Fourier Transformation

und ihre Anwendungen

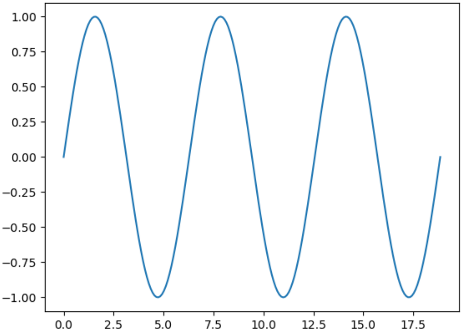
Elias Kiene, Marek Freunscht

9. Mai 2023

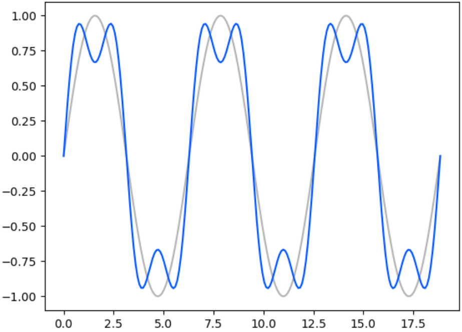
Themen

1. Fourier Reihen
2. Was ist eine Fourier Transformation?
3. Herleitung der Fourier Transformation
4. Inverse Fourier Transformation
5. Herleitung der Diskreten Fourier Transformation
6. Anwendungen

