2. Definice pravděpodobnosti

2.1. Úvod:
deterministické procesy – náhodné procesy
matematická statistika – teorie pravděpodobnosti

2.2. Definice: Náhodný pokus, náhodný jev. Proces, který při opakování dává za stejných podmínek rozdílné výsledky nazýváme *náhodným pokusem.* Různé výsledky náhodného pokusu nazýváme *náhodnými jevy.* Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu nazýváme *jevovým polem.* ∎

Značení: $\mathscr{S}$ je jevové pole, jeho prvky, náhodné jevy, značíme velkými písmeny, např. A, B, C_k, U, V, a pod.

2.3. Příklad:

1. Házíme mincí a sledujeme kdy padne rub a kdy líc.

   Jevové pole $\mathscr{S}$ má dva prvky $\{r, l\}$.

   • Provádíme pokus, který má dva možné výsledky. První si označíme jako 0 a druhý jako 1. Jevové pole $\mathscr{S} = \{0, 1\}$.

2. Házíme hrací kostkou a sledujeme počet ok na horní stěně kostky.

   Jevové pole má 6 prvků, $\mathscr{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   • Náhodně vybereme z množiny n prvků, např. čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ jeden prvek, číslo.

3. Házíme mincí resp. hrací kostkou, dokud nepadne rub resp. nepadne předepsaný počet ok (šestka). Výsledkem pokusu je počet hodů. Jevové pole má nekonečně mnoho prvků, $\mathscr{S} = \{1, 2, \ldots\}$.

   • Konáme náhodný pokus, dokud se jako jeho výsledek neobjeví daný náhodný jev.

4. Házíme $n-$krát mincí, resp. hrací kostkou a počítáme, kolikrát se v serii hodů objeví rub, resp. padne šestka. Jevové pole obsahuje prvky $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.

   • Konáme serii n nezávislých náhodných pokusů a sledujeme kolikrát nastal jako výsledek daný náhodný jev.

5. Loterie obsahuje N losů a z nich M vyhrává. Zakoupíme n losů a sledujeme na kolik ze zakoupených losů vyhrajeme. Jevové pole $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \ldots, min\{n, M\}\}$. Musí platit $0 \leq n \leq N,\ 0 \leq M \leq N$.

   • Máme množinu N prvků a z nich M má sledovanou vlastnost. Náhodně vybereme skupinu n prvků. Ptáme se kolik prvků z vybrané skupiny má sledovanou vlastnost.

6. Náhodně volíme číslo z intervalu $(0, 1)$.

   $\mathscr{S} = \{x;\ 0 < x < 1\}$.

7. Jdeme náhodně na tramvaj a sledujeme dobu čekání.

   V některých případech není výsledkem náhodného pokusu jev, který lze popsat jednou veličinou, číslem, ale máme situace je taková, že výsledek má vektorový charakter.

8. Házíme dvěma hracími kostkami a sledujeme počet ok. Jevové pole má charakter uspořádaných dvojic,

   $\mathscr{S} = \{(i, j);\ 1 \leq i, j \leq 6\}$.

Struktura jevového pole. Operace s jevy.

Struktura jevového pole je tzv. Booleova algebra, přesněji Booleova $\sigma-$ algebra.

2.4. Definice: Jev jistý a jev nemožný. Jev *jistý* je náhodný jev $U \in \mathscr{S}$, který vždy nastane. Jev *nemožný,* je náhodný jev
$V \in \mathscr{S}$, který nikdy nenastane. ■

2.5. Definice: Jevy opačné. *Opačným jevem* k jevu $A \in \mathscr{S}$ nazýváme náhodný jev $\overline{A} = -A \in \mathscr{S}$, který nastane vždy, když nenastane jev A. ■

2.6. Věta: Je $\overline{U} = V,\ \overline{V} = U$ a $\overline{(\overline{A})} = A$. ■

2.7. Definice: Implikace. Náhodný jev $A \in \mathscr{S}$ *má za následek* náhodný jev $B \in \mathscr{S}$, jestliže jev B nastane, kdykoliv nastane jev A. Zapisujeme $A \subset B$. ■

