Abstraktní datové typy II

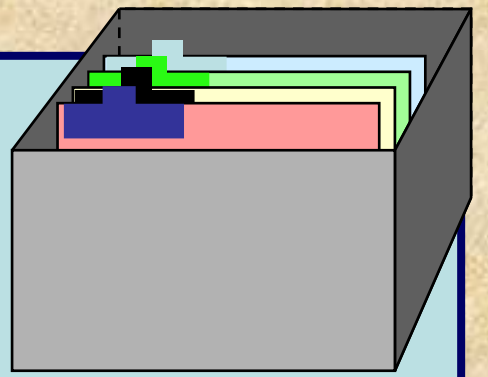
DSA - Přednáška 3

Josef Kolář
(s využitím příprav Ing. Petra Felkela a dalších zdrojů)

Abstraktní datové typy

- Pole (*Array*)
- Zásobník (*Stack*)
- Fronta (*Queue*)
- ✓ **Tabulka (*Table*)**
- Seznam (*List*)
- Množina bez opakování (*Set*)
- Množina s opakováním (*MultiSet*)

Vyhledávací Tabulka (Look-up Table)

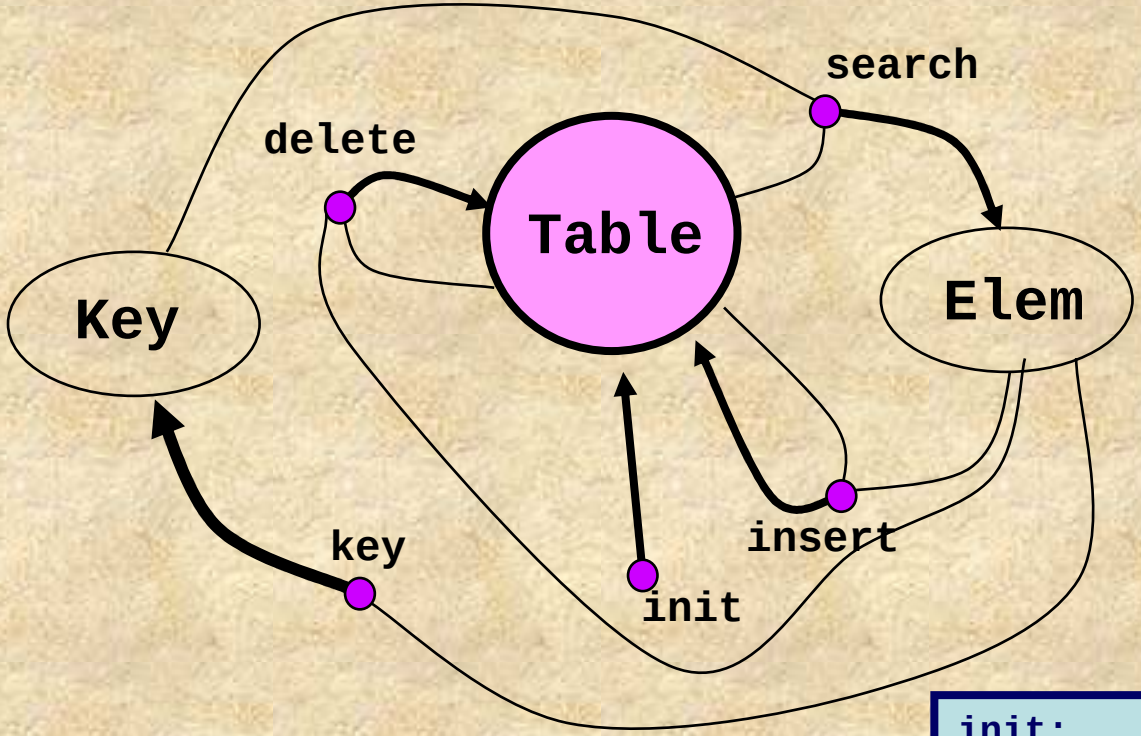


- kartotéka, asociativní paměť
- převod mezi kódy, četnost slov,...
- *homogenní, dynamická* (nejen) a nelineární
- obsahuje
  - *položky* tvořené klíčem a (případnou) asociovanou hodnotou
  - *klíč* jednoznačně identifikuje položku, podle něj se vyhledává

Příklady:

- **telefonní seznam** - klíčem je jméno+adresa, hodnotou tlf číslo
- **Č-A slovník** - položka je dvojice české slovo+anglické slovo

Signatura tabulky




```
init:          -> Table
insert(_,_): Elem, Table -> Table
search(_,_): Key, Table -> Elem
delete(_,_): Elem, Table -> Table
key(_):      Elem -> Key
```

Možnosti vyhledávání

Asociativní vyhledávání - porovnáváním klíčů

$\Omega(\log n)$

– nalezeno, když *klíč_prvku = hledaný klíč*

– např. sekvenční vyhledávání, hledání půlením,BVS,...

Adresní vyhledávání

- **indexací** klíčem (**přímý přístup**)

  $\Theta(1)$

  – klíč je přímo indexem (adresou)

  – rozsah klíčů ~ rozsahu indexů

- **rozptylováním** (hashing)

  průměrně $\Theta(1)$

  – výpočtem adresy z hodnoty klíče

Rozptylování - Hashing

Rozptylování je kompromis mezi rychlostí a spotřebou paměti

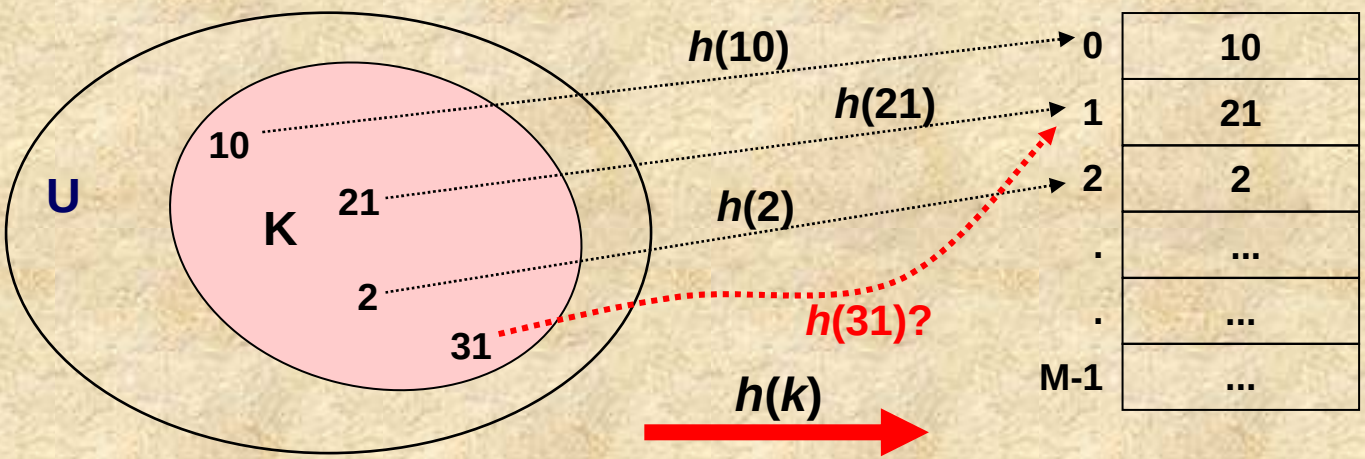
- sekvenční vyhledávání - čas *O*(*n*), paměť *O(n)*
- přímý přístup - čas *O*(1), paměť *O(N)*, *N* = |*universum klíčů*|
- rozptylování stačí málo času i paměti
  - **velikost tabulky *m* reguluje čas vyhledání**
  - **pro *m* = *kn* je čas *O*(1)**
- **konstantní očekávaný čas** pro *vyhledání* a *vkládání* (*search* a *insert)* !

