7. Přehled rozdělení

I. Diskrétní rozdělení

1. Rovnoměrné rozdělení.

Náhodná veličina X má diskrétní rovnoměrné rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, M-1\}$ s pravděpodobnostmi $P(X = k) = p(k) = \frac{1}{M}$.

Je pak $E(X) = \frac{1}{2}(M-1)$ a $D(X) = \frac{1}{12}(M^2 - 1)$. ∎

2. Alternativní rozdělení.

Náhodná veličina X má alternativní rozdělení, jestliže nabývá hodnot $\{0, 1\}$ s pravděpodobnostmi $P(X = 0) = 1 - p,\ P(X) = 1 = p,\ 0 < p < 1$.

Je pak $E(X) = p$ a $D(X) = p(1 - p)$. ∎

3. Binomické rozdělení$Bi(n, p)$.

Náhodná veličina X má binomické rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ s pravděpodobnostmi

$$P(X = k) = p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n.$$

Je pak $E(X) = np$ a $D(X) = np(1 - p)$. ∎

4. Geometrické rozdělení.

Náhodná veličina X má geometrické rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, \ldots\}$ s pravděpodobnostmi $P(X = k) = p(k) = p(1-p)^{k-1},\ k \in \boldsymbol{N},\ 0 < p < 1$.

Je pak $E(X) = \frac{1}{p}$ a $D(X) = \frac{1}{p}(\frac{1}{p} - 1)$. ∎

5. Poissonovo rozdělení $Po(\lambda),\ \lambda > 0$.

Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, jestliže nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, \}$ s pravděpodobnostmi $P(X = k) = p(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k \geq 0$.

Je pak $E(X) = D(X) = \lambda$. Pro $n \geq 30$ a $p \leq 0,1$ lze nahradit binomické rozdělení $Bi(n, p)$ rozdělením Poissonovým $Po(np)$. ∎

5. Hypergeometrické rozdělení s parametry (N, M, n).

Náhodná veličina X má hypergeometrické rozdělení, jestliže se řídí tímto schematem. Máme N prvků a z nich má $M,\ 0 \leq M \leq N$ sledovanou vlastnost. Náhodně z nich vybereme $n,\ 0 \leq n \leq N$ prvků. Náhodná veličina X je rovna počtu prvků sledované vlastnosti ve výběru. X nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, min\{n, M\}\}$ s pravděpodobnostmi

$$P(X = k) = p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ 0 \leq k \leq n.$$

Je pak $E(X) = n\frac{M}{N}$ a $D(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$. ∎

II. Spojitá rozdělení

6. Rovnoměrné rozdělení v intervalu (a, b).

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení, jestliže nabývá hodnot z intervalu (a, b), tak, že každá hodnota je stejně pravděpodobná. Rovnoměrné rozdělení se velice často zadává pomocí střední hodnoty, t.j. středu $\mu = \frac{1}{2}(a+b)$ intervalu (a, b) a polovinou jeho délky $h = \frac{1}{2}(b-a)$. Rozdělení je pak rovnoměrné v intervalu $(\mu-h, \mu+h)$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ a $h > 0$. Hustota náhodné veličiny je tudíž konstantní v intervalu $(a, b) = (\mu-h, \mu+h)$, tedy

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{rl} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x \notin (a, b). \end{array} \right. \qquad f(x) = \left\langle \begin{array}{rl} \frac{1}{2h}, & \mu-h < x < \mu+h, \\ 0, & x \notin (\mu-h, \mu+h). \end{array} \right.$$

Je pak $E(X) = \frac{1}{2}(a+b) = \mu$ a $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{h^2}{3}$.

Distribuční funkce F je lineární funkcí v intervalu (a, b) a je

$$F(x) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{array} \right. \qquad F(x) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & x \le \mu-h, \\ \frac{x-\mu+h}{2h}, & \mu-h < x < \mu+h, \\ 1, & x \ge \mu+h. \end{array} \right.$$

■

7. Normální rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$. Náhodná veličina X má rozdělení, jestliže má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in \boldsymbol{R}.$$

Hustota je symetrická kolem hodnoty μ a tedy je pak $E(X) = \mu$ a $D(X) = \sigma^2$.