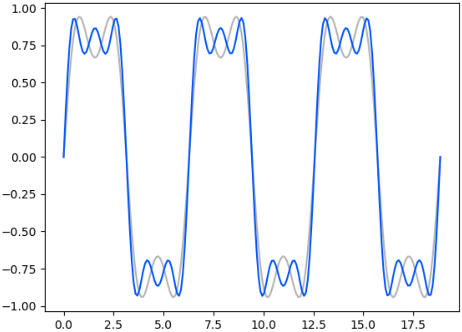
Fourier Reihe



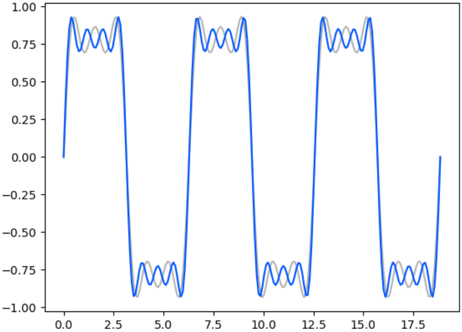
Fourier Reihe



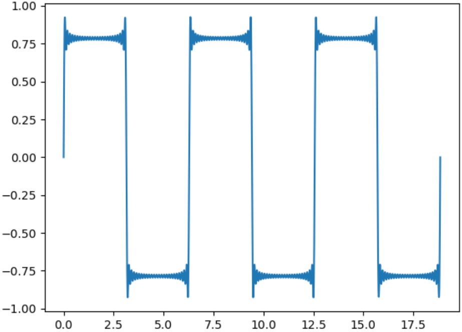
Fourier Reihe



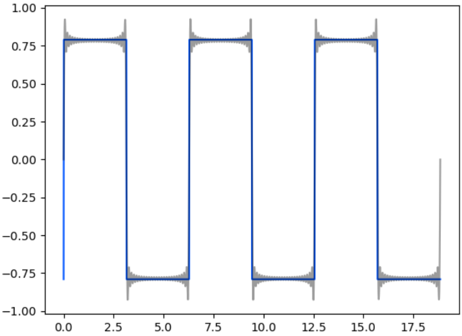
Fourier Reihe



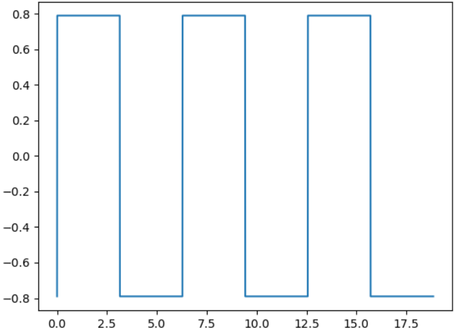
Fourier Reihe



Fourier Reihe



Fourier Reihe

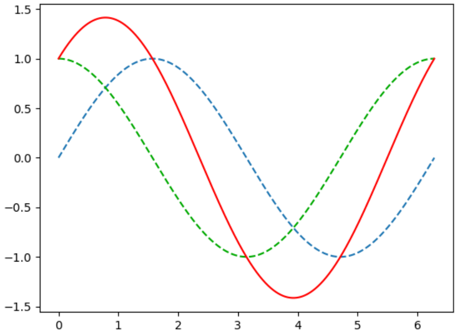


$$\sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{sin(kx)}{k} \tag{1}$$

Fourier Reihe

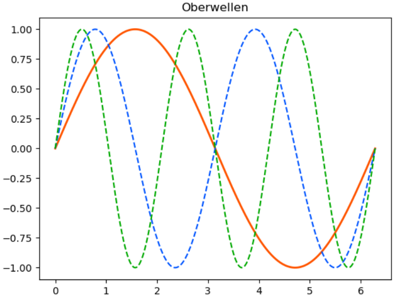
- Periodische Signale können durch Summen von Sinus- und Kosinuswellen approximiert werden
- Hierbei werden diese in eine Grundschwingung und Oberschwingungen mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz aufgeteilt
- $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos(\omega_0 kt) + b_k sin(\omega_0 kt)]$

Wieso Sinus und Kosinus

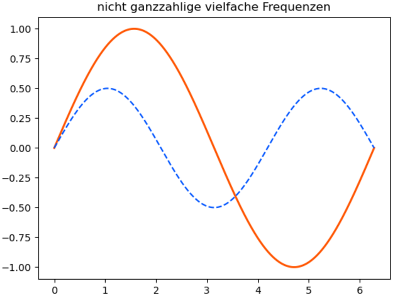


- Sinus ist punktsymmetrisch
- Kosinus ist achsensymmetrisch
- Phasenverschiebung durch Sinus-Kosinus Kombination

Oberwellen

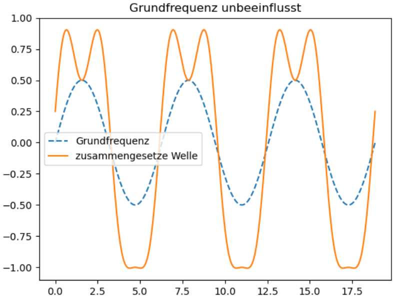


Bei $\omega_k = n\,\omega_0$ wird die Grundfrequenz nicht beeinflusst.

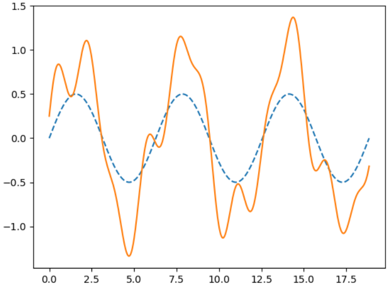


Andere Frequenzen beeinflussen die Grundfrequenz der Schwingung

Oberwellen



$$sin(x) + \frac{cos(2x)}{4} + \frac{sin(3x)}{4}$$



$$sin(x) + \frac{cos(2.23x)}{4} + \frac{sin(3.56x)}{4}$$

Wie werden die Fourier Koeffizienten gewählt?

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

HIER MAREKS FOLIEN REIN !!!111!

Herleitung komplexe Darstellung

Komplexe Darstellung von Sinus und Kosinus:

$$cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Herleitung komplexe Darstellung

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_k cos(kt) + b_k sin(kt)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k}{2} e^{-ikt} + \frac{b_k}{2i} e^{ikt} - \frac{b_k}{2i} e^{-ikt} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i)\, e^{ikt} + \frac{1}{2} (a_k + b_k i)\, e^{-ikt} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - b_k i)\, e^{ikt} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k + b_k i)\, e^{-ikt} \right]
\end{aligned}
$$

Herleitung komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(a_k - b_k i \right) e^{ikt} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(a_k + b_k i \right) e^{-ikt} \right]$$

$$Sei \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - b_k i) & f\ddot{u}r \;\; k > 0 \\ \\ \frac{1}{2}(a_k + b_k i) & f\ddot{u}r \;\; k \leq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)e^{-imt} &= \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\right) e^{-imt} dt \\
&= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-m)t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt
\end{aligned}$$

Berechnung der komplexen Koeffizienten

für $k = m$ gilt:

$$\int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt = \int_0^T c_k dt = c_k T$$

für $k \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt &= \left[\frac{c_k}{i(k-m)} e^{i(k-m)t} \right]_0^T \\
&= \frac{c_k}{i(k-m)} e^{i(k-m)T} - \frac{c_k}{i(k-m)} \\
&= \frac{c_k}{i(k-m)} - \frac{c_k}{i(k-m)} = 0
\end{aligned}$$

