambda_K \sum_{k=0}^{n_S-1} g(\mathbf{x}_{k+1/2}) G_{hl}[e, L_S k](\mathbf{x}_{m+1/2}) &= 2\lambda_K \varphi_{0h}(\mathbf{x}_{m+1/2}), \\ m &= \overline{0, n_S - 1}.\end{aligned} \quad (8.9)$$

Поле скоростей вычислим как суперпозицию поля скоростей от источника в точке \mathbf{z} и поля скоростей от двойного слоя (6.10) на окружности:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \sum_{k=0}^{n_S-1} g(\mathbf{x}_{k+1/2}) \mathbf{V}_h[e, L_k](\mathbf{x}). \quad (8.10)$$

Напомним, что индекс « h » у операторов потенциала двойного слоя и его скорости означает что используются функции Φ_{1h} и Φ_{2h} из (6.6).

```
dmitry@dmitry-laptop:~/sciens/tree4meth$ tree -a
```

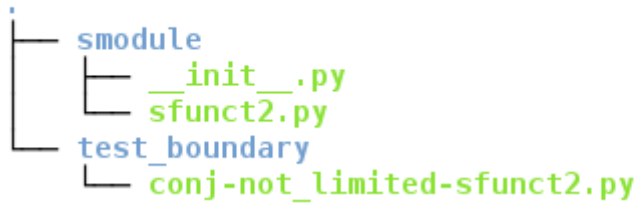


Рис. 4: Расположение файлов.

```

1 from sys import path
2 path.append("../..")
3 from smodule.sfunct2 import *
```

Листинг 13: Подключение модуля sfunct2.

Для проведения численного эксперимента будем использовать модуль sfunct2, разработанный в § 9. Подключение модуля представлено в листинге 13. В этом листинге, в первой и второй строке добавляется относительный путь `../..` для поиска подключаемых модулей. Путь `../..` указывает на каталог выше, то есть в каталог, являющийся родительским, для каталога с разрабатываемым скриптом. Отметим, что рассматриваемый путь состоит из двух частей: `.` — текущий каталог и `..` — родительский каталог. Модуль sfunct2 размещаем в каталоге smodule, и подключаем как указано в третьей строке листинга 13. Размещение файлов и каталогов наглядно представлено на рис 4.

```

1 Kx=1
2 Py=1
3 Phi1h=-0.25/sp.pi*sp.log((x0-y0)**2+(x1-y1)**2)
4 omgh=[ Py*sp.diff(Phi1h,sy[j]) for j in range(2) ]
5 Phi2h=-0.5/sp.pi*sp.atan((x1-y1)/(x0-y0))
6 V2h=[sp.ratsimp(Kx*sp.diff(Phi2h,sx[j])) for j in range(2)]
7 VSh=[sp.ratsimp(Kx*sp.diff(Phi1h,sx[j])) for j in range(2)]
8
9 nS=400
10 qSrc=np.array([np.pi])
11 zSrc=np.array([[0.0],[2.0]],dtype='d')
12 lambdaK=0.5
13
```

```

14 minHDist=0.02
15 hv=0.2

```

Листинг 14: Присваивание значений переменным для задачи сопряжения в безграничной среде.

В листинге 14 выполняется присваивание значений переменным, используемым далее при написании скрипта. Переменные, указанные в строках 1–7, обсуждались ранее, при разработке модуля `sfunc2` в § 9. Переменная `nS` в строке 9 соответствует n_S в системе линейных алгебраических уравнений (8.9) и используется для хранения числа отрезков, заменяющих границу L_S . Переменные `qSrc` и `zSrc` в строках 10–11 хранят параметры источника: мощность q и координаты центра $\mathbf{z} = (z^0, z^1)$. Параметр λ_K представлен переменной `lambdaK` в строке 12.

Далее, в строках 14–15 представлены дополнительные переменные, которые используются для настроек визуального отображения поля скоростей. Так, переменная `minDist` хранит значение отступа от границы L_S , а переменная `hv` — шаг сетки для поля скоростей. Эти переменные использованы в листингах 18 и 17.

```

1 x_crc1=np.array([0.0,0.0])
2 R=1.0
3 thet=np.linspace(2*np.pi,0,nS+1)
4 LS=np.array([x_crc1[0]+R*np.cos(thet),x_crc1[1]+R*np.sin(thet)])

```

Листинг 15: окружности L_S .

В листинге 15 выполнено формирование множества точек окружности L_S . Для хранения этого множества используется массив `LS`. Формат массива `LS` находится в соответствии с требованиями введенными в параграфе § 9: `LS[0]` хранит абсциссы окружности L_S , `LS[1]` хранит ординаты окружности L_S , первая и последняя точки окружности L_S совпадают.

Массив `x_crc1` в листинге 15 хранит координаты центра окружности, переменная `R` ее радиус. Для построения окружности L_S используется ее параметрическое представление:

$$x_i^0 = x_c^0 + R \cos \theta_i, \quad x_i^1 = x_c^1 + R \sin \theta_i, \quad \theta_i = \frac{2\pi i}{n_S}, \quad i = \overline{n_S, 0}.$$

Для генерации массива `thet`, содержащего значения углов от 2π до 0 используется функция `linspace` из пакета `numpy` [12]. В приведенном листинге, эта функция принимает три аргумента: начальное и конечное значение, число элементов в возвращаемом массиве. Обход окружности L_S выполняется в соответствии со схемой, представленной на рис. 1: внутренняя область имеет коэффициент проницаемости K_2 , внешняя — K_1 .

```

1 xSc=(LS[:, :nS]+LS[:, 1:])/2.
2 NxSc=Normal(LS)

```

```

3 A=np.eye(nS)-2.*lambdaK*MPDL(x=xSc,y=xSc,Ny=NxSc,sOmega=omgh)
4 f=2.*lambdaK*varphiSources(q=qSrc,x=xSc,z=zSrc,sPhi1=Phi1h)
5 gS=np.linalg.solve(A,f)

```

Листинг 16: Решение уравнения Фредгольма (8.8) на окружности L_S .

С использованием разработанного модуля **sfunc2** и пакета **numpy**, решение системы линейных алгебраических уравнений (8.8), соответствующих интегральному уравнению Фредгольма второго рода для задачи сопряжения, не составляет труда. Так, в листинге 16 представлено решение (8.8). В строке 1 вычисляются точки коллокации, как середины отрезков многоугольника, соответствующего границе L_S .

Разберем первую строку листинга 16. Для обращения к осям двумерного массива **LS** используются кортеж из двух индексов. При этом, индексация выполняется с использованием срезов. Только двоеточием : осуществлена выборка всех элементов вдоль первой оси (первого измерения). Это соответствует выбору и абсцисы, и ординаты для каждой точки. Срез :nS выбирает все элементы от нулевого до элемента с индексом nS-1 (до предпоследнего элемента массива **LS**), а срез 1: — от элемента с индексом 1 до элемента с индексом nS (все элементы кроме самого первого с индексом 0). В итоге, получаем массив точек коллокации, в соответствии с формулой (6.1).

Далее, во второй строке листинга 16 вызывается функция *Normal*, возвращающая двумерный массив с компонентами нормалей к отрезкам из LS . В третьей строке формируется матрица, соответствующая системе линейных алгебраических уравнений (8.8). Функция *MPDL* была описана ранее при разработке модуля **sfunc2**, а функция **eye** из пакета **numpy** возвращает матрицу, содержащую единицы по диагонали и нули на месте остальных элементов. В нашем случае возвращается единичная матрица E_{n_S} размерности $n_S \times n_S$. Столбец свободных членов **f** получен в четвертой строке вызовом функции *varphiSources* из модуля **sfunc2** в соответствии с системой (8.8). Решение системы линейных алгебраических уравнений выполнено функцией **solve** из модуля **linalg**.

Отметим, что обращаться к функциям в Python можно без указания названий параметров. Например, третью строку можно переписать так:

$$A = \text{np.eye}(nS) - 2 * \text{lambdaK} * \text{MPDL}(xSc, xSc, NxSc).$$

```

1 xs=np.mgrid[-2.5:2.51:hv,-2.:3.01:hv]
2 xs=xs[:,((xs[0]-zSrc[0][0])**2+(xs[1]-zSrc[1][0])**2)>0.2**2]
3 Ws=VSources(q=qSrc,x=xs,z=zSrc,sVS=VSh)+VDL(x=xs,b=LS,g=gS,sV2=V2h)

```

Листинг 17: Вычисление поля скоростей на сетке.

В листинге 17 выполнены расчеты поля скоростей в области протекания процесса. В первой строке генерируется прямоугольная сетка, на которой будут вычисляться значения векторов скорости. В массиве **xs** абсциссы

```

>>> from numpy import *
>>> xs=mgrid[-1:1:1,-1:1:0.5]
>>> xs
array([[[-1. , -1. , -1. , -1. ],
        [ 0. ,  0. ,  0. ,  0. ]],

       [[-1. , -0.5,  0. ,  0.5],
        [-1. , -0.5,  0. ,  0.5]]])
>>> xs[1]>=0
array([[False, False,  True,  True],
       [False, False,  True,  True]], dtype=bool)
>>> xs[:,xs[1]>=0]
array([[[-1. , -1. ,  0. ,  0. ],
        [ 0. ,  0.5,  0. ,  0.5]]],

       [[ 0.5],
        [ 0.5]]])
>>>
>>> xs[:, :,array([False,False,False,True])]
array([[[-1. ],
        [ 0. ]],

       [[ 0.5],
        [ 0.5]]])
>>> █

```

Рис. 5: Пример работы с `mgrid` и срезами.

доступны по индексу 0, ординаты — по индексу 1. Шаг вдоль осей абсцисс и ординат одинаков и равен h_v . Во второй строке, из массива `xs` удаляются узлы сетки, попадающие в окрестность источника — круг радиусом 0.2. Радиус равный 0.2 был подобран экспериментально, таким образом чтобы поле скоростей на рисунках было более наглядным. Так, например, на рисунках 7 и 8 можно заметить отсутствие векторов скорости в окрестности источника.

Разберем правую часть выражения в строке 2 листинга 17. Для получения только нужных узлов от массива `xs` берется срез вида `xs[:,idx]`. В этом срезе, двоеточием `:` выбираются все элементы вдоль первой оси. Вдоль второй и третьей оси выбираются только элементы, которым в массиве `idx` соответствует значение `True`. В результате получается массив с двумя измерениями, хранящий отфильтрованные абсциссы и ординаты. Для полного понимания работы со срезами автор пособия рекомендует запустить интерпретатор `python` и поработать с массивами (см. рис. 5).

В строке 3 листинга 17 вычисляются векторы скорости на сетке `xs`. Вычисление производится по формуле (8.10). Вычисление осуществлено с использованием функций `VSources` и `VDL` из модуля `sfunct2`. Функция `VSources` возвращает вектора скорости, создаваемые единичным источником в нашем случае, `VDL` — вектора скорости, создаваемые границей с двойным слоем. Сокращенные формы вызова функций из третьей строки имеют вид: `VSources(qSrc,xs,zSrc,VSh)` и `VDL(xs,LS,gS,V2h)`.

```

1 qOut=np.array([np.pi,lambdaK*np.pi,-lambdaK*np.pi])

```

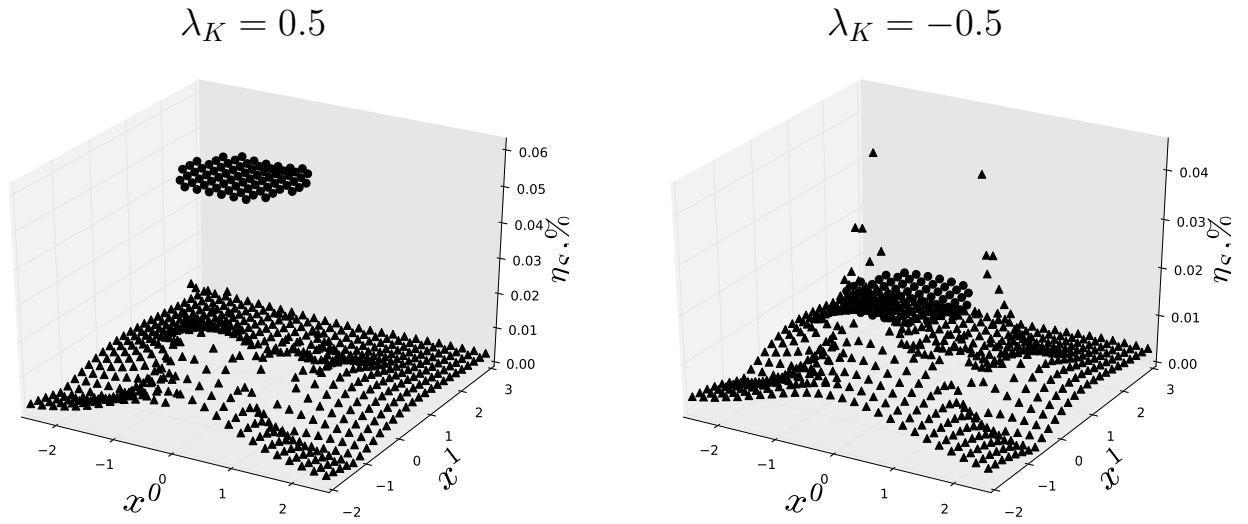


Рис. 6: Погрешность численного решения задачи сопряжения для $n = 800$.

```

2 zOut=np.array([[0.0,0.0,0.0],[2.0,0.5,0.0]],dtype='d')
3 xOut=xs[:,(xs[0]**2+xs[1]**2)>(1+minHDist)**2]
4 WOut=VSources(q=qOut,x=xOut,z=zOut)
5 WNOut=VSources(q=qSrc,x=xOut,z=zSrc,sVS=VSh)+VDL(x=xOut,b=LS,g=gS,
6   sV2=V2h)
7 etaOut=np.abs(1.-np.sqrt(WNOut[0]**2+WNOut[1]**2)/np.sqrt(WOut
8   [0]**2+WOut[1]**2))*100
9 etaOutMax=np.max(etaOut)

```

Листинг 18: Тестирование вне окружности L_S .

