

Fourier Transformation

und ihre Anwendungen

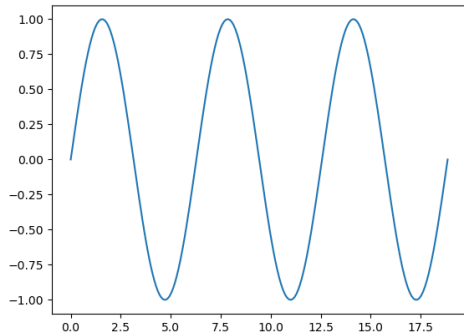
Elias Kiene, Marek Freunschit

9. Mai 2023

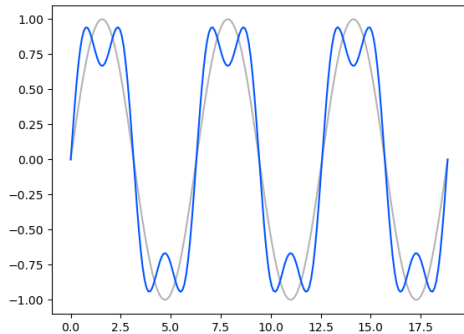
Themen

1. Fourier Reihen
2. Was ist eine Fourier Transformation?
3. Herleitung der Fourier Transformation
4. Inverse Fourier Transformation
5. Diskrete Fourier Transformation
6. Anwendungen

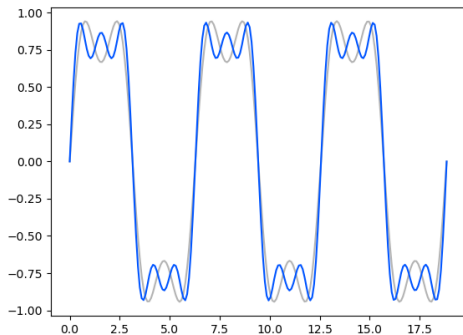
Fourier Reihe



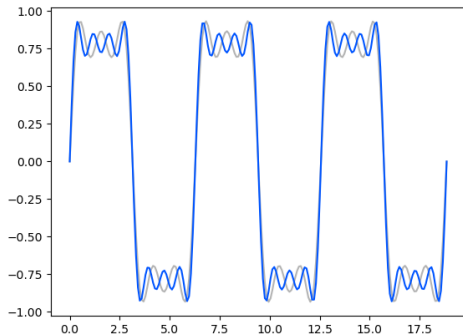
Fourier Reihe



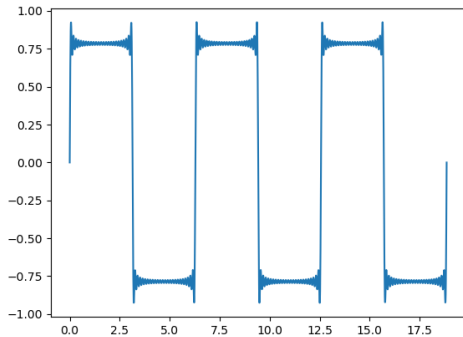
Fourier Reihe



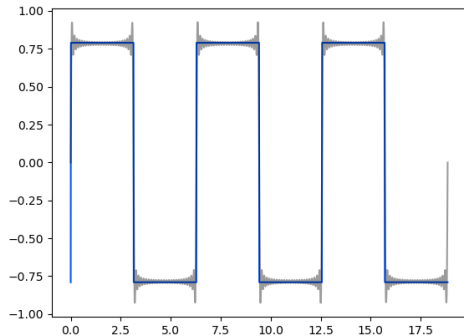
Fourier Reihe



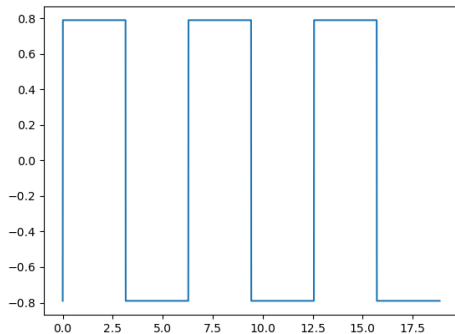
Fourier Reihe



Fourier Reihe



Fourier Reihe



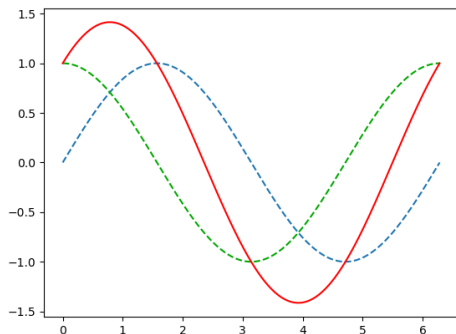
$$\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \quad (1)$$

