Asymptotická složitost algoritmů

Cvičení 1. Určete, co bude u následujících dat rozhodující délkou vstupu při určení časové složitosti algoritmu:

(a) posloupnost prvků,

(b) graf o n vrcholech a m hranách,

(c) matice $n \times m$,

(d) číslo, jehož hodnota je podstatná pro délku výpočtu (např. test prvočíselnosti).

Cvičení 2. Uspořádejte následující funkce do posloupnosti $f_1, f_2, \ldots$ tak, aby $f_1 \in O(f_2), f_2 \in O(f_3), \ldots$ Dále určete rozklad, v němž funkce f a g leží v jedné třídě právě když $f \in \Theta(g)$.

$$n!, \quad n^{\frac{1}{\ln n}}, \quad e^n, \quad n^2, \quad \ln n!, \quad 2^{2^{n+1}}, \quad \ln\ln n, \quad n, \quad 4^{\ln n}, \quad n\log n, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \quad \ln n^{\ln n}, \quad (\ln n)^{\ln n}.$$

Cvičení 3. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každou dvojici funkcí $f, g : N \to R$ platí:

(a) pokud $f(n) \in O(g(n))$, pak $g(n) \in O(f(n))$,

(b) pokud $f(n) \in O(g(n))$, pak $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$,

(c) pokud $f(n) \in O(g(n))$, pak $g(n) \in \Omega(f(n))$,

(d) $f(n) \in O(f(n)^2)$.

Cvičení 4. Dostaneme dvě čísla $a, b \in N$ (čísla mohou být i tak dlouhá, že se nevejdou do dvou proměnných) a chceme spočítat jejich součin. Z určitých důvodu nemůžeme použít instrukci pro násobení a instrukci pro bitový posun. Máme k dispozici pouze instrukci pro sčítání. Pro jednoduchost předpokládejme, že součet dvou čísel trvá konstantní čas.

Ukažte, že následující triviální řešení má exponenciální časovou složitost vůči velikosti vstupu.

$mezivysledek := b$

for $i := 2$ **to** a **do**

$\quad mezivysledek := mezivysledek + b$

return $mezivysledek$

Cvičení 5. Vymyslete řešení předchozího cvičení s lineární časovou složitostí vůči velikosti vstupu.

Cvičení 6. Dokažte, že $\Omega(n \log n)$ je dolním odhadem pro časovou složitost porovnávacího třídícího algoritmu i v průměrném případě.

Návod: Buď $D(T)$ součet délek všech cest z kořene do listů stromu T pro rozhodovací strom T s $k > 1$ listy, levým podstromem LT a pravým podstromem PT je $D(T) = D(LT) + D(PT) + k$

(a) položme $d(k) = \min\{D(T) | T \text{ je rozhodovací strom s } k > 1 \text{ listy}\}$,

(b) Pak $d(k) = min_{1 \le i \le k-1}\{d(i) + d(k-i) + k\}$,

(c) $\exists c > 0$ tž. $d(k) \ge c \log k$.

Vyberte si jednu z následujících úloh:

Domácí úkol 1. Dostanete balíček zamíchaných karet. Jakým způsobem ho setřídíte? Dokážete něco říci o tomto algoritmu? Jakou bude mít časovou složitost v nejhorším a průměrném případě? Jaké budou jeho nároky na paměť?

Domácí úkol 2. Zařaďte funkci $(n^{\log n})^{\log n}$ mezi funkce ze cvičení 2. Vztah k nejbližším funkcím shora i zdola zdůvodněte výpočtem, ne graficky.