Сопоставление результатов численного решения задачи об обтекании каверны (8.8) и ее точного решения (8.5) запрограммировано в листинге 18. Для примера приведено сопоставление только в области, внешней к окружности L_S . Сопоставление в области внутри окружности L_S выполняется аналогично.

В строках 1 и 2 листинга 18 объявлены массивы для хранения мощностей $qOut$ и координат $zOut$ источников, составляющих точное решение (8.5). Мощности и координаты находятся в соответствии со схемой, представленной на рисунке (3). Сетка для вычисления векторов скорости $xOut$ получена в строке 3. Узлы этой сетки расположены вне окружности L_S .

Точные значения векторов скорости вычислены в строке 4, путем вызова функции $VSources$. Эта функция возвращает суперпозицию векторов скорости, созданную всеми источниками в точках $zOut$. Приближенное значение на сетке $xOut$ получено в строке 5. Далее, в строках 6 и 7 вычислены массив со значениями погрешностей приближенного решения задачи и максимальное значение из этого массива.

```

1 np.savetxt('etaOutS-not_limited.dat',np.c_[xOut[0],xOut[1],etaOut],
2   fmt='%6.4f',delimiter=' ')
3 np.savetxt('WS-not_limited.dat',np.c_[xs[0],xs[1],Ws[0],Ws[1]],fmt='

```

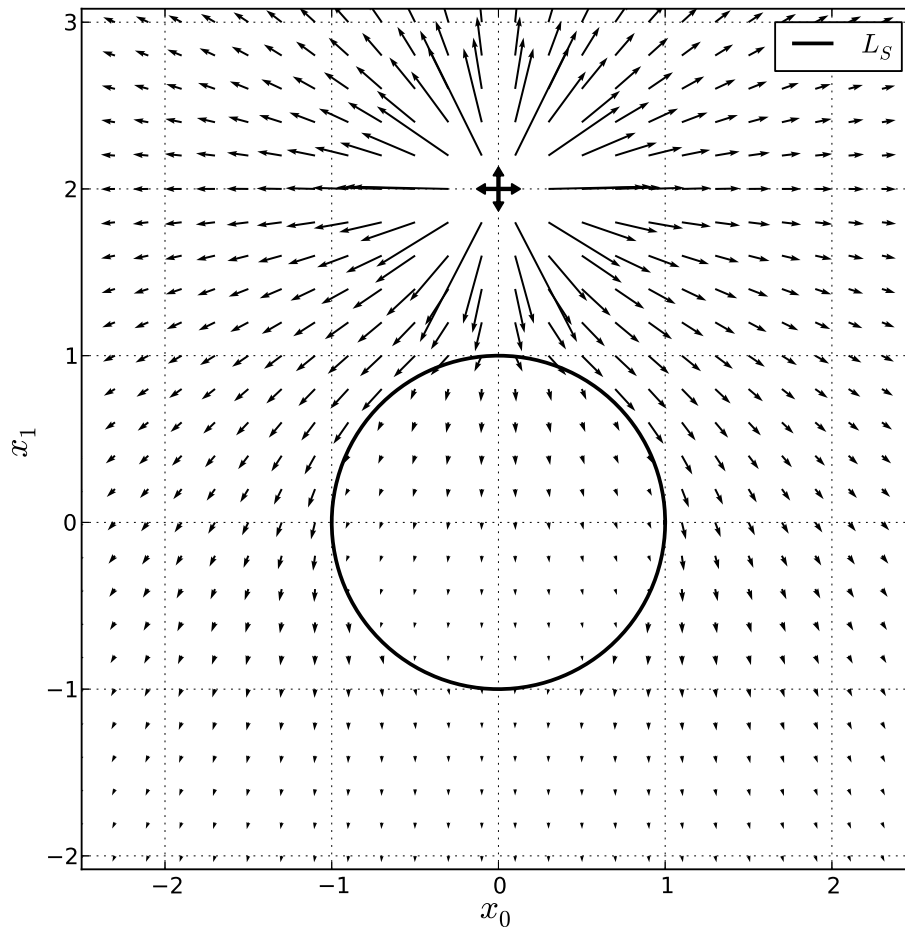


Рис. 7: Поле скоростей, полученное численным решением задачи сопряжения на окружности для $n = 800$ и $\lambda_K = 0.5$.

```
%6.4f ', delimiter=' ')
```

Листинг 19: Сохранение результатов в текстовые файлы.

В листинге 19 приводятся примеры сохранения расчетов в текстовые файлы. Так в строке 1 в текстовый файл `etaOutS-not_limited.dat` сохраняются координаты узлов сетки `xOut` и значения погрешностей численного решения в них. Функция `c_` объединяет переданные ей массивы вдоль второй оси. То есть, из трех векторов в строке 1 получается массив размерности $N \times 3$, где N — число узлов сетки. В строке 2, по аналогии, выполнено сохранение координат сетки и компонент скоростей в текстовый файл `WS-not_limited.dat` в виде массива размерности $N \times 4$.

```
1 from pylab import quiver, show, gca, Circle, text, axis, grid
2 gca().add_patch(Circle((x_crcl[0], x_crcl[1]), radius=1, alpha=.5, fc=
   'y'))
3 quiver(xs[0], xs[1], Ws[0], Ws[1], color='r')
4 text(-2.5, 3.1, r"$\eta_{\text{Out, max}} = %6.4f$ per ." % etaOutMax)
```

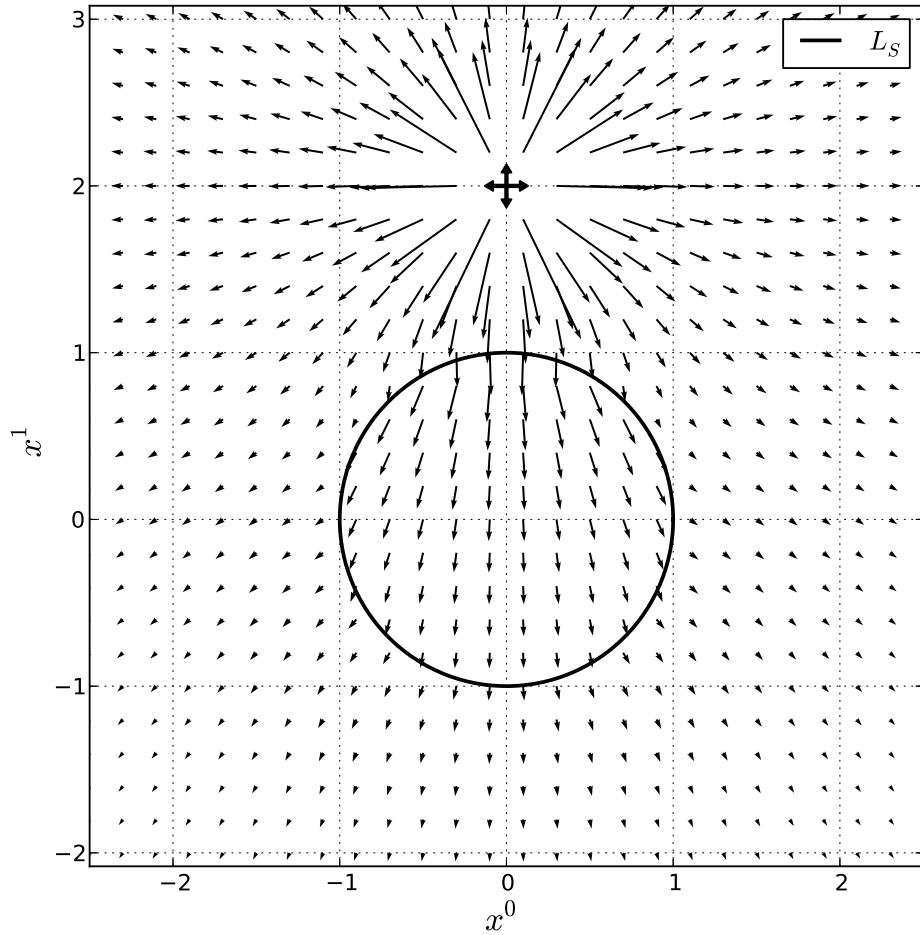


Рис. 8: Поле скоростей, полученное численным решением задачи сопряжения на окружности для $n = 800$ и $\lambda_K = -0.5$.

```

5 | text(0, 3.1, r"$\eta_{\{ln, max\}} = %6.4f$ per ." % etaInMax)
6 | grid()
7 | axis('equal')
8 | show()

```

Листинг 20: Визуализация результатов расчета.

В листинге 20 приведен вариант графического представления результатов расчетов. В строке 1 листинга из пакета `pylab` [13] подгружаются используемые функции. Далее, в строке 2 рисуется круг, изображающий полупроницаемое включение, а в строке 3 строится поле скоростей. Вместо рисования круга в строке 2, можно нарисовать окружность L_S вызовом функции `plot(XS[0], XS[1])`.

Функция **quiver** в нашем случае принимает одномерные массивы. Первые два массива передают координаты узлов сетки, в которых рисуются вектора (стрелки). Вторые два массива передают компоненты векторов. Пятый параметр задает цвет всех стрелок.

В строках 4 и 5 выводится текстовая информация. Первые два параметра задают координаты для размещения текста, третий параметр содержит строку с текстом. Причем `matplotlib` имеет свой собственный интерпретатор \LaTeX и умеет обрабатывать выражения на \LaTeX . Функция `grid` в строке 6 рисует сетку. Функция `axis` выполняет масштабирование осей. В строке 7 этой функции передается параметр `equal`, устанавливающий одинаковую длину для одинаковых приращений вдоль координатных осей. При таком масштабировании окружность остается окружностью.

В строке 8 вызывается функция `show()`. Эта функция отображает все графические данные в окне. Используя командные кнопки окна можно сохранить рисунок в файл или выполнить масштабирование рисунка. Отметим, что рисунок можно сохранить в файл без использования графического интерфейса. Для этого нужно воспользоваться командой `savefig` из пакета `pylab`. В этом случае рисунок можно просмотреть позже, например, в Linux командой `eog` или `evince` (для `eps`-формата).

Сопоставим результаты численного решения системы (8.9) и (8.10) с точным решением (8.5) и (8.7). Для характеристики погрешности численного решения в точках области протекания процесса введем величину:

$$\eta_{Si} = \left| 1 - \frac{W}{W_i} \right| 100\%, \quad i = 1, 2. \quad (8.11)$$

$$\lambda_K = 0.5$$

Δl	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$	$\frac{2\pi}{1600}$
$\max \eta_{S1}, \%$	2.66	0.71	0.15	0.08	0.04	0.02
$\max \eta_{S2}, \%$	10.69	0.94	0.24	0.12	0.06	0.03

$$\lambda_K = -0.5$$

Δl	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$	$\frac{2\pi}{1600}$
$\max \eta_{S1}, \%$	3.66	0.45	0.19	0.09	0.05	0.02
$\max \eta_{S2}, \%$	2.85	0.21	0.10	0.04	0.02	0.01

Таблица 4: Погрешность (8.11) численного решения задачи сопряжения для безграничной среды.

