

Geometrické modelování

© 1997 Josef Pelikán, MFF UK Praha

© 2007 Jiří Sochor, FI MU Brno

© 2007 Petr Felkel, ČVUT FEL Praha

© 2007 Jiří Žára , ČVUT FEL Praha

felkel@fel.cvut.cz

= soubor metod k popisu těles (tvaru, vlastností, postupu výroby,...)

- Vzniklo se vznikem a rozvojem počítačů (přelom 50/60 let)
- První systém - 50. léta (Ileto, SAGE)
- Boom přelom 60 a 70 let (auta, letadla,...)
Sutherland, Ross, Coons, Fergusson, de Casteljau, Bézier, Eshleman, Meriwether, Forrest,...
- Zpočátku podpora konstruování (vytvoření, editace, zobrazení)
- Postupně nabaluje další funkce
 - aerodynamika, simulace chování
 - modelování struktury (FEM)
 - digitální prototypy (mock-up)
 - řízení obráběcích strojů (NC), Computer Aided Manufacturing (CAM), ...

Model [Angel]

= abstrakce světa, idealizace

- reálného (v němž žijeme), existující výrobek
- virtuálního (vytvořeného počítačem), návrh výrobku

Svět (fyzické objekty) – složitý a proto nepostihnutelný

Matematický model – rovnice zjednodušeně popisující fyzické objekty

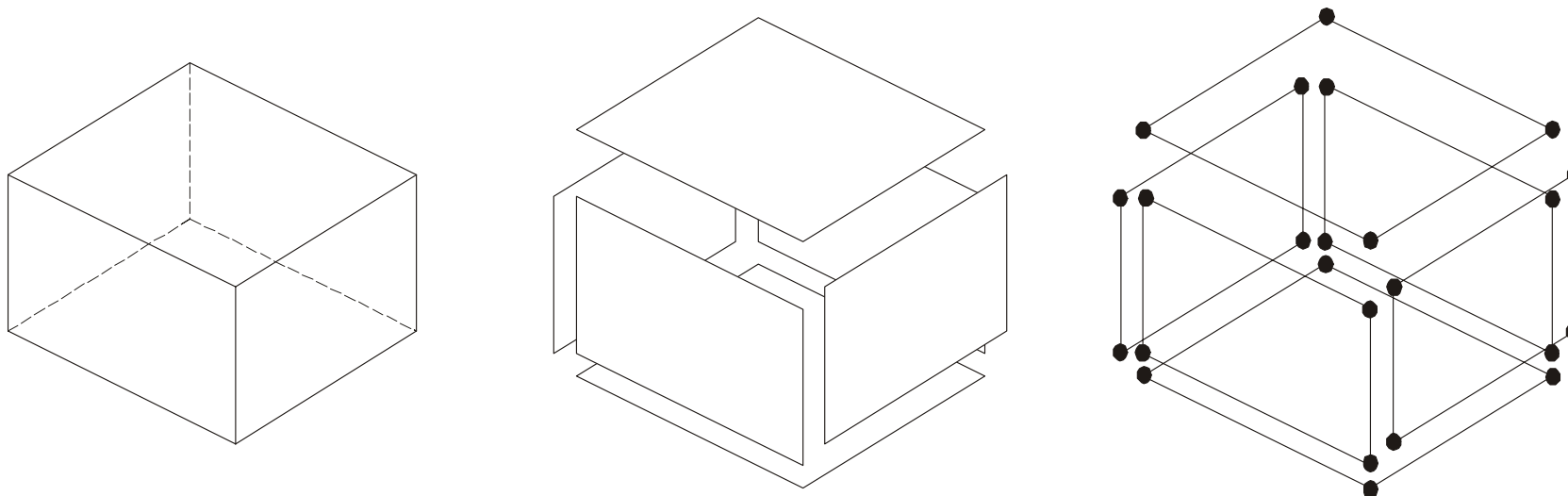
Reprezentace (datové modely) – reprezentace matematických modelů vhodné pro počítačové zpracování

Počítačové vědy – abstraktní datové typy

Počítačová grafika – geometrické objekty

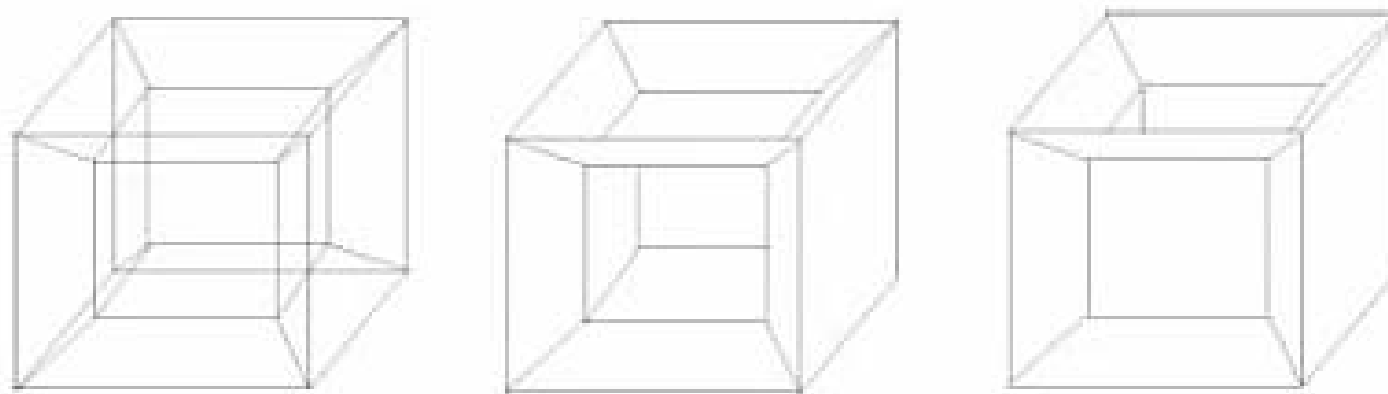
- **Široká doména**
co nejvíce použitelných geometrických objektů
- **Jednoznačnost (úplnost)**
tvar je jasný na první pohled
- **Unikátnost reprezentace**
konkrétní těleso jen jedním způsobem, lze testovat shodu
- **Přesnost**
bez aproximace
- **Nemožnost vytvořit chybnou reprezentaci**
nelze vytvořit objekt, který by nebyl tělesem
- **Uzavřenost**
transformací vznikne zase platné těleso
- **Kompaktnost**
šetří místo
- **Efektivní algoritmy**

Těleso, plochy, hrany a vrcholy

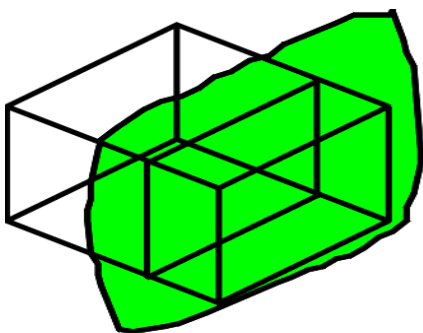


Drátový model (*wire-frame*, GL_LINE)

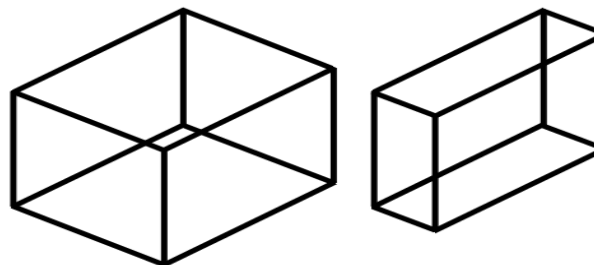
- Velmi úsporný – jen **vrcholy** a **hrany** těles
- Nezná plochy, proto **nejde určit viditelnost**
- **Nejednoznačný**
- **Nevhodný pro modelovací operace**



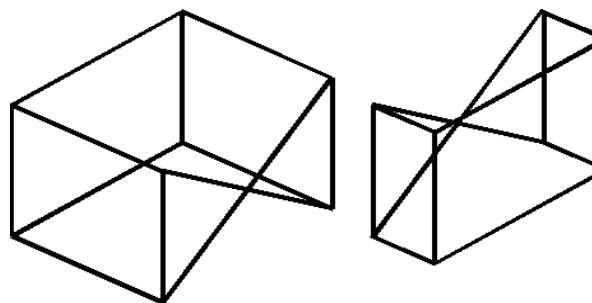
Drátové modely a „modelování“



řez



výsledek řezu



jiný možný výsledek

Povrchová reprezentace (Boundary Representation, B-rep)

- Jen „slupka“, popsány plochy a hrany (hranice tělesa)
- Snadno se zobrazují
- Není informace o vnitřku
=> Obtížný test „*bod* \times *těleso*“ (test zda je bod uvnitř tělesa)

Objemová reprezentace

- Přímé informace o objemu tělesa
=> Snadný test „*bod* \times *těleso*“
- Obtížněji se zobrazují
- Často jako pomocné datové struktury pro rychlé vyhledávání

VEF(S) reprezentace (česky VHS(T))

- Kompletní topologická informace:
- Seznamy vrcholů (**Vertex**), hran (**Edge**), stěn (**Face**) a těles (**Solid**)

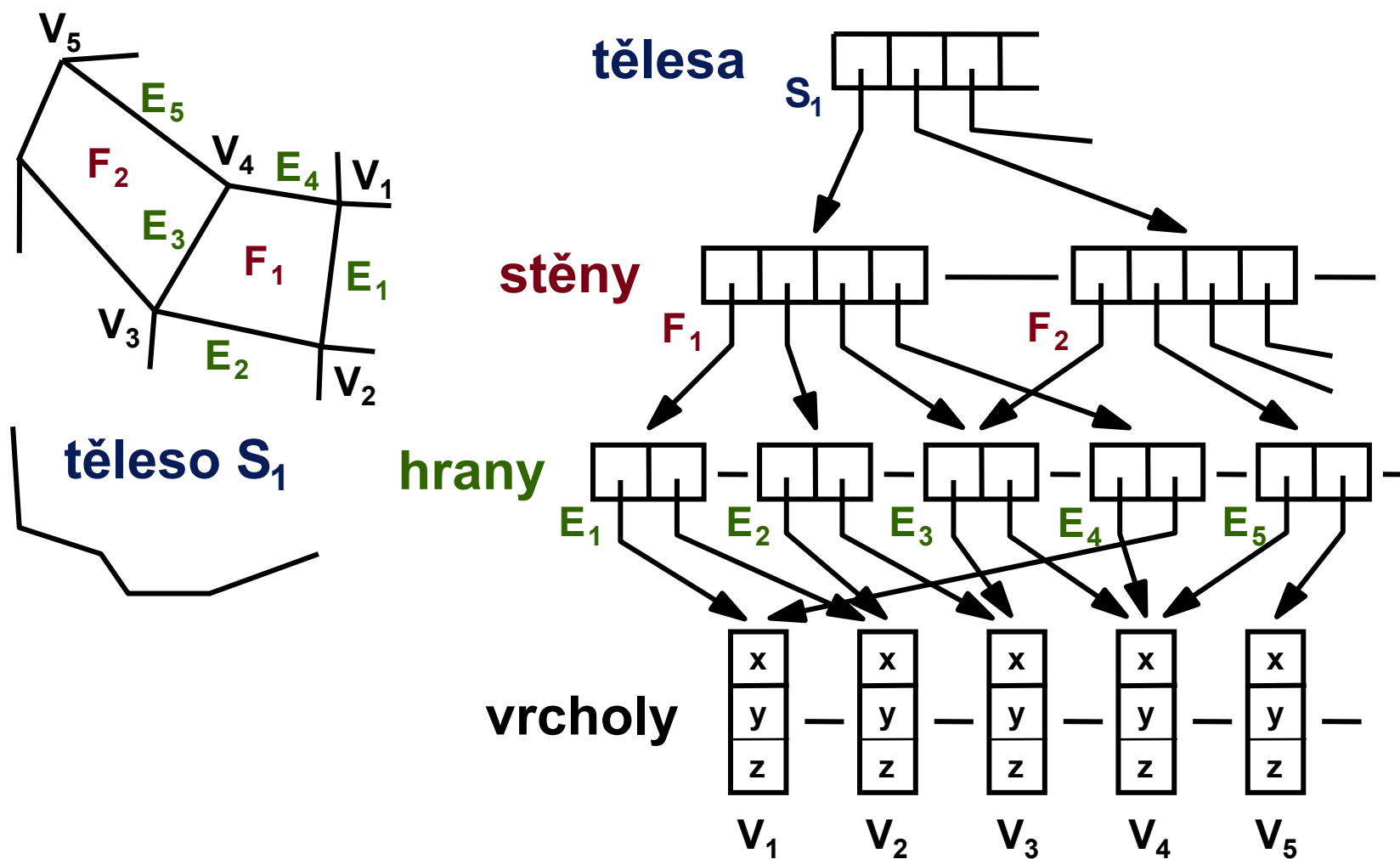
Polygonální polévka

- Zjednodušená VEF na VF

“Okřídlená hrana” (“winged-edge”)

