

Přednáška #11: Kolektivní komunikační algoritmy II

Vysílání všichni-všem (AAB)

AAB = **gossip** = **celková výměna**: Každý uzel vyšle svůj paket všem ostatním uzlům.

SF AAB s kombinováním paketů

Spodní meze

Lemma 1. *Je-li G d -portová síť o N uzlech, pak*

$$\rho_{\text{AAB}}(G) = \text{diam}(G) \quad a$$

$$\tau_{\text{AAB}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAB}}(G)t_s + \left\lceil \frac{N-1}{d} \right\rceil \mu t_m.$$

Důkaz. Díky SF přepínání nemůže AAB skončit dříve než po $\text{diam}(G)$ krocích. Každý uzel musí přijmout $(N-1)\mu t_m$ dat a má na to d portů.



- Nejsilnější a nejméně realistický model.
- Triviální záplavový (nebo lačný) přístup.

Uzlový program algoritmu FLOODINGMINDUPAAB(G)

pošli svůj paket všem k sousedům;

repeat $\text{diam}(G)$ **times**

{ přijmi zprávy ze všech k vstupních kanálů;

zkombinuj je do k nových zpráv tak, že se minimalizuje duplikace;

(*t.j., udržuj info o tom, které pakety byly vyslány kterým sousedům
a nepošlej týž paket témuž sousedovi 2krát.

Tento protokol se nazývá **MINDUP** a kombinovaná zpráva **MINDUP agregát**. *)
pošli nové MINDUP agregáty odpovídajícím sousedům };

- **Simulace** plně-duplexních kanálů na poloduplexních se zpomalením 2:

$$\text{diam}(G) \leq r_{\text{AAB}}(G) \leq 2 \text{diam}(G).$$

- Metoda **Soustřed-Rozešli**:

Algoritmus ACCUMULATEBROADCASTAAB(G, u)

Fáze 1: Uzel u akumuluje všechny pakety do 1 agregátní zprávy (= AOG).

Fáze 2: u vyšle tuto agregátní zprávu všem ostatním (= OAB).

- Typicky, pro komunikační složitost je dominující Fáze 2.

Lepší AAB v bipartitních sítích

Lemma 2. *Je-li G bipartitní s $\text{diam}(G) = D$, pak $r_{\text{AAB}}(G) \leq D + 1$.*



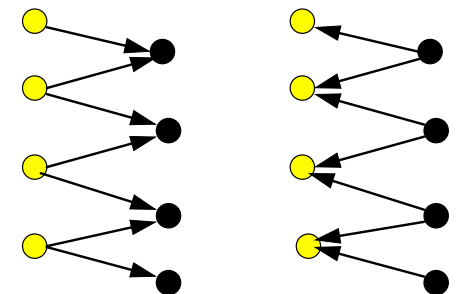
Algorithm FLOODINGBIPARTITEAAB(G)

Obarvi uzly 2 barvami **Y**(ellow) a **B**(lack);

repeat $(D + 1)/2$ **times**

{**YB:** **Y** uzly pošlou své MINDUP aggregáty **B** sousedům;

BY: **B** uzly pošlou své MINDUP aggregáty **Y** sousedům;}

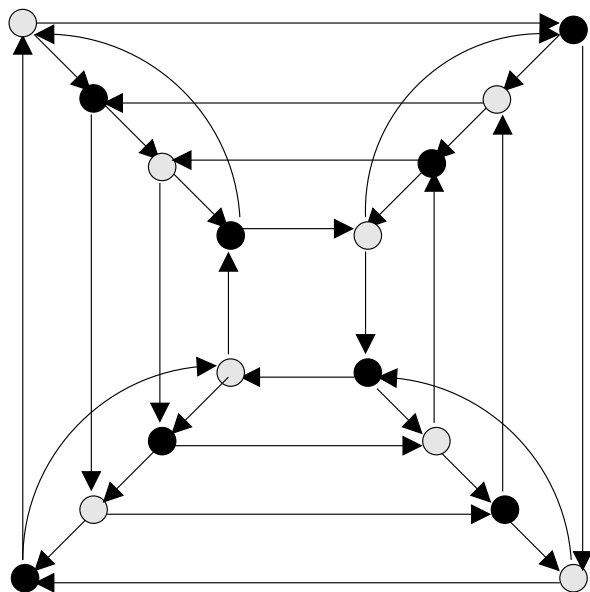


Lemma 3. *Je-li $\text{diam}(G) = D$ a $\text{diam}(\vec{G}) = D'$, pak*

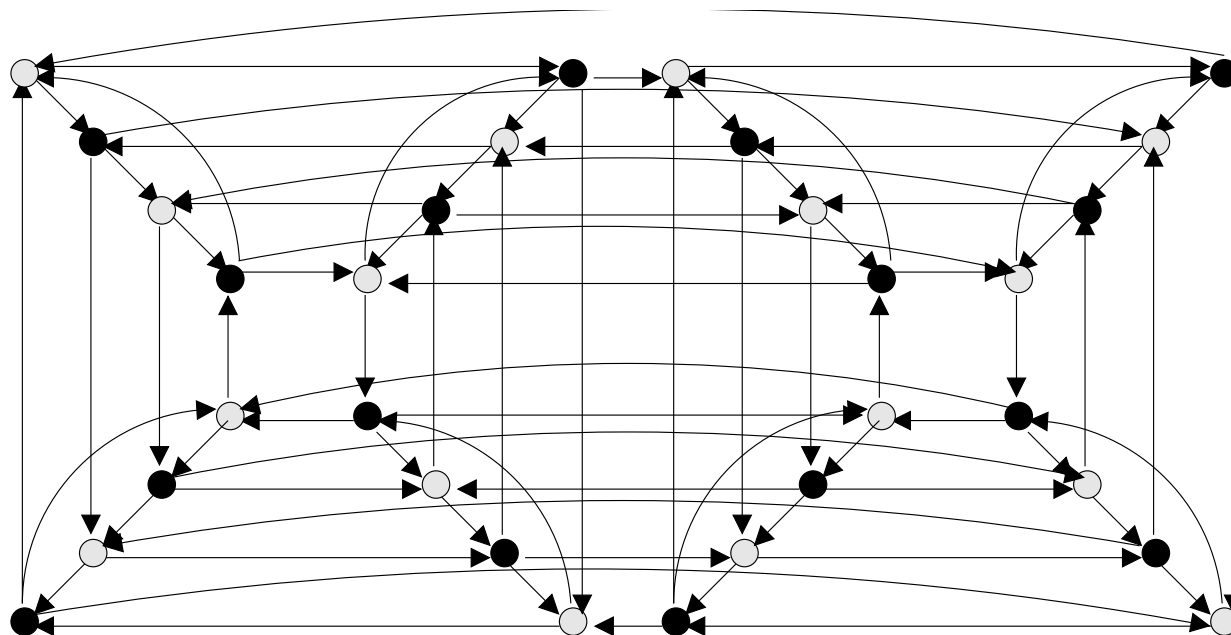
$$D \leq r_{\text{AAB}}(G) \leq \min(2D, D').$$



- Zorientování hran grafu tak, že D' je nejmenší možný, je obecně **NP-těžký** problém.
- Vyřešeno pro **2-D mřížky** a **toroidy** (tzv. *Manhattanský problém*).
- Optimální řešení $D = D'$ existuje pouze pro **dostatečně rozsáhlé** mřížky/toroidy.
- Částečně vyřešeno pro **některé vícerozměrné** mřížky a toroidy.
- Vyřešeno pro **hyperkrychle**: $\text{diam}(\vec{Q}_2) = 3$, $\text{diam}(\vec{Q}_3) = 5$, and $\text{diam}(\vec{Q}_n) = n$ for $n \geq 4$.



(a) Silně orientovaná \vec{Q}_4 s $D' = 4$



(b) Silně orientovaná \vec{Q}_5 s $D' = 5$.

Lemma 4. *Má-li bipartitní graf G silnou orientaci s průměrem nejvýše k , kde $k \geq 3$, takovou, že každý uzel leží na kružnici o délce nejvýše k , pak graf $G \times U_2$ (= kartézský součin G a úplného grafu s 2 uzly) má orientaci s průměrem nejvýše $k + 1$ takovou, že každý uzel leží na orientované kružnici délky nejvýše k .*

Náznak důkazu. $G \times U_2$ je zbudován ze 2 kopií G_1 a G_2 tak, že G_1 je zrcadlově symetrická s G_2 a 2-barvení (černá-bílá) v G_1 je inverzí barvení v G_2 . Pak hrany spojující odpovídající páry symetrických uzlů orientujeme od černých k bílým uzlům. Rozborem všech případů lze indukčně ukázat, že z jakéhokoli uzlu $u_1 \in G_1$ lze dosáhnout jakýkoli uzel $u_2 \in G_2$ (či naopak) orientovanou cestou délky nejvýš $k + 1$.