Fourier Reihe

- ▶ Periodische Signale können durch Summen von Sinus- und Kosinuswellen approximiert werden
- ▶ Hierbei werden diese in eine Grundschiwingung und Oberschwingungen mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz aufgeteilt

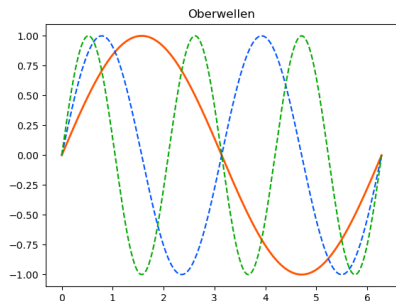
- ▶
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt)]$$

Wieso Sinus und Kosinus

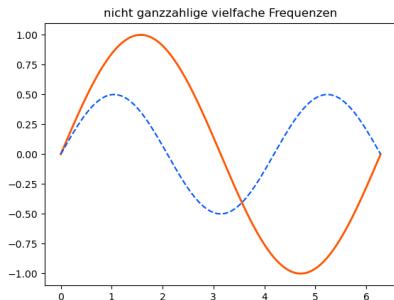


- ▶ Sinus ist punktsymmetrisch
- ▶ Kosinus ist achsensymmetrisch
- ▶ Phasenverschiebung durch Sinus-Kosinus Kombination

Oberwellen

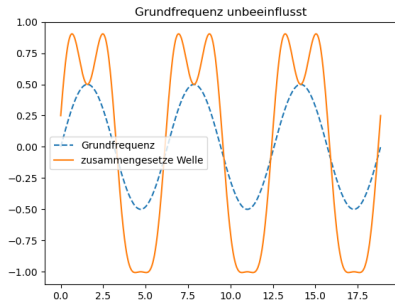


Bei $\omega_k = n\omega_0$ wird die Grundfrequenz nicht beeinflusst.

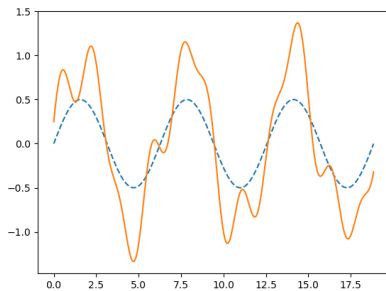


Andere Frequenzen beeinflussen die Grundfrequenz der Schwingung

Oberwellen



$$\sin(x) + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{\sin(3x)}{4}$$



$$\sin(x) + \frac{\cos(2.23x)}{4} + \frac{\sin(3.56x)}{4}$$

Wie werden die Fourier Koeffizienten gewählt?

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

HIER MAREKS FOLIEN REIN !!!111!

Herleitung komplexe Darstellung

Komplexe Darstellung von Sinus und Kosinus:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Herleitung komplexe Darstellung

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k}{2} e^{-ikt} + \frac{b_k}{2i} e^{ikt} - \frac{b_k}{2i} e^{-ikt} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i) e^{ikt} + \frac{1}{2} (a_k + b_k i) e^{-ikt} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i) e^{ikt} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k + b_k i) e^{-ikt} \right] \end{aligned}$$

Herleitung komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i) e^{ikt} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k + b_k i) e^{-ikt} \right]$$

$$\text{Sei } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - b_k i) & \text{für } k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + b_k i) & \text{für } k \leq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) e^{-imt} dt &= \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \right) e^{-imt} dt \\ &= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-m)t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt\end{aligned}$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten

für $k = m$ gilt:

$$\int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt = \int_0^T c_k dt = c_k T$$

für $k \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt &= \left[\frac{c_k}{i(k-m)} e^{i(k-m)t} \right]_0^T \\ &= \frac{c_k}{i(k-m)} e^{i(k-m)T} - \frac{c_k}{i(k-m)} \\ &= \frac{c_k}{i(k-m)} - \frac{c_k}{i(k-m)} = 0 \end{aligned}$$

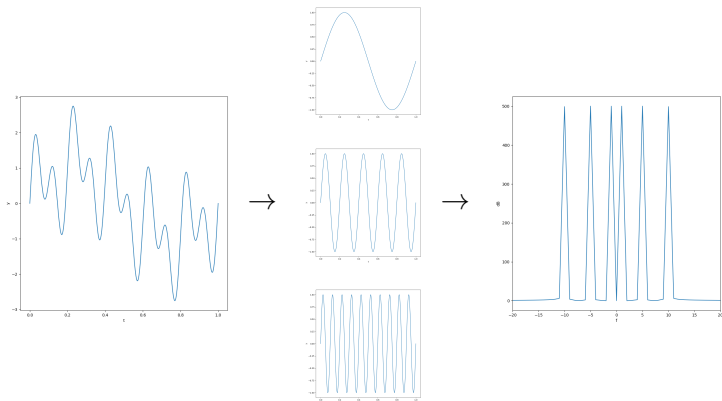
Berechnung der komplexen Koeffizienten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt = c_m T$$

$$\rightarrow c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-imt} dt$$

Was ist eine Fourier Transformation

- ▶ Approximation eines Signals aus Sinus Frequenzen
- ▶ Bildung eines Frequenzspektrums
- ▶ $t\text{-}y \rightarrow f\text{-dB}$



