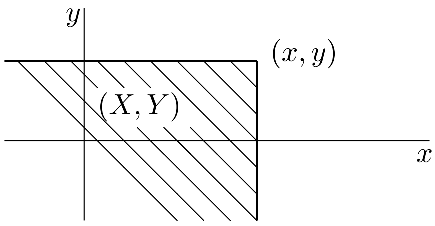
10. N á h o d n ý   v e k t o r

10.1. Definice: Náhodný vektor. Uspořádanou $n-$tici $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ náhodných veličin $X_i,\ 1 \le i \le n$, nazýváme *náhodným vektorem.*

10.2.Definice: Sdružená distribuční funkce. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak funkci $F = F(x, y)$, která je definovaná předpisem

$$(\spadesuit) \qquad F(x, y) = P(X \le x, Y \le y),\ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2,$$

nazýváme *sdruženou distribuční funkcí* náhodného vektoru (X, Y).



Obr. 10.1.

Hodnota sdružené distribuční funkce $F(x, y)$ je rovna pravděpodobnosti s jakou se hodnota náhodného vektoru (X, Y) vyskytne ve vyšrafované části roviny z obrázku Obr.10.1.

10.3. Věta: Vlastnosti sdružené distribuční funkce. Pro sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ náhodného vektoru platí:
a) Pro všechny hodnoty $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ je $0 \le F(x, y) \le 1$.
b) Funkce $F(x, y)$ je neklesající jako funkce proměnné x a proměnné y.
c) Je

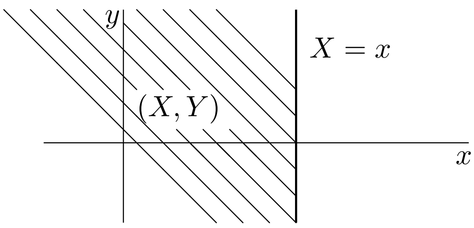
$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0.$$

d) Je

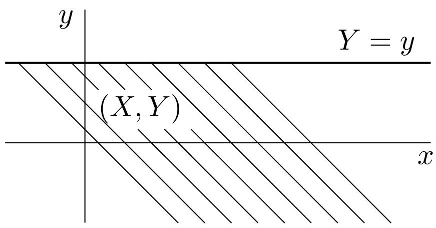
$$\lim_{(x,y) \to (\infty, \infty)} F(x, y) = 1.$$

e) Je

$$\lim_{y \to \infty} F(x, y) = P(X \le x),\ x \in \boldsymbol{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to \infty} F(x, y) = P(Y \le y),\ y \in \boldsymbol{R}.$$



Obr. 10.2a.



Obr. 10.2b.

Poznámka: Marginální rozdělení. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak jsou jeho souřadnice X a Y náhodné veličiny. Jejich rozdělení je popsáno příslušnými distribučními funkcemi. Ty se dají snadno určit ze sdružené distribuční funkce pomocí vztahů z tvrzení e) věty 10.3.

10.4. Definice: Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak rozdělení náhodných veličin X a Y se nazývá *marginální rozdělení.*

10.5. Věta: Je-li $F(x,y)$ sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X,Y), pak jsou marginální distribuční funkce $F_1(x)$, resp. $F_2(y)$ náhodné veličiny X, resp Y určeny vztahy

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y), \ x \in \boldsymbol{R}$$

a

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y), \ y \in \boldsymbol{R}.$$

Příklad: 1. Náhodný vektor (X,Y) má rozdělení určené sdruženou distribuční funkcí $F(x,y)$, kde

$$F(x,y) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & x \leq 0 \text{ nebo } y \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3y} + \mathrm{e}^{-2x-3y}, & x \geq 0 \text{ a } y \geq 0. \end{array} \right.$$

Určete marginální distribuční funkce náhodných veličin X a Y.

Řešení: Marginální distribuční funkce $F_1(x)$ a $F_2(y)$ náhodných veličin X a Y určíme z jejich vyjádření odvozených ve větě 10.5. Je

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y), \ x \in \boldsymbol{R}$$

a

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y), \ y \in \boldsymbol{R}.$$

Protože je $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ a $\lim\limits_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-3y} = 0$ dostaneme:

$$F_1(x) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2x}, & x \geq 0; \end{array} \right. \quad \text{a} \quad F_2(y) = \left\langle \begin{array}{rl} 0, & y \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-3y}, & y \geq 0; \end{array} \right.$$

Typy rozdělení náhodného vektoru

I. Diskrétní rozdělení.

10.6. Definice: Diskrétní rozdělení. Říkáme, že náhodný vektor (X,Y) má diskrétní rozdělení, jestliže nabývá konečně nebo spočetně mnoha diskrétních hodnot.

