Přednáška #5: **Vnořování a simulace propojovacích sítí**

Vnořovací problém

Statický vnořovací problém: (embedding problem)

- // algoritmus = množina procesů posílajících si zprávy.
- Známe velikost a strukturu grafu procesů.
- Máme počítač s distribuovanou pamětí se známou topologií propojovací sítě (PS).
- Jak mapovat graf procesů na tento stroj, aby výpočet byl co nejefektivnější?

Dynamický vnořovací problém:

- // algoritmus = množina procesů posílajících si zprávy.
- Procesy dynamicky vznikají a zanikají, neznáme velikost ani strukturu grafu procesů, pouze máme nějaké částečné informace (např. max. # potomků jednoho rodiče).
- Máme počítač s distribuovanou pamětí se známou topologií PS.
- Jak distribuovat dynamicky vznikající procesy mezi procesory tak, aby výpočet byl co nejefektivnější?
- Alternativní přístupy: dynamické **vyvažování zátěže** nebo **migrace procesů**.

Základní definice a pojmy

Vnoření (embedding) $G \xrightarrow{\text{emb}} H$

Vnoření zdrojového grafu $G = (V(G), E(G))$ do **cílové** sítě $H = (V(H), E(H))$ $=$ **dvojice** zobrazení (φ, ξ), kde

$$\varphi : V(G) \to V(H) \qquad \text{a} \qquad \xi : E(G) \to \mathcal{P}(H)$$

($\mathcal{P}(H) =$ množina všech **cest** sítě H.)

Zatížení

(Zatížení cílových uzlů zdrojovými.)

- **Zatížení** cílového uzlu $v \in V(H)$: $\mathrm{load}(v) = |\{u \in V(G); \varphi(u) = v\}|$.
- **Zatížení** vnoření (φ, ξ): $\mathrm{load}(\varphi, \xi) = \max_{v \in V(H)} \mathrm{load}(v)$.
- **Průměrné zatížení** vnoření (φ, ξ): $\overline{\mathrm{load}}(\varphi, \xi) = \frac{1}{|V(H)|} \sum_{v \in V(H)} \mathrm{load}(v)$.
- Vnoření (φ, ξ) má **stejnoměrné zatížení**, pokud $\mathrm{load}(\varphi, \xi) = \lceil \overline{\mathrm{load}}(\varphi, \xi) \rceil$.

Expanze

(Poměr velikosti cílové sítě (= # uzlů) a zdrojového grafu (= # procesů).)

$$\mathrm{vexp}(\varphi, \xi) = \frac{|V(H)|}{|V(G)|}.$$

Dilatace

(Protažení zdrojových hran v cílové síti.)

- **Dilatace** zdrojové hrany $e \in E(G)$: $\mathrm{dil}(e) = \mathrm{len}(\xi(e))$.
- **Dilatace** vnoření (φ, ξ): $\mathrm{dil}(\varphi, \xi) = \max_{e \in E(G)} \mathrm{dil}(e)$.
- **Průměrná dilatace** vnoření (φ, ξ): $\overline{\mathrm{dil}}(\varphi, \xi) = \frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \mathrm{dil}(e)$.
- Vnoření (φ, ξ) má **stejnoměrnou dilataci**, pokud $\mathrm{dil}(\varphi, \xi) = \lceil \overline{\mathrm{dil}}(\varphi, \xi) \rceil$.

Výrok 1. *Pokud* $G \xrightarrow{\mathrm{emb}} H$ *má* $\mathrm{dil} = \mathrm{load} = 1$, *pak* $G \subset H$.
Pokud také $\mathrm{vexp} = 1$, *pak* $G =$ **kostra** H.

- **Poznámka:** Statická vnoření nemohou postihnout **dynamické chování** aplikace na cílové síti, např. velká dilatace nevadí, pokud je odpovídající cesta používána zřídka.

Linkové a uzlové zahlcení

(Komunikační zatížení cílových uzlů/linek.)

- **Linkové zahlcení** cílové linky $e_2 \in E(H)$: $\mathrm{ecng}(e_2) = |\{e_1 \in E(G); e_2 \subseteq \xi(e_1)\}|$.
- **Linkové zahlcení** vnoření (φ, ξ): $\mathrm{ecng}(\varphi, \xi) = \max_{e_2 \in E(H)} \mathrm{ecng}(e_2)$. (maximální # obrazů zdrojových hran procházejících skrz cílové linky)
- **Uzlové zahlcení** cílového uzlu $u_2 \in V(H)$: $\mathrm{ncng}(u_2) = |\{e_1 \in E(G); u_2 \in \xi(e_1)\}|$.
- Podobně: $\mathrm{ncng}(\varphi, \xi)$, $\overline{\mathrm{ecng}}(\varphi, \xi)$, $\overline{\mathrm{ncng}}(\varphi, \xi)$, a **stejnoměrná zahlcení**.

Quasiisometrické a výpočetně ekvivalentní sítě

- G a H jsou **quasiisometrické**, pokud existují vnoření $G \xrightarrow{\mathrm{emb}} H$ i $H \xrightarrow{\mathrm{emb}} G$ s konstantními hodnotami měřítek vnoření.
- H **simuluje** G se **zpomalením** h,
  jestliže jeden krok výpočtu na G může být simulován v $O(h)$ krocích na H.
- G a H jsou **výpočetně ekvivalentní sítě**, pokud G dokáže simulovat H s konstantním zpomalením a naopak.

Výrok 2. *Quasiisometrické sítě* $\Longrightarrow$ *výpočetně ekvivalentní, ale ne naopak.*

Spodní meze

Zatížení vs. expanze

Výrok 3.

$$\operatorname{load}(\varphi,\xi) \geq \max\left(1, \left\lceil \frac{1}{\operatorname{vexp}(\varphi,\xi)} \right\rceil\right).$$

Průměrový argument

Věta 4. *Jestliže* $|V(G)| = |V(H)|$ *a* $\operatorname{load}(\varphi,\xi) = 1$*, pak*

$$\operatorname{dil}(\varphi,\xi) \geq \lceil \operatorname{diam}(H) / \operatorname{diam}(G) \rceil .$$

Důkaz. Stejnoměrná dilatace cesty délky $\operatorname{diam}(G)$ mezi 2 uzly ve vzdál. $\operatorname{diam}(H)$. ♣

Dilatace vs. zahlcení

Věta 5. *Jestliže* $k = \overline{\operatorname{dil}}(\varphi,\xi)$*, pak*

$$\operatorname{ecng}(\varphi,\xi) \geq \left\lceil \frac{k|E(G)|}{|E(H)|} \right\rceil .$$

Důkaz. Čítáním obrazů hran G v H za předpokladu stejnoměrného zahlcení hran.

Vnoření do hyperkrychle

Hyperkrychle simuluje optimálně téměř každou známou propojovací topologii.

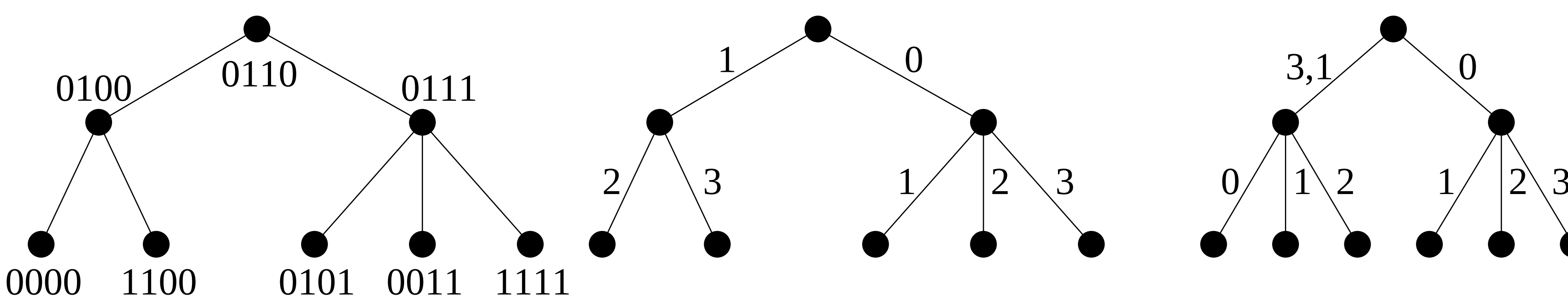
Díky **symetrii** Q_n může být vnoření $G \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ popsáno pomocí

- **značení uzlů**: ohodnocení uzlů ve $V(G)$ n-bitovými binárními adresami,

  nebo

- **značení hran**: ohodnocení hran v $E(G)$ čísly dimenzí $0, 1, .., n-1$.

Definice 6. *Q_n je* **optimální hyperkrychle** *pro $G \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ s $\mathrm{load} = 1 \iff n = \lceil \log |V(G)| \rceil$.* ♣



(a) Značení uzlů stromu vnořeného do Q_4 a $\mathrm{dil} = 1$ a $\mathrm{load} = 1$.

(b) Značení hran při témž vnoření.

(c) Značení hran jiného stromu vnořeného s $\mathrm{load} = 1$ a $\mathrm{dil} = 2$.

Lemma 7. *Nechť*

- $u, v \in V(Q_n)$ *v Hammingově vzdálenosti* $\varrho(u, v)$,
- $\delta(u, v) =$ *množina dimenzí, v kterých se* u *a* v *liší,*
- $P(u, v) =$ *cesta délky* m *v* Q_n,
- $\mathcal{P} = [p_0, p_1, .., p_{n-1}] = n$*-tice popisující hranové značení* $P(u, v)$, *kde*
  $p_j = \ \#$ *hran cesty* $P(u, v)$*, které leží v dimenzi* j.