На рисунке 6 представлено распределение погрешности η_{Si} , $i = 1, 2$ в области протекания процесса для параметров $\lambda_K = 0.5$ и $\lambda_K = -0.5$. Из рисунка видим, что погрешность увеличивается вблизи границы сопряжения L_S . Зависимость максимального значения погрешности η_{Si} , $i = 1, 2$ от шага

Δl для параметров $\lambda_K = 0.5$ и $\lambda_K = -0.5$ представлена в таблице 4. Анализируя таблицы видим, что с уменьшением шага разбиения окружности L_S погрешность уменьшается. То есть, численное решение сходится к точному.

Поле скоростей, являющееся результатом численного решения (8.9) и (8.10), представлено на рисунках 7 и 8. На этих рисунках наглядно видно, что при $\lambda_K = 0.5$ скорость движения частиц жидкости уменьшается внутри окружности L_S . При этом частицы жидкости стараются огибать полупроницаемое включение. При $\lambda_K = -0.5$, наоборот, скорость движения частиц жидкости внутри окружности L_S увеличивается и вектора скорости вне окружности L_S разворачиваются в сторону включения.

Описанные результаты имеют физический смысл: при $\lambda = 0.5$ проницаемость пористой среды внутри окружности L_S в три раза меньше проницаемости среды вне этой окружности. А при $\lambda_K = 0.5$, наоборот, проницаемость среды внутри окружности L_S в три раза больше, чем вне L_S . Различные проницаемости и приводят к ослаблению или усилению поля скоростей. Поле скоростей, построенное по точным решения (8.5), с учетом закона (8.7), в точности совпадает с полем, представленным на рисунках 7 и 8.

Обтекание полупроницаемого включения в форме полукруга источником

Продemonстрируем использование функций Грина при численном решении задач в разработанной математической модели. Пусть область протекания процесса ограничена непроницаемой прямой L_I и эта прямая совпадает с осью абсцисс. Полуокружность L_S с центром в начале координат разделяет пористую среду на две части: среда с проводимостью K_2 внутри окружности и среда с проводимостью K_1 вне окружности. Эта задача имеет точное решение, которое схематично представлено на рисунке 9.

Для численного решения задачи воспользуемся системой (8.8). Непроницаемую границу L_I будем учитывать с помощью функций Грина Φ_{1i} и Φ_{2i} (6.7). После учета этих функций в разработанном выше скрипте (см. листинг 21) было проведено тестирование. В таблице 5 представлены результаты сопоставления численного и точного решений. Наблюдаем сходимость численного решения к точному.

На рисунке 10 построено поле скоростей. Это поле имеет физический смысл. Действительно, так как проницаемость включения меньше проницаемости внешней к полуокружности L_S среды, вектора скорости пытаются обогнуть это включение и уменьшаются внутри него. Вдоль непроницаемой линии L_I вектора скорости направлены по касательной.

1	$\Phi_{1i} = -0.25 / \text{sp} \cdot \pi \cdot \text{sp} \cdot \log((x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2) - 0.25 / \text{sp} \cdot \pi \cdot \text{sp} \cdot \log((x_0 - y_0)^2 + (x_1 + y_1)^2)$
2	$\Phi_{2i} = -0.5 / \text{sp} \cdot \pi \cdot \text{sp} \cdot \text{atan}((x_1 - y_1) / (x_0 - y_0)) + 0.5 / \text{sp} \cdot \pi \cdot \text{sp} \cdot \text{atan}((x_1 + y_1) / (x_0 - y_0))$

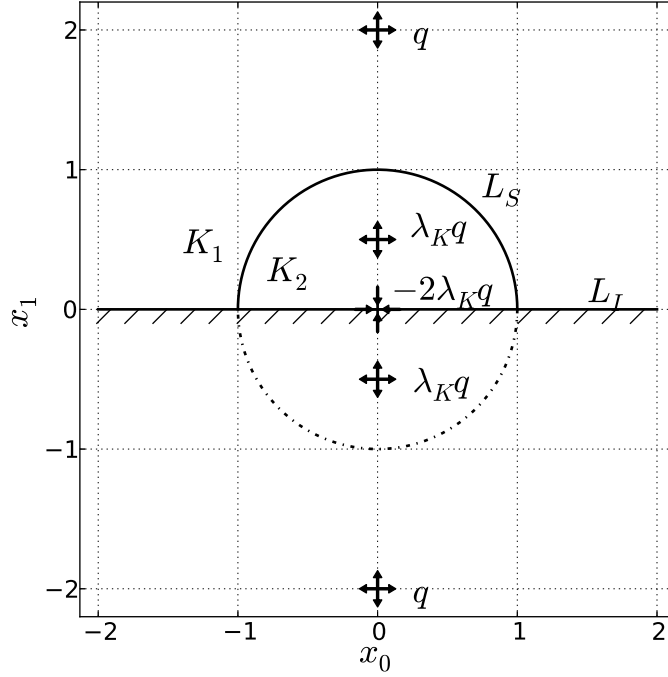


Рис. 9: Схема расположения источников для точного решения задачи сопряжения на полуокружности при учете непроницаемой прямой.

Листинг 21: Функции Грина Φ_{1i} и Φ_{2i} (6.7), учитывающие непроницаемую ось абсцисс.

Δl	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$	$\frac{2\pi}{1600}$
$\max \eta_{S1}, \%$	0.6	0.28	0.14	0.07	0.04	0.02
$\max \eta_{S2}, \%$	1.43	0.47	0.24	0.12	0.06	0.03

Таблица 5: Погрешность (8.11) численного решения задачи сопряжения для полубезграничной области с непроницаемой линией при $\lambda_K = 0.5$.

Обтекание круговой каверны источником

Пусть в грунте имеет круговая каверна (полость) со свободной жидкостью. Границу каверны L_C моделируем окружностью радиуса R с центром в начале координат. Фильтрация однородной жидкости описывается потенциалом φ , который удовлетворяет уравнению Лапласа (8.1) вне каверны, и граничному условию (2.4), которое в полярных координатах (ϱ, ϑ) имеют вид:

$$\varphi^+(\varrho, \vartheta) = \varphi_C, \quad \varrho = R. \quad (8.12)$$

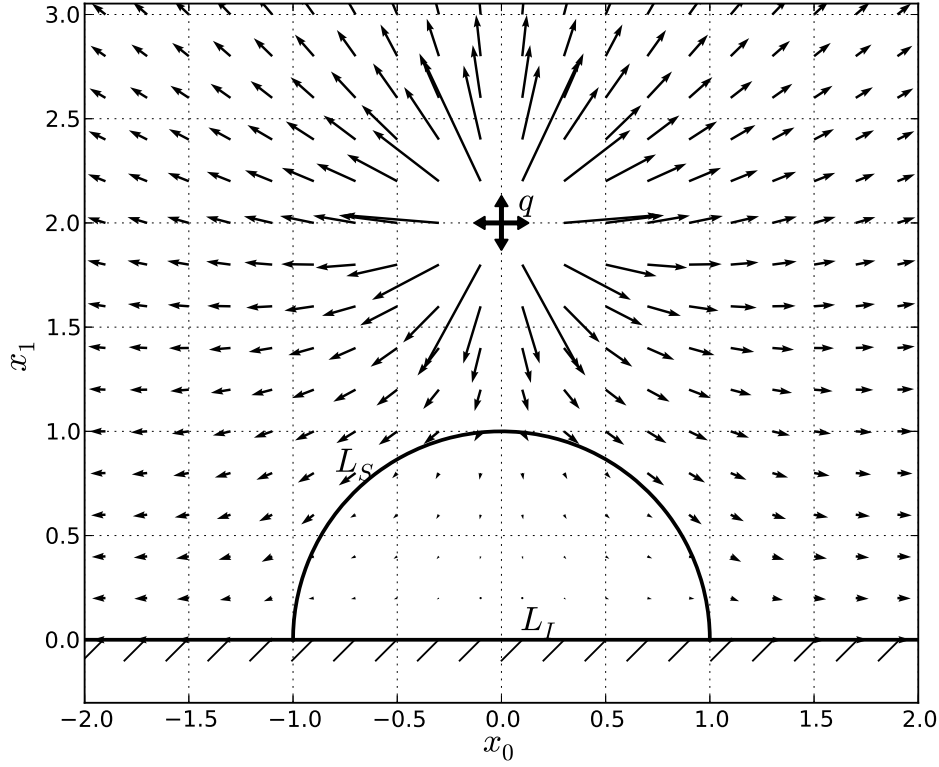


Рис. 10: Поле скоростей, полученное численным решением задачи сопряжения на полуокружности для $n = 800$ и $\lambda_K = 0.5$.

Начало полярной системы координат совпадает с центром окружности L_C . Потенциал φ равен сумме потенциала источника φ_0 и некоторого неизвестного потенциала φ_* на который наложено ограничение (8.4).

Еще раз отметим, что константа φ_C является искомой. Последнее имеет физический смысл. Мы нормировали потенциал: положили, что потенциал φ_* равен нулю на бесконечности.

В соответствии с теоремой 8.1, решение задачи об обтекании каверны получим при стремлении $K_2 \rightarrow \infty$. При этом $\lambda_K \rightarrow -1$ и потенциал, описывающий течение вне каверны имеет вид:

$$\varphi_{Cav} = \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{z}}) + \varphi_{0h}(\mathbf{x}). \quad (8.13)$$

При подстановке (8.13) в (8.1) и (8.12) получаются тождества.

Численное решение задачи об обтекании каверны L_C сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода совместно с дополнительным условием:

$$\begin{aligned} -2\varphi_C + g_C(\mathbf{x}) + 2G_h[g_C, L_C](\mathbf{x}) &= -2\varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in L_C, \\ \int_{L_C} g_C(\mathbf{y}) d\mathbf{l}_y &= 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

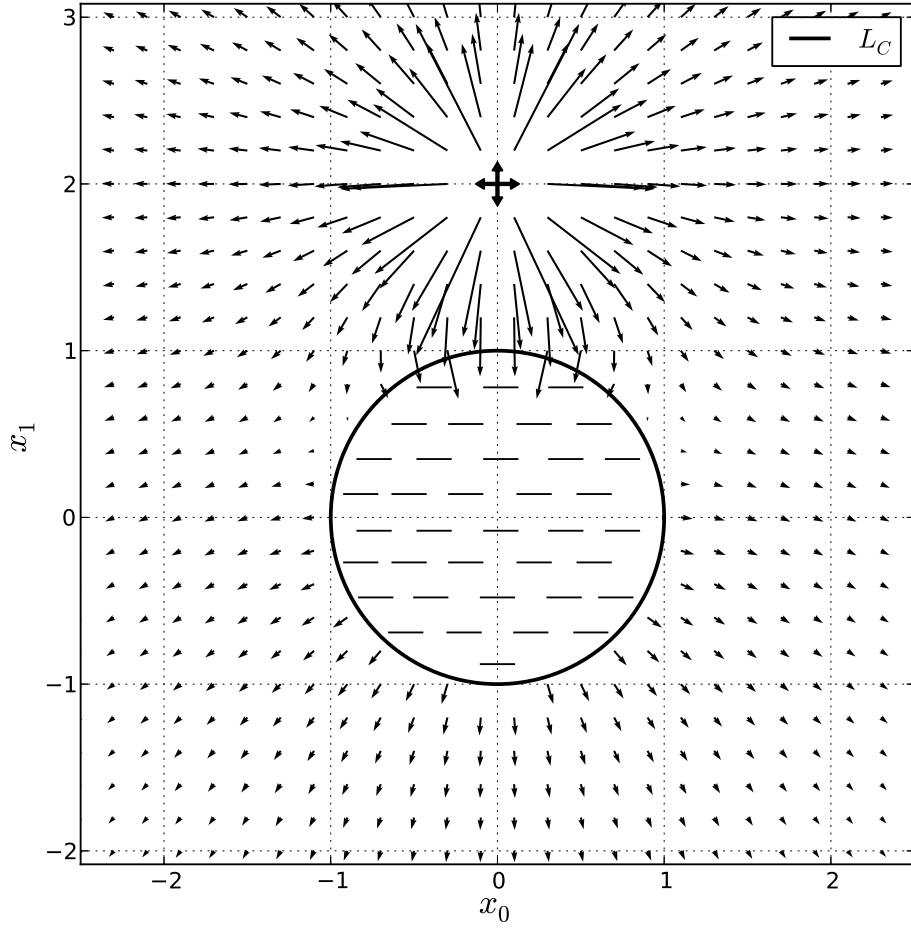


Рис. 11: Поле скоростей, полученное численным решением задачи об обтекании каверны при $n = 800$.

