1 Booleova algebra

1.1 Základní definice

K zavedení pojmu Booleova algebra můžeme přistoupit ze dvou stran. Jednak vyjdeme z definice algebraické struktury a použijeme čistě algebraické prostředky (určíme nosiče algebry, operace na nosiči a jejich vlastnosti) a jednak vyjdeme z teorie svazů.

Def. 1. Booleova algebra je struktura $< B, +, ., ^{-}, 0, 1 >$ kde
B je neprázdná množina (nosič algebry),
$+$, . jsou binární operace na B,
$^{-}$ je unární operace na B,
0,1 jsou nulární operace na B a kde dále platí pro všechna $a, b, c \in B$:

1. $a + b = b + a, a.b = b.a$	(komutativita)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c, a.(b.c) = (a.b).c$	(asociativita)
3. $a + (b.c) = (a + b).(a + c), a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$	(distributivita)
4. $a + 0 = a, a.1 = a$	(neutralita 0 a 1)
5. $a + \overline{a} = 1, a.\overline{a} = 0$	(vlastnosti komplementu)

V druhém případě vystačíme se stručným tvrzením, že Booleův svaz je úplný komplementární a distributivní svaz :
Víme, že svaz je taková částečně uspořádaná množina, kde pro každé dva prvky z této množiny existuje infimum a supremum, což jsou binární operace pro které platí komutativní a asociativní zákon (viz teorie svazů, [3], [9], [10]). V úplném svazu existuje nulový a jedničkový prvek (a tedy neutralita). Booleův svaz musí být distributivní (a tedy platí ditributivní zákon) a komplementární (platí zákony komplementu).

Definicí 1 je plně určena Booleova algebra. Pomocí zákonů 1-5 je možné odvodit všechna další pravidla a odvozené zákony Booleovy algebry (nechť $a, b, c \in B$) :

6. agresivita 0 a 1 :	$a.0 = 0,$	$a + 1 = 1$
7. idempotence	$a.a = a,$	$a + a = a$
8. dvojí negace	$\overline{\overline{a}} = a$	
9. absorbce	$a + a.b = a,$	$a.(a + b) = a$
10. absorbce negace	$a + \overline{a}.b = a + b,$	$a.(\overline{a} + b) = a.b$
11. de Morgan	$\overline{(a + b)} = \overline{a}.\overline{b},$	$\overline{(a.b)} = \overline{a} + \overline{b}$
12. consensus	$ab + \overline{a}c + bc = ab + \overline{a}c,$	$(a + b)(\overline{a} + c)(b + c) = (a + b)(\overline{a} + c)$

Poznámka 1. Všimněme si, že máme definovanou Booleovu algebru, bez toho, že bychom kladli nějaké požadavky na velikost (počet prvků) množiny, nad kterou je vybudovaná. Obecně může mít Booleova algebra nekonečný počet prvků. Pokud je množina B konečná, jsou přece jenom kladeny jisté omezující požadavky na její velikost. Počet prvků konečné Booleovy algebry musí být 2^k kde k je přirozené číslo. (Konečná Booleova algebra je izomorfní s množinovou algebrou $< 2^A, \cap, \cup, ^{-}, \emptyset, A >$). Samozřejmě existuje i Booleova algebra vybudovaná nad množinou B, která obsahuje jen dva prvky, totožné s definovanými nulárními operacemi 0, 1 (viz def.Booleovy

algebry), tedy $B = \{0, 1\}$, a to je právě ta Booleova algebra, kterou budeme používat pro návrhy logických systémů.

Poznámka 2. Jak si jistě čtenáři všimli, všechny zákony, ve kterých se vyskytují binární operace + a . anebo nulární operace 0 a 1, platí vždy i ve svém duálním tvaru. Binární operace, přestože mají stejná označení + a . jako v např. v algebře reálných čísel, mají v Booleově algebře stejnou prioritu a jinak definovaný význam. My je budeme nazývat logický součet (OR) a logický součin (AND). Na označení operací nezáleží, je možné se setkat např. s různými symboly průseku ($\wedge$) a spojení ($\vee$). Stejně jako v algebře reálných čísel se tam, kde je z kontextu jasný význam, někdy vynechává znaménko logického součinu (.). Unární operace $^{-}$ (negace) má prioritu vyšší než operace AND a OR.

