1.5 Turingův stroj

1.5.1 Turingův stroj si můžeme představit takto: skládá se

- z řídící jednotky, která se může nacházet v jednom z konečně mnoha stavů,
- potenciálně nekonečné pásky (nekonečné na obě strany) rozdělené na jednotlivá pole a
- hlavy, která umožňuje číst obsah polí a přepisovat obsah polí pásky.

Na základě symbolu X, který čte hlava na pásce, a na základě stavu q, ve kterém se nachází řídící jednotka, se řídící jednotka Turingova stroje přesune do stavu p, hlava přepíše obsah čteného pole na Y a přesune se buď doprava nebo doleva (tato akce je popsána tzv. přechodovou funkcí).

1.5.2 Formální definice. Turingův stroj je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů,
- Γ je konečná množina páskových symbolů, přítom $\Sigma \subset \Gamma$,
- B je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj. $B \in \Gamma \setminus \Sigma$),
- δ je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny $(Q \setminus F) \times \Gamma$ do množiny $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, (zde L znamená pohyb hlavy o jedno pole doleva, R znamená pohyb hlavy o jedno pole doprava),
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

1.5.3 Situace. Situaci Turingova stroje, v angličtině nazývané instantaneous description (ID), plně popisuje obsah pásky, pozice hlavy na pásce a stav, ve kterém se nachází řídící jednotka. Jestliže na pásce jsou v k polích symboly $X_1\, X_2\, \ldots\, X_k$, všechna pole s větším i menším číslem již obsahují pouze B, řídící jednotka je ve stavu q a hlava čte symbol X_i, tak danou situaci zapisujeme

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k.$$

1.5.4 Počáteční situace. Na začátku práce se Turingův stroj nachází v počátečním stavu q_0, na pásce má na n polích vstupní slovo $a_1\, a_2\, \ldots\, a_n$ $(a_i \in \Sigma)$, ostatní pole obsahují blank B a hlava čte pole pásky se symbolem a_1. Tedy formálně počáteční situaci zapisujeme $q_0\, a_1\, \ldots\, a_n$.

1.5.5 Krok Turingova stroje. Předpokládejme, že se Turingův stroj nachází v situaci $X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,q\,X_i\,\ldots\,X_k$. Pak v jednom kroku udělá následující:

Jestliže $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$, stroj se přesune do stavu p, na pásku místo symbolu X_i napíše symbol Y a hlavu posune o jedno pole doprava. Formálně:

$$X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,q\,X_i\,\ldots\,X_k \vdash X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,Y\,p\,X_{i+1}\,\ldots\,X_k. \tag{1.5}$$

Jestliže $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, stroj se přesune do stavu p, na pásku místo symbolu X_i napíše symbol Y a hlavu posune o jedno pole doleva. Formálně:

$$X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,q\,X_i\,\ldots\,X_k \vdash X_1\,\ldots\,X_{i-2}\,p\,X_{i-1}\,Y\,X_{i+1}\,\ldots\,X_k. \tag{1.6}$$

Jestliže v případě 1.8 je $i = 1$, pak $q\,X_1\,\ldots\,X_k \vdash p\,B\,Y\,\ldots\,X_k$.

Jestliže $\delta(q, X_i)$ není definováno, stroj se neúspěšně zastaví.

1.5.6 Výpočet Turingova stroje nad slovem w, $w = a_1 a_2 \ldots a_k$, je posloupnost jeho kroků, která začíná v počáteční situaci $q_0\,a_1\,\ldots\,a_k$. Tedy jedná se o reflexivní s tranzitivní uzávěr $\vdash^\star$ relace $\vdash$ z 1.5.5 (na množině všech situací daného Turingova stroje).

Jestliže výpočet Turingova stroje nad slovem w takový, že se stroj dostane do jednoho z koncových stavů $q' \in F$, stroj se úspěšně zastaví. Obsah pásky při úspěšném zastavení je *výstupem*, který Turingův stroj vydá na vstup $w = a_1\,a_2 \ldots a_n$.

