Fourier Transformation

und ihre Anwendungen

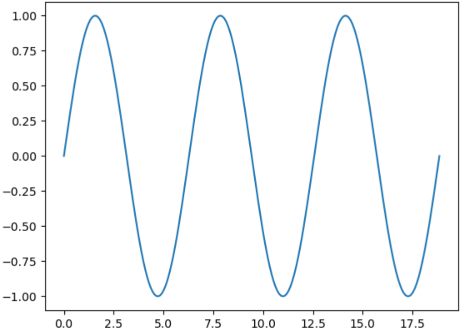
Elias Kiene, Marek Freunscht

9. Mai 2023

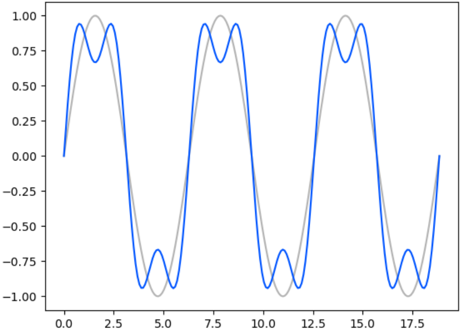
Themen

1. Fourier Reihen
2. Was ist eine Fourier Transformation?
3. Herleitung der Fourier Transformation
4. Inverse Fourier Transformation
5. Diskrete Fourier Transformation
6. Anwendungen

