

ČVUT v Praze – fakulta elektrotechnická  
Katedra ekonomiky, manažerství a humanitních věd

# **Finanční matematika, úrokový počet**

Ekonomika podnikání – X16EPD

# Teze přednášky

- Typy úročení
- Jednoduché úročení
- Složené úročení
- Střadatel, zásobitel a anuita (předlhůtní a polhůtní)
- RPSN

# Typy úročení

- jednoduché
- Složené – úročí se vklad i úroky předchozích období
- polhůtní (dekursivní)
  - úroky se platí na konci období
- předlhůtní (anticipativní)
  - úroky se platí na začátku období

# Jednoduché úročení

- výpočet úroku
  - počet dní
    - ACT (skutečný)
    - 30E (celé měsíce jsou 30 dní)
    - 30A (poslední měsíc může mít 31)
  - délka roku
    - 365 (366 v přestupném)
    - 360
- ACT/365
- ACT/360
- 30/360

# Jednoduché úročení polhůtní

$$I = \frac{K \cdot i \cdot t}{360}$$

■ úrok

■ úmor

■ splátka

■ úrokové číslo

■ úrokový dělitel

$$UC = K \cdot t$$

$$UD = \frac{360}{i}$$

$$I = \frac{\sum_{j=1}^n UC_j}{UD}$$

## ROK360


Vrátí počet dní mezi dvěma daty na základě roku o 360 dnech (dvanáct měsíců po 30 dnech), který se používá při některých výpočtech v účetnictví. Pomocí této funkce můžete počítat splátky, pokud je váš systém pro účetnictví založen na dvanácti měsících o 30 dnech.

**Syntaxe** ROK360(start;konec;metoda)

Argument metoda je logická hodnota, která udává, zda má být při výpočtu použita evropská metoda (PRAVDA 30E) nebo metoda pro USA (NEPRAVDA, vynecháno, 30A).

### Příklad - výpočet úroků podle různých standardů

				Počet dní		Úrok podle standardů		
Vklad v Kč	Úroková sazba	Den vkladu	Den výběru	ACT	30E	ACT/360	ACT/365	30E/360
10 000 Kč	10%	15.01.2005	07.09.2005	235	232	652.8	643.8	644.4
10 000 Kč	10%	10.01.2005	03.03.2005	52	53	144.4	142.5	147.2
10 000 Kč	10%	15.11.2005	01.03.2006	106	106	294.4	290.4	294.4



# Použití

- výpočet úroku z krátkodobého úvěru
- výpočet penále z faktury
- výpočet stavu vkladu za dané období
- inverzní výpočty
  - počáteční kapitál
  - doba splatnosti
  - úroková sazba
- časové porovnání hodnotových toků

Příklad:

Je pro Vás výhodnější zaplatit za koupi dárku hned 50 000,- Kč nebo zaplatit za rok částku 54 000,- Kč?

Peníze jste schopni investovat s výnosem 7,2% p.a.

Řešení:

1. Výpočet současné hodnoty  $54000 / 1,072 = 50\,373$  Kč

2. Výpočet budoucí hodnoty  $50000 * 1,072 = 53\,600$  Kč



# Spoření

- ukládání konstantní částky  $m$ -krát ročně
- částky jsou jednoduše úročeny
- předlhůtní
- kolik je celkem uspořeno za rok?

pořadí	doba	úrok
1	$m$	$i \cdot \frac{m}{m}$
2	$(m-1)$	$i \cdot \frac{(m-1)}{m}$
$m$	1	$i \cdot \frac{1}{m}$

# Spořeni

$$u = \frac{i}{m} \cdot (m + (m-1) + (m-2) + \dots + 1) =$$

$$= \frac{i}{m} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{m+1}{2} \cdot i$$

pořadí	doba	úrok
1	$m$	$i \cdot \frac{m}{m}$
2	$(m-1)$	$i \cdot \frac{(m-1)}{m}$
$m$	1	$i \cdot \frac{1}{m}$

