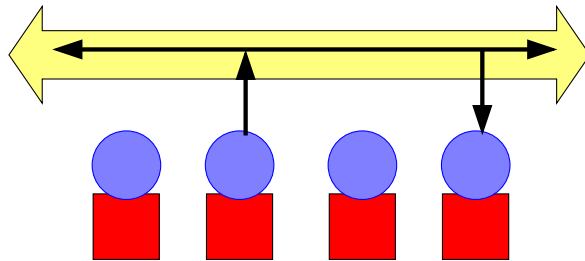


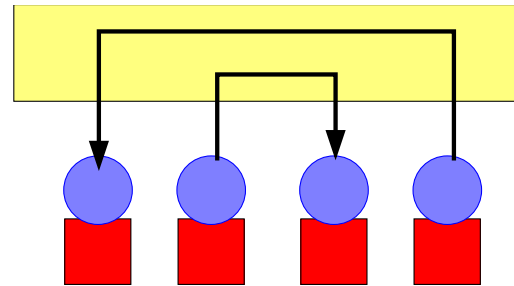
## Přednáška #4: Propojovací síť

### Typy propojovacích sítí

- (a) **Sdílené** komunikační médium: sběrnice (Ethernet)
- (b) **Přepínané** komunikační médium: uzly připojeny k přepínačům



(a)



(b)

### Propojovací síť s přepínači

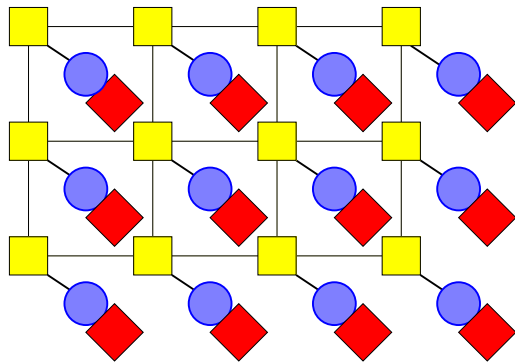
- Reprezentace: souvislý graf, kde
  - **vrcholy** = výpočetní uzly (PE) a přepínače
  - **hrany** = komunikační linky,
  - každý PE je připojen k 1 přepínači,
  - přepínače propojují PE a/nebo přepínače.

(a) **Přímé** sítě: každý přepínač je připojen aspoň k 1 PE.

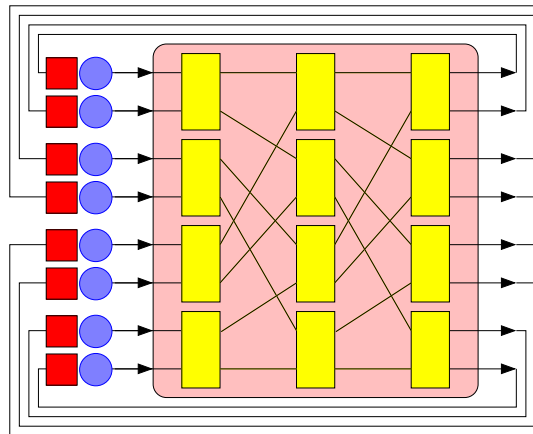
(b)+(c) **Nepřímé** sítě: některé přepínače jsou připojeny pouze k jiným přepínačům.

(a)+(b) **Pravidelné** sítě: topologie propojení tvoří pravidelný zobecnitelný graf.

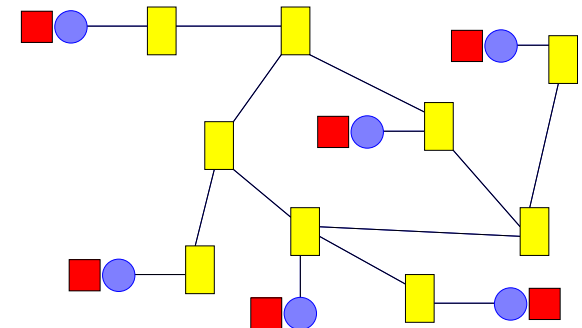
(c) **Nepravidelné** sítě: topologie propojení tvoří náhodný graf.



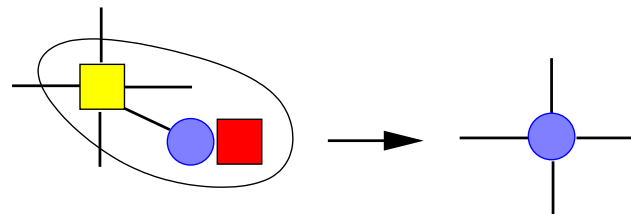
(a)



(b)



(c)



Zjednodušení obrázků přímých sítí:

## Abecedy a řetězce

**$d$ -ární abeceda** :  $\mathcal{Z}_d = \{0, 1, \dots, d - 1\}$

**$n$ -znakové  $d$ -ární řetězce** :  $\mathcal{Z}_d^n = \{x_{n-1} \dots x_0; x_i \in \mathcal{Z}_d\}, n \geq 1$

$\text{len}(x)$  = délka řetězce  $x$

$x^i$  =  $i$ -násobné zřetězení  $x$

$\text{rot}_j(x_{n-1} \dots x_0) = x_{j-1} \dots x_0 x_{n-1} \dots x_j$

**binární abeceda**  $\mathcal{B}$

$\overline{b_i} = 1 - b_i$  = inverze bitu  $b_i$

$\text{neg}_i(b) = b_{n-1} \dots b_{i+1} \overline{b_i} b_{i-1} \dots b_0$

**modulární aritmetika** :  $\oplus_n, \ominus_n$

**binární logaritmy** :  $\log$

## Grafy a podgrafy

**Množina uzlů a hran** grafu  $G$  :  $V(G), E(G), N = |V(G)|$

uvažujeme pouze **jednoduché souvislé grafy bez smyček**.

**Sousední uzly**  $u$  a  $v$  = **hrana**  $\langle u, v \rangle$ .

$H$  = **podgraf** grafu  $G$ ,  $H \subset G$  :  $V(H) \subset V(G)$  a  $E(H) \subset E(G)$ .

$H$  = **indukovaný podgraf**  $G$  : **maximální** podgraf s  $V(H)$ .

$H$  = **faktor** grafu  $G$  :  $V(H) = V(G)$ .

**Klika**  $U_k$  = **úplný graf** o  $k$  uzlech.

**Stupeň uzlu  $u$  :**  $\deg_G(u) = \# \text{ sousedů uzlu } u$ .

**Množina stupňů grafu  $G$  :**  $\deg(G) = \{\deg_G(u); u \in V(G)\}$ .

**Maximální stupeň grafu  $G$  :**  $\Delta(G) = \max(\deg(G))$ .

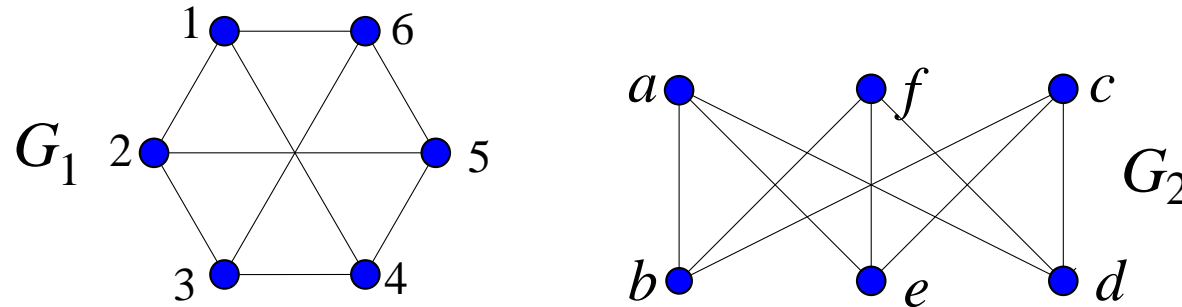
**Minimální stupeň grafu  $G$  :**  $\delta(G) = \min(\deg(G))$ .

**$k$ -regulární graf  $G$  :**  $\Delta(G) = \delta(G) = k$ .

**Řídký graf :**  $|E(G)| = O(|V(G)|)$  (stupně uzlů jsou omezeny konstantou).

**Hustý graf :**  $|E(G)| = \omega(|V(G)|)$  (stupně uzlů jsou rostoucí funkcí  $|V(G)|$ ).

**Izomorfismus** :  $G_1 \equiv G_2$



**Automorfismus**  $G$  : každé izomorfní zobrazení  $G$  na sebe sama.

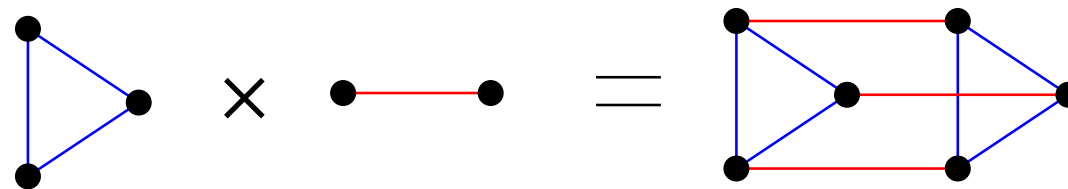
## Sjednocení a kartézský součin

**Sjednocení** :  $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ .

**Kartézský součin**  $G = G_1 \times G_2$  :

$$V(G) = \{(x, y); x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$$

$$E(G) = \{ \langle (x_1, y), (x_2, y) \rangle; \langle x_1, x_2 \rangle \in E(G_1) \} \cup \{ \langle (x, y_1), (x, y_2) \rangle; \langle y_1, y_2 \rangle \in E(G_2) \}$$



**Výrok 1.** *Kartézský součin je komutativní a asociativní operace:*

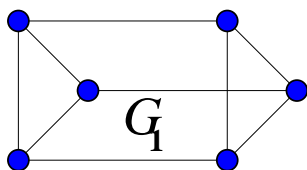
$$G_1 \times G_2 \equiv G_2 \times G_1 \text{ a } (G_1 \times G_2) \times G_3 \equiv G_1 \times (G_2 \times G_3).$$

**Značení:**  $G \times G = G^2$ ,  $G \times G \times G = G^3$ , atd.

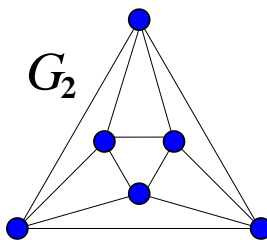
**Uzlově symetrický graf** :  $\forall u_1, u_2 \in V(G) \exists$  automorfizmus  $f$  takový, že  $f(u_1) = u_2$ . (a)

**Hranově symetrický graf** :  $\forall e_1 = \langle u_1, v_1 \rangle, e_2 = \langle u_2, v_2 \rangle \in E(G) \exists$  automorfizmus  $f$  takový, že  $f(e_1) = e_2$ . (Musí platit i pro  $e_2 = \langle v_1, u_1 \rangle$ .) (b)

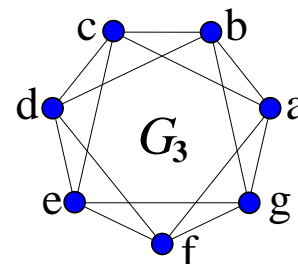
**Částečně hranově symetrický graf** :  $\exists$  rozklad  $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_r$  pro  $r \geq 2$  takový, že  $\forall 1 \leq j \leq r \forall e_1, e_2 \in E_j \exists$  automorfizmus  $f$  takový, že  $f(e_1) = e_2$ . (a)+(c)



(a) uzlove sym.



(b) hranove sym.



(c) castecne hran. sym.

- Lemma 2.** (1) Jsou-li  $G_1$  a  $G_2$  uzl. sym., pak  $G = G_1 \times G_2$  je také uzl. sym.  
 (2) Je-li  $G$  hranově symetrický, pak  $G^k$  je též hranově symetrický pro každé  $k \geq 2$ .  
 (3) Každý hranově symetrický graf je uzlově symetrický.  
 (4) Každý uzlově symetrický graf je regulární.  
 (5) Cykly  $K_k$  a kliky  $U_k$  jsou hranově symetrické.

**Poznámka:** Tato definice hranové symetrie se liší od běžné definice z teorie grafů (viz <http://mathworld.wolfram.com/EdgeAutomorphism.html>), která není pro propojovací sítě příliš použitelná.