Lemma 5. *Díky existenci 1-portového algoritmu Soustřed'-Rozešli, pro jakýkoli N -uzlový graf G platí:*

$$\max(\text{diam}(G), \lceil \log N \rceil) = \rho_{\text{OAB}}(G) \leq r_{\text{OAB}}(G) \leq r_{\text{AAB}}(G) \leq 2r_{\text{OAB}}(G).$$

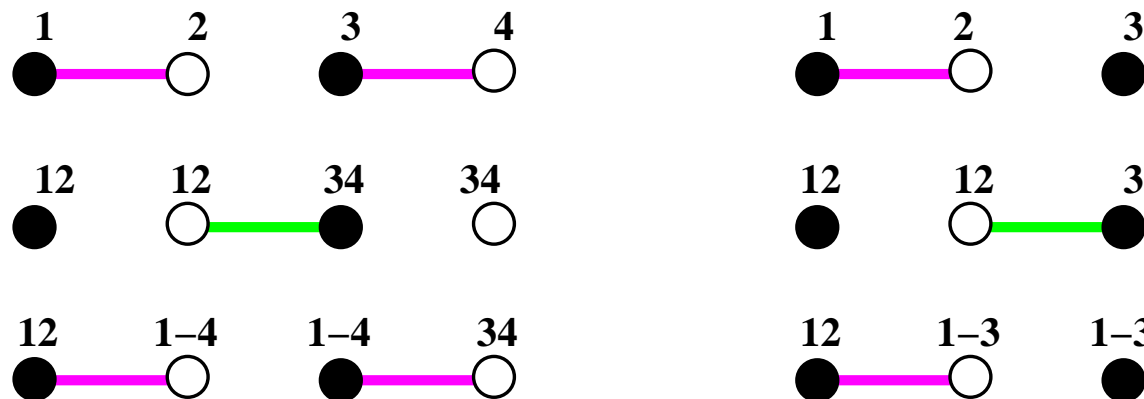
1-D mřížky

Algoritmus FLOODINGMINDUPAAB($M(z)$)

Střídej NODUP výměny mezi licho-sudými a sudo-lichými páry

Lemma 6.

$$r_{\text{AAB}}(M(z)) = \begin{cases} z - 1 \\ z \end{cases} \quad a \quad t_{\text{AAB}}(M(z), \mu) = \begin{cases} (z - 1)t_s + (2z - 3)\mu t_m & \text{je-li } z \text{ sudé,} \\ z t_s + (2z - 2)\mu t_m & \text{jinak.} \end{cases}$$



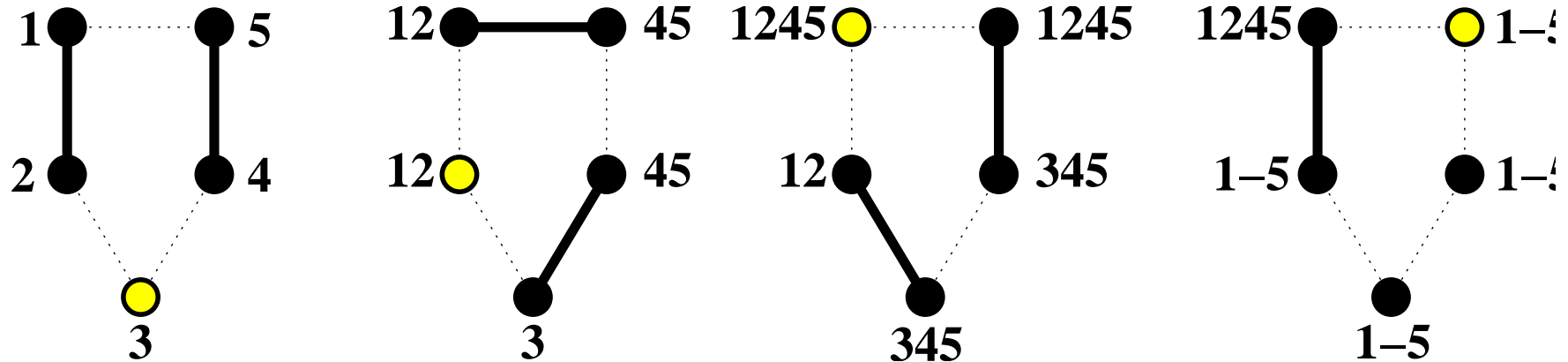
Lemma 7. *Je-li z je sudé, pak $r_{\text{AAB}}(K(z)) = z/2$ (což je optimální) a*

$$t_{\text{AAB}}(K(z), \mu) = \frac{z}{2}t_s + (z - 1)\mu t_m$$

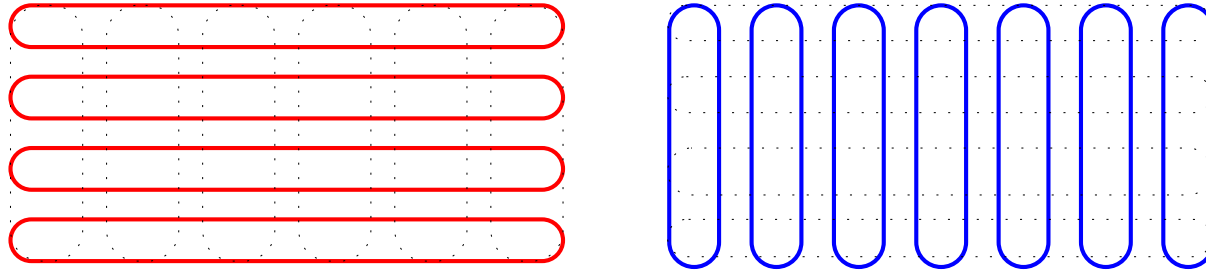
a je-li z liché, pak $r_{\text{AAB}}(K(z)) = (z + 3)/2$ (jeden uzel je vždy mimo hru!) a

$$t_{\text{AAB}}(K(z), \mu) = \frac{z + 3}{2}t_s + \frac{3z - 1}{2}\mu t_m.$$

Příklad: $z = 5$



4-krokový AAB na 1-portové plně-duplexní kružnici délky 5.



Lemma 8. *AAB po dimenzích v 1-portové mřížce (podobně v toroidu)*

$$r_{\text{AAB}}(M(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^n r_{\text{AAB}}(M(z_i)) \quad a$$

$$t_{\text{AAB}}(M(z_1, \dots, z_n), \mu) = \sum_{i=1}^n t_{\text{AAB}}(M(z_i), (\prod_{j=1}^{i-1} z_j) \mu).$$

Důsledek 9. (Lemmy 7.) *Časová složitost závisí na pořadí dimenzí, vyskytuje-li se lichá velikost.*

Příklad: Je-li z_1 liché a z_2 sudé, pak

$$t_{\text{AAB}}(K(z_1), \mu) + t_{\text{AAB}}(K(z_2), z_1 \mu) < t_{\text{AAB}}(K(z_2), \mu) + t_{\text{AAB}}(K(z_1), z_2 \mu).$$

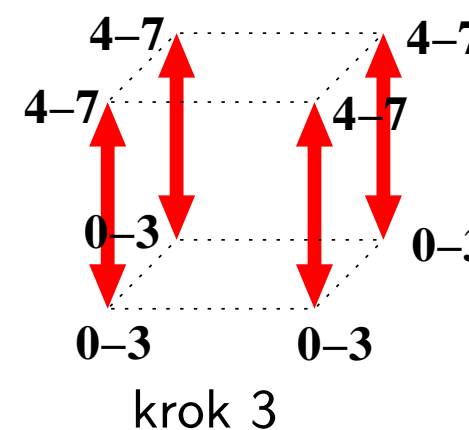
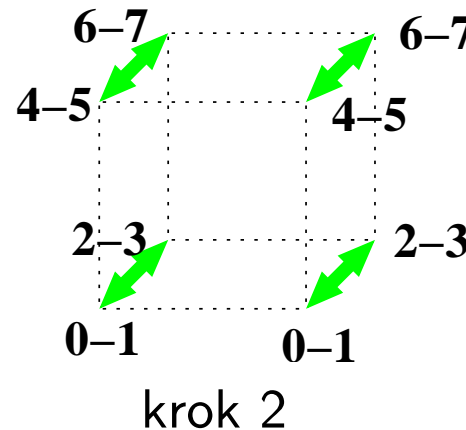
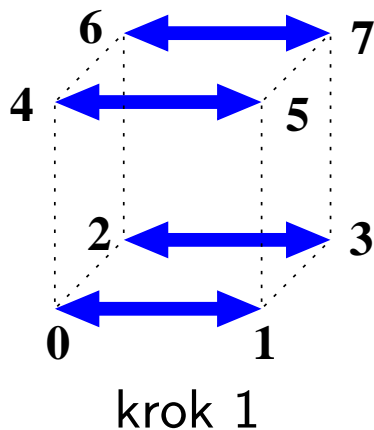
Jsou-li z_1, z_2 sudé, pak $t_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2), \mu) = \frac{z_1 + z_2}{2} t_s + (z_1 z_2 - 1) \mu t_m$.

Důsledek 10. (Lemmy 8 a 1.)

$$\rho_{\text{AAB}}(Q_n) = r_{\text{AAB}}(Q_n) = n \quad a \quad t_{\text{AAB}}(Q_n, \mu) = \tau_{\text{AAB}}(Q_n, \mu) = nt_s + \mu t_m(2^n - 1).$$

Důkaz. Velikost zprávy se v každém kroku zdvojnásobí:

$$t_{\text{AAB}}(Q_n, \mu) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_s + 2^i \mu t_m) = nt_s + \mu t_m(2^n - 1).$$



SF AAB: všeportový plně-duplexní nekombinující model

- Každý z N vstupních paketů musí být doručen individuálně všem $N - 1$ uzlům.
- Počet paketů v síti je mnohem větší než v případě kombinujícího modelu.
- Plně-duplexní kanály jsou dvojice antiparalelních simplexních linek = **orientovaných hran**.
- Komunikační model a předpoklady:
 - Každý uzel u v G = kořen **OAB stromu** $B(u)$.
 - Všechny uzly začnou svůj OAB ve stejném okamžiku.
 - Všechny OAB postupují v OAB stromech synchronně toutéž rychlostí.
 - **Definice:** Orient. hrana v $B(u)$ je **úrovně** $i \iff$ paket přes ni projde v kroku i .
 - **Definice:** **Výška** $B(u)$, $h(B(u))$, je číslo nejvyšší úrovně hrany v $B(u)$.
 - Důsledek: V kroku i jsou ve všech stromech aktivní **pouze hrany na úrovni** i .
- **Definice:** $B(u)$ a $B(v)$ = vzájemně **časově-hranově-disjunktní** stromy (TADT), jestliže $\forall i$, množiny jejich hran na úrovni i jsou **disjunktní**.
- Důsledek: OAB stromy jsou TADT \implies přenos paketů je na plně-duplexních kanálech sítě **bezkolizní**.