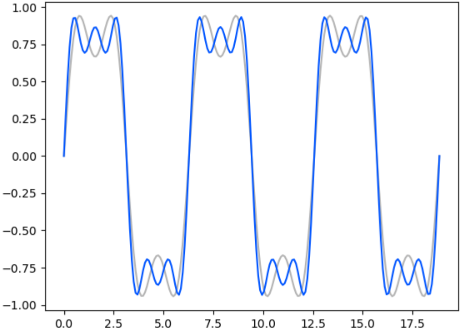
Fourier Reihe



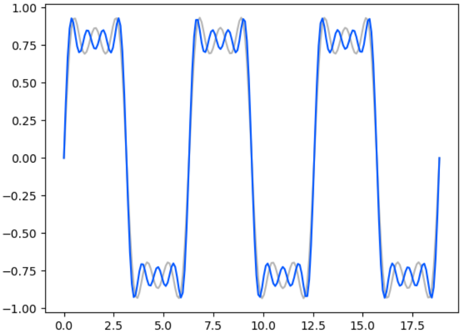
Fourier Reihe



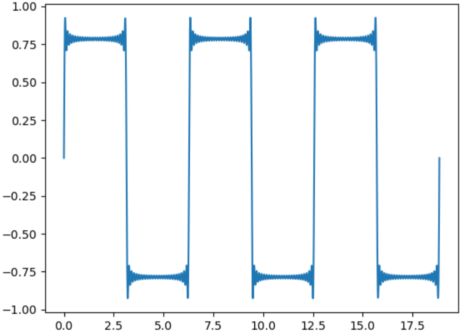
Fourier Reihe



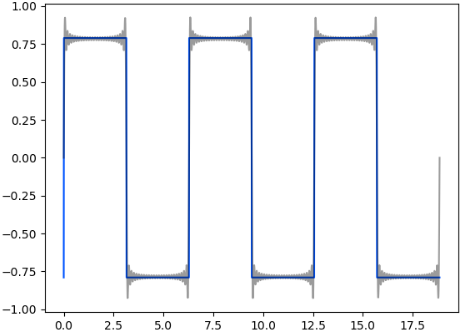
Fourier Reihe



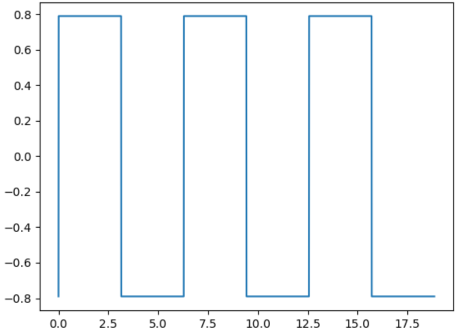
Fourier Reihe



Fourier Reihe



Fourier Reihe

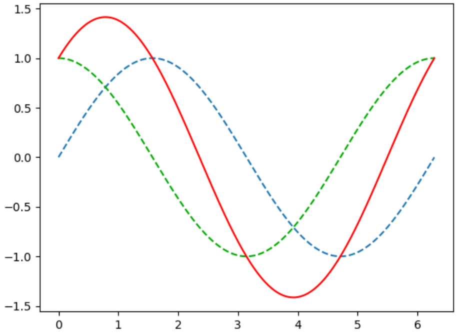


$$\sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{sin(kx)}{k} \tag{1}$$

Fourier Reihe

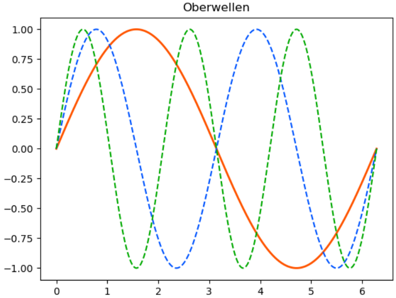
- Periodische Signale können durch Summen von Sinus- und Kosinuswellen approximiert werden
- Hierbei werden diese in eine Grundschwingung und Oberschwingungen mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz aufgeteilt
- $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos(\omega_0 kt) + b_k sin(\omega_0 kt)]$

Wieso Sinus und Kosinus

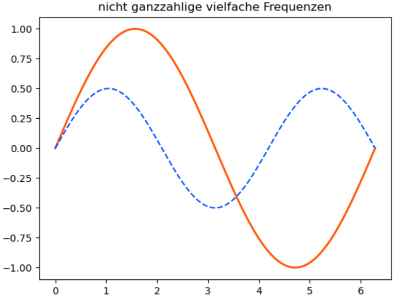


- Sinus ist punktsymmetrisch
- Kosinus ist achsensymmetrisch
- Phasenverschiebung durch Sinus-Kosinus Kombination

Oberwellen

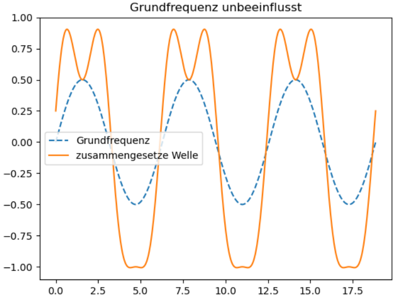


Bei $\omega_k = n\,\omega_0$ wird die Grundfrequenz nicht beeinflusst.

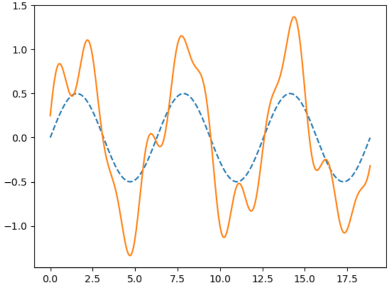


Andere Frequenzen beeinflussen die Grundfrequenz der Schwingung

Oberwellen



$$sin(x) + \frac{cos(2x)}{4} + \frac{sin(3x)}{4}$$



$$sin(x) + \frac{cos(2.23x)}{4} + \frac{sin(3.56x)}{4}$$

Wie werden die Fourier Koeffizienten gewählt?

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

HIER MAREKS FOLIEN REIN !!!111!

