

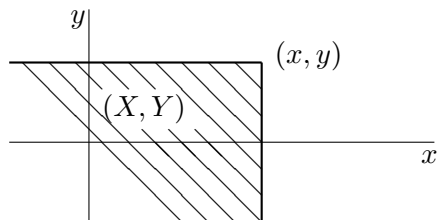
10. Náhodný vektor

10.1. Definice: Náhodný vektor. Uspořádanou n -tici (X_1, X_2, \dots, X_n) náhodných veličin X_i , $1 \leq i \leq n$, nazýváme *náhodným vektorem*.

10.2. Definice: Sdružená distribuční funkce. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak funkci $F = F(x, y)$, která je definovaná předpisem

$$(\spadesuit) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

nazýváme *sdruženou distribuční funkcí* náhodného vektoru (X, Y) .



Obr. 10.1.

Hodnota sdružené distribuční funkce $F(x, y)$ je rovna pravděpodobnosti s jakou se hodnota náhodného vektoru (X, Y) vyskytne ve vyšrafované části roviny z obrázku Obr.10.1.

10.3. Věta: Vlastnosti sdružené distribuční funkce. Pro sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ náhodného vektoru platí:

- a) Pro všechny hodnoty $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ je $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
- b) Funkce $F(x, y)$ je neklesající jako funkce proměnné x a proměnné y .
- c) Je

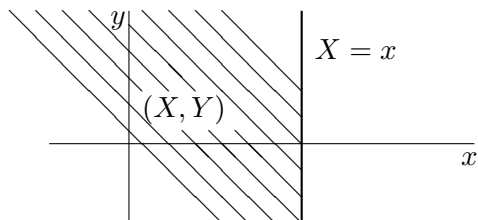
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$$

- d) Je

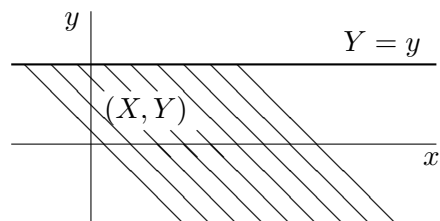
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} F(x, y) = 1.$$

- e) Je

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = P(Y \leq y), \quad y \in \mathbf{R}.$$



Obr. 10.2a.



Obr. 10.2b.

Poznámka: Marginální rozdělení. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak jsou jeho souřadnice X a Y náhodné veličiny. Jejich rozdělení je popsáno příslušnými distribučními funkcemi. Ty se dají snadno určit ze sdružené distribuční funkce pomocí vztahů z tvrzení e) věty 10.3.

10.4. Definice: Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak rozdělení náhodných veličin X a Y se nazývá *marginální rozdělení*.

10.5. Věta: Je-li $F(x, y)$ sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X, Y) , pak jsou marginální distribuční funkce $F_1(x)$, resp. $F_2(y)$ náhodné veličiny X , resp Y určeny vztahy

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad x \in \mathbf{R}$$

a

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Příklad: 1. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení určené sdruženou distribuční funkcí $F(x, y)$, kde

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ nebo } y \leq 0, \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x-3y}, & x \geq 0 \text{ a } y \geq 0. \end{cases}$$

Určete marginální distribuční funkce náhodných veličin X a Y .

Řešení: Marginální distribuční funkce $F_1(x)$ a $F_2(y)$ náhodných veličin X a Y určíme z jejich vyjádření odvozených ve větě 10.5. Je

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad x \in \mathbf{R}$$

a

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Protože je $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = 0$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-3y} = 0$ dostaneme:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0; \end{cases} \quad \text{a} \quad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-3y}, & y \geq 0; \end{cases}$$

Typy rozdělení náhodného vektoru

I. Diskrétní rozdělení.

10.6. Definice: Diskrétní rozdělení. Říkáme, že náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení, jestliže nabývá konečně nebo spočetně mnoha diskrétních hodnot.

10.7. Definice: Sdružená pravděpodobnostní funkce. Jestliže má náhodný vektor (X, Y) diskrétní rozdělení, pak funkci $p = p(x, y)$, která je definována předpisem

$$(\clubsuit) \quad p(x, y) = P(X = x \cap Y = y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

nazýváme *sdruženou pravděpodobnostní funkcí* náhodného vektoru (X, Y) .

10.8. Věta: Vlastnosti sdružené pravděpodobnostní funkce. Funkce $p = p(x, y)$ je sdruženou pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru (X, Y) právě když platí:

- a) Je $0 \leq p(x, y) \leq 1$ pro všechny hodnoty $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
b) Je $\sum_{(x, y) \in \mathbf{R}^2} p(x, y) = 1$.
c) Existuje pouze konečná nebo spočetná množina (posloupnost) hodnot (x_i, y_k) , pro které je $P(x_i, y_k) > 0$.