1.5.7 Výstup Turingova stroje je zobrazení, které každému vstupu, na němž se Turingův stroj úspěšně zastaví, přiřadí obsah pásky v okamžiku zastavení. O zobrazení pak říkáme, že bylo *realizováno* Turingovým strojem.

1.5.8 Časová složitost Turingova stroje je parciální zobrazení $T(n)$ z množiny všech přirozených čísel do sebe definované:

Jestliže pro nějaký vstup délky n se Turingův stroj nezastaví, $T(n)$ není definováno. V opačném případě je $T(n)$ rovno maximálnímu počtu kroků, po nichž dojde k zastavení Turingova stroje, kde maximum se bere přes všechny vstupy délky n.

1.5.9 Paměťová složitost Turingova stroje je parciální zobrazení $S(n)$ z množiny všech přirozených čísel do sebe definované:

Jestliže pro nějaký vstup délky n se Turingův stroj nezastaví, $S(n)$ není definováno. V opačném případě je $S(n)$ rovno největšímu rozdílu pořadových čísel buněk, které byly během výpočtu použity než došlo k zastavení Turingova stroje, kde maximum se bere přes všechny vstupy délky n.

1.5.10 Jazyk přijímaný Turingovým strojem. Turingův stroj se používá také jako akceptor. V tomto případě záleží pouze na tom, zda se Turingův stroj zastaví úspěšně, nebo neúspěšně, nebo nezastaví vůbec. Vstupní slovo $w \in \Sigma^\star$ je *přijato* Turingovým strojem právě tehdy, když se Turingův stroj na slově w uspěšně zastaví. Množinu slov $w \in \Sigma^\star$, které Turingův stroj přijímá, se nazývá *jazyk příjímaný* Turingovým strojem M a značíme ho $L(M)$.

1.5.11 Jazyk rozhodovaný Turingovým stroje. Turingův stroj *rozhoduje* jazyk L, jestliže tento jazyk přijímá a navíc se na každém vstupu zastaví.

To znamená, že každý jazyk, který je rozhodován Turingovým strojem, je také tímto Turingovým strojem přijímán. Naopak to ale neplatí. Uvidíme, že existují jazyky, které jsou přijímány nějakým Turingovým strojem, ale neexistuje Turingův stroj, který by je rozhodl.

1.5.12 Poznámka. Základní model Turingova stroje, tak jak jsme ho uvedli v minulých odstavcích, není jediným modelem. Jiná varianta Turingva stroje pracuje s nekonečnou páskou s pevným levým okrajem. U tohoto modelu se TM neúspěšně zastaví i v případě, že hlava čte nejvíc levé pole pásky a přechodová funkce nařizuje pohyb hlavy doleva. Počáteční situace TM s pevným levým krajem má vždy vstupní slovo napsané na začátku pásky.

Dalším varianty umožňují hlavě Turingova stroje, aby se nepohnula. To znamená, že přechodová funkce δ je parciální zobrazení z $Q \times \Gamma$ do $Q \times \Gamma \times \{R, L, S\}$, kde symbol S znamená, že hlava čte stejné pole.

Všechny tyto modely jsou ekvivalentní v tom smyslu, že pro každý Turingův stroj M_1 jednoho typu existuje Turingův stroj M_2 jiného typu tak, že oba stroje realizují stejné zobrazení / přijímají nebo rozhodují stejný jazyk.

1.5.13 Turingův stroj s k páskami. Turingův stroj s k páskami se skládá z řídící jednotky, která se nachází v jednom z konečně mnoha stavů $q \in Q$, množiny vstupních symbolů Σ, množiny páskových symbolů Γ, přechodové funkce δ, počátečního stavu q_0, páskového symbolu B a množiny koncových stavů F. Dále je dáno k pásek a k hlav; i-tá hlava vždy čte jedno pole i-té pásky. Přechodová funkce δ je parciální zobrazení, které reaguje na stav, ve kterém se Turingův stroj nachází a na k-tici páskových symbolů, kterou jednotlivé hlavy snímají. (Formálně je δ parciální zobrazení, $\delta\colon Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$).