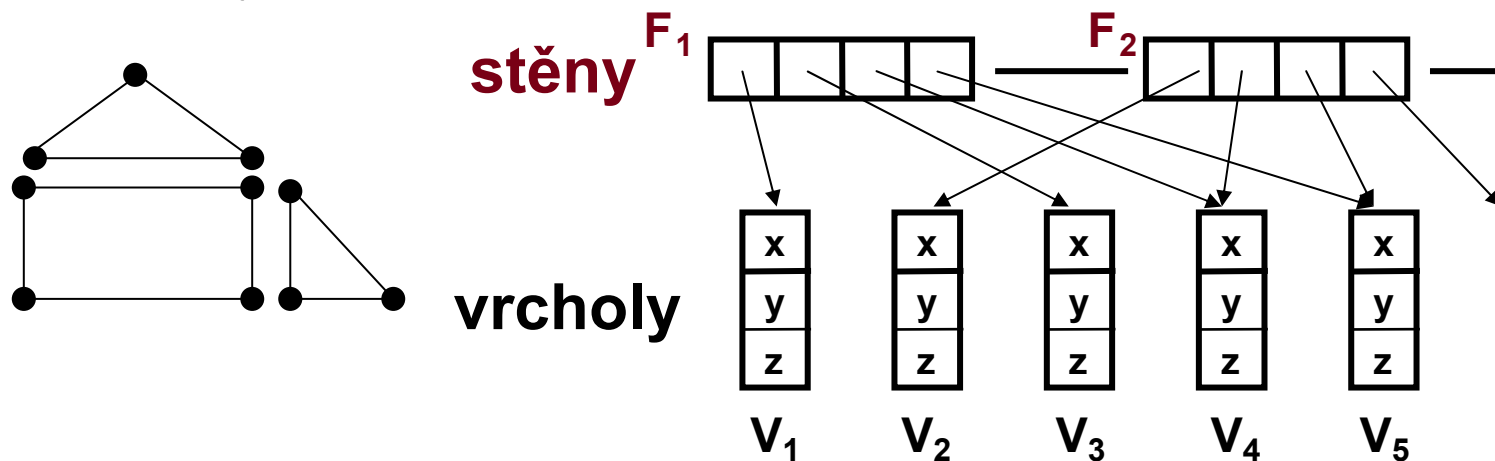
- Redundantní informace pro **rychlé vyhledávání** sousedních objektů (hrany incidentní s vrcholem, ..)
- Omezeny přímé odkazy, posíleny zpětné odkazy

Povrchová reprezentace VEFS



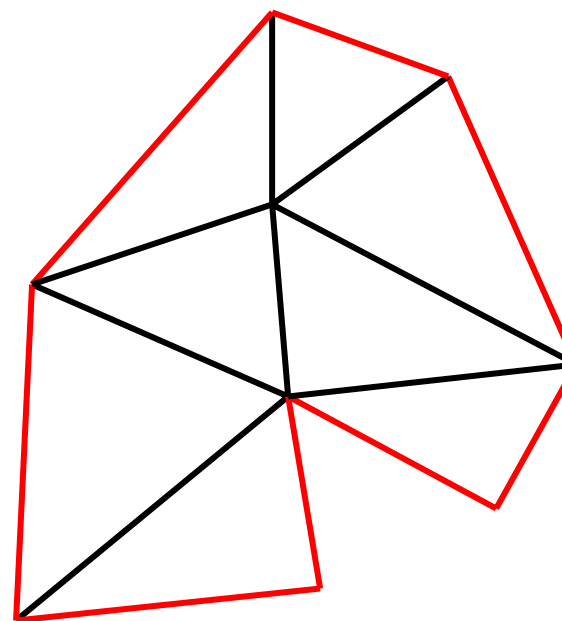
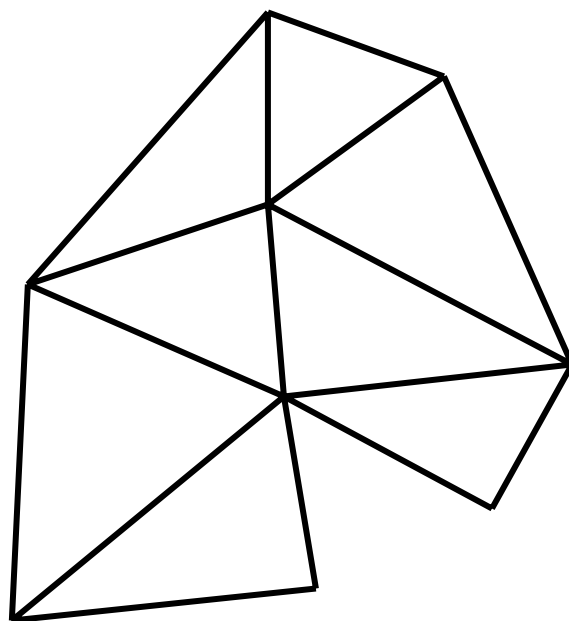
▪ Polygonální polévka (*polygon soup*)

- Zjednodušená plošková reprezentace - VF
- Izolované stěny trojúhelníky (polygony), neukládá topologii
- Redundantní vrcholy (opakují se)
nebo společné vrcholy (topologie dodatečně odvoditelná)
- Zná plochy, proto **lze určit viditelnost**
- Nevhodný pro modelovací operace

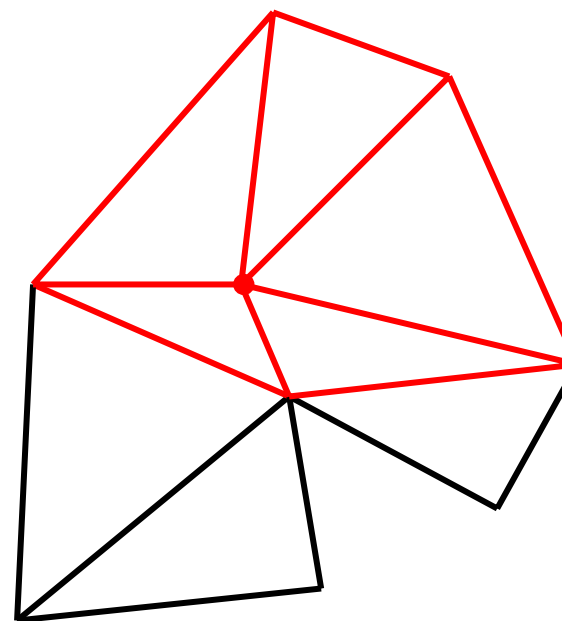
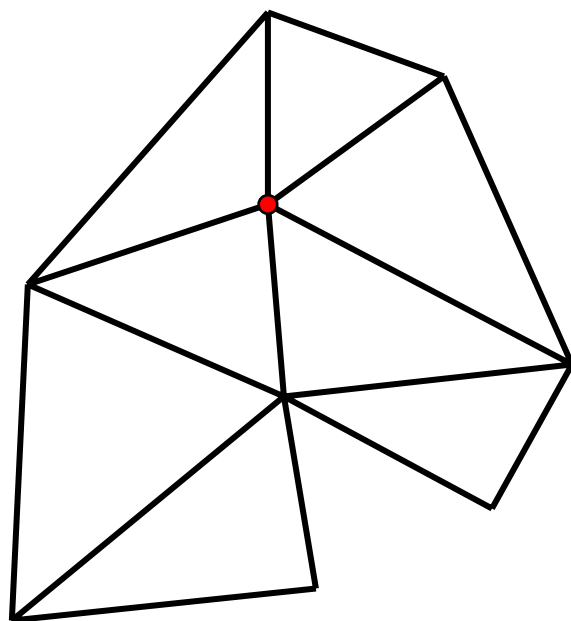


- **kreslení**
 - průchod všemi trojúhelníky, pozice vrcholů
- **zjištění vlastností objektů**
 - nalezení všech hraničních hran
 - nalezení sousedního trojúhelníku
- **změny sítě**
 - vložení/zrušení trojúhelníku
 - přemístění vrcholu a přilehlých trojúhelníků
 - kolaps hran/rozdělení vrcholů

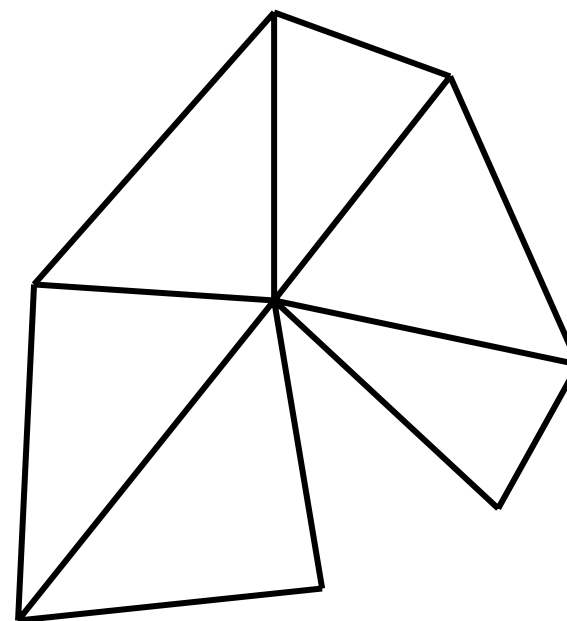
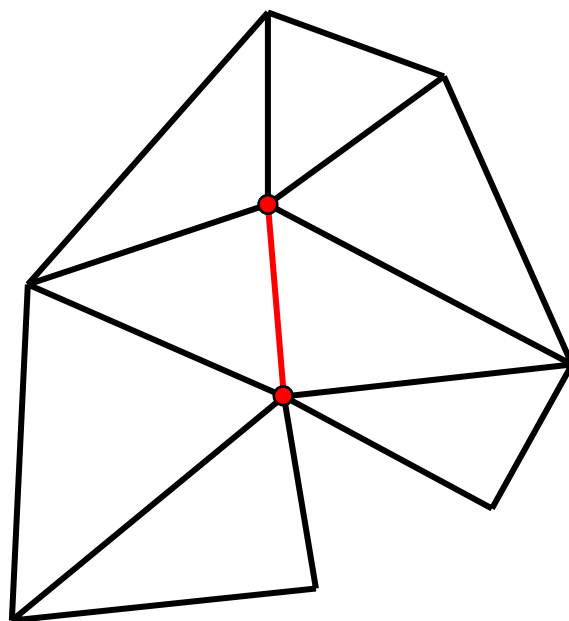
Nalezení hraničních hran