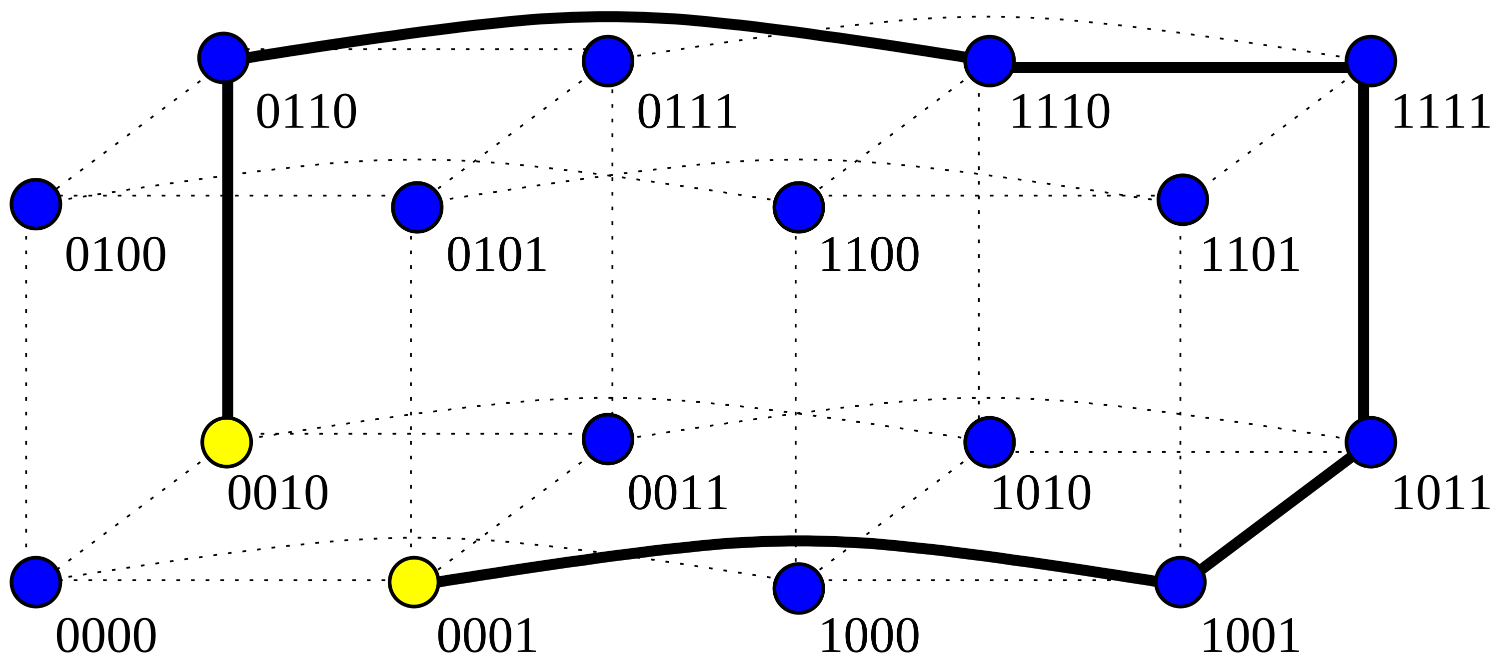
Pak platí:

- $\sum_{j=0}^{n-1} p_j = m$,
- $|\delta(u, v)| = \varrho(u, v)$,
- *každá dimenze z* $\delta(u, v)$ *se objeví v* $\mathcal{P}$ **lichý-počet** *krát a*
  každá z $n - \varrho(u, v)$ *zbývajících dimenzí se objeví v* $\mathcal{P}$ **sudý-počet** *krát,*
- $m = \varrho(u, v) \pmod 2$,
- *jestliže* $u = v$*, pak* m *je sudé (* $\Longrightarrow$ *neexistují kružnice s lichou délkou),*
- *jestliže* $P(u, v)$ *je hamiltonovská cesta v* Q_n*, pak* $\varrho(u, v)$ *je lichá.*

Důkaz a příklad

Důkaz. Plyne ze dvou elementárních faktů:

1. Přechod hyperkubické hrany = negace příslušného bitu.
2. Dvojitá negace je identita: $\overline{\overline{x_i}} = x_i$.

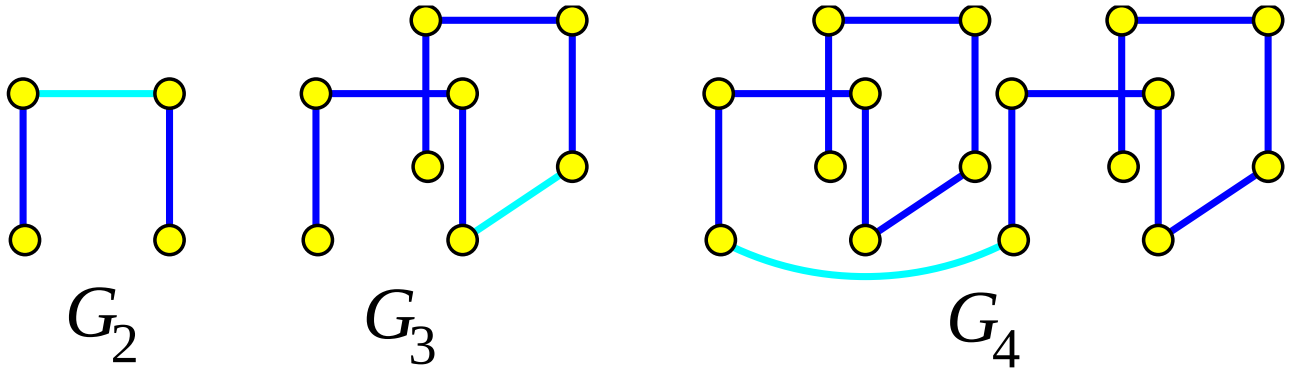


- $u = 0001$, $v = 0010 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(u,v) = 2$
- $\delta(u,v) = \{0,1\}$ a $m = 6$
- $\mathcal{P} = \{1,1,2,2\}$

Grayovo kódování

- **Grayova posloupnost** $=$ uzlové značení cesty v Q_n.
- n-**bitový Grayův kód** $=$ uzlové značení hamiltonovské cesty/kružnice v Q_n.
- $\exists$ mnoho různých Grayových kódů.
- Základní a nejpřirozenější je **Binární zrcadlový Grayův kód** (BRGC) G_n

1. $G_1 = \{0, 1\}$,
2. $G_n = \{0G_{n-1}, 1G_{n-1}^R\}$, kde
   - $0G_i$ $(1G_i)$ $=$ každý prvek G_i dostane 1-bitovou předponu 0 (1),
   - G_i^R $=$ zrcadlově otočená posloupnost G_i.



Věta 8. *BRGC zakódování binárního čísla* $b = b_{n-1} \dots b_0$ *je* $G_n(b) = g_{n-1} \dots g_0$*, kde*

1. $g_{n-1} = b_{n-1}$,

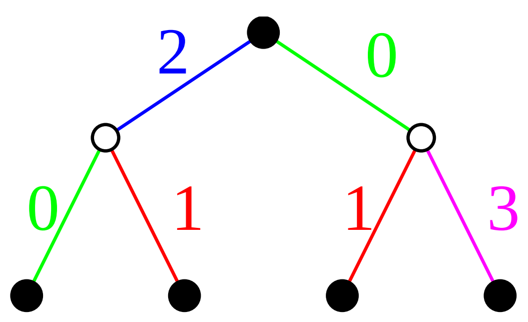
2. $g_i = b_{i+1} \operatorname{XOR} b_i$ *pro* $i = n-2, \dots, 0$. ♣

Statická vnoření stromů

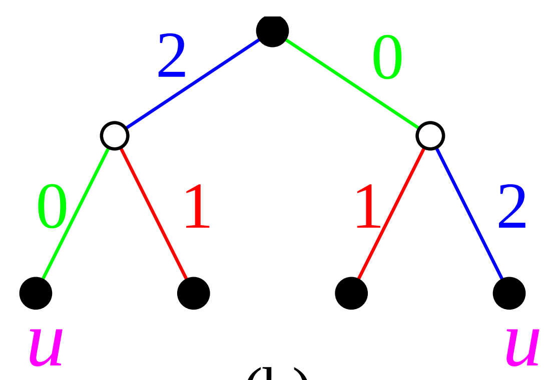
Úplné binární stromy (CBT)

- $CBT_n \not\subset Q_{n+1}$, i když $|V(CBT_n)| < |V(Q_{n+1})|$ (nepoměr v počtu černých a bílých uzlů ve 2-barvení).
- $CBT_n \subset Q_{n+2}$ (obecný důkaz je netriviální) - malý příklad je na obr. (a).
- $CBT_n \to Q_{n+1}$ s $\mathrm{dil} = 1$ a $\mathrm{load} = 2$ - malý příklad je na obr. (b). Pak

  $2^{n-2} + 2^{n-4} + \cdots$ uzlů hyperkrychle bude mít $\mathrm{load} = 2$ a
  $2^{n-1} - 2^{n-3} + \cdots$ uzlů hyperkrychle bude mít $\mathrm{load} = 0$.



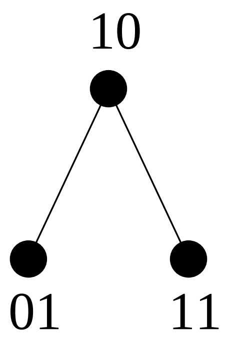
(a)



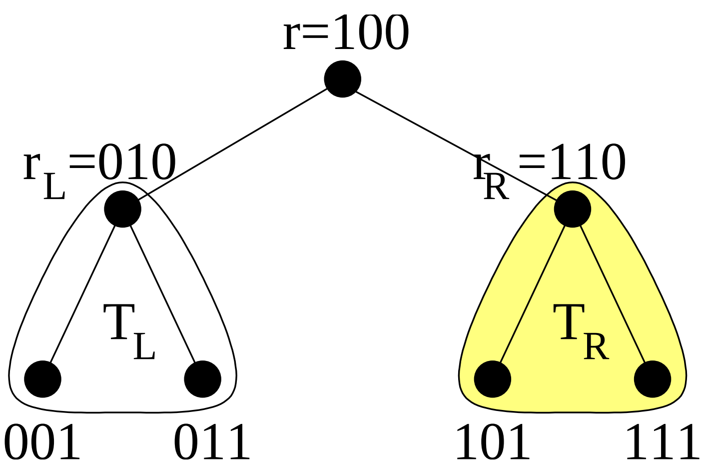
(b)

- $CBT_n \xrightarrow{\text{emb}} Q_{n+1}$ s $\text{dil} = 2$ a $\text{load} = 1$ a $\text{ecng} = 2$:

Inorder číslování počínaje číslem 1 indukuje takové vnoření.



(a) Indukční základ.



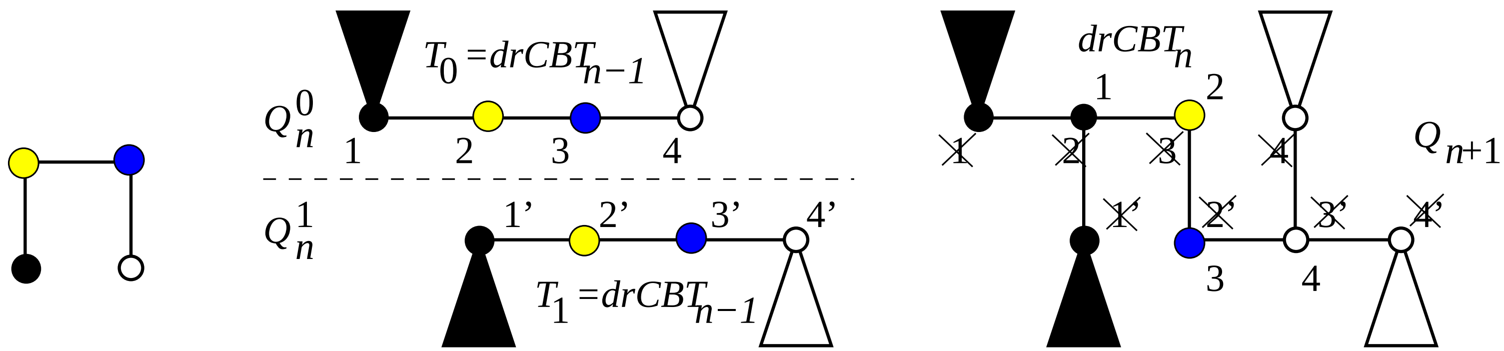
(b) Indukční krok.