1.2 Cvičení

1. Pomocí def. 1 dokažte, že platí odvozené zákony Booleovy algebry 6. - 12.

Některá řešení:

Zákony idempotence (7) vyplývají ze zákomů neutrality (4), komplementu (5) a distributivity (3):
Máme dokázat, že $a.a = a$,
pravou stranu rozepíšeme podle (4) $a = a.1$
podle (5) se to rovná $a.(a + \overline{a}) =$
podle (3)= $(a.a) + (a.\overline{a}) =$
podle (5)= $(a.a) + 0 =$
podle (4)= $a.a$
Podobně dokažte duální tvar.

Zákony agresivity (6) vyplývají ze zákonů komplementu (5), idempotence (7) a komutativity (1):
Máme dokázat, že $1 + a = 1$,
podle (5)$1 = a + \overline{a}$ a tedy můžeme psát $1 + a = a + \overline{a} + a$
podle (1) se to rovná $a + a + \overline{a}$
podle (7) $a + a + \overline{a} = a + \overline{a}$ a to se podle (5) rovná 1.

Zákon absorbce (9) vyplývá ze zákonů neutrality (4), distributivity (3) a agresivity (6) :
Máme dokázat, že $a + a.b = a$
podle (4) můžeme psát $a + a.b = a.1 + a.b$
podle (3) se to rovná $a.(1 + b)$
podle (6) $(1 + b) = 1$ a $a.1 = a$ podle (4).

Zákon idempotence (7) vyplývá ze zákona absorbce (9) - tzv. Dedekindovo lema.
Máme dokázat, že $a.a = a$ pomocí $a.(a + b) = a$ (i) a pomocí $a + (a.b) = a$(ii)
Stačí dosadit $b = a.a$ do (i), odtud
$a.(a + (a.a)) = a$, podle (ii) je výraz v závorce roven a
tedy $a.a = a$.

2 Vyjádření logických funkcí

Funkce definované na n-ticích vytvořených z prvků z množiny {0,1} zobrazených do množiny {0,1} se nazývají Booleovy funkce n argumentů. Jejich teorií se v minulém století zabýval anglický matematik George Boole, po němž jsou pojmenovány. Často se též ve stejném významu používá termín logické funkce. Pro vyjádření konkrétní logické funkce je možné použít několik rozdílných přístupů - slovní popis, algebraický výraz, tabulku, mapu, jednotkovou krychli. V následujícím textu stručně popíšeme základní principy těchto vyjádření.

Algebraický, přesněji **Booleový výraz** generovaným proměnnými $x_1, x_2, ...x_n$ nad Booleovou algebrou $< B, +, . , ^-, 0, 1 >$ je každý výraz získaný použitím následujících dvou pravidel :
(i) libovolný prvek z B nebo libovolná z proměnných $x_1, x_2, ...x_n$ je Booleovým výrazem nad B.
(ii) jsou-li a, b Booleovy výrazy nad B, potom také $\overline{a}, a.b, a + b$ jsou Booleovy výrazy nad B.

Každý Booleův výraz představuje nějakou funkci $f : B^n \to B$ (Booleovu funkci) n proměnných nad $< B, +, . , ^-, 0, 1 >$, jestliže budeme proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$ chápat jako proměnné, které nabývají pouze hodnot z nosiče B. Jednu a tutéž funkci je možné zadat celou řadou různých Booleových výrazů, proto je vhodné použít nějaký standardní tvar (nazývá se *normální forma*). Normální forma (někdy také zvaná kanonický tvar) je takové vyjádření logické funkce, ve kterém se vyskytují operace logického součtu a součinu pouze ve dvou úrovních např.:

$$\overline{a}.b + a.\overline{c} + b.c \quad \text{nebo} \quad (a + b).(a + \overline{b} + \overline{c})$$

