

Mục lục

Lời nói đầu	4
1 Giới thiệu	6
2 Nội dung nghiên cứu	8
2.1 Phương trình Navier-Stokes không nén	8
2.2 Phương pháp đặc trưng	9
2.3 Dạng biến phân của phương trình Navier-Stokes	11
2.4 Rời rạc hóa không gian	13
2.5 Hệ phương trình tuyến tính rời rạc	14
2.6 Sự ổn định không điều kiện	15
3 Các ví dụ số	18
3.1 Lid-driven cavity	18
3.2 Lid-driven cavity in 3D	19
3.3 Backward facing step	21
4 Kết luận	24
Phụ lục A Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	28

Danh sách hình vẽ

3.1	<i>Cavity in 2D: Vận tốc với các Reynolds khác nhau.</i>	19
3.2	<i>Cavity in 2D: Streamlines với các Reynolds khác nhau.</i>	20
3.3	<i>Cavity in 3D: Streamlines với $Re = 1000$.</i>	20
3.4	<i>Cavity in 3D: (a) vận tốc dòng chảy, (b) streamlines trong mặt phẳng ($z = 0.5$) với $Re = 1000$</i>	21
3.5	<i>Cavity in 3D: vận tốc dọc theo đường thẳng đứng qua tâm. Hàng 1 và hàng 3: kết quả giải số. Hàng 2 và hàng 4: các kết quả trong [KHT87].</i>	22
3.6	<i>Backward facing step in 2D: Miền tính toán và các điều kiện biên</i>	23
3.7	<i>Backward facing step in 2D: Vận tốc với $Re=400$.</i>	23
3.8	<i>Backward facing step in 2D: Áp suất dòng chảy với $Re=400$.</i>	23

Danh sách bảng

3.1 *Cavity in 2D: so sánh vị trí tâm của xoáy chính cho các Reynolds khác nhau.* 19

Lời nói đầu

Phương trình Navier-Stokes không nén thường được sử dụng để mô hình hóa nhiều hiện tượng vật lý quan trọng trong thực tế, như dòng chảy của máu, dòng chảy trong các đường ống, dòng không khí chuyển động xung quanh cánh máy bay, các hiện tượng truyền nhiệt và thời tiết. Trong những thập kỷ qua, việc phát triển và phân tích các phương pháp số cho các bài toán về dòng chảy Stokes và Navier-Stokes không nén đã đạt được nhiều tiến bộ to lớn, thể hiện qua những nghiên cứu và nguồn tài liệu dồi dào về đề tài này. Nhiều gói phần mềm mã nguồn mở cũng như thương mại đã được phát triển và có thể được sử dụng như những "hộp đen" để giải quyết một lớp lớn các bài toán trong công nghiệp. Tuy nhiên, các bài toán về phương trình Navier-Stokes vẫn tiếp tục đặt ra những yêu cầu và thách thức lớn lao cho các nghiên cứu trong tương lai, nhằm phát triển và hoàn thiện hơn nữa các phương pháp giải số cho lớp bài toán này.

Nội dung đề án này được trình bày trong 4 chương:

- i Chương 1: trình bày sự cần thiết của nghiên cứu và một số vấn đề liên quan đối với các phương pháp số cho bài toán Navier-Stokes không nén.
- ii Chương 2: trình bày các lý thuyết cơ bản về bài toán Navier-Stokes không nén và một số phương pháp giải số được áp dụng như: phương pháp đặc trưng và phương pháp phần tử hữu hạn.
- iii Chương 3: trình bày kết quả của một số thí nghiệm giải số điển hình và các so sánh.
- iv Chương 4: kết luận và đưa ra các hướng nghiên cứu trong tương lai.

Tính khoa học và tính mới mẻ của đề án này nằm ở việc nghiên cứu các phương pháp đặc trưng và phương pháp phần tử hữu hạn và áp dụng các phương pháp này vào giải số cho bài toán Navier-Stokes không nén. Một số thí nghiệm Navier-Stokes không nén kinh điển đã được thực hiện nhằm kiểm tra tính tin cậy của lược đồ giải số. Các kết quả giải số trong hai chiều và ba chiều được đưa ra và so sánh với kết quả được đề cập trong nhiều nghiên cứu trước đây. Các so sánh cho thấy rằng, kết quả thu được hoàn toàn phù hợp và lược đồ giải số đưa ra là đáng tin cậy. Nội dung đề án đã được gửi đăng ký yếu Hội nghị Toán ứng dụng và Tin học năm 2016.

Để đạt được những kết quả này, em xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới **TS. Tạ Thị Thanh Mai**. Cô đã luôn tận tình hướng dẫn, giúp đỡ để em có thể hoàn thành đề án này. Em cũng xin gửi lời cảm ơn tới các thầy cô trong Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội đã dành sự quan tâm, chỉ bảo cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho em trong quá trình thực hiện đề án.

Mặc dù em đã dành nhiều thời gian, công sức để hoàn thiện nhưng đề án vẫn không thể tránh khỏi những sai sót. Em rất mong nhận được những góp ý quý báu của thầy cô và các bạn để nội dung đề án được hoàn thiện hơn nữa.

Em xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 22 tháng 12 năm 2016

Sinh viên thực hiện .

Lê Văn Chiến

Chương 1

Giới thiệu

Phương trình Navier-Stokes không nén thường được sử dụng để mô hình hóa nhiều hiện tượng vật lý quan trọng trong thực tế, như dòng chảy của máu, dòng chảy trong các đường ống, dòng không khí chuyển động xung quanh cánh máy bay, các hiện tượng truyền nhiệt và thời tiết. Trong những thập kỷ qua, việc phát triển và phân tích các phương pháp số cho các bài toán về dòng chảy Stokes và Navier-Stokes không nén đã đạt được nhiều tiến bộ to lớn, thể hiện qua những nghiên cứu và nguồn tài liệu dồi dào về đề tài này. Nhiều gói phần mềm mã nguồn mở cũng như thương mại đã được phát triển và có thể được sử dụng như những "hộp đen" để giải quyết một lớp lớn các bài toán trong công nghiệp. Tuy nhiên, các bài toán về phương trình Navier-Stokes vẫn tiếp tục đặt ra những yêu cầu và thách thức lớn lao cho các nghiên cứu trong tương lai, nhằm phát triển và hoàn thiện hơn nữa các phương pháp giải số cho lớp bài toán này.

