4. Opakované pokusy, Bernoulliho nerovnost

zcv4.tex

1. Házíme pětkrát hrací kostkou a sledujeme výskyt šestky. Spočtěte pravděpodobnosti možných výsledků a určete, který výsledek má největší pravděpodobnost. Pravděpodobnosti vyjádřete pomocí vzorce a hodnoty vyčíslete pomocí MAPLE.

$$P_5(k) = \binom{5}{k} \frac{5^{5-k}}{6^5},\ k = 0, 1, \ldots, 5;$$
$$P(0) = P(1) = 0,402,\ P(2) = 0,161,\ P(3) = 0,032,$$

2. Opakujeme 7−krát pokus, který dává jako výsledek jev A s pravděpodobností $P(A) = p$. Vypočtěte pravděpodobnosti jednotlivých výsledků a určete ty, která mají největší pravděpodobnost. Výpočet proveďte pro hodnoty
   a) $p_1 = 0,1$; *b*) $p_2 = 0,3$; *c*) $p_3 = 0,5$.

   Pravděpodobnosti vyjádřete pomocí vzorce a jednotlivé hodnoty vypočtěte pomocí MAPLE.

$$P_7(k) = \binom{7}{k} p^k (1-p)^{7-k},\ k = 0, 1, \ldots, 7.$$

3. Házíme hrací kostkou (mincí) dokud nepadne šestka (rub). Kolik musíme provést hodů, aby sledovaný jev nastal s pravděpodobností *a*) $P_a = 0,9$; *b*) $P_b = 0,99$.

   Výpočet proveďte obecně pro opakovaný pokus, ve kterém sledovaný jev má pravděpodobnost $P(A) = p$. Počet opakování vypočtěte pro hod kostkou, $p = 1/6$ a pro hod mincí, $p = 0,5$. Hodnotu vypočtěte pomocí MAPLE ze vzorce a pomocí sčítání pravděpodobností.

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)};\quad \text{kostka } n_a = 13,\ n_b = 26; \text{ mince } n_a = 4,\ n_b = 7.$$

4. Na automatické lince se objeví chyba s pravděpodobností $p = 0,005$. Kolik musí projít cyklů, aby se s pravděpodobností $P = 0,95$ objevila *a*) alespoň jedna chyba; *b*) alespoň dvě chyby.

   Podmínku pro minimální počet cyklů vyjádřete obecným vzorcem a v případě b) řešte numericky pomocí MAPLE.

$$\text{a) } n \geq \tfrac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)},\ n \geq 598;\quad \text{b) } (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \leq 1 - P,\ n \geq 947.$$

5. Házíme 100-krát mincí. Odhadněte pravděpodobnost toho, že se počet rubů bude pohybovat v rozmezí *a*) $(46, 54)$; *b*) $(40, 60)$.

   Odhad P_0 vypočtěte z Bernoulliho nerovnosti a pomocí MAPLE vypočtěte skutečnou pravděpodobnost P a porovnejte obě hodnoty.

$$\text{a) } P_0 = -\tfrac{36}{64} \doteq -0,56,\ P = 0,516; \text{ b) } P_0 = 0,75,\ P = 0,943.$$

6. Náhodný jev A nastává s pravděpodobností $P(A) = p = 0,9$. Odhadněte s jakou pravděpodobností se relativní četnost výskytu jevu A v serii 1 000 opakování liší od hodnoty p nejvýše o *a)* $\varepsilon = 0,2$; *b)* $\varepsilon = 0,1$; *c)* $\varepsilon = 0,05$.

   Odhad P_0 odvoďte z Bernoulliho nerovnosti a pro porovnání vypočtěte skutečnou pravděpodobnost P pomocí MAPLE.

   a) $P_0 = 0,998,\ P = 1$; b) $P_0 = 0,991,\ P = 1$; c) $p_0 = 0,964,\ P = 1$.

7. Házíme 1000 krát minci. Odhadněte pravděpodobnost, s jakou se počet rubů bude vyskytovat v intervalu *a)* $(480, 520)$; *b)* $(450, 550)$; *c)* $(400, 600)$.

   Odhad P_0 odvoďte z Bernoulliho nerovnosti a pro porovnání vypočtěte skutečnou hodnotu P pravděpodobnosti pomocí MAPLE.

   a) $P_0 = 0,375,\ P = 0,801$; b) $P_0 = 0,9,\ P = 0,998$; c) $P_0 = 0,975, P = 1$.

8. Provedeme serii 500 nezávislých pokusů, při kterých nastává jev A s pravděpodobností $P(A) = 0,3$. Odhadněte v jakém intervalu I_0 se středem v bodě $np = 150$ se bude počet jevů A vyskytovat s pravděpodobností *a)* $P_a = 0,9$; *b)* $P_b = 0,95$; *c)* $P_c = 0,99$.

