# Přednáška 2

# Souvislost grafu

**Seznámíme se s následujícími pojmy:**

- sled (otevřený / uzavřený)
- složení sledů
- tah, cesta, kružnice
- souvislý graf
- komponenta grafu
- strom
- kostra grafu

**Skripta strana 23 - 28**

**Sled grafu G = $\langle H,U,\rho \rangle$ s krajními uzly u a v :**

posloupnost uzlů a hran $S = \langle u_0, h_1, u_1, h_2, \ldots, u_{n-1}, h_n, u_n \rangle$ ,

kde $u = u_0$, $v = u_n$, $\rho(h_i) = [u_{i-1},u_i]$ pro i = 1, 2, ..., n, **délka** sledu S je n, **vnitřní** uzly jsou $u_1, \ldots u_{n-1}$

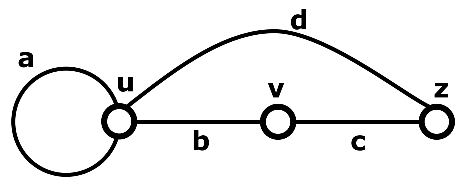
Jinými slovy - **sled s krajními uzly u a v je posloupnost uzlů a hran,** které projdeme, když se grafem libovolně neuspořádaně pohybujeme z uzlu **u** do uzlu **v**. Každý průchod hranou zvětší délku sledu o 1.

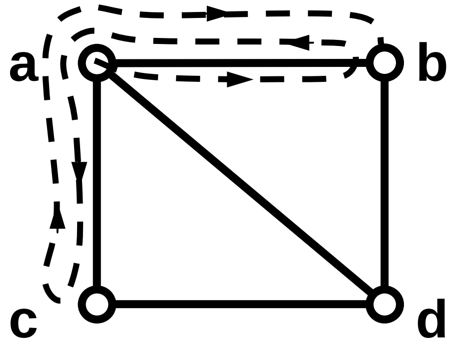
**Uzavřený sled:** $u = v$ a $n \geq 1$

**Otevřený sled:** $u \neq v$ nebo $n=0$

**Navazující sledy můžeme skládat: $S_1.S_2$**

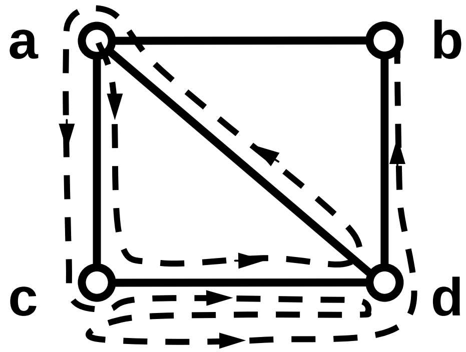
| $\langle u \rangle$ | $\langle u,a,u \rangle$ | $\langle u,b,v \rangle$ |
|---|---|---|
| **otevřený** | **uzavřený** | **otevřený** |






**(Otevřený) sled $s_1$ délky 5 z uzlu a do uzlu b:**

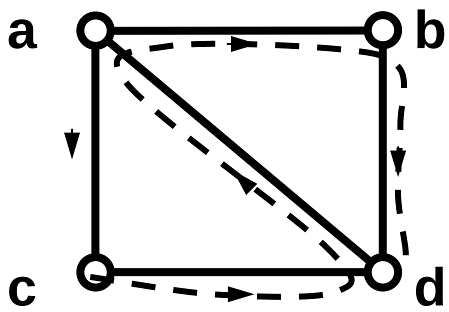
< a, [a,b], b, [b,a], a, [a,c], c, [c,a], a, [a,b], b >




**(Otevřený) sled $s_2$ délky 8 z uzlu a do uzlu b:**

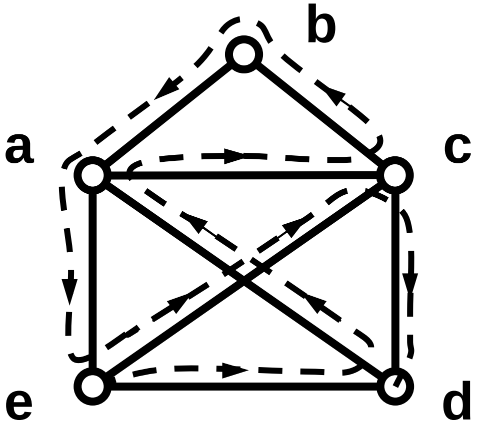
< a, [a,c], c, [c,d], d, [d,a], a, [a,c], c, [c,d], d, [d,c], c, [c,d], d, [d,b], b >

Tah s krajními uzly u a v je sled s krajními uzly u a v, v němž se žádná hrana neopakuje (uzel může).