Lemma 11. *Nechť G je síť s N uzly a s minimálním stupněm d . Pak*

$$\rho_{\text{AAB}}(G) = \lceil (N - 1)/d \rceil \quad \text{a} \quad \tau_{\text{AAB}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAB}}(G)(t_s + \mu t_m).$$



Mřížky

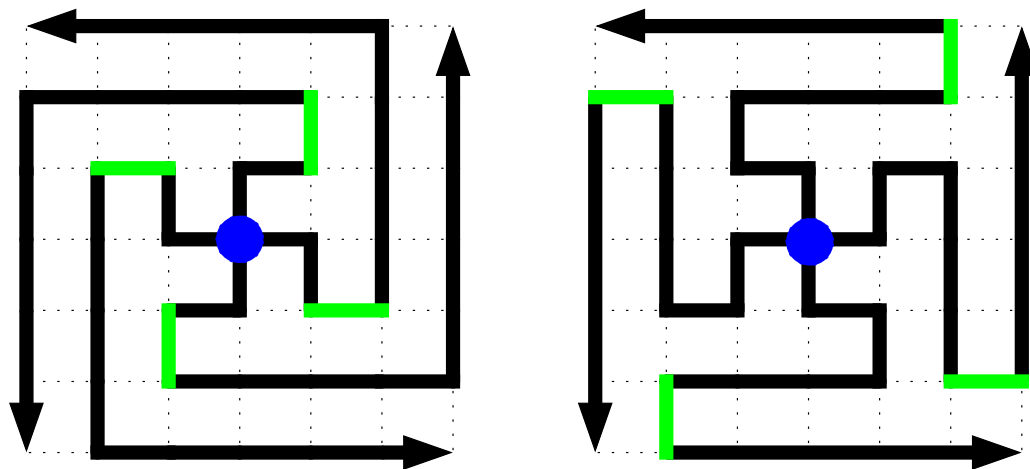
- Nejsou uzlově symetrické.
- 2-D mřížka $M(z_1, z_2)$: \exists optimální algoritmy s $r_{\text{AAB}}(M(z_1, z_2)) = \lceil (z_1 z_2 - 1)/2 \rceil$.
 - všechny pakety se posunují podél 1 hamiltonovské kružnice,
 - nebo soustava TADTů $B(u)$, kde struktura $B(u)$ závisí na u a navíc $\beta \approx z_1 + z_2$ (složitě).
- Vícerozměrné mřížky: ???

Uzlově symetrické topologie

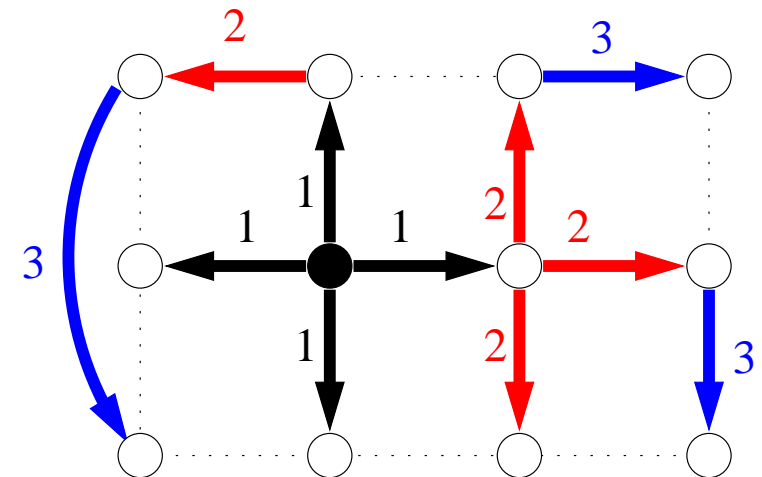
- Všechny TADTy jsou **izomorfní**: odvozeny z **generického** TADT $B(*)$!!!!
- Automorfizmus = **přeložení** (**zachovává** časové úrovně hran stromu).
- Vyřešeno pro **2-D** a **3-D toroidy**.
- Vyřešeno pro **hyperkrychle**.

Lemma 12. *Libovolná 2 přeložení generického $B(*)$ jsou **TADTy** \iff všechny hrany na každé úrovni i v $B(*)$ jsou **různých směrů** (např. N,E,W,S ve 2-D).* ♣

- $K(z, z)$, z je liché: **triviální** optimální řešení, $\beta = 0$:
 $B(*) = 4$ rotace 2-D hada velikosti $(z_1 z_2 - 1)/4$ a pokrývajícího 1 čtvrtinu toroidu.



(a) 2 různá řešení pro $K(7, 7)$



(b) řešení pro $K(4, 3)$

- Obecné $K(z_1, z_2)$: časově-optimální a $\beta \leq 3$, viz příklad (b).
- $K(z, z, z)$, z je liché: **triviální** řešení, kde $B(*) = 6$ rotací 3-D hada vyplňujícího pyramidu. ($K(z, z, z)$ je sjednocení 6 pyramid.)
- Obecné 3-D $K(z_1, z_2, z_3)$: časově-optimální a $\beta \leq 60$.

- Alternativní řešení pro 2-D: 2 **hranově disjunktní** hamiltonovské kružnice H_1 a H_2 .

Algoritmus PARALLELHAMILCYCLEAAB(G)

Každý uzel rozpůlí svůj paket p na 2 dvojčata = 2 stejné části p_1 a p_2

Pak pošle p_1 podél H_1 a p_2 podél H_2 , resp., v **obou** směrech.

Každý uzel v každém dalším kroku

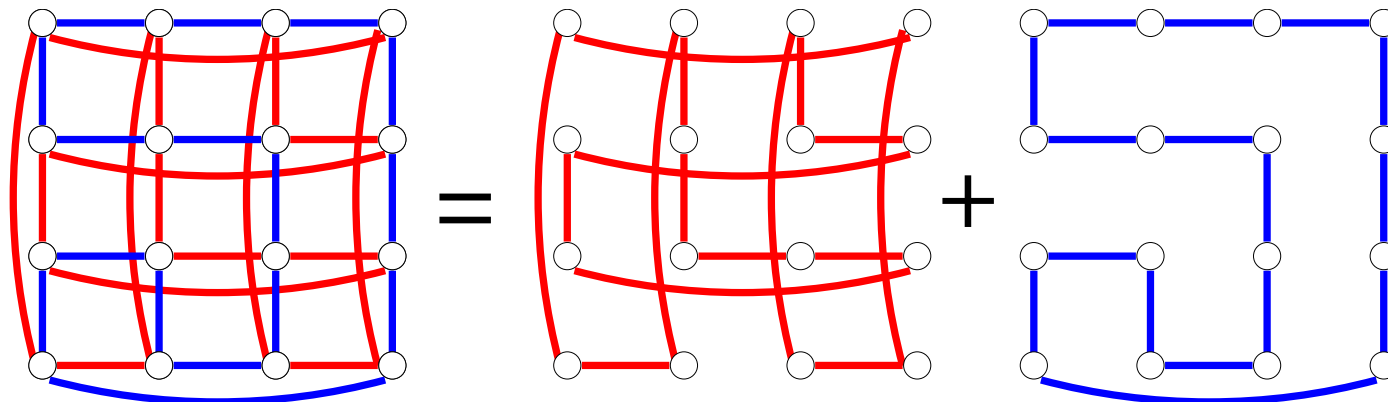
přijme a uloží 4 subpakety

přepoše je podél jejich Hamiltonských kružnic.

pokud pro nějaký paket už obdržel obě dvojčata,
pak je složí zpět do původního paketu.

Lemma 13. $r_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2)) \doteq \frac{z_1 z_2}{2}$ (každý subpaket cestuje pouze do půlky své kružnice) a

$$t_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2), \mu) = r_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2))(t_s + \frac{\mu}{2}t_m) \doteq \frac{z_1 z_2}{2}t_s + \frac{z_1 z_2}{4}\mu t_m.$$



Poznámka: Srovnej s řešením pomocí TADTs.