Jaká je cena? (trade-off)

- čas provádění ~ délce klíče
- nevhodné pro operace *výběru podmnožiny* (*select*) a *řazení* (*sort)*

Rozptylování

U - universum klíčů K – skutečně použité klíče |K| << |U|



Rozptylování má **dvě fáze**

1. Výpočet **rozptylovací funkce** *h*(*k*) (z hodnoty klíče vypočítá adresu)
2. Vyřešení **kolizí** (*h(31) = h(21)* **...** **kolize** – prvek s indexem 1 již obsazen)

Rozptylovací funkce $h(k)$

Rozptylovací funkce

- zobrazuje množinu klíčů $\boldsymbol{K \subseteq U}$ do intervalu adres $\boldsymbol{A} = \langle \min, max \rangle$, obvykle $\langle 0, M-1 \rangle$
- $\boldsymbol{|U| >> |K| \approx |A|}$
- vznikají tak nutně **synonyma**: $h(k_1) = h(k_2)$ pro $k_1 \neq k_2$,
  $\Rightarrow$ nastane **kolize** (místo v tabulce obsazeno)

  Př.: Pro $h(k) = k \bmod 5$ jsou synonyma (10, 20, 55, …) (2, 12, 17, 22, …)
- silně závisí na vlastnostech klíčů a jejich reprezentaci v paměti
- ideálně:
  - výpočetně co nejjednodušší (rychlá)
  - aproximuje náhodnou funkci
  - využije **rovnoměrně** adresní prostor
  - generuje **minimum kolizí**
  - proto: měla by využívat **všechny části klíče**

Volba rozptylovací funkce *h*(*k*)

- Pro **reálná čísla** z intervalu ⟨**0,1**⟩ (jak se na něj převede interval ⟨**a,b**⟩ ?)
  - multiplikativní: **h(k,M) = round(k * M)** (neoddělí shluky blízkých čísel)
    M = velikost tabulky
- Pro w-bitová **celá čísla**
  - multiplikativní: (**M** je prvočíslo)
    - **h(k,M) = round(k /2^w * M)**
  - modulární:
    - **h(k,M) = k % M**
  - kombinovaná:
    - **h(k,M) = round(c * k) % M, c ∈ <0,1>**
    - **h(k,M) = (int)(0.616161 * (float) k) % M**
    - **h(k,M) = (16161 * (unsigned) k) % M**
- Pro **obecné hodnoty** (rychlá, silně závislá na reprezentaci klíčů)
  - M bitů z klíče
    - **h(k,M) = k & (M-1)** pro **M = 2^x** (není prvočíslo!), **&** je bitový součin

Volba rozptylovací funkce *h*(*k*)

- **Pro řetězce $c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1 c_0$** – bereme jako polynom ⇒ použije se **Hornerovo schéma**

$$c_k * a^k + c_{k-1} * a^{k-1} + \ldots + c_2 * a^2 + c_1 * a^1 + c_0 * a^0 = ((\ldots((c_k * a + c_{k-1}) * a \ldots + c_2) * a + c_1) * a + c_0$$

```
static int hash( String s, int M) {
  int h = 0, a = 127;
  for (int i = 0; i < s.length(); i++)
    h = (a*h + s.charAt(i)) % M;
  return h;
}
```

a=127 je vhodný základ (např. 128 není vhodné)

- **Pro řetězce** (pseudo-)randomizovaná tzv. **univerzální rozptylovací funkce**

```
static int hashU( String s, int M) {
  int h = 0, a = 31415, b = 27183;
  for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
    h = (a*h + s.charAt(i)) % M;
    a = a*b % (M-1);                    // pseudonáhodná posloupnost
  return h;
}
```

Řešení kolizí

Jak postupovat, když dojde ke kolizi?

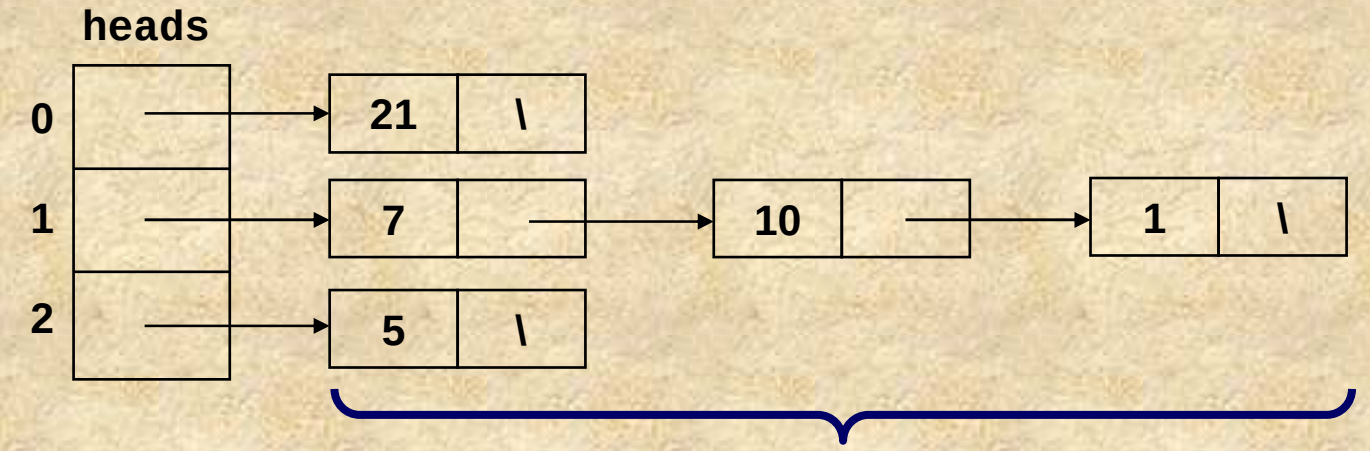
Dva přístupy:

- **řetězení**
- **otevřené rozptylování / adresování**

Řešení kolizí řetězením (Chaining)

Předpokládejme: $h(k) = k \bmod 3$

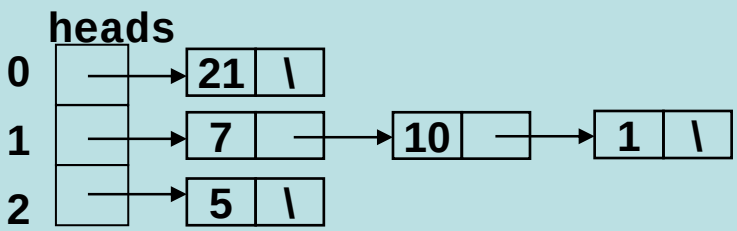
- vkládáme posloupnost klíčů: 1, 5, 21, 10, 7 — ***m* = 3, *n* = 5**
- nový klíč vždy na začátek řetězu (proč?)



seznamy synonym

Řešení kolizí řetězením (Chaining)

```
private Node[] heads;
int N, M;

void init( int maxN ) {                  // initialization
  N=0;                                   // # of table items
  M = maxN / 5;                          // table size
  heads = new Node[M];                   // array of pointers
  for( int i = 0; i < M; i++ )
    heads[i] = null;
}

Elem search( Key k ) {                   // search in the respective sublist
  return seqSearchList( heads[hash(k, M)], k );
}

void insert( Elem item ) {
  int i = hash( item.key(), M );
  heads[i] = new Node( item, heads[i] );
  N++;
}

void delete( Elem item ) {
  ...
}
```



Řešení kolizí řetězením (Chaining)

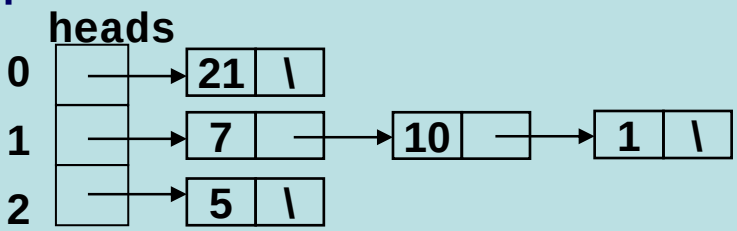
Řetěz synonym má ideálně délku $\alpha = n / m$, $\alpha > 1$ (zaplnění tabulky)

(n = počet prvků, m = velikost tabulky, m<n)

nepravděpodobný extrém

- **Insert** $I(n) = t_{hash} + t_{link} = O(1)$
- **Search** $Q(n) = t_{hash} + t_{search}$ průměr
  $= t_{hash} + t_c * n/(2m)$ $= O(n)$ $O(1 + \alpha)$
- **Delete** $D(n) = t_{hash} + t_{search} + t_{link}$ $= O(n)$ $O(1 + \alpha)$

- pro malá α (velká m) - se hodně blíží O(1) !!!
- pro velká α (malá m) - m-násobné zrychlení proti sekvenčnímu hledání



Řešení kolizí řetězením (Chaining)

Praxe:

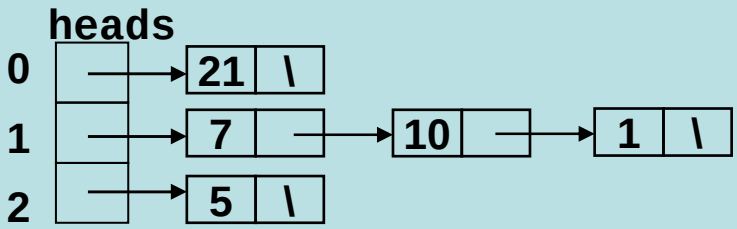
- **volit *m* = *n*/5 až *n*/10 $\Rightarrow$ plnění $\alpha \leq 10$ prvků / řetěz**
- vyplatí se hledat sekvenčně
- neplýtvá nepoužitými ukazateli

Shrnutí:

\+ nemusíme znát *n* předem

– potřebuje dynamické přidělování paměti

– potřebuje paměť na ukazatele a na tabulku *heads*[*m*]



Otevřené rozptylování (open addressing)

Východiska:

- známe (odhadneme) předem počet prvků
- nechci seznamy ani pole ukazatelů
- $\Rightarrow$ jednotlivé položky tabulky ukládáme (nesouvisle!) do pole na místa určená rozptylovací funkcí *h(k)*

Jak postupujeme při kolizi?

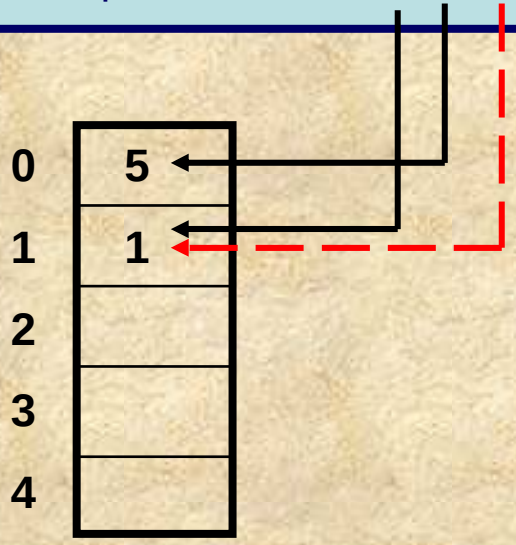
- **lineární prohledávání (linear probing)**
- **dvojí rozptylování (double hashing)**

0	5
1	1
2	21
3	10
4	

Otevřené rozptylování

Příklad

- $h(k) = k \bmod 5$ ($h(k) = k \bmod m$, m je rozměr pole)
- posloupnost: 1, 5, 21, 10



Problém:
kolize – klíč **1** blokuje místo pro klíč **21**

Postup
- lineární prohledávání
- dvojí rozptylování

Poznámka:
1 a **21** jsou synonyma, často ale blokuje nesynonymum.
Kolize je blokování **libovolným klíčem**