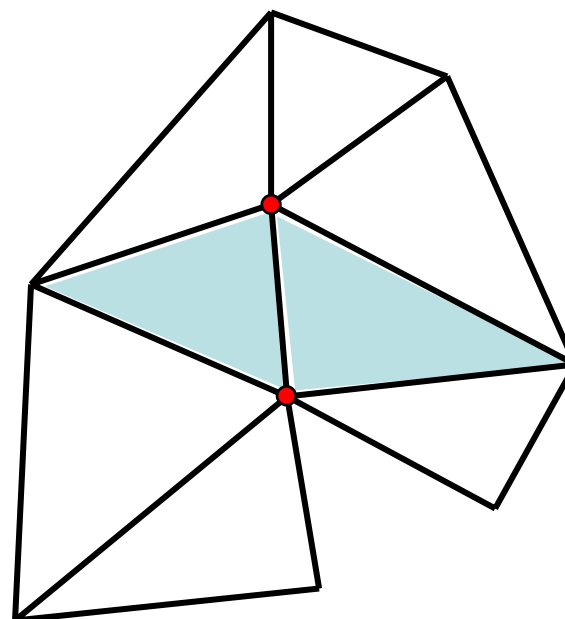
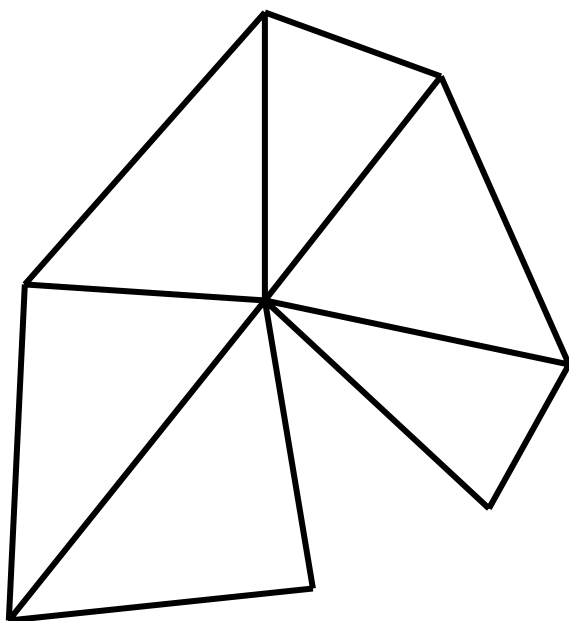
Přemístění vrcholu



Kolaps hrany



Rozdělení vrcholu

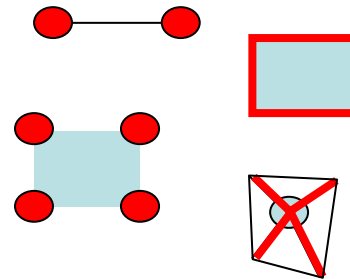


Primitiva

- vrcholy
- hrany
- stěny (polygony, často jen trojúhelníky)

Topologické vztahy

- vrcholy incidující s hranou
- hrany incidující se stěnou
- vrcholy incidující se stěnou
- hrany incidující s vrcholem
- ...



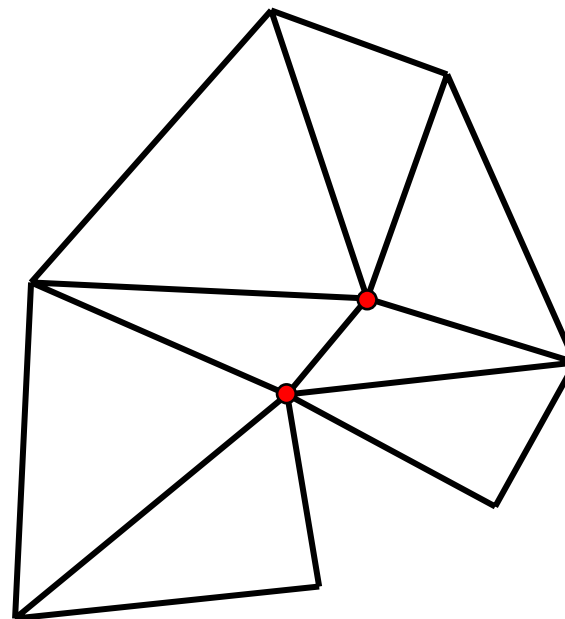
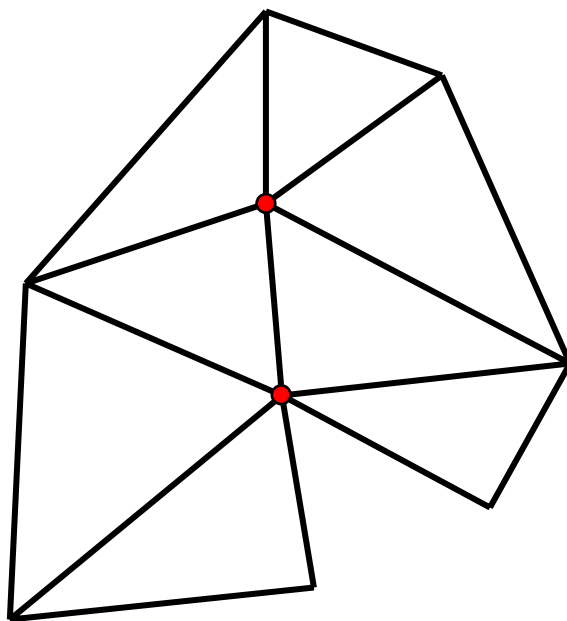
Geometrie

- pozice a tvar vrcholů, hran, stěn

Topologie

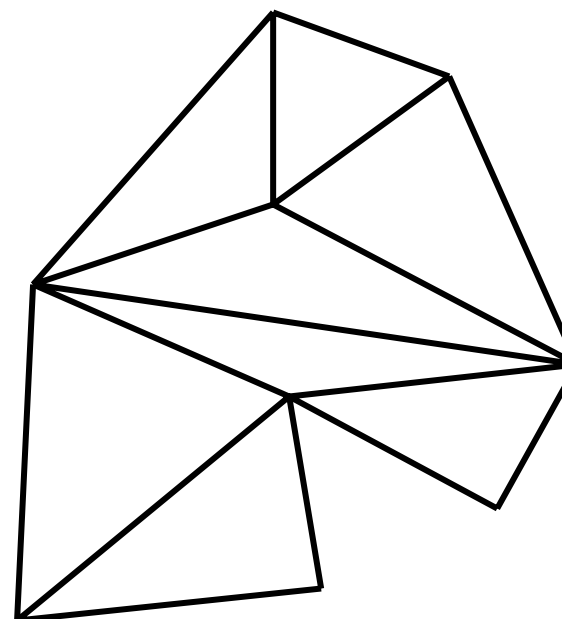
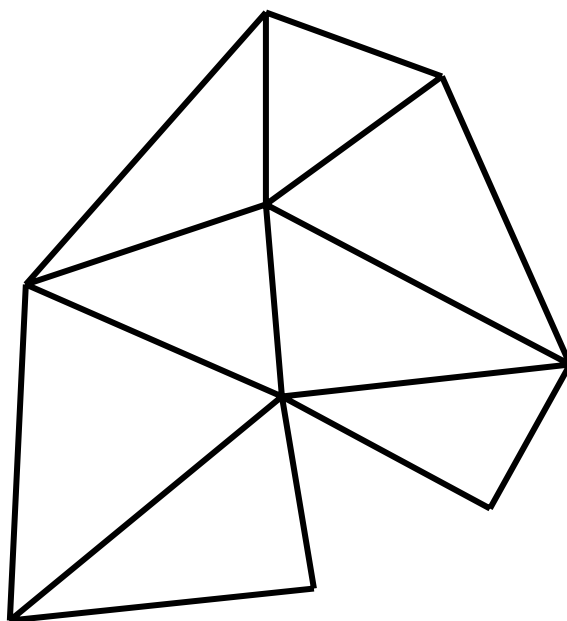
- konektivita/sousednost mezi různými vrcholy, hranami, stěnami

Topologicky identické sítě



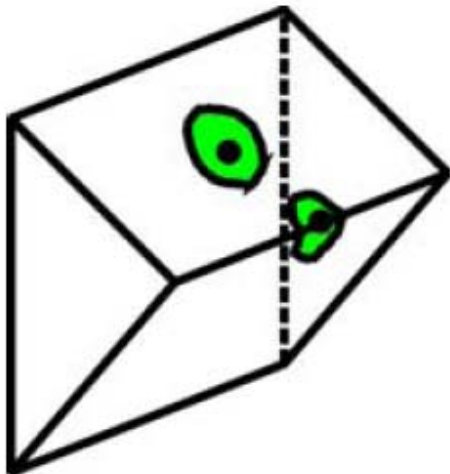
Topologicky odlišné sítě

- identická geometrie vrcholů
- odlišná topologie a geometrie trojúhelníků/hran

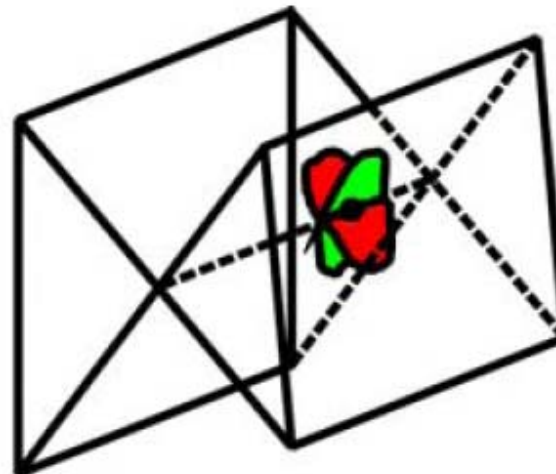


Manifold

Def: **2-manifold**: Pro každý povrchový bod existuje okolí, které je topologicky ekvivalentní s rovinou (kruhem)