(Otevřený) tah $t_1$ délky 4 z uzlu c do uzlu d:

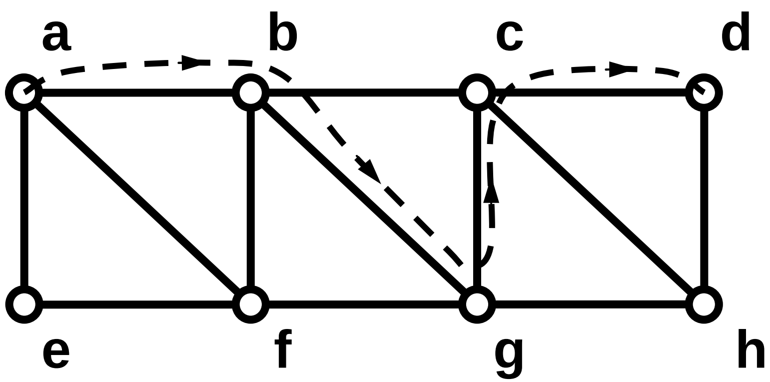
< c, [c,d], d, [d,a], a, [a,b], b, [b,d], d **>**




(Otevřený) tah $t_2$ délky 8 z uzlu e do uzlu d:

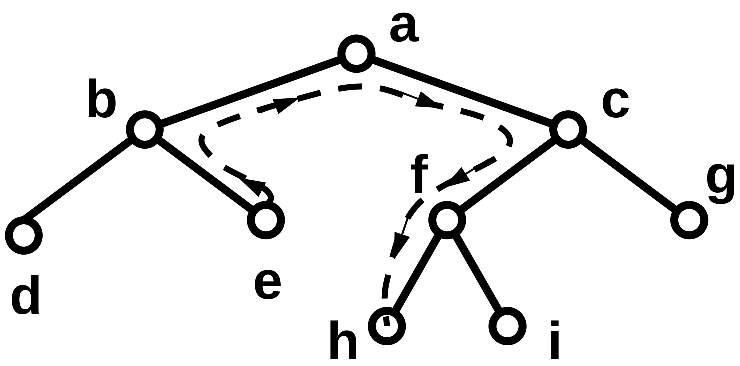
< e, [e,d], d, [d,a], a, [a,c], c, [c,b], b,
[b,a], a, [a,e], e, [e,c], c, [c,d], d >

**Cesta s krajními uzly u a v je tah s krajními uzly u a v, v němž se žádný uzel neopakuje. Je to tedy sled v němž se neopakuje žádná hrana ani žádný uzel.**




**(Otevřená) cesta $c_1$ délky 4 z uzlu a do uzlu d:**

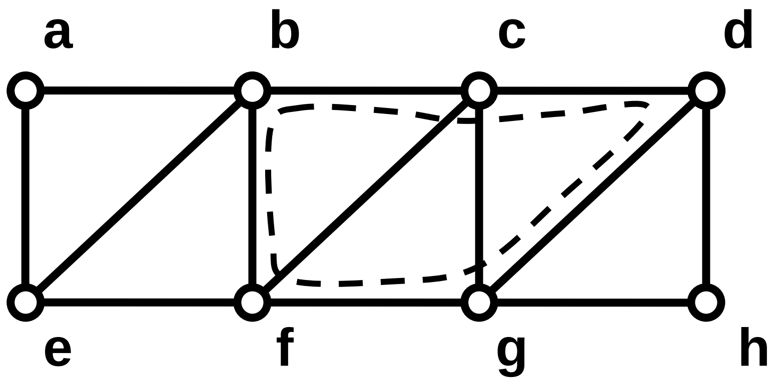
< a, [a,b], b, [b,g], g,
[g,c], c, [c,d], d, >




**(Otevřená) cesta $c_2$ délky 5 z uzlu e do uzlu h:**

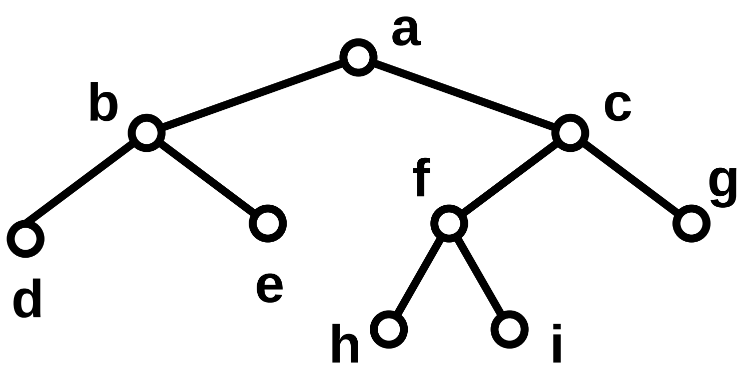
< e, [e,b], b, [b,a], a,
[a,c], c, [c,f], f, [f,h], h >

