

Kapitola 2

Neorientované a orientované grafy

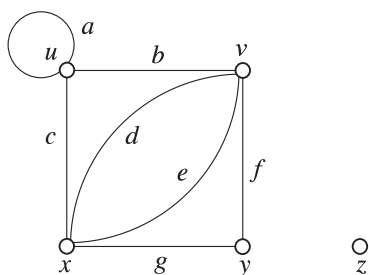
Bez pojmů a postupů teorie grafů si lze informatiku jen stěží představit. Využívání grafů a grafových algoritmů prostupuje nejen teoretické základy oboru, ale tvoří neodmyslitelnou součást i tak prakticky zaměřených oblastí, jakou představují např. programovací techniky nebo počítačové sítě. Formulací nějakého problému v pojmech teorie grafů totiž získáme velmi názorný matematický model, pro který je většinou možné posoudit existenci řešení problému a náročnost jeho výpočtu. Současně dává možnost využít k vlastnímu řešení některého z existujících grafových algoritmů nebo jeho vhodné modifikace.

Náš text se sice věnuje především algoritmickým aspektům grafových problémů, pro jejich aktivní a důkladné osvojení však musí čtenář zvládnout a pochopit řadu nezbytných pojmů. Z těchto důvodů uvádíme v následujících dvou kapitolách nejen přesné definice takových pojmů, ale spolu s nimi i jednoduchá tvrzení ilustrující jejich vzájemné souvislosti.

2.1 Neorientované grafy

V literatuře je možné se setkat s různými způsoby definice pojmu graf. Námi zvolená varianta představuje poměrně obecnou formu definice, takže pro čtenáře nebude obtížné rozpoznat případná omezení nebo odlišnosti, na která může později narazit při použití jiných pramenů.

Definice 2.1: Nechť H, U jsou libovolné disjunktní množiny a $\varrho : H \mapsto U \otimes U^1$ zobrazení. **Neorientovaný grafem** nazýváme uspořádanou trojici $G = \langle H, U, \varrho \rangle$, prvky množiny H jsou **hranami grafu** G , prvky množiny U **uzly grafu** G a zobrazení ϱ **incidencí grafu** G .



Obrázek 2.1: Obecný neorientovaný graf

Role incidence ϱ grafu spočívá v tom, že přiřazuje každé jeho hraně neuspořádanou dvojici uzlů: Je-li $\varrho(h) = [u, v]$, nazýváme uzly u, v **krajními uzly** hrany h , o hraně h říkáme, že **inciduje** s uzly u, v . Zvláštní případ mezi hranami představují tzv. **smyčky**, pro které je $\varrho(h) = [u, u]$ (viz např. hrana a na obr. 2.1). **Izolovaným uzlem** grafu nazýváme takový uzel, s nímž neinciduje žádná hrana (např. uzel z na obr. 2.1).

Je velmi pravděpodobné, že se čtenář setká v literatuře i s definicí grafu, v níž se neuvádí incidence. Za hrany se v takové definici považují přímo neuspořádané dvojice uzlů, ovšem v tom případě nelze rozlišit, a tedy ani zavést, např. dvojici hran d a e z grafu na obr. 2.1. Každá dvojice uzlů pak může určovat pouze jedinou hranu.

Toto omezení nebude na závalu u grafů, v nichž nepřipouštíme existenci tzv. **rovnoběžných hran** (tzn. hran se shodnou množinou krajních uzlů) – takové grafy se nazývají **prosté**.

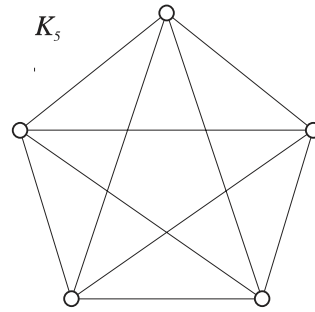
¹ $U \otimes U$ je množina všech neuspořádaných dvojic $[u, v]$, $u, v \in U$ (viz odst. 1.1).

Naopak graf, ve kterém existuje alespoň jedna dvojice rovnoběžných hran, budeme nazývat **multigrafem**. U prostých grafů je tedy možné ztotožnit hrany s odpovídajícími neuspořádanými dvojicemi krajních uzlů – incidence je potom zřejmá a není třeba ji v zápisu prostého grafu uvádět. Z tohoto důvodu budeme v našem textu popisovat prosté grafy většinou pouze pomocí jejich množiny hran a množiny uzlů.

Další druh grafů lze získat tak, že zakážeme existenci smyček – prosté grafy bez smyček budeme nazývat **obyčejnými grafy**. Některá tvrzení, která dále v textu uvedeme, dokážeme v jejich klasické podobě jen pro obyčejné grafy. Případné zobecnění lze většinou získat jednoduchou úpravou tvrzení nebo důkazu, a ponecháme je tedy jako cvičení čtenáři. Zavedeme nyní ještě zvláštní názvy a označení pro určité speciální druhy grafů.

Definice 2.2: Úplným grafem nazýváme obyčejný graf $K_U = (\binom{U}{2}, U)$; pro n přirozené bude K_n označovat úplný graf o n uzlech. Prázdným grafem nazýváme graf $D_\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$ (nemůže-li dojít k omylu, zapisujeme prázdný graf přímo též jako \emptyset). Diskrétním grafem nazýváme graf $D_U = (\emptyset, U)$; pro n přirozené bude D_n označovat diskrétní graf o n uzlech (diskrétní graf se skládá pouze z izolovaných uzlů).

Každý úplný graf o n uzlech má právě $\binom{n}{2}$ hran, neboť to je počet různých dvojprvkových podmnožin jeho uzlů, a každé dva různé uzly jsou v něm spojeny hranou (viz graf na obr. 2.2 pro $n = 5$). Přidáním libovolné hrany mezi dvěma různými uzly úplného grafu již tedy nutně dostaneme multigraf. Graf G_1 na obr. 2.3 představuje diskrétní graf o 3 uzlech, grafy G_2, G_3, G_4 mají každý po jednom izolovaném uzlu.



Obrázek 2.2: Úplný graf o pěti uzlech

Definice 2.3: Graf $G' = \langle H', U', \varrho' \rangle$ nazýváme **podgrafem** grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ (zapisujeme $G' \subseteq G$), jestliže platí

$$(H' \subseteq H) \ \& \ (U' \subseteq U) \ \& \ \forall h \in H' (\varrho'(h) = \varrho(h)). \quad (2.1)$$

Podgraf $G' = \langle H', U, \varrho' \rangle$, jehož množina uzlů je shodná s množinou uzlů grafu G , nazýváme **faktorem** (též **hranovým podgrafem**) grafu G .

Odlišný tvar třetí části v podmínce (2.1) vyjadřuje požadavek, aby každá hrana podgrafu incidovala v G' se stejnou dvojicí krajních uzlů jako ve výchozím grafu G (ϱ' je zúžením zobrazení ϱ na množinu H').

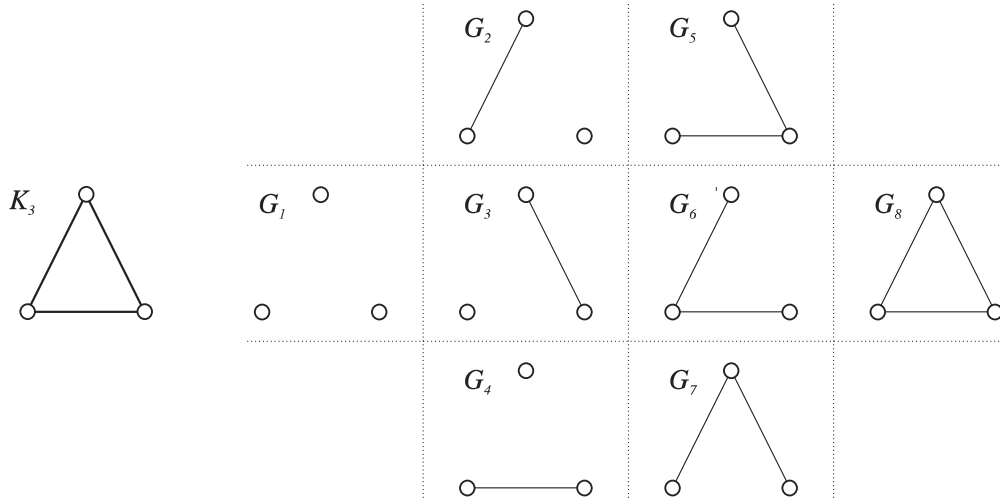
Faktory téhož grafu se mohou lišit nejen mohutností, ale i složením podmnožiny hran. Na obr. 2.3 ukazujeme všechny faktory úplného grafu o třech uzlech. Faktory, popř. obecnější podgrafy daného grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ lze též určit nějakou podmínkou – říkáme, že jsou **indukovány** danou podmínkou. Jako **podgraf určený podmnožinou uzlů** $U_1 \subseteq U$ definujeme podgraf G_1 obsahující pouze hrany, jejichž krajní uzly leží v podmnožině U_1 :

$$G_1 = \langle H_1, U_1, \varrho|_{H_1} \rangle, \text{ kde } H_1 = \{h \in H : \varrho(h) \subseteq U_1\}. \quad (2.2)$$

Podobně můžeme získat **podgraf určený podmnožinou hran** $H_2 \subseteq H$ jako podgraf G_2 obsahující pouze uzly incidující s některou z hran podmnožiny H_2 :

$$G_2 = \langle H_2, U_2, \varrho|_{H_2} \rangle, \text{ kde } U_2 = \bigcup_{h \in H_2} \varrho(h). \quad (2.3)$$

Je rovněž možné získat podgraf daného grafu vypuštěním určité podmnožiny uzlů $U_3 \subseteq U$, resp. podmnožiny hran $H_4 \subseteq H$ jako podgraf určený podmnožinou uzlů $U - U_3$, resp. jako faktor grafu G určený podmnožinou hran $H - H_4$. Podle potřeby budeme někdy i každý jednotlivý uzel



Obrázek 2.3: Faktory grafu

či hranu považovat za podgraf daného grafu, i když se z formálního hlediska jedná o speciální případ podmnožiny uzlů či hran indukující příslušný podgraf.

Tak např. podgraf G_1 na obr. 2.4 je určen podmnožinou uzlů $U_1 = \{u, v, x\}$, podgraf G_2 je určen podmnožinou hran $H_2 = \{a, c, f, g\}$, podgraf G_3 vznikl vypuštěním uzlu x , podgraf G_4 vypuštěním množiny hran $\{c, d, g\}$ (pro jednoduchost jsme vynechali některá označení uzlů a hran v podgrafech na tomto obrázku).