Ta biết rằng, việc xấp xỉ tuyến tính cho cả vận tốc và áp suất trong bài toán Navier-Stokes sẽ dẫn đến một phép rời rạc hóa không ổn định, do không thỏa mãn điều kiện Babuska-Brezzi. Một phương pháp xấp xỉ rất phổ biến đối với bài toán Stokes được đề xuất bởi Arnold, Brezzi and Fortin [ABF84]. Phương pháp này đề xuất xây dựng không gian các hàm "bubble", hay còn được biết đến là các phần tử Mini (Mini-element). Một tài liệu tham khảo chuẩn tắc về các phương pháp phần tử hữu hạn hỗn hợp là cuốn sách của Brezzi và Fortin [BF91]. Giải pháp cho các kết hợp không hợp lý như trên là bổ sung

các thành phần ổn định [BF08, BH08]. Nói cách khác, một nhược điểm của quá trình giải số cho bài toán Navier-Stokes là tính ổn định của thành phần đối lưu trong phương trình động lực. Nhiều tác giả đã sử dụng kỹ thuật "upwinding" để xử lý thành phần hyperbolic này, chẳng hạn như [GM99] dựa trên lược đồ phân phối thẳng dư PSI (positive stream invariant), [Mau96] đề xuất phương pháp Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE). Các nghiên cứu trong đề án này nhằm mục đích sử dụng các lợi thế của phép xấp xỉ liên tục Galerkin (phần tử hữu hạn Taylor-Hood) [Qua09] và phương pháp đặc trưng cho thành phần không tuyến tính. Xấp xỉ này cho phép ta rời rạc hóa thời gian và tránh những hạn chế về mặt lý thuyết của CFL (Courant-Friedrichs-Levy) trên mỗi bước thời gian ([PLT92] đề xuất cách lựa chọn bước thời gian phù hợp là $\Delta t \approx 1.5h$). Hơn nữa, nếu quỹ đạo đặc trưng được tính toán chính xác thì kết quả của lược đồ giải số là *ổn định không điều kiện*.

Chương 2

Nội dung nghiên cứu

2.1 Phương trình Navier-Stokes không nén

Trong đề án này, ta xét các bài toán Navier-Stokes không nén phụ thuộc thời gian có dạng:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó, Ω là miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ và có biên liên tục Lipschitz $\partial\Omega$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d$ là vận tốc của dòng chảy ở vị trí \mathbf{x} tại thời điểm t , $p = p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ là áp suất dòng chảy, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d$ là lực tác động từ bên ngoài, μ là hệ số nhớt và ρ là hệ số mật độ.

Phương trình thứ nhất của hệ (2.1) biểu diễn nguyên lý bảo toàn động lượng, trong khi phương trình thứ hai thể hiện đặc tính bảo toàn khối lượng của dòng chảy không nén.

Đặt $\nu = \mu/\rho$, $p = p/\rho$, ta thu được phương trình Navier-Stokes không nén có dạng đơn giản như sau:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (2.2)$$

trong đó, ν thể hiện hằng số nhớt *động học* của chất lỏng.

Cho L là độ dài đặc trưng của dòng chảy. Khi đó, ta định nghĩa số Reynolds:

$$Re = \frac{|\mathbf{u}| \cdot L}{\nu} \quad (2.3)$$

Số Reynolds thể hiện tỉ lệ giữa lực quán tính và lực nhớt. Khi giá trị của ν lớn, lực nhớt chiếm ưu thế vượt trội, do đó thành phần đối lưu trong phương trình Navier-Stokes có thể bỏ qua. Điều này dẫn đến việc xét phương trình Stokes không dừng sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (2.4)$$

Để đảm bảo tính đặt chỉnh của bài toán, hệ phương trình (2.2) cần bổ sung các điều kiện biên thích hợp (Dirichlet, Neumann, slip,...). Đồng thời, các điều kiện biên này cũng cần tương thích với các điều kiện ban đầu, i.e. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$.

2.2 Phương pháp đặc trưng

Trong phần này, ta sẽ tập trung nghiên cứu phương pháp rời rạc hóa thời gian cho phương trình Navier-Stokes bằng phương pháp đặc trưng bậc nhất. Phương pháp này, còn được biết với tên gọi phương pháp Lagrange-Galerkin được giới thiệu đầu tiên bởi Benque [BIKL80]. Kí hiệu $\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t)$ là đường cong đặc trưng kết hợp với trường vận tốc \mathbf{u} , là nghiệm của hệ phương trình vi phân thường:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t), t) \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, s; s) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (2.5)$$

trong đó, điểm $\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t)$ thể hiện vị trí của dòng chảy tại thời điểm t , khi biết tại thời điểm s nó đạt tại vị trí \mathbf{x} .

Lấy đạo hàm trường vận tốc \mathbf{u} theo đường cong đặc trưng, ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t), t)}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \frac{d\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t), t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Phương trình thứ nhất của hệ (2.2) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t), t)}{dt} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.7)$$

Do đó, việc tính toán thành phần đối lưu phi tuyến trong phương trình Navier-Stokes có thể đưa về bài toán tìm vị trí đặc trưng $\mathbf{X}(\mathbf{x}, s; t)$, i.e. vị trí của dòng chảy tại thời điểm trước đó.

Giả sử rằng khoảng thời gian $[0, T]$ được chia thành nhiều khoảng bé hơn có cùng độ dài Δt và kí hiệu $t^n = n\Delta t$. Với mỗi $(t, \mathbf{x}) \in [t_n, t_{n+1}] \times \overline{\Omega}$, lấy tích phân phương trình (2.7) theo đường cong đặc trưng, ta thu được:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t_n)) + \nu \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t), t) dt \\ &\quad - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t), t) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t), t) dt, \end{aligned} \quad (2.8)$$

trong đó, ta sử dụng các ký hiệu $\mathbf{u}^n(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot, t_n)$, $p^n(\cdot) = p(\cdot, t_n)$ và $\mathbf{f}^n(\cdot) = \mathbf{f}(\cdot, t_n)$.