- **Nejlepší a krásně rekurzivní** vnoření $CBT_n \xrightarrow{\text{emb}} Q_{n+1}$ s $\boxed{\text{dil} = 2 \text{ a } \text{load} = \text{ecng} = 1}$.
  Trik: přeměň CBT_n na **vyvážený** bipartitní graf $drCBT_n$ s 2^{n+1} uzly

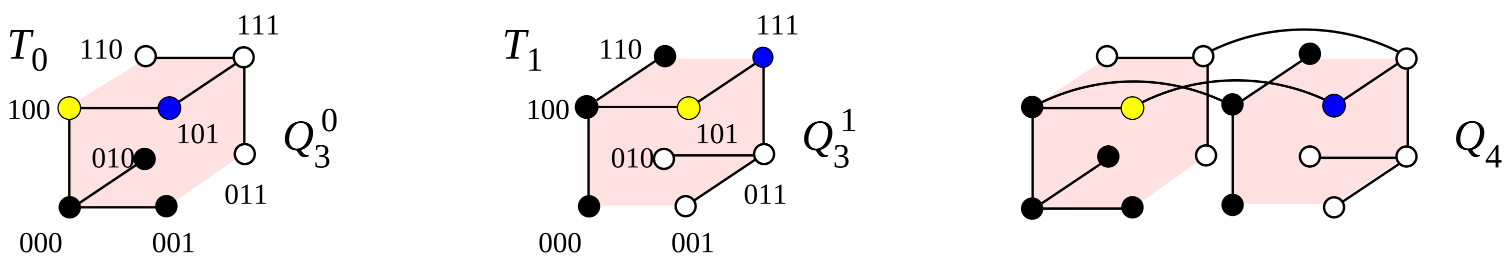
  zdvojením kořenu.

Potom

$$drCBT_n \quad \textbf{je faktorem} \quad Q_{n+1}.$$



(a) Indukční základ. (b) Indukční hypotéza v Q_n^0 a automorfismus v opačné Q_n^1. (c) Indukční krok.



(a) $T_0 \xrightarrow{\text{emb}} Q_3^0$. (b) $T_1 \equiv T_0 \xrightarrow{\text{emb}} Q_3^1$. (c) Indukční krok.

Dynamické vnoření stromu (pravděpodobnostní algoritmus)

1. Kořen stromu je umístěn do libovolného uzlu hyperkrychle.

2. Každý uzel x vnořeného stromu

   - zná **dimenzi** hyperkrychle $n \geq 1$,
   - zná svou hyperkubickou **adresu** $\varphi(x)$,
   - zná číslo své **hladiny** $l(x)$ ve stromu,
   - vypočte si **číslo cesty** $t(x) = l(x) \pmod n$, reprezentované jako n-bitové slovo s jedinou 1 na pozici $t(x)$,
   - má **náhodný generátor** svého **flip bitu** $\mathrm{fb}(x)$.

3. Jestliže listový proces x stromu vnořený do $\varphi(x)$ **porodí jednoho nebo 2 syny**, vygeneruje $\mathrm{fb}(x)$ a provede následující kroky:

if ($\mathrm{fb}(x) = 0$) **then** umísti levého syna (pokud existuje) do svého uzlu $\varphi(x)$;
umísti pravého syna (pokud existuje) do uzlu $\varphi(x)\,\mathrm{XOR}\,t(x)$;
else umísti levého syna (pokud existuje) do uzlu $\varphi(x)\,\mathrm{XOR}\,t(x)$;
umísti pravého syna (pokud existuje) do svého uzlu $\varphi(x)$.

Věta 9. *Pro strom s M uzly a pro hyperkrychli s N uzly, tento algoritmus dává* $\mathrm{dil} = 1$ *a* $\mathrm{load} = O(M/N + \log N)$ *s vysokou pravděpodobností.* ♣

Binární n-úrovňový výpočet Rozděl&Panuj (D&C)

Jednovlnový n-úrovňový D&C výpočet:

1. Kořen rozdělí problém do dvou polovin, které předá svým dvěma potomkům.
2. Potomci provedou rekurzivně totéž.
3. Na úrovni n jsou podproblémy vyřešeny listovými procesy.
4. Výsledky jsou rekurzivně předány zpět kořenu.
5. Nová vlna může začít, až se předchozí vlna vrátí do kořene.

Vícevlnový n-úrovňový D&C výpočet:

- Jednotlivé vlny, popsané výše, procházejí stromem po úrovních za sebou.

D&C na hyperkrychli

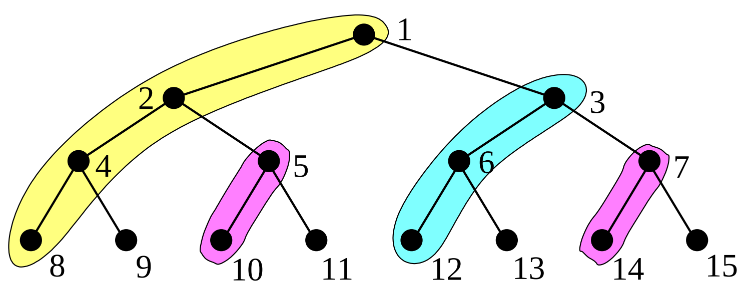
Vícevlnový D&C:
Standardní vnoření CBT_n do Q_{n+1} s $\mathrm{load} = 1$ a $\mathrm{dil} = 2$ je optimální.

Jednovlnový D&C:
Standardní vnoření CBT_n do Q_{n+1} s $\mathrm{load} = 1$ **plýtvá** 50% uzlů.

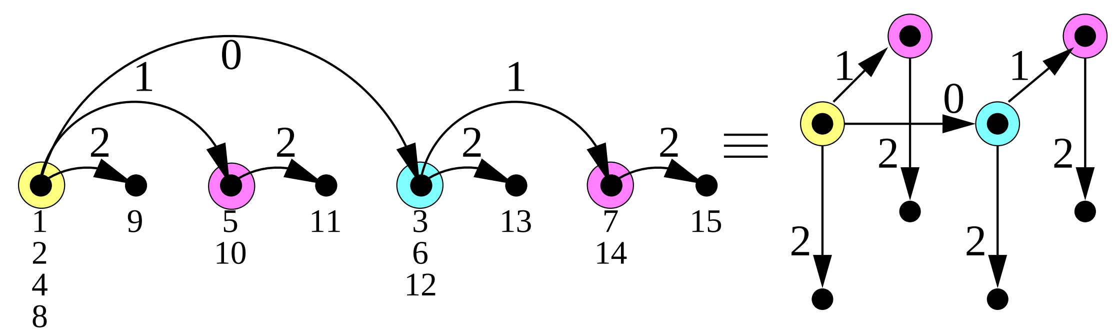
Optimální implementace jednovlnového D&C výpočtu na Q_n

Založeno na **binomiální kostře** hyperkrychle.

1. Kořen rozdělí problém (vstupní data) do dvou polovin.
2. Předá polovinu svému sousedu v dimenzi 0 a nechá si druhou polovinu.
3. Oba tyto uzly jsou aktivní a udělají totéž s použitím dimenze 1.
4. To se opakuje pro dimenze $2, \ldots, n$.
5. **Všechny** uzly Q_n se stanou listy CBT_n a spočítají listové podproblémy.
6. Výsledky jsou sbírány v opačném pořadí zpět do kořenu.



(a) Uzlové zatížení.



(b) Komunikační strom.

Implementace 3-úrovňového jednovlnového D&C výpočtu na Q_3.

Věta 10. *Nechť* $k > 1$ *a* $z_1, \ldots . z_k$*,* $z_i \geq 2$*, jsou přirozená čísla. Nechť* $n_i = \lceil \log z_i \rceil$ *pro všechny* i *a* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$*. Pak*

- $M(z_1, z_2, \ldots, z_k) \subseteq Q_n$.
- $K(z_1, z_2, \ldots, z_k) \subseteq Q_n$*, jsou-li všechny* z_i *sudé.*
- $K(z_1, z_2, \ldots, z_k) \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ *s* $\text{load} = 1$ *a* $\text{dil} = 2$*, je-li některé* z_i *liché.*
- Q_n *je* **optimální** *hyperkrychle pro všechna tato vnoření, pokud*

$$\lceil \log z_1 \rceil + \cdots + \lceil \log z_k \rceil = \lceil \log(z_1 \ldots z_k) \rceil .$$

Důkaz.

1. Vnoř každou 1-D $M(z_i)$ nebo $K(z_i)$ do Q_{n_i} pomocí Grayova kódování G_{n_i}.
2. Aplikuj na tato dílčí vnoření kartézský součin.

Nechť $[x_1, \ldots, x_k] \in V(M(z_1, z_2, \ldots, z_k))$, kde $0 \leq x_i \leq z_i - 1$. Pak

$$\varphi([x_1, \ldots, x_k]) = G_{n_1}(\text{bin}_{n_1}(x_1)) \circ G_{n_2}(\text{bin}_{n_2}(x_2)) \circ \ldots \circ G_{n_k}(\text{bin}_{n_k}(x_k)),$$

kde $\text{bin}_m(x) = m$-bitová reprezentace čísla $x < 2^m$ a
$\circ =$ zřetězení. ♣

Ostatní případy vnoření mřížek

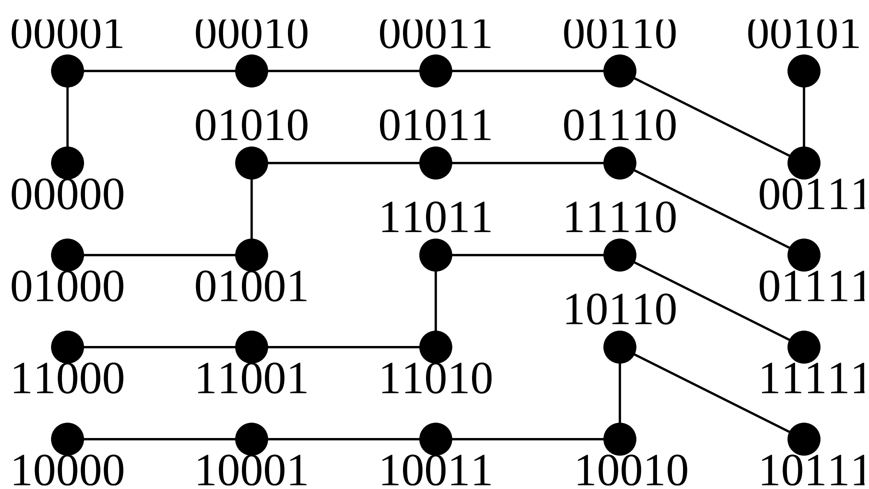
- Jestliže $\lceil \log z_1 \rceil + \cdots + \lceil \log z_k \rceil > \lceil \log(z_1 \ldots z_k) \rceil$, pak tato

  metoda "kartézské dekompozice" dává $M \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ s $\text{vexp} > 2$ (není optimální).