**Kružnice je uzavřená cesta (tj. uzavřený sled délky aspoň 1, v němž se žádná hrana ani uzel neopakuje).**




**Kružnice $k_1$ délky 5 procházející uzly b, c, d, g, f:**

< b, [b,c], c, [c,d], d,
[d,g], g, [g,f], f, [f, b], b >

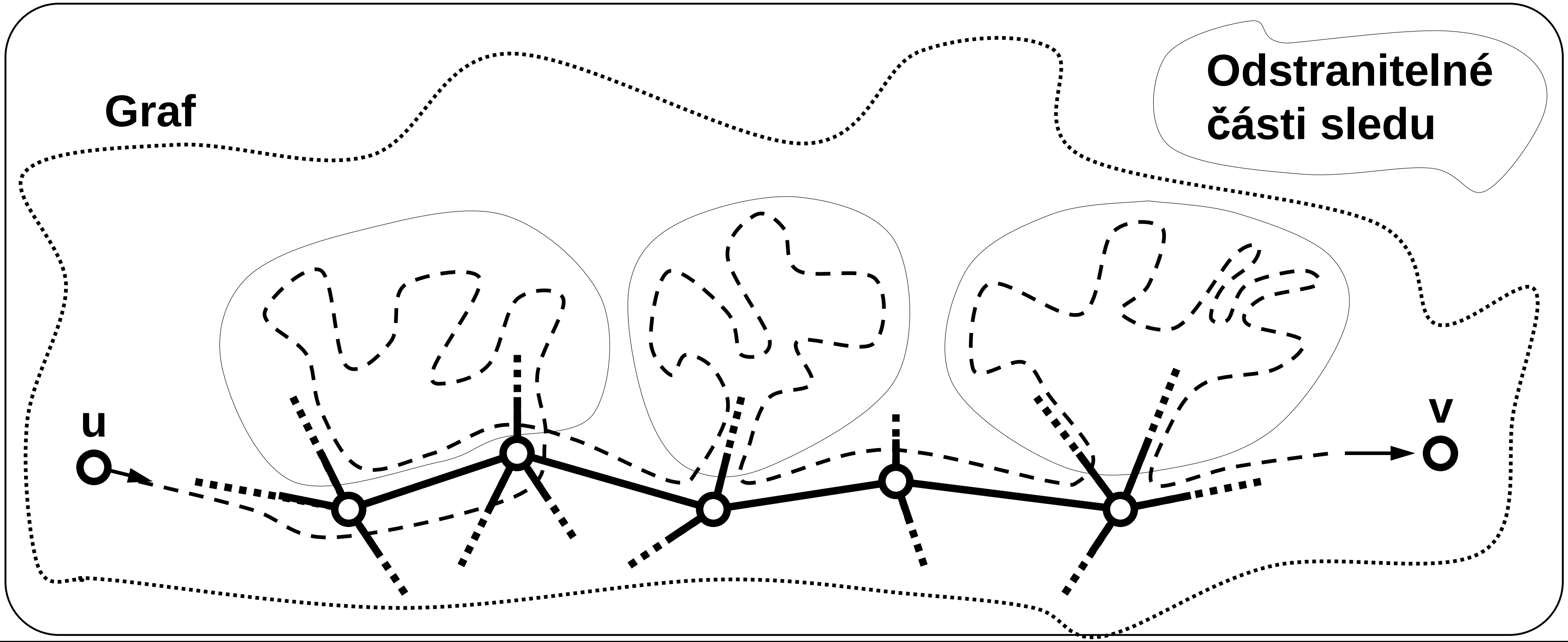


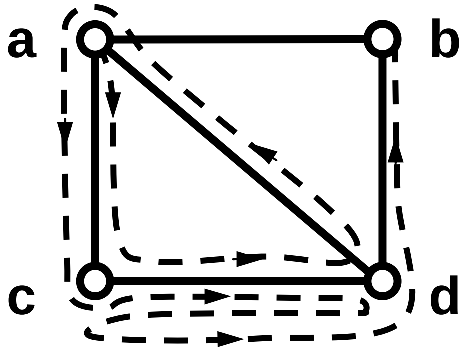

**V tomto grafu neexistuje žádná kružnice (ani žádný uzavřený tah). Uzavřený sled ano, např.**

< a, [a,c], c, [c,a], a >

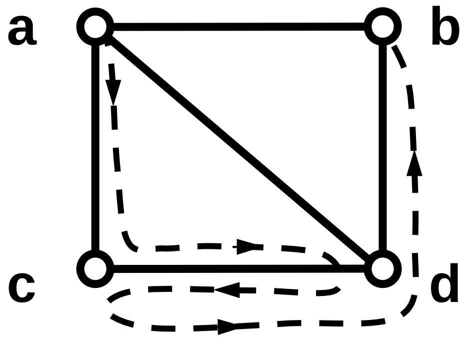
**Pozorování: Z každého sledu z uzlu u do uzlu v lze vybrat cestu z u do v.**

Konstrukce:
Opakuj
Jestliže se ve sledu vyskytuje uzel x vícekrát,
odstraň ze sledu vše mezi prvním a posledním výskytem x.
dokud lze sled takto„zkracovat“.
Ve výsledku se žádný uzel neopakuje, je to tedy cesta.

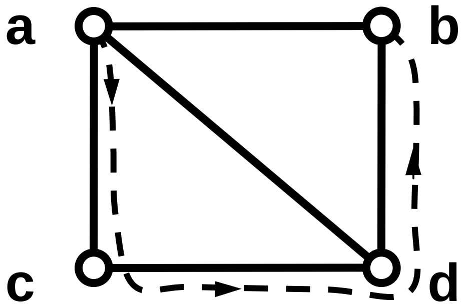





< a, [a,c], c, [c,d], d, [d,a], a, [a,c], c,
[c,d], d, [d,c], c, [c,d], d, [d,b], b >