Các tích phân trong phương trình (2.8) có thể được ước lượng bằng các lược đồ xấp xỉ. Trong đồ án này, ta rời rạc bước Stokes theo thời gian sử dụng lược đồ θ ($0 \leq \theta \leq 1$) cho các thành phần của vận tốc và ngoại lực và lược đồ Euler ẩn bậc nhất cho thành phần áp suất. Khi đó ta thu được xấp xỉ:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t_n)) + \nu \Delta t [\theta \Delta \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \Delta \mathbf{u}^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t_n))] \\ &\quad - \Delta t \nabla p^{n+1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1})) + \Delta t [\theta \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \mathbf{f}^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t_n))] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Rời rạc bước Stokes theo thời gian có thể được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} - \theta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} & , \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 & , \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}^{*n}}{\Delta t} + (1 - \theta) \nu \Delta \mathbf{u}^{*n} + (\theta \mathbf{f}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{f}^{*n}), \\ \mathbf{u}^{*n} &= \mathbf{u}^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t_n)), \quad \mathbf{f}^{*n} = \mathbf{f}^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}; t_n)). \end{aligned}$$

Trường hợp $\theta = 1$, lược đồ xấp xỉ θ được gọi là *lược đồ Euler ẩn bậc nhất*. Trường hợp khác khi $\theta = 1/2$, lược đồ θ trở thành *phương pháp Crank-Nicolson bậc hai*.

Như vậy, tại mỗi bước thời gian, việc tìm nghiệm của bài toán Navier-Stokes sẽ được đưa về giải quyết hai bài toán: bài toán Stokes không dừng và bài toán tìm nghiệm tại bước thời gian trước đó theo đường cong đặc trưng của trường vận tốc \mathbf{u} . Phương pháp rời rạc hóa thời gian cho phương trình Navier-Stokes được chia thành hai bước:

- i Giải bài toán vi phân thường (2.5) trong khoảng thời gian $[t_n, t_{n+1}]$.
- ii Giải phương trình Stokes tổng quát được định nghĩa bởi hệ:

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u} - \beta \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (2.11)$$

trong đó α ký hiệu cho $\frac{1}{\Delta t}$ và $\beta = \theta \nu$.

2.3 Dạng biến phân của phương trình Navier-Stokes

Như đã thảo luận trong phần trước, tại mỗi bước thời gian, ta phải giải một bài toán Stokes không dừng (2.11). Cách giải số cho bài toán này bằng phương pháp phần tử hữu hạn sẽ dẫn đến một công thức biến phân.

Đầu tiên, ta giới thiệu các không gian Sobolev sau:

$$H_0^1(\Omega)^d = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (2.12)$$

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\} \quad (2.13)$$

Ký hiệu V và M là các không gian hàm cho vận tốc và áp suất tương ứng. Ta xét dạng biến phân của bài toán Stokes tổng quát trong trường hợp điều kiện biên Dirichlet thuần nhất, i.e $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$. Khi đó, V sẽ được chọn trùng với $H_0^1(\Omega)^d$ và $M = L_0^2(\Omega)$ cho áp suất. Cho trước $\mathbf{v} \in V$. Nhân \mathbf{v} vào hai vế của phương trình thứ nhất trong hệ (2.11) rồi lấy tích phân, ta được:

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx - \beta \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx \quad (2.14)$$

Từ công thức Green, ta có:

$$\begin{aligned} -\beta \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \mathbf{v} dx &= \beta \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx - \beta \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds \\ \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} dx &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds \end{aligned}$$

Thay các đẳng thức này vào (2.14), ta được phương trình sau:

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \beta \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial\Omega} (\beta \nabla \mathbf{u} - p I_d) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds \quad (2.15)$$

Do $\mathbf{v} = 0$ trên $\partial\Omega$ nên ta có:

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \beta \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx$$

Chọn hàm thử $q \in M$ và nhân cả hai vế của phương trình thứ hai trong hệ (2.11) với q trong không gian $L^2(\Omega)$, ta thu được dạng biến phân của bài toán thuần nhất: Cho hàm $\mathbf{F} \in H^{-1}(\Omega)^d$, các hằng số dương α và β ; tìm $\mathbf{u} \in V$ và $p \in M$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \beta \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx, & \forall \mathbf{v} \in V \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx = 0, & \forall q \in M \end{cases}$$

Bài toán này có thể được viết dưới dạng yếu tương đương: Tìm $(\mathbf{u}, p) \in (V \times M)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in V & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) \\ \forall q \in M & b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

trong đó $l(\cdot)$ là dạng tuyến tính liên tục được định nghĩa trên V :

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx$$

và $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), b(\mathbf{v}, p)$ là các dạng song tuyến tính liên tục được định nghĩa trên $V \times V$ và $V \times M$ tương ứng:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \beta \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx \end{cases} \quad (2.17)$$

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của dạng yếu của bài toán Stokes tổng quát đã được chứng minh trong nhiều nghiên cứu trước đây (xem [GR86] hoặc [EG04]). Các chứng minh này bao gồm: i. tính elliptic của dạng song tuyến tính $a(.,.)$ là kết quả của bất đẳng thức Friedrichs-Poincare; ii. các không gian hàm của vận tốc và áp suất thỏa mãn điều kiện Babuska-Brezzi, còn được gọi là *điều kiện inf-sup* trên dạng song tuyến tính $b(.,.)$, i.e. tồn tại một hằng số dương C thỏa mãn:

$$\inf_{q \in M} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \geq C > 0, \quad (2.18)$$

trong đó, $\|\mathbf{v}\|_1 = (\sum_{i=1}^d \|v_i\|_1^2)^{1/2}$ và $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_0$ là các chuẩn trong các không gian Sobolev $H^1(\Omega), L^2(\Omega)$ tương ứng.