Pro další výklad uvedeme několik základních pojmů, se kterými budeme dále pracovat :

term je výraz tvořený pouze proměnnými (v přímém i negovaném tvaru) a operací logického součtu nebo logického součinu;
P-term nebo také *součinový term* je term tvořený pouze proměnnými a operacemi logického součinu (např. $a.b.\overline{c}$);
S-term nebo též *součtový term* je term tvořený pouze proměnnými a operacemi logického součtu (např.$\overline{a} + b + \overline{c}$);
minterm je takový P-term, který obsahuje všechny nezávisle proměnné;
maxterm je takový S-term, který obsahuje všechny nezávisle proměnné.
stavový index je desítkový zápis kombinace hodnot nezávisle proměnných;
vstupní písmeno je kombinace hodnot vstupních proměnných.

Každou logickou funkci je možné vyjádřit pomocí logického součtu mintermů nebo logického součinu maxtermů. Pro n vstupních proměnných můžeme vytvořit celkem 2^n různých mintermů nebo maxtermů. Každý minterm (resp.maxterm) nabývá hodnoty logické 1 (resp. 0) právě pro jediné vstupní písmeno dané logické funkce.
Úplná normální disjunktivní forma (ÚNDF) je logický výraz tvořený součtem mintermů (lze říci buď všech nebo všech těch, pro které nabývá daná logická funkce hodnoty logické 1; $0 + 0 = 0$).
Úplná normální konjunktivní forma (ÚNKF) je podobně logický výraz tvořený součinem maxtermů (v součinu se neuplatní ty maxtermy, které nabývají hodnoty logické 1).

Každou logickou funkci je možné vyjádřit pomocí **pravdivostní tabulky.** Vztah mezi algebraickým a tabulkovým vyjádřením bude nejlépe patrný z následujícího příkladu (Tab. 2.1).

stavový index s	c b a	funkční hodnota $f(c,b,a)$	minterm P_s	maxterm S_s
0	0 0 0	0	$\overline{c}\overline{b}\overline{a}$	$c+b+a$
1	0 0 1	1	$\overline{c}\overline{b}a$	$c+b+\overline{a}$
2	0 1 0	1	$\overline{c}b\overline{a}$	$c+\overline{b}+a$
3	0 1 1	0	$\overline{c}ba$	$c+\overline{b}+\overline{a}$
4	1 0 0	1	$c\overline{b}\overline{a}$	$\overline{c}+b+a$
5	1 0 1	0	$c\overline{b}a$	$\overline{c}+b+\overline{a}$
6	1 1 0	1	$cb\overline{a}$	$\overline{c}+\overline{b}+a$
7	1 1 1	0	cba	$\overline{c}+\overline{b}+\overline{a}$

Tab. 2.1. Pravdivostní tabulka se všemi mintermy a maxtermy

Tato funkce (zde nazvaná f) logických proměnných c,b,a nabývá hodnoty logické 1 pro stavové indexy 1, 2, 4, 6 a hodnoty logické 0 pro stavové indexy 0, 3, 5, 7. Algebraické vyjádření pomocí mintermů (ÚNDF) je

$$f(c,b,a) = \overline{c}\overline{b}a + \overline{c}b\overline{a} + c\overline{b}\overline{a} + cb\overline{a}$$

a pomocí maxtermů (ÚNKF)

$$f(c,b,a) = (c+b+a).(c+\overline{b}+\overline{a}).(\overline{c}+b+\overline{a}).(\overline{c}+\overline{b}+\overline{a})$$