Здесь $G_h[g_C, L_C]$ — оператор потенциала двойного слоя с фундаментальным решением Φ_{1h} (6.6).

```

1 xCc=(LC[:, :nC]+LC[:, 1:]) / 2.
2 NxCc=Normal(LC)
3 A=np.eye(nC)+2.*MPDL(x=xCc, y=xCc, Ny=NxCc, sOmega=omgh)
4 A=np.r_[np.c_[-2.*np.ones((nC, 1)), A], np.c_[0, np.ones((1, nC))]]
5 f=-2.*varphiSources(q=qSrc, x=xCc, z=zSrc, sPhi1=Phi1h)
6 f=np.r_[f, 0]
7 g=np.linalg.solve(A, f)
8 gC=g[1:]

```

Листинг 22: Решения интегрального уравнения (8.14) на L_C .

Код для численного решения интегрального уравнения (8.14) приведен в листинге 22. В этом коде, в отличие от кода листинга 16, учтено дополнительное условие из (8.14). Для этого в матрицу A в строке 4 врезаны дополнительные вектор-столбец и вектор-строка. Вектор-столбец состоит из значений равных -2 , а вектор строка на первом месте содержит ноль и в

оставшихся позициях единицы. Значения -2 и 0 представляют собой коэффициенты перед неизвестным φ_C из дискретного представления первого выражения (8.14), а значение 1 — коэффициентами перед неизвестными g_i из дискретного представления второго выражения (8.14). Значение 0 перед φ_C используется в последней строке матрицы, так как во втором выражении из (8.14) отсутствует слагаемое с неизвестным φ_C .

Δl	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$	$\frac{2\pi}{1600}$
$\nu'(A)$	55	104	204	404	804	1604
$\nu(A)$	14	20	28	40	56	80

Таблица 6: Числа обусловленности системы линейных алгебраических уравнений до и после регуляризации.

Необходимость регуляризации системы подтверждена численным экспериментом. Были вычислены числа обусловленности матрицы A без дополнительного условия и с ним. В таблице 6 приведены результаты вычисления этих чисел. Буквой ν' обозначено число обусловленности матрицы A без дополнительного условия, ν — с дополнительным условием. Для вычисления числа обусловленности использовалась функция `cond` из модуля `linalg`.

Δl	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$	$\frac{2\pi}{1600}$
$\max \eta_C, \%$	11.92	4.06	1.75	0.85	0.42	0.21

Таблица 7: Погрешность (8.11) численного решения задачи об обтекании каверны источником.

Погрешность численного решения (8.14) указана в таблице 7. В этой таблице приводится результат сопоставления модулей векторов скорости в точках протекания процесса, полученных численно, с точными значениями. Численно модули вектора скорости получены путем решения системы (8.14) и вычисления вектора скорости по формуле (8.10). Точные значения получены из формул (8.13) и (8.7). Величина погрешности η_C определяется выражением (8.11). Из таблицы 7 видно, что численное решение сходится к точному.

Поле скоростей, полученное в ходе решения задачи об обтекании каверны, ограниченной окружностью L_C представлено на рисунке 11. Анализируя этот рисунок видим, что поле скоростей имеет физический смысл. Вектора скорости стремятся развернуться под углом 90° к границе L_C , так как потенциал на этой границе постоянен. Следует отметить, что значение потенциала φ_C полученное в ходе численных расчетов из системы (8.14) совпадает с точным значением на L_C , вычисленным по формуле (8.13) — $\frac{q}{2\pi} \ln z^1$.

Обтекание непроницаемой окружности источником

Пусть областью протекания процесса является внешность непроницаемой окружности L_I , расположенной в начале координат. Окружность L_I имеет радиус R и центр в начале координат. Фильтрация однородной жидкости описывается потенциалом φ , который удовлетворяет уравнению Лапласа (8.1) вне каверны, и граничному условию (2.3). Граничное условие в полярных координатах (ϱ, ϑ) имеют вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi(\varrho, \vartheta)}{\partial \varrho} \right)^+ = 0, \quad \varrho = R. \quad (8.15)$$

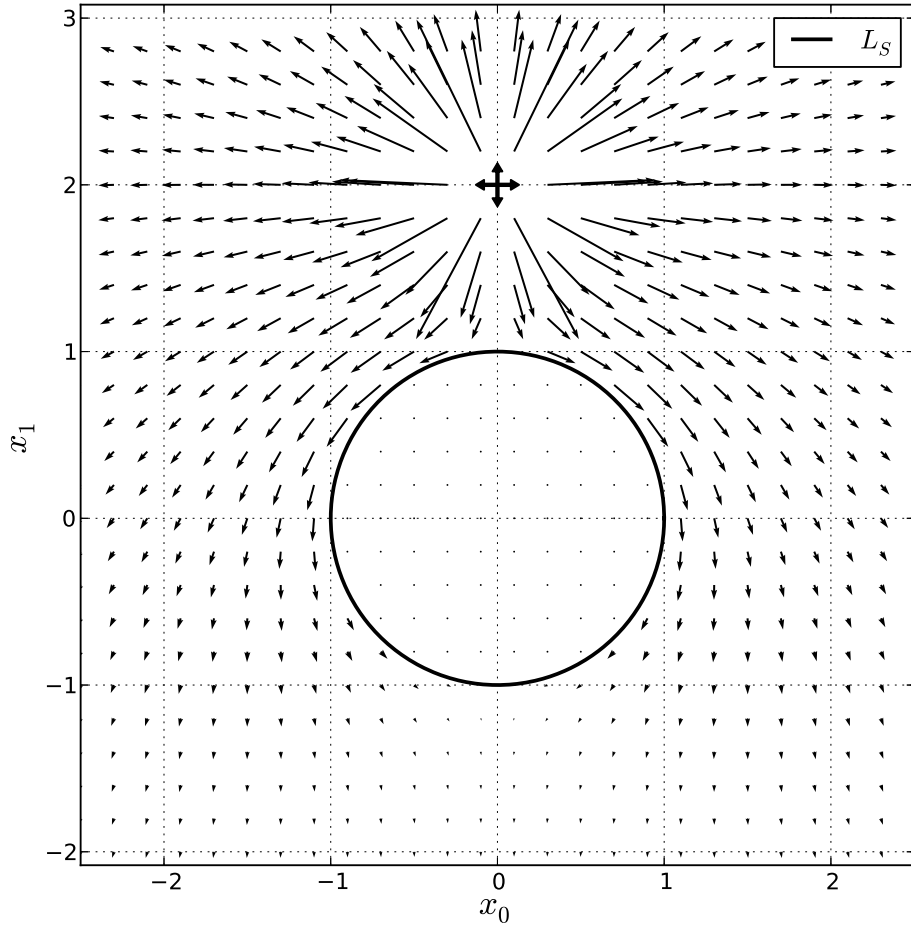


Рис. 12: Поле скоростей, полученное численным решением задачи об обтекании непроницаемой окружности L_I при $n = 800$.

Точное решение задачи об обтекании этой окружности получим из (8.5). Для этого устремим $K_2 \rightarrow 0$, получим $\lambda_K \rightarrow 1$ и

$$\varphi_I = \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \varphi_{0h}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{z}}) - \varphi_{0h}(\mathbf{x}). \quad (8.16)$$

При подстановке (8.16) в (8.1) и (8.15) получаются тождества.

Для численного решения воспользуемся сингулярным интегральным уравнением (4.2) и дополнительным условием (4.3) к нему:

$$V_{hn}[g_I, L_I](\mathbf{x}) = -W_{h0n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L_I, \quad \int_{L_I} g_I(\mathbf{y}) d\mathbf{l}_y = 0. \quad (8.17)$$

В операторе скорости потенциала двойного слоя \mathbf{V}_h (6.9) и функции \mathbf{W}_{h0} (см (2.9) и (2.11)) используются функции Φ_{2h} и Φ_{1h} (6.6).

```

1 xlc=(Ll[:, :, nl]+Ll[:, 1:])/2.
2 Nxc=Normal(Ll)
3 M=MVDL(x=xlc, b=Ll, sV2=V2h)
4 A=M[0]*Nxc[0]+M[1]*Nxc[1]
5 WS=VSources(q=qSrc, x=xlc, z=zSrc, sVS=VSh)
6 f=-WS[0]*Nxc[0]-WS[1]*Nxc[1]
7 A=np.r_[np.c_[np.ones((nl, 1)), A], np.c_[0, np.ones((1, nl))]]
8 f=np.r_[f, 0]
9 g=np.linalg.solve(A, f)
10 gl=g[1:]

```

Листинг 23: Решение сингулярного интегрального уравнения (8.17) на L_I .

Проведено исследование сходимости численного решения к точному. Результаты этого исследования представлены в таблице 8. Поле скоростей процесса обтекания непроницаемой окружности L_I источником построено на рисунке 12.

Δl	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$	$\frac{2\pi}{1600}$
$\max \eta_I, \%$	3.26	1.53	0.70	0.36	0.18	0.09

Таблица 8: Погрешность (8.11) численного решения задачи об обтекании непроницаемой окружности.

9 Тестирование численных решений задач эволюции

Пусть область протекания процесса является безграничной, а пористая среда однородна $P = 1$. Резкой границей L_t фильтрующаяся жидкость делится на две фазы. Напомним, что физические характеристики жидкости внутри границы L_t мы отмечаем индексом 2, вне — индексом 1.

Потенциал скорости фильтрации, описывающий фильтрацию жидкостей удовлетворяет уравнению Лапласа (8.1), на границе раздела жидкостей

выполняется условие (2.7):

$$\begin{aligned}\mu_1\varphi^+(\mathbf{x}, t) - \mu_2\varphi^-(\mathbf{x}, t) &= (\rho_1 - \rho_2)\Pi(\mathbf{x}), \\ (\text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n})^+ &= (\text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{n})^-, \quad \mathbf{x} \in L_t.\end{aligned}\tag{9.1}$$

В разработанной математической модели, условие (9.1) приводит к интегральному уравнению на границе L_t :

$$g_t(\mathbf{x}, t) - 2\lambda_t G_h[g_t, L_t](\mathbf{x}, t) = 2\lambda_t \varphi_{0h}(\mathbf{x}, t) + 2\alpha_t \Pi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L_t.\tag{9.2}$$

Перемещение границы раздела жидкостей L_t описывается дифференциальным уравнением (5.7), которое решается с учетом начального условия (5.8).

Рассмотрим две классические задачи, имеющие точное решение. На этих задачах проведем тестирование разработанных алгоритмом и комплекс программ.

Задача о стягивании первоначально кругового пятна к стоку в постановке Лейбензона

Пусть жидкости обладают только различными вязкостями μ_i , $i = 1, 2$. При этом вязкость внешней жидкости $\mu_1 = 0$. Течение возмущается единичным источником, потенциал которого определяется (8.3). Согласно [1] задача имеет точное решение в виде отображения единичного круга $|\zeta| < 1$ на область, занятую жидкостью в момент времени t :

$$f_t(\zeta) = \frac{\beta_t \zeta}{1 - \alpha_t \zeta} + \gamma_t \zeta.\tag{9.3}$$

Причем, коэффициенты α_t , β_t , γ_t определяются нелинейным уравнением для α_t и двумя выражениями для β_t и γ_t :

$$\begin{aligned}\left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^2 \alpha_t^6 + \left(2a^2 R^2 + \frac{2a^2 qt}{\pi} + a^4\right) \alpha_t^2 + 2a^4 &= 0, \\ \beta_t &= \frac{1 - \alpha_t^2}{2} \left(\frac{a}{\alpha_t} + \frac{\alpha_t}{a} \left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)\right), \\ \gamma_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\alpha_t} - \frac{\alpha_t}{a} \left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)\right)\end{aligned}\tag{9.4}$$

Решая систему (9.4) при радиусе первоначальной окружности $R = 1$, абсциссы центра окружности $a = 0.5$, мощности стока $q = -\pi$ и в момент времени $T_V = 0.1$ получим значения коэффициентов $\alpha_{0.1}$, $\beta_{0.1}$ и $\gamma_{0.1}$. Решение на Python, с использованием функции `fsolve` из модуля `optimize` представлено в листинге 24. Модуль `optimize` доступен в пакете `scipy` [14].

