3. Podmíněná pravděpodobnost a Bayesův vzorec

3.1. Definice: Podmíněné jevy. Je-li $\mathscr{S}$ jevové pole a $A,\, B \in \mathscr{S},\ P(B) > 0$, jsou náhodné jevy, pak zúžení náhodného jevu A, podmínkou, že nastal jev B nazýváme *podmíněným jevem* a značíme jej A/B. O jevu B mluvíme jako o *hypotéze.*

3.2. Věta: Systém $\mathscr{S}_B$ všech podmíněných náhodných jevů $\{A/B :\ A \in \mathscr{S}\}$ má strukturu jevového pole.

3.3. Příklad: Volíme náhodně přirozená čísla mezi 1 a 100 tak, že je každá volba stejně pravděpodobná. Náhodný jev A je výběr čísla dělitelného 5 a náhodný jev B je, že vybrané číslo je menší než 70. Podmíněný jev A/B je náhodný jev, že vybrané číslo je menší než 70 a je dělitelné 5.

Vypočtěme jeho pravděpodobnost. Přirozených čísel menších než 70 je celkem 69 a dělitelných 5 je 13. Podle klasické definice pravděpodobnosti je tedy $P(A/B) = \dfrac{13}{69}$.

Počítejme nyní jinak. Všech čísel je 100, čísel menších než 70 je 69 a čísel dělitelných 5 a menších než 70 je 13. Je $P(B) = \dfrac{69}{100}$, $P(A \cap B) = \dfrac{13}{100}$ a tedy

$$P(A/B) = \frac{13}{69} = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{69}{100}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3.4. Definice: Podmíněná pravděpodobnost. Nechť $\mathscr{S}$ je jevové pole s pravděpodobností P a $B \in \mathscr{S}$ je náhodný jev, pro který je $P(B) > 0$. Pak funkce P_B definovaná na jevovém poli $\mathscr{S}_B$ podmíněných náhodných jevů předpisem

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

má vlastnosti pravděpodobnosti. Nazýváme ji *podmíněnou pravděpodobností.*

3.5. Poznámka: Vzorec z definice velice často používáme k výpočtu pravděpodobnosti průniku náhodných jevů. Je
$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$.

3.6. Příklad: Ve 100 žárovkách je 9 vadných. Náhodně koupíme 2. Jaká je pravděpodobnost náhodného jevu A, kdy jsou obě vadné.

Řešení: Budeme úlohu řešit nejprve pomocí klasické definice pravděpodobnosti. Všech možných dvojic ze sta je $\binom{100}{2} = \dfrac{100.99}{1.2} = 4950$ a počet dvojic vadných je $\binom{9}{2} = \dfrac{9.8}{1.2} = 36$. Pravděpodobnost výběru vadné dvojice je tedy $P = \frac{36}{4950} = 0,0072\overline{72}$.

Úlohu můžeme řešit pomocí podmíněné pravděpodobnosti. K tomu, abychom vybrali dvě vadné, musíme vybrat poprvé vadnou, jev B. Potom je $P(B) = \frac{9}{100}$. Při výběru druhé, je pravděpodobnost výběru vadná žárovky rovna $P(A/B) = \frac{8}{99}$. Potom je pravděpodobnost výběru dvojice vadných žárovek rovna
$P(A) = P(A/B).P(B) = \frac{9}{100} \cdot \frac{8}{99} = \frac{72}{9900} = 0,0072\overline{72}$.

3.7. Definice: Závislost a nezávislost náhodných jevů. Nechť $\mathscr{S}$ je jevové pole s pravděpodobností P. Je-li náhodný jev $B \in \mathscr{S}$, $P(B) > 0$, pak říkáme, že náhodný jev $A \in \mathscr{S}$ *nezávisí* na náhodném jevu B, jestliže je $P(A/B) = P(A)$.

Poznámka: Ukažme si další vlastnosti nezávislých jevů. Je-li $P(A) > 0$ a náhodný jev A nezávisí na náhodném jev B, pak z podmínky nezávislosti postupně plyne:
$P(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A).P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow$
$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$. Platí tedy následující tvrzení.

3.8. Věta: Pro náhodné jevy A a B z jevového pole $\mathscr{S}$ jsou tyto podmínky ekvivalentní:
1. Náhodný jev A nezávisí na náhodném jevu B, t.j. $P(A/B) = P(A)$.
2. Náhodný jev B nezávisí na náhodném jevu A, t.j. $P(B/A) = P(B)$.

3. Je $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. ∎

Poznámka: Podmínka z uvedené věty ukazuje, že relace nezávislosti je symetrická. Pokud náhodný jev A nezávisí na náhodném jevu B, pak náhodný jev B nezávisí na náhodném jevu A. To nás opravňuje k následující definici.