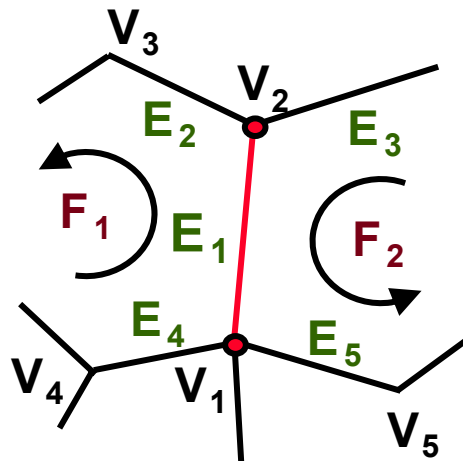


2-manifold

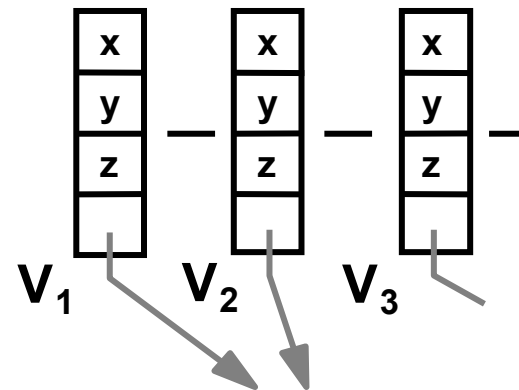


nonmanifold

Okřídlená hrana (*winged-edge*)



těleso S_1



vrcholy

hrany

(L)	(n)
F_1	F_2
E_2	E_5
E_4	E_3
V_1	V_2

E_1

S_1

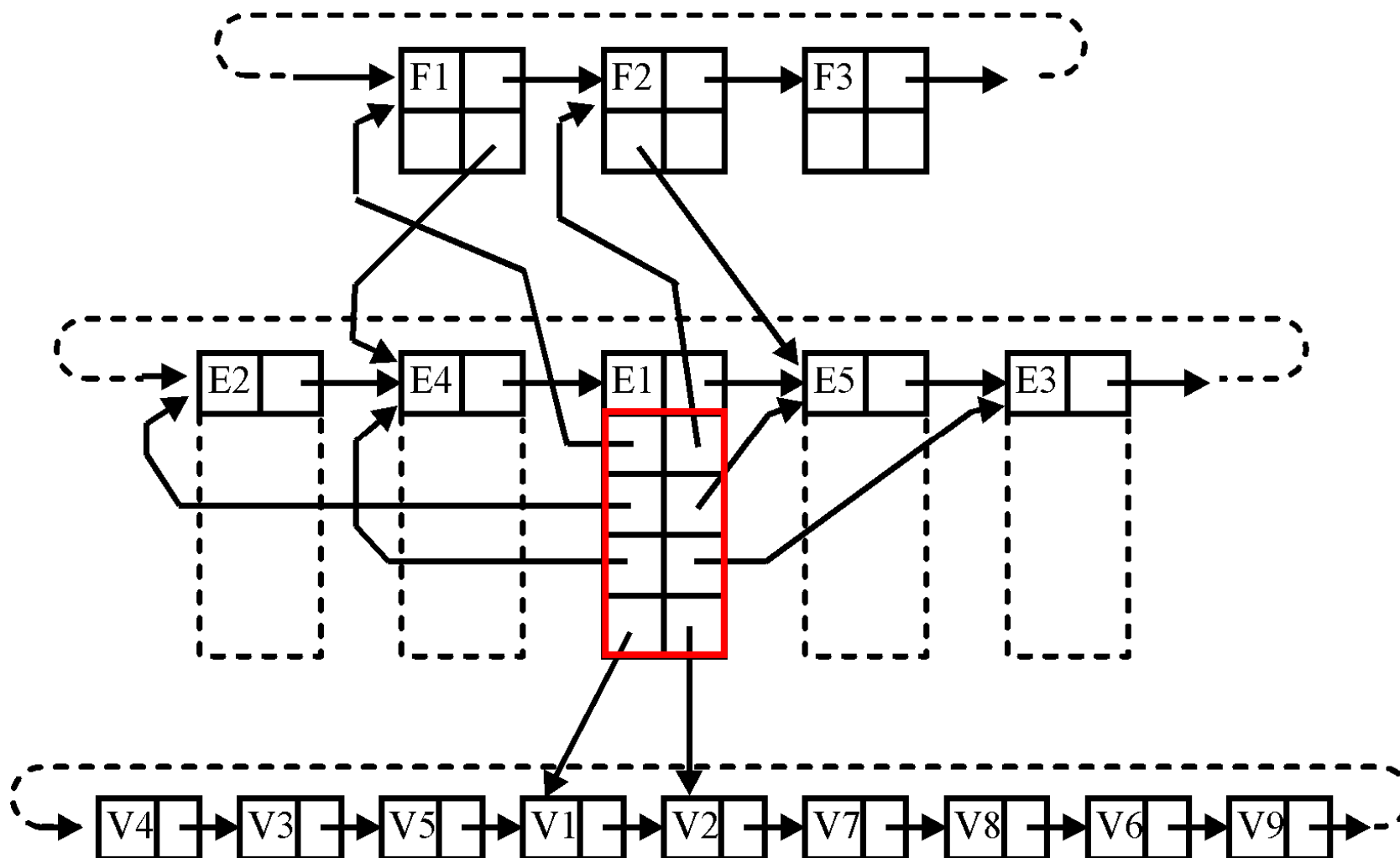
tělesa

stěny

F_1

F_2

Okřídlená hrana - (F,E,V)



Edge:

- *Vertex *start;* (x)
- *Vertex *end;* (y)
- *Face *left;* (F_l)
- *Face *right;* (F_r)
- *Edge *leftPred;* (P_l)
- *Edge *leftSucc;* (S_l)
- *Edge *rightPred;* (P_r)
- *Edge *rightSucc;* (S_r)

Příklad: průchod hranami levé stěny

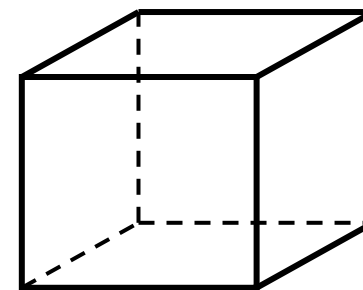
```
leftFace( Edge *startEdge ) {  
    Edge *current= startEdge;  
    do {  
        output( current );  
        current= current->leftSucc;  
    } while( current!= startEdge );  
}
```

Eulerovy rovnosti

Pro **jednoduchá tělesa** bez děr:

$$F + V = E + 2$$

F – počet stěn, **V** – počet vrcholů, **E** – počet hran



$$6 + 8 = 12 + 2$$

Obecný vzorec (s dírami):

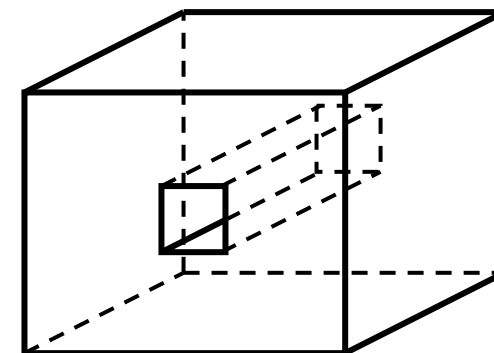
$$F + V = E + 2*(S-H) + R$$

S – počet těles

H – počet děr procházejících celým tělesem

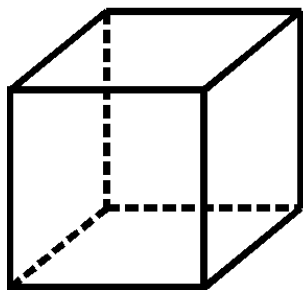
R – počet děr ve stěnách

Solid, Hole, Ring (Loop)

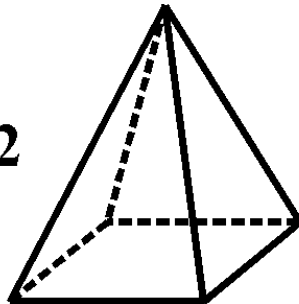


$$10 + 16 = 24 + 2*(1-1) + 2$$

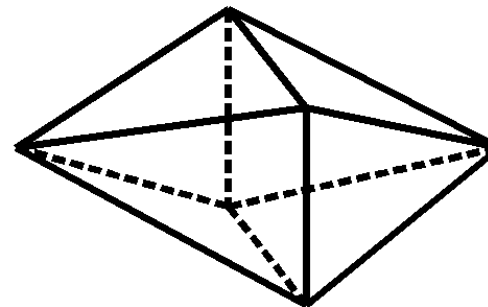
Euler.rovnost - jednoduchá tělesa



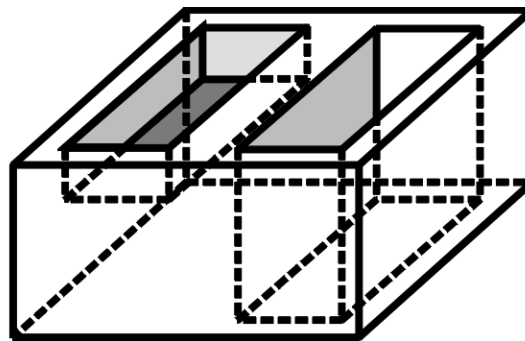
V=8
E=12
F=6



V=5
E=8
F=5



V=6
E=12
F=8

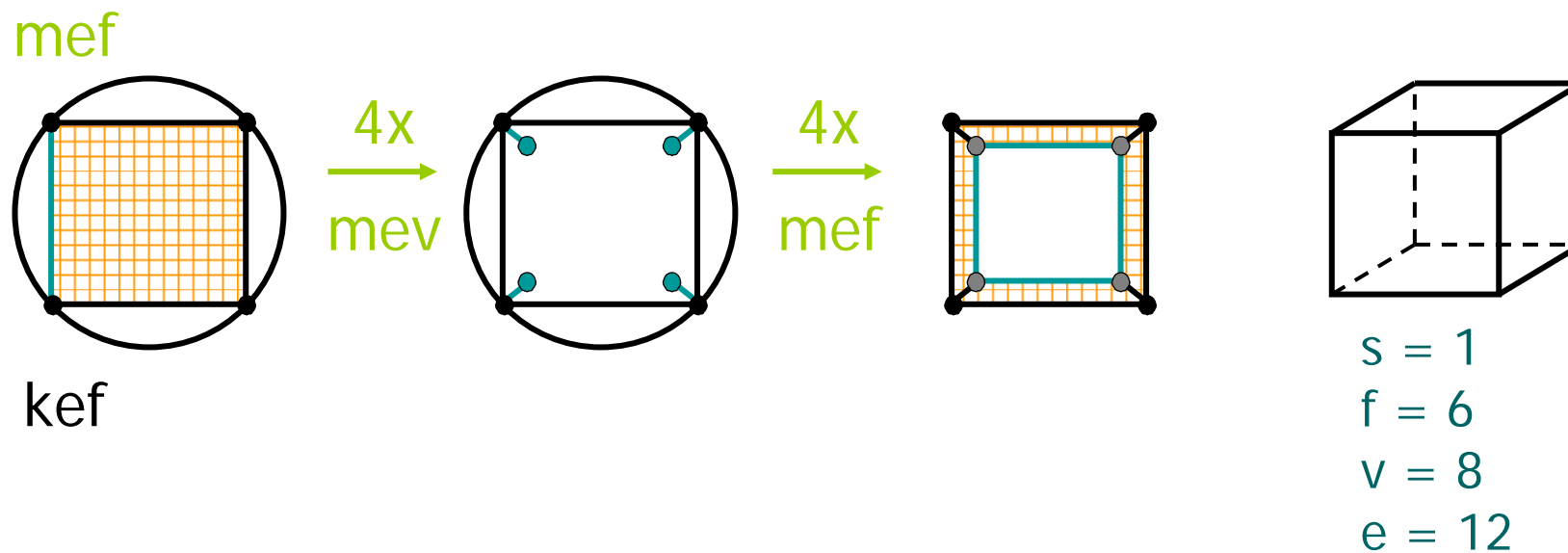
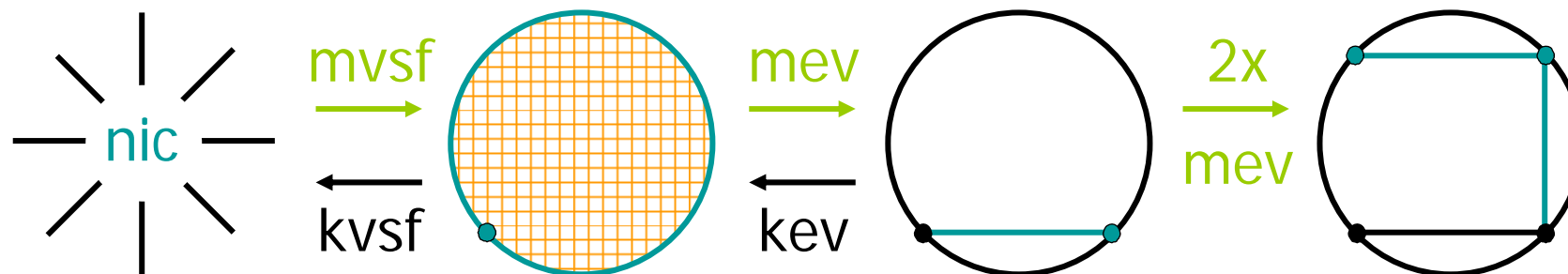