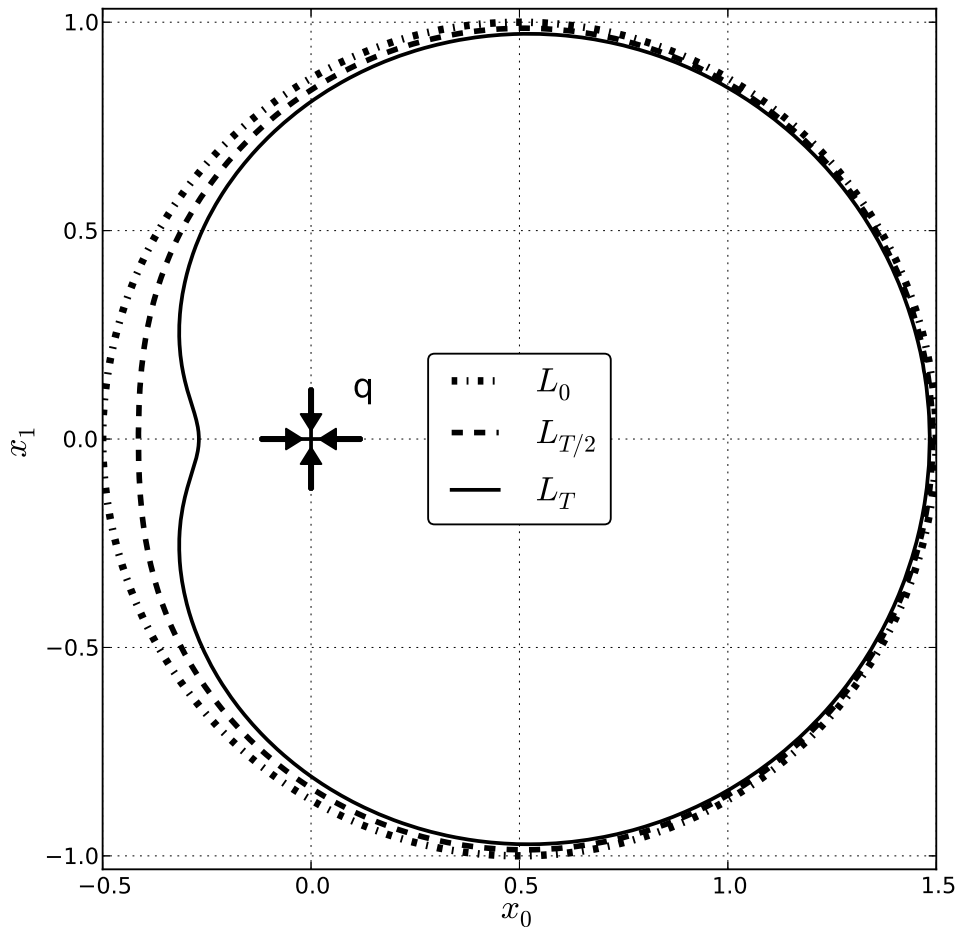


Рис. 13: Последовательные положения границы L_t для $n = 800$ и $dt = 0.001$.

```

1 R=1.; a=0.5; q=-np.pi; t=0.1
2 def eq(alp):
3     return (R**2-q*t/np.pi)**2*alp**6-(2*a**2*R**2+2*a**2*q*t/np.pi+
4         a**4)*alp**2+2*a**4
5 def beta_t(alp):
6     return (1.-alp**2)*(a/alp+alp/a*(R**2-q*t/np.pi))/2.
7 def gamma_t(alp):
8     return (a/alp-alp/a*(R**2-q*t/np.pi))/2.
9 alpha_0_1=optimize.fsolve(eq,0.5,xtol=1e-6)[0]
10 beta_0_1,gamma_0_1=beta_t(alpha_0_1),gamma_t(alpha_0_1)
11 print 'check eq(alpha_0.1)=', eq(alpha_0_1)

```

Листинг 24: Решение системы (9.4).

Подставляя значения коэффициентов $\alpha_{0.1}$, $\beta_{0.1}$ и $\gamma_{0.1}$ в (9.3) можно найти координаты точек границы $L_{0.1}$. В листинге 25 приводится код для вычисления координаты частицы границы раздела жидкостей $L_{0.1}$, перемещающейся вдоль направления прорыва границы L_t к стоку $(-0.27004, 0.0)$. В этом коде, в строке 4 формируется выражение f_t , соответствующее функции

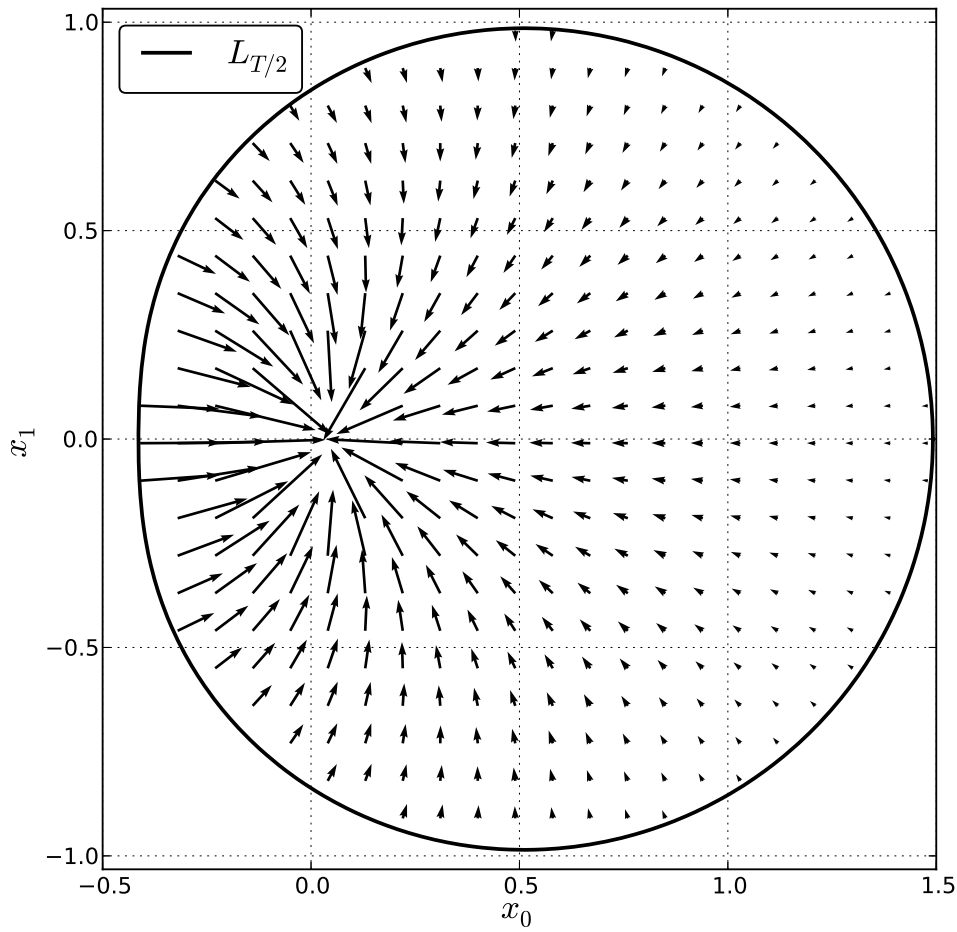


Рис. 14: Поле скоростей в момент времени $t = T/2$ для $n = 800$.

комплексного переменного (9.3) в момент времени $t = 0.1$. Комплексная переменная \mathbf{zeta} , соответствующая переменной ζ из (9.3), формируется с использованием мнимой единицы `sp.I` из пакета `sympy`. Для выделения действительной и мнимой части используются функции `sp.re` и `sp.im`.

```

1 import sympy as sp
2 xi, eta = sp.Symbol('xi', real=True), sp.Symbol('eta', real=True)
3 zeta = xi + sp.I * eta
4 f_0_1 = (beta_0_1 * zeta / (1 - alpha_0_1 * zeta) + gamma_0_1 * zeta).expand(
5     complex=True)
6 re_f_0_1, im_f_0_1 = sp.re(f_0_1), sp.im(f_0_1)
7 print re_f_0_1.subs({xi: -1., eta: 0.0}), im_f_0_1.subs({xi: -1., eta
8     : 0.0})

```

Листинг 25: Поиск координаты частицы границы $L_{0.1}$ на линии прорыва.

В листинге 26 функция (9.3) используется для построения множества точек границы раздела $L_{0.1}$. Для этого в строках 1 и 2 получено множество точек единичной окружности с центром в начале координат. Затем в цикле (строки 7–9) выполняется построение границы $L_{0.1}$ с использованием дей-

ствительной и мнимой части из отображения (9.3), с учетом решений системы (9.4).

```

1 import numpy as np
2 t=np.linspace(0,2.*np.pi,400)
3 x=np.array([np.cos(t),np.sin(t)])
4 x0=np.array([a+np.cos(t),np.sin(t)])
5 x0_1=np.ones_like(x)
6 N=x.shape[1]
7 for i in np.arange(N):
8     x0_1[0,i]=re_f_0_1.subs({xi:x[0,i],eta:x[1,i]})
9     x0_1[1,i]=im_f_0_1.subs({xi:x[0,i],eta:x[1,i]})
10 import pylab as pl
11 pl.plot(x0[0],x0[1],x0_1[0],x0_1[1])
12 pl.show()

```

Листинг 26: Построение границы раздела жидкостей в моменты времени $t = 0$ и $t = 0.1$ по точному решению (9.3) и (9.4).

Учтем, что $\mu_1 = 0$ и $\rho_1 = \rho_2$ и, следовательно $\lambda_t = 1$ и $\alpha_t = 0$. Тогда основная система, состоящая из интегрального (9.2) и дифференциального уравнения (5.7), с учетом начального условия (5.8), примет вид:

$$\begin{aligned}
 g_t(\mathbf{x}, t) - 2G_h[g_t, L_t](\mathbf{x}, t) &= 2\varphi_{0h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L_t, \\
 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \mathbf{W}_{0h}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}_h[g_t, L_t](\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_t, \quad t > 0, \\
 \mathbf{x}(\theta, 0) &= \mathbf{x}_0(\theta), \quad t = 0.
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Для решения этой системы написан код, приведенный в листинге 27.

Разберем код, приведенный в листинге 27. В этом коде, для решения задачи Коши (5.7) и (5.8) организуется цикл **while**, который выполняется до тех пор, пока переменной **isMove** не будет присвоено значение **False**. В теле цикла, на каждом шаге по времени, выполняется решение интегрального уравнения из (9.5) на подвижной границе L_t и элементарное перемещение границы L_t .

```

1 nt=200
2 qDrain=np.array([-np.pi])
3 zDrain=np.array([[0.0],[0.0]], dtype='d')
4 lambdat=1
5 dt=0.001
6 rDrain=0.270040542206468
7 thet=np.linspace(2*np.pi,0,nt+1,endpoint=True)
8 Lt=np.array([0.5+np.cos(thet),np.sin(thet)])
9 isMove=True; T=0; cycle=0
10 while isMove:
11     stdout.write("%d " % cycle); stdout.flush(); cycle+=1
12     xtc=(Lt[:, :nt]+Lt[:, 1:])/2.
13     Nxtc=Normal(Lt)
14     A=np.eye(nt)-2.*lambdat*MPDL(x=xtc, y=xtc, Ny=Nxtc, sOmega=omgh)
15     f=2.*lambdat*varphiSources(q=qDrain, x=xtc, z=zDrain, sPhi1=Phi1h)
16     gt=np.linalg.solve(A, f)

```

```

17 Lt+=(VSources(q=qDrain , x=Lt , z=zDrain , sVS=VSh)+VDL(x=Lt , b=Lt , g=gt
    , sV2=V2h)) * dt
18 T+=dt
19 if(np.logical_or.reduce(((Lt[0]-zDrain[0])**2+(Lt[1]-zDrain[1])
    **2)<=rDrain**2)): isMove=False
20 dS=np.pi-np.sum(np.abs(np.cross(Lt.T[:nt] , Lt.T[1:]))) / 2.

```

Листинг 27: Численное решение системы (9.5).