2.8. Věta: Je vždy $V \subset A \subset U,\ A \in \mathscr{S}$. ■

2.9. Definice: Rovnost náhodných jevů. Náhodné jevy A, $B \in \mathscr{S}$ se *rovnají* jestliže je $A \subset B$ a $B \subset A$. Píšeme pak $A = B$. ■

2.10. Definice: Sjednocení náhodných jevů. Jsou-li A, $B \in \mathscr{S}$ náhodné jevy, pak jejich *sjednocením* nazýváme jev, který nastane právě když nastane jev A nebo jev B. Označujeme jej symbolem $A \cup B$. ■

2.11. Věta: Pro náhodné jevy platí:
$A \cup B = B \cup A; \quad A \cup V = A; \quad A \cup U = U; \quad A \cup \overline{A} = U;$
asociativní zákon
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$ ■

2.12. Poznámka: Asociativní zákon platí pro libovolný systém náhodných jevů a nezáleží na pořadí zápisu. Jsou-li $A_i \in \mathscr{S},\ i \in \alpha$, pak pro jejich sjednocení používáme symbolu $\bigcup\limits_{i \in \alpha} A_i$. ■

2.13. Definice: Průnik náhodných jevů. Jsou-li A, $B \in \mathscr{S}$ náhodné jevy, pak jejich *průnikem* nazýváme jev, který nastane právě když nastanou oba jevy A a B. Tento náhodný jev označujeme symbolem $A \cap B$. ■

2.14. Věta: Pro náhodné jevy platí:
$A \cap B = B \cap A; \quad A \cap V = V; \quad A \cap U = A; \quad A \cap \overline{A} = V;$
asociativní zákon
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$ ■

2.15. Poznámka: Asociativní zákon platí pro libovolný systém náhodných jevů a nezáleží na pořadí zápisu. Jsou-li $A_i \in \mathscr{S},\ i \in \alpha$, pak pro jejich průnik používáme symbolu $\bigcap\limits_{i \in \alpha} A_i$. ■

2.16. Definice: Rozdíl jevů. *Rozdílem* náhodných jevů A, $B \in \mathscr{S}$ nazýváme jev, který nastane právě když nastane jev A a nenastane jev B. Označujeme jej $A - B$. ∎

2.17. Věta: Pro náhodné jevy platí:
$A - B \neq B - A$; $A - V = A$; $U - A = \overline{A}$;
$A - \overline{A} = A$; $A - A = V$;
de Morganovy zákony
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ ∎

Obecně Je-li $\{A_i;\ i \in \alpha\}$ systém náhodnývh jevů, pak

$$A - \bigcup_{i \in \alpha} A_i = \bigcap_{i \in \alpha} (A - A_i); \qquad A - \bigcap_{i \in \alpha} A_i = \bigcup_{i \in \alpha} (A - A_i).$$

2.18. Definice: Disjunktní jevy. Náhodné jevy A, $B \in \mathscr{S}$, které se navzájem vylučují, tj. $A \cap B = V$, nazýváme *disjunktní.* ∎

Poznámka: Nesmíme zaměňovat jevy disjuktní a jevy nezávislé.

2.19. Definice: Elementární jev. Náhodný jev $E \in \mathscr{S}$ nazýváme *elementárním jevem,* jestliže pro každý náhodný je $A \in \mathscr{S}$ je buď $A \cap E = E$, nebo $A \cap E = V$. ∎

Definice pravděpodobnosti.

Poznámka: Je-li $\mathscr{S}$ jevové pole, pak pro jeho prvky, jednotlivé náhodné jevy A zavádíme jejich *pravděpodobnost* $P(A)$ jako míru jejich výskytu.