< a, [a,c], c,[c,d], d, [d,c], c, [c,d], d, [d,b], b >



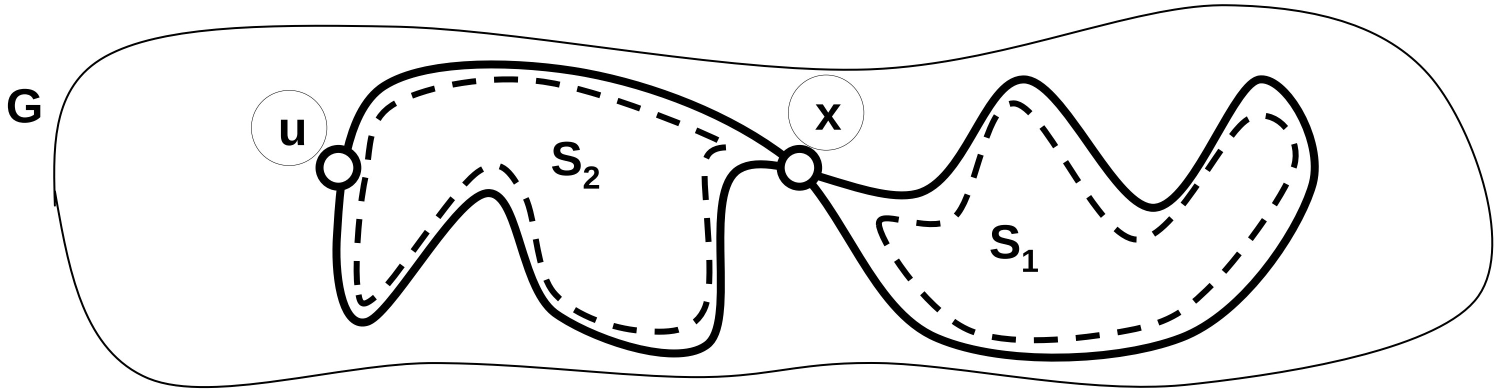

< a, [a,c], c,[c,d], d, [d,b], b >

**<u>Pozorování:</u> Z každého uzavřeného sledu liché délky (alespoň 3) lze vybrat kružnici liché délky.**

**Zdůvodnění:**

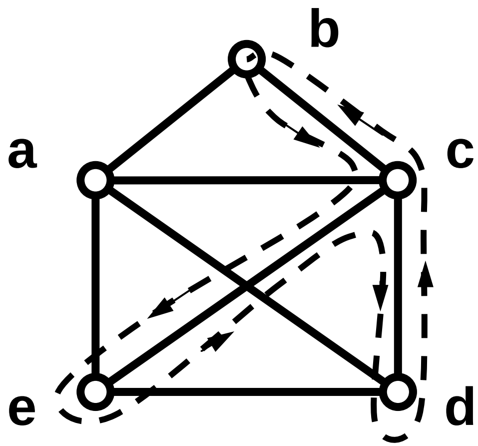
Pokud se v uzavřeném sledu S z uzlu u do u žádný uzel neopakuje, je sled již sám kružnicí.

Pokud se ve sledu S některý uzel x (x ≠ u) vyskytuje (alespoň) dvakrát, rozdělíme S na sledy $S_1$ a $S_2$: $S_1$ bude sled vedoucí z prvního výskytu x v S do posledního výskytu x v S. V $S_2$ bude všechno ostatní, tj. $S_2 = S – S_1$.




$S_1$ i $S_2$ jsou uzavřené sledy a právě jeden z nich má lichou délku. Není-li pak sám kružnicí, aplikujeme na něj opět stejný postup, dokud nedojdeme ke kružnici liché délky.

**Předchozí pozorování neplatí pro sledy sudé délky – z takového sledu vůbec nemusí být možné vybrat nějakou kružnici.**




**Uzavřený sled**

<b, [b,c], c, [c,e], e, [e,c], c, [c,d], d, [d,c], c, [c,b], b>

**má délku 6 a žádnou kružnici neobsahuje**

Pozorování tedy neplatí pro sledy sudé délky proto, že nejkratší uzavřený sled sudé nenulové délky má délku 2 – je to průchod po jedné hraně „tam a zpět“ a neobsahuje kružnici.

Naopak, nejkratší uzavřený(!) sled liché délky má délku 1 (v obyčejném grafu dokonce 3) – a to už je kružnice.

**Souvislý graf je takový, v němž existuje sled mezi libovolnými dvěma uzly.**

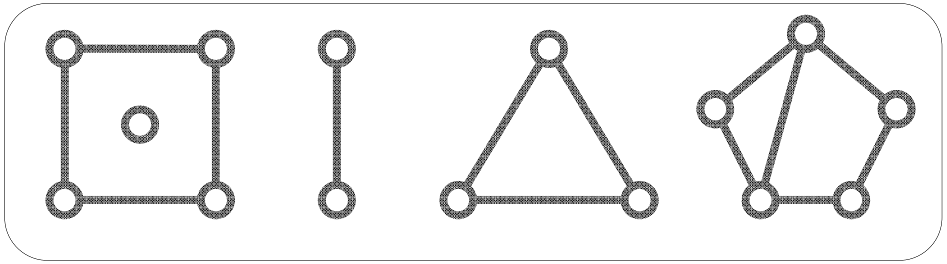
**Pozorování:**
**V souvislém grafu existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly.**

**Zdůvodnění: Z každého sledu lze vybrat cestu.**

**Komponenta grafu je každý jeho maximální souvislý podgraf ( = souvislý podgraf, který už "nelze zvětšit") .**

**Graf $G_1$ má 5 komponent .**

**$G_1$**



**Poznámka:** Graf obsahuje jednu komponentu (je-li souvislý) nebo více komponent (není-li souvislý).

**Pozorování:**

**Každý souvislý graf G s n ($\geq$2) uzly obsahuje uzel u, po jehož odebrání vznikne souvislý podgraf G-{u} s n-1 uzly.**