- Optimální expanze, $\text{dil} = 1$ a $\text{load} \geq 2$: velká hyperkrychle se zmačkne do menší.

- Optimální expanze, $\text{load} = 1$ a $\text{dil} > 1$: velmi **sofistikované metody** (zde pouze konstatujeme výsledky).

  - Jakákoli **2-D mřížka** $M(a, b)$ taková, že $\lceil \log a \rceil + \lceil \log b \rceil > \lceil \log(ab) \rceil$, může být vnořena do své optimální $Q_{\lceil \log(ab) \rceil}$ s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = \text{ecng} = \text{ncng} = 2$.



Vnoření $M(5, 5)$ do Q_5 s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = 2$.

  - Podobně: nejlepší algoritmus pro **3-D mřížky** dává vnoření s $\text{dil} = 5$.

Věta 11. *Nechť $n \geq 2$.*

1. *Optimální hyperkrychle pro vnoření CCC_n nebo wBF_n s $\mathrm{load} = 1$ je $Q_{n+\lceil \log n \rceil}$. Podobně, $Q_{n+\lceil \log(n+1) \rceil}$ je optimální pro oBF_n.*
2. *Je-li n sudé, pak $CCC_n \subset Q_{n+\lceil \log n \rceil}$.*
3. *Je-li n liché, pak $CCC_n \xrightarrow{\mathrm{emb}} Q_{n+\lceil \log n \rceil}$ s $\mathrm{dil} = 2$ a $\mathrm{load} = 1$.*
4. *$wBF_n \xrightarrow{\mathrm{emb}} Q_{n+\lceil \log n \rceil}$ s $\mathrm{dil} = O(1)$ a $\mathrm{ecng} = O(1)$.*
5. *$oBF_n \subset Q_{n+\lceil \log(n+1) \rceil}$.*

Důkaz. (Opět metodou kartézské dekompozice.)

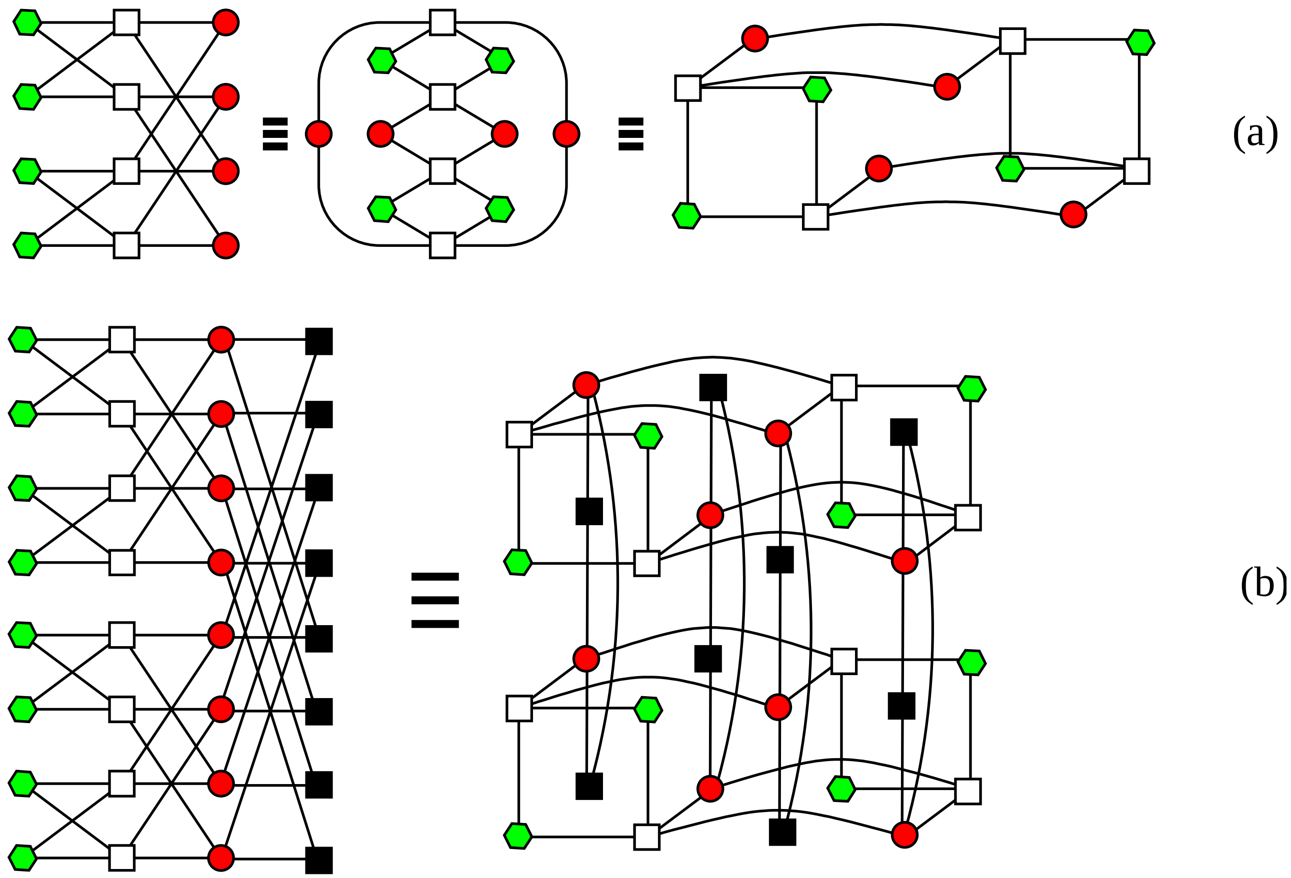
ad (1): $|V(CCC_n)| = |V(wBF_n)| = n2^n$ a $|V(oBF_n)| = (n+1)2^n$.

ad (2): $CCC_n \subset Q_n \times K(n) \subset Q_n \times Q_{\lceil \log n \rceil} = Q_{n+\lceil \log n \rceil}$.

ad (3): Je-li n liché, pak $K(n) \xrightarrow{\mathrm{emb}} Q_{\lceil \log n \rceil}$ s $\mathrm{dil} = 2$.

ad (4): Plyne z Věty 22.

ad (5): Jak oBF_n tak $Q_{n+\lceil \log(n+1) \rceil}$ jsou rekurzivní.



(a) $oBF_2 \subset Q_4$. (b) $oBF_3 \subset Q_5$: příklad indukčního kroku.

Vnoření ostatních grafů

- Je-li dán graf G a celá čísla k a n, pak problém existence vnoření G do Q_n s dilatací k je

  NP-úplný.

Vnoření do mřížek a toroidů

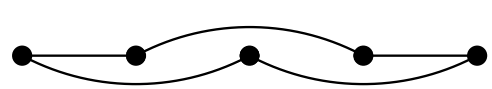
- Velmi důležité v praxi, např. návrhování VLSI obvodů.
- Je-li dán graf G, celá čísla k a n, problém existence vnoření G do n-rozměrné mřížky s $\mathrm{dil} \leq k$ je **NP-úplný**.
  Toto platí dokonce pro $k = 1$, $n = 2$ a $G =$ binární strom.

Vnoření mezi stejnými mřížkami a toroidy

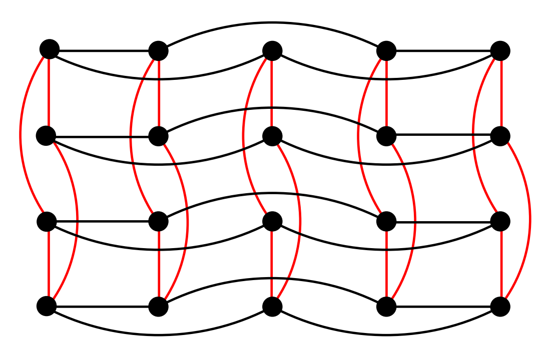
Věta 12. *Mřížky a toroidy jsou* **quaziizometrické** $\Longrightarrow$ **výpočetně ekvivalentní***!!!*
Důkaz. Nechť $M = M(z_1, \ldots, z_n)$ a $K = K(z_1, \ldots, z_n)$.

1. $M \subset K \quad \Longrightarrow \quad K$ simuluje M bez zpomalení.

2. Existuje $K \xrightarrow{\text{emb}} M$ s $\mathrm{load} = 1$ a $\mathrm{dil} = \mathrm{ecng} = 2$: opět metoda kartézské dekompozice.
   (a) Dekomponuj $M = M(z_1) \times \ldots \times M(z_n)$ a $K = K(z_1) \times \ldots \times K(z_n)$.
   (b) Vnoř každý $K(z_i) \xrightarrow{\text{emb}} M(z_i)$ s $\mathrm{load} = 1$ a $\mathrm{dil} = \mathrm{ecng} = 2$, viz. obr. (a).
   (c) Použij kartézský součin, viz. obr. (b).



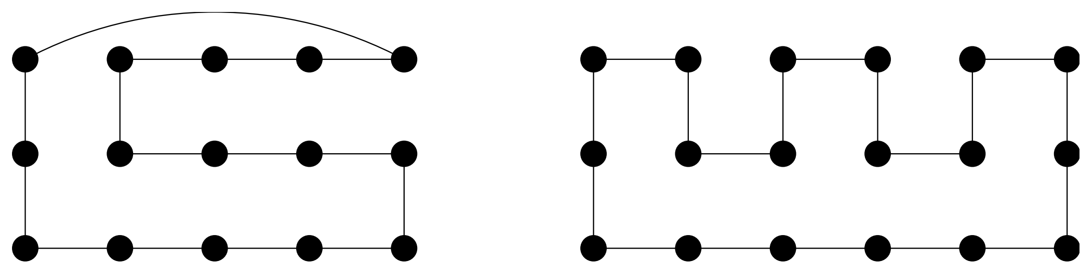
(a) $K(5) \xrightarrow{\text{emb}} M(5)$.



(b) $K(4,5) \xrightarrow{\text{emb}} M(4,5)$.