**Procházka, cesta, cyklus** v grafu  $G$ .

**Uzlově disjunktní cesty** :  $V(P_1(u, v)) \cap V(P_2(x, y)) = \{u, v\} \cap \{x, y\}$

**Hranově disjunktní cesty** :  $E(P_1(u, v)) \cap E(P_2(x, y)) = \emptyset$

**Délka cesty**  $P(u, v)$  :  $\text{len}(P(u, v)) = \# \text{ hran v } P(u, v)$ .

**Vzdálenost** uzlů  $u$  a  $v$  :  $\text{dist}_G(u, v) = \text{délka nejkratší } P(u, v)$ .

**Průměrná vzdálenost** v  $N$ -uzlovém  $G$  :

$$\overline{\text{dist}}(G) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{u, v \\ u \neq v}} \text{dist}_G(u, v).$$

**Excentricita** uzlu  $u$  :  $\text{exc}(u) = \max_{v \in V(G)} \text{dist}_G(u, v)$ .

**Průměr** grafu  $G$  :  $\text{diam}(G) = \max_{u, v} \text{dist}_G(u, v) = \max_u \text{exc}(u)$ .

**Poloměr** grafu  $G$  :  $r(G) = \min_u \text{exc}(u)$ .



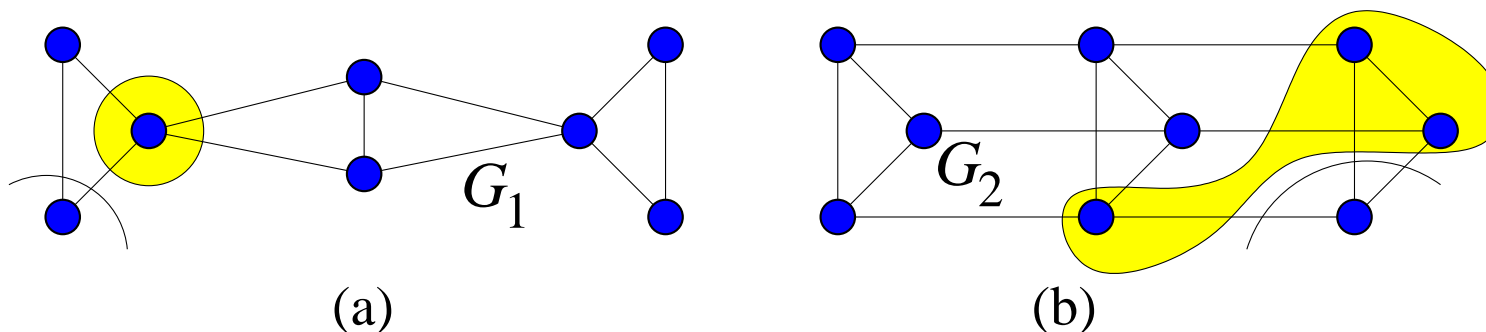
**Uzlový řez** : množina uzlů, jejichž odebrání způsobí rozpojení grafu.

**Hranový řez** : množina hran, jejichž odebrání způsobí rozpojení grafu.

**(Uzlová) souvislost** grafu  $G$  :  $\kappa(G)$  = velikost **minimálního** uzlového řezu.

**Hranová souvislost** grafu  $G$  :  $\lambda(G)$  = velikost **minimálního** hranového řezu.

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$



(a)  $\kappa(G_1) = 1, \lambda(G_1) = \delta(G_1) = 2.$

(b)  $\kappa(G_2) = \lambda(G_2) = \delta(G_2) = 3.$

**$k$ -souvislý graf (hranově  $k$ -souvislý graf)** :  $\kappa(G) = k$  ( $\lambda(G) = k$ )

**Optimální souvislost** :  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$

**Věta 3. (Mengerova)** Mezi libovolnými 2 uzly  $G$

$\exists$  *nejméně  $\kappa(G)$  uzlově disjunktních a nejméně  $\lambda(G)$  hranově disjunktních cest.*



**Chybová vzdálenost** mezi  $u$  a  $v$  :

maximum z délek všech **možných co nejkratších uzlově disjunktních** cest mezi  $u$  a  $v$ .

**Chybový průměr** : maximum ze všech chybových vzdáleností.

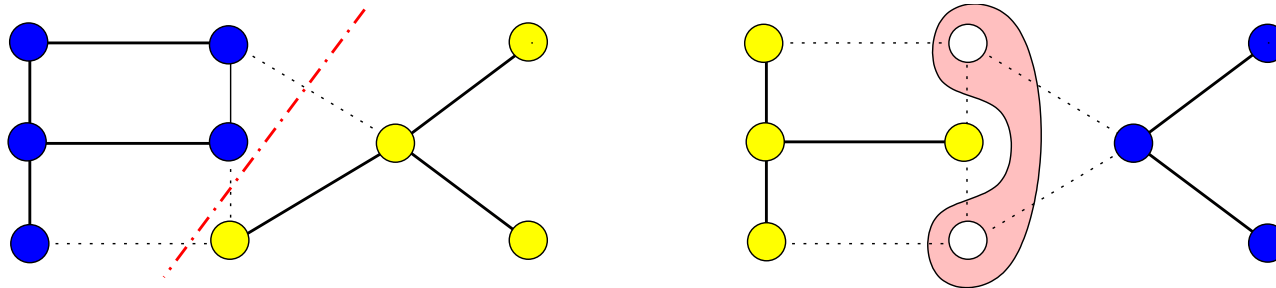
## Bisekce

**(Hranová) bisekční šířka** grafu  $G$ ,  $\text{bw}_e(G)$  :

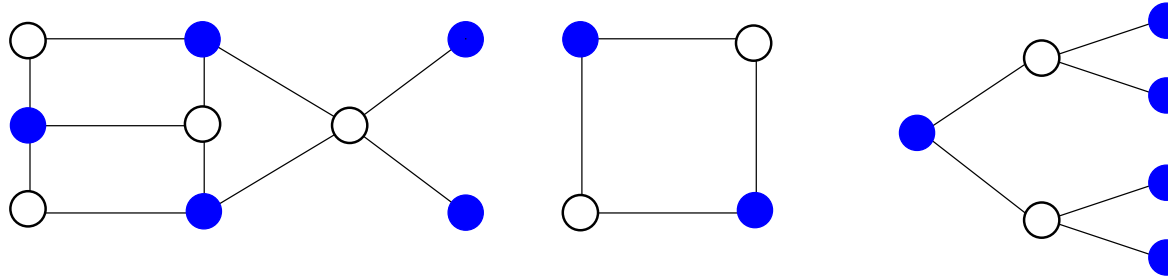
velikost nejmenšího hranového řezu grafu  $G$  na **2 poloviny**.

**Uzlová bisekční šířka** grafu  $G$ ,  $\text{bw}_v(G)$  :

velikost nejmenšího uzlového řezu grafu  $G$  na **2 poloviny** (velikosti nejvýše  $\lceil N/2 \rceil$  uzlů)



**Bipartitní a vyvážený bipartitní graf :**



**Hamiltonovská cesta (kružnice) :**

cesta (uzavřená) přes všechny uzly (permutace uzlů).

**Lemma 4.** *Bipartitní graf může mít hamiltonovskou kružnici, jestliže je vyvážený.*



**Topologie** : množina grafů (instancí topologie), jejichž velikost a struktura je definovaná parametry ( **hodnotami dimenzí** ).

**Hierarchicky rekurzivní topologie** : instance nižších dimenzí jsou **podgrafy** instancí vyšších dimenzí.

**Inkrementálně škálovatelná topologie** : definovaná pro  $\forall N$ .

**Částečně škálovatelná topologie** : definovaná pro některé, ale  $\infty$  mnoho  $N$ .

**Efektivně škálovatelná topologie** : pro konst.  $k > 0$  lze  $(N + k)$ -uzlovou instanci konstruovat z  $N$ -uzlové instance tak, že  $\#$  odebraných hran je  $O(k)$ .

**Orientované grafy = digrafy :**

- množina orientovaných hran  $A(G)$
- orientovaná hrana  $\langle u \rightarrow v \rangle$  je **incidentní z  $u$  do  $v$**
- $\deg_G^{\text{in}}(u)$  a  $\deg_G^{\text{out}}(u)$  : **vstupní stupeň** a **výstupní stupeň** uzlu  $u$
- orientovaná cesta
- orientovaný průměr
- silná souvislost

## Malý a konstantní stupeň uzlu

- Technologický požadavek.
- Stupeň uzlu je omezen konstantou  $\implies$  **řidký graf**  $\implies |E(G)| = O(N)$ .
- Levné a univerzální směrovače  $\times$  malá souvislost a velké vzdálenosti.

## Malý průměr a malá průměrná vzdálenost

- Algoritmický požadavek.
- Snižuje **komunikační zpoždění** pro
  - jak směrování **citlivé na vzdálenost** (např. store-and-forward),
  - tak směrování **necitlivé na vzdálenost** (např. wormhole) = viz Přednáška 6.

**Věta 5.** *Spodní mez průměru  $N$ -uzlové řídké sítě je  $\Omega(\log N)$ .*

**Důkaz:** Je-li dán  $N$ -uzlový graf s  $\Delta(G) \leq k$ ,  $k$  je konstanta,

$\implies$  # uzlů  $G$  dosažitelných nejvýše  $i$  kroky je  $O(k^i)$

$\implies N = O(k^{\text{diam}(G)}) \implies \text{diam}(G) = \Omega(\log N)$ .



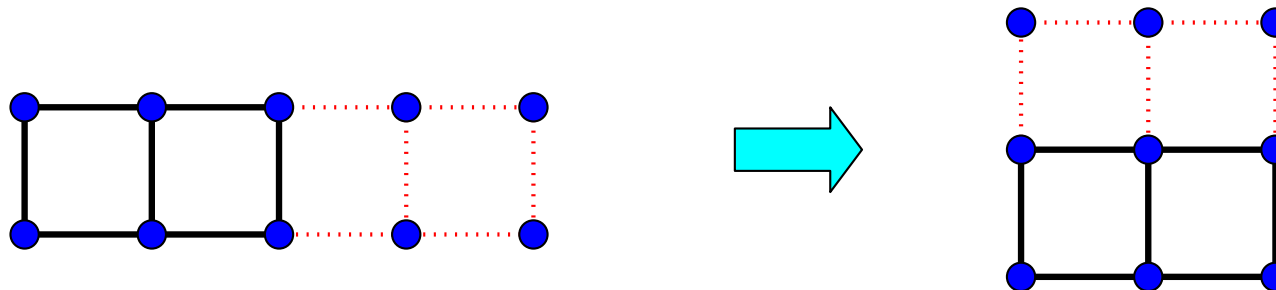
- Rozmístitelnost uzlů v 3-D tak, že délka kabelů je konstantní.

## Symetrie

- Návrh paralelních a komunikačních algoritmů je snazší, neboť
  - nezáleží na tom, kde výpočet začne,
  - nezáleží na tom, kterým směrem začne komunikační algoritmus.
- Snazší VLSI návrh a vnořování.

## Škálovatelnost

- **Efektivně inkrementálně** topologie: ideální pro dynamicky rekonfigurovatelné multiprocesorové systémy: rekonfigurace systému z  $N$  na  $N + k$  uzlový vyžaduje  $O(k)$  změn v původním propojení.
- Např. 2-D mřížky nejsou efektivně škálovatelné.



- Návrh a konstrukce propojovacích sítí je jednodušší (dekompozice do VLSI modulů).
- **Induktivní** návrh a mapování paralelních algoritmů.
- Hierarchická rekurzivita  $\implies$  částečná škálovatelnost.

### Vysoká souvislost a malé chybové vzdálenosti

- **Redundantní** krátké cesty v případě výpadků uzlů nebo linek.
- **Obcházení** přetížených nebo ucpaných uzlů nebo linek.
- Rozdělení **rozsáhlých paketů** do menších částí posílaných po **paralelních disjunktních** cestách.