2.4 Rời rạc hóa không gian

Bằng cách sử dụng phép xấp xỉ bởi các phần tử hữu hạn Galerkin, dạng rời rạc hóa theo không gian tương ứng với bài toán (2.16) được viết lại như sau: Tìm $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times M_h$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_h \in V_h & a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \\ \forall q_h \in M_h & b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

trong đó, $V_h \subset V$ và $M_h \subset M$ là hai họ các không gian con hữu hạn chiều phụ thuộc vào một tham số rời rạc hóa h -*kích thước phần tử đặc trưng* của một phép tam giác phân T_h trên miền Ω ; và $a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), b_h(\mathbf{v}_h, p_h), l_h(\mathbf{v}_h)$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in T_h} \alpha \int_K \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h dx + \sum_{K \in T_h} \beta \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h dx \\ b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = - \sum_{K \in T_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx \\ l_h(\mathbf{v}_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{v}_h dx \end{cases} \quad (2.20)$$

Bài toán xấp xỉ này cũng yêu cầu các điều kiện tương thích rời rạc, còn được gọi là *điều kiện inf-sup rời rạc*, nghĩa là tồn tại một hằng số dương C_h thỏa mãn:

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, p_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0} \geq C_h > 0 \quad (2.21)$$

Do đó, ta chọn các hàm đa thức từng phần bậc $k \geq 2$ cho không gian hàm của vận tốc V_h và bậc $k - 1$ cho không gian hàm của áp suất M_h . Trong thực tế, ta chọn các phần tử hữu hạn từng phần dạng bậc hai \mathbb{P}_2 cho vận tốc và các phần tử hữu hạn tuyến tính \mathbb{P}_1 cho áp suất. Đây là cặp phần tử có bậc nhỏ nhất của họ các phần tử Taylor-Hood có dạng $\mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k-1}$, $k \geq 2$ (vận tốc liên tục và áp suất liên tục) và thỏa mãn *điều kiện cân bằng inf-sup*.

2.5 Hệ phương trình tuyến tính rời rạc

Đặt $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, nv}$ và $\{\phi_j\}_{j=1, \dots, np}$ là họ các hàm cơ sở của các không gian V_h và M_h tương ứng, với $nv = \dim V_h$ và $np = \dim M_h$. Cho trước $\mathbf{u}_h \in V_h$, $p_h \in M_h$, ta có phân tích:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{nv} u_i \varphi_i, \quad p_h = \sum_{j=1}^{np} p_j \phi_j \quad (2.22)$$

Ta giới thiệu các ma trận hệ số:

$$A_{i,j} = a_h(\varphi_i, \varphi_j), \quad B_{i,j} = b_h(\varphi_i, \phi_j), \quad F_i = l_h(\varphi_i),$$

trong đó, các ma trận A, B tương ứng với các dạng song tuyến tính a_h, b_h và vector F tương ứng với dạng tuyến tính l_h được định nghĩa trong (2.20).

Ký hiệu các vector $U = (u_i)_{i=1, \dots, nv}$ và $P = (p_j)_{j=1, \dots, np}$, bài toán (2.19) tương đương với bài toán giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Hệ (2.23) là hệ thừa, đối xứng nhưng không xác định và kích thước của nó là $\dim V_h + \dim M_h$.

Có nhiều phương pháp số đã được đề xuất để giải hệ phương trình tuyến tính (2.23). Một phương pháp cổ điển thường được sử dụng là phương pháp *Uzawa* [AHU58], bằng cách đưa hệ (2.23) về hai hệ phương trình nhỏ hơn, một cho vận tốc chưa biết U và một cho áp suất P . Điều này dẫn đến việc giải hai hệ phương trình sau:

$$BA^{-1}B^tP = BA^{-1}F, \quad AU = F - B^tP. \quad (2.24)$$

Chú ý, phương pháp *Penalty* có thể được sử dụng để tìm U và P trong hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & \epsilon I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

trong đó, I_d là ma trận đơn vị cấp $d = \dim M_h$ và giá trị của ϵ trong khoảng từ 10^{-6} đến 10^{-4} .

Do đó, tại mỗi bước thời gian, bài toán Stokes tổng quát sẽ dẫn đến việc giải một hoặc nhiều hệ phương trình tuyến tính. Các thí nghiệm của chúng tôi được tiến hành với công cụ Freefem++ (<http://www.freefem.org>), dựa trên các thuật toán giải hệ phương trình tuyến tính Conjugate Gradient (CG) và Crout. Các phương pháp này được áp dụng phổ biến trong giải hệ phương trình tuyến tính thưa, xem thêm chi tiết trong [She94, Saa03, YJ07].

2.6 Sự ổn định không điều kiện

Trong phần này, ta sẽ chứng minh tính *ổn định không điều kiện* của lược đồ giải số đã trình bày ở trên trong trường hợp $\theta \geq 1/2$.

Ký hiệu:

$$W = \{\mathbf{v} \in V : (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \forall q \in M\},$$

$$W_h = \{\mathbf{v}_h \in V_h : (q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = 0, \forall q_h \in M_h\}$$

Chọn $\mathbf{v} \in W$, phương trình đầu tiên trong hệ (2.16) có thể được viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \mathbf{v} dx + \theta \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{*n}}{\Delta t} \mathbf{v} dx + (1 - \theta) \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{*n} : \nabla \mathbf{v} dx \\ &+ \theta \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1} \mathbf{v} dx + (1 - \theta) \int_{\Omega} \mathbf{f}^{*n} \mathbf{v} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in W \end{aligned} \quad (2.26)$$

Chọn $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1}$, ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1})^2 dx + \theta \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \mathbf{u}^{n+1} dx &= (1 - \theta) \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{*n} : \nabla \mathbf{u}^{n+1} dx \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{u}^{*n} \mathbf{u}^{n+1} dx + \theta \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} dx \quad (2.27) \\ &+ (1 - \theta) \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{f}^{*n} \mathbf{u}^{n+1} dx \end{aligned}$$