Obdobným způsobem, jako jsme pro grafy zavedli relaci inkluze (tzn. v podstatě po jednotlivých složkách), je možné zavést i operace sjednocení, průniku atd. Je tu však nebezpečí vzniku této situace: hrana h inciduje v grafu G_1 s uzly u a v , v grafu G_2 s uzly x a y . Je zřejmé, že pak prostým sjednocením ani průnikem incidencí ϱ_1, ϱ_2 nevznikne zobrazení. Abychom se takové situaci vyhnuli, vycházíme z předpokladu, že všechny grafy, s nimiž popisované operace provádíme, jsou podgrafy nějakého předem zadaného grafu.

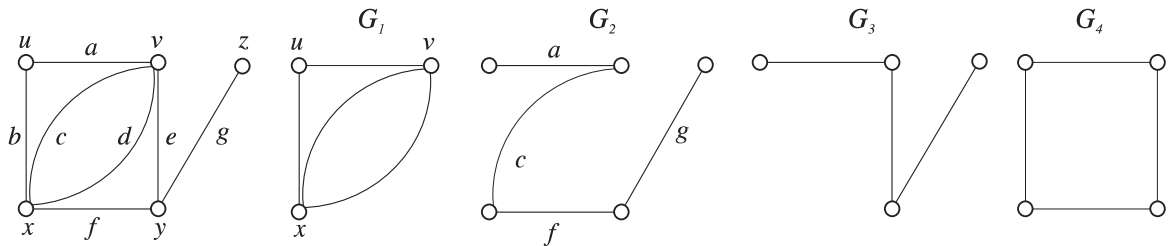
Definice 2.4: Sjednocením, resp. průnikem grafů $G_1 = \langle H_1, U_1, \varrho_1 \rangle$ a $G_2 = \langle H_2, U_2, \varrho_2 \rangle$ nazýváme graf

$$G = \langle H_1 \cup H_2, U_1 \cup U_2, \varrho_1 \cup \varrho_2 \rangle \quad (\text{píšeme } G = G_1 \cup G_2), \text{ resp.} \quad (2.4)$$

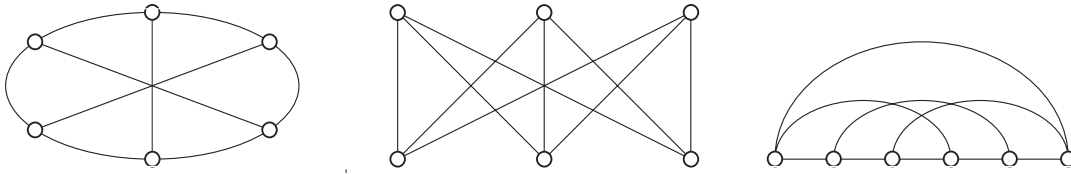
$$G' = \langle H_1 \cap H_2, U_1 \cap U_2, \varrho_1 \cap \varrho_2 \rangle \quad (\text{píšeme } G' = G_1 \cap G_2). \quad (2.5)$$

Dva grafy, jejichž průnikem je prázdný graf, nazýváme **disjunktními grafy**.

Bývá zvykem zavádět ještě tzv. **uzlově** (resp. **hranově**) **disjunktní** grafy požadavkem disjunkce jejich množin uzlů (resp. hran). Je ovšem vidět, že vzhledem k naší úmluvě budou uzlově disjunktní grafy současně i hranově disjunktní, a tedy budou disjunktní i podle def. 2.4. Jejich průnikem je graf s prázdnou množinou uzlů – takovým grafem je pouze prázdný graf.



Obrázek 2.4: Podgrafy indukované podmínkou



Obrázek 2.5: Geometrické znázornění grafu

Definice 2.5: Necht G_1 je podgrafem grafu G . **Rozdílem grafů** G a G_1 (značíme $G - G_1$) nazýváme takový minimální graf $G_2 \subseteq G$, pro který platí $G = G_1 \cup G_2$. **Doplňkem** obyčejného grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ nazýváme graf $-G = K_U - G$, tzn. graf vzniklý odečtením grafu G od úplného grafu s množinou uzlů U .

Rozdíl $G - G_1$ tedy (intuitivně řečeno) neobsahuje nejen žádnou z hran grafu G_1 , ale ani žádné „zbytečné“ uzly. Podmínka $G_1 \subseteq G$ v definici rozdílu není podstatná: v obecném případě zavedeme rozdíl grafů G a G_1 jako $(G \cup G_1) - G_1$.

V tomto textu se omezujeme na studium **konečných grafů**, tzn. grafů s konečnými množinami uzlů i hran. Pro zvýšení stručnosti budeme tedy většinou *grafem* rozumět *konečný neprázdný neorientovaný graf bez smyček a izolovaných uzlů*. Pokud budeme chtít zdůraznit možnost existence smyček a izolovaných uzlů, budeme používat pojmu *obecný graf*, nebo tato skutečnost bude jasná z kontextu.

Již při výkladu základních pojmů o grafech jsme několikrát použili grafické vyjádření grafu určitým obrázkem. Je zřejmé, že nakreslením nějakého obrázku (diagramu) dostávají abstraktní množiny H a U zcela konkrétní vyjádření: Každému uzlu je přiřazen určitý bod v rovině (pro zvýraznění je tento bod vyznačen kroužkem), hrany jsou vyjádřeny souvislými prostými oblouky (např. úsečkami) spojujícími příslušné dvojice bodů. Je ovšem jasné, že i pro tak jednoduchý graf, jaký uvádíme na obr. 2.5, lze vytvořit znázornění natolik odlišná, že na první pohled není vidět jejich společný původ. Na druhé straně grafy, které jsou z formálního hlediska různé (mají např. disjunktní množiny uzlů i hran), mohou jít znázornit naprosto stejným obrázkem. To vede k definici základního prostředku sloužícího ke srovnávání grafů – izomorfismu grafů.

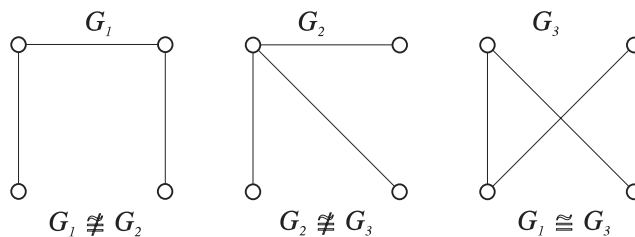
Definice 2.6: Necht $G_1 = \langle H_1, U_1, \varrho_1 \rangle$ a $G_2 = \langle H_2, U_2, \varrho_2 \rangle$ jsou dva grafy a φ bijekce množiny $H_1 \cup U_1$ na množinu $H_2 \cup U_2$ taková, že

- zúžené zobrazení $\varphi|_{H_1}$ je bijekce H_1 na H_2 ($\varphi|_{H_1} : H_1 \leftrightarrow H_2$)
- zúžené zobrazení $\varphi|_{U_1}$ je bijekce U_1 na U_2 ($\varphi|_{U_1} : U_1 \leftrightarrow U_2$)
- φ zachovává incidenci, tzn. pro libovolné $h \in H$ platí

$$\varrho_1(h) = [u, v] \quad \Rightarrow \quad \varrho_2(\varphi(h)) = [\varphi(u), \varphi(v)]. \quad (2.6)$$

Zobrazení φ se pak nazývá **izomorfismus** mezi grafy G_1 a G_2 a grafy G_1, G_2 , pro které tento izomorfismus lze nalézt, se nazývají **izomorfní grafy** (zapisujeme $G_1 \cong G_2$).

V souvislosti s pojmem izomorfismu vzniká otázka, jak pro dva zadané grafy zjistit, zda jsou či nejsou izomorfní. Je zřejmé, že velmi slabá nutná podmínka izomorfismu grafů spočívá ve stejné mohutnosti jejich množin hran a stejné mohutnosti jejich množin uzlů. Na obr. 2.6 ukazujeme dvojice G_1, G_2 a G_2, G_3 neizomorfních grafů, které tuto podmínku splňují.



Obrázek 2.6: Izomorfismus grafů

V dalším textu uvedeme ještě několik silnějších nutných podmínek izomorfismu dvou grafů. Tyto podmínky někdy umožňují rychle určit, že zadané grafy izomorfní nejsou, avšak jejich splnění ještě izomorfismus nezaručuje. Definitivní zjištění izomorfismu lze teoreticky provést prověřením všech možných bijekcí mezi množinami uzlů, tento postup je však pro rozsáhlejší grafy prakticky nepoužitelný. Existují ovšem speciální druhy grafů, kde lze o izomorfismu rozhodnout snadněji (např. stromy nebo planární grafy).

Stupeň uzlu

Při zkoumání vlastností grafu je nejjednodušší začít vlastnostmi bezprostředního okolí jednotlivých uzlů a hran. Takové vlastnosti se označují jako **lokální** a jejich základní výhodou je možnost zjistit je fakticky přímo ze zadání grafu. Celková struktura grafu je však vybudována právě na základě vzájemného propojení bezprostředních okolí uzlů, a tak se budeme snažit ukázat nejenom vzájemné vztahy mezi různými druhy lokálních vlastností, ale také vzájemnou podmíněnost lokálních a globálních vlastností grafů.

Definice 2.7: Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je graf, $u \in U$ libovolný uzel a $A \subseteq U$ libovolná podmnožina uzlů. **Množinou sousedů** $\Gamma(u)$ **uzlu** u nazýváme podmnožinu uzlů definovanou vztahem

$$\Gamma(u) = \{v \in U : \exists h \in H(\varrho(h) = [u, v])\}. \quad (2.7)$$

Množinu sousedů $\Gamma(A)$ **podmnožiny** A definujeme vztahem $\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v)$. **Stupněm** $\delta_G(u)$ uzlu u v grafu G nazýváme počet hran s ním incidujících. Symboly $\delta(G)$ a $\Delta(G)$ označujeme minimální, resp. maximální stupeň uzlu v grafu G .

Sousedem uzlu u je tedy každý uzel, k němuž vede z uzlu u hrana. V případě prostého grafu se bude stupeň uzlu rovnat počtu jeho sousedů, připustíme-li multigrafy, bude obecně platit² $|\Gamma(u)| \leq \delta(u)$. Základní sumární vlastnost stupňů uzlů vymezuje jedno z historicky prvních tvrzení teorie grafů, jehož důkaz provedeme indukcí – tedy způsobem, jenž se v teorii grafů velmi často používá.

