5. Náhodná veličina

Poznámka: Pro vytvoření matematického modelu náhodného pokusu přejdeme od jeho fyzikální reality k číselnému ohodnocení výsledků. Tímto matematickým modelem je t.zv. *náhodná veličina,* zhruba řečeno „reálná funkce," která nabývá „náhodných hodnot." Její hodnoty odpovídají číselnému ohodnocení jednotlivých výsledků - náhodných jevů.

5.1. Příklad:

1. Házíme mincí a sledujeme horní stranu.

   Náhodná veličina, která odpovídá pokusu má dvě hodnoty 0 a 1. Přiřadíme třeba rubu 0 a líci 1.

   Je vidět, že stejné schema pro pravděpodobnost má každý dvouhodnotový náhodný pokus.

2. Házíme hrací kostkou dokud nepadne šestka.

   Náhodná veličina nabývá hodnot z posloupnosti $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

3. Opakujeme pokus a sledujeme výskyt daného jevu v serii určitého počtu pokusů.

   Náhodná veličina nabývá hodnot $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ kde n je počet opakování. (Bernoulliho schema.)

4. Náhodně volíme bod v intervalu $(0, 1)$.

   Náhodná veličina je souřadnice vybraného bodu.

5.2. Definice: Náhodná veličina. Nechť $\mathscr{S}$ je jevové pole, $U \in \mathscr{S}$ je jev jistý a P je pravděpodobnost na jevovém poli $\mathscr{S}$. Reálnou funkci $X : U \to \boldsymbol{R}$, pro kterou je množina

$$\{E;\ E \subset U,\ X(E) \leq x\} \in \mathscr{S}$$

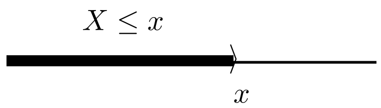
pro každou hodnotu $x \in \boldsymbol{R}$ nazýváme *náhodnou veličinou.*

Úmluva značení: V dalším textu budeme náhodnou veličinu označovat velkými písmeny např. $X,\ Y,\ Z,\ S,\ T,\ R_i,$ ale nebudeme zatím používat písmena U a V, která jsou rezervována pro jistý a nemožný jev.

5.3. Definice: Distribuční funkce. Je-li X náhodná veličina na pravděpodobnostním poli $(U, \mathscr{S}, P)$, pak její *distribuční funkcí* nazýváme reálnou funkci reálné proměnné
$F: \ \boldsymbol{R} \to \langle 0, 1\rangle$, která je definována předpisem

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Poznámka: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny jsou pravděpodobnosti náhodných jevů, které jsou znázorněny na obrázku Obr. 5.1.



Obr. 5.1.

Distribuční funkce náhodných veličin budeme obvykle značit velkými písmeny, např. $F,\ G,\ H, \Phi$ a pod.

5.4. Věta: Vlastnosti distribuční funkce. Pro distribuční funkci F náhodné veličiny X platí;
a) Pro všechny hodnoty $x \in \boldsymbol{R}$ je $0 \leq F(x) \leq 1$.
b) Funkce F je neklesající, je spojitá zprava v $\boldsymbol{R}$ a
$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$
c) Pro $x_1 < x_2$ je $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
d) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.
e) $P(X > x) = 1 - F(x),\ P(X < x) = F(x-),\ P(X \geq x) = 1 - F(x-)$.
f) Pro $x_1 < x_2$ je

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-),\ P(x_1 < X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1),$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1-).$$

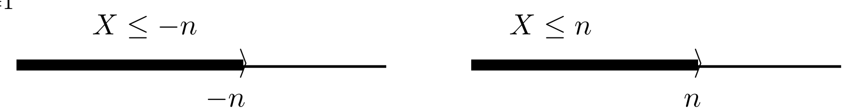
Důkaz: a) Každá hodnota funkce F je pravděpodobnost nějakého náhodného jevu.

b) $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R},\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow (X \leq x_1) \subset (X \leq x_2)$, tedy $F(x_1) = P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2) = F(x_2)$. Funkce F je tudíž neklesající v $\boldsymbol{R}$.