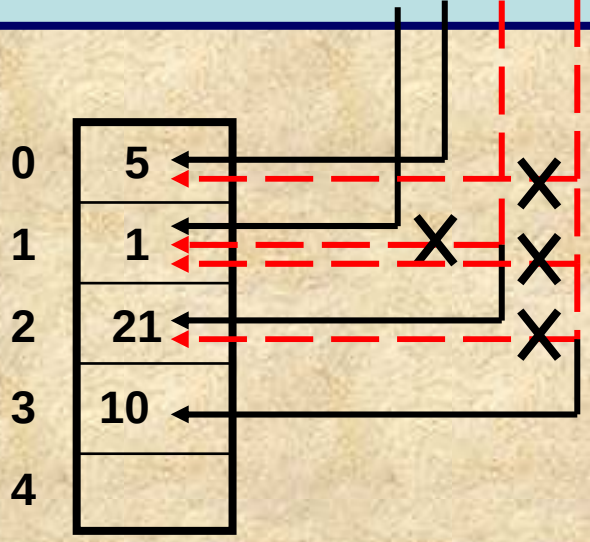
Test (Probe) = určení, zda pozice v tabulce obsahuje klíč shodný s hledaným klíčem

- search hit = klíč nalezen
- search miss = pozice prázdná, klíč nenalezen
- jinak = na pozici je jiný klíč, hledej dál

Lineární prohledávání

Příklad

- $h(k,i) = (k+i) \bmod 5$ ($h(k,i) = (k+i) \bmod m$, i je pořadí testu/probe)
- posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



Problém pro 21:
1 blokuje místo pro **21 – vlož o pozici dál**

Problém pro 10:
5 blokuje místo pro **10 – vlož o pozici dál**
1 blokuje **– vlož o pozici dál**
21 blokuje **– vlož o pozici dál**

Lineární prohledávání

```
private Elem[] tab;
private int N, M;

void init( int maxN )
  { N = 0; M = 2*maxN; tab = new Elem[M]; }

void insert( Elem x ) {
   int i = hash(x.key(), M);
  while (tab[i] != null) i = (i+1) % M;   // co kdyz je tabulka plna ???
  tab[i] = x; N++;
}

Elem search( Key key ) {
  int i = hash(key, M);
  while (tab[i] != null)                  // co kdyz je tabulka plna ???
    if (key == tab[i].key()) return tab[i];
    else i = (i+1) % M;
  return null;
}
```

Na co je třeba dát pozor:

- lineární prohledávání má **cyklický charakter** **(0, 1, 2, …, M-1, 0, 1, 2, …)**
- musíme se někdy zastavit
  - **na volném místě**
  - **nebo po projití celé (plné) tabulky!**
- jak udělat operaci `delete ??` **(viz dále)**

Dvojité rozptylování

Základní myšlenka – obecnější tvar, dvě rozptylovací funkce

$$h(k,i) = (h_1(k) + i*h_2(k)) \bmod m$$

Každý klíč má svoji testovací posloupnost !

Možná volba

- $h_1(k) = k \bmod m$ // počátek
- $h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ // offset

- m = prvočíslo 2**w
- m' = o něco menší liché číslo
- nechť $d = NSD(m,m')$ => prohledává se jen m/d položek!

Příklad:

- k = 123456, m = 701, m' = 700, $d = NSD(701, 700) = 1$
- $h_1(k) = 80$, $h_2(k) = 257$
- hledání začne na prvku 80 a pokračuje s krokem 257 % 701

Dvojité rozptylování

```
void insert( Elem x ) {
Key key = x.key();
  int i = hash1(key, M); int k = hash2(key);
  while (tab[i] != null) i = (i+k) % M;   // co kdyz je tabulka plna ???
  tab[i] = x; N++;
}

Elem search( Key key ) {
  int i = hash(key, M); int k = hash2(key);
  while (tab[i] != null)                  // co kdyz je tabulka plna ???
    if (key == tab[i].key()) return tab[i];
    else i = (i+k) % M;
  return null;
}
```

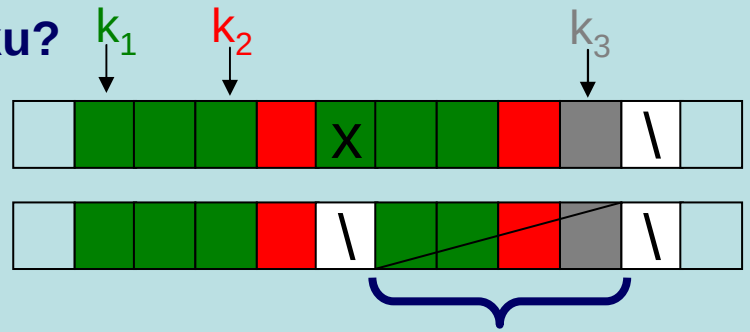
Na co je třeba dát pozor:

- co dělat při zaplnění tabulky?
  - signalizovat chybu
  - dynamicky zvětšit tabulku
- co to jsou shluky (clusters)?
- jak udělat operaci `delete ??` (viz dále)

Vypuštění prvku z tabulky (delete)

Co dělat při vypuštění prvku?

- x nahradíme null
- null přeruší shluk(-y) !!!
- => delete nesmí nechat "díru"



původní stav

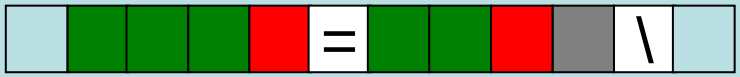
přerušení shluku

nedosažitelná část shluku

Řešení se liší:

- pro **lineární prohledávání**
  znovu vložíme prvky za x (až k prvnímu null = konec shluku)

- pro **dvojité rozptylování**
  vypníme uvolněné místo **speciální zarážkou**
  `search` místo přeskočí, **`insert`** je použije



Implementace operace delete

```
// delete pro linearni prohledavani
void delete( Elem item ) {
  Key key = item.key();
  int i = hash( key, M );
  while( tab[i] != null )                    // find item to remove
    if( item.key() == tab[i].key() ) break;
  else i = (i+1) % M;
  if( st[i] == null ) return;                // not found
  tab[i] = null; N--;                        //delete, reduce count
  for(int j = i+1; tab[j] != null; j = (j+1) % M) {
    x = tab[j]; tab[j] = null; insert(x);   //reinsert elements after deleted
  }
}

// delete pro dvojite rozptylovani
void delete( Elem item ) {
  Key key = item.key();
  int i = hash1( key, M ), j = hash2( key );
  while( tab[i] != null )                    // find item to remove
    if( item.key() == tab[i].key() ) break;
    else i = (i+j) % M;
  if( tab[i] == null() ) return;             // not found
  tab[i] = sentinelItem; N--;                // "delete" = replace
}
```

Parametry otevřeného rozptylování

Průměrný počet testů - $\alpha = n/m$, $\alpha \in \langle 0,1)$

- **Linear probing:**
  - **Search hits** — $0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha))$ — **found**
  - **Search misses** — $0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha)^2)$ — **not found**
- **Double hashing:**
  - **Search hits** — $(1 / \alpha) \ln (1 / (1 - \alpha)) + (1 / \alpha)$
  - **Search misses** — $1 / (1 - \alpha)$

Očekávaný počet testů

- **Linear probing**:

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.5	2.0	3.0	5.5
Search miss	2.5	5.0	8.5	55.5

- **Double hashing:**

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.4	1.6	1.8	2.6
Search miss	1.5	2.0	3.0	5.5

$\Rightarrow$ tabulka může být více zaplněná než začne klesat výkonnost, nebo
k dosažení stejného výkonu stačí menší tabulka.