Věta 2.8: Pro každý graf $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ platí

$$\sum_{u \in U} \delta(u) = 2|H|. \quad (2.8)$$

Důkaz: (indukcí podle počtu hran)

1. Graf tvořený jedinou hranou má pouze dva uzly stupně jedna, takže vztah (2.8) platí.
2. Nechť vztah (2.8) platí pro všechny grafy o $|H| = n$ hranách a nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je graf o $(n+1)$ hranách. Faktor $G' = G - \{h\}$, kde $h \in H$ je libovolná hrana grafu G , obsahuje právě $|H| - 1 = n$ hran. Stupně všech uzlů grafů G a $G - \{h\}$ jsou stejné až na stupně krajních uzlů hrany h , které jsou v grafu $G - \{h\}$ každý o 1 nižší nežli v grafu G . Podle indukčního předpokladu tak dostáváme

$$\sum_{u \in U} \delta(u) - 2 = 2(|H| - 1) \Rightarrow \sum_{u \in U} \delta(u) = 2|H|.$$

Tvrzení tedy platí i pro grafy o $n+1$ hranách. △

Podle naší úmluvy jsme v definici 2.7 i větě 2.8 mlčky předpokládali, že graf G neobsahuje smyčky a izolované uzly. Existence izolovaných uzlů zřejmě nebude v tomto případě vadit – jsou to uzly se stupněm rovným nule a v součtu (2.8) se tedy vůbec neprojeví. Abychom zachovali platnost vztahu (2.8) i pro grafy se smyčkami, musíme doplnit definici stupně pro uzel se smyčkou: budeme předpokládat, že každá smyčka zvětší stupeň o 2.

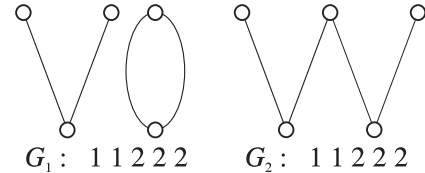
²Index G u stupně uzlu budeme vynechávat, pokud bude jasné, jakého grafu se stupeň týká.

Věta 2.9: Necht G_1 a G_2 jsou dva izomorfní grafy a necht k je libovolné přirozené číslo. Potom grafy G_1 a G_2 obsahují stejný počet uzlů stupně k .

Důkaz: Označme φ izomorfismus grafů G_1 a G_2 . Stačí zřejmě dokázat, že pro všechna $u \in U_1$ je stupeň uzlu u v grafu G_1 stejný jako stupeň uzlu $\varphi(u)$ v G_2 . Izomorfismus φ však zobrazuje bijektivně hrany incidující s uzlem u na hrany incidující s uzlem $\varphi(u)$, takže jejich stupně se rovnají. \triangle

Máme tak možnost vytvořit novou charakteristiku izomorfních grafů: seřadíme-li stupně jednotlivých uzlů do neklesající posloupnosti nazývané **soubor stupňů grafu**, dostaneme pro izomorfní grafy shodné posloupnosti. Opět se jedná pouze o nutnou podmínku izomorfismu – existují i neizomorfní grafy se shodnými soubory stupňů, viz např. grafy na obr. 2.7.

Uvedenou podmínku je možné při systematickém testování izomorfismu využít tak, že uzly v obou grafech rozdělíme do tříd podle stupňů a každý izomorfismus může navzájem přiřazovat pouze uzly z odpovídajících si tříd. Při hledání izomorfismu je tedy možné se omezit jen na bijekce s touto vlastností, a těch bude mnohem méně než všech bijekcí mezi množinami uzlů. Prostřednictvím tzv. **stupňů vyšších řádů**, určujících pro daný uzel počet sousedů daného stupně, je možné nutné podmínky dále zesílit, a tím i zjemnit rozklad uzlů do tříd, což sníží počet prověřovaných bijekcí (viz např. algoritmus uvedený v [23]). Tímto způsobem snadno ověříme neizomorfnost grafů z obr. 2.7, neboť v G_1 neexistuje žádný uzel stupně 2 se dvěma sousedy stupně 2, kdežto v G_2 takový uzel existuje.



Obrázek 2.7: Neizomorfní grafy

Souvislost grafu

Představme si nyní následující procházku po nějakém grafu: vyjdeme z určitého uzlu grafu a po nějaké hraně s ním incidující přejdeme do uzlu sousedního, odtud po další hraně do nového uzlu atd., až se dostaneme k nějakému cílovému uzlu (popř. nazpět do uzlu výchozího). Posloupnosti hran a uzlů, po nichž budeme takto postupně přecházet, hrají v teorii grafů velmi důležitou roli, takže nyní podáme jejich přesnou definici.

Definice 2.10: Necht pro danou dvojici uzlů u a v grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ existuje posloupnost uzlů a hran

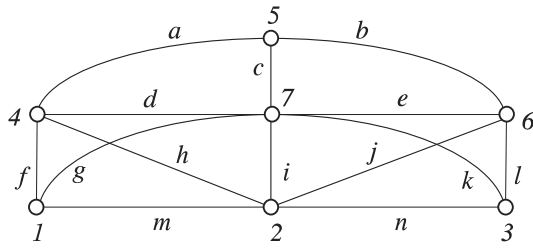
$$S = \langle u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n \rangle \quad (2.9)$$

kde $h_i \in H$, $\varrho(h_i) = [u_{i-1}, u_i]$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, $u_i \in U$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, $u_0 = u, u_n = v$. Pak tuto posloupnost nazýváme **sledem** grafu G mezi uzly u a v . Uzly u, v jsou **krajní uzly** sledu S (u je **počáteční**, v **koncový uzel**), uzly u_1, u_2, \dots, u_{n-1} jsou **vnitřní uzly** sledu S . Číslo $n (\geq 0)$ nazýváme **délkou sledu** S a značíme $d(S)$. Sled s alespoň jednou hranou, v němž jsou uzly u a v shodné, nazýváme **uzavřeným**, ostatní sledy (včetně sledů nulové délky) nazýváme **otevřenými**.

Při určení sledu často stačí zadat pouze příslušnou posloupnost hran $\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$, u prostého grafu můžeme naopak použít posloupnost uzlů $\langle u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$. Pro jednoduchost budeme v této kapitole určovat sled posloupností jeho hran, později použijeme i posloupnosti uzlů. Tak např. pro graf na obr. 2.8 ukazujeme šest různých sledů s krajními uzly 1 a 2. Tyto příklady sledů ukazují jednu důležitou vlastnost: mezi libovolnými dvěma uzly grafu buď neexistuje vůbec žádný nebo nekonečně mnoho různých sledů. Přidáme-li totiž např. dva nové výskyty hrany m ke sledu S_1 , dostaneme opět sled mezi uzly 1 a 2, a takto lze pokračovat libovolně dlouho.

Existenci sledu mezi uzly u a v neorientovaného grafu G vyjadřujeme též stručně zápisem $u \text{ —}_G v$.³ Pokud chceme současně specifikovat i daný sled, budeme psát

³Index G vynecháváme, pokud je z kontextu zřejmé, o jaký graf se jedná.



$$\begin{aligned}
 S_1 &= \langle m \rangle & S_4 &= \langle g, e, l, n \rangle \\
 S_2 &= \langle g, i \rangle & S_5 &= \langle f, d, c, a, h \rangle \\
 S_3 &= \langle g, e, j \rangle & S_6 &= \langle f, a, c, e, l, n \rangle \\
 C &= \langle f, d, i, m \rangle
 \end{aligned}$$

Obrázek 2.8: Sledy v neorientovaném grafu

$$u - v : \langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle .$$

Ze všech možných sledů mezi danými dvěma uzly jsou nejdůležitější takové, které neprocházejí opakovaně žádnou hranou grafu a popř. ani uzlem grafu – pro ně zavedeme zvláštní názvy následující definicí. Mezi nimi můžeme totiž např. hledat ty sledy, které mají nejmenší délku (při pevně zvolené dvojici krajních uzlů). Tak se dostáváme k otázce zavedení vzdálenosti na grafu, které se podrobně věnujeme až v odstavci 3.1.

Definice 2.11: **Tahem grafu** G nazýváme takový jeho sled, v němž jsou všechny hrany různé. **Cestou grafu** G nazýváme takový jeho tah, v němž každý uzel inciduje nejvýše se dvěma hranami tohoto tahu. **Kružnicí** nazýváme uzavřenou cestu.

Tak např. sledy S_1 až S_5 uvedené na obr. 2.8 jsou tahy, sledy S_1 až S_4 jsou dokonce cestami, sled C je kružnicí. V duchu naší interpretace je sled neobsahující žádnou hranu otevřenou cestou (tedy i tahem), ale nikoliv kružnicí.

Pořadí uzlů a hran v libovolném sledu neorientovaného grafu lze samozřejmě obrátit – získáme tak sled, v němž si počáteční a koncový uzel vzájemně vymění místo. Je-li S_1 sled mezi uzly u, v a S_2 sled mezi uzly v, w , pak lze jejich posloupnosti hran (a uzlů) složit, a vytvořit tak nový sled mezi uzly u, w . Výsledek této operace nazýváme **složením sledů** S_1 a S_2 , značíme $S_1 \circ S_2$. S použitím symbolického vyjádření dosažitelnosti uzlů $u - v$ lze účinek složení sledů zapsat také ve tvaru

$$(u - v) \ \& \ (v - w) \quad \Rightarrow \quad u - w ,$$

který vyjadřuje tranzitivnost relace dosažitelnosti.

Je důležité si uvědomit, že ne všechny vlastnosti sledů se přenesou i na jejich složení. Tak např. složením dvou tahů již nemusí vzniknout tah, složení dvou cest již není obecně cestou a ani složením dvou otevřených sledů nemusí vzniknout otevřený sled. Přesto je možné operaci skládání použít např. při hledání cest v grafu, jak vyplývá z následujícího tvrzení.

Věta 2.12: Z každého otevřeného sledu $S = \langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$ mezi uzly u a v neorientovaného grafu lze vybrat cestu spojující tytéž dva uzly.

Důkaz: Je-li S cestou, vybereme všechny hrany. Pokud S není cestou, musí procházet některým ze svých vnitřních uzlů x opakovaně. Potom je ale možné vypustit z S všechny hrany nacházející se mezi prvním a druhým průchodem uzlem x – tak dostaneme sled S o menší délce, který spojuje stále tytéž uzly u a v . Je-li S cestou, jsme hotovi; jinak proces opakujeme od začátku. Po konečném počtu kroků nutně dospějeme k cestě, neboť délka sledu S se stále zmenšuje a sled délky 1 je vždy cestou. \triangle

Věta 2.13: Z uzavřeného sledu S liché délky v neorientovaném grafu lze vybrat kružnici liché délky.