- Paralelní **binární rozděl-a-panuj** (D&C) algoritmy  $\implies$  požadavek **vysoké přenosové kapacity** mezi oběma polovinami:
  - Rozděl řešený problém na dvě poloviny.
  - Řeš je rekurzivně v obou polovinách paralelně s případnou výměnou dat mezi polovinami.
  - Sluč výsledky z obou polovin do konečného výsledku.
- Horní mez je  $N/2$ , typické hodnoty jsou  $N/\log N$  či  $N^\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ .
- VLSI návrh: velká bisekční šířka  $\implies$  mnoho **externích spojů mezi stavebními moduly**.

### Existence hamiltonovských cest a 2-barvení

- Označení procesorů čísly  $1, \dots, p$  zachovávající sousednost.
- Potřebné např. pro třídící algoritmy nebo pro permutace posunu.
- Některé algoritmy používají 2-barvení.

## **Vnořitelnost jiných a do jiných topologií**

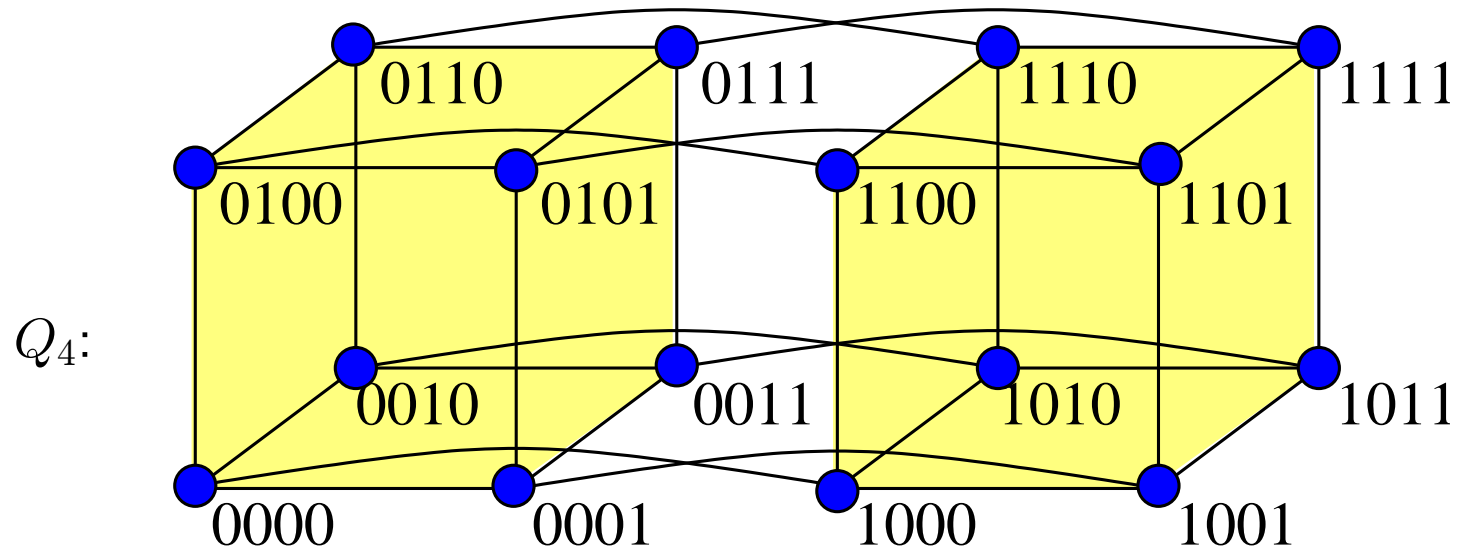
- Existence efektivního zobrazení daného grafu procesů do sítě procesorů.
- Schopnost simulovat efektivně jiné topologie.
- Vnořitelnost do VLSI nebo rozmístitelnost v 3-D.

## **Podpora pro směrování a kolektivní komunikační operace**

- Dvoubodové minimální směrování.
- Permutační směrování.
- Komunikační operace jeden všem.
- Komunikační operace všichni všem.

hyperkrychle, mřížky a toroidy

## Binární hyperkrychle dimenze $n$ , $Q_n$



$$V(Q_n) = \mathcal{B}^n$$

$$E(Q_n) = \{\langle x, \text{neg}_i(x) \rangle; x \in V(Q_n), 0 \leq i < n\}$$

$$\text{diam}(Q_n) = n$$

$$\text{bw}_e(Q_n) = 2^{n-1}$$

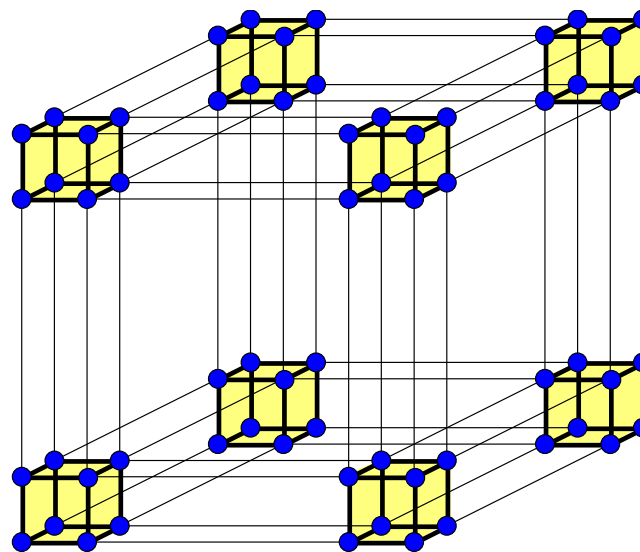
$$|V(Q_n)| = 2^n$$

$$|E(Q_n)| = n2^{n-1}$$

$$\text{deg}(Q_n) = \{n\}$$

- Regulární graf s **logaritmickým** stupněm uzlů (  $\implies$  **řídce hyperkubické sítě**).
- **Hammingova vzdálenost**  $\varrho$ .
- # uzlů ve vzdálenosti  $i$  je  $\binom{n}{i} \implies \overline{\text{dist}}(Q_n) \doteq \lceil n/2 \rceil$ .
- Hierarchicky rekurzivní:
  - $Q_n \equiv Q_p \times Q_{n-p} \equiv Q_p \times Q_q \times Q_{n-p-q} \equiv Q_1^n$ .
  - **Kanonická dekompozice** :  $Q_n \equiv Q_{n-1}[j=0] \times Q_{n-1}[j=1]$ .
  - **Podkrychle** :  $s_{n-1} \dots s_1 s_0$ , kde  $s_i \in \{0, 1, *\}$ ,  $*$  = neutrální symbol.
  - Podkrychle = **termy** v boolské algebře.
- $Q_n \equiv Q_1^n \implies$  uzlová a hranová symetrie:  $2^n \times n!$  automorfizmů.
  - US: **přeložení** (translace)  $u \rightarrow v$ : zobrazení  $\forall x \in V(Q_n) (x \mapsto x \oplus (u \oplus_2 v))$ .
  - HS: **rotace**: permutace (přejmenování) dimenzí.
- Částečně, ale efektivně škálovatelná  $\implies$  **neúplné hyperkrychle**.
- Optimální souvislost:  $\lambda(Q_n) = \kappa(Q_n) = n$ .
- Největší možná bisekční šířka  $\implies Q_n$  je ideální pro binární D&C algoritmy.
- Vyvážený bipartitní a hamiltonovský graf.

$$Q_6 = Q_3 \times Q_3:$$



- Jestliže  $\varrho(u, v) = k$ , pak v  $Q_n \exists n$  uzlově disjunktních cest  $P(u, v)$ , mezi kterými
  - $k$  cest je délky  $k$  a
  - $n - k$  cest je délky  $k + 2$ .
- Chybový průměr  $Q_n$  je  $n + 1$ .
- $\exists k!$  různých nejkratších cest mezi dvěma uzly ve vzdálenosti  $k$ .
- Minimální **e-cube** směrování: bity v adresách se testují zprava doleva.
- **Optimální** algoritmy pro kolektivní komunikační operace v téměř všech komunikačních modelech.
- **Simuluje** efektivně téměř jakoukoli jinou známou topologii.

- Problém **alokace podkrychlí** ve víceuživatelském hyperkubickém počítači:
  - Uživatelé deklarují počty požadovaných uzlů pro své úlohy.
  - OS alokuje, je-li to možné, podkrychle potřebných velikostí.
  - Po skončení výpočtu OS uvolňuje podkrychle.
  - Vzniká problém **fragmentace** a potřeba **zcelování**.
- Testovací architektura pro obtížnost paralelizace problémů na architekturách s distribuovanou pamětí (podobná role jako PRAM pro paralelní algoritmy nad sdílenou pamětí).
- Komerční hyperkubické MPP: nCUBE 1 a 2, Intel iPSC/2 a iPSC/860, TMC CM-2, SGI Origin.
- Hlavní **nedostatky** = logaritmický stupeň a nedostatečná škálovatelnost.

**$n$ -rozměrná mřížka rozměrů  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$**

$$V(M(\dots)) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n); 0 \leq a_i \leq z_i - 1 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$E(M(\dots)) = \{\langle (\dots, a_i, \dots), (\dots, a_i + 1, \dots) \rangle; 0 \leq a_i \leq z_i - 2\}$$

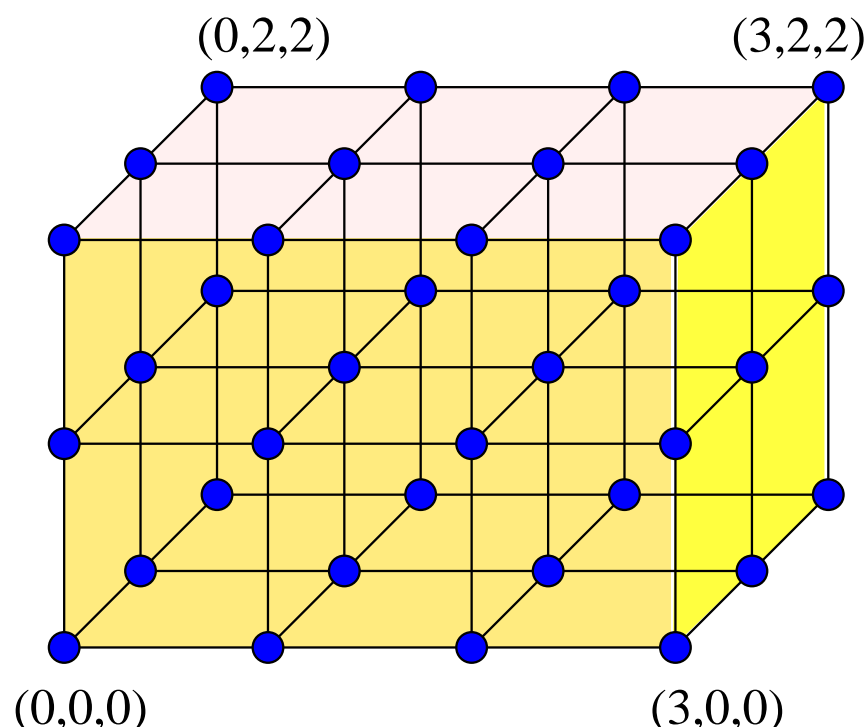
$$|V(M(\dots))| = \prod_{i=1}^n z_i \quad |E(M(\dots))| = \sum_{i=1}^n (z_i - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_j$$

$$\text{diam}(M(\dots)) = \sum_{i=1}^n (z_i - 1) = \Omega(\sqrt[n]{|V(M(\dots))|})$$

$$\text{deg}(M(\dots)) = \{n, \dots, n + j\}, \ j = |\{z_i; z_i > 2\}|$$

$$\text{bw}_e(M(\dots)) = \begin{cases} (\prod_{i=1}^n z_i) / \max_i z_i & \text{jestliže } \max_i z_i \text{ je sudé,} \\ \Omega((\prod_{i=1}^n z_i) / \max_i z_i) & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

mřížka  $M(3, 3, 4)$ :



- Předpokládáme, že dimenze mřížky  $n$  je **konstantní**.
- $M(k, k, \dots, k) = k$ -ární  $n$ -krychle.
- Nejpraktičtější mřížky jsou **2-D** (čtvercové, obdélníkové) a **3-D** (krychlové, kvádrové).
- 1-D mřížky = **lineární pole** (inkrementálně škálovatelné) = protipól úplného grafu.
- **Není regulární**  $\implies$  není uzlově symetrická.
- Počet uzlů ve vzdálenosti  $i$  u 2-D mřížek: od  $i + 1$  do  $4i$ .
- Velký průměr:  $\sqrt{N} \geq \log N$  od  $N > 16$ ,  $\sqrt[3]{N} \geq \log N$  od  $N > 1000$ .
- Částečně ale neefektivně škálovatelná.
- Hierarchicky rekurzivní:
  - obsahuje podmřížky stejné dimenze, např.  $M([1 - 3], *, [2 - 5], *) \subset M(6, 5, 8, 3)$ ,
  - obsahuje podmřížky menších dimenzí, např.  $M(*, 1, *, 3) \subset M(3, 4, 2, 7)$ ,
  - konstruktor = kartézský součin, např.  $M(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv M(z_1) \times \dots \times M(z_n)$ .
- Optimální souvislost.
- Téměř optimální chybový průměr.
- Chybové vzdálenosti = nejvýše o 4 větší než nechybové.