Herleitung komplexe Darstellung

Komplexe Darstellung von Sinus und Kosinus:

$$cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$
$$sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Herleitung komplexe Darstellung

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_k cos(kt) + b_k sin(kt)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k}{2} e^{-ikt} + \frac{b_k}{2i} e^{ikt} - \frac{b_k}{2i} e^{-ikt} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i) e^{ikt} + \frac{1}{2} (a_k + b_k i) e^{-ikt} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i) e^{ikt} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k + b_k i) e^{-ikt} \right]
\end{aligned}
$$

Herleitung komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(a_k - b_k i \right) e^{ikt} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(a_k + b_k i \right) e^{-ikt} \right]$$

$$Sei \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - b_k i) & f\ddot{u}r \;\; k > 0 \\ \\ \frac{1}{2}(a_k + b_k i) & f\ddot{u}r \;\; k \leq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(t) e^{-imt} &= \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \right) e^{-imt} dt \\
&= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-m)t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt
\end{aligned}
$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten

für $k = m$ gilt:

$$\int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt = \int_0^T c_k dt = c_k T$$

für $k \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt &= \left[\frac{c_k}{i(k-m)} e^{i(k-m)t} \right]_0^T \\
&= \frac{c_k}{i(k-m)} e^{i(k-m)T} - \frac{c_k}{i(k-m)} \\
&= \frac{c_k}{i(k-m)} - \frac{c_k}{i(k-m)} = 0
\end{aligned}$$

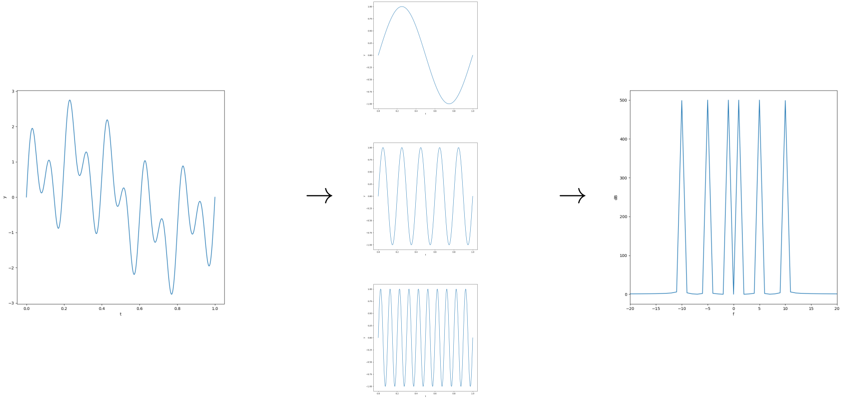
Berechnung der komplexen Koeffizienten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt = c_m T$$

$$\rightarrow \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-imt}$$

Was ist eine Fourier Transformation

- Approximation eines Signals aus Sinus Frequenzen
- Bildung eines Frequenzspektrums
- t-y $\rightarrow$ f-dB



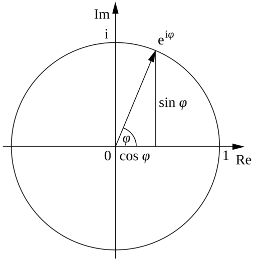
Herleitung der Fourier Transformation

$$(\mathcal{F}g)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \, dt$$

Herleitung der Fourier Transformation

Eulersche Formel

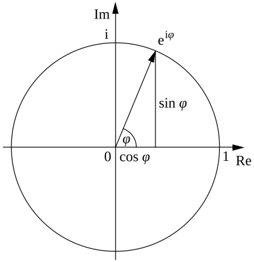
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$



Herleitung der Fourier Transformation

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$



Rotieren in der komplexen Ebene mit Frequenz f:

$$\varphi = \omega t = 2\pi f t$$

$$c(t) = e^{-i\varphi}$$

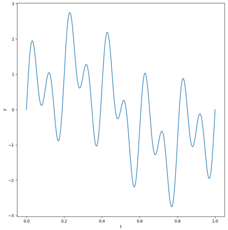
$$= e^{-i2\pi f t}$$

Herleitung der Fourier Transformation

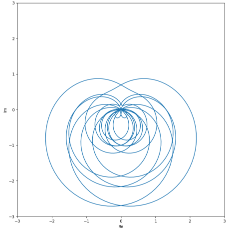
Rotieren des Signals

Signal $g(t)$ um einen Punkt in der komplexen Ebene rotieren:

$$g_c(t, f) = g(t) \cdot e^{-i2\pi ft}$$



$$\xrightarrow{f=10Hz}$$



Herleitung der Fourier Transformation

Finden des Durchschnittswertes

Durchschnittlichen Wert von f_c finden:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N} g(t_i) \cdot e^{-i2\pi f t_i}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi f t} \, dt$$

