基于通量重构方法的高精度湍流模拟研究

1. 绪论
   1. 研究背景和意义

计算机的发明是上个世纪最重要的科技成果之一。1965年，摩尔提出了以他名字命名的著名定律，即计算机的计算能力每18到24个月就能提升一倍，这一定律至今仍未失效。计算机所带来的计算能力的巨大提升大大拓展了流体力学的研究方向。除了传统的理论分析和实验研究之外，计算流体力学在Lax、Wendroff、Godunov等先驱的努力下得以建立，并在随后的数十年中迅速发展。究其定义，计算流体力学指的是采用计算机模拟的手段，数值求解纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程等控制方程，从而得到流动问题的解。到上世纪末，基于二阶精度有限体积法的计算流体力学软件已成功应用到包括汽车、航空、航天等工程领域。

进入二十一世纪以来，超级计算机的出现再一次推动了计算流体力学的发展。在硬件上，多核心处理器技术、高速网络技术和计算节点集群的建立是超级计算机的核心；在软件上，进程间通信框架（MPI）、共享内存计算框架（OpenMP）等的出现成为了编写并行计算流体力学程序的基石。通过使用大量的计算核心并行计算，求解流体力学问题的效率得到了成百上千倍的提升。从另一方面来说，对于之前无法进行计算的大规模复杂流动问题，现在也有了可以进行计算的软硬件平台。

硬件技术的发展也对计算流体力学的算法设计提出了新的要求。对于复杂的湍流流动而言，传统的低精度有限体积法需要高密度的计算网格，计算代价仍然很大。另一方面，现有的大部分有限体积法软件是基于结构网格的，用于复杂工程流动时需要花费大量的人力成本划分网格。因此，发展基于非结构网格的高精度湍流模拟方法能有效地解决这些问题。

* 1. 研究内容与现状

现有的商业计算流体力学软件，包括FLUENT、CFX等，大多采用二阶有限体积法进行计算。这一类方法形式上较为简单，且可以用于结构和非结构网格。经过数十年发展，包括激波捕捉、隐式时间推进、收敛加速等问题已得到了较好的解决。因此，这些计算流体力学软件被广泛应用在诸多工程领域。

常见的工程流体力学问题，包括航空、汽车等行业在内，大多处于湍流流动状态。对于气动升力、阻力等计算，工程上更关心时间平均的流动情况，因此，雷诺平均的纳维-斯托克斯方程（RANS）得到了广泛的应用。这一方程通过引入平均算子，避免了求解非定常纳维-斯托克斯方程的高成本，但同时也引入了被称为雷诺应力的新未知量，从而导致方程不封闭。为此，工程上常采用被称为“湍流模型”的近似方法，将雷诺应力与平均流动相联系，从而使方程封闭。这些方法得到了广泛的应用，在附着边界层流动主导的问题中也取得了相当令人满意的结果。

然而，这一类方法仍然有其很大的局限性。例如，气动声学、气动弹性和激波边界层干扰等涉及非定常复杂流动的问题需要误差足够小的流场计算结果。一方面，若采用二阶有限体积法达到足够小的计算误差，需要非常密集的计算网格，计算代价仍然很大；另一方面，RANS方法由于引入了平均过程，丢失了湍流本身的非定常信息。为解决这两个问题，高精度湍流模拟方法应运而生。

1.2.1 高精度计算流体力学方法

一般而言，任何高于二阶的计算流体力学方法都可以被称为高精度方法，以示其与传统方法的区别。早在上世纪八十年代，结构网格上的高精度方法就已经开始研究。高精度有限差分法（FDM）便是其中最著名的一类成果。通过引入更多的模板点，高精度有限差分法理论上可以达到无穷阶精度，但付出的代价是边界条件的处理变得更为困难。此外，有限差分法的数值格式需要沿着网格线方向进行构造，这也就意味着它只能适用于结构网格，从而限制了其对于复杂工程外形的适应能力。

高精度有限体积法（FVM）是另一类高精度方法。和有限差分法类似，高精度有限体积法也需要引入诸多模板点，从而在当前单元内重构出高次多项式分布。由于模板点不再需要沿着网格线选取，有限体积法可以同时适用于结构和非结构网格。它最大的优点是可以继承二阶有限体积法的诸多成熟结果，可以在现有软件的基础上发展；但它也存在着一些缺陷，包括模板点扩充带来的边界条件处理困难、单元内高斯积分带来的巨大计算量等。

有限单元法（FEM）也是一种常见的计算方法。在流体力学上，由于纳维-斯托克斯方程本身的双曲性，一般的连续有限单元法不能保证计算稳定。Shu和Cockburn在XX年将先前应用于中子输运方程的间断伽辽金（Discontinuous Galerkin, DG）有限单元法引入计算流体力学中，并成功证明了其稳定性、收敛性等问题。间断伽辽金方法结合了有限体积法和有限单元法。在单元内部，通过一系列自由度和基函数，可以构造出高次多项式分布，从而获得高精度；而在单元界面上，采用类似有限体积法的黎曼求解器计算单元之间的通量，从而确保方程求解的守恒性。相比于高精度有限体积法，此类方法模板更紧致，仅使用一层相邻单元，使得边界条件处理更简便。然而，由于单元内多个自由度相互耦合，间断伽辽金方法不可避免地需要高斯积分和矩阵求逆，因此计算量上相对高精度有限体积法并无优势。

通量重构方法可以视为间断伽辽金方法的一种改进，最早由Huynh在XX年提出。和间断伽辽金方法类似，它在单元内采用节点的变量值作为自由度，并使用拉格朗日基函数。不同的是，它将单元内部的重构的通量多项式视为假设值，而将单元界面上的通量影响作为修正引入到各个节点上，从而获得正确的节点通量值。这一方法避免了数值积分，显著减小了计算量，同时精度与间断伽辽金方法相当。

1.2.2 湍流模拟方法



第二章 通量重构方法