# Střadatel (předlhůtní)

- celková naspořená částka při pravidelném ukládání jedné koruny  $m$ -krát za rok:

$$S = m + \frac{m+1}{2} \cdot i$$

- celková naspořená částka při pravidelném ukládání  $x$  korun za rok:

$$x \cdot S = x \cdot \left( m + \frac{m+1}{2} \cdot i \right)$$

# Střadatel polhůtní

- částka je ukládána na konci období, potom je první období jen  $m-1$ , druhé  $m-2$ , ... a poslední je 0

$$S = m + \frac{m-1}{2} \cdot i$$

# Složené úročení polhůtní

- předpokládejme roční úrokové období
- sledované období je celé kladné číslo

$$PV = \frac{FV_t}{(1+i)^t} = FV_t \cdot (1+i)^{-t}$$

$$FV = PV \cdot (1+i)^t$$

# Zkracování úrokového období

- předpokládejme roční úrokovou míru  $i$
- připisování úroků
  - p.a.
  - p.s.
  - p.m.
  - ...
  - obecně  $m$ -krát za rok
- efektivní úroková sazba

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$1 + i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

sazba	$i_e$
10% p.a.	10%
10% p.s.	10,25%
10% p.q.	10,38%
10% p.m.	10,47%

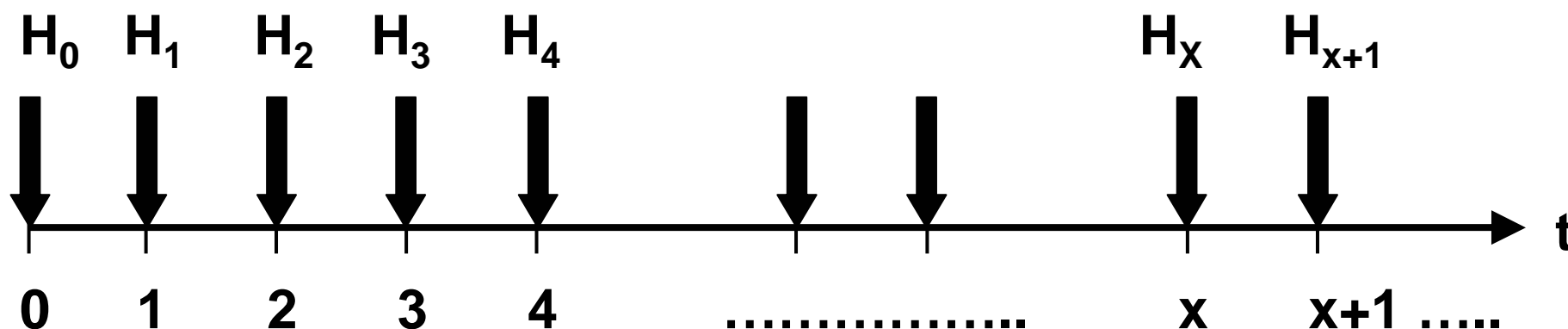
# Kombinované úlohy

- úročení během roku jednoduše, mezi roky složeně
- odvod'te si sami příslušné vzorce 😊
- např. doba splatnosti, výpočet úroku pro známé toky, porovnání různých způsobů plateb, atd.

# Zásobitel pro řadu na počátku roku (předlhůtní)

Cílem je určit současnou hodnotu nekonečné řady konstantních částek vynaložených na počátku roku:

$$H_0 = H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \dots = H_x = H_{x+1} = \dots = H$$





# Zásobitel pro řadu na počátku roku (předlhůtní)

$$PV(H_0) = H_0 = H$$

$$PV(H_1) = \frac{H_1}{1+i} = H \cdot q^{-1}$$

$$PV(H_x) = \frac{H_x}{(1+i)^x} = H \cdot q^{-x}$$

$$PV = H + H \cdot q^{-1} + H \cdot q^{-2} + \dots + H \cdot q^{-x} + \dots$$

Zásobitel pro řadu na počátku roku  
(předlhůtní)

$$PV = H \cdot (1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-x} + \dots) = \\ = H \cdot \textit{zásobitel} = H \cdot Z_{\infty}$$


$$Z_{\infty} = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-x} + \dots$$

$$Z_{\infty} = \frac{1 + i}{i}$$

# zásobitel a střadatel

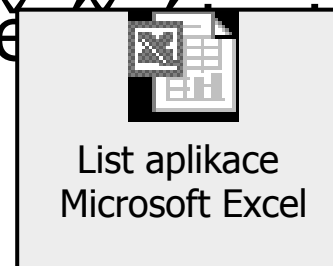
- zásobitel předlhůtní
  - za období  $T$  let
- zásobitel polhůtní
- střadatel předlhůtní (spoření dlouhodobé)
  - vztah mezi zásobitelem a střadatelem
- střadatel polhůtní
- poměrná anuita, důchod, pravidelná platba
  - anuitní úmor
  - anuitní úrok
  - splácení úvěru apod.