Stavový index je desítkový zápis binární kombinace hodnot nezávisle proměnných (viz výše). Z předchozí tabulky vyplývá, že v tomto kontextu záleží na pořadí proměnných a, b, c. Proto v dalším textu budeme předpokládat, že logická proměnná s nejvyšší vahou vzhledem ke stavovému indexu se píše blíže symbolu funkce (nejvíce vlevo). V našem případě má nejvyšší váhu proměnná c a nejnižší proměnná a . Za této konvence můžeme logickou funkci vyjádřit ve zkráceném tabulkovém tvaru - pomocí seznamu stavových indexů, pro které daná funkce nabývá buď hodnoty logické 1 nebo 0. Tedy v našem příkladu můžeme funkci f vyjádřit takto :

$$f(c,b,a) = \Sigma_{(1)}(1,2,4,6) = \Pi_{(0)}(0,3,5,7)$$

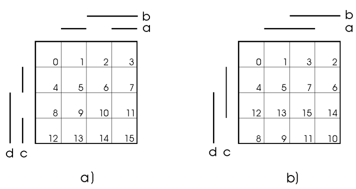
(indexy v závorkách není nutné psát). Za symbolem Σ následuje výčet stavových indexů, pro které nabývá funkce hodnoty logické 1 (funkce je dána součtem mintermů), podobně za symbolem Π následuje výčet stavových indexů, pro které nabývá funkce hodnoty logické 0 (funkce je dána součinem maxtermů).

Další možnost, jak vyjádřit logickou funkci, je použití **mapy**. Mapa je plošný útvar (čtverec nebo obdélník), který je rozdělen do 2^n polí, kde n je počet nezávisle proměnných dané funkce. Je to tedy v podstatě tabulka, uspořádaná do dvourozměrného pole, kde rozsah řádkového i sloupcového indexu je vždy mocnina 2. Podle vzájemného přiřazení určitého políčka mapy a stavového indexu rozeznáváme různé typy map. Jestliže jsou stavové indexy přiřazeny do políček, která leží v mapě vedle sebe (viz obr. 2.1a), jedná se o **mapu Svobodovu** (s tímto typem mapy je možné se setkat i pod názvy mapa Veitchova nebo Marquandova, [11]). Do této mapy, která nejvíce odpovídá pravdivostní tabulce (jen rozdělené do řádků po mocninách 2), je snadné zapsat logickou funkci zadanou výčtem stavů (tedy v podstatě tabulkou). Výhodnější způsob zápisu

	$d\,c\,b\,a$
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 1
3	0 0 1 0
4	0 1 1 0
5	0 1 1 1
6	0 1 0 1
7	0 1 0 0
8	1 1 0 0
9	1 1 0 1
10	1 1 1 1
11	1 1 1 0
12	1 0 1 0
13	1 0 1 1
14	1 0 0 1
15	1 0 0 0

Tab. 2.2. Tabulka Grayova kódu

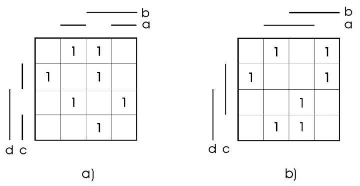
logické funkce do mapy, zvláště vzhledem k minimalizaci logické funkce (viz kap. 3), je takový, kdy se kombinace hodnot nezávisle proměnných zobrazených do políček vedle sebe (sousedních) liší vždy hodnotou jedné nezávisle proměnné. Tedy v políčkách, která leží v mapě vedle sebe jsou vždy tzv. *sousední stavy.* Potom takovou mapu nazýváme **mapou Karnaughovou** (viz obr. 2.1b). Karnaughova mapa má jistou topologickou podobnost s Vennovým diagramem, alespoň do čtyř nezávisle proměnných. Jiný možný přístup k zavedení Karnaughovy mapy je pomocí Grayova kódu (Tab. 2.2), který je též založen na tom, aby se při přechodu mezi sousedními čísli měnila jen jedna nezávisle proměnná. Zápis čísel v Grayově kódu do mapy je znázorněn na obr. 2.4. Všimněte si, že další řádky Tab. 2.2 vznikají vždy změnou v nejvyšším řádu na jedničku a zrcadlovým obrazem řádů nižších. Odtud snadno získáme způsob přiřazení hodnot nezávisle proměnných k řádkům i sloupcům mapy (proužky podél mapy). Problém je potom v přiřazení stavových indexů k jednotlivým políčkům Karnaughovy mapy, protože stavové indexy jsou vyjádřeny v binárním kódu (viz obr. 2.1b) a 2.3b)).