Reference

- [Cormen] Cormen, Leiserson, Rivest: *Introduction to Algorithms*, Chapter 12, McGraw Hill, 1990
- [Wiki] "Hash function," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hash_function&oldid=175698983
- Tables and Hashing presentation http://users.aber.ac.uk/smg/Modules/CO21120-April-2003/NOTES/40-Hashing.ppt
- Bob Jenkins: Hash Functions for Hash Table Lookup *(theory of hash functions)*, http://burtleburtle.net/bob/hash/evahash.html
- Bob Jenkins: A Hash Function for Hash Table Lookup *(practical examples of hash functions)*, http://burtleburtle.net/bob/hash/doobs.html

Abstraktní datové typy

- Pole (*Array*)
- Zásobník (*Stack*)
- Fronta (*Queue*)
- Tabulka (*Table*)
- ✓ **Seznam (List)**
- Množina bez opakování (Set)
- Množina s opakováním (MultiSet)

Seznam (List)

Použití

- Sekvenční kontejner, optimalizovaný na vkládání a mazání uvnitř
- Patří mezi nejzákladnější DS ve výpočetní technice
  (používá se k implementaci jiných DS, stack, queue,…)

Vlastnosti

- Kontejner s rychlým přístupem ke všem prvkům bez upřednostnění konců
- Optimalizovaný pro vkládání a mazání prvků v libovolné pozici – v místě **ukazovátka**
- Nemá možnost indexovaného přístupu

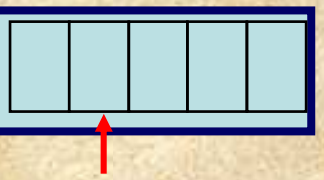
Intuitivní charakteristika: posloupnost údajů + ukazovátko!

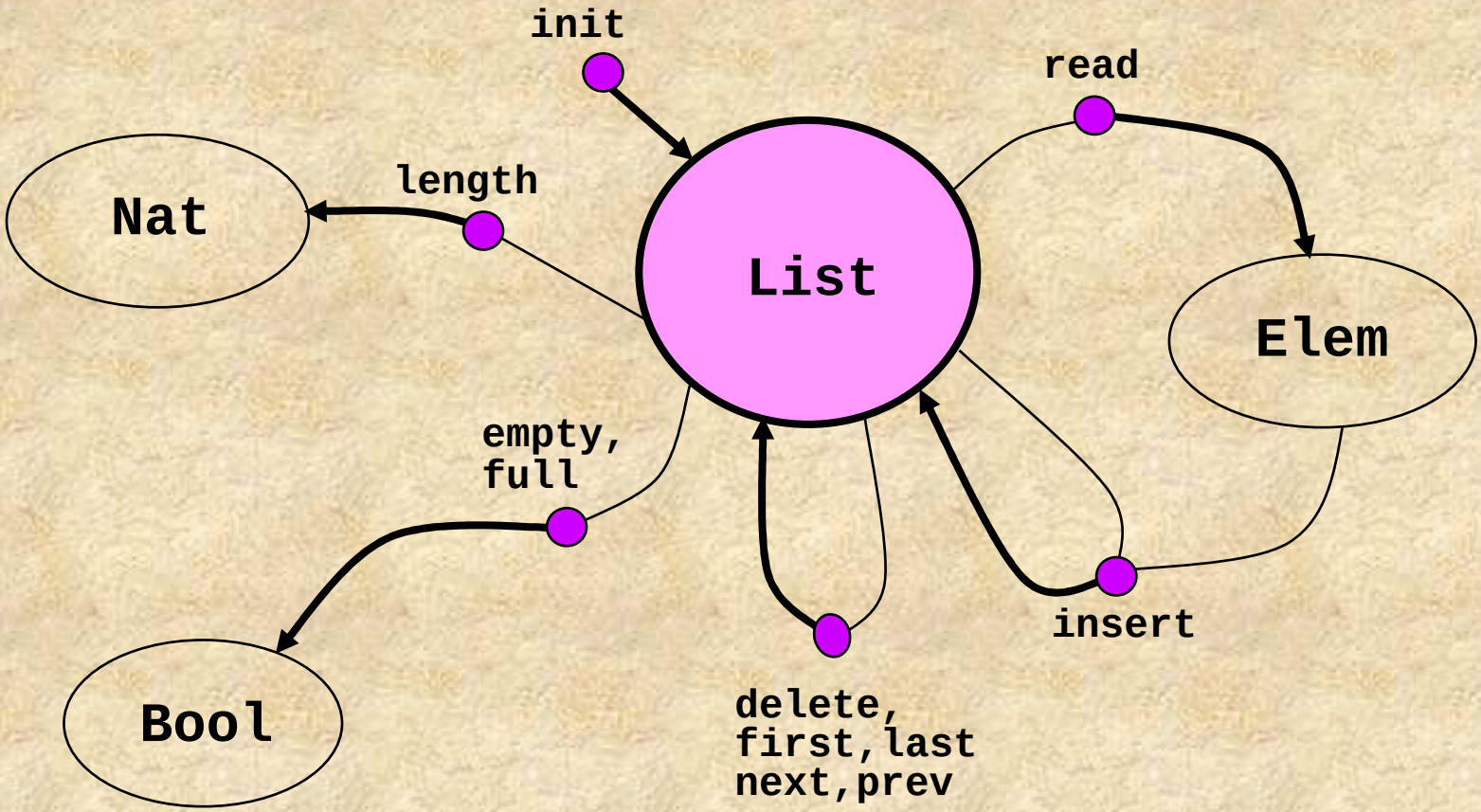
- Přidat / zrušit / měnit prvek lze pouze v místě ukazovátka!