- Pro obecné  $n$  je **přesná** hodnota bisekční šířky otevřeným problémem snadno ji lze spočítat pro 2- nebo 3-D mřížky, např.  $\text{bw}_e(M(11, 8, 6)) = 57$ .
- Základní minimální směrovací algoritmus = **dimenzně uspořádané** směřování: 2- a 3-D mřížky: **XY** a **XYZ** směřování.
- $\exists$  mnoho komunikačních a paralelních algoritmů **optimálních** vzhledem k **spodním mezím** topologie (velký průměr, malá bisekční šířka).
- Bipartitní (nikoli nutně vyvážená).
- Hamiltonovská, jestliže nejméně jedna strana má **sudou** délku.
- Hamiltonovská cesta existuje vždy.
- Modifikace: **rekonfigurovatelné mřížky, mřížky sběrnic**.

### Poznámky k mřížkám

- Problém alokace, fragmentace a zcelování **podmřížek** v multiuživatelském multiprocesoru.
- Komerční paralelní počítače založené na mřížkách: Intel Paragon (2-D mřížka), MIT J-Machine (3-D mřížka), transputery (2-D mřížka), multi-core CPUs!!!!, ...

toroid = **toroidální** nebo **zabalená mřížka**

$$V(K(\dots)) = V(M(\dots))$$

$$E(K(\dots)) = \{ \langle (\dots, a_i, \dots), (\dots, a_i \oplus_{z_i} 1, \dots) \rangle; 0 \leq a_i < z_i \}$$

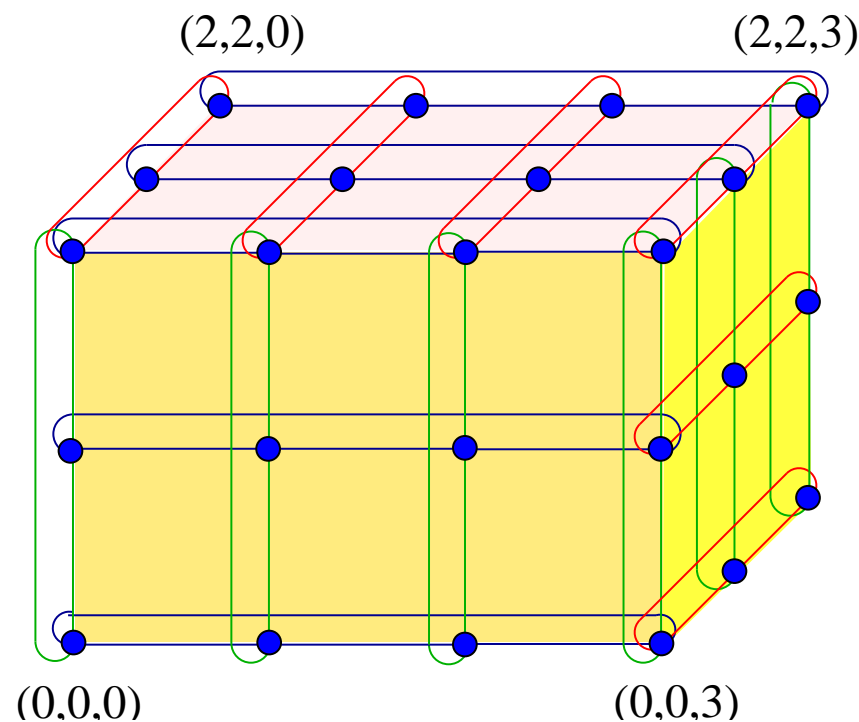
$$|E(K(\dots))| = n \times \prod_{i=1}^n z_i$$

$$\text{diam}(K(\dots)) = \sum_{i=1}^n \lfloor z_i/2 \rfloor$$

$$\text{deg}(K(\dots)) = \{2n\}$$

$$\text{bw}_e(K(\dots)) = 2 \text{bw}_e(M(\dots))$$

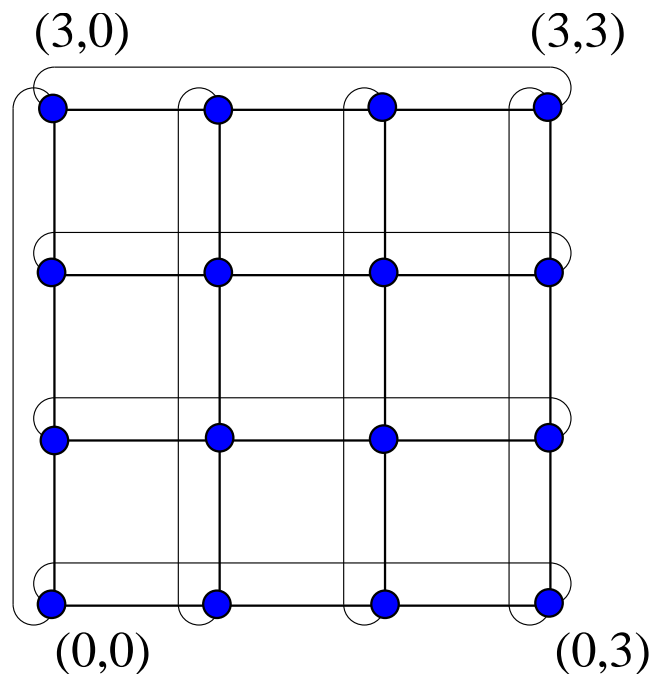
toroid  $K(3, 3, 4)$ :



- 1-rozměrný toroid = **kružnice** nebo **prstenec**.
- $K(k, k, \dots, k) = k$ -ární  $n$ -toroid.
- Regulární a uzlově symetrický (automorfizmy = přeložení).
- $k$ -ární  $n$ -toroidy jsou i hranově symetrické (automorfizmy = rotace).
- Průměr/průměrná vzdálenost je **poloviční** v porovnání se stejně velkou mřížkou.
- Souvislost/bisekční šířka je **dvojnásobná** v porovnání se stejně velkou mřížkou.
- Částečná škálovatelnost (ještě méně efektivní v porovnání s mřížkami).
- Hierarchický (lze dekomponovat až na **kartézský součin kružnic**)  
ale: nelze rozložit na stejnorozměrné podtoroidy.
- **Dimenzně uspořádané** minimální směřování (existence kružnic jej činí komplikovanější).
- Hamiltonovský graf.
- Bipartitní  $\iff$  všechny délky stran jsou sudé (bipartitní  $\implies$  vyvážený).
- Topologicky optimální algoritmy existují pro mnoho základních problémů.
- Komerční MPP: Cray/SGI T3D a T3E, Convex Exemplar (3-D), Intel/CMU iWarp (2-D), KSR (1-D), IBM BlueGene (3-D).

- $M(2, 2, \dots, 2)$  je izomorfní s  $Q_n$ .
- $n$ -rozměrné mřížky a toroidy jsou zobecněními  $Q_n$ .
- Pro určité  $k$  a  $n$ ,  $k < n$ ,  $k$ -rozměrná mřížka/toroid může být podgrafem  $Q_n$ .

$K(4, 4) \equiv Q_4$ :



## Souvislost mezi průměrem, počtem hran a bisekční šířkou

$M(8, 8, 4) \subset K(8, 8, 4) \subset Q_8$  a všechny grafy mají  $N = 256$ .

	$M(8, 8, 4)$	$K(8, 8, 4)$	$Q_8$
diam()	17	10	8
$ E() $	640	768	1024
bw <sub>e</sub> ()	32	64	128

- Řídké grafy odvozené od hyperkrychle rozvinutím každého uzlu hyperkrychle do více uzlů.
- Dva hlavní reprezentanti: **kružnice propojené krychlí** a **motýlky**.
- Společné vlastnosti:
  - $O(1)$  stupeň a  $O(\log N)$  průměr,
  - škálovatelné hůře než hyperkrychle:  $N = n2^n$  nebo podobně,
  - bisekční šířka  $\Omega(N/\log N)$ .

$$V(CCC_n) = \{(i, x); 0 \leq i < n \wedge x \in \mathcal{B}^n\}$$

$$E(CCC_n) = \{\langle (i, x), (i \oplus_n 1, x) \rangle, \langle (i, x), (i, \text{neg}_i(x)) \rangle; (i, x) \in V(CCC_n)\}$$

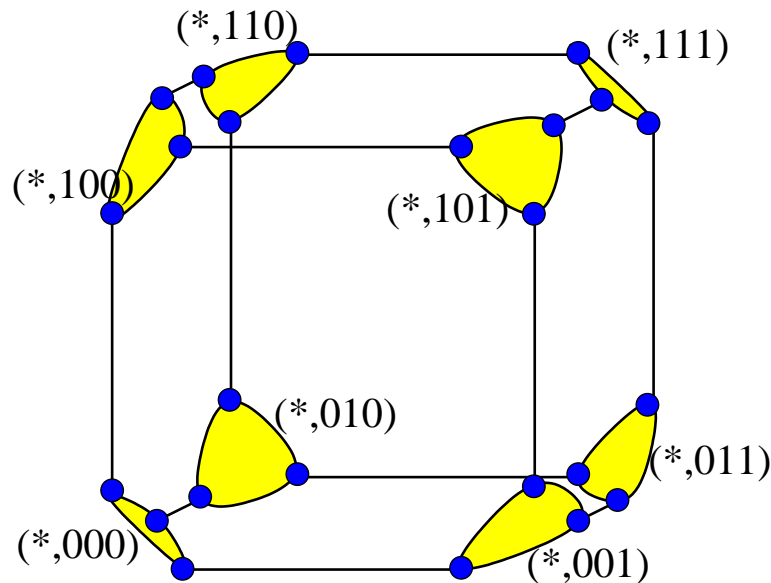
$$|V(CCC_n)| = n2^n$$

$$|E(CCC_n)| = n2^{n-1} + n2^n$$

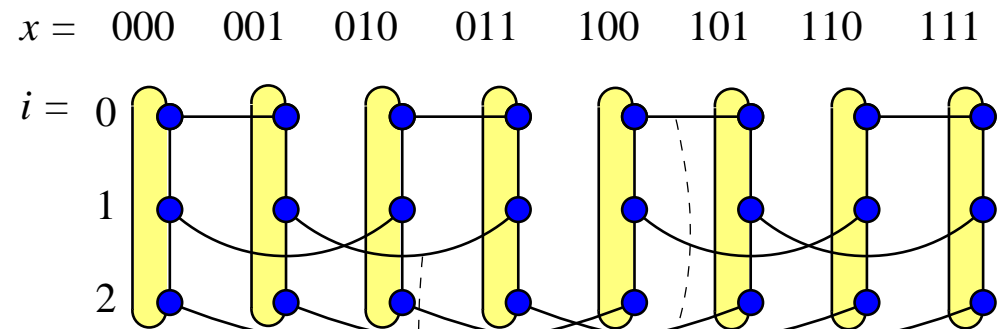
$$\text{diam}(CCC_n) = (2n - 2) + \lfloor n/2 \rfloor \text{ pro } n > 3, \text{diam}(CCC_3) = 6$$