2.21. Definice: Pravděpodobnost. Je-li $\mathscr{S}$ jevové pole, pak reálnou funkci $P : \mathscr{S} \to \mathbf{R}$ nazýváme *pravděpodobností,* jestliže pro ni platí:
1. Pro každý náhodný jev $A \in \mathscr{S}$ je $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(U) = 1,\ P(V) = 0$.
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
4. $A \cap B = V \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. ∎

2.22. Věta: Klasická definice pravděpodobnosti. Nechť je jevové pole $\mathscr{S}$ generováno systémem elementárních jevů E_i, $1 \leq i \leq n$, takových, že mají stejnou možnost výskytu. Jestliže definujeme funkci P předpisem:

$$P(E_i) = \frac{1}{n},$$

pak je P pravděpodobnost. Potom pro náhodný jev $A \in \mathscr{S}, A = \bigcup_{k=1}^{m} E_{i_k}$ je

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Poznámka: Statistická definice pravděpodobnosti. Konáme náhodný pokus a $m(n)$ je počet výskytu jevu A po n pokusech. Pak definujeme

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(n)}{n}.$$

Poznámka: Vlastnosti pravděpodobnosti jsou shodné s vlastnostmi objemu množin. Z toho vychází tzv. geometrická definice pravděpodobnosti.

2.24. Věta: Geometrická definice pravděpodobnosti. Nechť prvky jevového pole $\mathscr{S}$ odpovídají podmnožinám omezené množiny $U \in \boldsymbol{R}^n$, množina U odpovídá jevu jistému a operace s jevy odpovídají obdobným operacím s množinami. Jestliže si označíme v $n-$rozměrný objem množiny v $\boldsymbol{R}^n$, pak funkce P definovaná předpisem

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(U)}$$

má vlastnosti pravděpodobnosti. Takto definovaná pravděpodobnost se nazývá *geometrická pravděpodobnost.* ∎

Na začátku 20. století uvedl Kolmogorov definici pravděpodobnosti, která všechny předchozí definice v sobě zahrnuje.

2.27. Definice: Booleova $\sigma-$ algebra. Jevové pole $\mathscr{S}$ je $\sigma-algebrou$, jestliže platí:
1. $U \in \mathscr{S},\ V \in \mathscr{S}$.
2. Pro náhodné jevy $A,\ B \in \mathscr{S}$ je $A - B \in \mathscr{S}$.
3. Pro posloupnost (konečnou či spočetnou) posloupnost náhodných jevů A_i je $\bigcup\limits_i A_i \in \mathscr{S}$ a $\bigcap\limits_i A_i \in \mathscr{S}$. ∎

2.28. Definice: Axiomatická definice pravděpodobnosti. Je-li $\mathscr{S}$ jevové pole, které je $\sigma-$algebrou, pak *pravděpodobnost* na jevovém poli $\mathscr{S}$ je reálná funkce, pro kterou platí:
1. Pro každý náhodný jev $A \in \mathscr{S}$ je
$0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(U) = 1$.
3. Pro disjunktní náhodné jevy $A,\ B \in \mathscr{S}$,
$(A \cap B = V)$, je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. ∎

2.29. Věta: Vlastnosti pravděpodobnosti. Pravděpodobnost P na jevovém poli $\mathscr{S}$ má tyto vlastnosti:
4. Je-li $A,\ B \in \mathscr{S}$ a $A \subset B$, pak $P(A) \leq P(B)$. (Monotonie pravděpodobnosti.)
5. Je-li $A,\ B \in \mathscr{S}$ a $A \subset B$, pak
$P(B - A) = P(B) - P(A)$.
6. Pro náhodný jev $A \in \mathscr{S}$ je $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Speciálně $P(V) = 0$.
7. Pro náhodné jevy $A,\ B \in \mathscr{S}$ je
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
8. Pro posloupnost (konečnou či spočetnou) po dvou disjunktních jevů $A_i \in \mathscr{S}, 1 \leq i, j$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = V$, pak

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i).$$

($\sigma-$aditivita.)
9. Jestliže pro posloupnost náhodných jevů $A_i \in \mathscr{S},\ i \in \mathbf{N}$ platí $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$, pak $P(\bigcup\limits_i A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} P(A_i)$. (Spojitost zdola.)
10. Jestliže pro posloupnost náhodných jevů $A_i \in \mathscr{S},\ i \in \mathbf{N}$ platí $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$, pak $P(\bigcap\limits_i A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} P(A_i)$. (Spojitost shora.) ∎