**(Je to libovolný krajní uzel cesty maximální délky v G.)**

**Důležité pozorování:**

**Je-li G = $\langle H,U,\rho \rangle$ souvislý graf, potom platí**

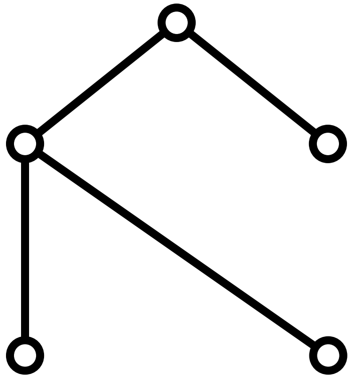
$$|H| \geq |U| - 1.$$

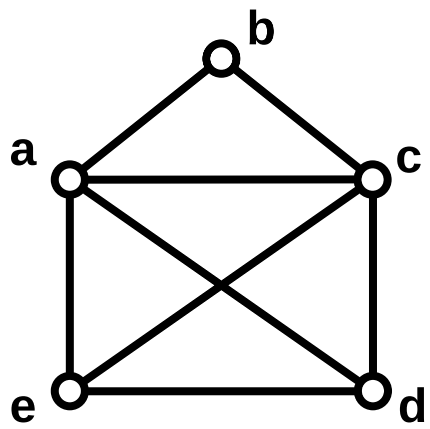
**Zdůvodnění** (indukcí podle počtu uzlů |U|=n)

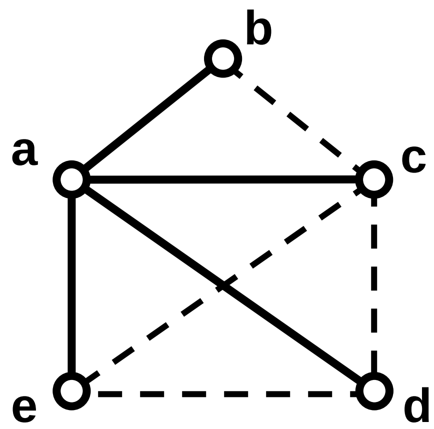
**Takže: K vytvoření souvislého grafu s n uzly potřebujeme alespoň (n-1) hran.**

**Jak vypadají souvislé grafy s minimálním počtem hran ?**

**Strom je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici.**
**Kostra grafu G je takový jeho faktor, který je stromem.**





# Kontrolní otázky

**2.1** **Mějme dva souvislé grafy $G_1$ a $G_2$. Je sjednocení $G_1 \cup G_2$ souvislý graf ?**

**2.2** **Nechť G je obyčejný graf s n uzly. Stanovte podmínky pro počet jeho hran, které zaručí, že**

- **a) určitě není souvislý**
- **b) určitě je souvislý**

**2.3** **Kolik různých kružnic délky k (k≥3) obsahuje úplný graf $K_n$ (n≥3) ? Za různé nepovažujte kružnice, které se jakožto posloupnosti uzlů liší pouze volbou počátečního uzlu nebo opačným pořadím procházení uzlů.**

**2.4** **Kolik různých cest (resp. sledů) délky k existuje mezi pevně zvolenými uzly u a v úplného grafu $K_n$?**

**2.5** **Nechť stromy T1 a T2 mají alespoň jednu společnou hranu. Je symetrická diference T1 ⊕ T2 souvislým grafem ?**

**2.6** **Vyjádřete podmínku souvislosti grafu G pomocí (tranzitivního uzávěru) relace sousednosti $\Gamma$.**

# Kontrolní otázky

**2.7** Určete minimální a maximální možný počet komponent obyčejného grafu, který má 10 uzlů a 16 hran.

**2.8** Existuje nějaký graf, který nemá žádnou komponentu?

**2.9** $G_1$ a $G_2$ jsou dva disjunktní neorientované grafy, $G_1$ ($G_2$) má $m_1$ ($m_2$) hran, $n_1$ ($n_2$) uzlů a $p_1$ ($p_2$) komponent.

a) Jakým minimálním počtem hran je třeba doplnit sjednocení $G_1 \cup G_2$ tak, aby vznikl souvislý graf?

b) Změní se tento počet, pokud stanovíme, že doplňované hrany musí mít vždy jeden krajní uzel v $G_1$ a druhý v $G_2$?

c) Kolik hran musíme odebrat z grafu vytvořeného v bodu a), aby zbyla jeho kostra?

# ORIENTOVANÉ GRAFY – úvod

**V této části se seznámíme s následujícími pojmy:**

- orientovaný graf (OG), orientovaný multigraf, prostý/obyčejný OG, zrušení/zavedení orientace, opačná orientace
- spojení, orientovaný tah, orientovaná cesta, cyklus, silně souvislý OG, silná komponenta, kondenzace OG
- vstupní/výstupní stupeň uzlu, množina následníků / předchůdců uzlu

**Skripta odstavec 2.2, strana 28 - 33**

# Co je to orientovaný graf ?

$G = \langle H, U, \sigma \rangle$

**hrany** grafu G

**uzly** grafu G

**incidence**

$\sigma : H \rightarrow U \times U$ (množina **uspořádaných dvojic**)