Homogenní, lineární, dynamická datová struktura

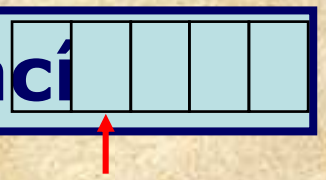
Příklad: spojový seznam = seznam v dynamické paměti (STL) O(1)
(NE ArrayList v Javě, který má get(i) se složitostí O(n))

Signatura seznamu





Seznam – interpretace operací



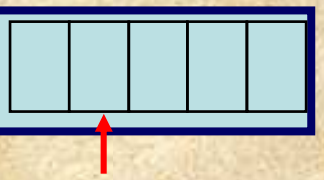
Operace insert

- budeme vkládat **před** nebo **za** ukazovátko?
  - jak se bude vkládat na konec seznamu?
- bude po vložení ukazovátko na **původním** nebo **vloženém** prvku?

Operace delete

- bude po vymazání ukazovátko na **předchozím** nebo **následujícím** prvku?

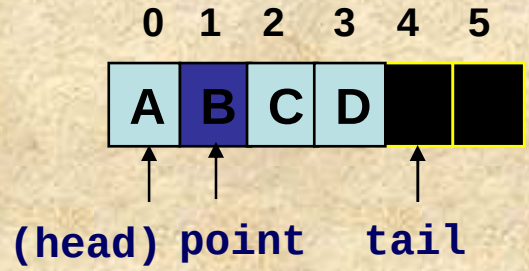
Implementace seznamu



Pomocí pole:

O(n) insert, delete

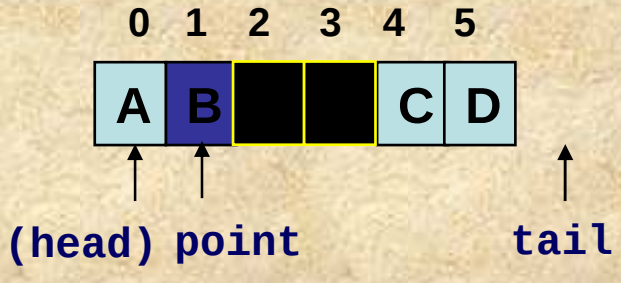
O(1) first, last, prev, next

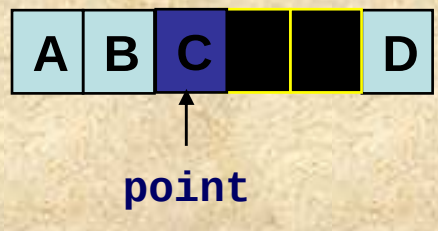


Dva zásobníky v poli:

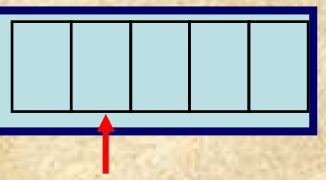
O(1) insert, delete, prev, next

O(n) first, last

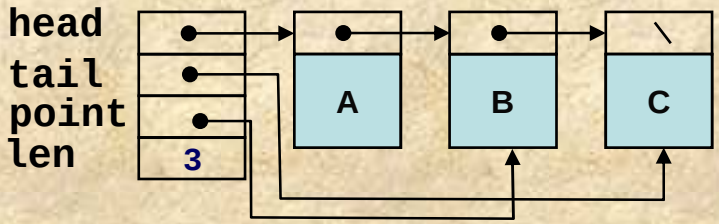




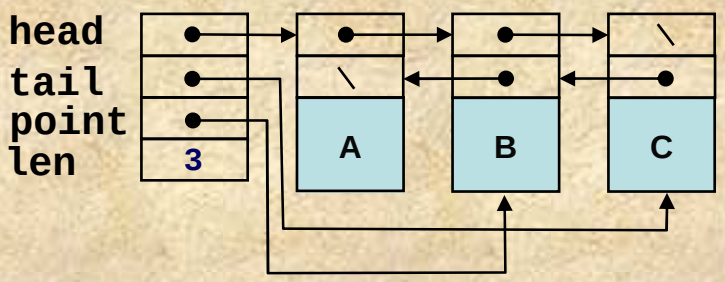
Implementace seznamu



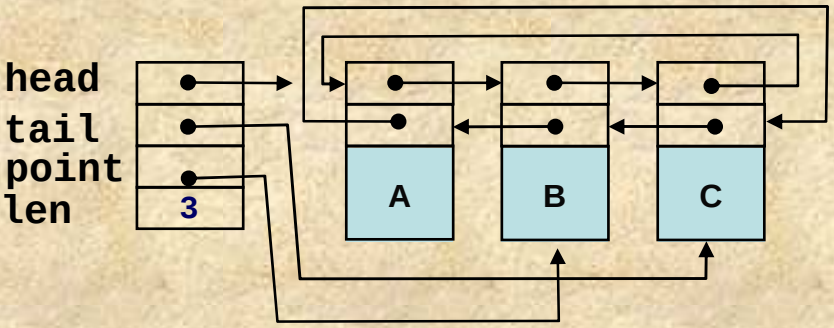
V dynamické paměti: O(n) delete, prev
O(1) insert, first, last, next