Důkaz: Nechť $S = \langle u_0, h_1, u_1, \dots, h_n, u_n \rangle$ je zadaný sled, kde $u_0 = u_n$, $n > 0$ liché. Je-li S kružnicí, vybereme všechny hrany. Pokud S není kružnicí, musí existovat i, j tak, že

$0 < i < j < n$ a $u_i = u_j$. Potom můžeme S rozložit na dva uzavřené sledy délky menší než n : $S_1 = \langle u_0, h_1, \dots, h_i, u_i, h_{j+1}, \dots, h_n, u_n \rangle$ a $S_2 = \langle u_i, h_{i+1}, \dots, h_j, u_j \rangle$ z nichž právě jeden má lichou délku. Po konečném počtu takových rozkladů dostaneme hledanou kružnici. \triangle

Velmi důležitou vlastností grafů je propojitelnost různých dvojic uzlů pomocí sledů (a podle věty 2.12 tedy pomocí cest). Pro vyjádření této vlastnosti zavedeme pojem souvislosti grafu.

Definice 2.14: **Souvislý grafem** nazýváme takový neorientovaný graf, mezi jehož libovolnými dvěma uzly existuje sled. **Komponentou grafu** nazýváme každý jeho maximální souvislý podgraf.

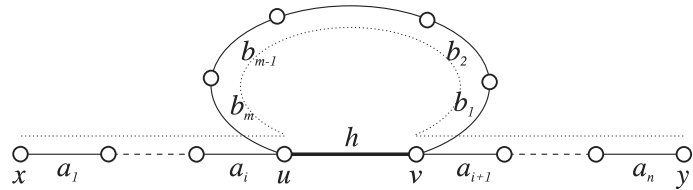
Souvislost grafu je typicky globální vlastností a podle definice by se měla ověřovat hledáním sledů mezi všemi dvojicemi uzlů. Takový postup má ovšem složitost alespoň $\Theta(|U|^3)$ a je z výpočetního hlediska nevhodný. Později uvedeme mnohem efektivnější algoritmus procházení grafu, kterého lze použít ke zjištění souvislosti. Následující tvrzení slouží jako ilustrace, že v některých případech můžeme souvislost odvodit i z ryze lokálních vlastností grafu.

Věta 2.15: Nechť G je obyčejný graf o n uzlech, v němž součet stupňů libovolné dvojice nesousedních uzlů je nejméně roven $n - 1$. Potom je G souvislý.

Důkaz: Postupujeme sporem – nechť G obsahuje alespoň dvě komponenty G_1 a G_2 , které mají n_1 a n_2 uzlů ($n_1 + n_2 \leq n$). Pro libovolné uzly $u \in G_1, v \in G_2$, které jsou nutně nesousední, platí $\delta(u) \leq n_1 - 1, \delta(v) \leq n_2 - 1$ (G neobsahuje rovnoběžné hrany, ani smyčky). Dostáváme tak $\delta(u) + \delta(v) \leq n_1 - 1 + n_2 - 1 \leq n - 2$, což je ve sporu s předpokladem o součtu stupňů. \triangle

Věta 2.16: Buď $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ souvislý graf a nechť $h \in H$ je hrana jisté kružnice C grafu G . Pak graf $G_1 = G - \{h\}$ je souvislým faktorem grafu G .

Důkaz: Označme u, v krajní uzly hrany h . Pak je jak $\delta(u) \geq 2$, tak i $\delta(v) \geq 2$, a uzly u, v musí tedy nutně ležet v grafu G_1 , takže G_1 je skutečně faktorem grafu G . V G_1 zůstanou zachovány všechny sledy grafu G , které neobsahují hranu h . Všimneme si tedy pouze těch sledů, v nichž se hrana h vyskytuje. Nechť $S = \langle a_1, a_2, \dots, a_i, h, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$ je libovolný takový sled s krajními uzly x a y ; kružnici C lze jakožto sled vyjádřit vždy ve tvaru $C = \langle h, b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$, přičemž jak v S , tak v C se u hrany h využívá totéž pořadí uzlů (např. $\langle u, v \rangle$, viz obr. 2.9). Potom je zřejmě $S_1 = \langle a_1, \dots, a_i, b_m, \dots, b_1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$ sledem mezi uzly x a y v grafu G_1 , z čehož vyplývá souvislost grafu G_1 . \triangle



Obrázek 2.9: Vypuštění hrany v kružnici

Věta 2.17: V každém souvislém grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$, kde je $|U| \geq 2$, existují alespoň dva uzly takové, že vypuštěním libovolného z nich vznikne souvislý podgraf grafu G .

Důkaz: V G existuje cesta P_{max} největší délky, neboť délka libovolné cesty je omezena počtem hran $|H|$ (tato maximální cesta však nemusí být jediná). Označíme u, v krajní uzly cesty P_{max} a ukážeme, že jsou to uzly hledaných vlastností. Nechť vypuštěním uzlu u vznikne graf G' tvořený nejméně dvěma komponentami. Označme G_1 komponentu obsahující všechny hrany cesty P_{max} kromě hrany incidující s uzlem u , a G_2 libovolnou ze zbývajících komponent grafu G' . Vzhledem k souvislosti grafu G musí uzel u incidovat rovněž s nějakou hranou $h, \varrho(h) = [u, w]$, jejíž druhý krajní uzel w leží v G_2 . V tom případě by však přidáním hrany h k cestě P_{max} vznikla cesta větší délky, a to je spor s výběrem P_{max} . \triangle

Věta 2.18: Je-li $G = \langle H, U \rangle$ souvislý graf, potom platí

$$|H| \geq |U| - 1 \quad (2.10)$$

Důkaz: (indukcí podle počtu uzlů)

1. Pro souvislý graf tvořený jedním uzlem tvrzení zřejmě platí.
2. Nechť vztah (2.10) platí pro libovolný souvislý graf o n (≥ 1) uzlech. Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ a $|U| = n + 1$. Podle věty 2.17 existuje v G uzel $u \in U$, jehož vypuštěním vznikne souvislý podgraf $G' \subseteq G$ o n uzlech, $G' = \langle H', U', \varrho' \rangle$. Podle indukčního předpokladu máme

$$|H'| \geq |U'| - 1 \Rightarrow |H| - \delta_G(u) \geq (|U| - 1) - 1 \Rightarrow |H| \geq |U| + (\delta_G(u) - 1) - 1 \geq |U| - 1,$$

neboť $\delta_G(u) \geq 1$. \triangle

Vztah (2.10) udává dolní mez počtu hran souvislého grafu o daném počtu uzlů. Horní mez lze zřejmě stanovit pouze u prostých grafů a je dána počtem hran úplného grafu. Zbývá tedy vyšetřit, zda a pro jaké grafy platí ve vztahu (2.10) rovnost. Dokážeme později, že těmito grafy jsou stromy, které zavádí následující definice.

Definice 2.19: **Stromem** nazýváme souvislý graf neobsahující kružnice. **Kostrou grafu** rozumíme takový jeho faktor, který je stromem.

Cvičení

2.1-1. Které z dvojic grafů na obr. 2.10 jsou izomorfní? Pro každou dvojici izomorfních grafů určete počet různých izomorfismů mezi nimi.

2.1-2. Určete vztah mezi relací dosažitelnosti $u \sim v$ a relací sousednosti Γ obecného grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$, kterou definujeme předpisem

$$u \Gamma v \Leftrightarrow_{df} \exists h \in H : \varrho(h) = [u, v].$$

2.1-3. Určete všechny neizomorfní grafy se 4 a 5 uzly (je jich 11, resp. 34).

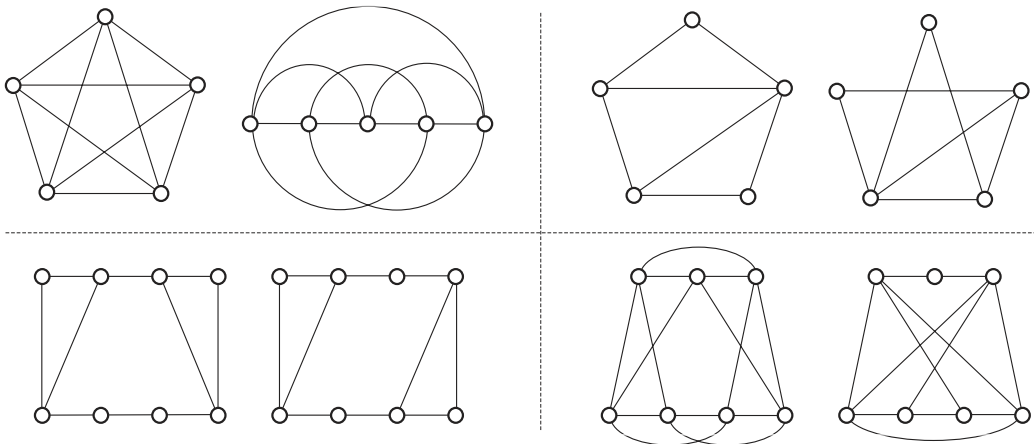
2.1-4. Nechť G je obyčejný graf o pěti uzlech.

- (a) Může G obsahovat současně uzel stupně 0 a uzel stupně 4?
- (b) Má-li G právě dva uzly téhož stupně, může to být stupeň 0 nebo 4?
- (c) Je možné, aby každý uzel v G měl jiný stupeň?

2.1-5. Dokažte, že v libovolném grafu je počet uzlů lichého stupně číslo sudé.

(*Návod:* Použijte vztahu (2.8) a ze součtu na levé straně oddělte liché a sudé stupně uzlů.)

2.1-6. Sedm přátel si před odjezdem na dovolenou slíbilo, že každý pošle pohledy třem ostatním. Může se stát, že každý z nich dostane pohledy právě od těch, kterým sám pohledy poslal?



Obrázek 2.10: Izomorfismus grafů

(*Návod:* Uvažujte, jaký graf by vyjadřoval vzájemné zaslání pohledů.)

2.1-7. Dokažte, že na večírku, kterého se účastní alespoň 6 lidí, lze vždy nalézt trojici lidí, kteří se všichni vzájemně znají, nebo takovou trojici, ve které se žádní dva lidé vzájemně neznají. Předpokládáme, že znalost je vzájemná, tj. relace „znát někoho“ je symetrická.