$\sigma(h) = (u, v)$ ... **počáteční / koncový uzel** hrany **h**

**v** je **následník** uzlu **u**, **u** je **předchůdce** uzlu **v**

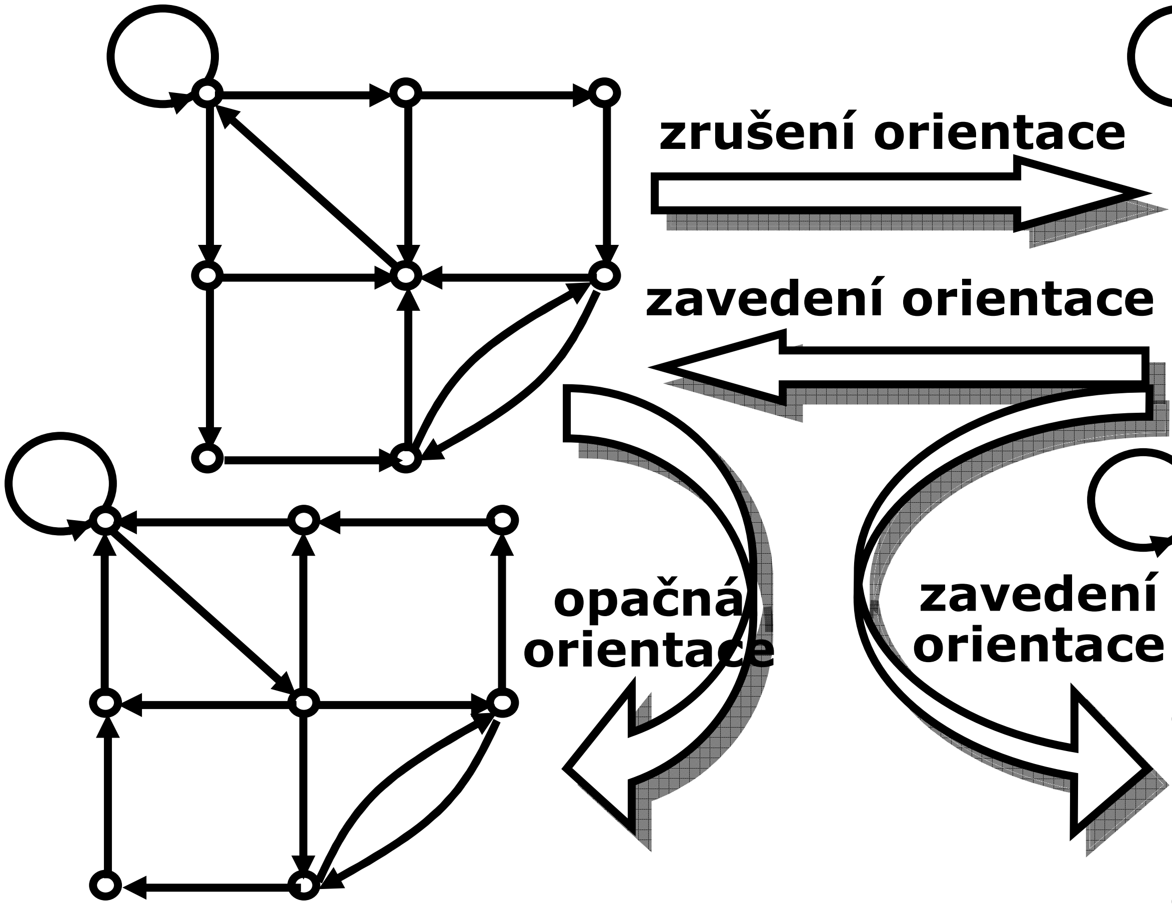
$\sigma(h_1) = \sigma(h_2)$ ... rovnoběžné hrany => **multigraf**

**prostý** orientovaný graf = graf **bez** rovnoběžných hran, tzn. hranu určují její krajní uzly => $\sigma$ je zbytečné, $\mathbf{G = \langle H, U \rangle}$

**obyčejný** orientovaný graf = prostý OG bez smyček

# Jinými slovy ...

Hrany v OG jsou **orientované**, tzn. pořadí uzlů **je** významné.



# Jeden malý trik ...

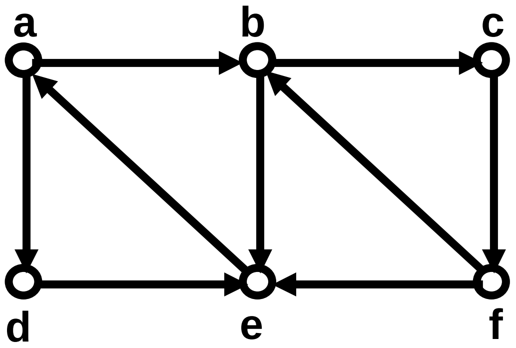
**Následující pojmy** z neorientovaných grafů lze přenést do orientovaných grafů tak, že je uvažujeme na grafu vzniklém zrušením orientace:

- sled (otevřený / uzavřený), složení sledů, tah, cesta, kružnice, souvislý graf
- komponenta grafu, strom, kostra grafu

**Další pojmy** lze zavést pro orientované grafy analogicky jako pro neorientované grafy:

- podgraf, faktor, indukovaný podgraf
- operace s grafy (sjednocení, průnik, rozdíl, symetrická diference a doplněk), disjunktní a hranově disjunktní grafy
- konečný / nekonečný graf, izomorfizmus grafů

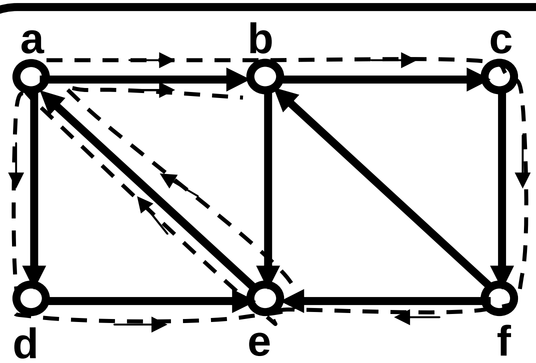
# ? Tak proč vůbec orientovat hrany ?