В строке 19 выполняется проверка всех точек границы L_t на попадание в круг, радиусом r_{Drain} . Таким образом мы находим такое положение границы раздела жидкостей L_t , при котором кратчайшее расстояние от этой границы до центра стока равно r_{Drain} . Значение r_{Drain} , указанное в строке 6, согласно точному решению (9.3) и (9.4) соответствует моменту времени $T_V = 0.1$.

Разберем конструкцию из строки 19. Функция `logical_or.reduce` выполняет свертку элементов одномерного массива логических значений к единому значению путем применения логического оператора «ИЛИ». Поэтому, если в одномерном массиве окажется хоть одно истинное значение (`True`), то результат, возвращаемый функцией `logical_or.reduce` будет `True`. При этом переменной `isMove` будет присвоено значение `False` и следующая итерация цикла не будет выполняться.

В строке 20 вычисляется изменение площади фигуры, ограниченной границей L_t за время T . Изменение площади находится как разность площади круга единичного радиуса и площади S_T фигуры, ограниченной L_T . Площадь фигуры S_T вычисляется как сумма площадей треугольников ее составляющих. Для вычисления площадей треугольников используется векторное произведение, которое вычисляет функция `cross`. Эта функция по умолчанию выбирает векторы вдоль последней оси, поэтому в качестве аргументов ей передаются транспонированные матрицы.

Код, приведенный в листинге 27, содержит минимум интерактивности: в строке 11 печатается номер шага. Результаты расчета можно сделать более наглядными путем отображения подвижной границы. Для этого вызовом функции `ion` нужно перевести `pylab` в интерактивный режим. При этом, для рисования границ нужно использовать функцию `draw` вместо функции `show`, так как функция `draw` не задерживает выполнение программы. Вариант использования `pylab` в интерактивном режиме предложен в листинге 28.

```

1 pl.ion()
2 pl.plot(Lt[0] , Lt[1])
3 pl.draw()
4 while isMove:
5     # some code
6     if(reduce(lambda a,b: a or b , [ np.fabs(T-0.02*i)<dt/2. for i in
        np.arange(10) ])) :
7         pl.plot(Lt[0] , Lt[1]) ; pl.draw()
8     # some code
9 pl.ioff()

```

```

10 pl.plot(Lt[0], Lt[1])
11 pl.show()

```

Листинг 28: Интерактивное отображение результатов расчета.

Для подтверждения физического смысла в результатах, полученных в ходе численного решения задачи об эволюции границы раздела жидкостей, имеет смысл построить поле скоростей в некоторый фиксированный момент времени. Как нарисовать или сохранить поле скоростей было продемонстрировано ранее в листингах 19 и 20.

В нашей задаче поле скоростей имеет смысл только внутри границы L_t , так как вязкость внешней жидкости равна нулю. Поэтому в листинге 29 приводится код, для построения сетки внутри L_t . В строке 1 этого кода генерируется сетка внутри квадрата. Затем, в строке 2 исключается окрестность стока. И в строке 3 исключаются точки, находящиеся вне L_t . Для этого используется свойство потенциала двойного слоя, распределенного с единичной плотностью по границе: равен минус единице внутри границы [10].

```

1 xs=np.mgrid[-0.5:1.5:0.09, -1.:1.:0.09]
2 xs=xs[:, ((xs[0]-zDrain[0][0])**2+(xs[1]-zDrain[1][0])**2)>0.2**2]
3 xs=xs[:, PDL(x=xs, y=xtc, Ny=Nxtc)<-0.9]

```

Листинг 29: Сетка внутри границы L_t .

Для оценки погрешности численного решения введем величины η_T и η_S :

$$\eta_T = \left| 1 - \frac{T}{T_V} \right| 100\%, \quad \eta_S = \left| 1 - \frac{\Delta S_T}{qT} \right| 100\%, \quad (9.6)$$

Величина η_T характеризует ошибку вычисления времени достижения T границей раздела жидкостей L_t , η_S — ошибку в законе сохранения объема жидкости. Напомним, что выше мы выбрали $T_V = 0.1$.

В таблицах 9 и 10 представлены зависимости погрешностей η_T и η_S от шага разбиения подвижной границы и шага по времени. Анализируя таблицы, наблюдаем сходимость численного решения к точному и выполнение закона сохранения объема жидкости.

$\eta_T, \% \backslash \Delta t$	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$
0.002	10.0	8.0	6.0	4.0	4.0
0.001	10.0	6.0	4.0	3.0	2.0
0.0005	9.5	6.0	4.0	2.5	1.5

Таблица 9: Погрешность (9.6) численного решения задачи о стягивании первоначально кругового пятна к стоку.

$\eta_S, \% \backslash \Delta l$	$\frac{2\pi}{50}$	$\frac{2\pi}{100}$	$\frac{2\pi}{200}$	$\frac{2\pi}{400}$	$\frac{2\pi}{800}$
Δt					
0.002	2.174	0.426	0.034	0.16	0.19
0.001	2.28	0.54	0.07	0.05	0.09
0.0005	2.34	0.59	0.12	0.001	0.04

Таблица 10: Погрешность (9.6) в законе сохранения объема жидкости.

Последовательные положения границы раздела раздела L_t в моменты времени $t = 0$, $t = T/2$ и $t = T$ построены на рисунке 13. Видим, что граница L_t деформируется больше со стороны стока, и прорыв происходит вдоль кратчайшего отрезка, соединяющего сток с L_0 . Поле скоростей в момент времени $t = T/2$ построено на рисунке 14. Наблюдаем, что вектора вблизи границы $L_{T/2}$ разворачиваются под прямым углом к ней. Последнее имеет физический смысл, так как потенциал на границе L_t постоянен из-за нулевой вязкости внешней жидкости.

Задача об опускании бугра грунтовых вод

Рассмотрим еще одну задачу, имеющую точное решение. Такой задачей является плоскопараллельная задача об изменении уровня грунтовых вод под действием силы тяжести в однородном безграничном грунте. Подвижная граница раздела жидкостей L_t при этом является границей раздела воды и воздуха.

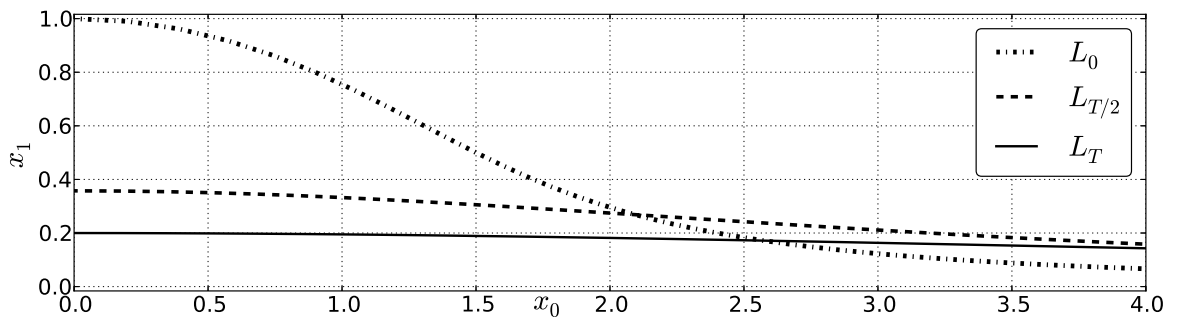


Рис. 15: Последовательные положения границы L_t для $dx = 0.1$ и $dt = 0.01$.

Для бугра, представленного в начальный момент времени параметрическими уравнениями

$$\mathbf{x}_0 = \left(\xi + \frac{a\xi}{1 + \xi^2}, \frac{a}{1 + \xi^2} \right). \quad (9.7)$$

П.Я. Кочиной найден закон опускания частицы контура раздела воды и воз-

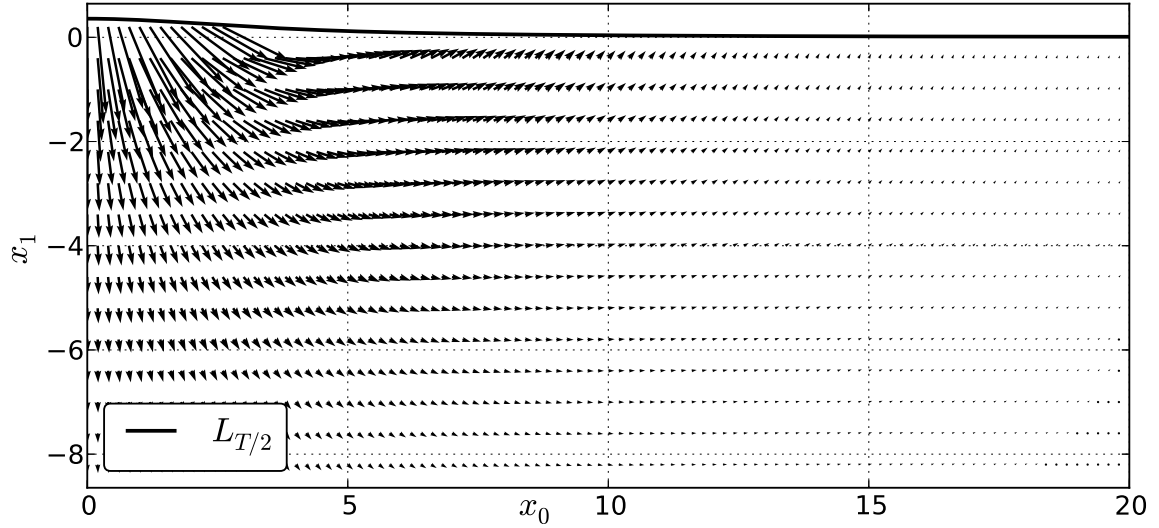


Рис. 16: Поле скоростей в момент времени $t = T/2$ для $dx = 0.1$ и $dt = 0.01$.

духа, находящейся на вершине бугра [11, с. 554]:

$$h(0, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{a}{2} - t - 1 + \sqrt{t^2 + t(2 - a) + (1 + a)^2} \right). \quad (9.8)$$

Из закона (9.8) можно найти выражение, определяющее время достижения T_d бугром грунтовых вод заданной высоты d

$$T_d = \frac{(a + d)^2 + 4(a - d - d^2)}{4d}. \quad (9.9)$$

Для численного решения задачи используем систему (9.2) и (5.7), в которой функции φ_0 и \mathbf{W}_0 отсутствуют, а параметры $\lambda_t = 1$ и $\alpha_t = -1$, $\Pi = -x^1$:

$$\begin{aligned} g_t(\mathbf{x}, t) - 2G_h[g_t, L_t](\mathbf{x}, t) &= 2x^1, \quad \mathbf{x} \in L_t, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \mathbf{V}_h[g_t, L_t](\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in L_t, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(s, 0) = \mathbf{x}_0, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Здесь G_h и \mathbf{V}_h базируются на (6.6). Код, соответствующий решению основной системы уравнения (9.10), приведен в листинге 30.

```

1 while isMove:
2     xtc=(Lt[:, :nt]+Lt[:, 1:])/2.
3     Nxtc=Normal(Lt)
4     A=np.eye(nt)-2.*MPDL(x=xtc, y=xtc, Ny=Nxtc, sOmega=omgh)
5     f=2.*xtc[1]
6     gt=np.linalg.solve(A, f)
7     Lt+=VDL(x=Lt, b=Lt, g=gt, sV2=V2h)*dt
8     T+=dt

```

Листинг 30: Решение системы (9.10).

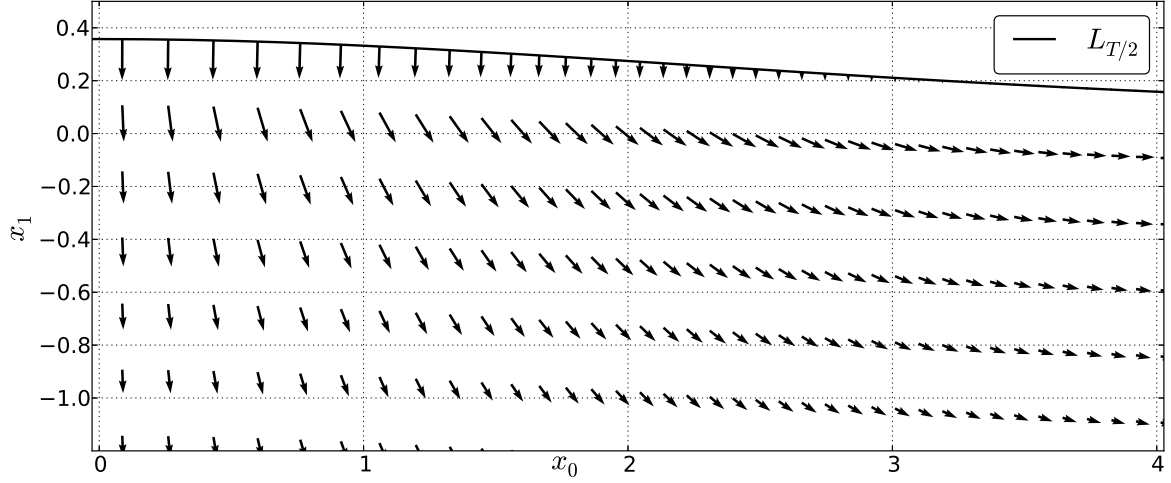


Рис. 17: Поле скоростей вблизи границы $L_{T/2}$ для $dx = 0.1$ и $dt = 0.01$.