2.1-8. Je dán graf, který má nejméně dva uzly a obsahuje méně hran než uzlů. Dokažte, že takový graf má uzel stupně 1 nebo 0.

2.1-9. V každém obyčejném grafu, který má více než jeden uzel, existují minimálně dva uzly stejného stupně.

2.1-10. Dokažte, že pokud je $\delta(G) \geq 2$, potom graf G obsahuje kružnici.

2.1-11. Probíhá turnaj mezi n mužstvy systémem „každý s každým“. Bylo odehráno $n + 1$ zápasů. Dokažte, že existuje mužstvo, které sehrálo alespoň 3 zápasy.

2.1-12. Silniční síť zahrnuje $2n$ měst a z každého města vede n silnic do jiných měst. Existuje silniční spojení mezi libovolnými dvěma městy?

(*Návod:* Zvažte použití věty 2.15.)

2.1-13. V grafu G o m hranách a n uzlech jsou pouze uzly stupně r (těch je $k > 0$) a uzly stupně $r + 1$ (těch je $n - k$). Dokažte, že platí $k = n \cdot (r + 1) - 2m$.

2.1-14. Dokažte, že v obyčejném grafu s n uzly a více než $\lfloor n^2/4 \rfloor$ hranami existuje alespoň jeden trojúhelník (tj. úplný graf K_3).

(*Návod:* Postupujte sporem a odvoďte nějakou nerovnost pro stupně uzlů tohoto grafu. K dosažení sporu použijte větu 2.8 a Cauchyovu nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \quad)$$

2.1-15. Významný model pro paralelní výpočty představuje tzv. **n -rozměrná krychle** (anglicky **n -cube**). Je to neorientovaný graf obsahující 2^n uzlů označených dvojkovými čísly $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Hranou jsou spojeny ty dvojice uzlů, jejichž dvojkové označení se liší právě v jednom bitu.

- Nakreslete graf představující n -cube pro $n = 4$.
- Určete stupně uzlů a celkový počet hran v n -cube pro obecné n .
- Určete, kolika různými způsoby lze n -cube zobrazit izomorfně na sebe sama.

2.1-16. Dokažte, že binární relace dosažitelnosti $u \text{---}_G v$ je ekvivalencí na množině uzlů grafu G , přičemž pro každou třídu $U_i, i = 1, \dots, p$ odpovídajícího rozkladu tvoří podgraf $G_i \subseteq G$ indukovaný podmnožinou uzlů U_i komponentu grafu G .

(*Návod:* Reflexivita i symetrie jsou zřejmé, tranzitivnost vyplývá z vlastnosti skládání sledů. Každá třída U_i rozkladu podle ekvivalence $u \text{---}_G v$ bude tedy tvořena množinou uzlů vzájemně propojitelných pomocí sledů grafu G . Podgraf G_i určený třídou U_i je tedy souvislý a současně i maximální, což lze dokázat sporem. G_i je tedy komponentou grafu G .)

2.1-17. Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je dána maximální délka kružnice v těchto grafech?

2.1-18. Dokažte, že graf, který obsahuje uzavřený tah, obsahuje také kružnici. Platí podobné tvrzení pro libovolný uzavřený sled?

2.1-19. Potvrďte (důkazem) nebo vyvráťte (příkladem):

- Sjednocení dvou různých sledů spojujících tutéž dvojici (různých) uzlů obsahuje kružnici.
- Sjednocení dvou různých tahů spojujících tutéž dvojici (různých) uzlů obsahuje kružnici.

(*Návod:* (a) neplatí, (b) platí.)

2.1-20. Dokažte, že v souvislém grafu mají libovolné dvě nejdelší cesty alespoň jeden společný uzel.

(*Návod:* Postupujte sporem a využijte toho, že musí existovat cesta spojující nějaké dva uzly ležící každý v jedné ze dvou uvažovaných nejdelších cest.)

2.1-21. Dokažte, že graf G je souvislý právě tehdy, jestliže pro libovolný rozklad jeho množiny uzlů do dvou tříd U_1 a U_2 existuje v G hrana $[u, v]$ taková, že $u \in U_1, v \in U_2$.

2.1-22. Dokažte, že pro libovolný graf G platí, že je souvislý buď G nebo jeho doplněk $-G$.

2.1-23. Určete maximální počet hran v grafu s $n (\geq 3)$ uzly, ve kterém se nevyskytují žádné kružnice sudé délky.

(*Návod:* Zvažte, zda mohou mít dvě různé kružnice (liché délky) takového grafu společný více než jeden uzel. Výsledek je $3 \cdot (n-1)/2$ pro n liché a $3 \cdot (n-2)/2 + 1$ pro n sudé.)

2.1-24. Kolik různých sledů délky k lze vytvořit v úplném grafu K_n ?

2.1-25. Nechť u, v je dvojice různých uzlů úplného grafu K_n . Zdůvodněte, proč počet různých cest z u do v v grafu K_n je roven

$$(n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$$

(*Návod:* Uvažujte postupně počet cest délky $1, 2, \dots, n-1$.)

2.1-26. Ukažte, že v úplném grafu K_n existuje celkem $[n!e - 1]$ různých cest.

(*Návod:* Uvažujte postupně počet cest délky $0, 1, \dots, n-1$, přitom využijte platnosti vztahu $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.)

2.2 Orientované grafy

Hrany v neorientovaném grafu jsou „obousměrné“: můžeme jimi procházet v obou možných směrech. V některých aplikacích je tato vlastnost hran na závalu, takže vhodný model pak představuje orientovaný graf. Ve znázornění grafu se orientace hran vyjádří pomocí šipek, ve formální definici představuje orientaci hran uspořádání krajních uzlů – hrana již neinciduje s neuspořádanou, ale s uspořádanou dvojicí uzlů. Doplnění orientace hran graf jistě obohacuje – oproti neorientovanému grafu je možno zavést mnoho nových pojmů, řešit nové druhy problémů, a rozšířit tak možnosti přímé aplikace teorie grafů.

Definice 2.20: Nechť H a U jsou libovolné disjunktní množiny a $\sigma : H \mapsto U \times U$ zobrazení. **Orientovaným grafem** nazveme uspořádanou trojici $G = \langle H, U, \sigma \rangle$, prvky množiny H nazýváme **orientovanými hranami** grafu G , prvky množiny U **uzly grafu** G a zobrazení σ **incidencí grafu** G .

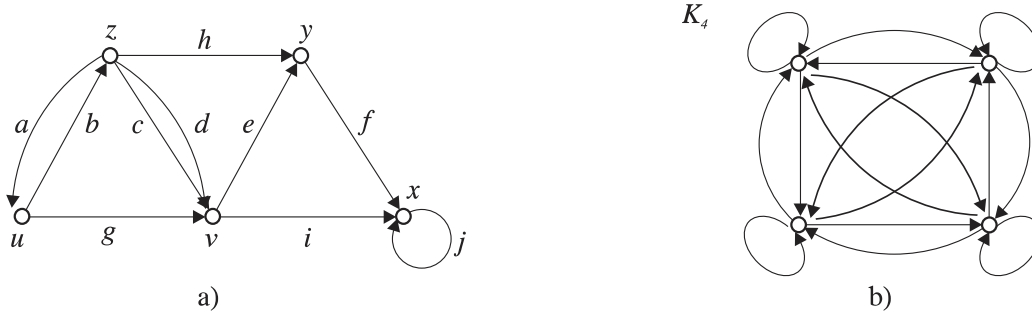
Incidence přiřazuje každé hraně uspořádanou dvojici uzlů. Jestliže pro $h \in H$ je $\sigma(h) = (u, v)$, nazýváme uzel u **počátečním** a uzel v **koncovým uzlem** hrany h ; rovněž říkáme, že hrana h je orientována od uzlu u k uzlu v . Existenci hrany z u do v vyjadřujeme také zápisem $u\Gamma v$, uzel u nazýváme **předchůdcem** uzlu v nebo obdobně uzel v **následníkem** uzlu u .

Formálně lze relaci následování na množině uzlů orientovaného grafu zavést vztahem

$$u \Gamma v \Leftrightarrow_{df} \exists h \in H : \sigma(h) = (u, v), \quad (2.11)$$

je to tedy jen orientovaná obdoba relace sousednosti uzlů v neorientovaných grafech.

Orientované hrany h_1, h_2 nazýváme **rovnoběžnými**, když platí $\sigma(h_1) = \sigma(h_2)$, neboli když h_1, h_2 mají stejné počáteční a stejné koncové uzly (viz např. hrany c a d v grafu G na obr. 2.11).



Obrázek 2.11: a) Obecný orientovaný graf, b) úplný symetricky orientovaný graf

Není-li třeba rozlišovat pořadí uzlů, které hrana h spojuje, nazýváme je jako u neorientovaných grafů krajními uzly hrany h . Je-li $\sigma(h) = (u, u)$, nazýváme hranu h **orientovanou smyčkou** (přívlastek *orientovaná* u hran, smyček, apod. budeme vynechávat, pokud nehrozí nedorozumění).

Podobně jako u neorientovaných grafů rozlišujeme podle výskytu rovnoběžných hran **orientované multigrafy** a **prosté orientované grafy**. U prostých orientovaných grafů lze opět za množinu hran považovat přímo odpovídající podmnožinu kartézského součinu $H \subseteq U \times U$, a incidenci σ můžeme pak z vyjádření grafu vypustit. V tomto případě se množina hran shoduje s relací následování Γ orientovaného grafu.

Vzhledem k veliké příbuznosti orientovaných a neorientovaných grafů je možné očekávat, že mnoho pojmů a vlastností souvisejících s orientovanými grafy lze zavést analogickým způsobem jako u grafů neorientovaných. Tak např. pro dva orientované grafy $G_1 = \langle H_1, U_1, \sigma_1 \rangle$ a $G_2 = \langle H_2, U_2, \sigma_2 \rangle$ definujeme jejich **sjednocení** $G_1 \cup G_2$ vztahem

$$G_1 \cup G_2 = \langle H_1 \cup H_2, U_1 \cup U_2, \sigma_1 \cup \sigma_2 \rangle, \quad (2.12)$$

pochopitelně za stejných předpokladů o množinách H_1, H_2, U_1, U_2 jako v případě neorientovaných grafů, aby výsledkem této operace byl orientovaný graf. Obdobně definujeme **průnik**, **rozdíl**, **podgraf**, atd. pro případ orientovaných grafů. Abychom mohli zavést operaci **doplňku** k prostému orientovanému grafu, musíme nejprve určit orientovaný graf, vzhledem k němuž se bude doplněk určovat – tímto grafem bude úplný symetricky orientovaný graf.