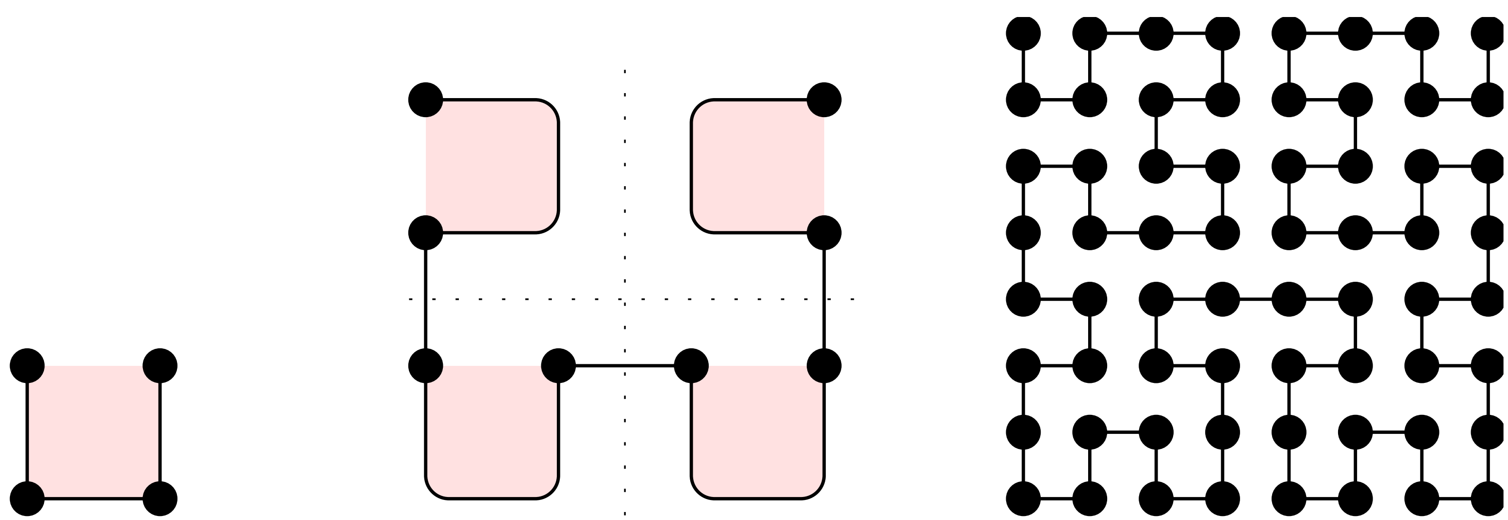
Hamiltonské cesty/cykly

- Jakýkoli $K(z_1, \ldots, z_n)$ má hamiltonovskou kružnici (viz obr. (a)).
- Jakákoli $M(z_1, \ldots, z_n)$ má hamiltonovskou cestu.
- $M(z_1, \ldots, z_n)$ má hamiltonovskou kružnici $\iff$ nejméně jedno z_i je sudé (viz obr. (b)).



(a) (b)

Fraktálovité (rekurzivní) hamiltonské cesty v $M(2^k, 2^k)$

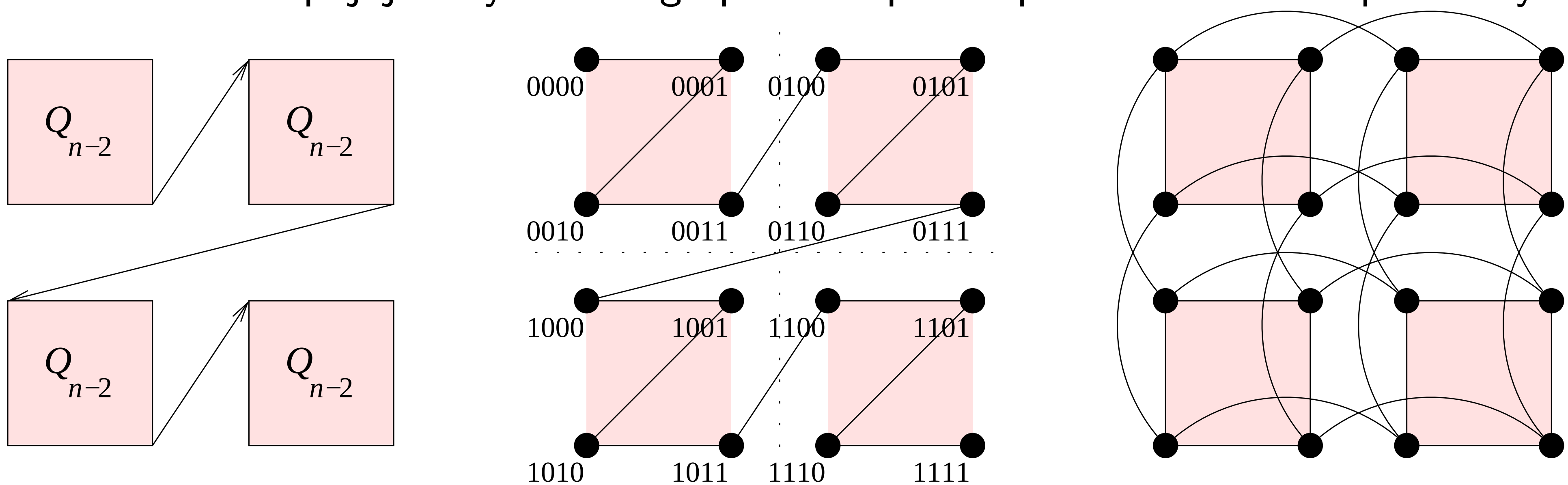


(a) $M(2, 2)$. (b) Indukční krok. (c) $M(2^3, 2^3)$.

Vnoření hyperkrychlí do mřížek/toroidů

Důsledek 13. *(věty 4) Spodní mez na dilataci vnoření* $Q_{2k} \xrightarrow{\text{emb}} M(2^k, 2^k)$ *s* $\text{load} = 1$ *je* $2^{k+1}/(2k) = 2^k/k$. ♣

Peanova křivka: spojuje uzly v lexikographickém pořadí při dělení střídavě podle osy x a y.



(a) Indukční krok. (b) φ vnoření $Q_4 \xrightarrow{\text{emb}} M(4,4)$. (c) ξ vnoření $Q_4 \xrightarrow{\text{emb}} M(4,4)$.

- Manhattanská vzdálenost 2 uzlů lišících se v bitu i, $0 \le i \le n-1$, je

$$d(u, u \operatorname{XOR} 2^i) = 2^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}.$$

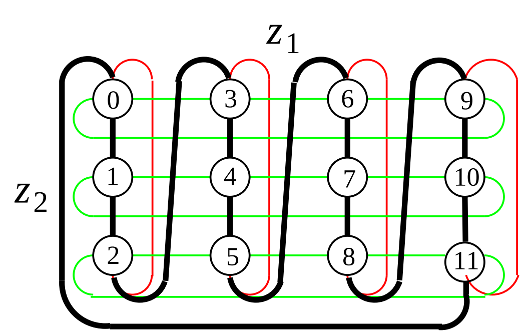
$\Longrightarrow$ dilatace vnoření $Q_{2k} \xrightarrow{\text{emb}} M(2^k, 2^k)$ je $2^{\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor} = 2^{k-1}$.

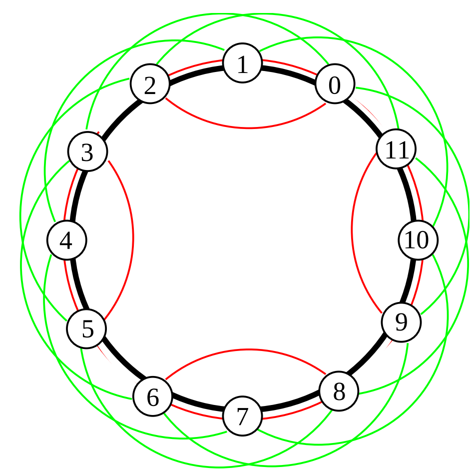
Vnoření toroidů do toroidů

- **Obtížný** a **otevřený** problém pro obecné vícerozměrné kvádrové a krychlové toroidy.
- Řešení 1 speciálního případu:

Věta 14. *Pro* $z_1 \neq z_2$, $\exists$ *optimální vnoření* $K(z_1, z_2) \xrightarrow{\text{emb}} K(z_1 z_2)$ *s* $\text{load} = 1$, $\text{dil} = \text{ecng} = \min(z_1, z_2)$.

Důkaz. Lexikografické mapování uzlů **po řádcích** $K(z_1, z_2)$, jestliže $z_1 \geq z_2$, **po sloupcích** v opačném případě. ♣





Vnoření $K(3,4) \xrightarrow{\text{emb}} K(12)$ s $\text{dil} = 3 = \min(3,4)$, horizontální hrany $K(3,4)$ mají $\text{dil} = 3$, vertikální obalující hrany mají $\text{dil} = 2$.

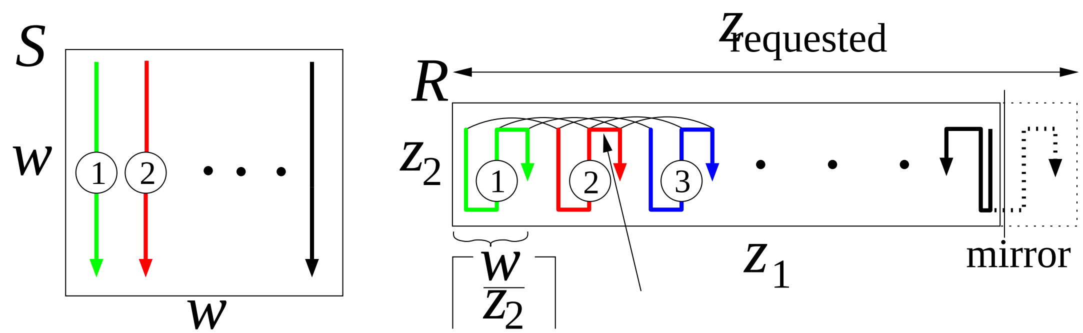
- Poznámka: Je-li $z_1 \geq z_2$, pak spodní mez na dilataci $K(z_1, z_2) \xrightarrow{\text{emb}} K(z_1 z_2)$ je

$$\frac{z_2}{2} \leq \frac{\text{diam}(K(z_1 z_2))}{\text{diam}(K(z_1, z_2))} \doteq \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \leq z_2.$$

Vnoření čtvercových mřížek do obdelníkových mřížek

Věta 15. *Nechť* $z_1 > z_2$ *a* $w = \sqrt{z_1 z_2}$. *Pak* $S = M(w,w)$ *lze vnořit do* $R = M(z_1, z_2)$ *s* $\mathrm{dil} = \left\lceil \sqrt{z_1/z_2} \right\rceil$, $\mathrm{load} = 2$ *a* $\mathrm{ecng} = 1 + \left\lceil \sqrt{z_1/z_2} \right\rceil$.

Důkaz.



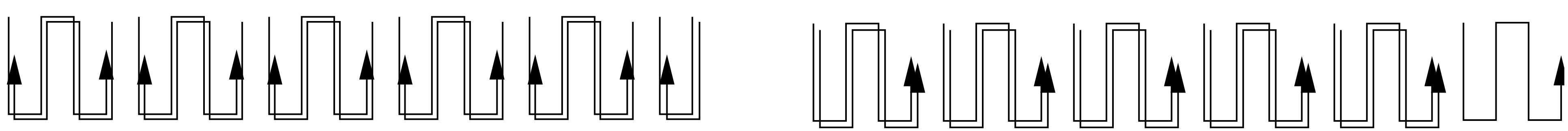
Řešení s lepší expanzí

(a) Vlož zrcadlo doprostřed R.