Следует отметить особенность численного решения данной задачи. Граница раздела воды и воздуха L_t является бесконечно длинной, и при численных расчетах ее необходимо оборвать. При этом, для получения устойчивых расчетов шаг разбиения нужно увеличивать возле концов дискретного аналога границы L_t . В листинге 31 приведен вариант построения множества точек, соответствующих границе L_0 .

```

1 tau=np.linspace(-L,L,n+1)
2 tau_right=np.array([L+i**2*dx for i in np.arange(1,n_lr)])
3 tau_left=-tau_right[::-1]
4 tau=np.r_[tau_left,tau,tau_right]
5 nt=tau.shape[0]-1
6 Lt=np.array([tau+a*tau/(1+tau**2),a/(1+tau**2)])

```

Листинг 31: Дискретный аналог границы L_0 .

Скорость опускания бугра с течением времени уменьшается и за одинаковые промежутки времени Δt бугор будет опускаться на разные расстояния и замедляться в ходе растекания. Поэтому шаг по времени Δt_j увеличивался в ходе опускания бугра. Для простоты был выбран линейный закон (см. листинг 32).

```

1 dt=dt_start
2 dt_max=10.*dt_start
3 # ...
4 while isMove:
5     # ...
6     if dt<dt_max: dt=Td*dt_start/(Td-T)

```

Листинг 32: Увеличение шага по времени.

Выберем высоту бугра равной единице, что соответствует параметру $a = 1$ (см. (9.7)). Найдём время T , по истечению которого высота бугра

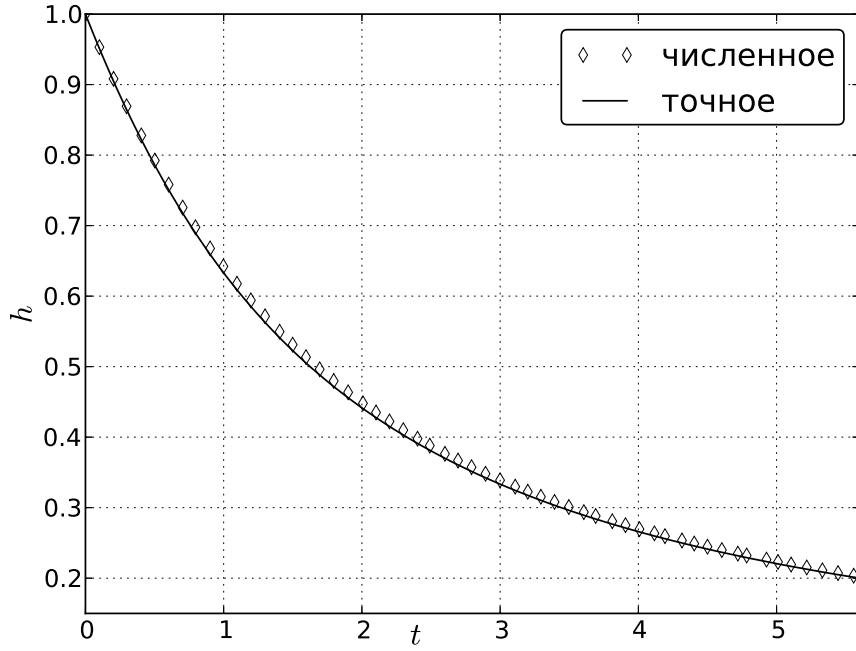


Рис. 18: Изменение высоты бугра с течением времени для $dx = 0.1$ и $dt = 0.01$.

уменьшится в пять раз ($d = 0.2$). Погрешность численного решения будем характеризовать величинами η_T и η_S :

$$\eta_T = \left| 1 - \frac{T}{T_d} \right| 100\%, \quad \eta_S = \left| 1 - \frac{S_T}{S_0} \right| 100\%, \quad (9.11)$$

Здесь T_d — время из точного решения (9.9), S_0 — площадь образованная бугром грунтовых вод L_0 и осью абсцисс, S_T — площадь образованная бугром грунтовых вод L_T и осью абсцисс.

Площадь фигуры, заключенную между границей воды и воздуха L_t и осью абсцисс можно вычислить численно, просуммировав площади всех трапеций, образующих эту фигуру. В листинге 33 приводится код для вычисления суммы площадей этих трапеций.

```
1 S=np.sum(( Lt[0,1:] - Lt[0, : nt])*( Lt[1, : nt]+Lt[1,1:] )/2.)
```

Листинг 33: Площадь фигуры между границей L_t и осью абсцисс.

Зависимости величин η_T и η_S от шага по границе и шага по времени приведены в таблицах 11. Таблицы свидетельствуют о сходимости численного решения к точному. Для демонстрации совпадения численного и точного решений, на рисунке 18 построено изменение высоты бугра с течением времени. Причем сплошной линией представлено точное решение (9.8), а маркерами — численное.

Последовательные положения границы раздела воды и воздуха построены на рисунке 15 для моментов времени $t = 0$, $t = T/2$ и $t = T$. На рисун-

$\eta_T, \% \backslash \Delta l$	0.2	0.1	0.05	$\eta_S, \% \backslash \Delta l$	0.2	0.1	0.05
Δt_0				Δt_0			
0.08	14.76	14.76	—	0.08	2.63	1.65	—
0.04	5.73	5.73	5.73	0.04	2.36	1.50	0.84
0.02	2.72	2.72	2.72	0.02	2.28	1.46	0.82
0.01	3.28	1.26	1.26	0.01	2.30	1.43	0.811
0.005	4.35	1.56	0.63	0.005	2.34	1.56	0.807

Таблица 11: Погрешности (9.11) численного решения задачи об опускании бугра грунтовых вод.

ках 16 и 17 представлено поле скоростей в момент времени $t = T/2$. Причем на рисунке 17 поле скоростей построено вблизи границы $L_{T/2}$. Анализируя рисунок видим, что поле скоростей затухает при удалении от бугра грунтовых вод, а вектора скорости перпендикулярны границы раздела воды и воздуха.

10 Моделирование процессов эволюции

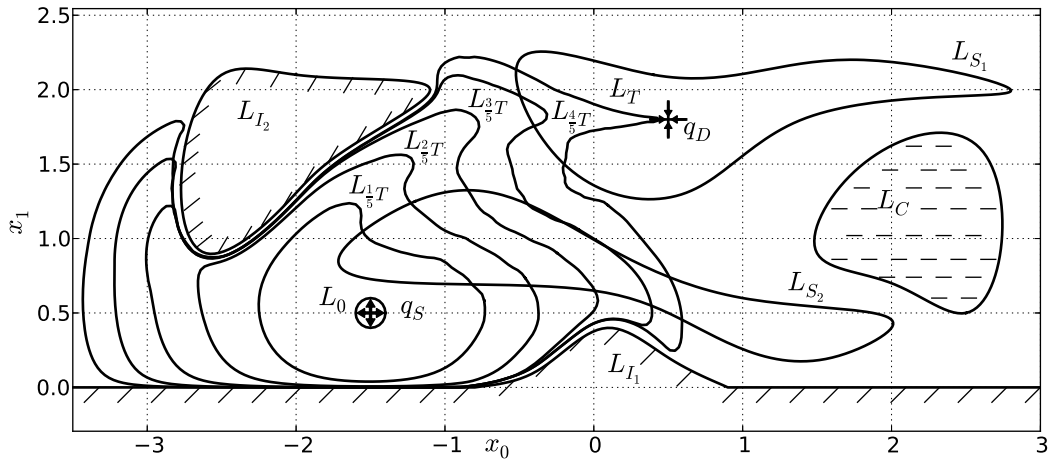


Рис. 19: Последовательные положения границы загрязнения L_t для кусочно-однородного пласта с проводимостью $P = 1$.

В качестве примера приложения разработанной математической модели рассмотрим процесс эволюции границы загрязнения от источника загрязнения к водозабору в пласте. Пласт является ограниченным непроницаемой границей L_{I_1} и содержит: полупроницаемые включения с границей L_{S_i} , $i = 1, 2$, непроницаемое включение с границей L_{I_2} и каверну со свободной жидкостью с границей L_C . Для определенности полагаем, что проницаемость

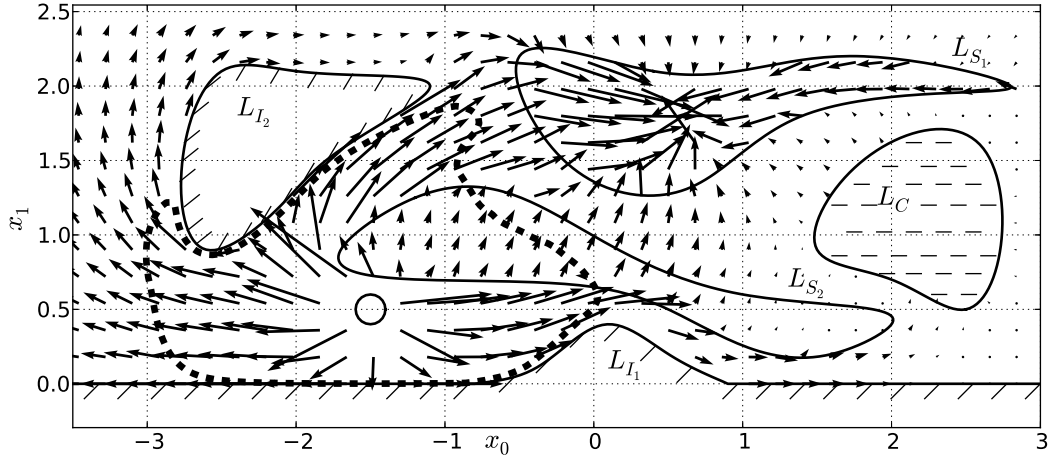


Рис. 20: Поле скоростей $t = 3/5T$ для кусочно-однородного пласта с проводимостью $P = 1$.

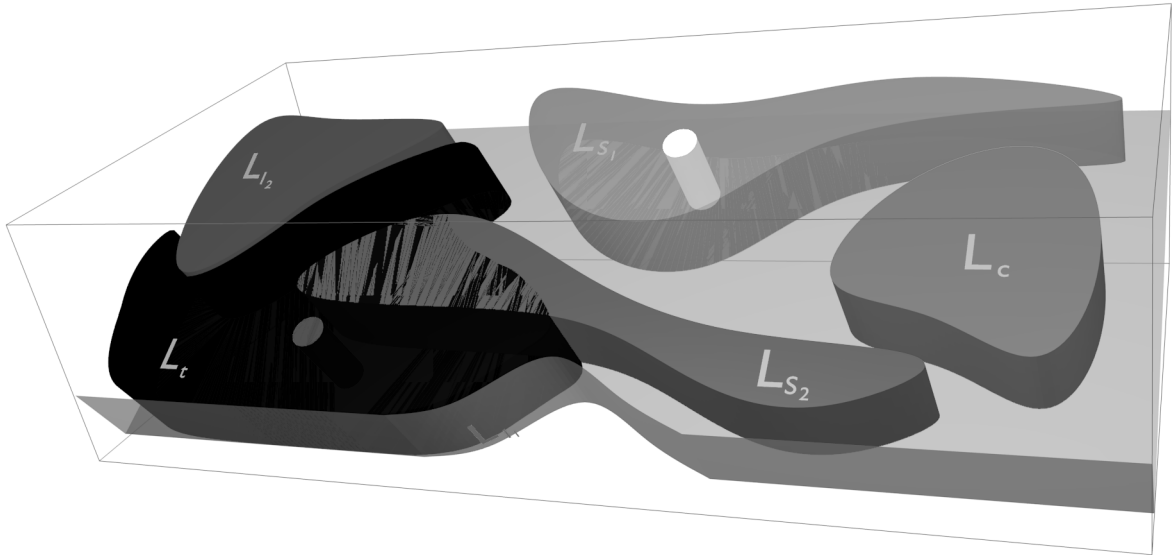


Рис. 21: Пласт в момент времени $t = 3/5T$ для случая проводимости $P = 1$.