? Entfernen des $\frac{1}{t_2 - t_1}$ Terms

Herleitung der Fourier Transformation

Finden des Durchschnittswertes

Durchschnittlichen Wert von f_c finden:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \, dt$$

Entfernen des $\frac{1}{t_2 - t_1}$ Terms:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \, dt$$

- Wenn eine Frequenz lange im Signal auftaucht, wird der Peak höher

Herleitung der Fourier Transformation

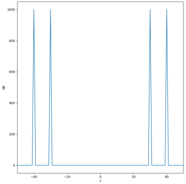
Erweitern der Integrationsgrenzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \; dt = (\mathcal{F}g)(f)$$

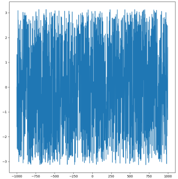
Wichtig

$(\mathcal{F}g) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die komplexwertige Fourier Transformation
$|(\mathcal{F}g)(f)|$ beschreibt die Anwesenheit von Frequenz f
$\angle(\mathcal{F}g)(f)$ ist die Phasenverschiebung von Frequenz f

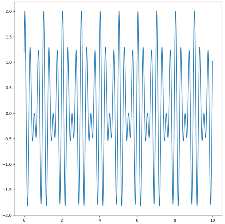
Inverse Fourier Transformation



$+$



$=$



Inverse Fourier Transformation

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g)(f) \cdot e^{i2\pi ft} \, df$$

- Zwischen beiden Transformationen gehen keine Informationen verloren

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(f) = g(x)$$

? Wofür wird diese Rücktransformation benutzt

Inverse Fourier Transformation

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g)(f) \cdot e^{i2\pi ft}\ df$$

- Zwischen beiden Transformationen gehen keine Informationen verloren

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(f) = g(x)$$

- Besonders nützlich z.B. für das Filtern von Frequenzen

Diskrete Fourier Transformation

- Fourier Transformation ist ein mathematisches Verfahren um Frequenzen von kontinuierlichen Signalen zu erhalten
- Computer arbeiten nur mit diskreten Werten
- Wie können zeitdiskrete Signale in ihre Frequenzen zerlegt werden?

Diskrete Fourier Transformation

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i2\pi kn/N}$$

- N = Anzahl an Samples
- s_n = Sample n
- k = Frequenz aus $[0, N-1]$
- c_k = DFT mit Information zu Amplitude und Phase

Inverse DFT

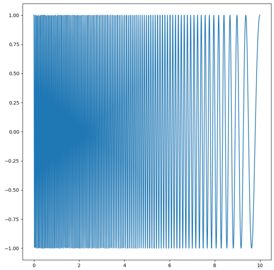
$$s_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi kn/N}$$

Audioverarbeitung

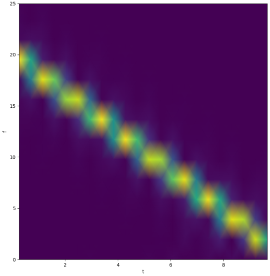
Spektrogramm

Visualisierung von Signalen in einem Spektrogramm:

- Visualisiert den zeitlichen Verlauf des Frequenzspektrums
- Für jeden Zeitpunkt eine Fourier Analyse
- Signalanalyse, Musikerkennung