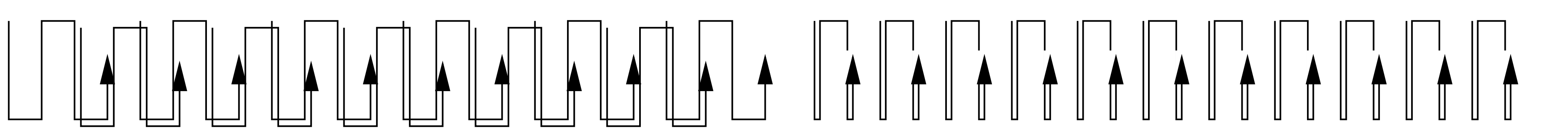
(b) Použij stejné hady, ale zdvojuj je.

(c) Použij stejné hady, ale částečně je překrývej.

(d) Použij užší hady (= hady s load=2)



(a) (b)

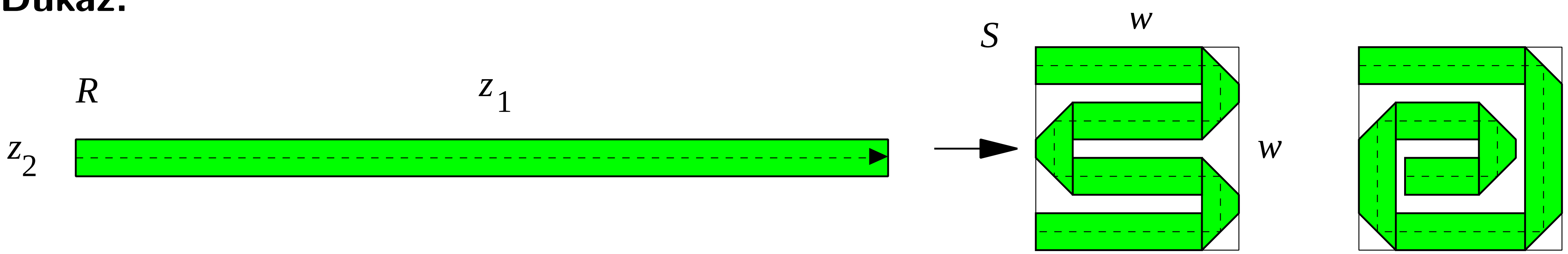


(c) (d)

Věta 16. *Nechť* $z_1 > z_2$ *a* $w = \sqrt{z_1 z_2}$. *Pak*

$$R = M(z_1, z_2) \text{ může být vnořena do } S = M(w, w) \text{ s } \mathrm{dil} = 1 \text{ a } \mathrm{load} = \mathrm{ecng} = 2.$$

Důkaz.

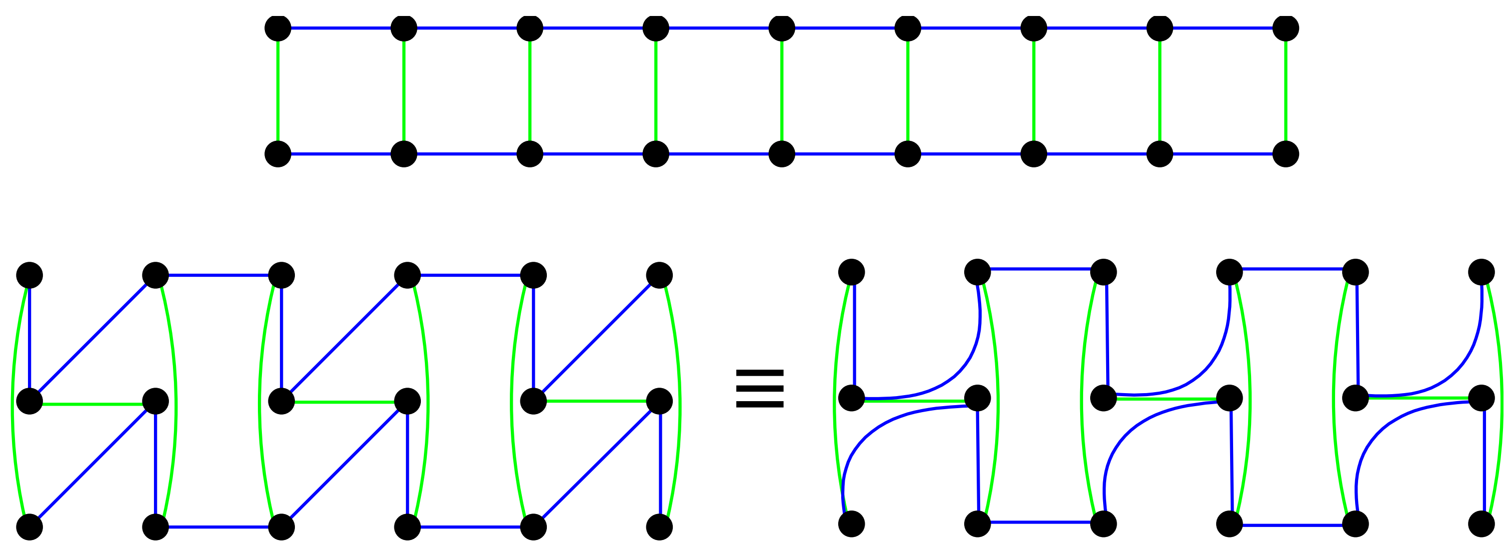


Řešení s lepší expanzí

Expanzi lze zlepšit (přiblížit ke spodní mezi $1/2$) přehýbáním **rovných** částí vnořovaného hada.

Věta 17. *Uvažujme* $M(a,b)$ *a* $M(a',b')$ *takové, že* $a' < a \leq b$ *a* b' *je minimální celé číslo, pro které platí* $a'b' \geq ab$. *Pak*

1. **spodní meze** *na dilataci a hranové zahlcení jsou 2,*
2. *jestliže* $a/a' \leq 2$, *pak* $\exists$ *vnoření* $M(a,b) \xrightarrow{\text{emb}} M(a',b')$ *s* $\text{dil} \leq 2$,
3. *jestliže* $a/a' \leq 3$, *pak* $\exists$ *vnoření* $M(a,b) \xrightarrow{\text{emb}} M(a',b')$ *s* $\text{dil} \leq 3$.

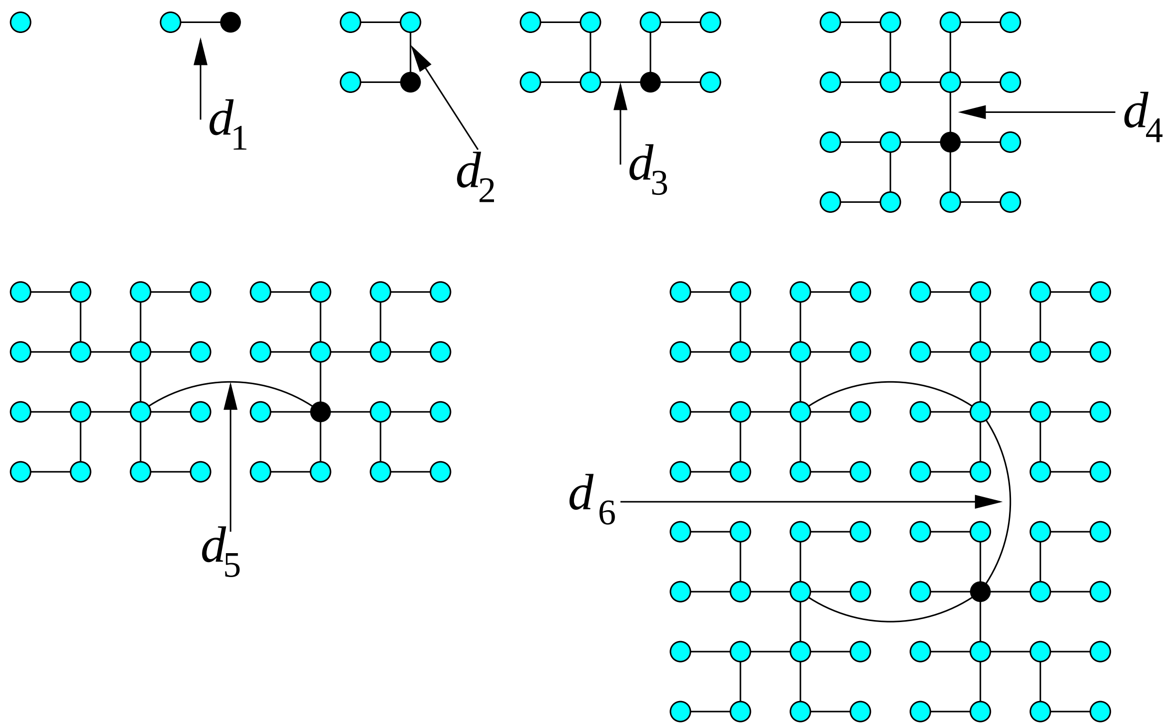


$M(2,9) \xrightarrow{\text{emb}} M(3,6)$ s $\text{dil} = 2$ a $\text{ecng} = 3$.

Důsledek 18. *(věty 4) Spodní mez na dilataci vnoření* $CBT_n \xrightarrow{\text{emb}} M(2^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}, 2^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil})$ *s* $\text{load} = 1$ *je* $(2^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} + 2^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil} - 2)/(2n)$.