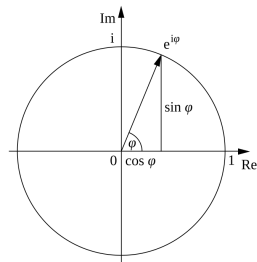
Herleitung der Fourier Transformation

$$(\mathcal{F}g)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Herleitung der Fourier Transformation

Eulersche Formel

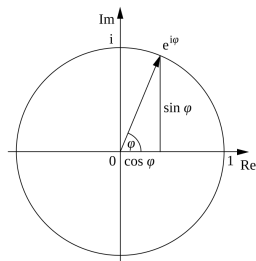
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$



Herleitung der Fourier Transformation

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$



Rotieren in der komplexen Ebene mit Frequenz f :

$$\varphi = \omega t = 2\pi f t$$

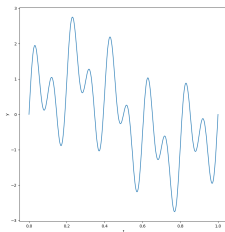
$$\begin{aligned} c(t) &= e^{-i\varphi} \\ &= e^{-i2\pi f t} \end{aligned}$$

Herleitung der Fourier Transformation

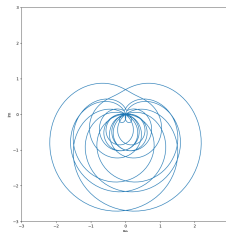
Rotieren des Signals

Signal $g(t)$ um einen Punkt in der komplexen Ebene rotieren:

$$g_c(t, f) = g(t) \cdot e^{-i2\pi ft}$$



$f=10\text{Hz}$
→



Herleitung der Fourier Transformation

Finden des Durchschnittswertes

Durchschnittlichen Wert von f_c finden:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^N g(t_i) \cdot e^{-i2\pi f t_i}$$

↓

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi f t} dt$$

? Entfernen des $\frac{1}{t_2 - t_1}$ Terms

Herleitung der Fourier Transformation

Finden des Durchschnittswertes

Durchschnittlichen Wert von f_c finden:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Entfernen des $\frac{1}{t_2 - t_1}$ Terms:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

- ▶ Wenn eine Frequenz lange im Signal auftaucht, wird der Peak höher

Herleitung der Fourier Transformation

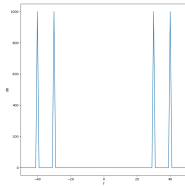
Erweitern der Integrationsgrenzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = (\mathcal{F}g)(f)$$

Wichtig

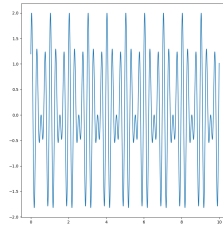
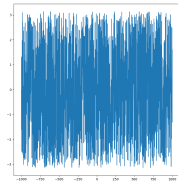
$(\mathcal{F}g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die komplexwertige Fourier Transformation
 $|(\mathcal{F}g)(f)|$ beschreibt die Anwesenheit von Frequenz f
 $\angle(\mathcal{F}g)(f)$ ist die Phasenverschiebung von Frequenz f

Inverse Fourier Transformation



+

=



Inverse Fourier Transformation

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g)(f) \cdot e^{i2\pi ft} df$$

- ▶ Zwischen beiden Transformationen gehen keine Informationen verloren

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(f) = g(x)$$

? Wofür wird diese Rücktransformation benutzt

Inverse Fourier Transformation

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g)(f) \cdot e^{i2\pi ft} df$$

- ▶ Zwischen beiden Transformationen gehen keine Informationen verloren

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(f) = g(x)$$

- ▶ Besonders nützlich z.B. für das Filtern von Frequenzen

Diskrete Fourier Transformation

- ▶ Fourier Transformation ist ein mathematisches Verfahren um Frequenzen von kontinuierlichen Signalen zu erhalten
- ▶ Computer arbeiten nur mit diskreten Werten
- ▶ Wie können zeitdiskrete Signale in ihre Frequenzen zerlegt werden?

Diskrete Fourier Transformation

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i2\pi kn/N}$$

- ▶ N = Anzahl an Samples
- ▶ s_n = Sample n
- ▶ k = Frequenz aus $[0, N - 1]$
- ▶ c_k = DFT mit Information zu Amplitude und Phase

Inverse DFT

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi kn/N}$$