$\longrightarrow$



Audioverarbeitung

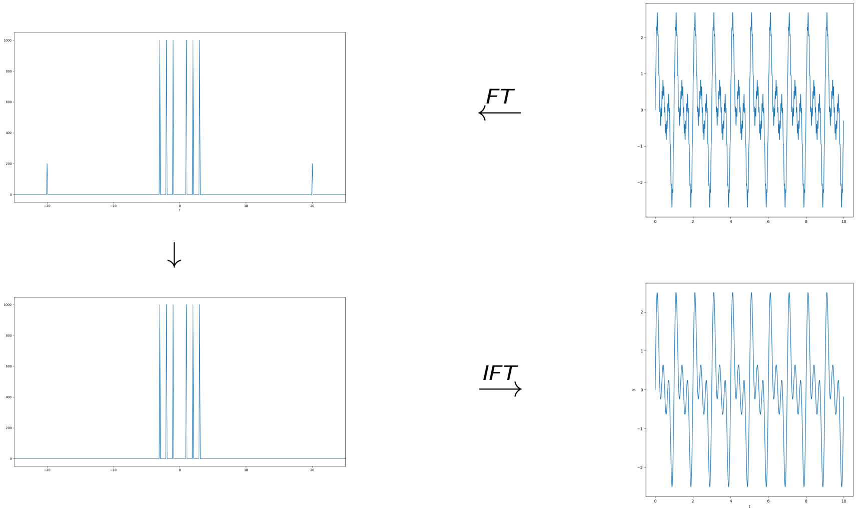
Frequenzfilterung

Filtern von Frequenzen:

- Identifizieren von Störfrequenzen
- Eliminierung von diesem aus Frequenzspektrum
- Inverse Fourier Transformation anwenden

Anwendungen

Audio



- Benötigt eine 2-Dimensionale Fourier Transformation

$$(\mathcal{F}b)(k,l) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(x,y)\cdot e^{-i2\pi(kx+ly)}\; dx\; dy$$

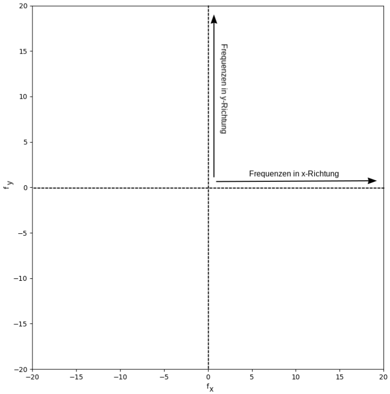
Oder diskret:

$$(\mathcal{F}b)(k,l) = \sum_{x=0}^{X-1}\sum_{y=0}^{Y-1} b(x,y)\cdot e^{-i(\omega_k x+\omega_l y)}$$

Bildverarbeitung
Eigenschaften der 2D-FT

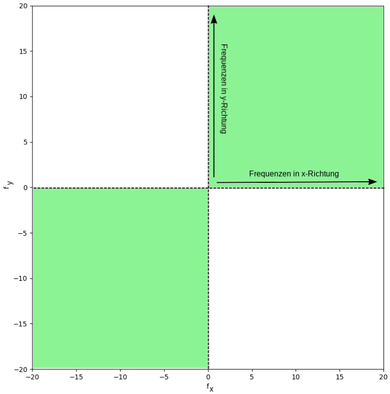
- Der Fourier Raum hat die gleiche Dimension wie das Bild
- x-Achse und y-Achse beschreiben Frequenzen
- Die Farbe eines Pixels beschreibt die Magnitude/Phase
- Punktsymmetrisch um den Ursprung