$$V + F = E + 2(S - H) + R$$

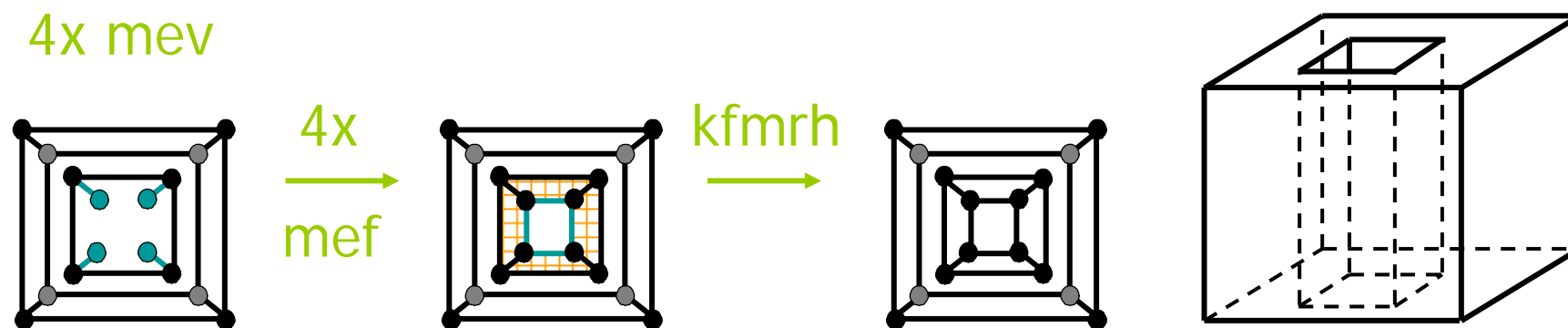
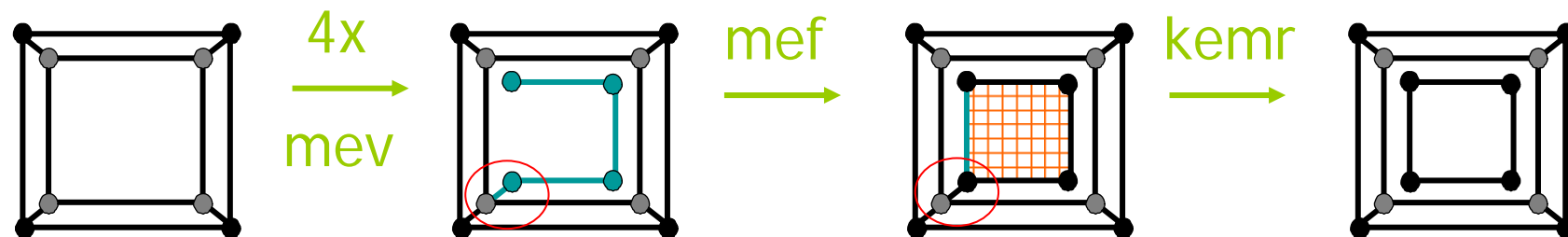
$$24 + 15 = 36 + 2(1 - 1) + 3$$

- Složitá u množ. operací nad B-rep.
- Eulerovy operátory:
 - zajišťují topologickou korektnost modelu
 - umožňují operace Undo/Redo
 - operátory zapsané do souboru mohou sloužit jako přenosový formát
- Příklady Eulerových operátorů
 - **mvsf** - “make vertex, solid, face”,
 - **mev** - “make edge, vertex”,
 - **mef** - “make edge, face”,
 - **kef** - “kill edge, face”, ...

Eulerovy operátory ... $F+V=E+2$



Další Eulerovy operátory



kfmrh – „kill face make ring hole“

- Existence algoritmu pro rozklad tělesa na „nic“

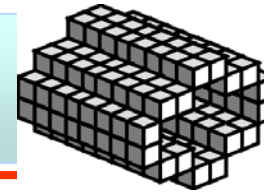
Výčtové reprezentace

- přímé vyčíslení obsazeného prostoru (diskrétní reprezentace – omezená přesnost)
- používají se hlavně jako pomocné datové struktury pro rychlé vyhledávání
- **buněčný model (rastr), oktalový strom**

CSG reprezentace (konstruktivní geometrie těles)

- velice silná a přesná metoda (elementární tělesa, geometrické transformace, množinové operace)
- Obtížnější **zobrazování** (vrhání paprsku)

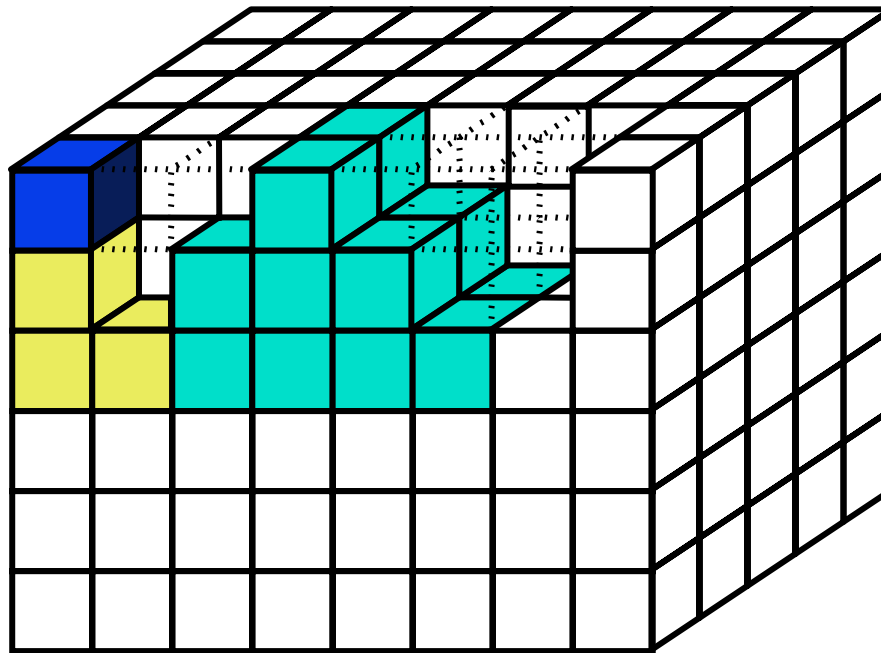
Buněčný model



voxel

“volume
element”

pole $k \times l \times m$ voxelů

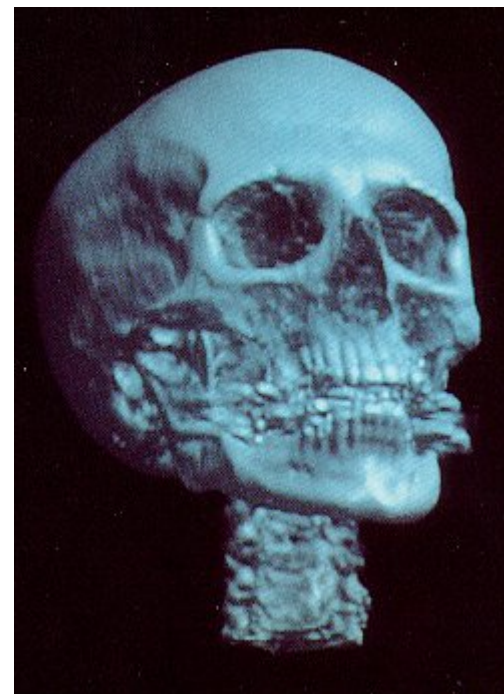
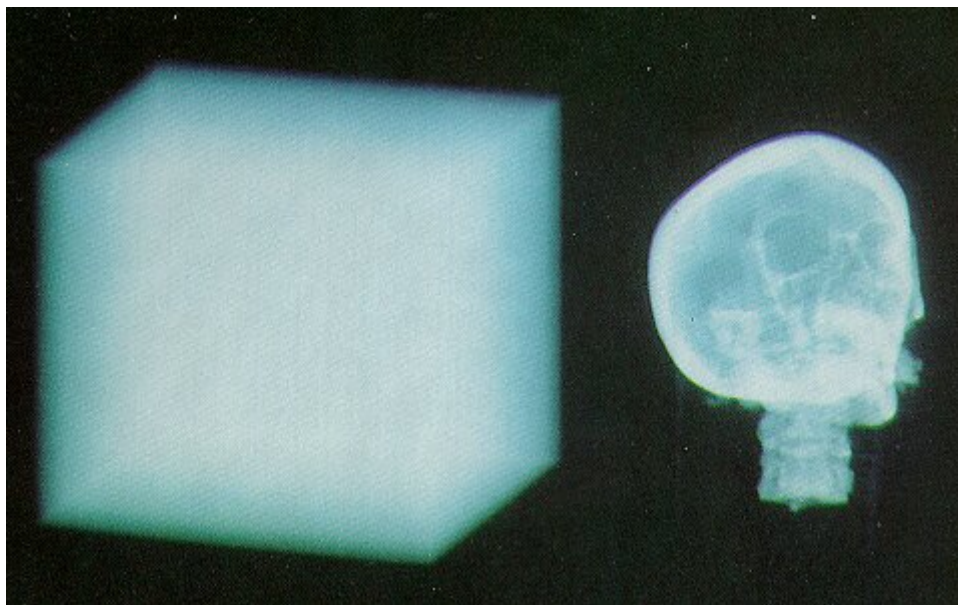


jednobitová varianta: 0 - nic, 1 - těleso

vícebitová varianta: 0 - nic, $n > 0$ - těleso číslo n

nebo skalární hodnota (hustota, pohltivost,...)