Distribuční funkce F je dána vztahem

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t, \; x \in \boldsymbol{R}$$

a nedá se vyjádřit pomocí elementárních funkcí. ■

8. Normované normální rozdělení $N(0; 1)$.

Náhodná veličina U má normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, má hustotu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \; x \in \boldsymbol{R}$$

a distribuční funkci Φ určenou vztahem

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t, \; x \in \boldsymbol{R}.$$

Pro hustotu a distribuční funkci platí:

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Jestliže má náhodná veličina X normální rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$, má pak náhodná veličina U,

$$U = \frac{X-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \sigma U + \mu,$$

normované normální rozdělení $N(0;1)$. Jestliže si označíme F distribuční funkci náhodné veličiny X, pak platí;

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow F(\sigma t + \mu) = \phi(t).$$

Je tedy

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

■

9. Exponenciální rozdělení $Exp(A;\delta),\ \delta > 0$.
Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & x < A, \\ \frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-\frac{x-A}{\delta}}, & x \geq A \end{array} \right.$$

a distribuční funkci

$$F(x) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & x < A, \\ 1 - e^{-\frac{x-A}{\delta}}, & x \geq A. \end{array} \right.$$

Tato náhodná veličina nabývá hodnot z intervalu $\langle A, \infty)$ a je $E(X) = A + \delta$ a $D(X) = \delta^2$.
Náhodná veličina $V = \frac{X-A}{\delta}$ má pak rozdělení $Exp(0;1)$ a tedy obecné exponenciální rozdělení snadno převedeme na rozdělení s parametry $A = 0$ a $\delta = 1$. Toto rozdělení můžeme považovat za *normované exponenciální rozdělení.* Jsou-li f, resp g, hustoty a F, resp. G, distribuční funkce náhodné veličiny X, resp. V je

$$f(x) = \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x-A}{\delta}\right) \Leftrightarrow \delta f(\delta t + A) = g(t) \text{ a } F(x) = G\left(\frac{x-A}{\delta}\right) \Leftrightarrow F(\delta t + A) = G(t).$$

■

10. Cauchyovo rozdělení
Náhodná veličina X má hustotu f a distribuční funkci F, kde

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{a} \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg} x\right),\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Rozdělení je symetrické kolem nuly, je $f(x) = f(-x)$ a $F(x) + F(-x) = 1$. Náhodná veličina s tímto rozdělením nemá konečnou střední hodnotu a rozptyl. ■

11. Laplaceovo rozdělení
Náhodná veličina X má hustotu f a distribuční funkci F, kde

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} \quad \text{a} \quad F(x) = \left\langle \begin{array}{rl} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x \geq 0, \end{array} \right. \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Rozdělení je symetrické kolem nuly, je $f(x) = f(-x)$ a $F(x) + F(-x) = 1$. Je dále $E(X) = 0$ a $D(X) = 2$. ■

Jiné číselné charakteristiky

7.1.Definice: Momenty náhodné veličiny Pro náhodnou veličinu X definujeme pro $k \in \boldsymbol{N}$ *$k-$tý obecný moment* vztahem

$$\mu_k'(X) = \mu_k' = E(X^k)$$

a *k−tý centrální moment* vztahem

$$\mu_k(X) = \mu_k = E([X - E(X)]^k),$$

pokud konečné hodnoty existují. ■

Poznámka: Je $\mu'_1(X) = E(X),\ \mu_1(X) = 0$ a $\mu_2(X) = D(X)$.
Jestliže definujeme $\mu_0 = \mu'_0 = 1$, je podle binomické věty

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \mu'_i (\mu'_1)^{k-i}.$$

7.2. Definice: Koeficienty šikmosti a špičatosti. Pro náhodnou veličinu X definujeme *koeficient šikmosti* vztahem

$$\alpha(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$$

a *koeficient špičatosti* vztahem

$$\varepsilon(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3.$$

■

Poznámka: Tyto koeficienty se používají k podrobnějšímu popisu rozdělení pravděpodobnosti. Pro symetrické rozdělení je koeficient šikmosti $\alpha(X) = 0$. Je-li $\alpha(X) > 0$, pak je rozdělení vychýlené vpravo, pro $\alpha(X) < 0$ je vychýlené vlevo. Pro normální rozdělení je koeficient špičatosti $\varepsilon(X) = 0$. Rozdělení, pro které je $\varepsilon(X) > 0$ je hustota více koncentrována ke střední hodnotě než normální rozdělení a pro $\varepsilon(X) < 0$ je průběh hustoty plošší než je průběh hustoty normálního rozdělení.