Bildverarbeitung
2D Fourier Raum



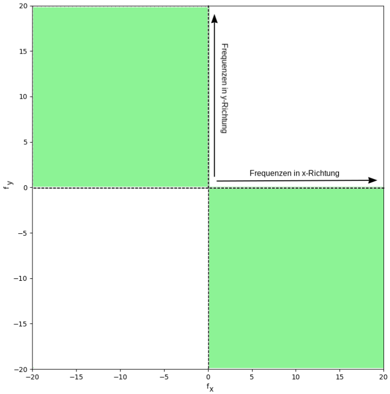
Bildverarbeitung

2D Fourier Raum



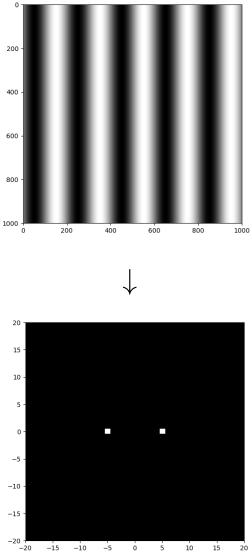
Bildverarbeitung

2D Fourier Raum



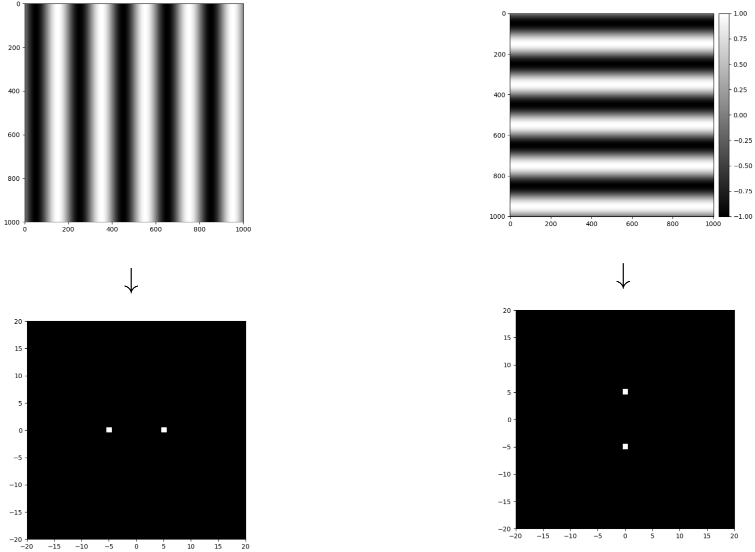
Bildverarbeitung

Fourier Transformation von einfachen Kosinusbildern



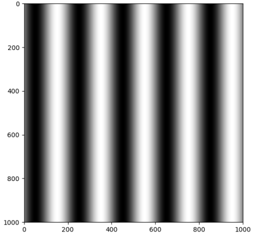
Bildverarbeitung

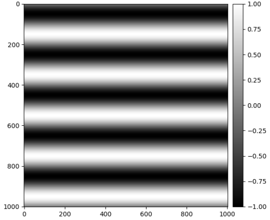
Fourier Transformation von einfachen Kosinusbildern

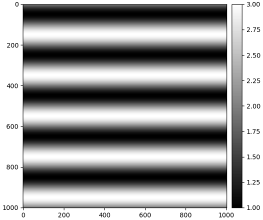


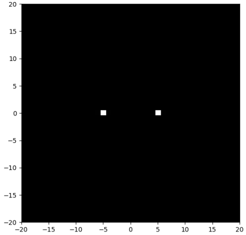
Bildverarbeitung

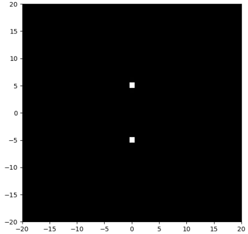
Fourier Transformation von einfachen Kosinusbildern