10.9. Věta: Marginální pravděpodobnostní funkce. Je-li $p(x, y)$ sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y) , pak jsou marginální pravděpodobnostní funkce $p_1(x)$, resp. $p_2(y)$ náhodné veličiny X , resp Y dány vztahy:

$$p_1(x) = \sum_{y \in \mathbf{R}} p(x, y), \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{a} \quad p_2(y) = \sum_{x \in \mathbf{R}} p(x, y), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Tabulka pro sdruženou pravděpodobnostní funkci a marginální pravděpodobnostní funkce.

| $p(x, y)$ | x_1 | x_2 | \dots | x_i | \dots | $p_2(y)$ |
|-----------|---------------|---------------|---------|---------------|---------|------------|
| y_1 | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_2, y_1)$ | \dots | $p(x_i, y_1)$ | \dots | $p_2(y_1)$ |
| y_2 | $p(x_1, y_2)$ | $p(x_2, y_2)$ | \dots | $p(x_i, y_2)$ | \dots | $p_2(y_2)$ |
| \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots |
| y_k | $p(x_1, y_k)$ | $p(x_2, y_k)$ | \dots | $p(x_i, y_k)$ | \dots | $p_2(y_k)$ |
| \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots |
| $p_1(x)$ | $p_1(x_1)$ | $p_1(x_2)$ | \dots | $p_1(x_i)$ | \dots | 1 |

Tab. 10.1.

10. 10. Definice: Nezávislost náhodných veličin. Jestliže má náhodný vektor (X, Y) diskrétní rozdělení, pak říkáme, že jsou jeho souřadnice X a Y *nezávislé náhodné veličiny*, jestliže jsou náhodné jevy $(X = x)$ a $(Y = y)$ nezávislé pro všechny hodnoty $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. V opačném případě mluvíme o *závislých* náhodných veličinách.

10.11. Věta: Podmínka nezávislosti. Je-li $p(x, y)$ sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y) , pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé právě když pro sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce platí:

$$(\heartsuit) \quad p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Poznámka: Pro tabulku Tab. 10.1 to znamená, že políčko (x_i, y_k) dostaneme jako součin políčka x_i a políčka y_k v marginálních pravděpodobnostních funkcích. Dá se tedy sdružená pravděpodobnostní funkce zpětně vytvořit ze svých marginálních pravděpodobnostních funkcí.

Příklad: 1. Náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí p , která je zadána tabulkou Tab. 10.2. Určete marginální pravděpodobnostní funkce a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

| $y \backslash x$ | 0 | 1 | 3 |
|------------------|-----|-----|-----|
| -1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Tab. 10.2.

| $y \backslash x$ | 0 | 1 | 3 | $p_2(y)$ |
|------------------|-----|-----|-----|----------|
| -1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |
| 1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,6 |
| $p_1(x)$ | 0,4 | 0,4 | 0,2 | |

Tab. 10.3.

Řešení: Marginální pravděpodobnostní funkce určíme pomocí vzorců z věty 10.9. Je pak

$$X : p_1(x) = \sum_{y \in \mathbf{R}} p(x, y) \quad \text{a} \quad Y : p_2(y) = \sum_{x \in \mathbf{R}} p(x, y).$$

Závislost či nezávislost otestujeme z podmínky $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$, kterou jsme pro nezávislost náhodných veličin odvodili ve větě 10. 11. Je například $p(0, -1) = 0,1$ a $p_1(0)p_2(-1) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$. Protože jsou výsledky různé nemusíme rovnost pro další políčka z tabulky ověřovat. Náhodné veličiny X a Y jsou závislé.

Příklad: 2. Náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí p , která je zadána tabulkou Tab. 10.4. Určete marginální pravděpodobnostní funkce a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

| $y \backslash x$ | 1 | 2 | 4 |
|------------------|------|-----|------|
| 0 | 0,06 | 0,3 | 0,24 |
| 3 | 0,04 | 0,2 | 0,16 |

Tab. 10.4.

| $y \backslash x$ | 1 | 2 | 4 | $p_2(y)$ |
|------------------|------|-----|------|----------|
| 0 | 0,06 | 0,3 | 0,24 | 0,6 |
| 3 | 0,04 | 0,2 | 0,16 | 0,4 |
| $p_1(x)$ | 0,1 | 0,5 | 0,4 | |

Tab. 10.5.