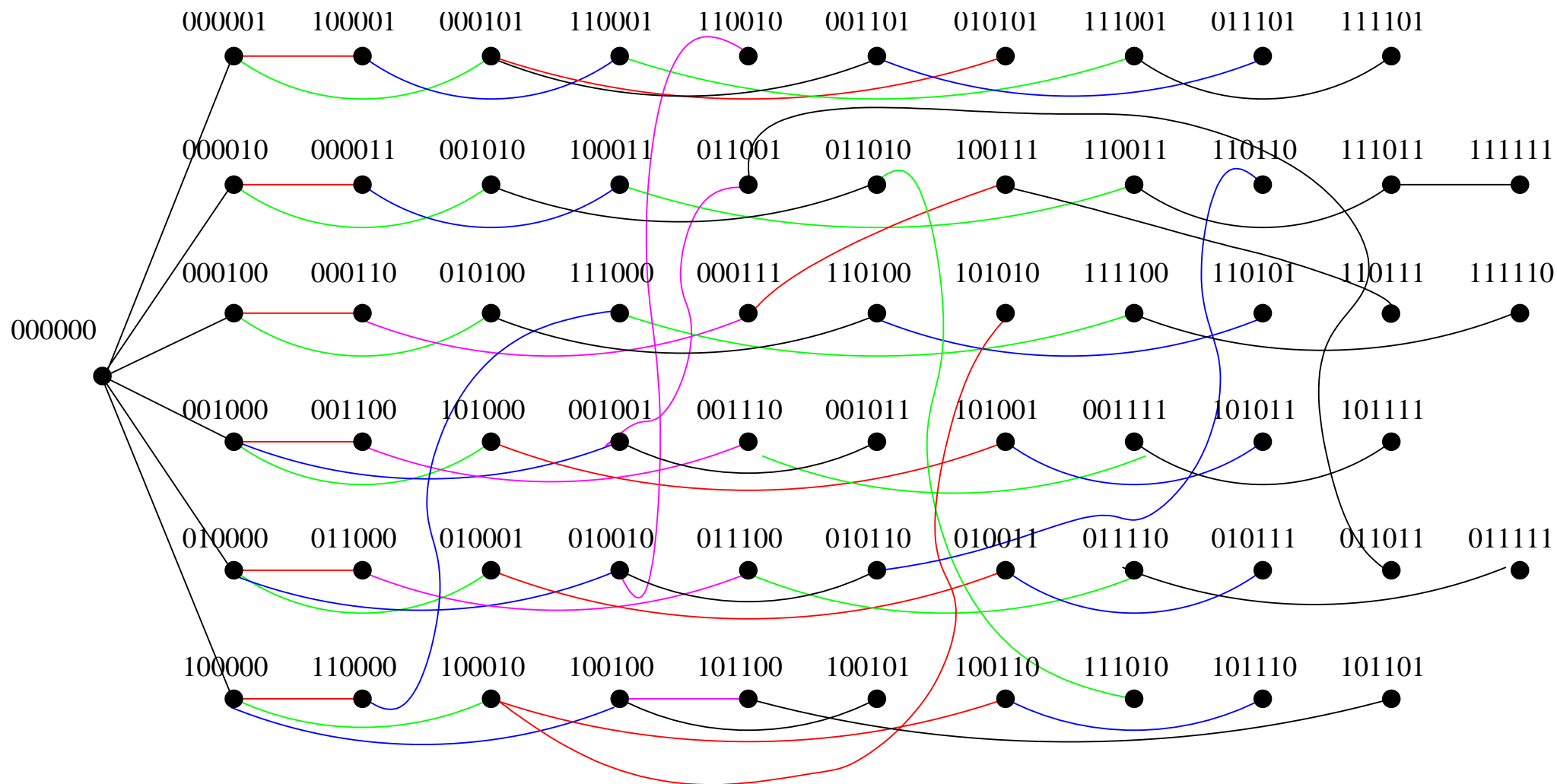
Úkol: zkonstruovat **generickou** TADT $B(0)$ v Q_n takovou, že

- množina hran na úrovni i se skládá z n hran hyperkrychle o n různých směrech,
- kromě poslední úrovně $\lceil (2^n - 1)/n \rceil$, která se skládá z $((2^n - 1) \bmod n) < n$ hran.

Konstrukce:

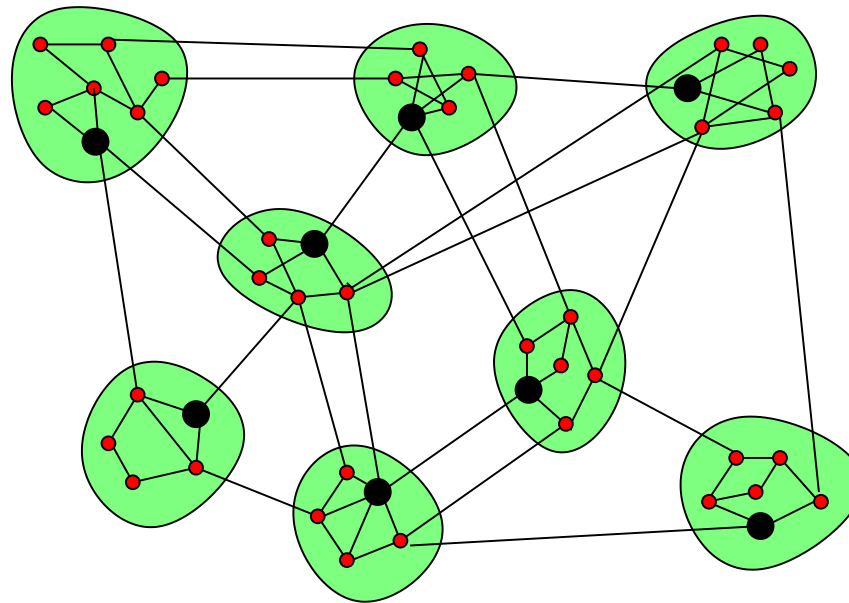
- Rozděl uzly Q_n do **náhrdelníků**.
- Setříd' náhrdelníky podle rostoucího počtu bitů 1, začni vždy s $L_{k1} = \text{rotace } 1^k 0^{n-k}$.
- Uspořádej řetězce v náhrdelnících do n -sloupcové tabulky tak, že
 - řádek i tabulky definuje uzly $B(0)$ na úrovni i ,
 - začíná-li náhrdelník v sloupci j , začni v něm řetězcem $u = u_{n-1} \dots u_0$ s $u_j = 1$,
 - náhrdelník pokračuje rotováním.
- OAB strom: $u = u_{n-1} \dots u_{j+1} 1 u_{j-1} \dots u_0 \longrightarrow \text{neg}_j(u) = u_{n-1} \dots u_{j+1} 0 u_{j-1} \dots u_0$,
 kde u je v sloupci j a $\text{neg}_j(u)$ se **musí** objevit na předchozí úrovni (= řádku) než u
 \implies každý náhrdelník L_{k1} začínající ve sloupci j **musí** začínat uzlem u takovým, že
 na pozici $j - 1$ (cyklicky) má bit 0.

	0	1	2	3	4	5
1	$L_{11}: \{00000\mathbf{1}$	$0000\mathbf{10}$	$000\mathbf{100}$	$00\mathbf{1000}$	$0\mathbf{10000}$	$\mathbf{100000}\}$
2	$L_{21}: \{0000\mathbf{11}$	$000\mathbf{110}$	$00\mathbf{1100}$	$0\mathbf{11000}$	$\mathbf{110000}$	$\mathbf{100001}\}$
3	$L_{22}: \{01000\mathbf{1}$	$1000\mathbf{10}$	$000\mathbf{101}$	$00\mathbf{1010}$	$0\mathbf{10100}$	$\mathbf{101000}\}$
4	$L_{23}: \{00100\mathbf{1}$	$0100\mathbf{10}$	$100\mathbf{100}\}$	$L_{31}: \{\mathbf{111000}$	$\mathbf{110001}$	$\mathbf{100011}$
5	$000\mathbf{111}$	$00\mathbf{1110}$	$0\mathbf{11100}\}$	$L_{32}: \{\mathbf{101100}$	$0\mathbf{11001}$	$\mathbf{110010}$
6	$100\mathbf{101}$	$00\mathbf{1011}$	$0\mathbf{10110}\}$	$L_{33}: \{\mathbf{001101}$	$0\mathbf{11010}$	$\mathbf{110100}$
7	$10\mathbf{1001}$	$0\mathbf{10011}$	$100\mathbf{110}\}$	$L_{34}: \{\mathbf{101010}$	$0\mathbf{10101}\}$	$L_{41}: \{\mathbf{100111}$
8	$00\mathbf{1111}$	$0\mathbf{11110}$	$1\mathbf{11100}$	$1\mathbf{11001}$	$\mathbf{110011}\}$	$L_{42}: \{\mathbf{111010}$
9	$1\mathbf{10101}$	$10\mathbf{1011}$	$0\mathbf{10111}$	$10\mathbf{1110}$	$0\mathbf{11101}\}$	$L_{43}: \{\mathbf{110110}$
10	$10\mathbf{1101}$	$0\mathbf{11011}\}$	$L_{51}: \{\mathbf{111101}$	$1\mathbf{11011}$	$\mathbf{110111}$	$\mathbf{101111}$
11	$0\mathbf{11111}$	$1\mathbf{11110}\}$	$L_{61}: \{\mathbf{111111}\}$			



Algoritmus WHACCUMBROADCASTAAB(G)

- Fáze 1:** Rozděl G do 2^k souvislých **regionů** a zvol jejich **reprezentanty**.
- Fáze 2:** Každý reprezentant shromáždí pakety uvnitř svého regionu použitím AOG.
- Fáze 3:** Reprezentanti provedou AAB mezi sebou simulací AAB
v kombinujících Q_k (* viz Slide 9 *).
- Fáze 4:** Každý reprezentant distribuuje globální info uvnitř svého regionu.



- AAS = úplná výměna = osobní komunikace všichni-všem.
- Každý uzel vlastní $N - 1$ paketů velikosti μ , pro každý uzel jeden.
- Celkový počet paketů je $N(N - 1)$.
- Příklad: transpozice matice $A_{N,N}$, mapované po řádcích na N -procesorový počítač tak, že prvek $a_{i,j}$ je uložen v lokální paměti procesoru P_i na adrese j .