**Spojení** S (délky **n**$\geq 0$) v orientovaném grafu G z uzlu **u** do uzlu **v**:

$$S = \langle u_0, h_1, u_1, h_2, \ldots, h_n, u_n \rangle,$$

kde $\sigma(h_i) = (u_{i-1}, u_i)$, $u_0 = u$, $u_n = v$

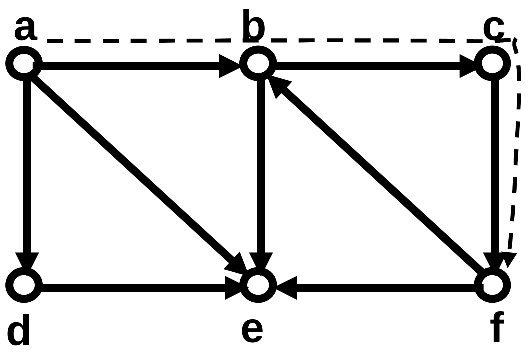



**Spojení délky 10 z uzlu a do uzlu b (a $\longrightarrow$ b):**

**$\langle$ a, (a,b), b, (b,e), e, (e,a), a, (a,b), b, (b,c), c, (c,f), f, (f,b), b, (b,e), e, (e,a), a, (a,b), b$\rangle$**

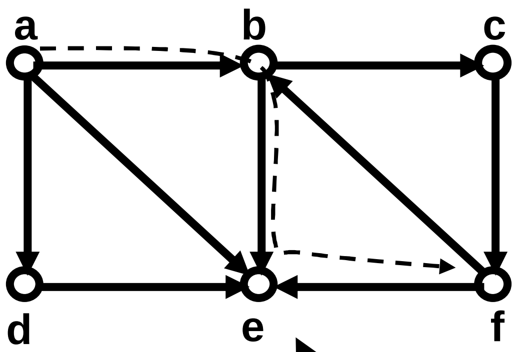
- **orientovaný tah** - spojení bez opakovaných hran
- **orientovaná cesta** – spojení bez opakovaných uzlů ($\Rightarrow$ ani hran)
- **otevřené x uzavřené spojení (orient. tah, orient. cesta)**
- **cyklus** – uzavřená orientovaná cesta

# POZOR – spojení a sled v OG




**Spojení délky 3 z uzlu a do uzlu f (a $\longrightarrow$ f):**

**$\langle$ a, (a,b), b, (b,c), c, (c,f), f$\rangle$**



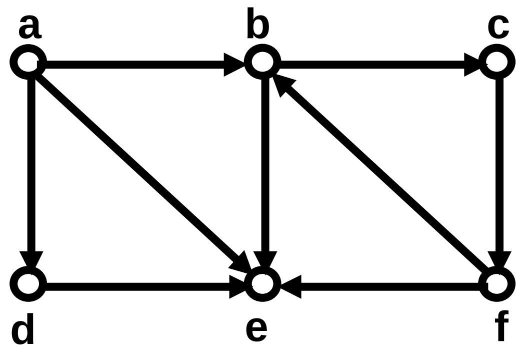

**Sled délky 3 z uzlu a do uzlu f (a $\longrightarrow$ f):**

**$\langle$ a, [a,b], b, [b,e], e, [e,f], f$\rangle$**

**(jako kdybychom zrušili orientaci)**

Tento graf je ("obyčejně") **souvislý**.

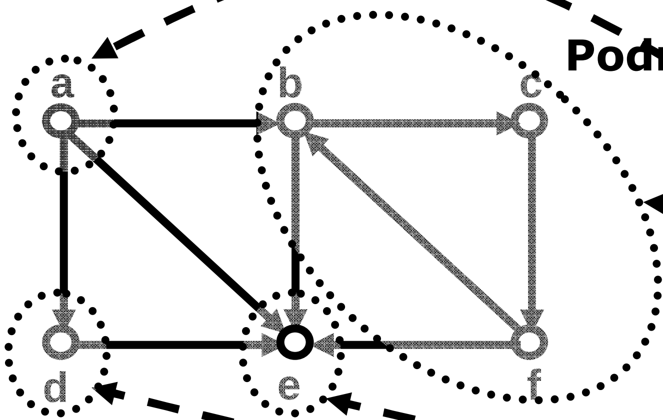
**Silně souvislý** orientovaný graf G - pro každou dvojici uzlů u,v existují spojení jak z u do v tak i z v do u ($\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{v}$ **&** $\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{u}$)




**Spojení:**

| | |
|---|---|
| $a \longrightarrow f$ ANO | $f \longrightarrow a$ NE |
| $c \longrightarrow d$ NE | $d \longrightarrow c$ NE |
| $e \longrightarrow \ldots$ NE | $\ldots \longrightarrow a$ NE |