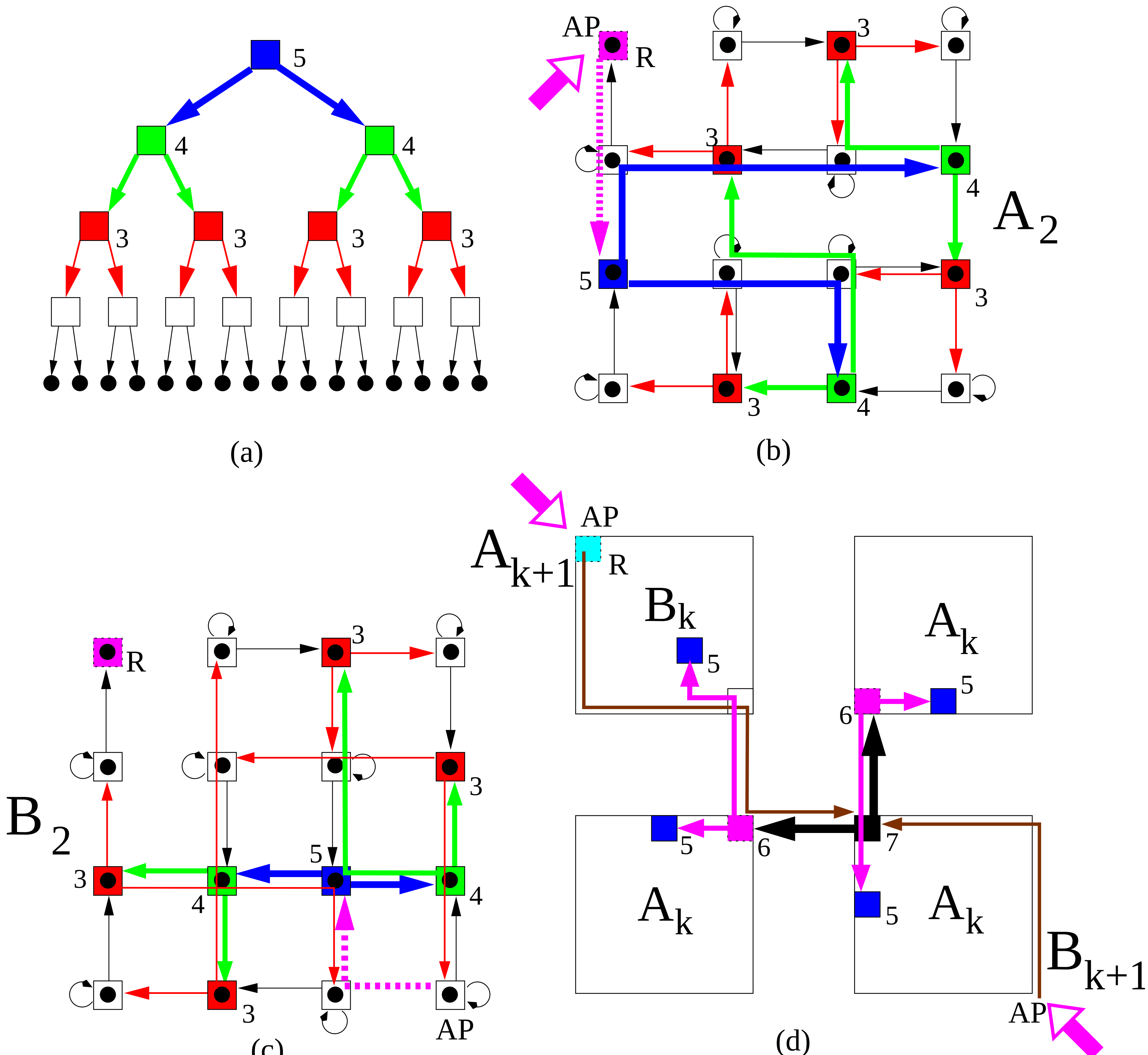
Věta 19. *Jednovlnový* n*-úrovňový D&C výpočet lze simulovat na* $M(2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil})$ *tak, že každý uzel mřížky simuluje 1 list stromu a dilatace vnoření je* $d_n = 1$ *pro* $n \leq 4$ *a*

$$d_n = 2(2^k + 2^{k-2} + 2^{k-4} + \cdots + 2^{k \bmod 2}) + 1, \quad \textit{kde} \quad k = \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \quad \textit{pro} \quad n \geq 5. \qquad \clubsuit$$



Věta 20. CBT_{2m} *může být vnořený do* $M(2^m, 2^m)$ *s* **obousměrnými linkami** *tak, že*

- $\mathrm{load} = 2$*: každý* **uzel mřížky** *je zatížen*
  - **přesně jedním listem** *stromu a*
  - *(kromě jednoho)* **přesně jedním vnitřním** *uzlem stromu,*
- *různé hrany stromu jsou mapované na* **disjunktní cesty** *v mřížce,*
- $\mathrm{dil} = 2^m + O(m)$.



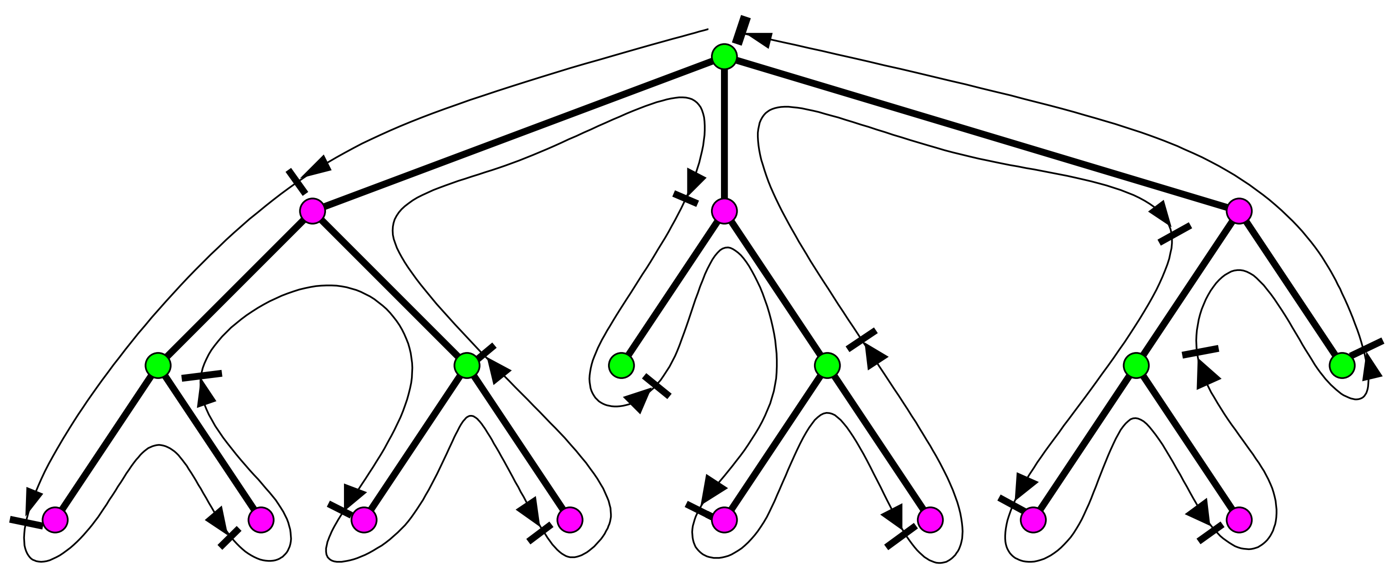
5
4
4
3
3
3
3
(a)
AP
R
3
3
4
A 2
5
3
3
4
(b)
R
3
3
B 2
3
5
4
4
3
AP
(c)
AP
R
A k+1
B k
5
A k
5
6
5
6
7
A k
5
A k
B k+1
AP
(d)

Vnoření lineárního pole/kružnice do jakékoli sítě

Věta 21. *N-uzlová kružnice C může být vnořena do jakékoli N-uzlové sítě G s*
$$\mathrm{load} = 1,\ \mathrm{dil} \leq 3 \text{ a } \mathrm{ecng} = 2.$$

Důkaz.

1. Zkonstruuj kostru T_G grafu G.
2. Rozděl její uzly na uzly sudé úrovně (V_0) a liché úrovně (V_1).
3. Procházej T_G **do hloubky zleva doprava (DFS)** a umísťuj postupně uzly C do T_G $\Longleftrightarrow$
   - momentálně navštívený uzel je ve V_1 a je to první návštěva tohoto uzlu,
   - momentálně navštívený uzel je ve V_0 a je to poslední návštěva tohoto uzlu. ♣



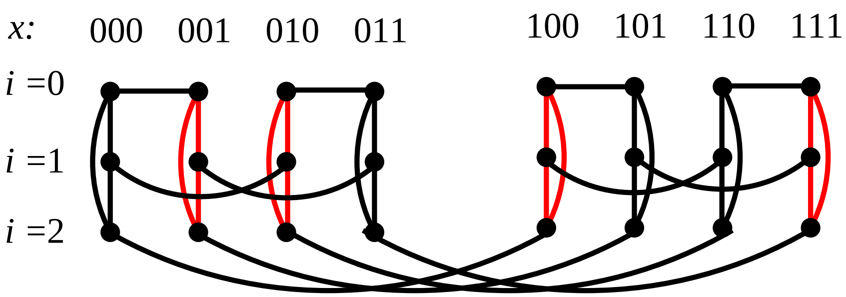
Věta 22. *CCC a oba typy motýlků jsou výpočetně ekvivalentní.*

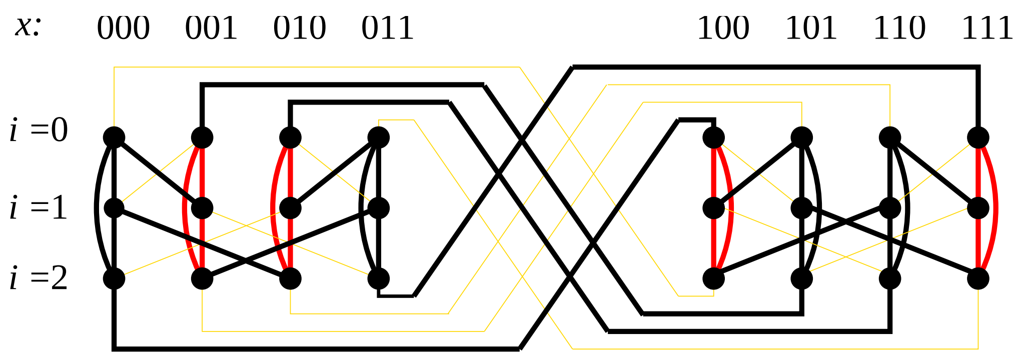
Důkaz.

(1) CCC_n je faktorem wBF_n.

$\varphi : V(CCC_n) \to V(wBF_n)$ definovaný jako $\varphi((i,x)) = (i \oplus_n \mathrm{parity}(x), x)$,

kde $\mathrm{parity}(x) = 1$, jestliže x má lichou paritu, a $\mathrm{parity}(x) = 0$ jinak.

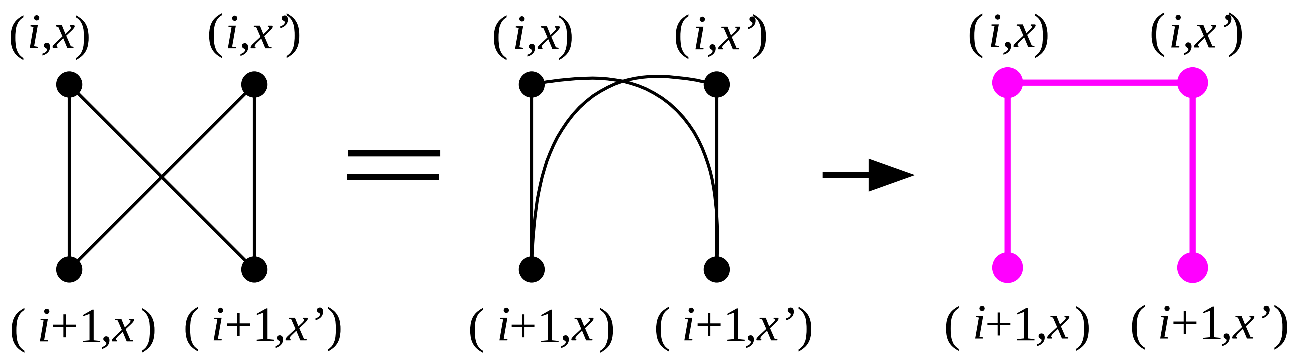




CCC_3 je faktorem wBF_3.