$$\text{deg}(CCC_n) = \{3\}$$

$$\text{bw}_e(CCC_n) = 2^{n-1}$$

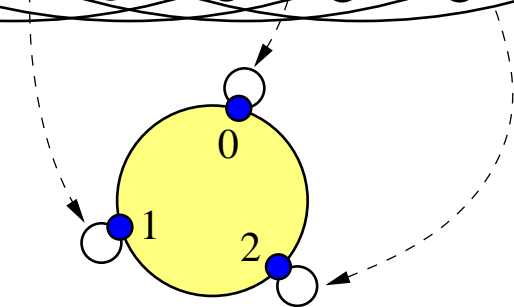


$\equiv$



$\equiv$

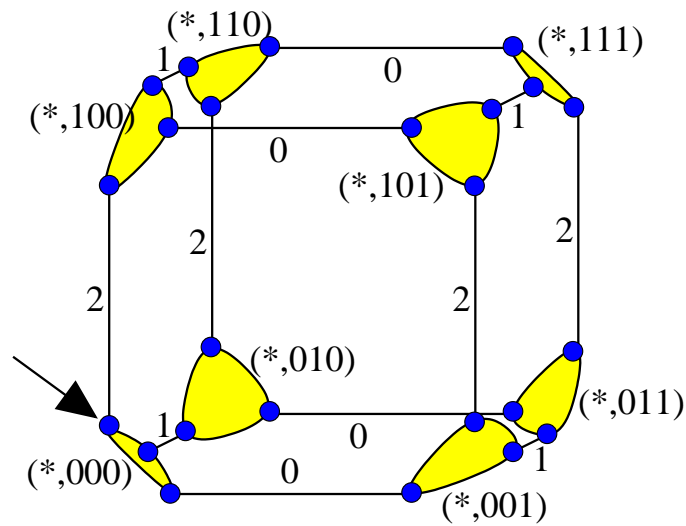
$CCC_3$



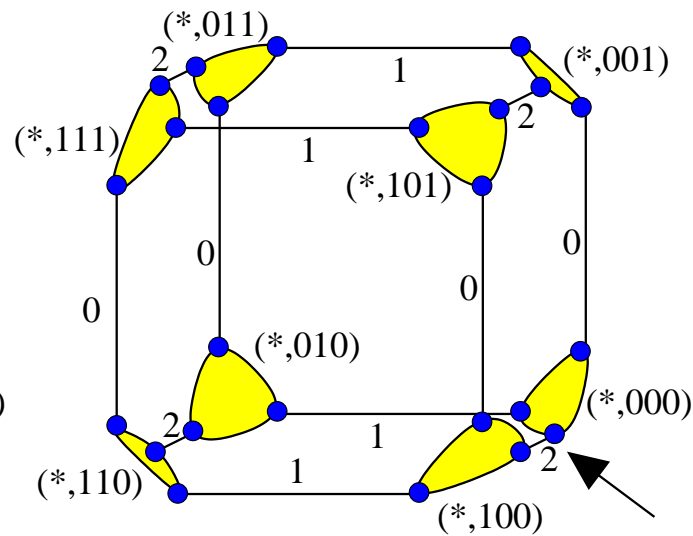
- $CCC_n$  je faktor grafu  $Q_n \times K(n)$ .
- $Q_n$  i  $K(n)$  jsou uzlově symetrické  $\implies CCC_n$  je uzlově symetrický.
- Částečně hranově symetrický ( $\exists$  **hyperkubické** a **kružnicové** hrany).
- Není hierarchicky rekurzivní.
- Optimální souvislost 3 (mezi dvěma uzly  $\exists$  3 disjunktní cesty).
- Minimální směrování: poněkud komplikované.
- Jednoduché **neminimální** směrování:
  1. Zjistí, v kterých bitech se liší adresa výchozí a cílové kružnice.
  2. Nechť  $i$  = pozice prvního takového bitu zleva.
  3. Přesuň se do  $i$ -tého uzlu ve výchozí kružnici.
  4. Přejdi pomocí  $e$ -cube algoritmu do cílové kružnice.
  5. V ní se přesuň do cílového uzlu.
- Vyvážený bipartitní graf  $\iff n$  je sudé.
- Hamiltonovský graf.



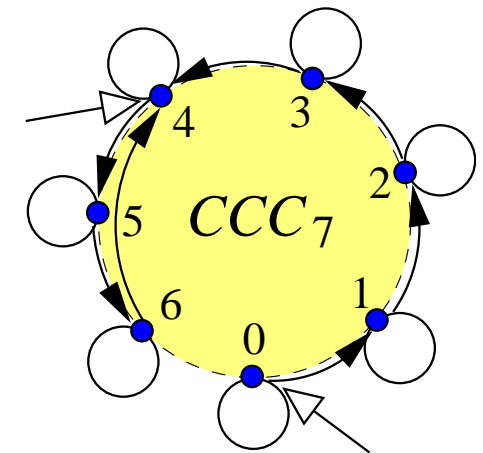
**Lemma 6.** *Necht'  $u = (i, x_{n-1} \dots x_0)$  a  $v = (j, y_{n-1} \dots y_0)$ . Pak  $\phi_{u \rightarrow v}((k, z_{n-1} \dots z_0)) = (k \oplus_n (j \ominus_n i), \text{rot}_{(j \ominus_n i)}(z_{n-1} \dots z_0 \oplus_2 y_{n-1} \dots y_0 \oplus_2 x_{n-1} \dots x_0))$  je automorfismus.*



(a)



(b)



(a) Příklad: přeložení  $\phi_{u \rightarrow v}$  z uzlu  $u = (2, 000)$  do uzlu  $v = (1, 011)$  v  $CCC_3$ .

(b) Vzdálenost mezi uzly  $(0, 0^7)$  a  $(4, 1^7)$  v  $CCC_7$  je rovna  $\text{diam}(CCC_7)$ .

$$V(wBF_n) = \{(i, x); 0 \leq i < n \wedge x \in \mathcal{B}^n\}$$

$$E(wBF_n) = \{\langle (i, x), (i \oplus_n 1, x) \rangle, \langle (i, x), (i \oplus_n 1, \text{neg}_i(x)) \rangle \mid (i, x) \in V(wBF_n)\}$$

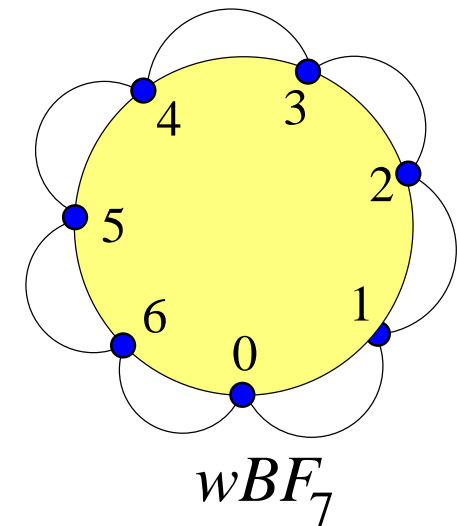
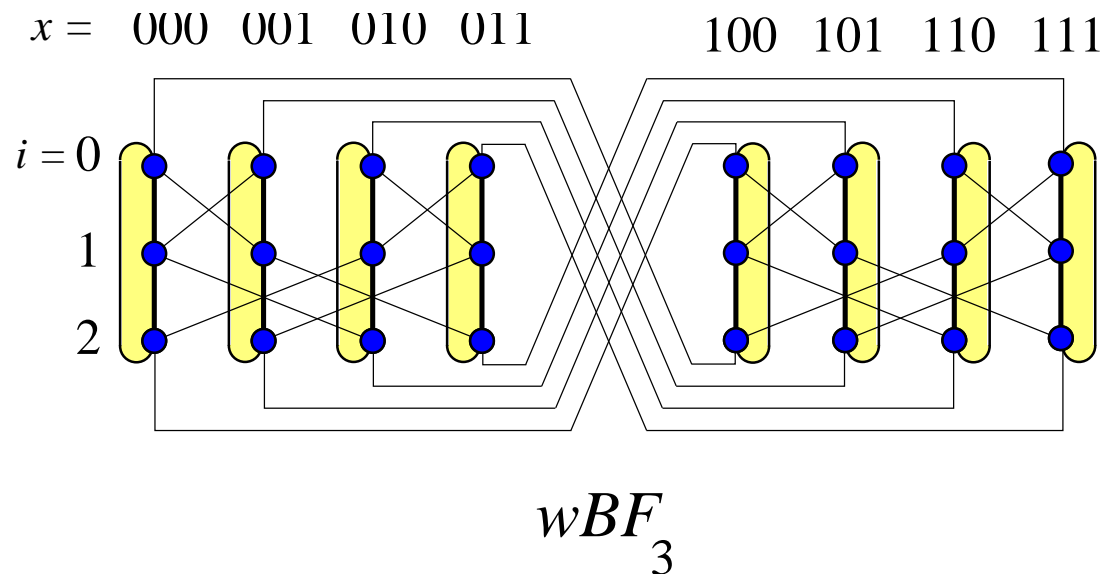
$$|V(wBF_n)| = n2^n$$

$$|E(wBF_n)| = n2^{n+1}$$

$$\text{diam}(wBF_n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\text{deg}(wBF_n) = \{4\}$$

$$\text{bw}_e(wBF_n) = 2^n$$



Základní vlastnosti má stejné jako  $CCC$ , až na to, že má více hran, větší bisekční šířku a menší průměr.

$$V(oBF_n) = \{(i, x); 0 \leq i \leq n \wedge x \in \mathcal{B}^n\}$$

$$E(oBF_n) = \{\langle (i, x), (i+1, x) \rangle, \langle (i, x), (i+1, \text{neg}_i(x)) \rangle \mid i < n\}$$

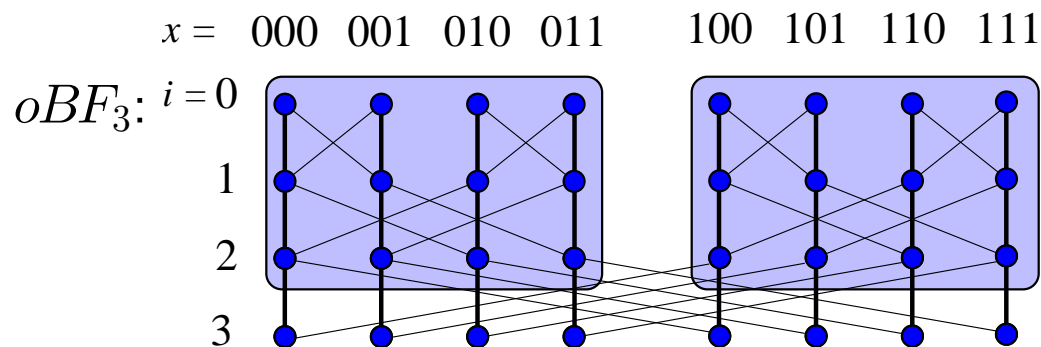
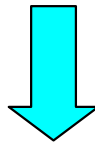
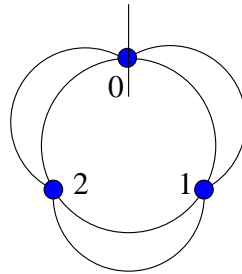
$$|V(oBF_n)| = (n+1)2^n$$

$$|E(oBF_n)| = n2^{n+1}$$

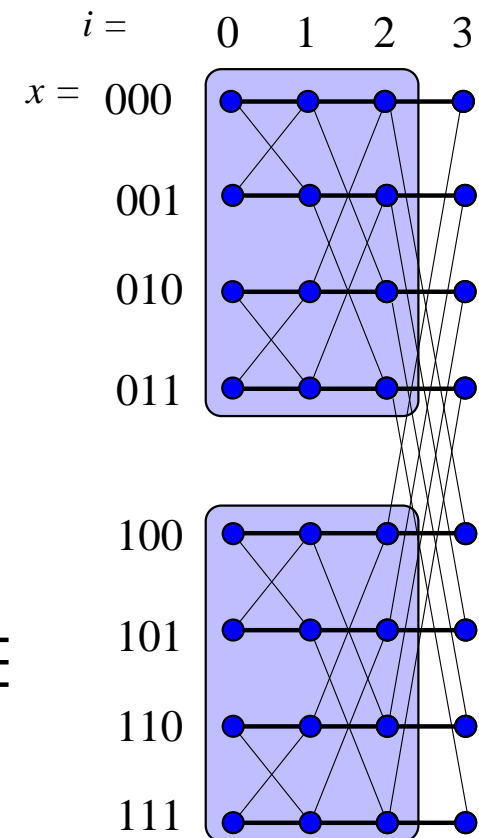
$$\text{diam}(oBF_n) = 2n$$

$$\text{deg}(oBF_n) = \{2, 4\}$$

$$\text{bw}_e(oBF_n) = 2^n$$



$\equiv$



- Uzly  $oBF_n$  jsou organizovány do **sloupců (stupňů)**  $0 \leq i \leq n$  a **řad**  $0 \leq x \leq 2^n - 1$ .
- Dva druhy hran: **přímé** a **křížové (hyperkubické)**.
- Není uzlově symetrický a není regulární.
- Není hamiltonovský.
- Je **hierarchicky rekurzivní**:  $oBF_n$  obsahuje dva  $oBF_{n-1}$  jako podgrafy.
- Optimální souvislost 2.
- $\exists$  pouze jediná nejkratší cesta mezi  $(0, x)$  a  $(n, y)$  ( $= e$ -cube směřování).
- Triviálně bipartitní.