$\Rightarrow$ graf **není silně souvislý**

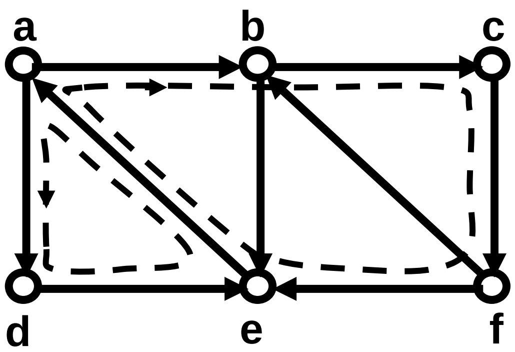



**Podmnožiny vzájemně propojitelných uzlů:**

**{a}, {b,c,f}, {d}, {e}**

**Silná komponenta =**

**maximální silně souvislý podgraf**




**Podmnožiny vzájemně propojitelných uzlů:**

**{a,b,c,d,e,f}**

⇒ graf **je silně souvislý** (tzn. je tvořen **jedinou silnou komponentou**)

**Co dalšího lze říci o silně souvislých grafech?**

**Následující tvrzení jsou ekvivalentní:**

1) G je silně souvislý orientovaný graf

2) G je souvislý a každá jeho hrana je v (nějakém) cyklu

3) pro každý rozklad $\{U_1, U_2\}$ množiny uzlů existují hrany

$$U_1 \rightarrow U_2 \text{ a } U_2 \rightarrow U_1$$

**D:** **1** $\Rightarrow$ **2** $\Rightarrow$ **3** $\Rightarrow$ **1**

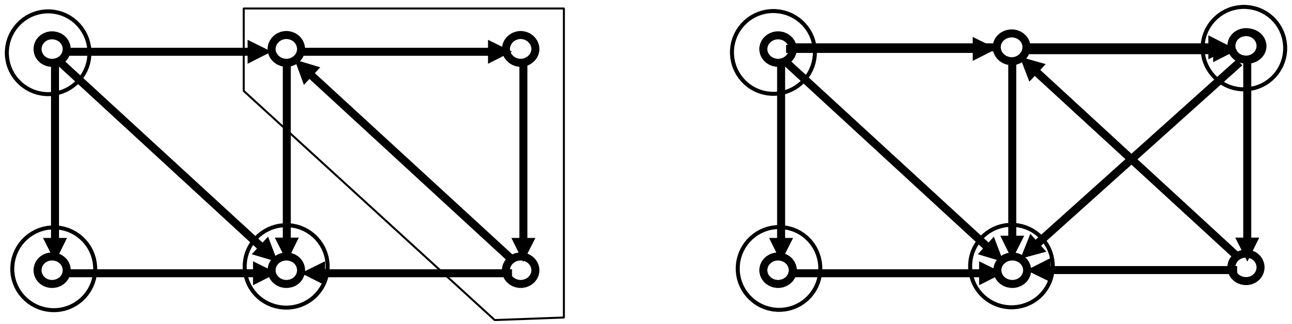
**<u>Důsledek:</u>** Když z grafu odebereme všechny silné komponenty, vznikne podgraf, který **nemá žádné cykly** ani hrany z nějakého cyklu původního grafu.

$G' = G-(\cup G_i)$, $G_i$ - silné komponenty grafu G

G' je bez cyklů

**Základem silných komponent jsou cykly !**

**Kondenzace** O.G. - silná komponenta se stane uzlem + hrany



**Stupně a sousedi uzlů** v orientovaném grafu G:

- **výstupní stupeň $\delta^+$(u)** – kolik hran vystupuje z uzlu u (je-li **$\delta^+$(u)=0** $\Rightarrow$ u je **list** grafu G)
- **vstupní stupeň $\delta^-$(u)** – kolik hran vstupuje do uzlu u (je-li **$\delta^-$(u)=0** $\Rightarrow$ u je **kořen** grafu G)
- **$\Gamma$(u)** - množina následníků uzlu u
- **$\Gamma^{-1}$(u)** - množina předchůdců uzlu u

**Lze něco zjistit o stupních ??**

$$\sum_{u \in U} \delta^+(u) = \sum_{u \in U} \delta^-(u) = |H|$$

Vysvětlení: Každá hrana přispívá +1 výstupnímu stupni svého počátečního uzlu a +1 vstupnímu stupni svého koncového uzlu.

# Kontrolní otázky

2.10 Bude graf vzniklý zrušením orientace libovolného obyčejného orientovaného grafu obyčejným neorientovaným grafem ?

2.11 Je možné, aby byl silně souvislý nějaký orientovaný graf, jehož některé uzly mají vstupní stupeň rovný nule ?

2.12 Orientovaný graf G vznikl jako sjednocení několika cyklů. Je graf G silně souvislý ?

2.13 Kolik silných komponent má orientovaný graf $G = \langle H,U,\sigma \rangle$, který neobsahuje žádný cyklus?

2.14 Jaký je minimální počet hran silně souvislého orientovaného grafu s n ($\geq$2) uzly ?

2.15 Pokuste se formulovat nutnou a postačující podmínku pro to, aby orientovaný graf G obsahoval nekonečně mnoho spojení z uzlu u do uzlu v.

2.16 Jaký je minimální počet hran orientovaného grafu, který má n ($\geq$3) uzlů a k ($2 \leq k \leq n-1$) silných komponent ?

2.17 Souvislý orientovaný graf G obsahuje aspoň dva uzly a má konečně mnoho různých spojení. Může být tento graf silně souvislý ?

2.18 Existuje nějaký orientovaný graf, který nemá žádnou sinou komponentu?