(2) wBF_n **může být vnořen do** CCC_n **s** $\mathrm{dil} = \mathrm{ecng} = 2$**.**

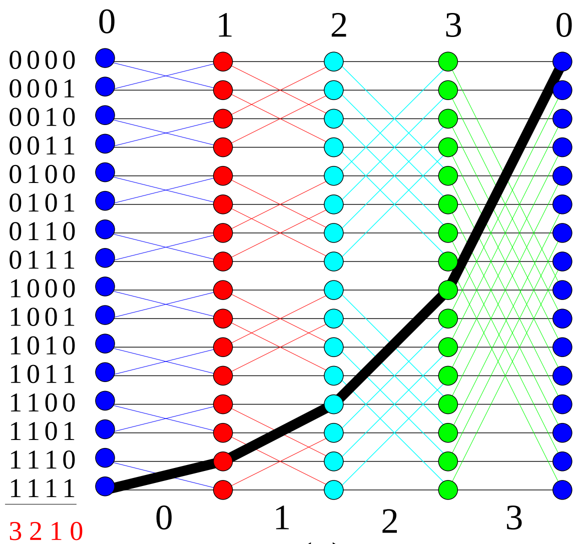
identické mapování uzlů: každý elementární 2×2 motýlek $\xrightarrow{\mathrm{emb}}$ 3-hranovou cestu v CCC.



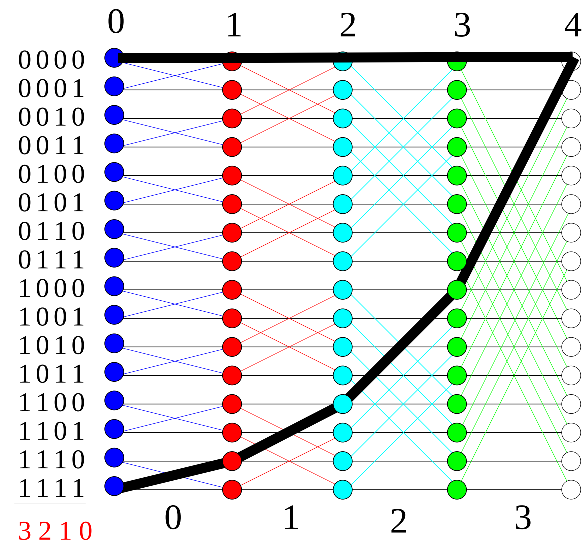
(3) oBF_n **může být vnořen do** wBF_n **s** $\mathrm{load} = 2$ **a** $\mathrm{dil} = 1$**.**

sloučením koncových uzlů řad oBF_n dostaneme kružnice ve wBF_n.

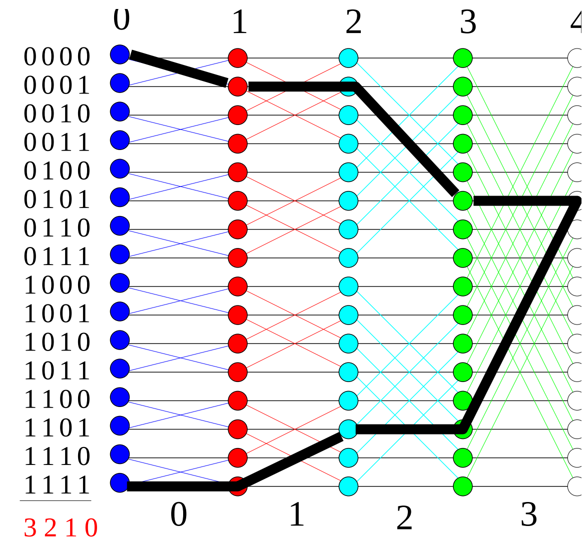
(4) wBF_n může být vnořen do oBF_n s $\mathrm{dil} \leq 3$.



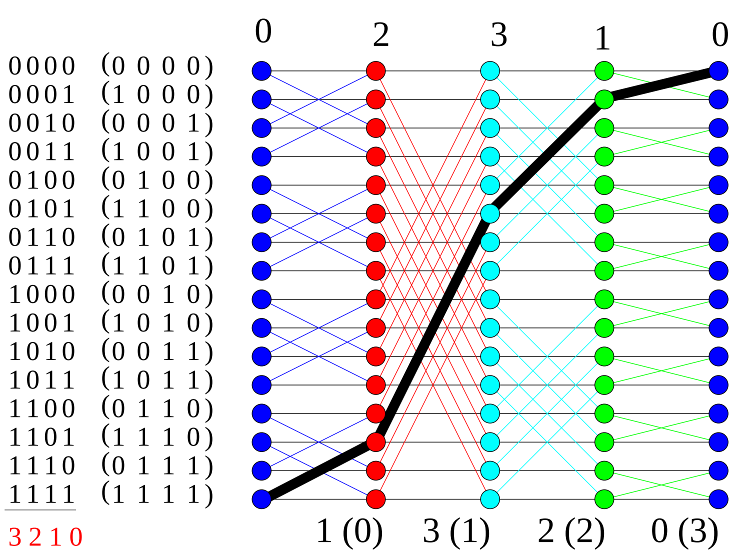
(a)



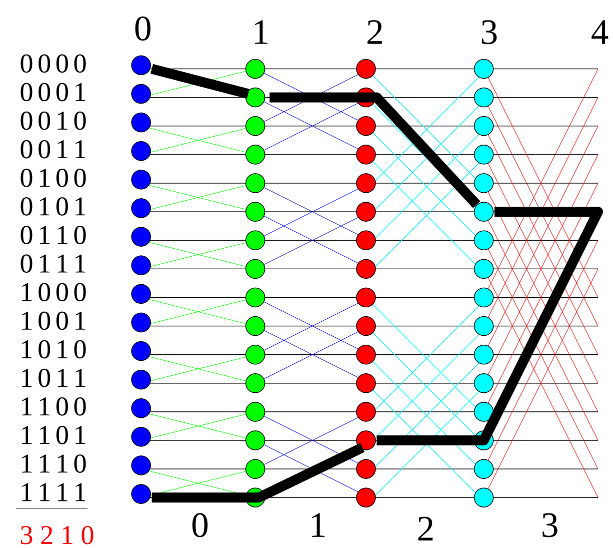
(b)



(c)



(d)



(e)

Zobecnitelný komentář k předchozímu příkladu:

(a) Cesta z uzlu $u = (0, 1111)$ do $v = (0, 0000)$ ve wBF_4, bity se invertují v pořadí $0, 1, 2, 3$.

(b) Cesta z uzlu $u = (0, 1111)$ do $v = (0, 0000)$ v oBF_4, bity se invertují v pořadí $0, 1, 2, 3$, dilatace je $n = \log N$ (!!!!).

(c) Cesta z uzlu $u = (0, 1111)$ do $v = (0, 0000)$ v oBF_4, bity se invertují v pořadí $1, 3, 2, 0$, dilatace je 3. Definujme permutaci bitů $\pi : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 3, 2, 0\}$.

(d) Permutace kružnic v wBF_4 indukovaná π^{-1}, čili kružnice k se přemístí na pozici kružnice $\pi^{-1}(k)$. V závorkách jsou původní čísla řádků a dimenzí.

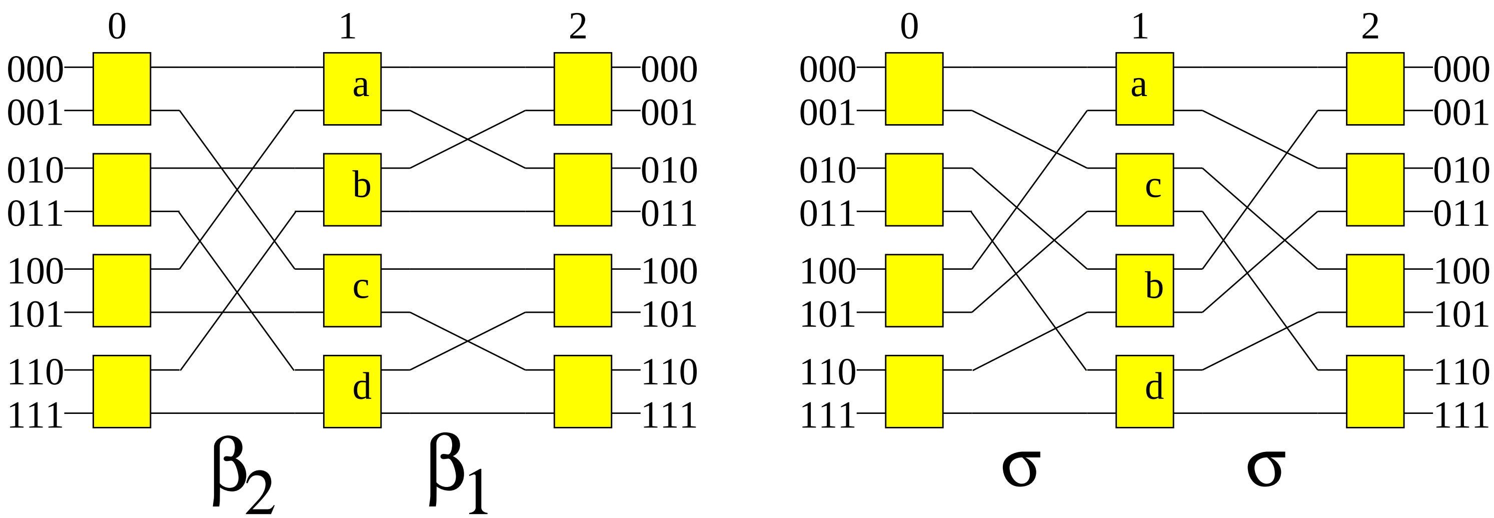
(e) Vnoření takto permutované wBF_4 do oBF_4, čili grafu (d) do grafu (c).

Opakování z minulé přednášky:

Lemma 23. *Delta sítě stejného typu a počtu a velikosti stupňů jsou izomorfní.*

Důkaz. Všechny tyto sítě se liší pouze v pořadí, v jakém jsou bity adresy vystavovány inverzi, každý bit právě jednou. Ale i stejného pořadí lze dosáhnout různými způsoby. ♣

Příklad 24. Izomorfismus MIN sítí motýlek (a) a Omega (b).



(a) **(b)**

Důsledek 25. *Stačí se zabývat vlastnostmi sítě motýlek.*

Normální hyperkubické algoritmy

Definice 26. *Hyperkubický algoritmus v Q_n je* **normální***, jestliže*

1. *v jakémkoli kroku algoritmu jsou použity pouze hrany jedné dimenze hyperkrychle*
2. *a jestliže v po sobě jdoucích krocích jsou používány po sobě jdoucí dimenze.*

Třída normálních hyperkubických algoritmů zahrnuje mnoho důležitých algoritmů, např., **D&C**!!!, maticové výpočty, třídění, kolektivní komunikační algoritmy.

Věta 27.

- N*-uzlová* **řídká** *hyperkubická síť může provést* N*-uzlový* **normální hyperkubický algoritmus** *s pouze konstantním zpomalením (technický důkaz).*
- N*-uzlový motýlek může simulovat* **jakoukoli** N*-uzlovou síť s* **omezeným** *stupěm se zpomalením* $O(\log N)$ *za předpokladu že je povoleno určité předzpracování (bude dokázáno v přednášce o permutacích).* ♣