## Poznámky k řídkým hyperkubickým sítím

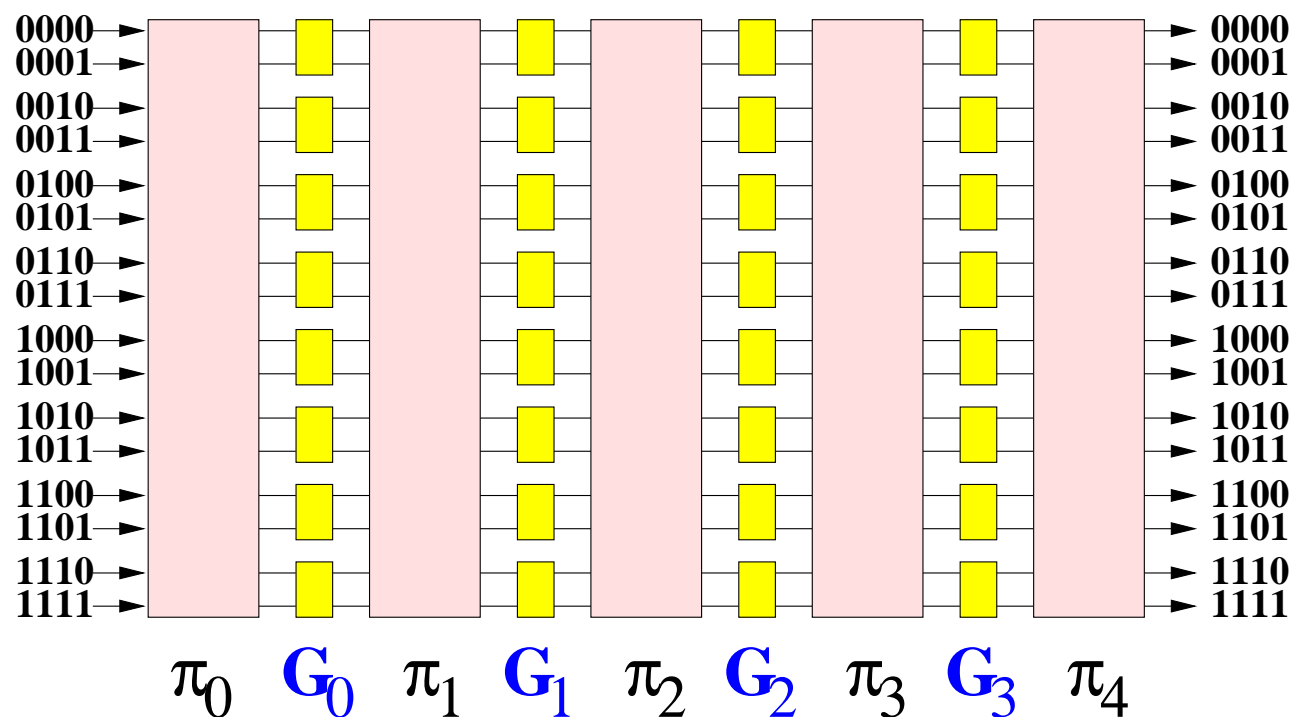
- Byly použity v prototypových počítačích.
- Jsou přirozenou topologií pro řadu základních paralelních algoritmů.
- Vynikající vlastnosti pro VLSI implementaci.

1. Vícestupňové nepřímé sítě (Multistage Indirect Networks, MIN).
2. Stromové sítě.
3. Nepravidelné sítě.

## Vícestupňové nepřímé sítě (MIN)

- **Banyan  $N \times N$  MIN:**  $\exists$  jedinečná cesta mezi lib. dvojicí vstupu a výstupu.
- **$k$ -ární delta MIN:** Banyan MINs  $N \times N$  skládající se ze **stupňů**  $N/k$  přepínačů  $k \times k$ .
- **Obecná  $k$ -ární MIN** =  $K$  stupňů  $N/k$  přepínačů  $k \times k$ ,  $N = k^n$ .
- Typicky  $k = 2$ . Pak:
  - Spodní mez na  $K = \Omega(\log N) = \Omega(n)$ .
  - $K = O(\log N) \implies$  levnější náhrada křížových přepínačů
    - \*  $K = \log N \implies$  **blokuující MIN**
    - \*  $K = 2 \log N - 1 \implies$  **přestavitelné MIN**
- **Jednosměrné nebo obousměrné.**

# Schéma generické jednosměrné MIN



- Přepínače  $2 \times 2$  mohou být v 1 ze 4 stavů:



- Množina všech permutací realizovatelných danou MIN o  $K$  stupních je

$$\pi_0 G \pi_1 G \dots G \pi_K.$$

- Její mohutnost je  $\left(2^{\frac{N}{2}}\right)^K$ .

0000		0000		0000		0000		0000
0001		0001		0001		0001		0001
0010		0010		0010		0010		0010
0011		0011		0011		0011		0011
0100		0100		0100		0100		0100
0101		0101		0101		0101		0101
0110		0110		0110		0110		0110
0111		0111		0111		0111		0111
1000		1000		1000		1000		1000
1001		1001		1001		1001		1001
1010		1010		1010		1010		1010
1011		1011		1011		1011		1011
1100		1100		1100		1100		1100
1101		1101		1101		1101		1101
1110		1110		1110		1110		1110
1111		1111		1111		1111		1111

(1)  $\sigma$

(2)  $\beta_3$

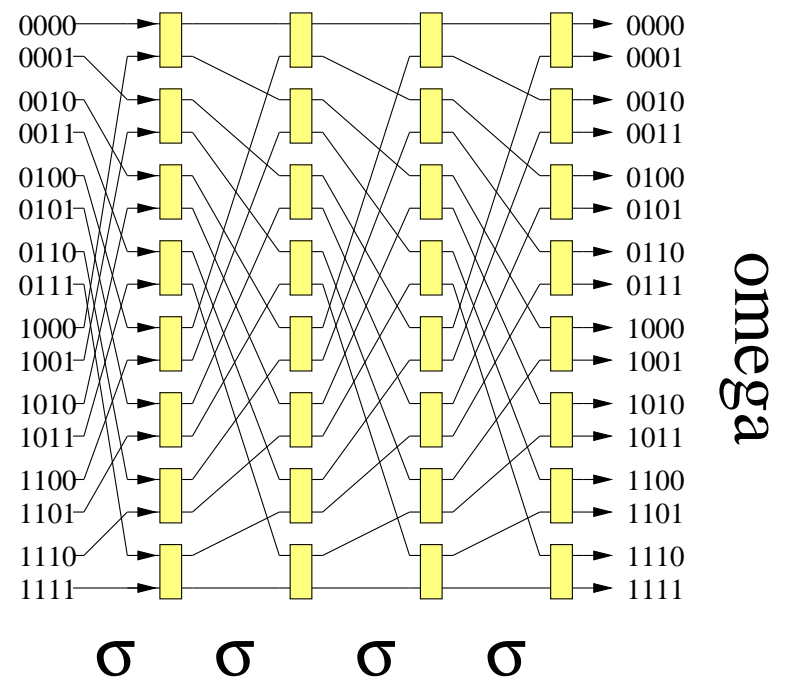
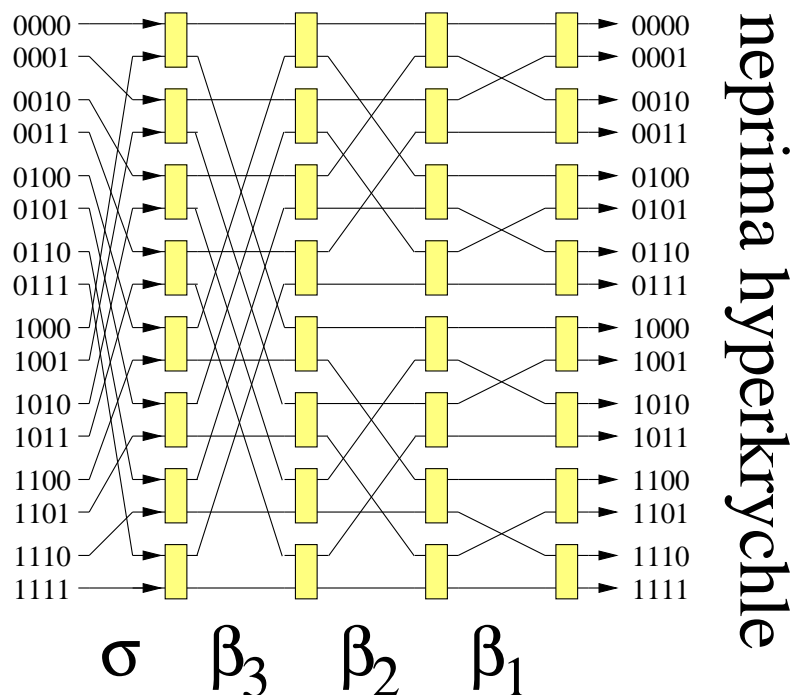
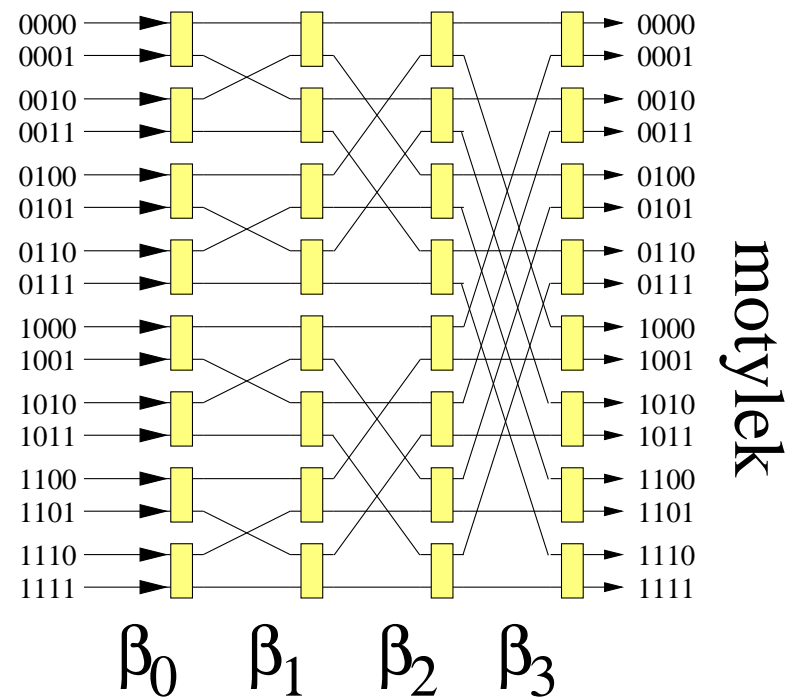
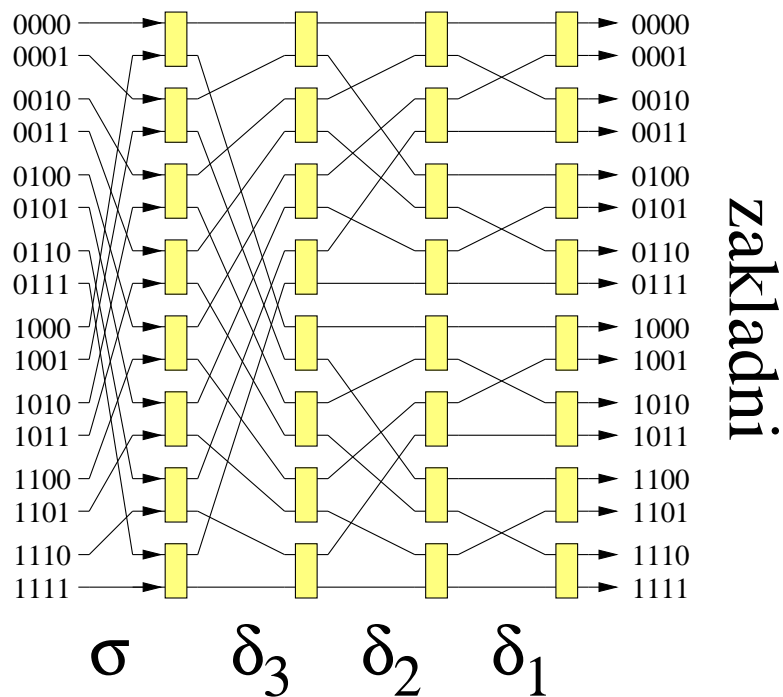
(3)  $\delta_2$