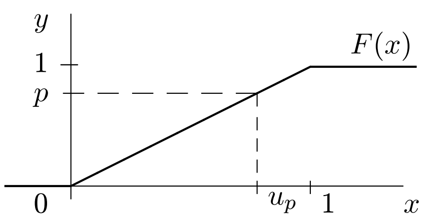
Poznámka: Jako další se velice často, zejména ve statistice používají kvantily. Budeme je nejdříve definovat pro specielní případ distribuční funkce, který je v aplikacích nejčastnější.

7.3.Definice: Kvantily. Nechť má náhodná veličina spojité rozdělení takové, že je jeho distribuční funkce F spojitá a rostoucí v intervalu (a, b) a $F(a+) = 0,\ F(b-) = 1$, tedy náhodná veličina nabývá hodnot poze z intervalu (a, b). Potom pro číslo $p,\ 0 < p < 1$, definujeme $p - kvantil$, či $100p\% - kvantil$, jako hodnotu x_p, pro kterou platí:

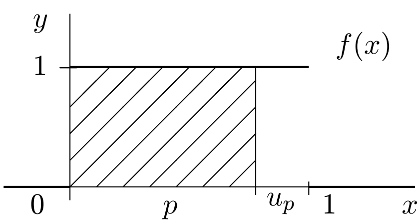
$$P(X \leq x_p) = p \Leftrightarrow F(x_p) = p \Leftrightarrow x_p = F^{-1}(p).$$

7.4. Definice: Kvantilová funkce je definována předpisem
$Q : (0, 1) \to \boldsymbol{R}, \quad Q(p) = x_p = F^{-1}(p).$

Její hodnoty určují mez, při které dosáhne pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny požadované hodnoty p.



Obr. 6.1a



Obr 6.1b

7.5.Definice: Kvantil náhodné veličiny. Je-li F distribuční funkce náhodné veličiny X, pak pro číslo $0 < p < 1$ definujeme $p-$ *kvantil*, resp. $100p\% -$ *kvantil* jako hodnotu x_p, pro kterou je

$$F(x_p-) \leq p, \ F(x_p+) \geq p.$$

Některé kvantily mají speciální názvy:

$x_{0,5} = \tilde{x}$ - *medián;*
$x_{0,25}$ – *dolní kvartil;*
$x_{0,75}$ – *horní kvartil;*
kvantily pro $p = 0,1.0,2, \ldots, 0,9$ – *decily;*
kvantily pro $p = 0,01,\ 0,02, \ldots, 0,99$ – *percentily.*

7.6.Poznámka: Kvantily rovnoměrného rozdělení. Pro distribuční funkci F rovnoměrného rozdělení v intervalu (a, b) platí podle 5.9 vyjádření:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

Pro kvantily x_p odtud dostaneme

$$F(x_p) = p \Leftrightarrow \frac{x-a}{b-a} = p \Rightarrow x_p = a + p(b-a).$$

Všimneme si, že pro medián dostaneme $x_{0,5} = \frac{1}{2}(b+a) = E(X)$, což je střed intervalu.

Pokud je interval pro náhodnou veličinou zadán svým středem $\mu = \frac{1}{2}(a+b)$ a rozpětím $h = \frac{1}{2}(b-a)$, tedy $a = \mu - h$ a $b = \mu + h$, je pak $x_p = \mu + h(2p-1)$.

7.7. Definice: Modus. Hodnota $\hat{x}$, ve které má hustota či pravděpodobnostní funkce maximum se nazývá *modus.*

7.8. Věta: Čebyševova nerovnost Jestliže má náhodná veličina X konečnou střední hodnotu a rozptyl, pak platí odhady:

$$P_1 = P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

$$P_2 = P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$