Buněčný model - příklad



Buněčný model - příklad



Computer Graphics Group



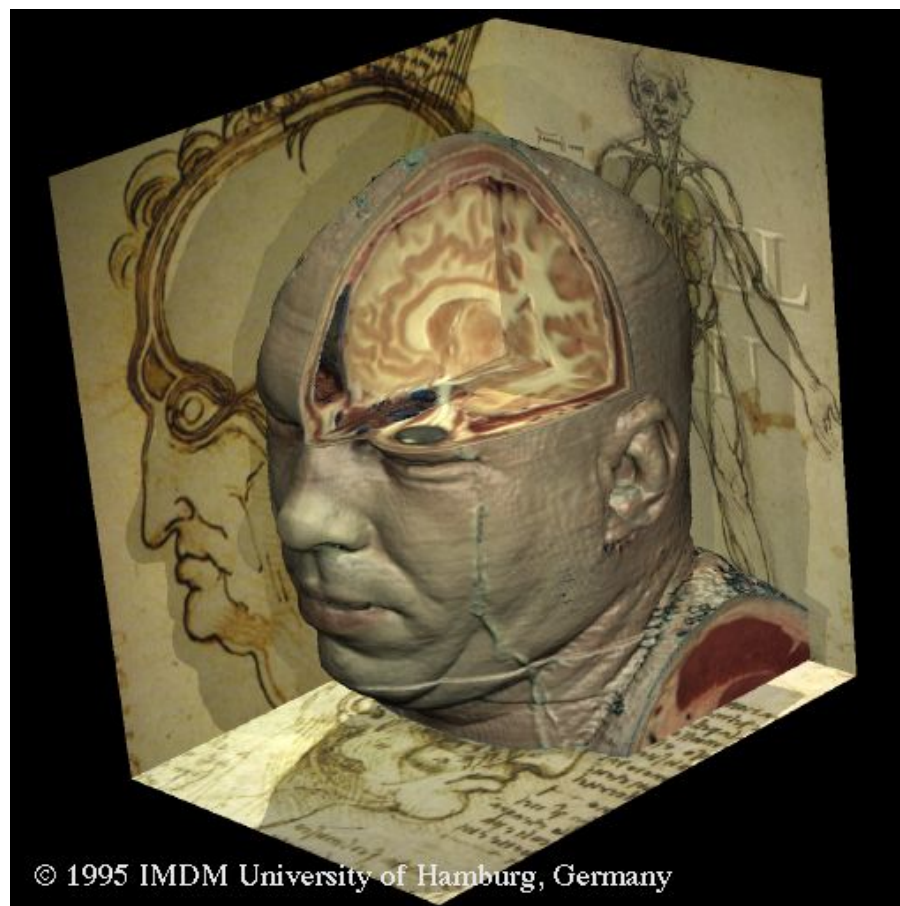
- nastavení přední roviny ořezání (výběr vrstvy dat)
- pohledové transformace
- množinové operace nad modelem
- osvětlení
- konstrukce izoploch
- separace oblastí (např. orgánů ...)

Volume based modeling

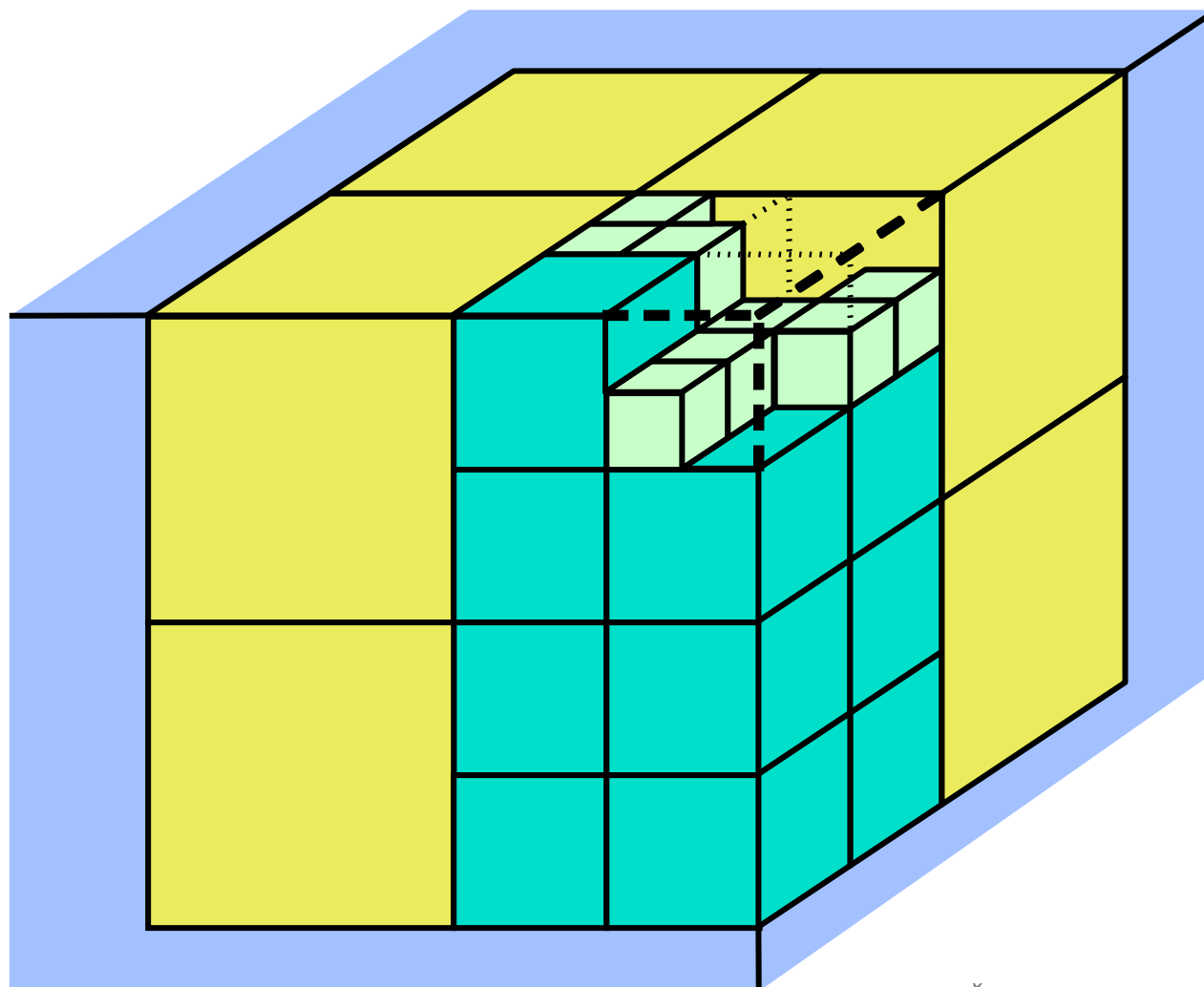
- Aplikace: visible human project
- snímky řezů mrtvoly muže
 - každý řez je 2D pole voxelů
 - celé tělo je popsáno sadou volumetrických dat



Visible human project

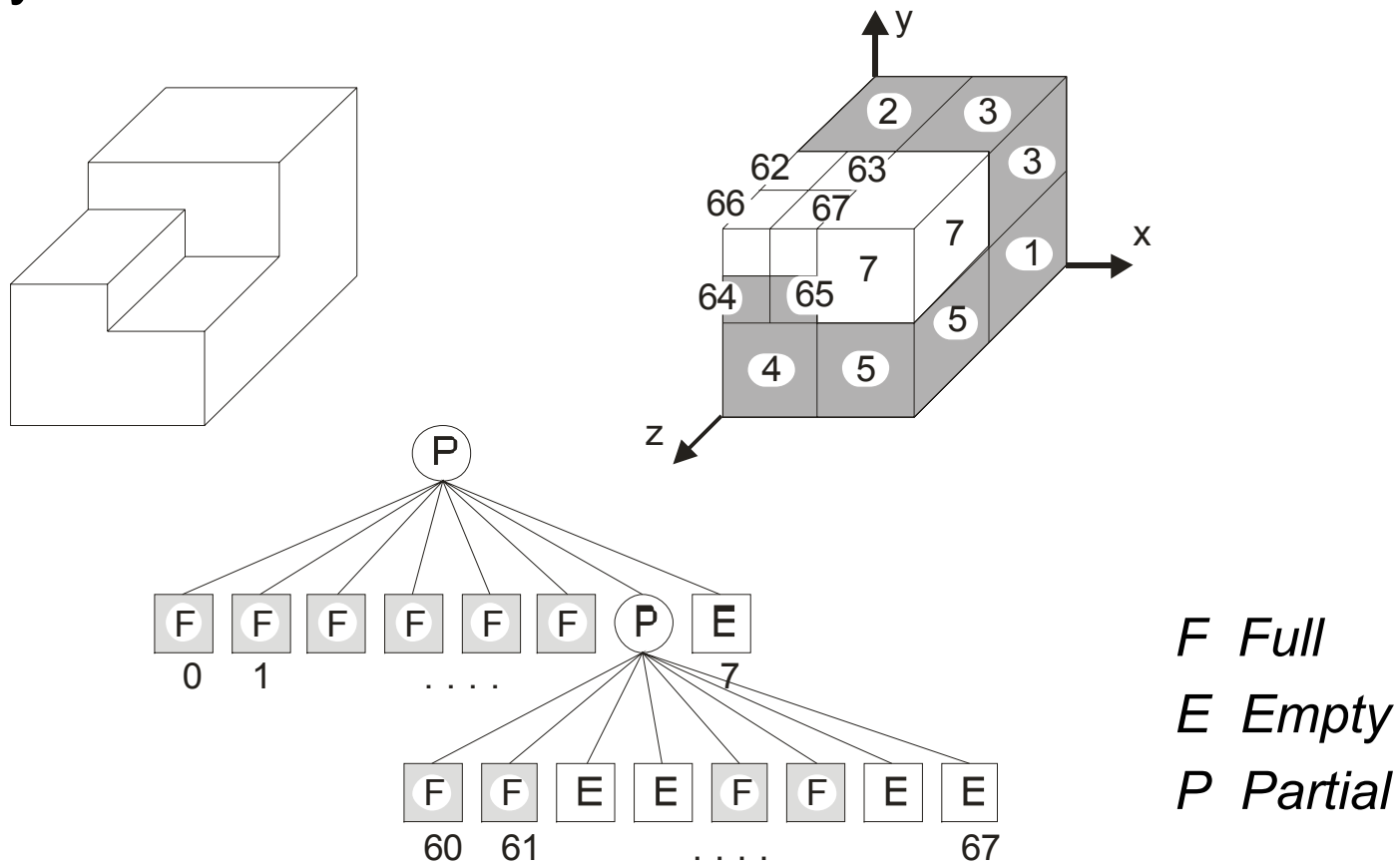


Oktantový model



Oktantový strom (octree)

„oktalový strom“



3D analogie kvadrantového stromu

- je-li vnitřek krychle nehomogenní, rozdělí se na osm částí (dělí se až do úrovně voxelu)
- úspora paměti proti buněčnému modelu (uloženy jen obsazené kostičky)

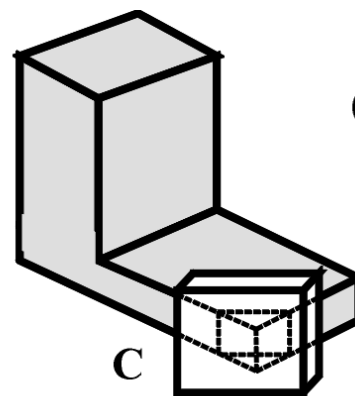
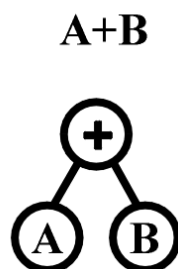
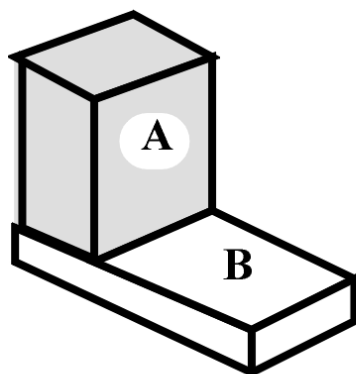
kreslení odzadu-dopředu

- pouze přivrácené stěny krychlí
- pouze stěny na povrchu těles (stěny mezi 0 a >0)
- několikanásobné překreslování některých pixelů