3.9. Definice: Nezávislost náhodných jevů. Jestliže pro náhodné jevy A a B je $P(A/B) = P(A)$, nebo $P(B/A) = P(B)$, pak říkáme, že jsou náhodné jevy A a B *nezávislé.* Pokud nejsou náhodné jevy nezávislé, pak říkáme, že jsou *závislé.* ∎

3.10. Příklad: Stroj vyřezává součástky obdélníkového tvaru. Při proměření 200 součástek bylo zjištěno:
- jen délka je mimo toleranci u 10 součástek;
- jen šířka je mimo toleranci u 15 součástek;
- jsou mimo toleranci oba rozměry u 43 součástek.

Jsou náhodné jevy $A-$ překročení tolerance v délce a $B-$ překročení tolerance v šířce závislé či nezávislé.

Řešení: Náhodný jev A nastane u 200 součástek v $43 + 10 = 53$ případech, náhodný jev B nastane v $43 + 15 = 58$ případech a náhodný jev $A \cap B$ v 43 případech. Je tedy

$$P(A) = \frac{53}{200} = 0,265, \quad P(B) = \frac{58}{200} = 0,29, \quad P(A \cap B) = \frac{43}{200} = 0,215.$$

Z podmínky pro nezávislost dostaneme:
$P(A).P(B) = 0,265.0,29 = 0,07685 \neq P(A \cap B) = 0,215.$
To znamená, že sledované náhodné jevy jsou závislé.

Poznamenejme ještě, že podmíněné pravděpodobnosti jsou

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,215}{0,29} = 0,7414 \neq P(A) = 0,265,$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,215}{0,265} = 0,8113 \neq P(B) = 0,29.$$

■

Vzorec pro úplnou pravděpodobnost.

3.11. Věta: Vzorec pro úplnou pravděpodobnost. Nechť P je pravděpodobnost na jevovém poli $\mathscr{S}$ a systém náhodných jevů $\{B_i \in \mathscr{S},\ 1 \leq i \leq n\}$ splňuje tyto podmínky:

a) náhodné jevy jsou po dvou disjunktní, tj. pro $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$ je $B_i \cap B_j = V$;

b) systém jevů je rozkladem jevového pole, t.j. $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i = U$,

pak pro náhodné jevy $A \in \mathscr{S}$ je

$$(\clubsuit) \qquad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i).P(B_i).$$

Důkaz: Z podmínky a) vyplývá, že pro každý jev $A \in \mathscr{S}$ pro $i \neq j$ je $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = V$ a z podmínky b) plyne, že $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (A \cap B_i)$. Potom z vlastnosti 8 pravděpodobnosti z odst. 2.27 je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i).P(B_i),$$

když na vyjádření pravděpodobností průniků použijeme vzorec z odst. 3.5. ■

3.12. Příklad: Obchod má zboží od dvou výrobců:
1. výrobce dodává 30% a z toho je 80% první jakosti;
2. výrobce dodává 70% a z toho je 85% první jakosti.
Určete pravděpododnost náhodného jevu $A-$ náhodně koupený výrobek je první jakosti.

Řešení: K výpočtu použijeme Bayesova vzorce, kde za hypotézy volíme výběr výrobce. Je-li $B_i,\ i = 1, 2$ koupě od $i-$tého výrobce, pak je

$P(B_1) = 0,3$ a $P(B_2) = 0,7$. Pokud víme, od kterého výrobce máme zakoupený výrobek, známe i požadovanou pravděpodobnost. Jsou to podmíněné pravděpodobnosti $P(A/B_1) = 0,8$ a $P(A/B_2) = 0,85$. Podle vzorce (♣) je

$$P(A) = P(A/B_1).P(B_1)+P(A/B_2).P(B_2) = 0,8.0,3+0,85.0,7 = 0,835.$$

3.13. Věta: Bayesův vzorec. Za předpokladů, které jsou uvedeny ve větě 3.11, je

$$(\clubsuit\clubsuit) \qquad P(B_k/A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_k).P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A/B_i).P(B_i)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Poznámka: Všimneme si, že hledaná pravděpodobnost je podílem $k-$tého sčítance a celého součtu.

3.14. Příklad: Pro zadání z příkladu 3.12 vypočtěte pravděpodobnosti toho, že zakoupený výrobek 1. jakosti je jednak od prvního a jednak od druhého výrobce.

Řešení: Víme, že jsme koupili výrobek 1. jakosti, nastal náhodný jev A a zajímají nás pravděpodobnosti koupě u jednotlivých výrobců, hypotézy $B_1,\ B_2$. Hledáme tedy pravděpodobnosti $P(B_1/A)$ a $P(B_2/A)$. Podle vzorců (♣), (♣♣) a z výsledků příkladu 3.12 plyne:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1).P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,24}{0,835} = 0,28743$$

a

$$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2).P(B_2)}{P(A)} = \frac{0,595}{0,835} = 0,71257.$$

■