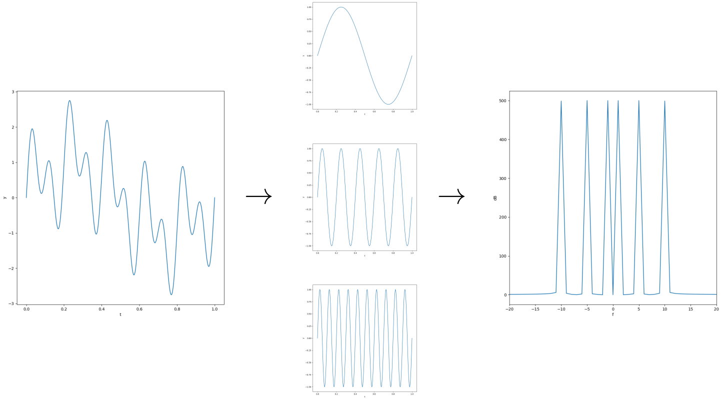
Berechnung der komplexen Koeffizienten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_k e^{i(k-m)t} dt = c_m T$$

$$\rightarrow \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-imt}$$

Was ist eine Fourier Transformation

- Approximation eines Signals aus Sinus Frequenzen
- Bildung eines Frequenzspektrums
- t-y $\rightarrow$ f-dB



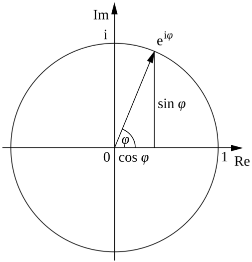
Herleitung der Fourier Transformation

$$(\mathcal{F}g)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft}\ dt$$

Herleitung der Fourier Transformation

Eulersche Formel

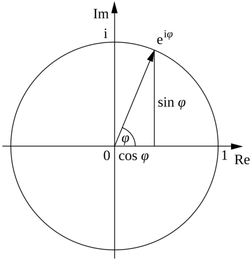
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$



Herleitung der Fourier Transformation

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$



Rotieren in der komplexen Ebene mit Frequenz f:

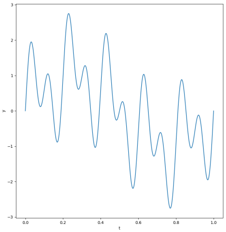
$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t = 2\pi f t \\ c(t) &= e^{-i\varphi} \\ &= e^{-i2\pi f t} \end{aligned}$$

Herleitung der Fourier Transformation

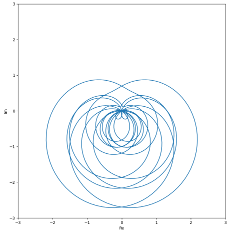
Rotieren des Signals

Signal $g(t)$ um einen Punkt in der komplexen Ebene rotieren:

$$g_c(t, f) = g(t) \cdot e^{-i2\pi ft}$$



$$\xrightarrow{f=10Hz}$$



Durchschnittlichen Wert von f_c finden:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N} g(t_i) \cdot e^{-i2\pi f t_i}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi f t} \; dt$$

? Entfernen des $\frac{1}{t_2 - t_1}$ Terms

Herleitung der Fourier Transformation

Finden des Durchschnittswertes

Durchschnittlichen Wert von f_c finden:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \, dt$$

Entfernen des $\frac{1}{t_2 - t_1}$ Terms:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \, dt$$

- Wenn eine Frequenz lange im Signal auftaucht, wird der Peak höher

Herleitung der Fourier Transformation

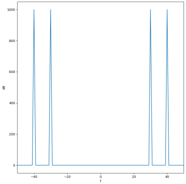
Erweitern der Integrationsgrenzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \; dt = (\mathcal{F}g)(f)$$

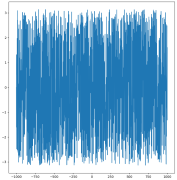
Wichtig

$(\mathcal{F}g) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die komplexwertige Fourier Transformation
$|(\mathcal{F}g)(f)|$ beschreibt die Anwesenheit von Frequenz f
$\angle(\mathcal{F}g)(f)$ ist die Phasenverschiebung von Frequenz f

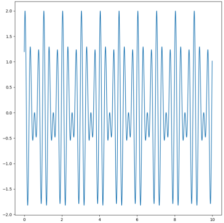
Inverse Fourier Transformation



+



=



Inverse Fourier Transformation

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g)(f) \cdot e^{i2\pi ft}\ df$$

- Zwischen beiden Transformationen gehen keine Informationen verloren

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(f) = g(x)$$

? Wofür wird diese Rücktransformation benutzt

Inverse Fourier Transformation

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g)(f) \cdot e^{i2\pi ft}\, df$$

- Zwischen beiden Transformationen gehen keine Informationen verloren

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(f) = g(x)$$

- Besonders nützlich z.B. für das Filtern von Frequenzen