Definice 2.21: Úplným symetricky orientovaným grafem nazýváme prostý orientovaný graf $K_U = \langle U \times U, U \rangle$, tzn. graf, v němž je každá uspořádaná dvojice uzlů spojena orientovanou hranou. **Doplňkem** prostého orientovaného grafu $G = \langle H, U \rangle$ nazýváme graf $-G = \langle (U \times U) - H, U \rangle$.

Graf $-G$ tedy vznikne vynecháním hran grafu G z úplného symetricky orientovaného grafu s množinou uzlů U – viz např. graf na obr. 2.11. Budeme předpokládat, že čtenář je schopen v duchu analogie mezi orientovanými a neorientovanými grafy zavést následující pojmy: **obyčejný orientovaný graf**, **konečný orientovaný graf**, **podgraf orientovaného grafu určený podmnožinou uzlů nebo hran**, **izomorfismus orientovaných grafů**. V celém textu se opět omezíme pouze na konečné orientované grafy.

Abychom mohli co nejvíce využít analogických pojmů pro přenášení výsledků mezi oběma typy grafů, ukážeme nejprve základní možnost přechodu mezi orientovaným a neorientovaným grafem, při němž se fakticky nezmění struktura grafu. Z orientovaného grafu $G = \langle H, U, \sigma \rangle$ můžeme získat odpovídající neorientovaný graf prostě tak, že zrušíme orientaci hran, podobně můžeme z neorientovaného grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ získat orientovaný graf tak, že každou z jeho hran určitým způsobem orientujeme. Těmto přechodům budeme říkat **zrušení**, resp. **zavedení orientace** v grafu a jejich přesnou definici ponecháváme čtenáři jako cvičení (současně může určit, kolika různými způsoby lze zavést orientaci hran v neorientovaném grafu).

Jinou možností přechodu od neorientovaného grafu k orientovanému při zachování jeho charakteru s ohledem na propojitelnost uzlů je tzv. **symetrická orientace** neorientovaného grafu: Pro každou hranu $h, \varrho(h) = [u, v], u \neq v$ vytvoříme dvojici opačně orientovaných hran $h' : \sigma(h') = (u, v)$ a $h'' : \sigma(h'') = (v, u)$. Případné smyčky pouze orientujeme, tzn. pro $\varrho(h) = [u, u]$ vytvoříme jedinou hranu $h' : \sigma(h') = (u, u)$. Názorným pojmem je rovněž opačně orientovaný graf, jehož definici uvedeme v plném znění:

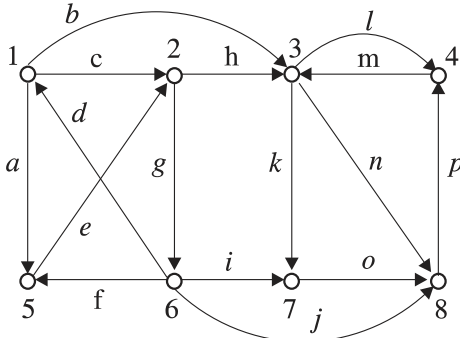
Definice 2.22: Orientovaný graf $G_2 = \langle H, U, \sigma_2 \rangle$ nazýváme **opačně orientovaným** vzhledem k orientovanému grafu $G_1 = \langle H, U, \sigma_1 \rangle$ (zapisujeme $G_2 = G_1^-$), pokud pro incidence σ_1 a σ_2 platí vztah

$$\sigma_1(h) = (u, v) \Leftrightarrow \sigma_2(h) = (v, u) \quad \text{pro každou hranu } h \in H. \quad (2.13)$$

Silná souvislost

Využijeme nyní možnosti jednoznačného přechodu od orientovanému grafu k neorientovanému prostřednictvím zrušení orientace k tomu, abychom zavedli pojmy vyjadřující propojitelnost uzlů bez ohledu na orientaci hran.

Definice 2.23: **Sledem orientovaného grafu** G nazýváme takovou posloupnost uzlů a hran, která je sledem v neorientovaném grafu G' vzniklém zrušením orientace grafu G .



Obrázek 2.12: Spojení a cykly

Analogicky zavedeme i speciální druhy sledů – **uzavřený sled, tah, cesta a kružnice orientovaného grafu**. Také zavedení souvislosti, rozkladu orientovaného grafu na komponenty, definice orientovaného stromu a kostry orientovaného grafu nebere v úvahu orientaci hran. Tímto jsme pouze vytvořili předpoklady pro využití základních pojmů a poznatků o neorientovaných grafech pro grafy orientované. Nyní zavedeme a na grafu z obr. 2.12 ilustrujeme nové specifické pojmy, ve kterých se bude orientace hran přirozeným způsobem odrážet.

Definice 2.24: Nechť pro danou dvojici uzlů u a v orientovaného grafu $G = \langle H, U, \sigma \rangle$ existuje posloupnost uzlů a hran

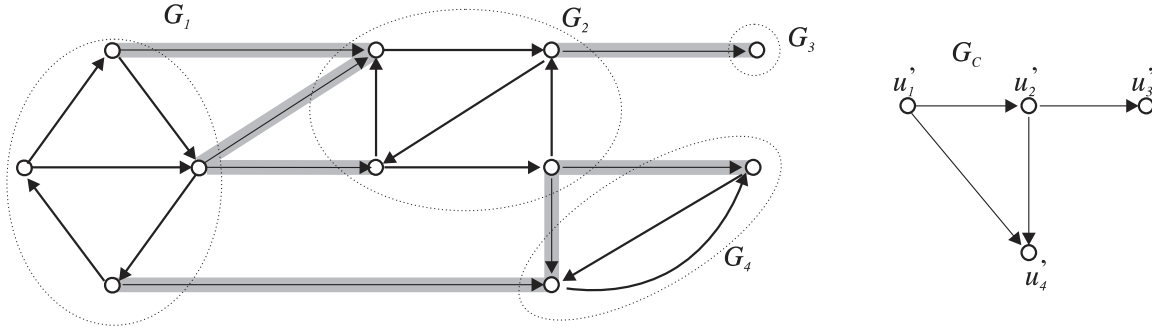
$$S = \langle u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n \rangle, \quad (2.14)$$

kde $h_i \in H, \sigma(h_i) = (u_{i-1}, u_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, $u_i \in U$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, $u_0 = u, u_n = v$. Pak tuto posloupnost nazýváme **spojením grafu** G z uzlu u do uzlu v . Uzel u je **počátečním**, uzel v **koncovým uzlem** spojení S , číslo n (≥ 0) nazýváme **délkou spojení**. Skutečnost, že existuje orientované spojení z u do v , budeme též stručně vyjadřovat zápisem $u \longrightarrow_G v$ ⁴.

Rozdíl mezi sledem a spojením orientovaného grafu spočívá tedy v tom, že u spojení se požaduje souhlasná orientace všech jeho hran ve směru od počátečního ke koncovému uzlu. Pro orientovaný graf na obr. 2.12 např. sledy (opět zapisované jen jako posloupnosti hran) $S_1 = \langle a, f, g, h, k, o \rangle$ a $S_2 = \langle d, i, o \rangle$, nejsou spojeními, zatímco sledy $S_3 = \langle a, e, h, k, o \rangle$ a $S_4 = \langle c, g, j, p, m, n \rangle$ jsou spojeními z uzlu 1 do uzlu 8.

Orientovaným tahem, resp. **orientovanou cestou** nazýváme takové spojení, které je tahem, resp. cestou po zrušení orientace. Uzavřenou orientovanou cestu nazýváme **cyklem**. Stejně jako u neorientovaných grafů považujeme i orientovanou cestu nulové délky za otevřenou, cyklus tedy musí obsahovat alespoň jednu hranu.

⁴Index G budeme vynechávat, pokud je z kontextu zřejmé, o jaký graf se jedná.



Obrázek 2.13: Silné komponenty a kondenzace orientovaného grafu

V orientovaném grafu na obr. 2.12 jsou dříve uvedená spojení S_3 a S_4 orientovanými tahy, S_3 je dokonce orientovanou cestou. Cykly tohoto grafu jsou např. spojení $S_5 = \langle a, e, g, d \rangle$, $S_6 = \langle l, m \rangle$ a $S_7 = \langle m, n, p \rangle$.

Je zřejmé, že z každého spojení z uzlu u do uzlu v lze vybrat orientovanou cestu mezi těmito uzly (důkaz tohoto tvrzení se provede obdobně jako u věty 2.12). Mezi sledy a spojeními jsou však také dosti významné rozdíly: není např. možné tvrdit, že mezi dvěma uzly orientovaného grafu neexistuje buď vůbec žádné, nebo nekonečně mnoho spojení. Počet různých spojení v orientovaném grafu může totiž být konečný (pokuste se určit, za jakých nutných a postačujících podmínek), přestože tento graf obsahuje nekonečně mnoho různých sledů. Propojitelnost uzlů pomocí spojení lze vyjádřit novým druhem souvislosti, specifickým pro orientované grafy.

Definice 2.25: Orientovaný graf G nazýváme **silně souvislým**, jestliže pro libovolnou dvojici uzlů u, v existuje spojení z uzlu u do uzlu v a spojení z uzlu v do uzlu u (tedy $u \rightarrow v$ a $v \rightarrow u$). **Silnou komponentou** orientovaného grafu nazýváme každý jeho maximální silně souvislý podgraf.

Graf znázorněný na obr. 2.12 je sice souvislý, ale není silně souvislý, neboť např. z uzlu 7 nevede žádné spojení do uzlu 6 (zkuste určit všechny silné komponenty tohoto grafu). Na obr. 2.13 je znázorněn souvislý orientovaný graf, který má 4 silné komponenty G_1, \dots, G_4 . Maximálnost těchto podgrafů je zřejmá z toho, že přidáním kterékoliv ze silně vytažených hran by vznikl podgraf, který již není silně souvislý.

Věta 2.26: Pro orientovaný graf $G = \langle H, U, \sigma \rangle$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (a) Graf G je silně souvislý.
- (b) Graf G je souvislý a každá jeho hrana je obsažena v nějakém cyklu.
- (c) Pro libovolný rozklad $\{U_1, U_2\}$ množiny uzlů U existují hrany h_1, h_2 takové, že h_1 má počáteční uzel v U_1 a koncový v U_2 a h_2 má počáteční uzel v U_2 a koncový v U_1 .