Spodní mez daná síťovou propustností

Lemma 14. *Nechť G je N -uzlová SF plně-duplexní síť s $m = |E(G)|$ hranami. Pak pro nekombinující AAS platí*

$$\rho_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G) = \frac{1}{2m} \left(\sum_{u \neq v} \text{dist}_G(u, v) \right) \quad \text{a} \quad \tau_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G)(t_s + \mu t_m)$$

a pro kombinující AAS platí

$$\rho_{\text{AAS}}^{\text{C}}(G) = \text{diam}(G) \quad \text{a} \quad \tau_{\text{AAS}}^{\text{C}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAS}}^{\text{C}}(G)t_s + \rho_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G)\mu t_m.$$



Spodní mez daná bisekční propustností

Lemma 15. *Nechť G je N -uzlová plně-duplexní síť s hranovou bisekční šířkou $\text{bw}_e(G)$, s WH nebo SF přepínáním. Pro kombinující i nekombinující AAS platí*

$$\tau_{\text{AAS}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAS}}(G)t_s + \frac{\lceil N/2 \rceil \lfloor N/2 \rfloor \mu t_m}{\text{bw}_e(G)},$$

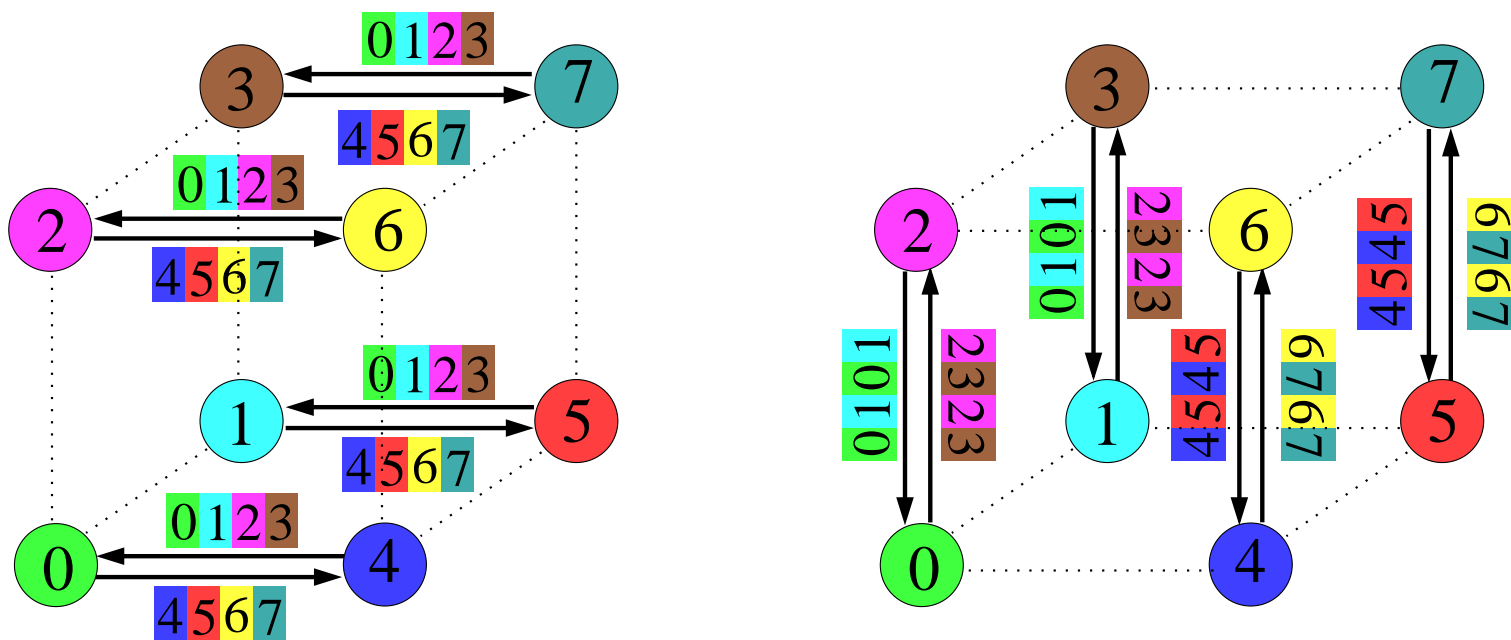
kde $\rho_{\text{AAS}}(G)$ závisí na modelu.

■ **Poznámka:** V polo-duplexní síti jsou spodní meze τ dvounásobné.

SF AAS v 1-portové hyperkrychli: alg. stand. výměna (STANDEXCH AAS)

$$t_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) = n(t_s + 2^{n-1}\mu t_m) > \tau_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) = nt_s + \frac{2^{n-1}2^{n-1}\mu t_m}{2^{n-1}} = nt_s + 2^{n-1}\mu t_m.$$

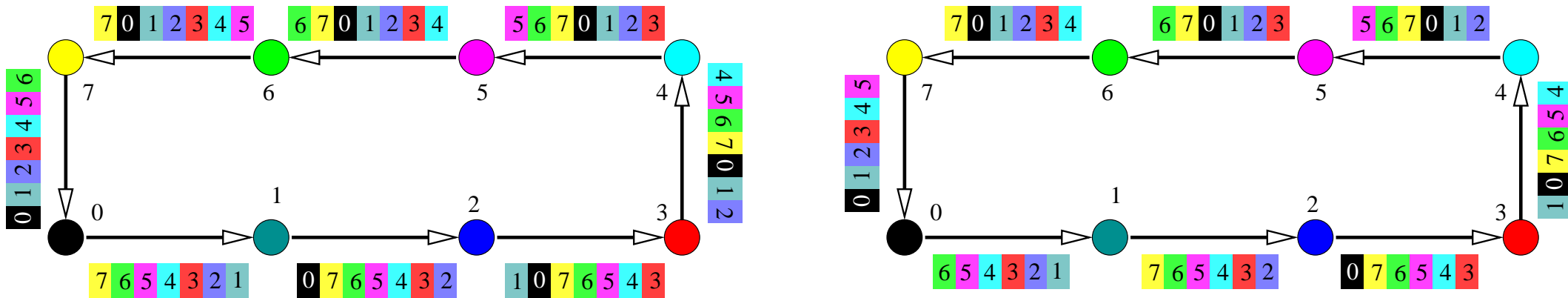
STANDEXCH AAS je pouze krokově optimální!



První 2 kroky 3-krokového AAS v kombinující 1-portové hyperkrychli Q_3

$$\tau_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = (z - 1)t_s + \lceil z/2 \rceil \lfloor z/2 \rfloor \mu t_m.$$

Triviální cyklický pipeline is asymptoticky optimální!!!

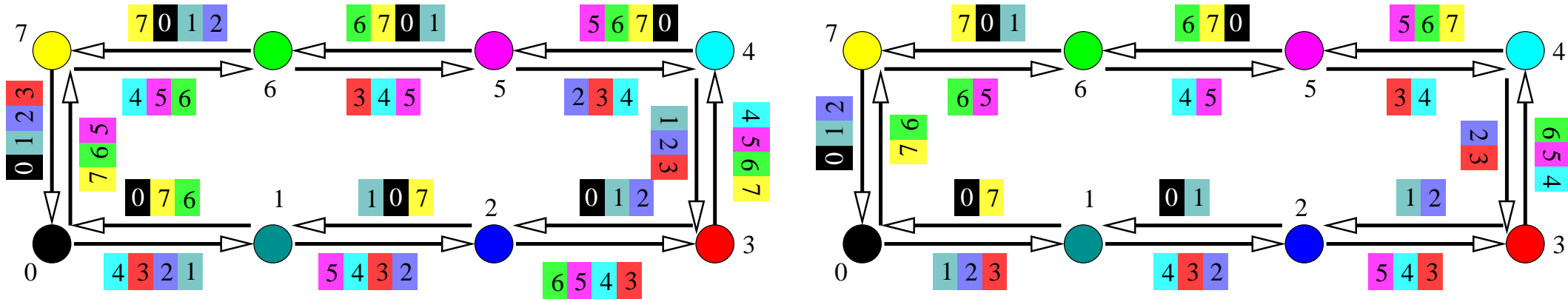


První 2 kroky AAS v kombinující 1-portové polo-dupl. kružnici.

$$t_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = \sum_{i=1}^{z-1} (t_s + \mu t_m(z - i)) = (t_s + \mu t_m z/2)(z - 1),$$

- WH přepínání neposkytne lepší algoritmus.

$$\tau_{\text{AAS}}(K(z), \mu) \doteq t_s z/2 + z^2 \mu t_m/8$$



- Zprávy jsou posílány v **obou směrech** a jsou **menší**.

Je-li z sudé, pak

$$t_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = \sum_{i=1}^{z/2} (t_s + \mu t_m i) = t_s z/2 + \mu t_m z(z+2)/8.$$

Je-li z liché, pak

$$t_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = \sum_{i=1}^{(z-1)/2} (t_s + \mu t_m ((z+1)/2 - i)) = t_s (z-1)/2 + \mu t_m (z^2 - 1)/8.$$

Důsledek 16. (Lemmy 15.) *Pro $R = K(z_1, \dots, z_n)$ s $z_i \geq z_{i+1}$ platí*

$$\tau_{\text{AAS}}(R, \mu) = \left(\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{z_1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{z_1}{2} \right\rceil \prod_{i=2}^n z_i \right) \mu t_m.$$

Důkaz.