Obr. 2.1 a)Svobodova mapa, b)Karnaughova mapa

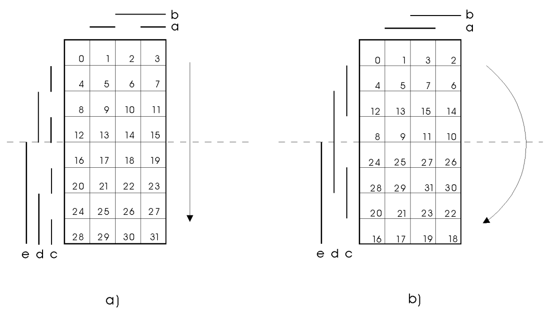
Na obr. 2.1 jsou v mapách označena políčka stavovými indexy. Při konkrétním použití určitého typu mapy se stavové indexy do jednotlivých políček mapy nepíší, typ mapy, a tedy jednoznačně i přiřazení políček stavovým indexům je patrné z pruhů podél mapy. Pruhy označují skupiny políček, ve kterých proměnná přiřazená danému pruhu nabývá hodnoty logické 1. Vše je znázorněno na obr. 2.2, kde je v mapách zapsána funkce $f(d, c, b, a) = \sum(1, 2, 4, 6, 9, 11, 15)$.

Mapy pro větší počet proměnných se získají u Svobodovy mapy posunutím, u Karnaughovy mapy otočením (viz obr. 2.3), což vyplývá ze způsobu přiřazení políček stavovým indexům pro jednotlivé typy map.



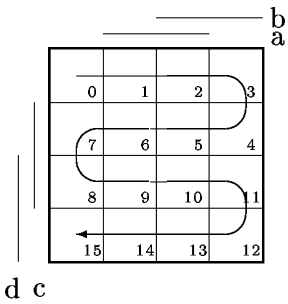
Obr. 2.2 Zobrazení funkce f a)ve Svobodově mapě b)v Karnaughově mapě

Mapy jsou vhodným prostředkem pro vyjádření logických funcí, jsou i vhodným prostředkem pro minimalizaci (viz další kapitola) funkcí dvou až šesti nezávisle proměnných.



Obr. 2.3 a)Svobodova mapa, b)Karnaughova mapa pro 5 proměnných

Dalším možným vyjádřením logické funkce je jednotková krychle (viz přednáškové skriptum). Je



Obr. 2.4. Znázornění vztahu mezi Karnaughovou mapou a Grayovým kódem.

jasné, že použití krychle pro vyjádření funkce např. pěti proměnných nebude z nejnázornějších, proto se tímto způsobem nebudeme dále zabývat.

2.1 Cvičení

1. Napište úplnou normální disjunktivní a konjunktivní formu (ÚNDF a ÚNKF) logické funkce f zadané seznamem stavových indexů, pro které nabývá funkce f hodnoty logické 1 nebo 0 (podle použitého symbolu):
a) $f(c,b,a) = \sum(0,1,5,6,7)$
b) $f(c,b,a) = \Pi(1,2,5,6)$
c) $f(d,c,b,a) = \sum(1,3,4,9,10,11,13)$
d) $f(d,c,b,a) = \Pi(0,1,4,5,8,9,13,14,15)$
e) $f(a,b,c) = \sum(0,1,5,6,7)$
f) $f(a,b,c,d) = \sum(1,2,5,7,8,9,14,15)$
g) $f(a,b,c,d) = \Pi(0,1,4,5,6,8,10,15)$

2. Najděte vzájemný vztah mezi mintermem a maxtermem pro daný stavový index s $(P_s ? S_s)$.

3. Funkce z příkladu 1a) až g) zapište do mapy
a) Svobodovy
b) Karnaughovy.

4. Logické funkce zadané algebraickým výrazem vyjádřete pomocí pravdivostní tabulky, Svobodovy a Karnaughovy mapy, seznamem stavových indexů a pomocí duální formy:
a) $a\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c}$
b) $(a+b+\bar{c}).(\bar{a}+b+c).(a+\bar{b}+\bar{c}).(a+b+c)$
c) $abc + \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$