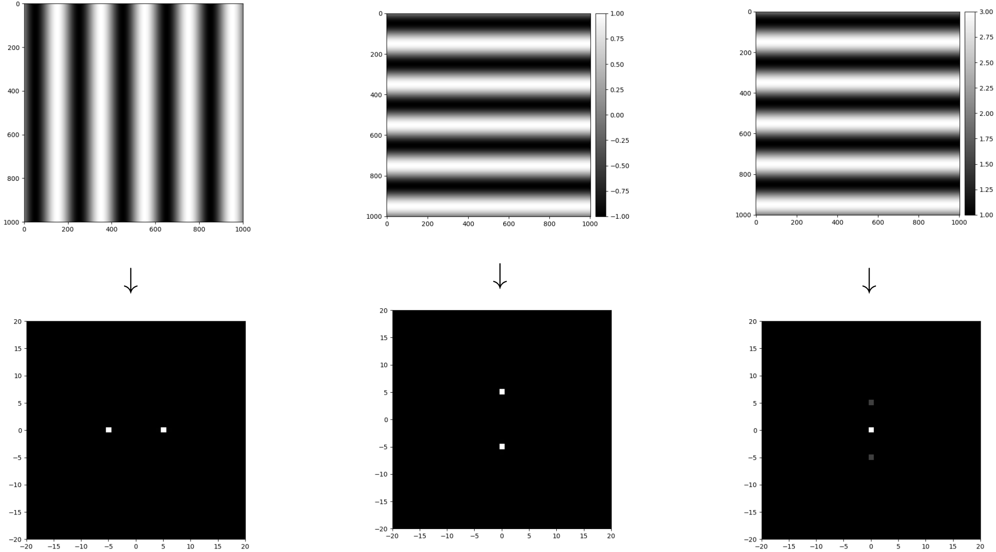




?

Bildverarbeitung

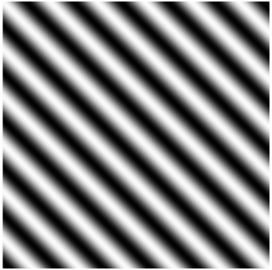
Fourier Transformation von einfachen Kosinusbildern



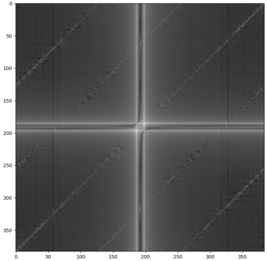
Bildverarbeitung
Schräge Kosinusbilder

Schräger Kosinus:

- Kanteneffekte wenn nicht periodisch



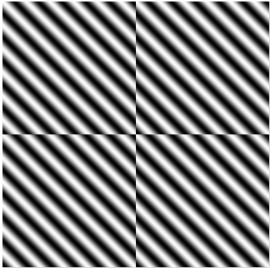
$\rightarrow$



Bildverarbeitung

Schräge Kosinusbilder

- Die Fouriertransformation nimmt das Signal als periodisch weitergeführt an



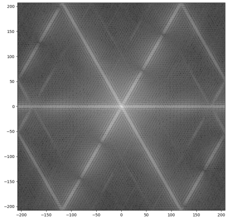
- Starke Kanten
- Hohe diagonale Frequenzen

Bildverarbeitung

Kanten

- Scharfe Kanten sind mit Frequenzbändern im Fourier Raum verbunden
- Für jede Kante ein Frequenzband

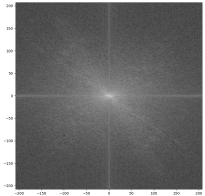
images/04-applications-image-cul $\rightarrow$



Bildverarbeitung

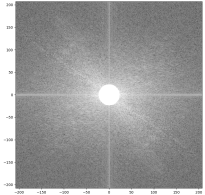
Hochpass

- Filtert niedrige Frequenzen aus dem Bild heraus

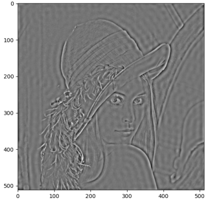


$\xleftarrow{FT}$

$\downarrow$

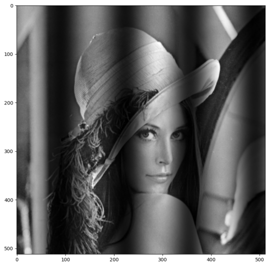


$\xrightarrow{IFT}$

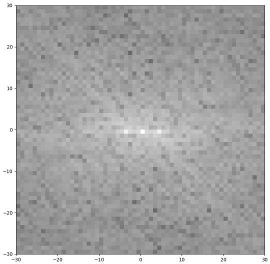


Bildverarbeitung
Rauschfilterung

- Simplifiziertes Beispiel mit nur einer Rauschfrequenz

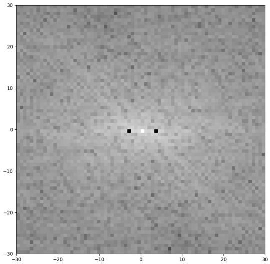


$\xrightarrow{FT}$



Bildverarbeitung
Rauschfilterung

- Rauschfrequenz aus Spektrum entfernen



$\xrightarrow{FT}$