Jednosměrně zřetězený seznam

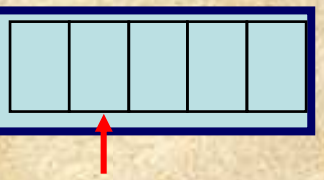


Obousměrně zřetězený seznam
O(1) delete, prev

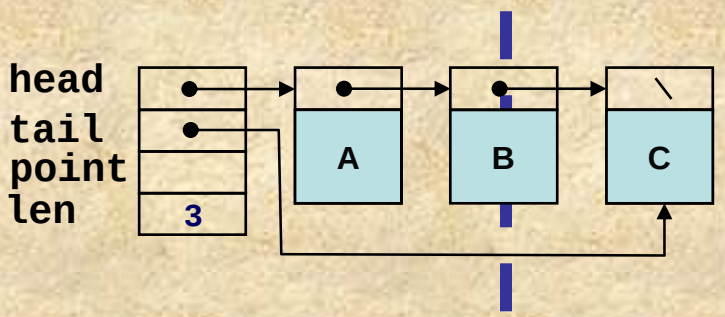


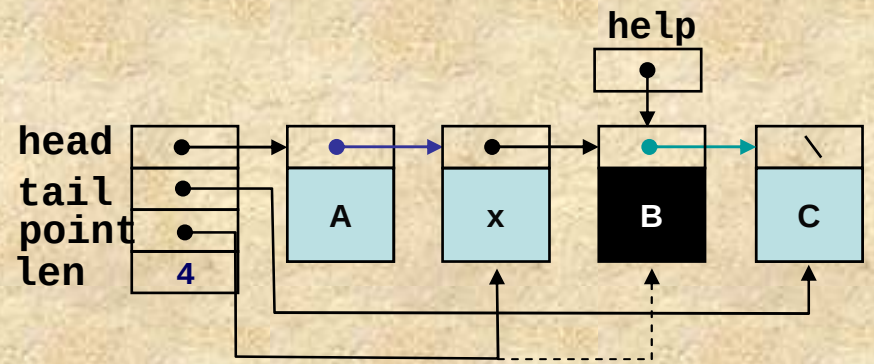
Kruhově obousměrně zřetězený seznam

Implementace seznamu



Jednosměrně zřetězený





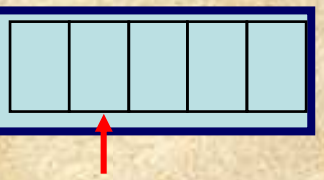
Konvence

`tail` = poslední prvek

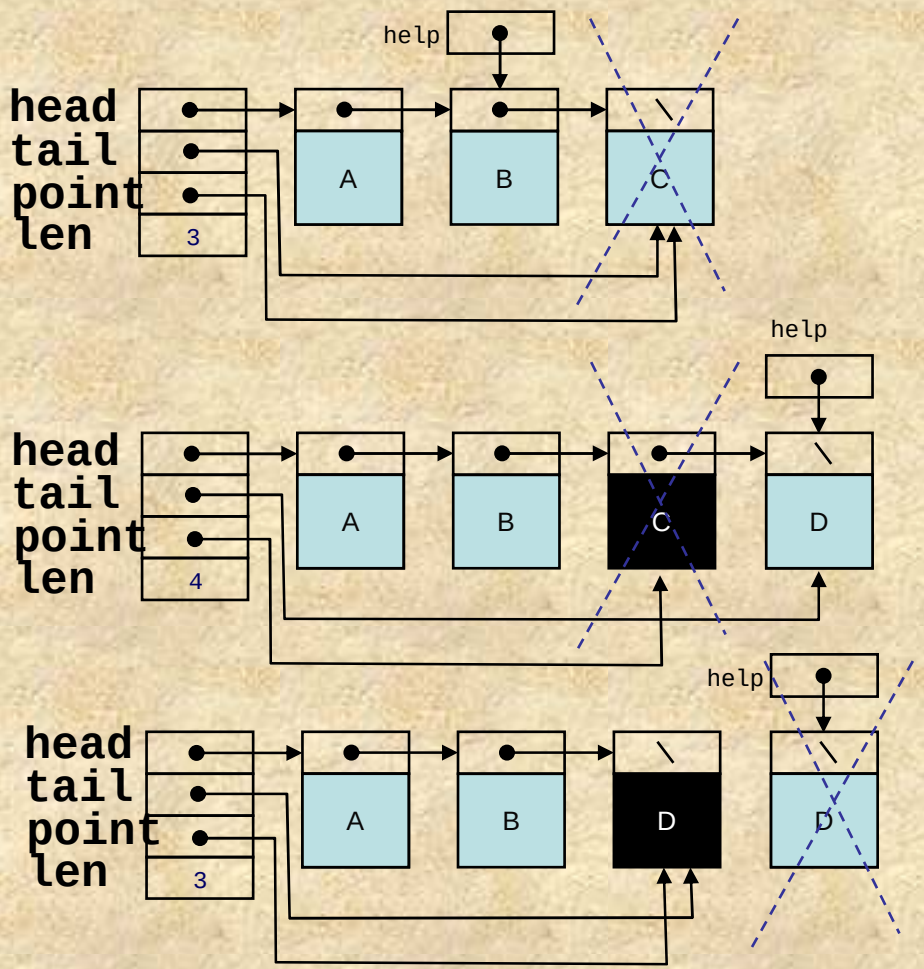
`point == null` ukazuje za `last`

```
void insert( Elem x ) {
  Node help = new Node();
  if( point == null ){  // points behind
    help.next = null;
    help.val = x;
    if( tail == null )  // empty list
       head = help;
    else                // add at end
       tail.next = help;
    tail = help;
  }        //point pointed behind list!
  else {   //point is in the list - trick
    help.val = point.val;
    help.next = point.next;
    point.next = help;
    point.val = x;
    point = help;
  }
  len++;
}
```

Implementace seznamu



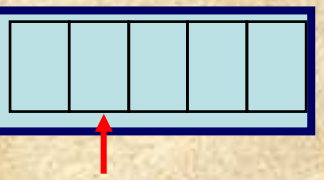
Jednosměrně zřetězený



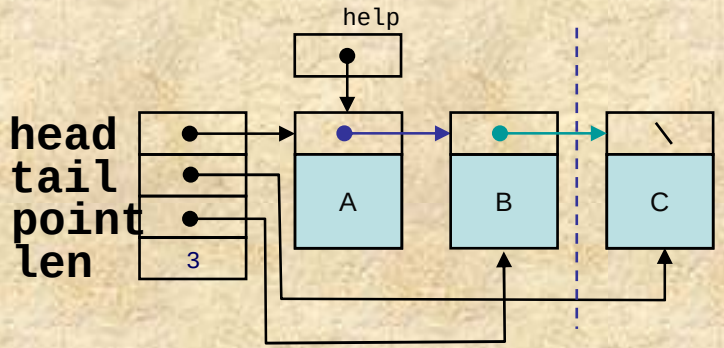

```
void delete( ) {
  Node help;
  if( point != null ){ // behind ignored
    if( point.next == null ) { //last
      help = head;    //find predecessor
      while( help.next != point )
        help = help.next;
      }
      help.next = null;
      point = null;
      tail = help;
    }
    // not last
    else {// trick:skip predec.search
      help = point.next;
      point.next = help.next;
      point.val = help.val;
      if( help == tail )
        tail = point;
    }
    len--;
  }
}
```

O(n) mazání tail
O(1) mazání uvnitř

Implementace seznamu



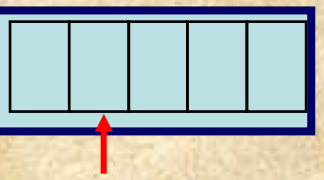
Jednosměrně zřetězený



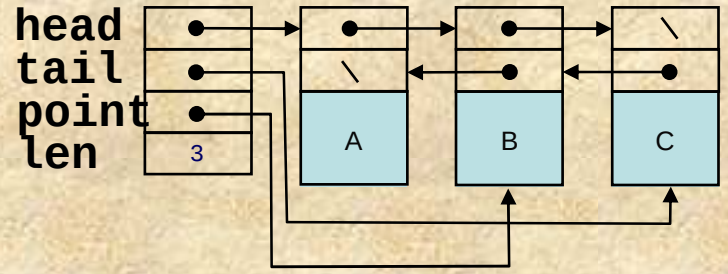

```
void prev( ) {
  Node help;
  if( point != head){  // could move
    help = head;
    while( help.next != point )
      help = help.next;
    point = help;
  }

}
```