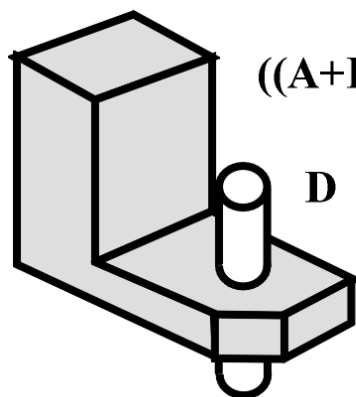
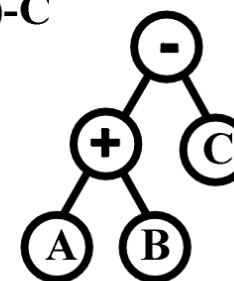
Prvky CSG stromu

- **elementární geometrická tělesa**
 - snadno definovatelná a vyčíslitelná
 - kvádr, poloprostor, hranol, koule, válec, kužel,...
- **množinové operace**
 - kompozice složitějších těles z elementárních
 - sjednocení, průnik, rozdíl, ..
- **geometrické transformace**
 - modifikace elementárních i složitějších těles
 - (homogenní) maticové transformace

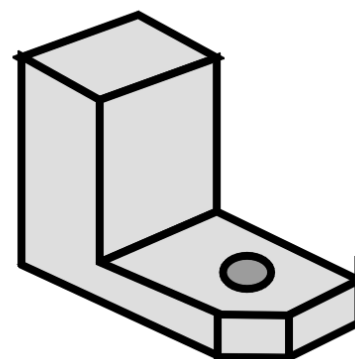
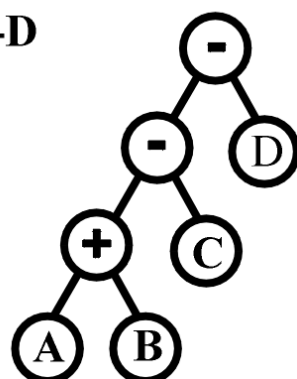
CSG strom - modelování



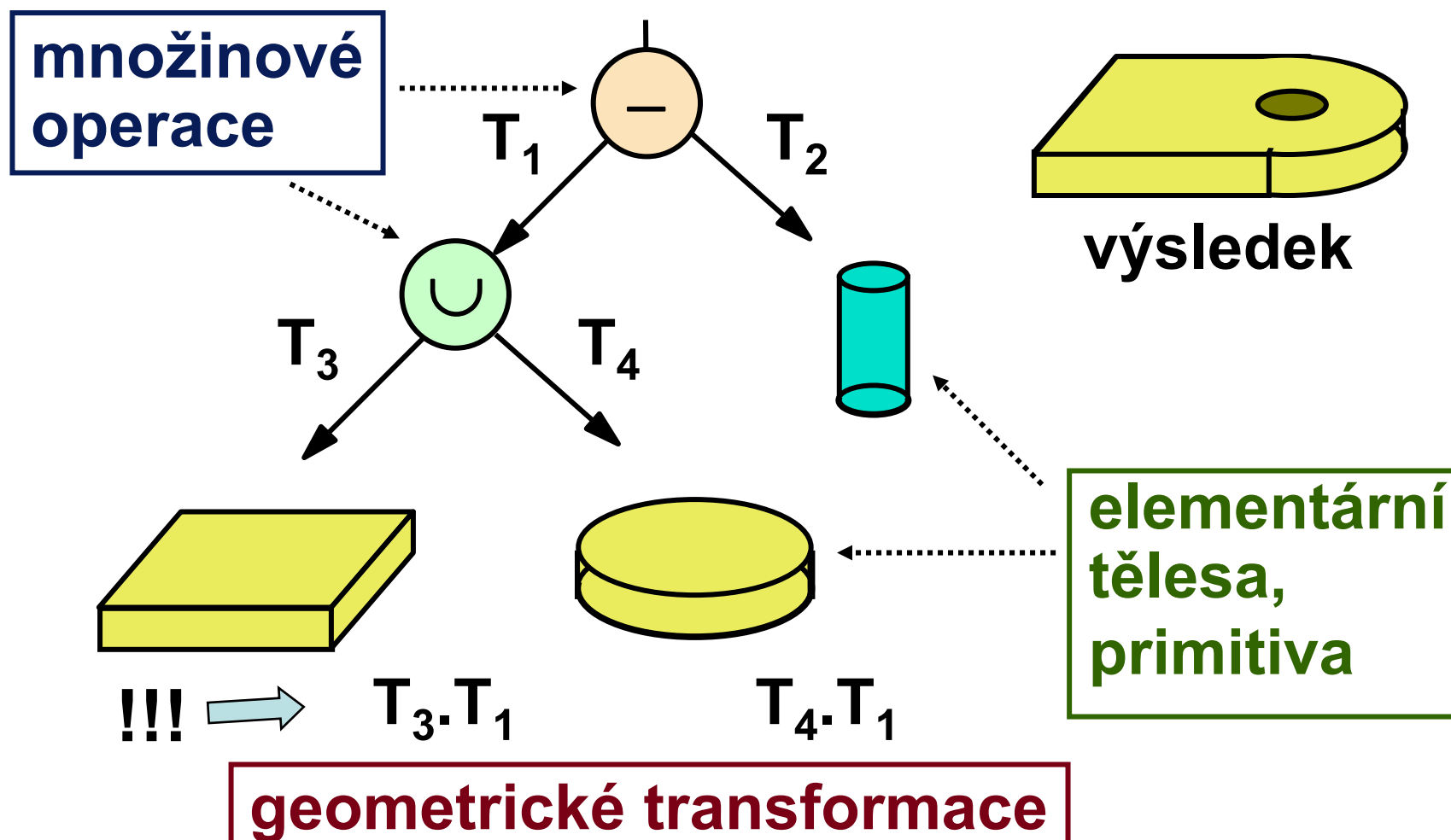
$(A+B)-C$



$((A+B)-C)-D$



CSG strom - transformace



význam (sémantika) transformace T_i

- T_i mohou být uloženy v každé hraně CSG stromu
- převod souřadnic ze soustavy podtělesa (podstromu, elementárního tělesa) do soustavy nadtělesa
- “podtěleso transformuji pomocí T_i před tím, než ho přidám do nadtělesa”

snadná transformace libovolného podstromu

- změním pouze jednu matici

inverzní transformace T_i^{-1}

- pro vyčíslovací algoritmy (test bod×CSG, zobrazení)

uložení transformací jen v listech

- kumulované součiny (např. $T_3 T_2 T_1$ nebo inverzní $T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1}$)
- urychlení vyčíslovacích algoritmů (pro editaci je výhodnější distribuované uložení transformací)

úsporné uložení elementárních těles

- tělesa jsou uložena v **normovaném tvaru**, všechny změny se provádí geometrickými transformacemi
- krychle (jednotková, vrchol v počátku), koule (jednotková, střed v počátku), válec (vodorovná podstava - jednotkový kruh, svislá osa, výška 1), ...

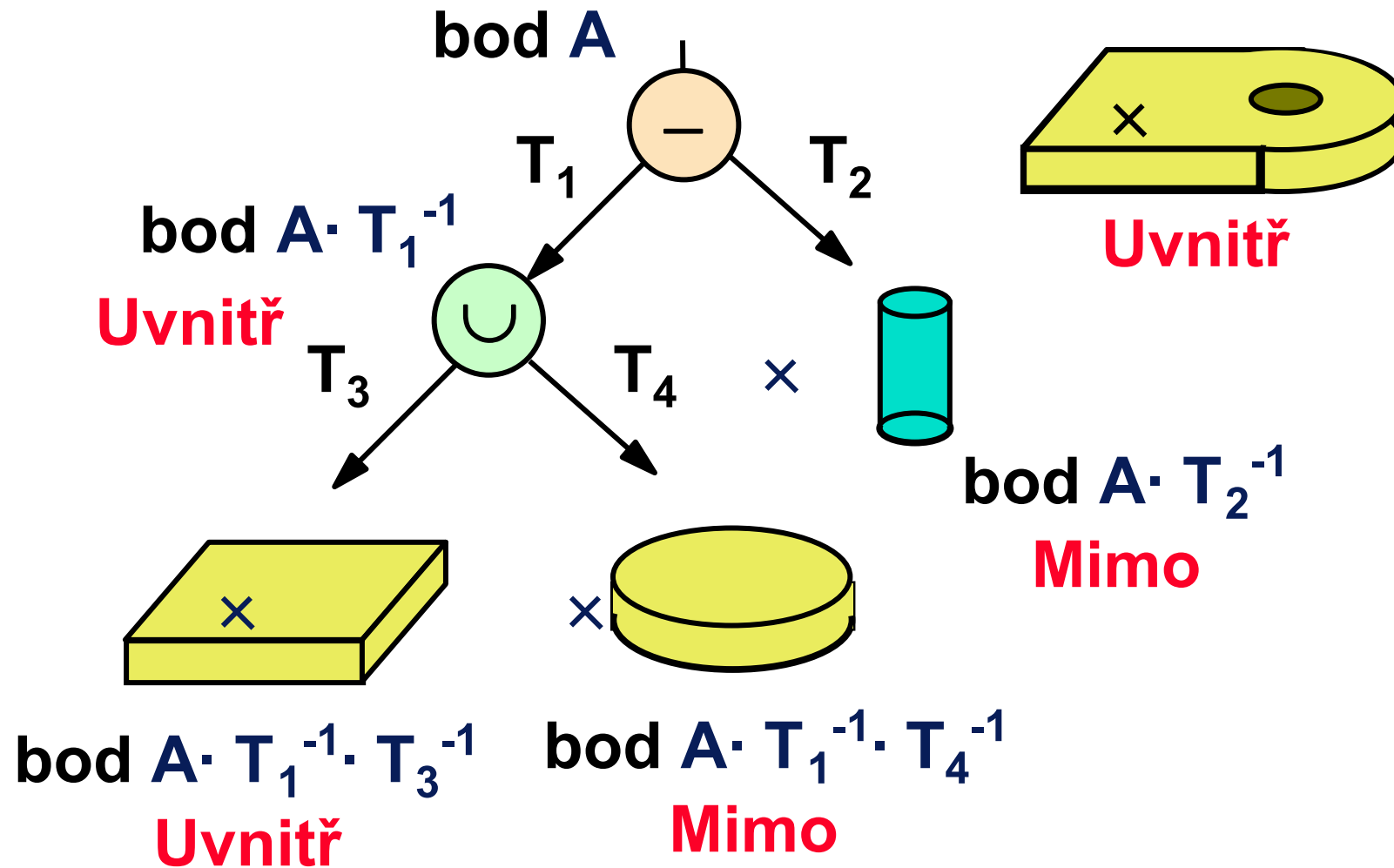
leží daný bod A uvnitř tělesa?

- někdy chceme zjistit i podtělesa obsahující bod **A**
- testy“**bod×elementární těleso**” jsou snadné (především pro normované tvary těles)

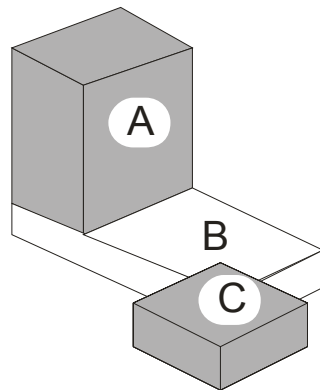
průchod CSG stromem

- souřadnice bodu A se převádějí do souřadných soustav elementárních těles (inverzní transformace)
- místo množinových operací se provádějí jejich **booleovské ekvivalenty** (\vee místo \cup , \wedge místo \cap , ...)