Spojitost zprava: Je-li $\{x_n;\ n \in \boldsymbol{N}\}$ klesající posloupnost a $x_n \searrow x$ pak náhodné jevy $(X \leq x_n)$ tvoří klesající posloupnost a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq x_n) = (X \leq x)$. Ze spojitosti pravděpodobnosti (věta 2.29) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = P(X \leq x) = F(x).$$

Limity funkce F v bodech $\pm\infty$. Pro $n \in \boldsymbol{N}$ je:
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq -n) = V$ a posloupnost jevů je klesající;
$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq n) = U$ a posloupnost jevů je rostoucí. Viz obrázek Obr. 5.2.



Obr. 5.2.

Ze spojitosti pravděpodobnosti (věta 2.29) dostaneme:

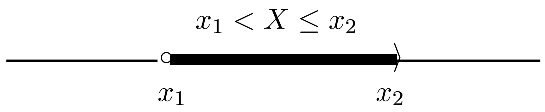
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq -n) = P(V) = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq n) = P(U) = 1.$$

c) Je-li $x_1 < x_2$, pak pro náhodné jevy platí:
$(X \leq x_1) \subset (X \leq x_2)$ a $(X \leq x_2) - (X \leq x_1) = (x_1 < X \leq x_2)$, tedy

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

Situace je znázorněna na obrázku Obr. 5.3.



Obr. 5.3.

d) Je-li $x \in \boldsymbol{R}$ a $\{x_n; n \in \boldsymbol{N}\}$ je rostoucí posloupnost taková, že $x_n \nearrow x$, pak je posloupnost náhodných jevů $(x_n < X \le x)$ klesající a její průnik $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(x_n < X \le x) = (X = x)$. Ze spojitosti pravděpodobnosti (věta 2.29) dostaneme

$$P(X = x) = \lim_{n\to\infty} P(x_n < X \le x) = \lim_{n\to\infty}(F(x) - F(x_n)) = F(x) - F(x-).$$

e) Náhodné jevy $(X > x)$ a $(X \le x)$ jsou opačné. Je tedy

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x).$$

Další vlastnosti dokážeme pomocí vlastností c) a d). Je totiž:

$$P(X < x) = P(X \le x) - P(X = x) = F(x) - (F(x) - F(x-)) = F(x-);$$

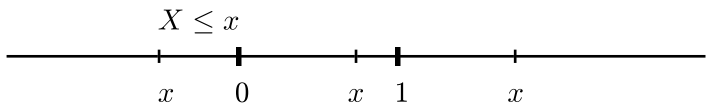
$$P(X \ge x) = P(X > x) + P(X = x) = 1 - F(x) + F(x) - F(x-) = 1 - F(x-).$$

f) Obdobně pomocí vlastností c), d) a e) dokážeme zbývající identity. Je pro $x_1 < x_2$:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) + P(X = x_1) =$$
$$= F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_1-) = F(x_2) - F(x_1-);$$
$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) - P(X = x_2) =$$
$$= F(x_2) - F(x_1) - (F(x_2) - F(x_2-)) = F(x_2-) - F(x_1);$$
$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) + P(X = x_1) - P(X = x_2) =$$
$$= F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_1-) - (F(x_2) - F(x_2-)) = F(x_2-) - F(x_1-).$$

5.5. Příklad: Alternativní rozdělení. Konáme náhodný pokus, ve kterém náhodný jev A nastává s pravděpodobností $P(A) = p$, $0 < p < 1$. Náhodná veličina X nabývá hodnoty 0, jestliže náhodný jev A nenastane a nabývá hodnoty 1, jestliže náhodný jev A nastane. Určete její distribuční funkci.

Řešení: Definice distribuční funkce je $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Vzhledem k tomu, že náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $\{0, 1\}$, bude se hodnota funkce F měnit pouze v bodech 0 a 1.



Obr. 5.4.