(1)  $\sigma = \text{dokonalé promíchání} = \text{rot}_1^{-1}$ :  $\sigma(\boxed{x_{n-1}}x_{n-2} \dots x_0) = x_{n-2} \dots x_0x_{n-1}$

(2)  $\beta = \text{motýlek}$ :  $\beta_i(x_{n-1} \dots x_{i+1}\boxed{x_i}x_{i-1} \dots \boxed{x_0}) = x_{n-1} \dots x_{i+1}x_0x_{i-1} \dots x_i$

(3)  $\delta = \text{základní}$ :  $\delta_i(x_{n-1} \dots x_{i+1}x_ix_{i-1} \dots x_1\boxed{x_0}) = x_{n-1} \dots x_{i+1}x_0x_ix_{i-1} \dots x_1$

# Příklady jednosměrných blokujících MIN





- Počet realizovatelných permutací je menší než  $N!$ , neboť pro  $K = \log N$  je

$$\left(2^{\frac{N}{2}}\right)^{\log N} = N^{\frac{N}{2}} < N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

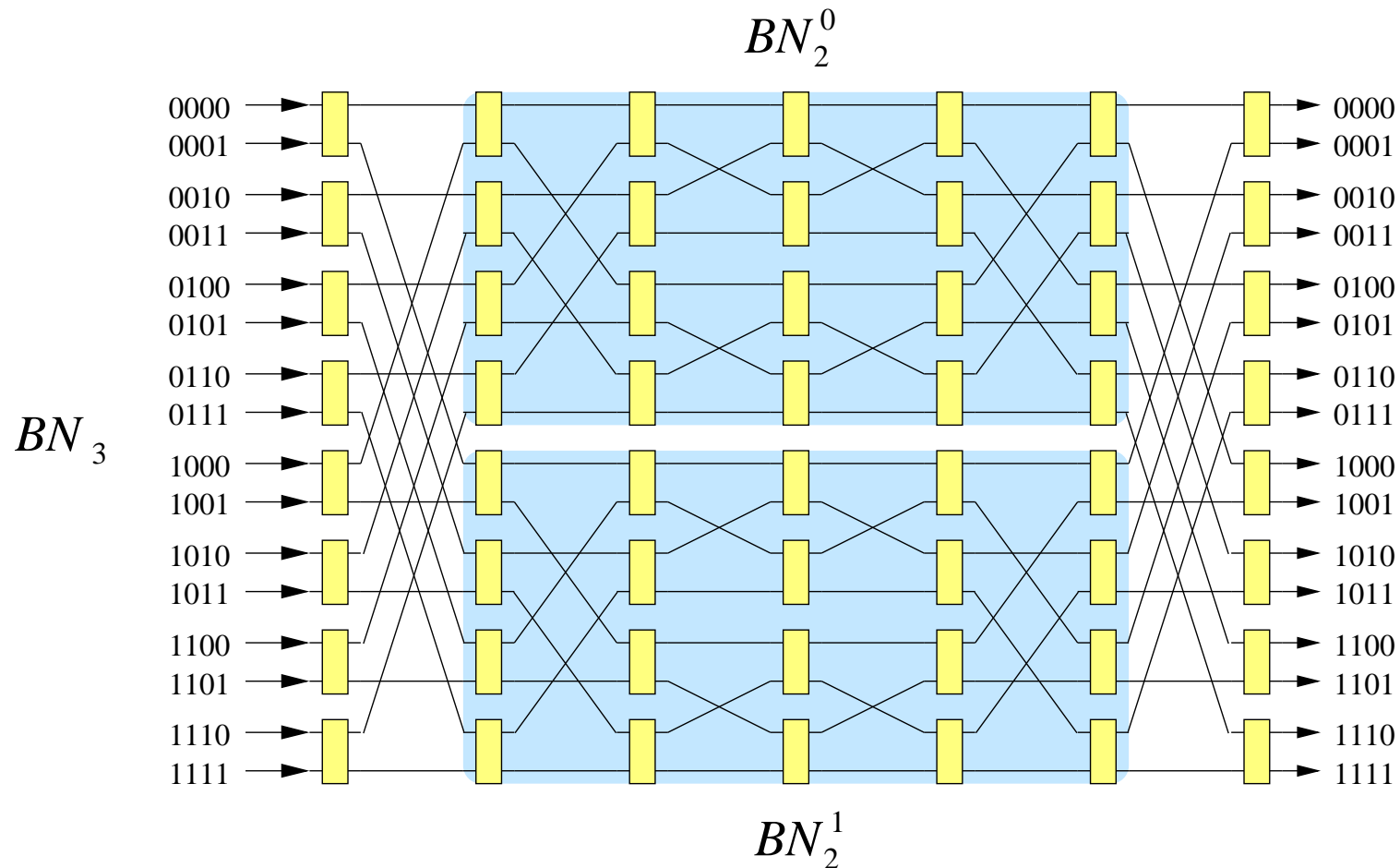
- Všechny tyto varianty blokujících MIN jsou **topologicky equivalentní**: množina realizovaných permutací je pro všechny varianty stejná, liší se pouze v pořadí, v jakém jsou jednotlivé adresní bity vystavovány na LSB pozici, kde mohou být invertovány.
- Deterministické minimální směrování: mezi daným vstupem a výstupem  $\exists!$  cesta (Banyan).
- **Auitomatické směrování (Self-routing property)**:
  - Směrování ze vstupního portu  $i$  na výstupní port  $j$  lze určit **přímo y adresy výstupního portu  $j$ !!**
    1. Stupeň  $k$  MIN přečte  $j[k] = k$ -tý bit adresy  $j$ .
    2. Je-li  $j[k] = 0$ , pak odešle paket **horním** portem.
    3. Je-li  $j[k] = 1$ , pak odešle paket **dolním** portem.
  - Funguje to pro jakýkoli vstupní port.

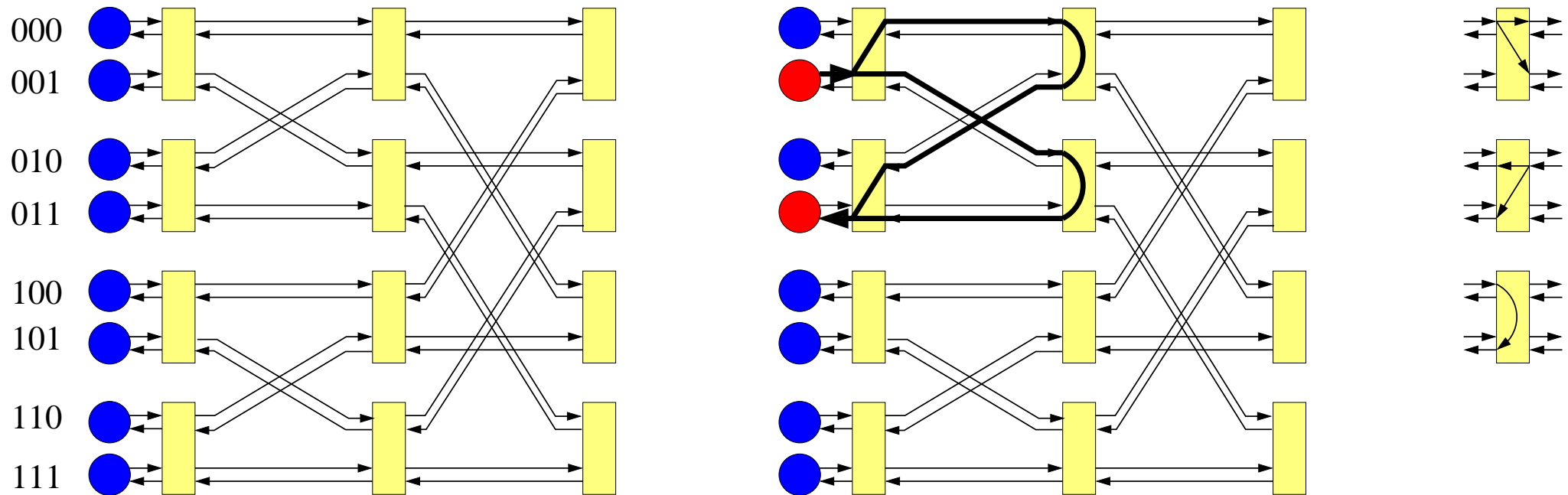


■  $K = 2 \log N - 1$

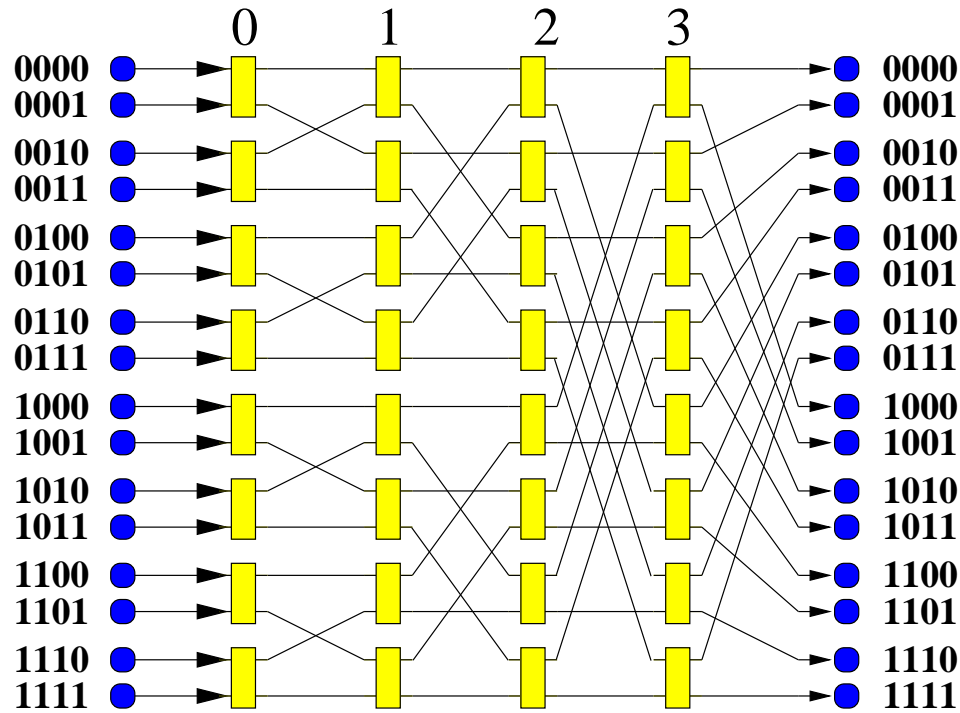
$$\left(2^{\frac{N}{2}}\right)^{2 \log N - 1} > N!$$

- Pro zadanou permutaci vstupů na výstupy lze předpočítat bezkolizní nastavení přepínačů.
- Typický představitel: **Benešova síť** = back-to-back butterfly.