- Rozřízni R na $R_1 = K(\lfloor z_1/2 \rfloor, \dots, z_n)$ a $R_2 = K(\lceil z_1/2 \rceil, \dots, z_n)$.
- Počet plně-duplexních kanálů spojujících R_1 s R_2 : $2 \prod_{i=2}^n z_i$.
- Počet paketů, které musí být vyměněny mezi R_1 a R_2 každým směrem:

$$|V(R_1)| \cdot |V(R_2)| = \lfloor z_1/2 \rfloor \lceil z_1/2 \rceil \prod_{i=2}^n z_i^2.$$



SF AAS algoritmus založený na kartézském rozkladu

$$r_{\text{AAS}}(K(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^n r_{\text{AAS}}(K(z_i)) \quad \text{a}$$

$$t_{\text{AAB}}(K(z_1, \dots, z_n), \mu) = \sum_{i=1}^n t_{\text{AAB}}(K(z_i), (\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_j) \mu)$$

Z Lemmy 15 plyne

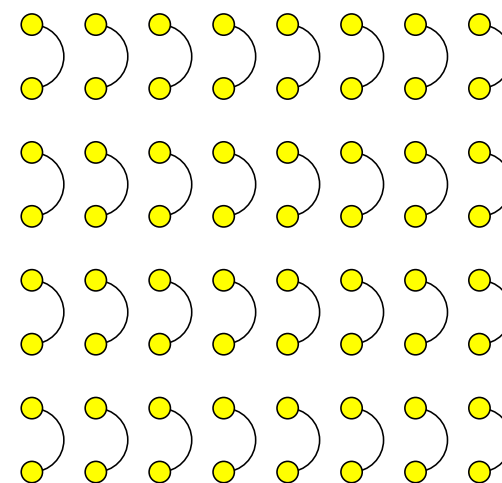
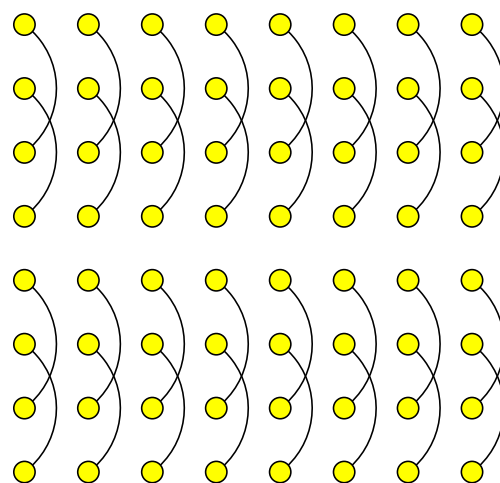
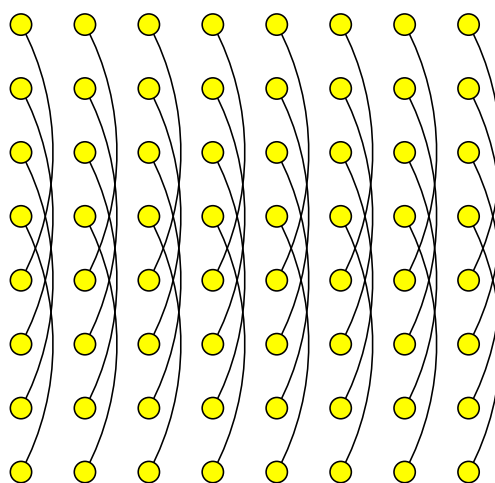
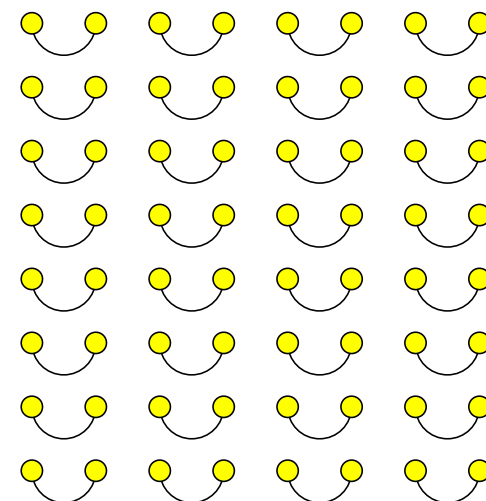
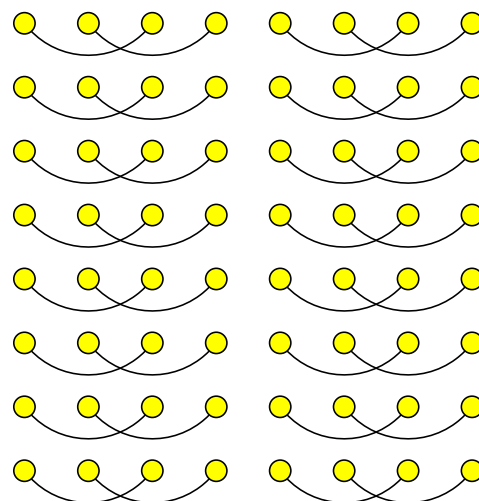
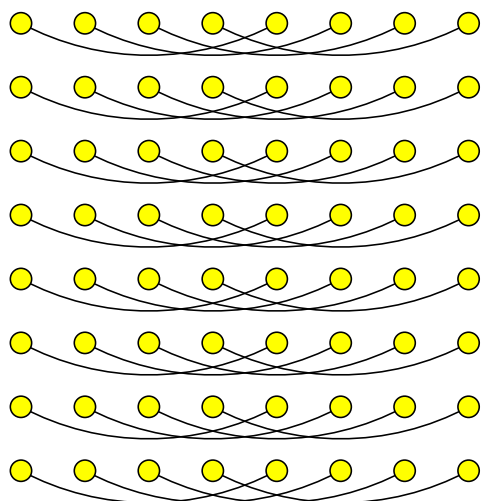
$$\tau_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}), \mu) = \rho_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}))t_s + \frac{N\sqrt{N}\mu t_m}{4}.$$

Algoritmus Binární výměna BINEXCHAAS (= simulace STANDEXCHAAS)

- $M(2^k, 2^l)$ je rekurzivně půlena, např. střídavě ve směrech X a Y.
- Počet **fází** je $k + l = \log N$.
- 1 fáze vyžaduje několik kroků, kvůli zahlcení WH kanálů.
- V každém kroku je mezi komunikujícími partnery vyměněn blok $N/2$ paketů.

Pro $N = 4^k$:

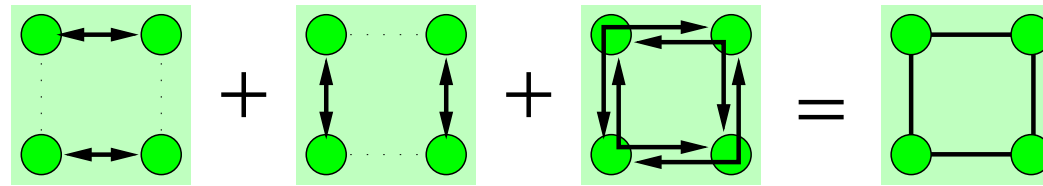
$$\begin{aligned}
t_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}), \mu) &= 2 \left[\frac{\sqrt{N}}{2} \left(t_s + \frac{\sqrt{N}}{2} t_d + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + \right. \\
&\quad \frac{\sqrt{N}}{4} \left(t_s + \frac{\sqrt{N}}{4} t_d + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + \\
&\quad \dots + \\
&\quad \left. \left(t_s + t_d + \frac{N}{2} \mu t_m \right) \right] \\
&= 2 \left(\frac{\sqrt{N}}{2} + \frac{\sqrt{N}}{4} + \dots + 1 \right) \left(t_s + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + \\
&\quad 2t_d \left(\frac{N}{4} + \frac{N}{4^2} + \dots + 1 \right) \\
&= 2(\sqrt{N} - 1) \left(t_s + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + 2t_d \frac{N - 1}{3} \\
&\doteq 2\sqrt{N}t_s + N\sqrt{N}\mu t_m + \frac{2}{3}Nt_d. \tag{1}
\end{aligned}$$



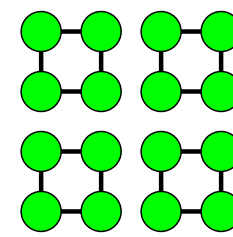
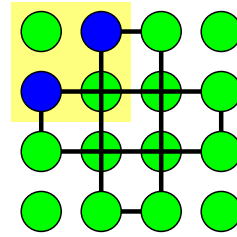
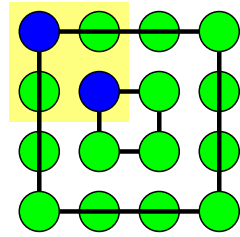
BINEXCHAS v $M(8, 8)$:

- (a) Fáze 1X a 1Y: 4 kroky (b) Fáze 2X a 2Y: 2 kroky (c) Fáze 3X a 3Y: 1 krok

- Navrženo speciálně pro WH mřížky.
- $M(2^k, 2^k)$ je rekurzivně dělena do **kvadrantů** \implies **fáze**.
- 1 fáze odpovídající kvadrantům velikosti $2^l \times 2^l$ má 2^l **podfází**.
- V podfázi i , všechny čtveřice zrcadlově symetrických prvků na i -tých **diagonálách** všech 4 kvadrantů provádějí paralelně **mikro-AAS**.
- 1 mikro-AAS = 3-kroková osobní výměna paketů mezi 4 rohy obdélníku.

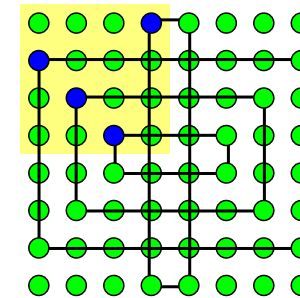
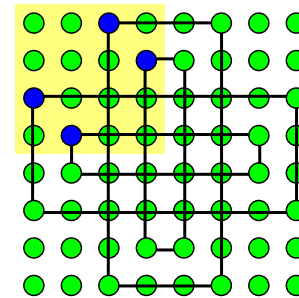
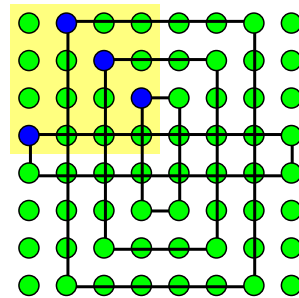
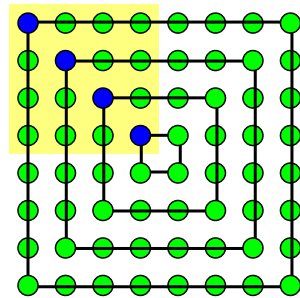


(a) Mikro-AAS



(b) Faze 1 v M(4,4)

(b) Faze 2 v M(4,4)



(c) Faze 1 v M(8,8)

QUADEXCHAAS WH mřížkách $M(2^k, 2^k)$:

(a) 3-krokový mikro-AAS mezi 4 rohy obdélníku.

(b) QEX AAS na $M(4, 4)$: Fáze 1 (2 podfáze) a fáze 2 (1 mikro-AAS).