пористой среды вне полупроницаемых включений $K_0 = 1$, внутри полупроницаемых включений $K_1 = 9$ и $K_2 = 1/9$. Пласт наклонен под углом 30° к горизонту. Границы представлены на рисунках 19–23. Полагаем что жидкости отличаются вязкостью и плотностью, и параметры $\lambda_t = 0.2$, $\alpha_t = 0.1$. То есть, загрязнение, находящееся внутри границы L_t моделируется более вязкой и менее плотной жидкостью.

Смоделируем эволюцию загрязнения от источника, расположенного в точке $\mathbf{z}_S = (-1.5, 0.5)$, к водозабору в точке $\mathbf{z}_D = (0.5, 1.8)$. Мощности источника и водозабора равны $q_S = \pi$ и $q_D = -\pi$. Для этого численно решим основную систему уравнений, состоящую из сингулярного интегрального уравне-

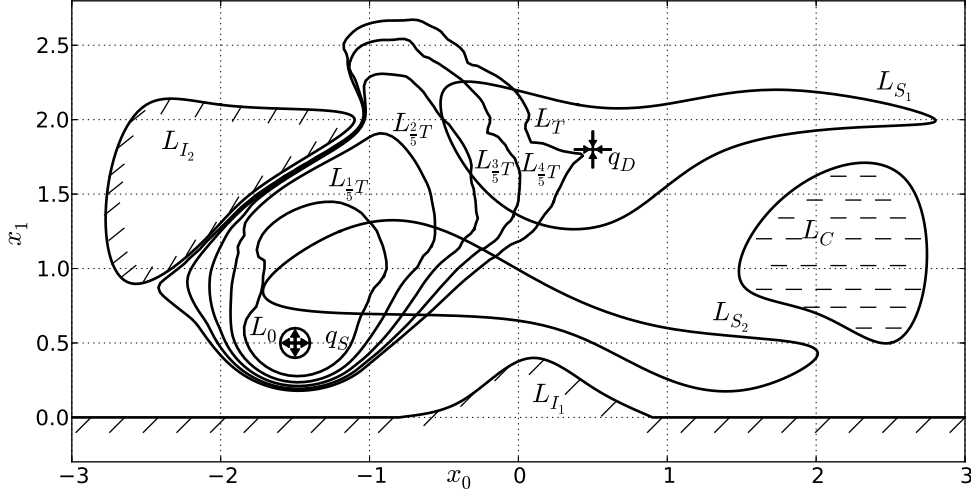


Рис. 22: Последовательные положения границы загрязнения L_t в кусочно-неоднородного пласта с проводимостью $P = x_1^2$.

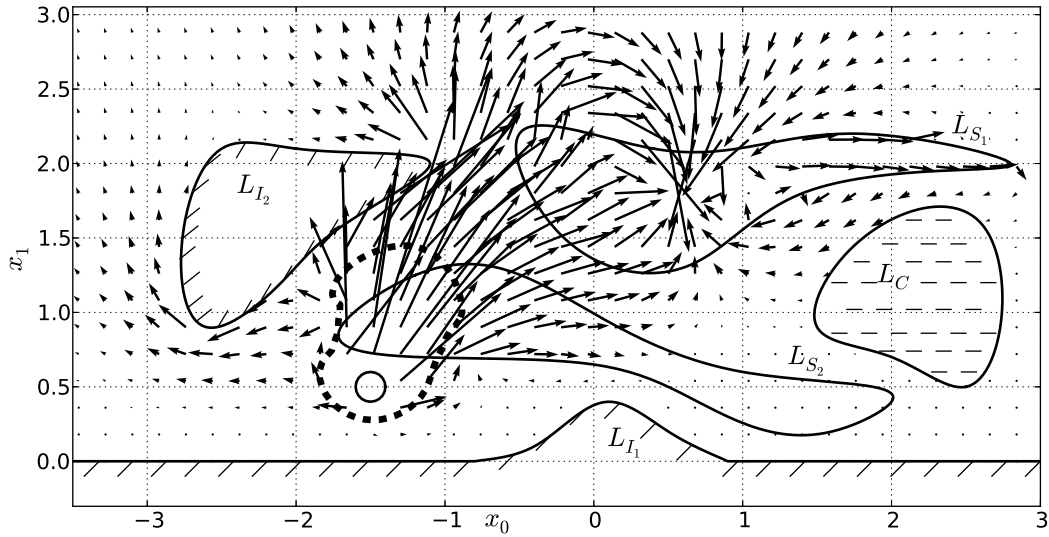


Рис. 23: Поле скоростей в момент времени $t = 1/5T$ для случая кусочно-неоднородного пласта с проводимостью $P = x_1^2$.

ния (4.2) с дополнительным условием (4.3), интегрального уравнения Фредгольма второго рода (4.5) с условиями (4.6), дифференциального уравнения (5.7) с начальными условиями (5.8). При этом используем функции Φ_{1h} и Φ_{2h} из (6.6).

Матрица, соответствующая интегральным уравнениям основной системы уравнений (6.13) и (6.14) вместе с дополнительными условиями, состоит из блоков. Блоки матрицы A_{ij} определяются границей L_i , на которой выполняется условие, и границей L_j с двойным слоем, действие которого учитывается. Для генерации этих блоков используются функции $MPDL$ и $MVDL$ из

модуля `sfunct2`.

В листинге 34 приведены примеры формирования блоков A_{ij} . Так, в строках 1–2 формируется блок A_{I2S1} , соответствующий условию на границе L_{I_2} и учитывающий двойного слой на границе L_{S_1} . В строках 4–5 выполняется формирование блоков A_{tt} и A_{tS1} . Блок A_{tt} входит в строки подматрицы основной системы линейных алгебраических уравнений, выписанных на границе L_t и учитывает влияние самой границы L_t . А блок A_{tS1} учитывает влияние границы L_{S_1} . После создания всевозможных блоков A_{ij} в листинге 36 выполняется формирование матрицы A для решения системы интегральных уравнений. При этом, генерирование векторов строк и столбцов из нулей и единиц выделено в отдельные функции, которые представлены в листинге 35.

```

1 Ml2S1=MVDL(x=xl2c ,b=LS1 ,sV2=V2h)
2 Al2S1=Ml2S1[0]*NxI2c[0].reshape(-1,1)+Ml2S1[1]*NxI2c[1].reshape
  (-1,1)
3 # ...
4 Att=np.eye(nt)-2.*lambdat*MPDL(x=xtc ,y=xtc ,Ny=Nxtc ,sOmega=omgh)
5 AtS1=-2.*lambdat*MPDL(x=xtc ,y=xS1c ,Ny=NxS1c ,sOmega=omgh ,minDist=mD)

```

Листинг 34: Заполнение блоков.

```

1 def cz(n): return np.zeros((n,1))
2 def co(n): return np.ones((n,1))
3 def rz(n): return np.zeros((1,n))
4 def ro(n): return np.ones((1,n))

```

Листинг 35: Функции создание векторов из единиц и нулей.

Обращаем внимание, что в строке 8 листинга 36 создана строка, соответствующая дополнительному условию на разомкнутой непроницаемой кривой L_{I_1} . В этой строке все коэффициенты перед неизвестными равны нулю, кроме одного, соответствующему плотности $g_{I_1}(\mathbf{x}_{1/2}, t_j)$ на самом первом отрезке границы L_{I_1} . Эта строка выписана в соответствии с условием (4.4).

```

1 A=np.r_ [
2   np.c_[Att , AtS1 , AtS2 , AtI1 , AtI2 , AtC , cz(nt) , cz(nt) , cz(nt)] ,
3   np.c_[AS1t , AS1S1 , AS1S2 , AS1I1 , AS1I2 , AS1C , cz(nS1) , cz(nS1) , cz(nS1)] ,
4   np.c_[AS2t , AS2S1 , AS2S2 , AS2I1 , AS2I2 , AS2C , cz(nS2) , cz(nS2) , cz(nS2)] ,
5   np.c_[AI1t , AI1S1 , AI1S2 , AI1I1 , AI1I2 , AI1C , co(nI1) , cz(nI1) , cz(nI1)] ,
6   np.c_[AI2t , AI2S1 , AI2S2 , AI2I1 , AI2I2 , AI2C , cz(nI2) , co(nI2) , cz(nI2)] ,
7   np.c_[ACt , ACS1 , ACS2 , ACI1 , ACI2 , ACC , cz(nC) , cz(nC) , -2.*co(nC)] ,
8   np.c_[rz(nt+nS1+nS2) , 1 , rz(nI1+nI2+nC+2)] ,
9   np.c_[rz(nt+nS1+nS2+nI1) , ro(nI2) , rz(nC+3)] ,
10  np.c_[rz(nt+nS1+nS2) , rz(nI1+nI2) , ro(nC) , 0 , 0 , 0 ]
11 ]
12 f=np.r_ [ ft , fS1 , fS2 , fI1 , fI2 , fC , 0 , 0 , 0 ]

```

Листинг 36: Заполнение блочной матрицы.

На рисунках 19–21 представлен процесс эволюции границы загрязнения L_t в кусочно-однородном пласте, проводимость которого $P = 1$. Анализируя рисунки видим, что результаты численного расчета имеют физический

смысл. Менее проницаемое включение, ограниченное границей L_{S_2} замедляет движение частиц жидкости и границы L_t . В более проницаемом включении L_{S_1} поле скоростей усиливается. Непроницаемые границы L_{I_1} и L_{I_2} препятствуют движению через них частиц жидкости и границы загрязнения L_t . Численное решение основной системы уравнений выполнялось с функциями Φ_{1i} и Φ_{2i} из выражений (6.7).

На рисунках 22–23 представлены результаты расчетов процесса эволюции загрязнения в кусочно-неоднородном пласте, коэффициент проницаемости которого описывается квадратичным законом $K = x^{12}$ и толщина постоянна $H = 1$. Анализируя рисунки видим, что изменение коэффициента проницаемости оказывает влияние на процесс эволюции загрязнения. Так, поле скоростей усиливается с ростом ординаты, а граница загрязнения L_t смещается в область более высокой проводимости. При численном решении основной системы уравнений использовались функции Φ_{1p} и Φ_{2p} из выражений (6.8).

Список литературы

- [1] Варченко А.Н., Этингоф П.И. Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса. М.: Наука. Физматлит, 1995. 80 с.
- [2] Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
- [3] Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах// Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 9. С. 1263–1276.
- [4] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. - М.: Наука. 1995. 520с.
- [5] Никольский Д.Н. Регуляризация дискретной схемы для плоской задачи об эволюции границы раздела различных жидкостей// Вычислительные технологии, 2010. Т. 15, № 1. С. 98-104.
- [6] Никольский Д.Н. Эволюция границы раздела различных жидкостей в неоднородных слоях// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010, Т. 50, № 7, С. 1269–1275
- [7] Никольский Д.Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно однородной пористой среде// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011. Т. 51, № 5, С. 913–919
- [8] Никольский Д.Н. Математическое моделирование процесса эволюции границы раздела различных жидкостей в кусочно неоднородных слоях

сложной геологической структуры// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. Т. 53, № 6. С. 1041–1048

- [9] Никольский Д.Н., Дорофеева В.И. Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей// Вычислительные методы и программирование, 2011. Т. 12., № 1. С. 82–86. Электронная версия доступна здесь http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2011/v12r110.html.
- [10] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 404 с.
- [11] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
- [12] NumPy Reference// <http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/>
- [13] Matplotlib// <http://matplotlib.org/>
- [14] SciPy// <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>
- [15] Welcome to SymPy's documentation! <http://docs.sympy.org/>

Никольский Дмитрий Николаевич

**Численное решение задач об эволюции
границы раздела различных жидкостей
в пористых средах со сложной геометрией**

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 9.09.2013 г. Формат 60 × 84 1/16
Печать ризография. Бумага офсетная. Гарнитура Times
Объем 4 усл. печ. л. Тираж 50 экз.
Заказ № 347 от 9.09.2013 г.

Редакционно-издательский отдел
ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026 г. Орел, ул. Комсомольская, 95.
Тел. (4862) 74 45 08

Лицензия ПД № 8-0023 от 25.09.2000 г.
Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»
г. Орел, ул. 2-я Посадская, 26. Тел./факс (4862) 445-145