O(n)

Implementace seznamu



Obousměrně zřetězený



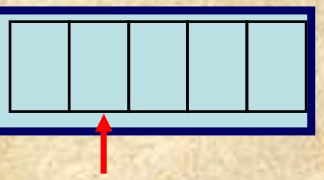

```
void prev( ) {
  Node help;
  if( point != head){ //could move
    if(point == null)
      point = tail;   // last
    else
      point = point.prev;
  }
}
```

O(1)

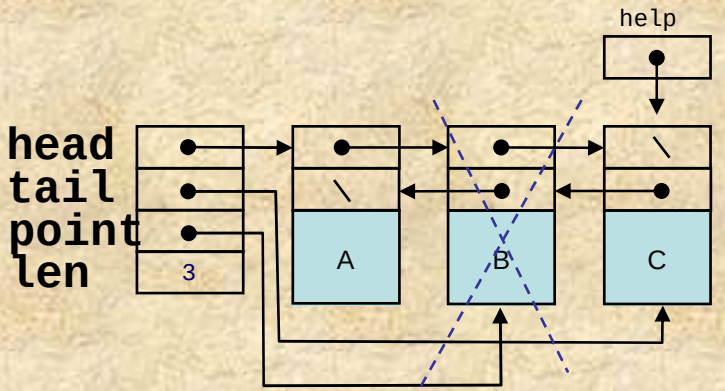
prev a **delete** posledního prvku

jsou jediné operace, kde obousměrné zřetězený seznam sníží složitost

Implementace seznamu

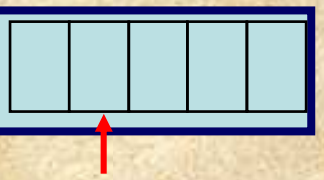


Obousměrně zřetězený

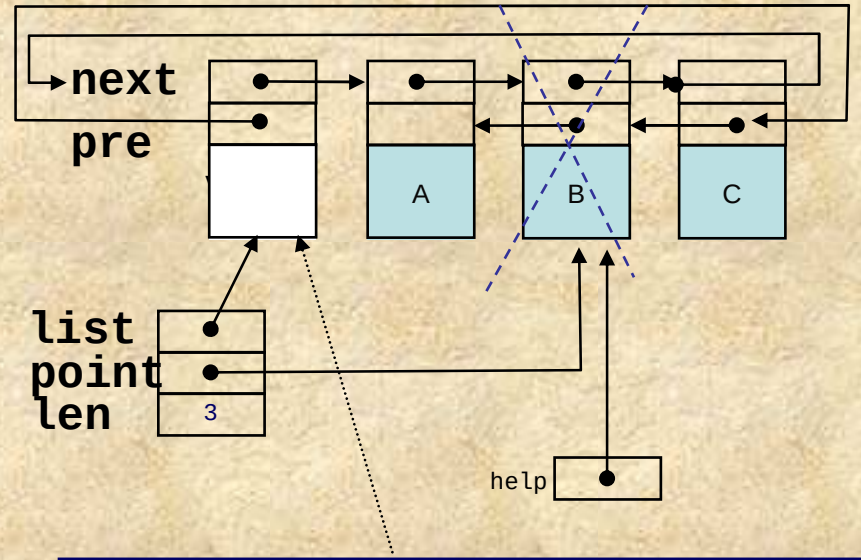



```
void delete( ) {
  Node help;
  if( point != null ){ // behind ignored

    help = point.next ;

    if( head == point ) //first
       head = help;

    if( tail == point ) //last
       tail = tail.prev;

    if( help != null )  //update prev
       help.prev = point.prev;

    if( point.prev != null ); //upd next
       point.prev.next = help;

    point = help;

    len--;
  }
}
```

Implementace seznamu



Kruhový obousměrně zřetězený



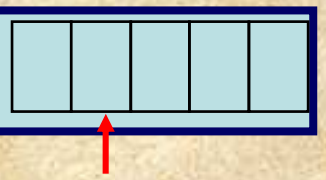

```
void delete( ) {
  Node help;
  if( point != list ){    //not empty
    point.prev.next = point.next;
    point.next.prev = point.prev;

    help = point;
    point = point.next;

    len--;
  }
}

void prev( ) {
  if( !atBegin() )   //point != list.next
    point = point.prev;
}
```

Konvence:

Zarážka (dummy head) - prvek navíc, který nenese data, zjednoduší operaci **`delete`.**

Ovlivní implementaci dalších operací!

Shrnutí seznamu



- Jedna z nejzákladnějších DS ve výpočetní technice
  (používá se k implementaci jiných DS, stack, queue,…)
- Kontejner s rychlým přístupem ke všem prvkům bez upřednostnění konců
- Optimalizovaný pro vkládání a mazání prvků v libovolné pozici – v místě ukazovátka
- Nemá možnost indexovaného přístupu

- Lineární
- Homogenní
- Dynamický

Reference

- Jan Honzík: Programovací techniky, skripta, VUT Brno, 19xx
- Karel Richta: Datové struktury, skripta pro postgraduální studium, ČVUT Praha, 1990
- Bohuslav Hudec: Programovací techniky, skripta, ČVUT Praha, 1993
- Miroslav Beneš: Abstraktní datové typy, Katedra informatiky FEI VŠB-TU Ostrava. (Pozor, má jinak šipky a jiný seznam) http://www.cs.vsb.cz/benes/vyuka/upr/texty/adt/index.html
- Aho, Hopcroft, Ullman: Data Structures and Algorithms, Addison-Wesley,1987

Reference

- Steven Skiena: The Algorithm Design Manual, Springer-Verlag New York, 1998 http://www.cs.sunysb.edu/~algorith
- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: Introduction to Algorithms, MIT Press, 1990
- Code exapmples: M.A.Weiss: Data Structures and Problem Solving using JAVA, Addison Wesley, 2001, code web page: http://www.cs.fiu.edu/~weiss/dsj2/code/code.html
- Paul E. Black, "abstract data type", in *Dictionary of Algorithms and Data Structures* [online], Paul E. Black, ed., U.S. National Institute of Standards and Technology. 10 February 2005. (accessed 10.2006) Available from: http://www.nist.gov/dads/HTML/abstractDataType.html
- "Abstract data type." Wikipedia, The Free Encyclopedia. 28 Sep 2006, 19:52 UTC. Wikimedia Foundation, Inc. 25 Oct 2006

  http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Abstract_data_type&oldid=78362071