(c) QEX AAS na $M(8, 8)$: Fáze 1 (4 podfáze).

$$t_{\text{AAS}} \left(M \left(\sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu = \right) = t_{\text{AAS}}^{\text{Faze1}} \left(M \left(\sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu \right) + t_{\text{AAS}} \left(M \left(\frac{\sqrt{N}}{2}, \frac{\sqrt{N}}{2} \right), 4\mu \right) \quad (2)$$

1. Fáze 1 v $M(\sqrt{N}, \sqrt{N})$ se skládá z $\frac{\sqrt{N}}{2}$ podfází.

- Složitost 1 podfáze je dána složitostí největšího mikro-AAS.
- Složitost 1. podfáze: $3t_s + 3\frac{N}{4}\mu t_m + 4t_d(\sqrt{N} - 1)$
- Složitosti ostatních podfází: $3t_s + 3\frac{N}{4}\mu t_m + kt_d\sqrt{N}$, kde přibližně $k \in \{3, 4\}$.
- Horní odhad časové složitosti Fáze 1:

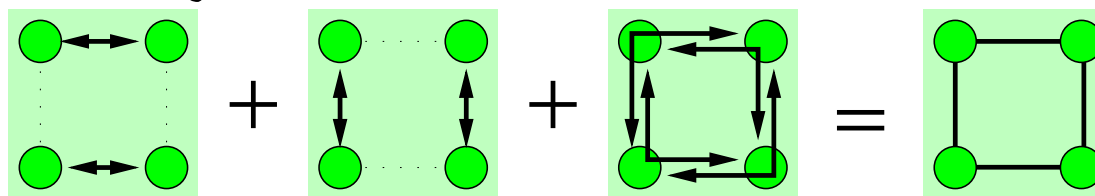
$$\begin{aligned} t_{\text{AAS}}^{\text{Faze1}} \left(M \left(\sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu \right) &\doteq \frac{\sqrt{N}}{2} \left(3t_s + \frac{3N}{4}\mu t_m + 4t_d\sqrt{N} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{N}}{2}t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{8}\mu t_m + 2Nt_d. \end{aligned}$$

2. Z (2) plyne

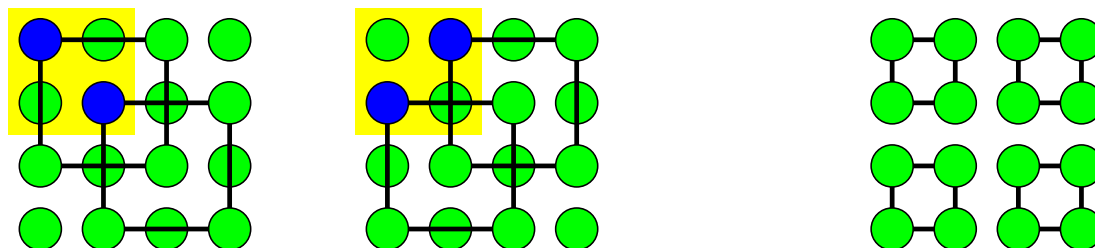
$$\begin{aligned}
t_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}), \mu) &= \frac{3\sqrt{N}}{2}t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{8}\mu t_m + 2Nt_d + \\
&\quad \frac{3\sqrt{N}}{4}t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{16}\mu t_m + 2\frac{N}{4}t_d + \\
&\quad \dots + \\
&\quad 3t_s + \frac{3N}{4}\mu t_m + 4t_d \\
&\doteq 3\sqrt{N}t_s + \frac{3}{4}N\sqrt{N}\mu t_m + \frac{8N}{3}t_d.
\end{aligned}$$

3. Srovnáním s (1) na slajdu 26 plyne, že QUADEXCHAAS má ve srovnání s BINEXCHAAS menší přenosovou latenci na úkor většího počtu kroků a celkově větší délky použitých cest.

Místo zrcadlové symetrie stejnolehlost.

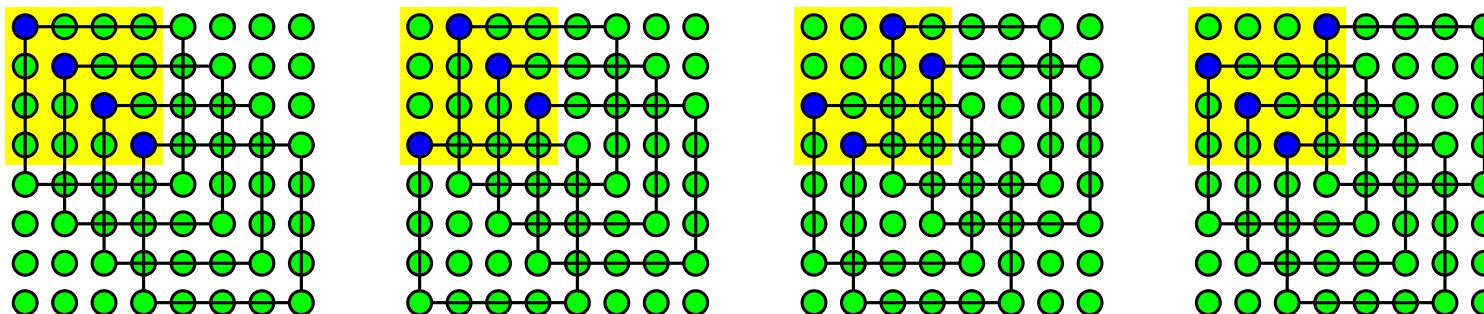


(a) Mikro-AAS



(b) Faze 1 v M(4,4)

(b) Faze 2 v M(4,4)



(c) Faze 1 v M(8,8)

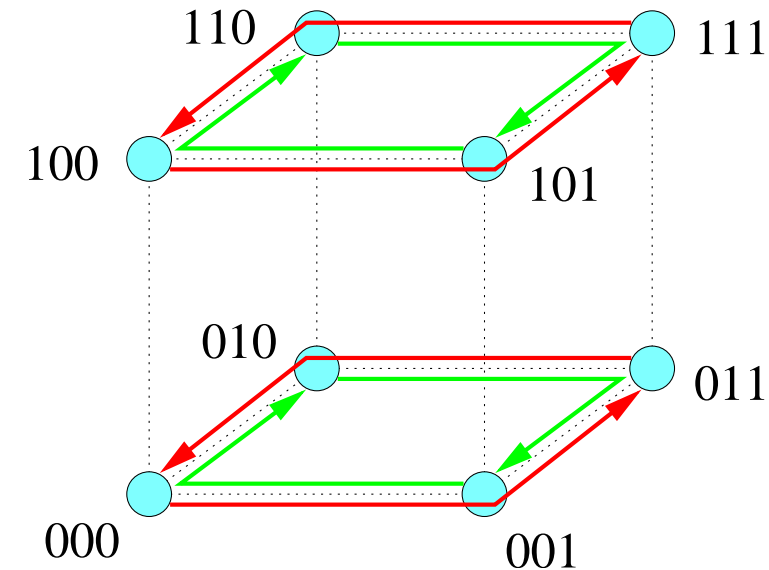
$$t_{\text{AAS}}^{\text{Faze1}} \left(M \left(\sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu \right) = \frac{3\sqrt{N}}{2} t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{8} \mu t_m + N t_d$$

WH AAS: Přímá výměna (DIREXCHAAS) v hyperkrychli

- Je-li $t_s \ll 2^{n-1} \mu t_m$, STANDEXCHAAS v kombinující SF Q_n není optimální.
- DIREXCHAAS = série $2^n - 1$ permutací **přeložení** $\pi_j : x \mapsto x \text{ XOR } j$
 \implies každá dvojice uzlů $(i, \pi_j(i))$ si vyměňuje přímo své 2 pakety.
- Každá permutace π_j je při použití e -cube WH přepínání bezkolizní a 1-kroková

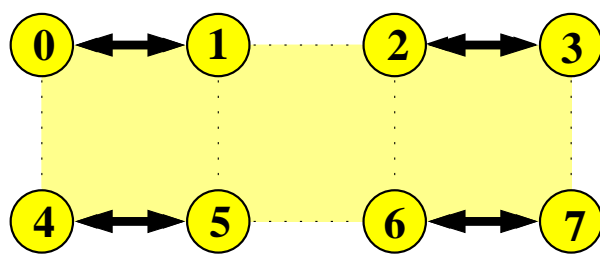
$$\implies t_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) \doteq (2^n - 1)(t_s + nt_d/2 + \mu t_m)$$

(průměrná vzdálenost je přibližně $n/2$)

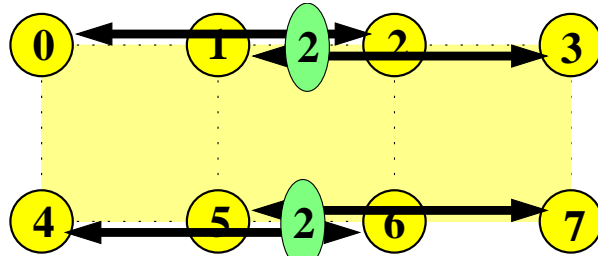


- Je-li $t_s \ll \mu t_m$, pak je DIREXCHAAS na WH Q_n asymptoticky optimální
 neboť $t_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) \doteq 2\tau_{\text{AAS}}(Q_n, \mu)$ (viz Slajd 19).

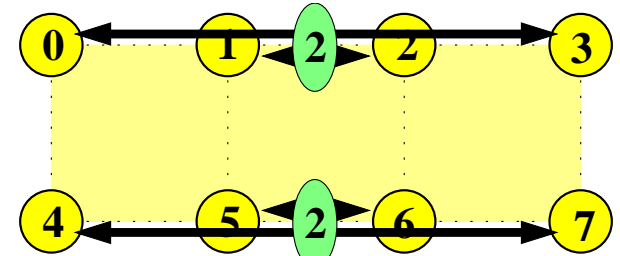
- Přiřadíme uzlům mřížky binární adresy lexikograficky: 1 řádek = 1 podkrychle.
- XY směřování produkuje **zahlcení linek** pro některé permutace π_j .
- Jednotlivé permutace vyžadují různý počet kroků.