# Příklad penzijního agenta

- Agent penzijního fondu Staříci, a. s., Vám nabízí následující:
- Budete spořit následujících 40 (Sic!) let měsíčně 1000 Kč
- Měsíčně Vám vyplatíme 5 000 Kč až do Vašich 100 let!
- Nyní je Vám 25 let. Umíte peníze zhodnotit 5% p. a.
-  nabídku agenta nebo jej pošlete na pivo?

# Řešení agenta pf

- Spočítáme hodnotu vkladů na konci každého roku (předlůžtní střadatel pro jednoduché úročení)
- Spočítáme hodnotu pravidelných úložek dle 1. za dobu 40 let (polhůtní střadatel složeného úročení)
- Vypočítáme anuitu (důchod) za dobu 35 let (složené úročení).
- Anuitu převedeme na měsíční splátky (jednoduché úročení).



# Použití sřadatele, zásobitele a anuity

- výpočet uspořené částky na konci období
- výpočet potřebné částky na počátku období
- výpočet splátek dluhu
- „průměr“ toku hotovosti (roční ekvivalentní hodnota)
- výpočty NPV

# RPSN

Výpočet **roční procentní sazby nákladů** na spotřebitelský úvěr  
Takto to najdete v zákoně:

Roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr se vypočítá podle následujícího vzorce

$$\frac{K = m \quad AK}{\text{suma} \quad \text{-----}} = \frac{K' = m' \quad A'K'}{\text{suma} \quad \text{-----}}$$
$$K = 1 \quad (1+i) \quad tK \quad \quad K' = 1 \quad (1+i) \quad tK'$$

Význam písmen a symbolů:

K je pořadové číslo půjčky téže osoby

K je číslo splátky

AK je výše půjčky číslo K

A'K' je výše splátky číslo K'

suma značí celkový souhrn

m je číslo poslední půjčky

m' je číslo poslední splátky

tK je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky č. 1 do dnů následných půjček č. 2 až m

# RPSN

- $tK'$  je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky č. 1 do dnů splátek nebo úhrad poplatků č. 1 až  $m'$
- i je hledaná roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr, kterou je možno vypočítat (buď algebraicky nebo numericky opakovanými aproximacemi na počítači), jestliže jsou hodnoty ostatních veličin rovnice známy buď ze smlouvy nebo odjinud.

Poznámky:

- a) Částky hrazené oběma smluvními stranami v různých dobách nemusí být nutně stejné a nemusí být nutně hrazeny ve stejných intervalech.
- b) Počátečním dnem je den první půjčky.
- c) Intervaly mezi daty použitými při výpočtu se vyjadřují počtem roků nebo zlomky roku. Pro délku roku se používá 365 dnů nebo 365,25 dne nebo (v přestupných letech) 366 dnů, 52 týdnů nebo 12 měsíců stejné délky. Pro průměrnou délku tohoto měsíce se předpokládá 30,41666 dnů (tj.  $365/12$ ).



# Otázky k zamyšlení

- Jak porovnáte různodobé hodnotové toky? (jednoduché nebo složené úročení)
- Je půjčka s úrokem 12%, ale s RPSN 28,5% výhodnější než leasing s RPSN 15%, a proč?
- Co znamená anuitní splácení úvěru a je výhodnější než rovnoměrné splácení?
- Jak zjistíte výslednou uspořenou částku při pravidelných vkladech?

# Literatura

- Dvořák, P. – Radová, J. – Málek, J.: Finanční matematika pro každého, Grada, 2005
- Rektorys, K. a kol.: Přehled užité matematiky, SNTL, 1981
- Cipra, T.: Finanční a pojistné vzorce, Grada 2006