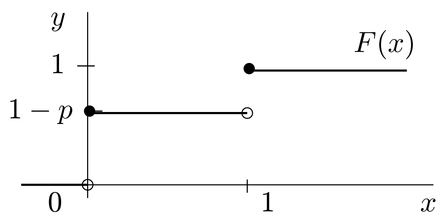
Postupně dostaneme:

$x < 0:$ $F(x) = P(X \leq x < 0) = P(V) = 0$, neboť X nemůže nabývat záporných hodnot;

$0 \leq x < 1:$ $F(x) = P(X \leq x < 1) = P(X = 0) = 1 - p$, protože uvedenou podmínku splní pouze hodnota $X = 0$;

$x \geq 1:$ $F(x) = P(X \leq x) = P(X \in \{0, 1\}) = P(X = 0 \cup X = 1) =$
$= P(X = 0) + P(X = 1) = 1 - p + p = 1$, podmínku splní obě hodnoty 0 a 1 a tyto hodnoty se navzájem vylučují.

Průběh funkce je znázorněn na obrázku Obr. 5.5.



Obr. 5.5.

5.6. Příklad: Binomické rozdělení. Konáme $n-$ krát náhodný pokus, ve kterém nastává náhodný jev A s pravděpodobností

$P(A) = p,\ 0 < p < 1$. Náhodná veličina X je počet výskytů náhodného jevu A v serii n pokusů.

Řešení: Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Její distribuční funkce bude mít podobný charakter jako v příkladě 5.5. Funkce bude po úsecích konstantní, skoky bude mít v bodech $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n$. Je tedy:
$x < 0: \ F(x) = P(X \le x < 0) = 0;$
$0 \le x < 1: \ F(x) = P(X \le x) = P(X = 0) = (1-p)^n;$
$1 \le x < 2: \ F(x) = P(X \le x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
$= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1};$
v každém z dalších intervalů tvaru $k \le x < k+1,\ k < n$, přidáme k předchozí hodnotě další pravděpodobnost $P_n(k) = P(X = k)$ z Bernoulliho schematu z věty 4.2;
pro $x \ge n$ je $F(x) = 1$, neboť podmínce $(X \le x)$ vyhovují všechny možné hodnoty náhodné veličiny X.

5.7. Definice: Binomické rozdělení. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny z příkladu 5.6 se nazývá *binomické rozdělení* a budeme jej značit symbolem $Bi(n;p)$. Poznamenejme, že rozdělení $Bi(1;p)$ je alternativní rozdělení z příkladu 5.5.

5.8. Příklad: Geometrické rozdělení. Provádíme náhodný pokus, ve kterém nastává náhodný jev A s pravděpodobností $P(A) = p$, $0 < p < 1$, dokud nenastane náhodný jev A. Náhodná veličina X je počet provedených pokusů.

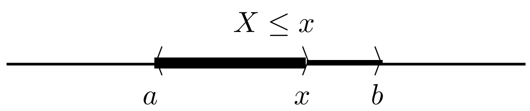
Řešení: Náhodná veličina nabývá hodnot z množiny přirozených čísel $X \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Distribuční funkce bude obdobně jako v příkladech 5.5 a 6 po úsecích konstantní a bude mít skoky v bodech 1, 2, 3, ... Pro její hodnoty dostaneme:
$x < 1: \ F(x) = P(X \le x < 1) = 0$, neboť 1 je nejmenší hodnotou náhodné veličiny X;
$1 \le x < 2: \ F(x) = P(X \le x) = P(X = 1) = p$, neboť náhodná veličina nabývá hodnoty 1, jestliže v prvním pokusu nastane jev A;
$2 \le x < 3: \ F(x) = P(X \le X) = P(X \le 2) = P(X = 1 \cup X = 2) =$

$= P(X = 1) + P(X = 2) = p + p(1-p)$, neboť $X = 2$ pokud jev A nastane až ve druhém pokusu, tedy poprvé nenastane a podruhé nastane;
$n \leq x < n+1: \; F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq n) =$
$= P(X \in \{1, 2, \ldots, n\}) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = n) =$
$= p + p(1-p) + \ldots + p(1-p)^{n-1} = p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^n$, jestliže použijeme vzorec pro částečný součet geometrické řady s kvocientem $(1-p)$.

5.9. Příklad: Rovnoměrné rozdělení (spojité). Volíme náhodně bod v intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že je každá volba stejně pravděpodobná. Náhodná veličina X se rovná souřadnici x zvoleného bodu. Určete distribuční funkci dané náhodné veličiny.