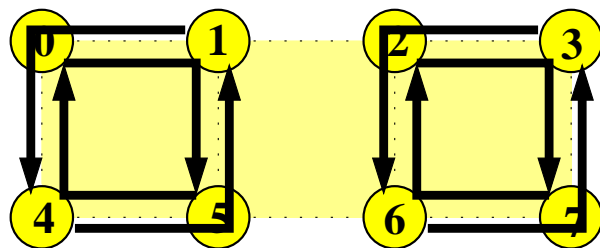
j=001



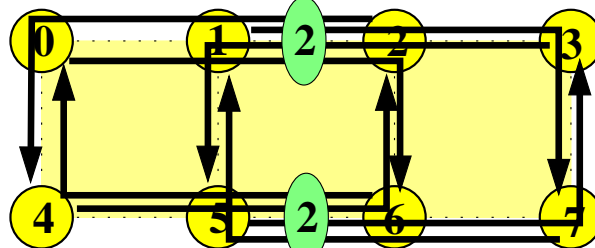
j=010



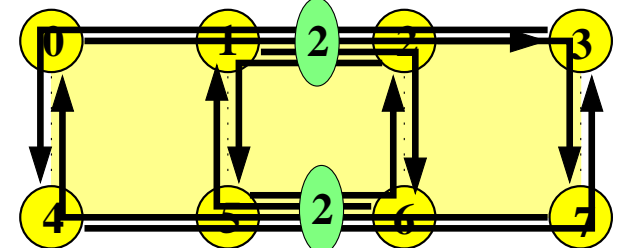
j=011



j=101



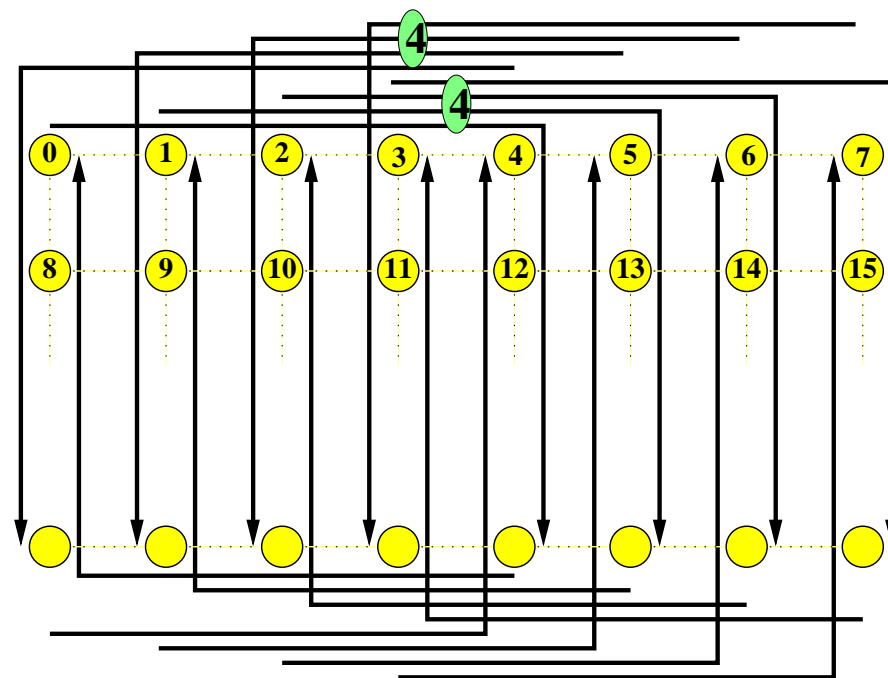
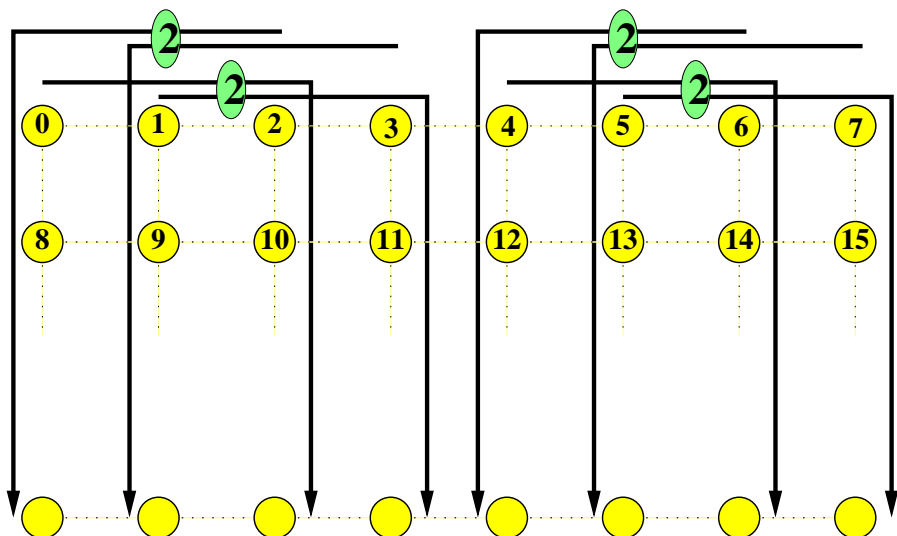
j=110

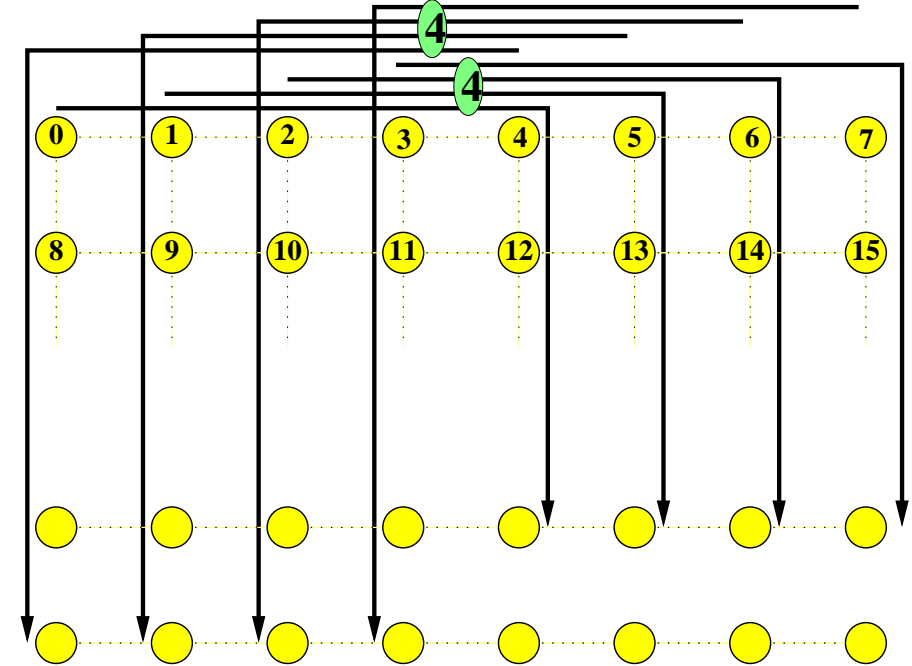
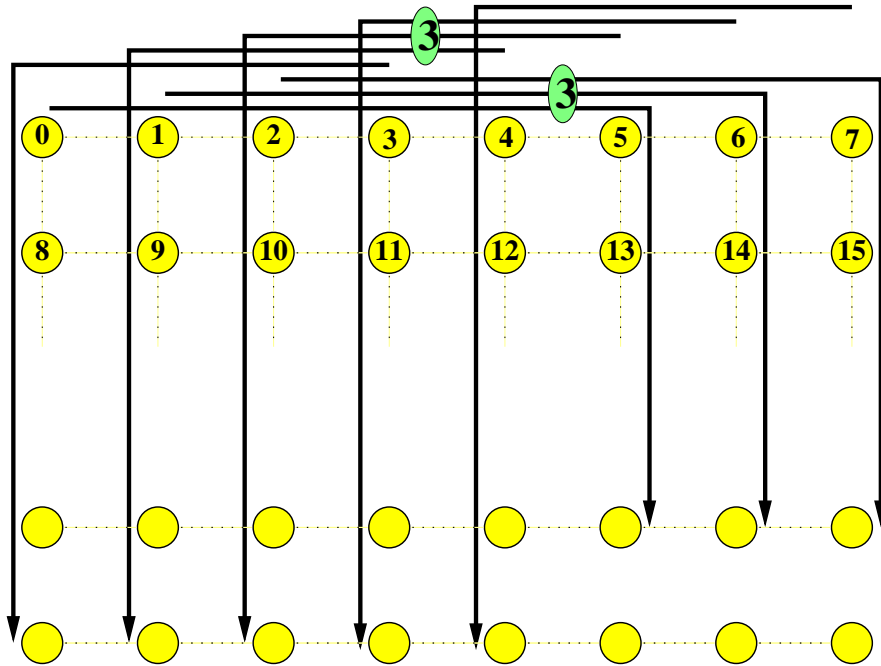


j=111

Realizace vybraných permutací π_j na $M(2, 4)$.

- Maximální zahlčení linek v $M(z_1, z_2)$ pro permutace je $\max(z_1, z_2)/2$.





- AAS se rozloží na posloupnost permutací **kartézský posun**.
- Stejný problém se zahlcením, hodnoty zahlcení jsou takéž $\max(z_1, z_2)/2$.