Viết lại dưới dạng chuẩn, ta có:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 &\leq (\|\mathbf{u}^n\|_0 + \theta \Delta t \|\mathbf{f}^{n+1}\|_0 + (1 - \theta) \Delta t \|\mathbf{f}^n\|_0) \|\mathbf{u}^{n+1}\|_0 \\ &+ (1 - \theta) \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0 \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Do $\theta \geq 1/2$ nên $1 - \theta \leq \theta$. Do đó:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 &\leq (\|\mathbf{u}^n\|_0 + \theta \Delta t \|\mathbf{f}^{n+1}\|_0 + (1 - \theta) \Delta t \|\mathbf{f}^n\|_0) \cdot \\ &\left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 \right)^{1/2} \\ &+ \sqrt{\theta \nu \Delta t} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0 \cdot \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 \right)^{1/2} &\leq \|\mathbf{u}^n\|_0 + \theta \Delta t \|\mathbf{f}^{n+1}\|_0 + (1 - \theta) \Delta t \|\mathbf{f}^n\|_0 \\ &+ \sqrt{\theta \nu \Delta t} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có (xem thêm phần phụ lục):

$$\|\mathbf{u}^n\|_0 + \sqrt{\theta \nu \Delta t} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0 \leq \sqrt{2} \cdot (\|\mathbf{u}^n\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0^2)^{1/2} \quad (2.31)$$

Như vậy, với $\theta \geq 1/2$:

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 \right)^{1/2} &\leq \theta \Delta t \|\mathbf{f}^{n+1}\|_0 + (1 - \theta) \Delta t \|\mathbf{f}^n\|_0 \\ &+ \sqrt{2} (\|\mathbf{u}^n\|_0^2 + \theta \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Bất đẳng thức này thể hiện tính *ổn định không điều kiện* của phương pháp giải số. Đặc biệt, trong trường hợp cụ thể, với *lược đồ Euler ẩn*, tính *ổn định không điều kiện* được biểu diễn qua bất đẳng thức:

$$\left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 \right)^{1/2} \leq \Delta t \|\mathbf{f}^{n+1}\|_0 + \left(\|\mathbf{u}^n\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0^2 \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

Chương 3

Các ví dụ số

3.1 Lid-driven cavity

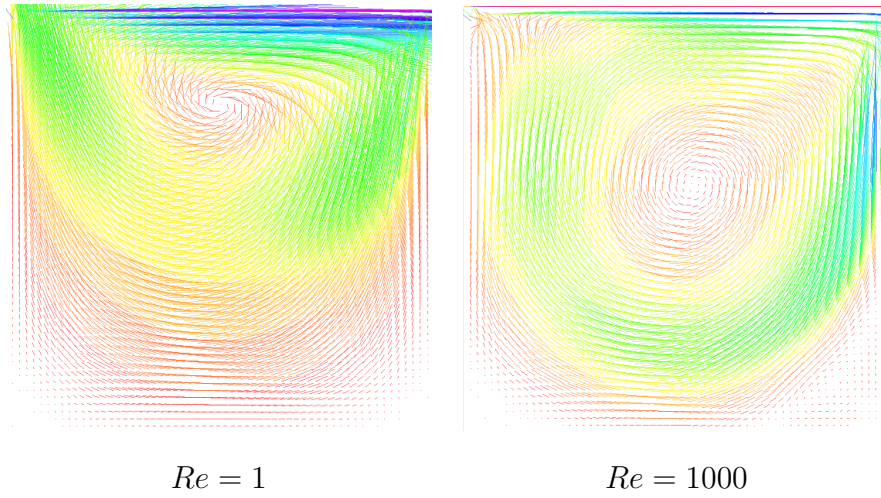
Bài toán "*lid-driven cavity*" được xem là một trong những ví dụ giải số kinh điển của phương trình Navier-Stokes. Nhiều nghiên cứu sử dụng thí nghiệm này như một tài liệu tham khảo và so sánh. Bài toán "*lid-driven cavity*" nghiên cứu dòng chảy trong một miền đơn vị $\Omega = [0, 1]^d (d = 2; 3)$ (hình vuông đơn vị trong không gian hai chiều hoặc hình lập phương trong ba chiều). Điều kiện biên Dirichlet thuần nhất được áp dụng trên tất cả các biên ngoại trừ một cạnh (mặt) phía trên. Động lượng chuyển động của dòng chảy được tạo ra ở nắp phía trên nhờ một vận tốc không đổi $u_x = 1m/s$ theo hướng trục x . Độ nhớt của chất lỏng được điều chỉnh để đạt được số Reynolds như mong muốn.

Trong không gian hai chiều, ta tiến hành mô phỏng cho các trường hợp Reynolds từ 100 đến 1000. Miền tính toán được rời rạc hóa bởi một phép tam giác phân đều với 2601 đỉnh và 5000 phần tử tam giác. Trong thí nghiệm này, chuyển động của dòng chảy tạo nên một xoáy chính tại trung tâm và các xoáy khác ở góc khi Re tăng lên. Khi số Reynolds tăng, số lượng các xoáy tăng lên, đồng thời vị trí tâm xoáy chính cũng có xu hướng di chuyển từ góc dưới bên phải vào trung tâm miền tính toán. Trong bảng 3.1, ta so sánh các vị trí của tâm xoáy chính tại thời điểm cân bằng trong các trường hợp $Re = 100, 400, 1000$. Vận tốc và *streamline* cho các trường hợp Re khác nhau được thể hiện trong hình 3.1 và hình

3.2. Các kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả nghiên cứu trong nhiều tài liệu tham khảo khác, ví dụ [UG82, GM99, ABPV12, APV14].

Reynolds	present(Euler)	present(Crank Nicolson)	Ghia et al [UG82]	NSIKE [GM99]
100	x= 0.600 y = 0.730	x=0.590 y=0.760	x = 0.617 y = 0.734	x = 0.610 y = 0.750
400	x = 0.580 y = 0.640	x= 0.550 y = 0.650	x = 0.554 y = 0.606	x = 0.580 y = 0.615
1000	x = 0.540 y = 0.580	x = 0.520 y = 0.580	x = 0.531 y = 0.562	x = 0.545 y = 0.560