Na začátku:

1. Vstupní slovo je na první pásce, kromě vstupního slova obsahují všechna pole pásky blank B.
2. Všechny ostatní pásky mají ve všech polích blank B.
3. Řídící jednotka je v počátečním stavu q_0.
4. První hlava čte první symbol vstupního slova.

1.5.14 Krok Turingova stroje s k páskami je udán přechodovou funkcí. Jestliže přechodová funkce je definována, pak (na základě přechodové funkce):

1. Řídící jednotka se přesune do nového stavu.
2. Každá hlava přepíše obsah pole, které čte (může i stejným symbolem).
3. Každá hlava se posune doprava nebo doleva (podle přechodové funkce).

1.5.15 Jazyk přijímaný Turingovým strojem. Turingův stroj se úspěšně zastaví, jestliže řídící jednotka vstoupila do koncového stavu. Jestliže Turingův stroj nemá definován následující krok a není v koncovém stavu, říkáme, že se Turingův stroj neúspěšně zastavil.

Slovo $w \in \Sigma^\star$ je *přijímáno* Turingovým strojem, jestliže se na něm Turingův stroj úspěšně zastaví. Všechna slova přijímána Turingovým strojem tvoří *jazyk přijímaný* tímto strojem. Jestliže se navíc Turingův stroj na všech slovech zastaví, říkáme že Turingův stroj *rozhoduje* L.

1.5.16 Poznámka. Na každý Turingův stroj s jednou páskou se můžeme dívat jako na Turingův stroj s k páskami, kde $k = 1$. Proto Turingův stroj s jednou páskou je zvláštní případ Turingova stroje s k páskami.

Stejně jako u Turingova stroje s jednou páskou i pro více pásek existuje několik variant — pásky mohou mít pevné levé konce, Turingův stroj v jednom kroku nemusí pohnout některou z hlav. Opět platí, že všechny tyto varianty maji stejnou sílu.

1.5.17 Věta. Ke každému Turingovu stroji M_1 s k páskamí existuje Turingův stroj s jednou páskou M_2, který má stejně chování jako M_1.

Navíc, jestliže M_1 potřeboval k úspěšnému zastavení n kroků, pak M_2 potřebuje $\mathcal{O}(n^2)$ kroků.

1.5.18 Nedeterministický Turingův stroj. Jestliže pro Turingův stroj (ať již s jednou páskou nebo s více páskami) připustíme, aby v jedné situaci mohl provést několik různých kroků, dostáváme nedetrministický Turingův stroj. Formálně zadefinujeme nedeterministický Turingův stroj s jednou páskou, nekonečnou na obě strany.

Nedeterministický Turingův stroj je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů,
- Γ je konečná množina páskových symbolů, přítom $\Sigma \subset \Gamma$,
- B je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj. $B \in \Gamma \setminus \Sigma$),
- δ je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny $Q \times \Gamma$ do množiny $\mathcal{P}_f(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ ($\mathcal{P}_f(X)$ je konečná podmnožina množiny X),
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Krok nedeterministického Turingova kroku je definován analogicky jako pro (deterministický) Turingův stroj:
Pro $(p, Y, R) \in \delta(q, X_i)$

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, Y\, p\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k. \tag{1.7}$$

Pro $(p, Y, L) \in \delta(q, X_i)$

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, \ldots\, X_{i-2}\, p\, X_{i-1}\, Y\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k. \tag{1.8}$$

1.5.19 Jazyk přijímaný nedeterministickým Turingovým strojem se skládá ze všech slov $w \in \Sigma^\star$, pro něž

$$q_0\, w \vdash^\star Y_1\, Y_2\, \ldots Y_i\, q_f\, Y_{i+1}\, \ldots\, Z_m,$$

pro některý koncový stav q_f.

Neformálně: slovo w je přijato nedeterministickým Turingovým strojem právě tehdy, když existuje „přijímací výpočet", tj posloupnost kroků, po nichž se stroj dostane do koncového stavu.

Jestlize nedeterministický Turingův stroj M přijímá jazyk L a navíc každý jeho výpočet vždy končí po konečně mnoha krocích, říkáme, že M *rozhoduje* jazyk L.