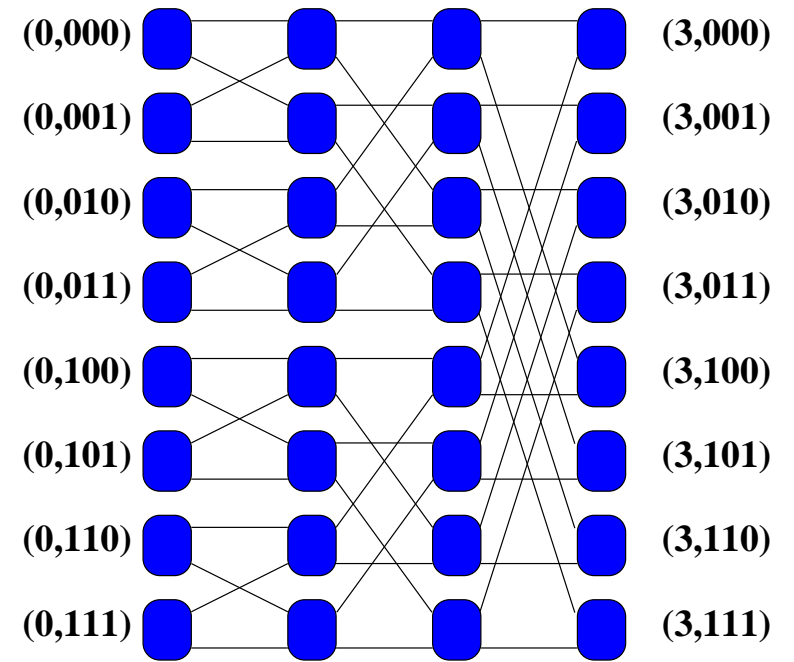




- Přepínače realizují přenos (c) zleva doprava, (d) zprava doleva, anebo (e) zleva doleva.
- **Směrovací algoritmus:** Pro 2 uzly  $u$  a  $v$ , nechť  $m(u, v)$  je číslo nejvýznamnějšího bitu, v kterém se  $u$  a  $v$  liší. Pak cesta z  $u$  do  $v$ :
  1. Má vzestupnou část k některému kořenu nejmenšího společného podstromu  $u$  a  $v$ .
  2. Takových kořenů existuje  $2^{m(u, v)}$ .
  3. V kořenu se obrátí zpět a sestupuje k cílovému listu. V této sestupné části je cesta daná jednoznačně.
- Počítače IBM SP-x mají tento typ sítě (High Performance Switch), založenou na obousměrných přepínačích  $8 \times 8$  (čipy Vulcan).

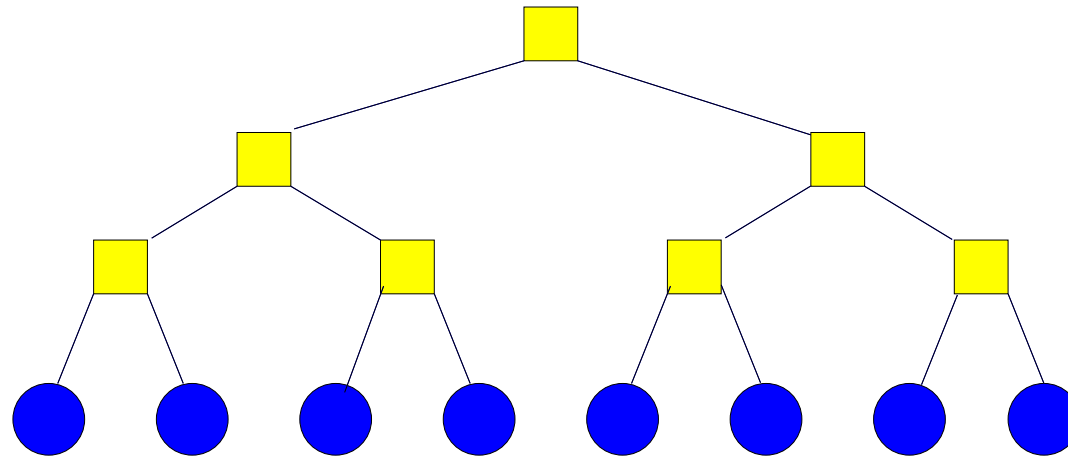


(a) 4-D MIN motýlek.



(b) Přímý  $oBF_3$ .

Nepřímý úplný  $k$ -ární strom výšky  $h$ ,  $iCT_{k,h}$



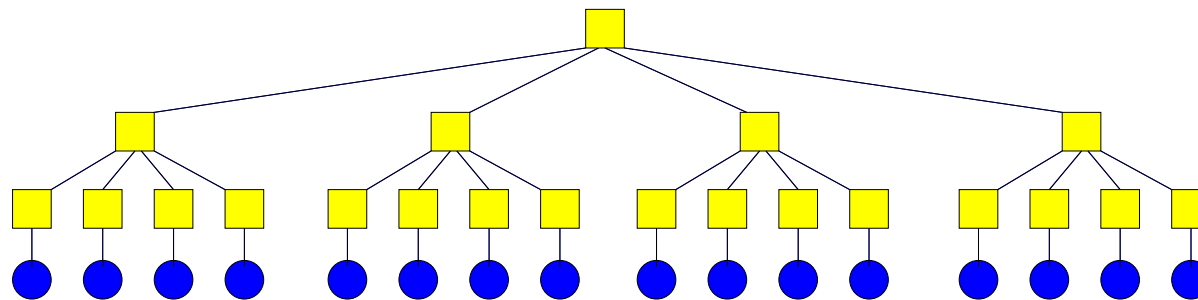
Nepřímý úplný binární strom výšky 2,  $iCT_{2,2}$

- Základní problémy: kořen je komunikačně přetížen a malá bisekční šířka.
- Řešení:  $(m, k)$ -hyperstromy ( $m$ -násobné  $k$ -ární stromy) nebo tlusté stromy.

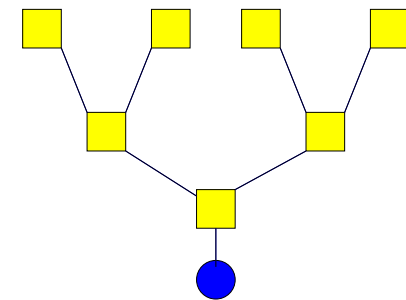


**Definice 7.**  $(m, k)$ -hyperstrom je stromový graf, ve kterém je má každý uzel  $m$  rodičů a  $k$  potomků (stupeň je  $m + k$ ), kromě uzlů

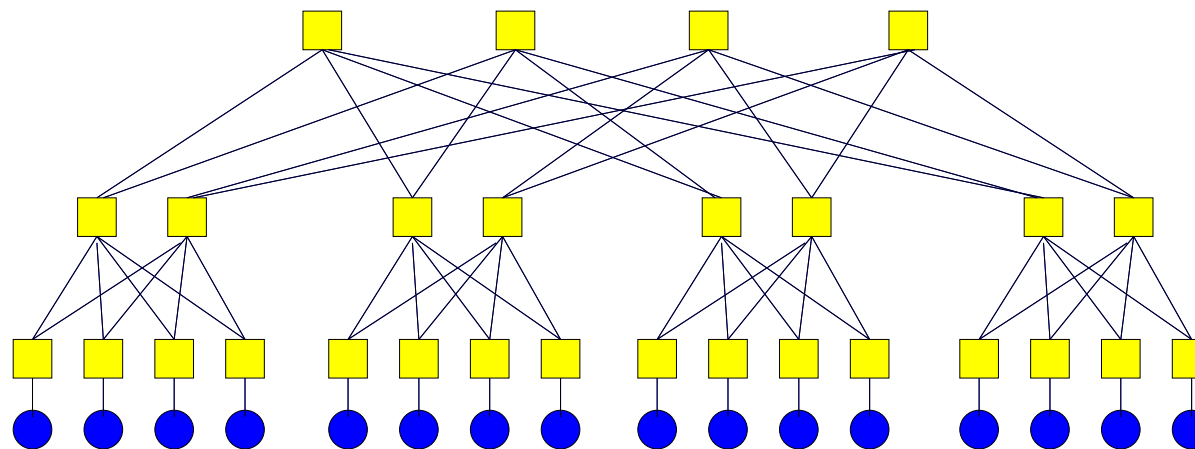
1. bez rodičů = kořeny (stupeň je  $k$ ) a
2. bez potomků = listy (stupeň je  $m$ ).



pohled zepředu

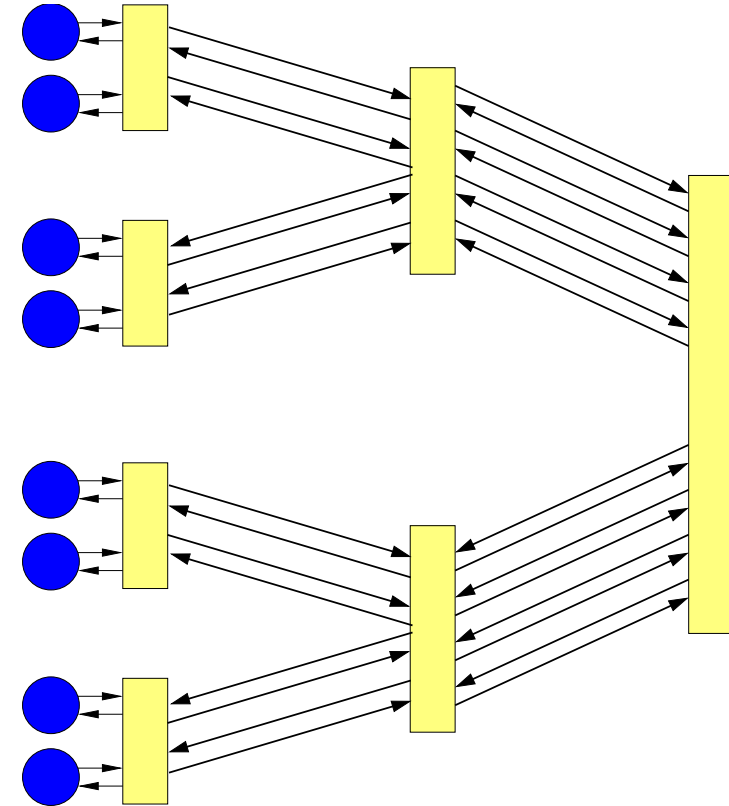
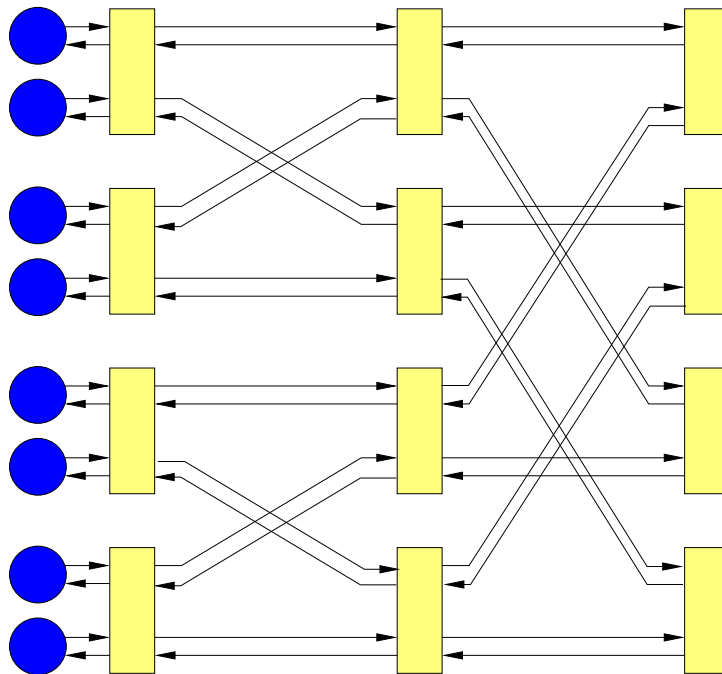


pohled ze strany



globalni pohled

$$HT(2, 4, 2)$$



■ Obousměrná MIN s topologií motýlek je topologicky equivalentní:

- (a) jednosměrné Benešově síti, ve které jsou ztotožněny příslušné vstupní a výstupní uzly,
- (b) **tlustému stromu**, ve kterém se počet linek vedoucích nahoru ke kořenu rovná součtu počtů linek od potomků.