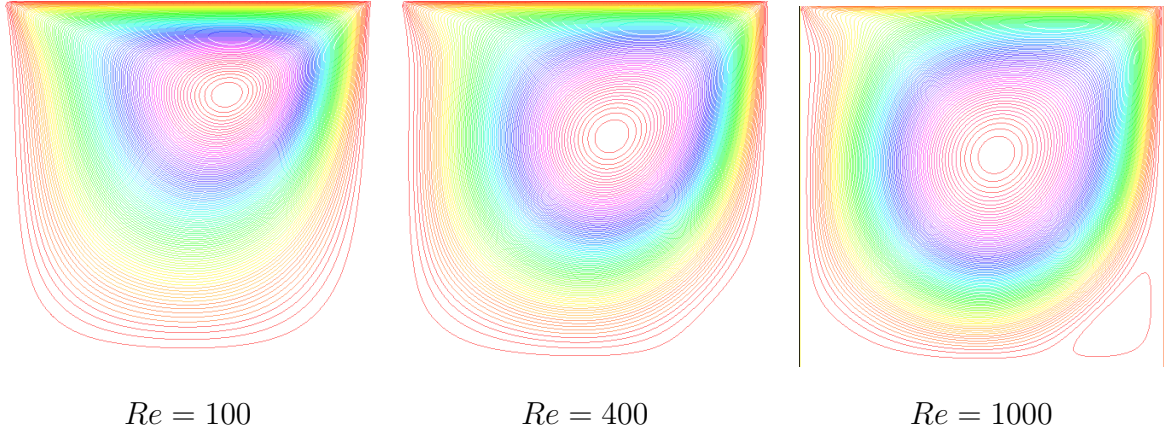
Bảng 3.1: *Cavity in 2D*: so sánh vị trí tâm của xoáy chính cho các Reynolds khác nhau.



Hình 3.1: *Cavity in 2D*: Vận tốc với các Reynolds khác nhau.

3.2 Lid-driven cavity in 3D

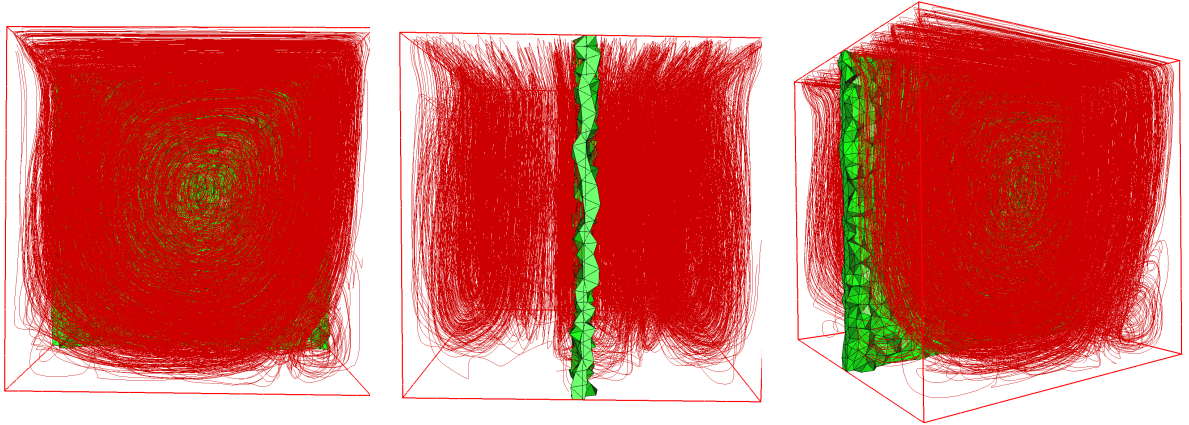
Ta sử dụng hai lưới khác nhau để mô phỏng bài toán "*lid-driven cavity*" trong không gian ba chiều: một lưới chứa 11037 đỉnh và 56244 tứ diện với các trường hợp $Re = 100$, $Re = 400$ và một lưới gồm 35723 đỉnh và 193586 tứ diện cho $Re = 1000$. Các kết quả 3D được biểu



Hình 3.2: *Cavity in 2D: Streamlines với các Reynolds khác nhau.*

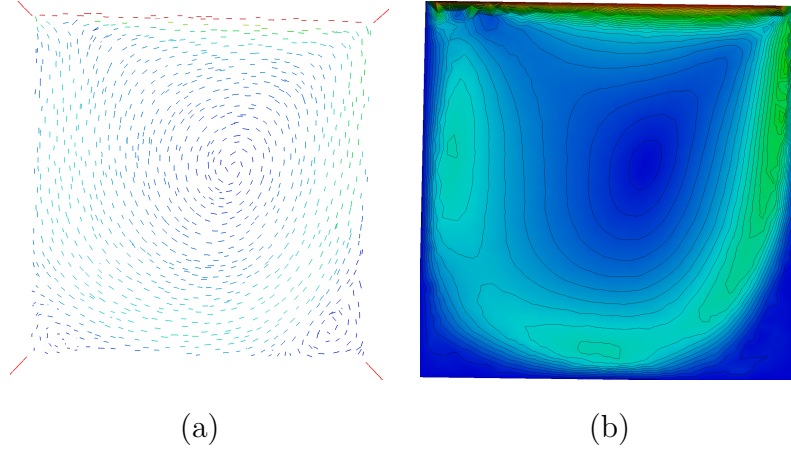
diễn trong hình 3.3. Kết quả này thực sự có ý nghĩa do chưa có nhiều tài liệu đề cập đến các đường *streamline* trong 3D cho bài toán này. Thí nghiệm giải số được phát triển trên ngôn ngữ lập trình C, các kết quả hình ảnh được hỗ trợ bởi phần mềm medit do Pascal Frey (<http://www.ann.jussieu.fr/frey/software.html>) xây dựng.

Các kết quả 3D được khảo sát bằng các mặt cắt trong 2D. Các đường *streamline* và vận tốc thu được bởi mặt phẳng cắt $z = const$ hoàn toàn khớp với các kết quả đã khảo sát trong 2D, tham khảo thêm hình 3.4.



