1.3 Důkaz správnosti Floydova algoritmu

1.3.1 Floydův algoritmus.

Vstup: matice délek **A**.

Výstup: matice vzdáleností $\mathbf{M} = \mathbf{U}$.

1. *[Inicializace]*
   $\mathbf{M} := \mathbf{A}$
2.
```
begin
    for k = 1, 2, ..., n do
        for i = 1, 2, ..., n do
            for j = 1, 2, ..., n do
                begin
                    if M(i,j) > M(i,k) + M(k,j) then
                        M(i,j) = M(i,k) + M(k,j)
                end
end
```

1.3.2 Variant. Jedná se o tři do sebe vnořené cykly, z nichž každý se provádí n-krát. Proto je variantem číslo n.

1.3.3 Invariant. Po k-tém provedení vnějšího cyklu má zkonstruovaná M matice tuto vlastnost:

$M(i,j)$ je délka nejkratší cesty z i do j, která vede přes vrcholy $1, 2, \dots, k$.

V případě, že taková cesta neexistuje, je $M(i,j) = \infty$.

Důkaz se vede indukcí podle k.

Základní krok: Předpokladájme, že $k = 0$. Pak cesta, která vede pouze přes vrcholy od 1 do 0, je cesta, která nemá žádné vnitřní vrcholy; a to je matice vzdáleností.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = r$; tj

$M(i,j)$ je délka nejkratší cesty z i do j, která vede přes vrcholy $1, 2, \dots, r$.

Nejkratší cesta i do j, která může vést i přes vrchol $r + 1$, se:

- Buď vrcholem $r + 1$ neprochází, pak se hodnota $M(i,j)$ nemá měnit.
- Nebo vrcholem $r + 1$ prochází – v takovém případě se skládá z nejkratší cesty z vrcholu i do vrcholu $r + 1$ a z nejkratší cesty z vrcholu $r + 1$ do vrcholu j. V takovém případě je $M(i, r+1) + M(r+1, j)$ kratší než $M(i,j)$ a algoritmus hodnotu správně změní.

1.3.4 Tvrzení. 2-barevnost je ve třídě $\mathcal{P}$.

Zdůvodnění: Platí tvrzení:

Neorientovaný graf je 2-barevný právě tehdy, když je bipartitní a to je právě tehdy, když neobsahuje kružnice liché délky.

Proto postupujeme takto:

Algoritmem prohledávání do šírky rozdělíme vrcholy do hladin. Všechny vrcholy hladin se sudým indexem obarvíme barvou 1, všechny vrcholy hladin s lichým indexem obarvíme barvou 2. Zkontrolujeme, že se jedná o správné obarvení – jestliže ano, graf je 2-barevný (a máme jedno obarvení dvěma barvami), jestliže ne, graf má kružnice liché délky a 2-barevný není.

1.3.5 Tvrzení. 2-CNF SAT je ve třídě $\mathcal{P}$.

Zdůvodnění: Je dána formule φ v CNF, která má klauzule vždy se dvěma literály. K formuli *varphi* sestrojíme graf $G = (V, E)$ takto:

- Označme $x_1, s_2, \dots, x_n$ všechny logické proměnné obsažené ve formuli φ. Pak
$$V = \{x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2 \dots, x_n, \neg x_n\}.$$
- Pro každou klauzuli $C = l_1 \vee l_2$ formule φ vedeme dvě hrany $\neg l_1 \to l_2$ a $\neg l_2 \to l_1$;
$$E = \{(\neg l_1, l_2, (\neg l_2, l_1) \,|\, C = l_1 \vee l_2 \text{ je klauzule } \varphi\}.$$

Platí toto tvrzení: Formule φ je splnitelná právě tehdy, když pro žádnou logickou proměnnou nejsou x_i i $\neg x_i$ ve stejné komponentě silné souvislosti.

Není těžké se přesvědčit, že všechny literály, které leží ve stejné komponentě silné souvislosti grafu G, musí mít v každém pravdivostním ohodnocení, ve kterém by formule φ byla pravdivá, stejnou pravdivostní hodnotu. Proto nemůže být x_i i $\neg x_i$ ve stejné komponentě silné souvislosti.

Předpokládejme, že jsme zkonstruovali silně souvislé komponenty $K_1, K_2, \dots K_s$ grafu G a každá logická proměnná vždy ležela v jiné komponentě než její negace. Označme
$$K_1, K_2, \dots, K_s$$
silně souvislé komponenty grafu G.

Utvoříme kondenzaci grafu G; tj. vytvoříme graf, který má vrcholy $K_1, K_2, \dots, K_s$; z komponenty K_i vede orientovaná hrana do komponenty K_j právě tehdy, když existují vrcholy $l \in K_i$ a $l' \in K_j$ takové, že $l \to l'$ je hrana grafu G.

Kondenzace grafu G je acyklický graf a proto ho můžeme topologicky očíslovat.

Nyní definujeme pravdivostní ohodnocení u takto:

- Jestliže komponenta obsahující literál $\neg x_i$ předchází v topologickém očíslovaní komponentu obsahulící literál x_i, položíme $u(x_i) = 1$;
- Jestliže komponenta obsahující literál x_i předchází v topologickém očíslovaní komponentu obsahulící literál $\neg x_i$, položíme $u(x_i) = 0$.

Není těžké dokázat, že formule φ je pravdivá v takto definovaném pravdivostním ohodnocení.

1.3.6 Tvrzení. Problém párovnání leží ve třídě $\mathcal{P}$.