   Interval odhadněte pomocí vztahu z Bernoulliho nerovnice a jeho skutečnou hodnotu I vypočtěte pomocí MAPLE.

   a) $I_0 = (117, 183),\ I = (133, 167)$; b) $I_0 = (104, 196),\ I = (130, 170)$; c) $I_0 = (47, 253),\ I = (124, 176)$.

9. Házíme opakovaně mincí. Odhadněte, kolik musíme provést hodů, aby relativní četnost rubů byla v toleranci $\varepsilon = 0,05$ s pravděpodobností *a)* $P_a = 0,8$; *b)* $P_b = 0,9$; *c)* $P_c = 0,99$.

   Odhad vypočtěte ze vztahu z Bernoulliho nerovnice. Umíte spočítat hodnotu přesně.

   $n \geq \dfrac{100}{1 - P}$; a) $n \geq 250$; b) $n \geq 500$; c) $n \geq 5000$.

10. Sdělovací kanál má chybovost přenosu slov 0,1%. Pošleme zprávu o 2000 slovech a požadujeme, aby se vyskytlo nejvýše 5 chyb: Jaká je pravděpodobnost dobrého přenosu zprávy.

    Hodnotu pravděpodobnosti P vyčíslete pomocí vzorce a vypočtěte její odhad P^* pomocí aproximace z Poissonovy věty. Vypočtěte obě hodnoty pomocí MAPLE.

    $$P = \sum_{k=0}^{5} \binom{2000}{k} 0,001^k . 0,999^{2000-k} \doteq 0,983; P^* = \mathrm{e}^{-2} \sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!} \doteq 0,98343.$$

11. Při přenosu zpráv ze slov je chybovost přenosu 1%. Zpráva obsahuje 150 slov. Kolik chyb smí nejvýše obsahovat, požadujeme-li pravděpodobnost dobrého přenosu

    $P = 0,95$.

Hodnotu n počtu chyb vypočtěte pomocí pravděpodobností z Bernoulliho schematu a její odhad n_0 pomocí aproximace z Poissonovy věty.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{150}{k} 0,01^k.0,99^{150-k} \leq 0,95,\ n=3; \quad \sum_{k=0}^{n_0} \mathrm{e}^{-1,5} \frac{1,5^k}{k!} \leq 0,95,\ n_0=3.$$

12. Chybovost při přenosu symbolů sdělovacím kanálem je 0,3%. Jaký počet k_0 chyb při přenosu $n = 2000$ symbolů má největší pravděpodobnost.

Hodnotu k_0 určete pomocí pravděpodobností z Bernoulliho schematu a určete její odhad m_0 pomocí aproximací z Poissonovy věty. Vypočtené hodnoty porovnejte s hodnotou np, která vychází z vlastností rozdělení.

$$P_{2000}(k) = \binom{2000}{k} 0,003^k.0,997^{2000-k},\ k=0,1,\ldots,2\,000,\ k_0=5,\ P_{2000}(5) =$$
$0,1609$;

$$P(k) = \mathrm{e}^{-6} \frac{6^k}{k!},\ k=0,1,\ldots,\ m_0=5,\ 6,\ P(5)=P(6)=0,16062.$$

13. Při přenosu symbolů se chyba objevuje s pravděpodobností a) $p_a = 0,01$, b) $p_b = 0,005$. V jakém maximálním intervalu $\langle k_1, k_2\rangle$ se bude vyskytovat počet chyb k při přenosu 1 000 symbolů, jestliže požadujeme, aby $P(k \leq k_1) \geq \alpha/2$ a $P(k \geq k_2) \geq \alpha/2$.

Meze intervalu určete pomocí pravděpodobností z Bernoulliho schematu a pro porovnání z aproximací z Poissonovy věty.

$$\sum_{k=0}^{k_1} \binom{1000}{k} p^k(1-p)^{n-k} \geq 0,05,\ \sum_{k=k_2}^{1000} \binom{1000}{k} p^k(1-p)^{n-k} \geq 0,05;$$

a) $\langle k_1, k_2\rangle = \langle 5, 14\rangle$; b) $\langle k_1, k_2\rangle = \langle 2, 8\rangle$;

$$\sum_{k=0}^{k_1} \mathrm{e}^{-1000p} \frac{(1000p)^k}{k!} \geq 0,05,\ \sum_{k=k_2}^{1000} \mathrm{e}^{-1000p} \frac{(1000p)^k}{k!} \geq 0,05;$$

a) $\langle k_1, k_2\rangle = \langle 5, 14\rangle$; b) $\langle k_1, k_2\rangle = \langle 2, 8\rangle$;