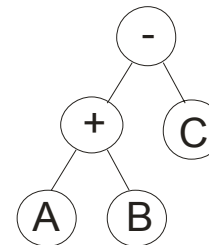
Test „bod x CSG strom“



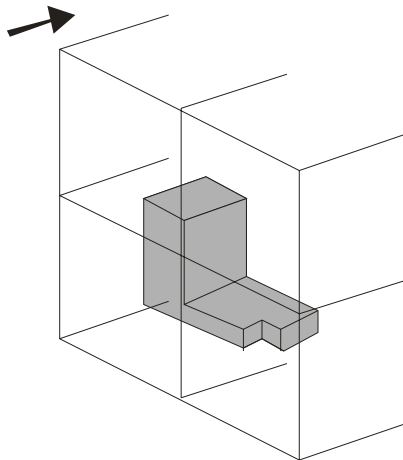
Prořezávání CSG stromů



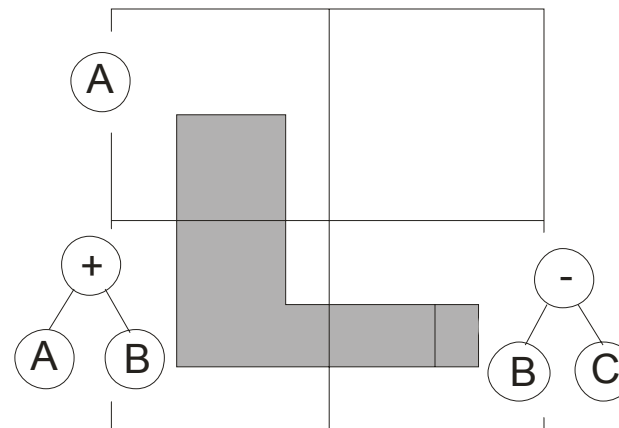
úplný CSG strom
 $(A+B)-C$



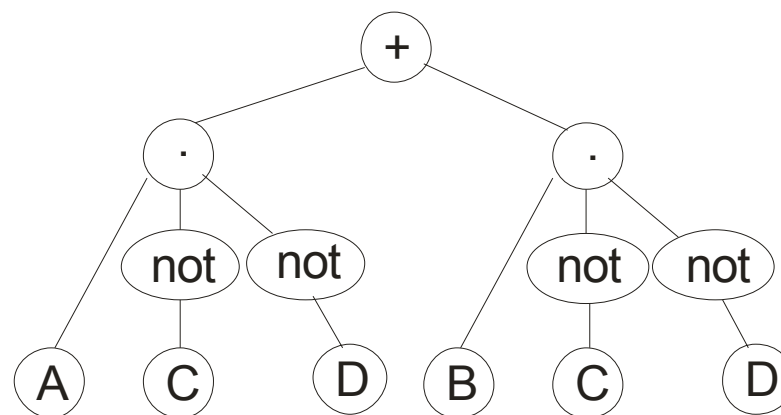
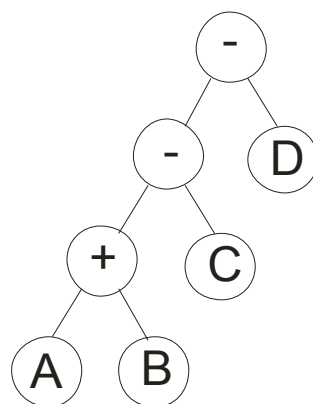
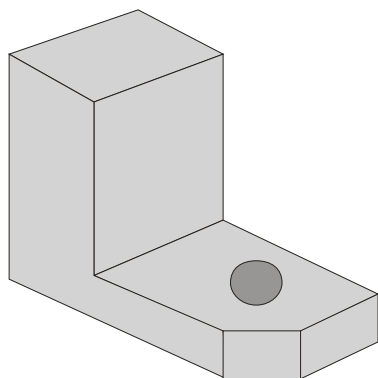
směr pohledu
→



podprostory
s prořezanými
CSG stromy



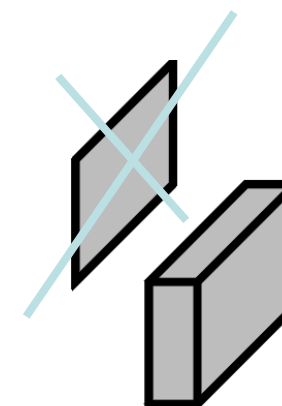
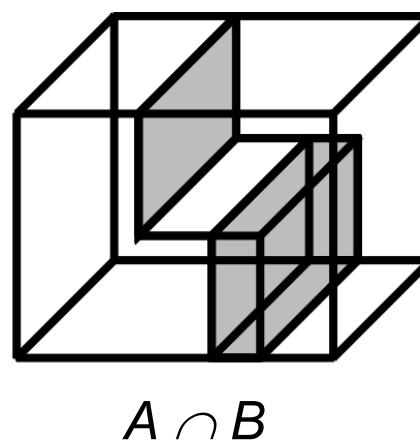
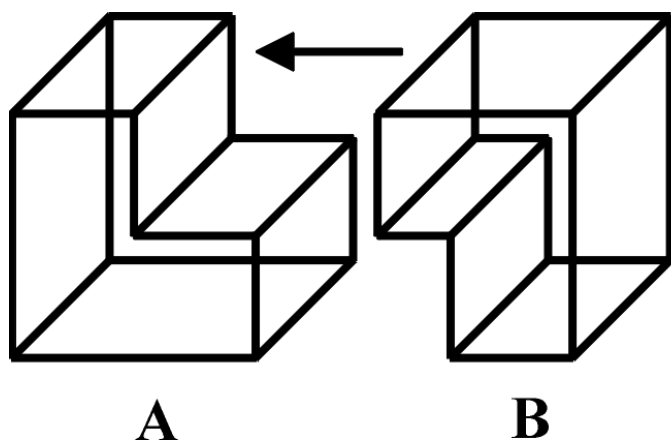
Úprava CSG výrazů



$$((A+B)-C)-D=(A-C-D)+(B-C-D)=A.\text{not}C.\text{not}D+B.\text{not}C.\text{not}D$$

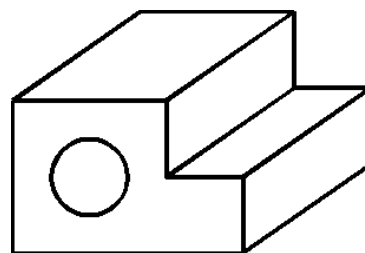
- **převedení do povrchové reprezentace**
 - pro každý druh **elementárního tělesa**: rutina převádějící těleso na **mnohostěn**
 - **množinové operace nad mnohostěny** (omezená přesnost - výsledek nemusí být správně ani v topologickém smyslu)
- **vrhání paprsku** (“Ray-casting”)
 - přesné zobrazování v **rastrovém prostředí** (pixelová přesnost)
 - výpočetně náročnější metoda

CSG operace - záludnosti

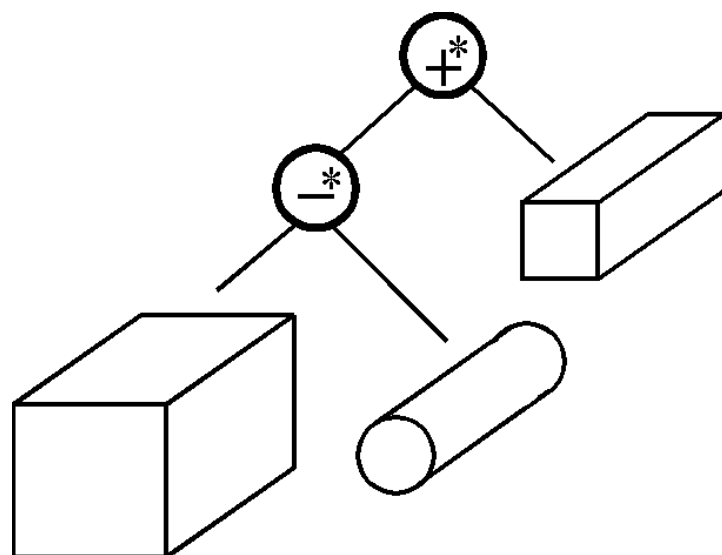


Je nutné definovat tzv. „regularizované operace“

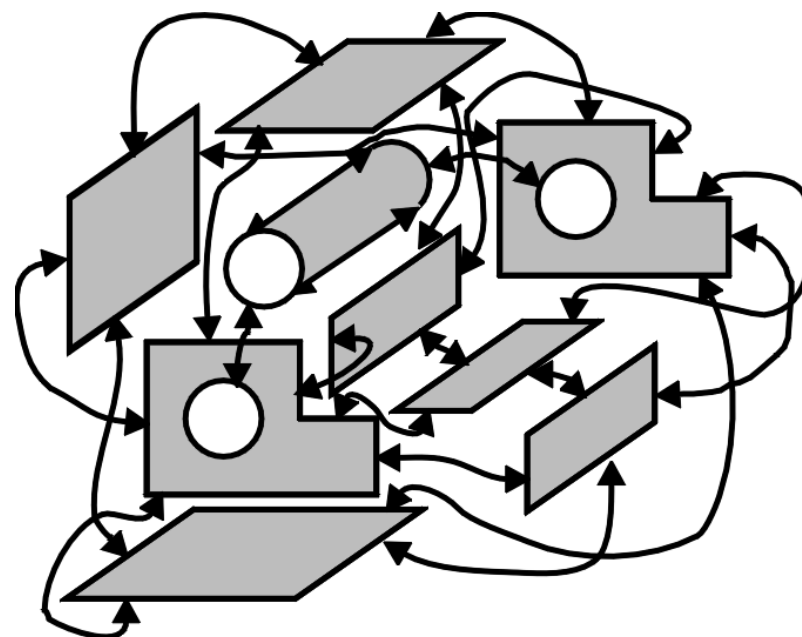
Porovnání modelů



těleso



model CSG



model hraniční reprezentace

- **vrchol:**
 - (normálový vektor pro spojité stínování)
- **hrana:**
 - příznak umělé hrany: pro reprezentaci děravých stěn nebo aproximaci křivých ploch sítí polygonů
- **stěna:**
 - Barva
 - normálový vektor (stínování, přivrácená/odvrácená)
- **těleso:**
 - barva

Reference

[MPG] Žára, Beneš, Sochor, Felkel. Moderní počítačová grafika, 2. vydání, Computer Press, 2004, kap. 5.

[Mortenson] M. E. Mortenson. Geometric Modeling, 2nd edition, Wiley Computer Publishing, 1997

[Ježek] F. Ježek: Geometrické a počítačové modelování, pomocný učební text, ZČU Plzeň, 2000

http://www.fd.cvut.cz/personal/voracova/GM/PGR021/GM_Jezek.pdf

[Alexandr] L. Alexandr: Výuka počítačové grafiky cestou WWW. Diplomová práce VUT Brno, 1999 [http://lubovo.misto.cz/ MAIL /curves/](http://lubovo.misto.cz/MAIL/curves/)

[Finn] D. Finn: Geometric Modelling: lecture notes <http://www.rose-hulman.edu/~finn/>

[Shene] C. K. Shene: Introduction to Computing with Geometry Notes, Michigan Technological University, <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/notes.html>