Hình 3.3: *Cavity in 3D: Streamlines với $Re = 1000$.*

Ta tiến hành so sánh nghiệm giải số thu được trong thí nghiệm này với các kết quả trong [KHT87] đối với các trường hợp Reynolds khác nhau. Các so sánh trong hình 3.5



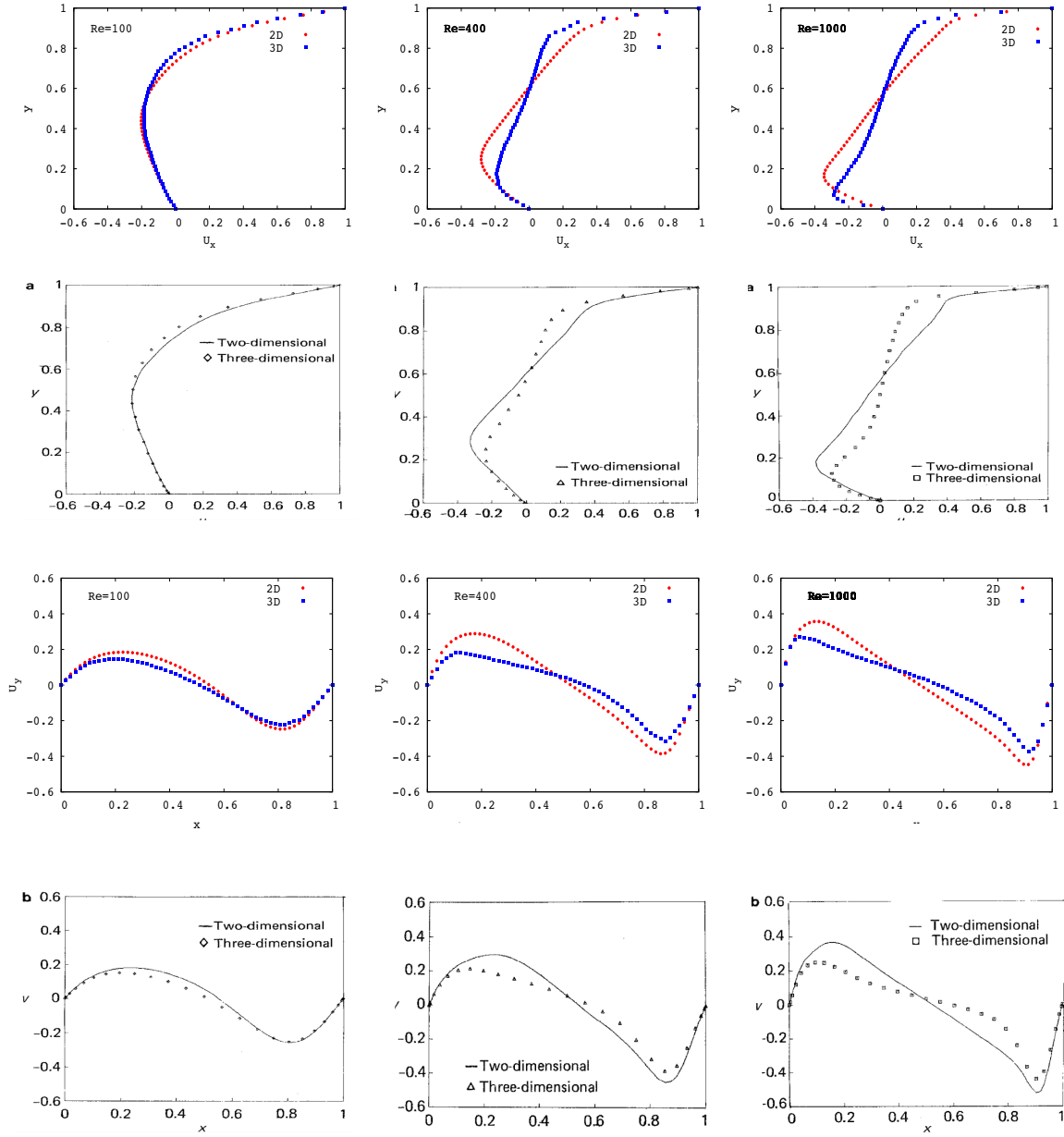
Hình 3.4: *Cavity in 3D: (a) vận tốc dòng chảy, (b) streamlines trong mặt phẳng ($z = 0.5$) với $Re = 1000$*

thể hiện sự thống nhất giữa các kết quả số thu được trong 2D, 3D với các kết quả được đề cập trong tài liệu tham khảo.

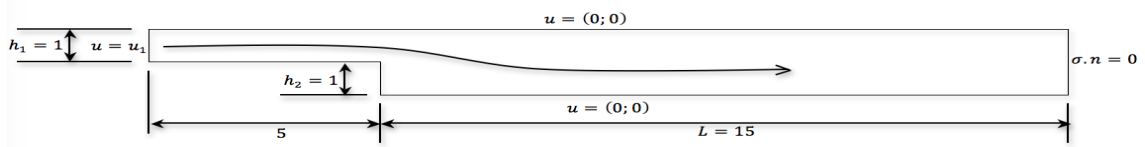
3.3 Backward facing step

Các thí nghiệm về dòng chảy có bước nhảy đã được đề cập trong nhiều nghiên cứu trước đây [ADPS83, LMK97, HRK⁺10]. Bài toán "*backward facing step*" là một thí nghiệm điển hình cho các nghiên cứu về dòng chảy hỗn loạn. Miền tính toán và các điều kiện biên của bài toán được thể hiện trong hình 3.6. Tại biên đầu vào, một dòng chảy vào cố định có giá trị trung bình $u_1 = 2/3$ theo chiều ngang và $u_2 = 0$ theo chiều dọc được sử dụng. Ở biên đầu ra, điều kiện biên Neumann được sử dụng để mô tả dòng chảy ra tự do. Mặc dù miền tính toán và các điều kiện biên tương đối đơn giản nhưng dòng chảy trong thí nghiệm này có những đặc trưng rất phức tạp và có tính phân lớp.

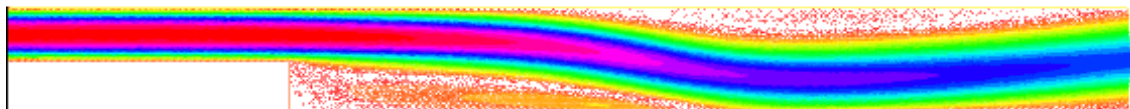
Ta tiến hành tính toán trên một lưới có 23966 đỉnh và 46830 tam giác. Hình 3.7 và hình 3.8 thể hiện vận tốc và áp suất của dòng chảy với $Re = 400$. Chiều dài của chu trình chính đo được là 8.2. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với thực nghiệm được đề cập trong [GM99].