Důkaz: (a) \Rightarrow (b): Souvislost grafu je zřejmá. Uvažujme tedy libovolnou hranu $h \in H$, $\sigma(h) = (u, v)$. V grafu G musí existovat spojení z uzlu v do uzlu u , z tohoto spojení lze vybrat orientovanou cestu z v do u . Složením této cesty a hrany h dostáváme hledaný cyklus.

(b) \Rightarrow (c): Pro libovolný rozklad $\{U_1, U_2\}$ je díky souvislosti grafu G zaručena existence hrany h_1 s krajními uzly $u_1 \in U_1, v_1 \in U_2$. Můžeme předpokládat, že u_1 je počáteční a v_1 koncový uzel hrany h_1 . Podle předpokladu je hrana h_1 obsažena v nějakém cyklu grafu G ; na tomto cyklu musí nutně existovat i hrana h_2 s počátečním uzlem v U_2 a koncovým uzlem v U_1 .

(c) \Rightarrow (a): Postupujeme sporem. Nechť G není silně souvislý, takže pro jistou dvojici uzlů u, v neexistuje spojení z u do v . Vytvoříme nyní množinu U_1 takto:

$$U_1 = \{x \in U : u \rightarrow x \text{ (t.j. v } G \text{ existuje spojení z uzlu } u \text{ do uzlu } x)\}$$

a uvažujeme rozklad $\{U_1, U - U_1\}$ ($U - U_1 \neq \emptyset$, neboť obsahuje alespoň uzel v). Pro tento

rozklad nemůže existovat hrana s počátečním uzlem v U_1 a koncovým uzlem v $U - U_1$, neboť by to odporovalo volbě množiny U_1 – tím se ale dostáváme do sporu s tvrzením (c). \triangle

Nechť G_1, G_2, \dots, G_p jsou všechny silné komponenty orientovaného grafu G . Z vyslovené věty plynou následující důsledky pro rozklad orientovaného grafu do silných komponent (důkaz ponecháváme jako cvičení):

Důsledek 1: Podgraf $G' = G - (\cup_{i=1}^p G_i)$ orientovaného grafu G vzniklý odebráním všech silných komponent je tvořen právě těmi hranami, které nejsou obsaženy v žádném cyklu grafu G .

Důsledek 2: Pro libovolné dvě různé silné komponenty G_i, G_j neexistuje současně hrana vedoucí z G_i do G_j i hrana vedoucí z G_j do G_i .

Jiný pohled na strukturu silných komponent grafu poskytuje následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.27: Leží-li dva uzly ve stejné silné komponentě orientovaného grafu, potom každá orientovaná cesta, která tyto uzly spojuje, náleží celá do téže silné komponenty.

Důkaz: Nechť u a v jsou uzly patřící do stejné silné komponenty, potom podle definice silné komponenty platí $u \rightarrow v$ a $v \rightarrow u$. Je-li x libovolný uzel cesty z u do v , pak můžeme psát $u \rightarrow x$ a $x \rightarrow v$. Uzel x je tedy dostupný z uzlu u , přitom složením $x \rightarrow v$ a $v \rightarrow u$ dostáváme navíc, že také u je dostupný z x . Uzly u a x tedy leží v téže silné komponentě. \triangle

Zkoumání dostupnosti mezi uzly orientovaného grafu G se velmi zjednoduší, použijeme-li tzv. **kondenzaci** grafu G . Kondenzace je obyčejný graf $G_c = \langle H', U' \rangle$, jehož každý uzel $u'_i \in U'$ odpovídá silné komponentě G_i grafu G a hrana $(u'_i, u'_j) \in H'$ existuje právě tehdy, když v G existovala hrana s počátečním uzlem v G_i a koncovým uzlem v G_j . Oproti původnímu grafu je kondenzace obecně značně jednodušší. Jestliže tedy např. zjistíme, že pro dvojici uzlů v kondenzaci G_c platí $u'_i \rightarrow u'_j$, pak platí také $u \rightarrow v$ pro libovolné uzly $u \in G_i, v \in G_j$. Na obr. 2.13 je vidět, jak se orientovaný graf kondenzací zjednoduší.

Stupně uzlu v orientovaném grafu

Definice 2.28: Pro libovolný uzel u orientovaného grafu G nazýváme **výstupním stupněm uzlu** u (značíme $\delta_G^+(u)$) počet hran, které mají uzel u za svůj počáteční uzel, **vstupním stupněm uzlu** u (značíme $\delta_G^-(u)$) počet hran, které mají uzel u za svůj koncový uzel.

Stupně uzlu u těsně souvisejí s množinami jeho následníků $\Gamma(u)$ a předchůdců $\Gamma^{-1}(u)$ v relaci následování. V prostém orientovaném grafu platí⁵:

$$\delta^+(u) = |\Gamma(u)|, \quad \delta^-(u) = |\Gamma^{-1}(u)| \quad (2.15)$$

Nemá-li uzel u v orientovaném grafu G žádné následníky (tzn. platí-li $\delta^+(u) = 0$), nazýváme jej **listem** grafu G . Podobně pro uzel v bez předchůdců (tzn. $\delta^-(v) = 0$) používáme označení **kořen** grafu G . Zavedené lokální charakteristiky orientovaných grafů ilustrujeme na uzlech 1 a 3 grafu na obr. 2.12.

$$\begin{array}{lll} \delta^+(1) = 3, & \Gamma(1) = \{2, 3, 5\}, & \delta^-(1) = 1, \quad \Gamma^{-1}(1) = \{6\}, \\ \delta^+(3) = 3, & \Gamma(3) = \{4, 7, 8\}, & \delta^-(3) = 3, \quad \Gamma^{-1}(3) = \{1, 2, 4\}. \end{array}$$

Vznikne-li neorientovaný graf G' z orientovaného grafu G zrušením orientace, bude pro každý jeho uzel u platit $\delta_{G'}(u) = \delta_G^+(u) + \delta_G^-(u)$. Pomocí stupňů uzlů můžeme do značné míry charakterizovat zadaný graf. Tak např. platí-li $\delta^+(u) + \delta^-(u) = 1$ pro každý uzel $u \in U$, je příslušný graf disjunktním sjednocením hran. Podobně podmínka $\delta^+(u) = \delta^-(u) = 1$ pro všechna $u \in U$ znamená, že daný graf je disjunktním sjednocením cyklů. Obecnější podmínka

⁵Index G u stupňů budeme opět vynechávat, pokud nehrozí nedorozumění.

ve tvaru $(\delta^+(u) \leq 1) \ \& \ (\delta^-(u) \leq 1)$ pro všechna $u \in U$ určuje, že se jedná o disjunkttní sjednocení orientovaných cest a cyklů.

Věta 2.29: Nechť $G = \langle H, U, \sigma \rangle$ je souvislý orientovaný graf bez smyček, ve kterém platí $\delta^+(u) = 1$ pro každý uzel $u \in U$. Potom G obsahuje jediný cyklus, který je současně jedinou kružnicí grafu G .

Důkaz: (indukcí podle počtu uzlů)

1. Pro graf se dvěma uzly tvrzení platí (nakreslete si obrázek).
2. Nechť tvrzení platí pro grafy s n a méně uzly, uvažujme graf G s $(n + 1)$ uzly. Použitím předpokladu $\delta^+(u) = 1$ a vztahu (2.18) (viz cvič. 2.2-11) dostáváme

$$\sum_{u \in U} \delta^+(u) = \sum_{u \in U} 1 = |U| = \sum_{u \in U} \delta^-(u) = |H|. \quad (2.16)$$

Nyní rozlišíme dva případy:

- (i) $\delta^-(u) = 1$ pro všechna $u \in U$. Potom je (viz dříve) G disjunkttním sjednocením cyklů, je ale současně souvislý, takže G je tvořen jediným cyklem.
- (ii) Pro nějaké u je $\delta^-(u) > 1$. Potom ale musí existovat uzel $v \in U$ takový, že $\delta^-(v) = 0$ (jinak by nebylo možné docílit hodnoty $|U|$ v součtu (2.16)). Odebereme-li z G uzel v a hranu z něj vycházející, dostaneme graf o n uzlech, který splňuje předpoklady tvrzení věty a podle indukčního předpokladu v něm existuje jediný cyklus. Zpětným přidáním uzlu v a jeho hrany se na situaci nic nezmění. \triangle

Přejdeme-li od grafu G k opačně orientovanému grafu G^- , vzájemně se zamění vstupní a výstupní stupně všech uzlů, z následníků se stanou předchůdci a naopak, cykly a orientované cesty (a obecně všechna spojení) změni pouze svoji orientaci. Tvrzení věty 2.29 bude tedy platit i za podmínky $\delta^-(u) = 1$ pro každý uzel $u \in U$ souvislého grafu G .

Pozornost, kterou věnujeme cyklům, je odůvodněna tím, že cykly hrají ve struktuře orientovaných grafů důležitou roli – ovlivňují silnou souvislost, rozklad na silné komponenty a mají zásadní vliv na možnosti vytváření různých spojení v grafu. Zajímavou třídu grafů představují také orientované grafy, které žádné cykly nemají. Takové grafy se nazývají **acyklické** a patří mezi ně nejen (orientované) stromy, ale také grafy, které obsahují (neorientované) kružnice.

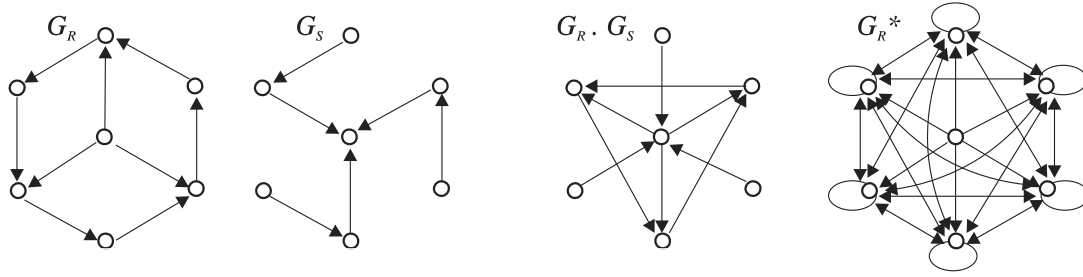
Orientované grafy a binární relace

Jak jsme uvedli na začátku tohoto odstavce, každý orientovaný graf určuje binární relaci následování Γ na množině svých uzlů. To lze ovšem chápat také obráceně – každá binární relace R na libovolné množině U může být vyjádřena pomocí prostého orientovaného grafu jako jeho relace následování. Stačí vzít přímo graf $G_R = \langle R, U \rangle$, v němž jsou spojeny hranou ty uspořádané dvojice uzlů (u, v) , které jsou v relaci R (tzn. pro něž platí uRv). Studium prostých orientovaných grafů se tedy kryje se studiem binárních relací. Ukážeme, jak lze pojmy týkající se binárních relací přenést na orientované grafy.