Řešení: Marginální pravděpodobnostní funkce určíme pomocí vzorců z věty 10.9. Je pak

$$X : p_1(x) = \sum_{y \in \mathbf{R}} p(x, y) \quad \text{a} \quad Y : p_2(y) = \sum_{x \in \mathbf{R}} p(x, y).$$

Závislost či nezávislost otestujeme z podmínky $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$, kterou jsme pro nezávislost náhodných veličin odvodili ve větě 10. 11. Ověříme postupně zda platí rovnost pro jednotlivá políčka. Pro hodnoty v prvním řádku dostaneme:

$$0,06 = 0,6 \cdot 0,1; \quad 0,3 = 0,6 \cdot 0,5; \quad 0,24 = 0,6 \cdot 0,4;$$

v druhém řádku dostaneme

$$0,04 = 0,4 \cdot 0,1; \quad 0,2 = 0,4 \cdot 0,5; \quad 0,16 = 0,4 \cdot 0,4.$$

Protože podmínka pro nezávislost je splněna pro všechny dvojice hodnot náhodného vektoru (X, Y) z tabulky, jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

II. Spojité rozdělení.

10. 12. Definice: Spojité rozdělení. Říkáme že náhodný vektor (X, Y) má *spojité rozdělení* jestliže pro jeho sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ platí:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Funkci $f(x, y)$ nazýváme *sdruženou hustotou* náhodného vektoru (X, Y) .

10.13. Věta: Vlastnosti sdružené hustoty. Funkce $f(x, y)$ je sdruženou hustotu náhodného vektoru (X, Y) právě když platí:

1. Je $f(x, y) \geq 0$ pro $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
2. Je $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Pro sdruženou hustotu $f(x, y)$ dále platí:

3. $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ pro skoro všechna $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

4. Pro $A \subset \mathbf{R}^2$ je

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) \, dx dy.$$

10. 14. Věta: Marginální rozdělení. Jestliže má náhodný vektor (X, Y) spojité rozdělení určené sdruženou hustotu $f(x, y)$, pak pro jeho marginální distribuční funkce platí:

$$X : \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) \, du \right) dy, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$Y : \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) \, dv \right) dx, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Marginální náhodné veličiny X a Y mají spojité rozdělení a pro jejich hustoty platí:

$$X : \quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$Y : \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx, \quad y \in \mathbf{R}.$$

10.15. Definice: Marginální hustoty. Hustoty $f_1(x)$ a $f_2(y)$ z věty 10. 14 se nazývají *marginální*.

10.16. Definice: Nezávislost náhodných veličin. Říkáme, že jsou náhodné veličiny X a Y *nezávislé*, jestliže jsou náhodné jevy

$$(X \leq x) \quad \text{a} \quad (Y \leq y)$$

nezávislé pro všechny hodnoty x a y z \mathbf{R} . V opačném případě nazýváme náhodné veličiny *závislými*.

10. 17. Věta: Podmínka pro nezávislost. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě když platí:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \quad \text{pro} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

kde $F(x, y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X, Y) a $F_1(x)$, resp. $F_2(y)$, jsou marginální distribuční funkce náhodné veličiny X , resp. Y .

10. 18. Věta: Spojitě rozdělené náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě když pro jejich marginální a sdruženou hustotu platí:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

10. 19. Věta: Pro náhodné veličiny X a Y platí:

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak platí:
 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Poznámka: Pro náhodné veličiny X a Y sledujeme často jejich závislost a podobně jako u vlastností jedné náhodné veličiny se ji snažíme popsat číselnou hodnotou. Činíme tak pomocí koeficientů kovariance a korelace.

10.20. Definice: Koeficient kovariance. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak *koeficientem kovariance* náhodných veličin X a Y nazýváme číslo

$$C(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

10.21. Věta: Vlastnosti kovariance. Pro koeficient kovariance náhodných veličin X a Y platí:

- a) $C(X, X) = D(X)$.
- b) $C(X, Y) = C(Y, X)$.
- c) $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- d) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak $C(X, Y) = 0$.
- e) Je-li $C(X, Y) \neq 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y jsou závislé.
- f) $C(X, aX + b) = aD(X)$.

Poznámka: K popisu závislosti náhodných veličin používáme normovaný koeficient, který je odvozen z koeficientu kovariance.

10.22. Definice: Koeficient korelace. Pro náhodné veličiny X a Y nazýváme *koeficientem korelace* číslo

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

10.23. Věta: Vlastnosti koeficientu korelace. Pro koeficient korelace náhodných veličin X a Y platí:

- a) $\rho(X, X) = 1$;
- b) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$;
- c) Je-li $\rho(X, Y) \neq 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y závislé.
- d) Pro nezávislé náhodné veličiny X a Y je $\rho(X, Y) = 0$.
- e) $\rho(X, aX + b) = \operatorname{sgn} a = \frac{a}{|a|}$;
- f) $|\rho(X, Y)| \leq 1$;
- g) $\rho(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$.

Poznámka: Z vlastností f) a g) plyne, že koeficient korelace je vlastně mírou lineární závislosti náhodných veličin. O náhodných veličinách X a Y , pro které je $\rho(X, Y) = 0$ mluvíme jako o *nekorelovaných* náhodných veličinách. Ty nemusí být nutně nezávislé. Shoda nastává pouze u náhodných veličin, které mají normální rozdělení.