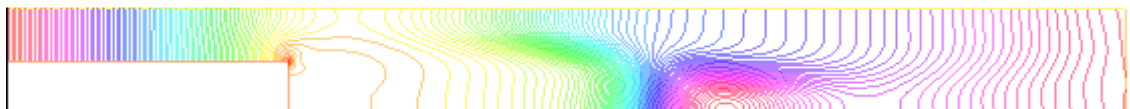
Hình 3.5: *Cavity in 3D*: vận tốc dọc theo đường thẳng đứng qua tâm. Hàng 1 và hàng 3: kết quả giải số. Hàng 2 và hàng 4: các kết quả trong [KHT87].



Hình 3.6: *Backward facing step in 2D: Miền tính toán và các điều kiện biên*



Hình 3.7: *Backward facing step in 2D: Vận tốc với $Re=400$.*



Hình 3.8: *Backward facing step in 2D: Áp suất dòng chảy với $Re=400$.*

Chương 4

Kết luận

Trong đề án này, em đã trình bày những lý thuyết cơ bản về phương trình Navier-Stokes không nén và một lược đồ giải số cho phương trình Navier-Stokes không nén sử dụng phương pháp đặc trưng và phương pháp phần tử hữu hạn. Trong những phân tích lý thuyết của phương pháp đặc trưng cho phương trình Navier-Stokes, sai số ước lượng được xác định có dạng $O(h^m + \Delta t^m + h^{m+1}/\Delta t)$ trong [Pir82] (một lược đồ sai số bậc $(h + \Delta t + h^2/\Delta t)$ cho phần tử Crouzeix-Raviart và lược đồ sai số bậc $(h^2 + \Delta t^2 + h^3/\Delta t)$ cho các phần tử Taylor-Hood). Có thể thấy rằng, sai số ước lượng được điều khiển bởi phần tử lưới đặc trưng $h, \Delta t$ và mối quan hệ của h và Δt . Một sai số ước lượng tối ưu cho xấp xỉ phần tử hữu hạn Lagrange-Galerkin hỗn hợp trong phương trình Navier-Stokes đã được đề cập bởi Suli [Sul98], cũng có thể xem trong [Zhi12] và các tài liệu tham khảo được trích dẫn.

Các nghiên cứu đầy đủ hơn về sai số ước lượng cho mỗi phần tử hữu hạn chưa được đề cập trong nội dung đề án này. Trong đề án này, em đã trình bày một lược đồ giải số với độ chính xác nghiệm phù hợp trong các thí nghiệm điển hình. Các nghiên cứu trong tương lai nên tập trung phát triển lược đồ Navier-Stokes và kết hợp với các lược đồ khác để mô hình hóa các hiện tượng phức tạp trong thực tế.

Tài liệu tham khảo

- [ABF84] D. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo* 23, 1984.
- [ABPV12] R. Araya, G. R. Barrenechea, A. H. Poza, and F. Valentin. Convergence analysis of a residual local projection finite element method for the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(2):669–699, 2012.
- [ADPS83] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, and B. Schonung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J . Fluid Mech.*, 127:473–496, 1983.
- [AHU58] K.J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa. *Studies in linear and non-linear programming*, volume II. Stanford University Press, Stanford, Calif, 1958.
- [APV14] R. Araya, A. H. Poza, and Frédéric Valentin. An adaptive residual local projection finite element method for the Navier–Stokes equations. *Adv Comput Math*, 2014.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume vol. 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [BF08] E. Burman and M. A. Fernandez. Galerkin nite element methods with symmetric pressure stabilization for the transient stokes ’equations: stability and

- convergence analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics*, 47(1):409–439, 2008.
- [BH08] R. Becker and P. Hansbo. A simple pressure stabilization method for the stokes equation. *Commun. Numer. Meth. Engng*, 24:1421–1430, 2008.
- [BIKL80] J.P. Benqué, B. Ibler, A. Keramsi, and G. Labadir. A finite element method for the Navier-Stokes equations. In *Proceedings of the third international conference on the finite elements in flow problems*, 1980.
- [EG04] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159. Springer, 2004.
- [GM99] M. Gorazd and B. Mohammadi. NSIKE- an incompressible Navier-Stokes solver for unstructured meshes. Technical Report 3644, INRIA Rocquencourt, March 1999.
- [GR86] V. Girault and P.A Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Verlag, 1986.
- [HRK⁺10] E. Hachem, B. Rivaux, T. Kloczko, H. Digonnet, and T. Coupez. Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number. *Journal of Computational Physics*, 299(23):8643–8665, November 2010.
- [KHT87] H.C. Ku, R.S. Hirsh, and T.D. Taylor. A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 70(2):439–462, June 1987.
- [LMK97] H. Le, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech*, 330(349-374), 1997.
- [Mau96] B. Maury. Characteristic ale method for the unsteady 3d navier-stokes equations with a free surface. *Comp. Fluid Dym*, 6:175–188, 1996.

- [Pir82] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 38(3):309–332, 1982.
- [PLT92] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advectiondiffusion equation with time-dependent domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(117-141), 1992.
- [Qua09] A. Quarteroni. *Numerical Models for Differential Problems*, volume 2 of *MS-A*. Springer, 2009.
- [Saa03] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2003.
- [She94] J.R. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1994.
- [Sul98] E. Suli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerical Mathematics*, 53:459–483, 1998.
- [UG82] C.T Shin U. Ghia, K.N. Ghia. High-resolution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48(3):387–411, 1982.
- [YJ07] G. Yang and P. Jiang. SSOR and ASSOR preconditioners for Block-Broyden method. *Applied Mathematics and Computation*, 188:194–205, 2007.
- [Zhi12] S. Zhi. Second order modified method of characteristics mixed defect-correction finite element method for time dependent Navier-Stokes problems. *Numerical Algorithms*, 59(2):271–300, 2012.

Phụ lục A

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Giả sử x và y là hai phần tử trong không gian định chuẩn H . Ta có bất đẳng thức sau, gọi là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (hoặc bất đẳng thức Cauchy hoặc bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (\text{A.1})$$

Xét trường hợp $H = \mathbb{R}^2$ với chuẩn khoảng cách thông thường, ta có $x = (a, b)^t, y = (c, d)^t (a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Ta có thể phát biểu lại bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau:

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \quad (\text{A.2})$$

Xét $a = b = 1$, ta thu được bất đẳng thức:

$$|c + d| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}, \quad \forall c, d \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$