Tak např. definiční obor $\mathcal{D}(R)$, resp. obor hodnot $\mathcal{H}(R)$ relace R bude v grafu $G_R = \langle R, U \rangle$ představován podmnožinou uzlů s nenulovým výstupním, resp. vstupním stupněm. Prázdné relaci odpovídá prázdný graf, identické relaci Δ_U odpovídá graf tvořený pouze smyčkami kolem každého uzlu, inverzní relaci R^{-1} odpovídá opačně orientovaný graf G_R^- .

Definici operace skládání binárních relací přeneseme na orientované grafy takto: Graf $G = \langle H, U \rangle$ nazveme **složením grafů** $G_R = \langle R, U \rangle$ a $G_S = \langle S, U \rangle$ (značíme $G = G_R \circ G_S$), pokud jeho množina hran H obsahuje právě všechny hrany (x, y) takové, že pro nějaké $z \in U$ platí $(x, z) \in R$ & $(z, y) \in S$. Jednoduchý příklad na konstrukci složení grafů ukazujeme na obr. 2.14. Operaci složení grafů jsme pochopitelně volili tak, aby platilo

$$G_R \circ G_S = G_{R \circ S} \quad (2.17)$$



Obrázek 2.14: Skládání a tranzitivní uzávěr grafů

Analogicky se projeví na grafech s množinou uzlů U také operace mocnění, tranzitivní a reflexivně-tranzitivní uzávěr:

$$G^i = \begin{cases} \langle \Delta_U, U \rangle & \text{pro } i = 0 \\ G^{i-1} \circ G & \text{pro } i \geq 1 \\ (G^-)^{-i} & \text{pro } i < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} G^+ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} G^i & (\text{tranzitivní uzávěr grafu } G) \\ G^* &= \bigcup_{i=0}^{\infty} G^i & (\text{reflexivně-tranzitivní uzávěr grafu } G). \end{aligned}$$

Příklad vytvoření tranzitivního uzávěru grafu ukazujeme na obr. 2.14. Sestrojíme-li tranzitivní uzávěr silně souvislého grafu, dostaneme úplný symetricky orientovaný graf. V obecném případě je vhodné vytvořit nejprve tranzitivní uzávěr kondenzace (to je acyklický graf), a od něho pak snadno přejdeme k uzávěru výchozího grafu.

Čtenář se snadno přesvědčí, že hrana (x, y) bude obsažena v grafu

- G^i právě tehdy, obsahuje-li graf G spojení délky i z uzlu x do uzlu y (tzn. $y \in \Gamma^i(x)$)
- G^{-i} právě tehdy, obsahuje-li graf G spojení délky i z uzlu y do uzlu x (tzn. $y \in \Gamma^{-i}(x)$)
- G^+ právě tehdy, obsahuje-li graf G netriviální spojení z uzlu x do uzlu y (tzn. $y \in \Gamma^+(x)$)

Vlastnosti binárních relací zavedené v kap. 1 se na grafech projeví takto:

- reflexivita* – každý uzel má smyčku
- tranzitivita* – každá dvojice uzlů propojitelná spojením je spojena přímo hranou
- symetrie* – graf je symetricky orientován
- antisymetrie* – kromě případných smyček neexistují dvojice opačně orientovaných hran se stejnými krajními uzly
- asymetrie* – má-li graf hranu (u, v) , pak již nesmí mít hranu (v, u)
- ireflexivita* – graf nemá žádnou smyčku

Pokud budeme nadále hovořit o reflexivním, tranzitivním atd. grafu, budeme tím mít na mysli, že jeho relace následování je reflexivní, tranzitivní, atd. Pro ilustraci uvedeme tři jednoduchá tvrzení o grafech využívající pojmy přenesené z teorie binárních relací. Následující větu není vhodné chápat jako základ pro vytvoření efektivního algoritmu pro testování acykličnosti orientovaného grafu, k tomuto účelu uvedeme inspirativní doporučení až v odst. 4.4.

Věta 2.30: Prostý orientovaný graf $G = \langle H, U \rangle$ je acyklický právě tehdy, je-li jeho tranzitivní uzávěr G^+ ireflexivní.

Důkaz: Podmínku acykličnosti lze vyjádřit pomocí relace následování Γ grafu tak, že pro každé $u \in U$ platí $u \notin \Gamma^+(u)$. To ale znamená, že pro žádné $u \in U$ neleží hrana (u, u) v grafu G^+ . \triangle

Věta 2.31: Nechť R je relace uspořádání na množině U . Potom je orientovaný graf G odpovídající relaci $R = \Delta_U$ acyklický.

Důkaz: Postupujeme sporem. Nechť G obsahuje cyklus. Označme u, v dva různé uzly tohoto cyklu (jejich existence plyne z toho, že se nemůže jednat o smyčku). Potom v G existuje spojení

z u do v a také z v do u , takže vlivem tranzitivity obsahuje graf G i hrany (u, v) a (v, u) – to je však ve sporu s antisymetrií relace R . \triangle

Věta 2.32: Nechť G je acyklický graf. Potom je reflexivně-tranzitivní uzávěr G^* grafem relace uspořádání na množině uzlů grafu G .

Důkaz: Reflexivita i tranzitivita grafu G^* jsou zřejmé, antisymetrii dokážeme sporem. Nechť v G^* existují hrany (u, v) a (v, u) pro jistou dvojici uzlů $u \neq v$. V grafu G tedy platí $u \rightarrow v$ a $v \rightarrow u$. Pak ale G obsahuje cyklus (viz cvič. 2.2-6), což je spor. \triangle

Reflexivně-tranzitivní uzávěr acyklického grafu představuje současně minimální způsob doplnění acyklického grafu na graf relace uspořádání.

Cvičení

2.2-1. Pro orientovaný graf G_1 na obr. 2.15 řešte následující úlohy:

- Určete, zda v G_1 existuje konečně nebo nekonečně mnoho různých spojení.
- Určete silné komponenty grafu G_1 .
- Vytvořte kondenzaci grafu G_1 .
- Je možné docílit změnou orientace jediné hrany, aby získaný graf byl silně souvislý?

(Odpověď: (a) nekonečně mnoho, (b) dvě silné komponenty, (c) jediná orientovaná hrana, (d) ano, libovoleně ze tří hran „uprostřed“)

2.2-2. Uvažujme konečný orientovaný graf, v němž platí $(\delta^+(u) \geq 1) \ \& \ (\delta^-(u) \geq 1)$ pro všechny jeho uzly. Je možné tvrdit, že každým uzlem pak prochází nějaký cyklus tohoto grafu?

2.2-3. Určete, zda graf G_2 na obr. 2.15 je acyklický.

2.2-4. Pro grafy G_3, G_4 na obr. 2.15 určete grafy $G_3 \circ G_4$, $G_4 \circ G_3$, G_3^+ , G_4^+ .

2.2-5. Určete maximální počet hran v prostém orientovaném grafu o n uzlech, který je acyklický.

2.2-6. Nechť P_1 , resp. P_2 je spojení grafu G z uzlu u do uzlu v , resp. z uzlu v do uzlu u . Dokažte, že graf G obsahuje cyklus. Bude existovat cyklus procházející oběma uzly u a v ?

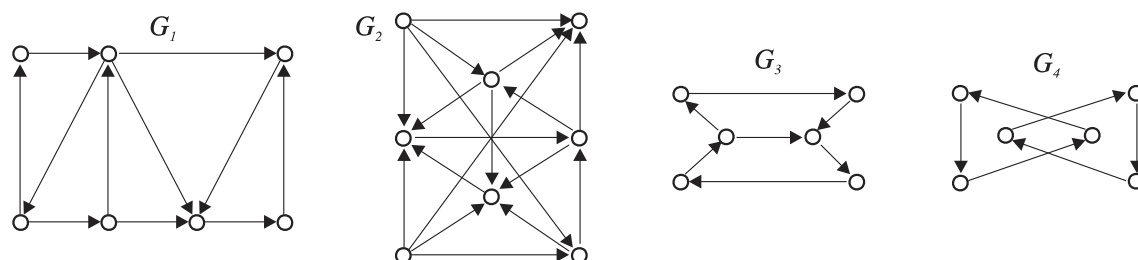
2.2-7. Dokažte následující nutnou a postačující podmínku silné souvislosti grafu G bez izolovaných uzlů: V grafu G existuje uzavřené spojení obsahující každou hranu alespoň jednou.

2.2-8. Formulujte nutnou a postačující podmínku silné souvislosti grafu pomocí jeho relace následování Γ .

(Odpověď: Pro každý uzel u musí platit $\Gamma^*(u) = U$.)

2.2-9. Dokažte, že kondenzace orientovaného grafu neobsahuje žádný cyklus.

2.2-10. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby neorientovaný graf bylo možné orientovat tak, že vznikne silně souvislý orientovaný graf.



Obrázek 2.15: Orientované grafy ke cvičení

2.2-11. Dokažte obdobu věty 2.8 pro orientované grafy:

$$\sum_{u \in U} \delta^+(u) = \sum_{u \in U} \delta^-(u) = |H|. \quad (2.18)$$

2.2-12. Dokažte, že má-li každý uzel orientovaného grafu alespoň jednu z něj vystupující hranu, potom graf obsahuje cyklus.

2.2-13. Charakterizujte prostý acyklický graf pomocí jeho rozkladu na silné komponenty a pomocí jeho kondenzace.

2.2-14. Charakterizujte silně souvislý graf pomocí jeho rozkladu na silné komponenty a pomocí jeho kondenzace.

2.2-15. Nalezněte orientovaný graf, který je symetrický a tranzitivní, a přitom není reflexivní. Určete obecnou charakteristiku takových grafů.

2.2-16. Určete počet neizomorfních souvislých faktorů úplného grafu K_5 . Kolik má K_5 neizomorfních faktorů celkem?

2.2-17. Kolik různých obyčejných grafů lze vytvořit, je-li pevně dána množina uzlů U o n prvcích? Za různé považujte i izomorfní grafy, pokud se liší jejich množiny uzlů.