Řešení: Ze zadání vyplývá, že náhodná veličina X nabývá pouze hodnot z intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro hodnoty její distribuční funkce dostaneme:
$x < a: \; F(x) = P(X \leq x < a) = 0$, neboť a je nejmenší hodnotou náhodné veličiny X;
$x \geq b: \; F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq b) = P(U) = 1$, neboť každá hodnota náhodné veličiny X je menší nebo rovna b.

Pro určení hodnot distribuční funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ použijeme geometrickou pravděpodobnost z odstavce 2.24. Znázorníme si situaci na obrázku Obr. 5.8.

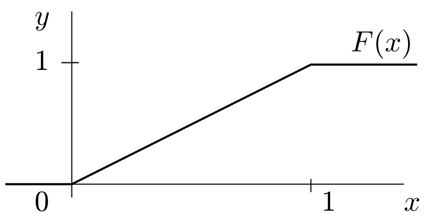


Obr. 5.8.

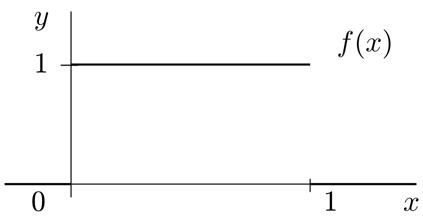
Potom pro $x \in \langle a, b\rangle$ je $P(X \leq x)$ rovna poměru délek úseček $\langle a, x\rangle$ a $\langle a, b\rangle$. Je tedy

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

Na obrázku Obr. 5.9a je znázorněn průběh distribuční funkce F spojitého rovnoměrného rozdělení v intervalu $(0, 1)$ a na obrázku Obr. 5.9b je průběh hustoty f tohoto rozdělení.



Obr. 5.9a



Obr 5.9b

Poznámka: Všimneme si, že v tomto případě je distribuční funkce spojitá v $\boldsymbol{R}$ a lineární v intervalu $\langle a, b\rangle$. Rozdělení uvedeného typu nazýváme *rovnoměrné rozdělení v intervalu* $\langle a, b\rangle$.

Podle vlastnosti d) z věty 5.4 je z důvodu spojitosti funkce F

$$P(X = x) = F(x) - F(x-) = F(x) - F(x) = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Z toho důvodu je lhostejné, zda pro definici náhodné veličiny uvedeného typu zvolíme otevřený či polouzavřený interval.

5.10. Příklad: Smíšené rozdělení. Máme domluvenou schůzku mezi 12 a 13 hodinou. Jdeme náhodně na schůzku a čekáme nejdéle 15 minut. Náhodná veličina X je doba čekání. Určete její distribuční funkci.

Řešení: K řešení úlohy použijeme geometrickou pravděpodobnost. Náhodná veličina X nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \frac{1}{4}\rangle$. Znázorníme si t_1, resp. t_2, okamžik příchodu 1., resp., 2. účastníka schůzky po 12 hodině.

Bod $(t_1, t_2) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ odpovídá nastalé situaci. Náhodnému jevu $(X \leq x \leq \frac{1}{4})$, který znamená, že se účastníci sejdou za kratší dobu než je $0 \leq x < \frac{1}{4}$, odpovídají body, pro které platí $|t_1 - t_2| \leq x < \frac{1}{4}$. To jsou body pásu kolem diagonály čtverce. Pravděpodobnost $P(X \leq x)$ setkání za dobu menší než x je rovna poměru obsahu pásu a čtverce, tedy

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1 - (1-x)^2}{1} = 2x - x^2, \quad 0 \leq x < \frac{1}{4}.$$

Pro $x < 0$ je $F(x) = P(X \leq x < 0) = 0$ a pro $x \geq \frac{1}{4}$ je $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq \frac{1}{4}) = 1$, neboť déle než čtvrt hodiny nečekáme.

Všimneme si, že distribuční funkce F je spojitá v intervalech $(-\infty, \frac{1}{4})$ a $\langle \frac{1}{4}, \infty)$. V bodě $\frac{1}{4}$ má skok velikosti $P\left(X = \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}-\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0,5625$. Je to pravděpodobnost toho, že jsme se nesetkali. Pravděpodobnost setkání je pak rovna $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0,4375$. ■