10.7. Definice: Sdružená pravděpodobnostní funkce. Jestliže má náhodný vektor (X,Y) diskrétní rozdělení, pak funkci $p = p(x,y)$, která je definována předpisem

$$(\clubsuit) \qquad p(x,y) = P(X = x \cap Y = y), \ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2$$

nazýváme *sdruženou pravděpodobnostní funkcí* náhodného vektoru (X,Y).

10.8. Věta: Vlastnosti sdružené pravděpodobnostní funkce. Funkce $p = p(x,y)$ je sdruženou pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru (X,Y) právě když platí:

a) Je $0 \leq p(x,y) \leq 1$ pro všechny hodnoty $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$.

b) Je $\sum\limits_{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2} p(x,y) = 1$.

c) Existuje pouze konečná nebo spočetná množina (posloupnost) hodnot (x_i, y_k), pro které je $P(x_i, y_k) > 0$.

10.9. Věta: Marginální pravděpodobnostní funkce. Je-li $p(x,y)$ sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X,Y), pak jsou marginální pravděpodobnostní funkce $p_1(x)$, resp. $p_2(y)$ náhodné veličiny X, resp Y dány vztahy:

$$p_1(x) = \sum_{y\in \boldsymbol{R}} p(x,y),\ x \in \boldsymbol{R} \qquad \text{a} \qquad p_2(y) = \sum_{x\in \boldsymbol{R}} p(x,y),\ y \in \boldsymbol{R}.$$

Tabulka pro sdruženou pravděpodobnostní funkci a marginální pravděpodobnostní funkce.

$p(x,y)$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	$p_2(y)$
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	$\dots$	$p(x_i,y_1)$	$\dots$	$p_2(y_1)$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	$\dots$	$p(x_i,y_2)$	$\dots$	$p_2(y_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_k	$p(x_1,y_k)$	$p(x_2,y_k)$	$\dots$	$p(x_i,y_k)$	$\dots$	$p_2(y_k)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$p_1(x)$	$p_1(x_1)$	$p_1(x_2)$	$\dots$	$p_1(x_i)$	$\dots$	1

Tab. 10.1.

10. 10. Definice: Nezávislost náhodných veličin. Jestliže má náhodný vektor (X,Y) diskrétní rozdělení, pak říkáme, že jsou jeho souřadnice X a Y *nezávislé náhodné veličiny,* jestliže jsou náhodné jevy $(X = x)$ a $(Y = y)$ nezávislé pro všechny hodnoty $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$. V opačném případě mluvíme o *závislých* náhodných veličinách.

10.11. Věta: Podmínka nezávislosti. Je-li $p(x,y)$ sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X,Y), pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé právě když pro sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce platí:

$$(\heartsuit) \qquad p(x,y) = p_1(x)\cdot p_2(y),\ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Poznámka: Pro tabulku Tab. 10.1 to znamené, že políčko (x_i, y_k) dostaneme jako součin políčka x_i a políčka y_k v marginálních pravděpodobnostních funkcích. Dá se tedy sdružená pravděpodobnostní funkce zpětně vytvořit ze svých marginálních pravděpodobnostních funkcí.

Příklad: 1. Náhodný vektor (X,Y) má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí p, která je zadána tabulkou Tab. 10.2. Určete marginální pravděpodobnostní funkce a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

$y\backslash x$	0	1	3
-1	0,1	0,2	0,1
1	0,3	0,2	0,1

Tab. 10.2.

$y\backslash x$	0	1	3	$p_2(y)$
-1	0,1	0,2	0,1	0,4
1	0,3	0,2	0,1	0,6
$p_1(x)$	0,4	0,4	0,2	

Tab. 10.3.

Řešení: Marginální pravděpodobnostní funkce určíme pomocí vzorců z věty 10.9. Je pak

$$X: \quad p_1(x) = \sum_{y\in \boldsymbol{R}} p(x,y) \quad \text{a} \quad Y: \quad p_2(y) = \sum_{x\in \boldsymbol{R}} p(x,y).$$

Závislost či nezávislost otestujeme z podmínky $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$, kterou jsme pro nezávislost náhodných veličin odvodili ve větě 10. 11. Je například $p(0,-1) = 0,1$ a $p_1(0)p_2(-1) =$

$0,4.0,4 = 0,16$. Protože jsou výsledky různé nemusíme rovnost pro další políčka z tabulky ověřovat. Náhodné veličiny X a Y jsou závislé.

Příklad: 2. Náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí p, která je zadána tabulkou Tab. 10.4. Určete marginální pravděpodobnostní funkce a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

$y \backslash x$	1	2	4
0	0,06	0,3	0,24
3	0,04	0,2	0,16

Tab. 10.4.

$y \backslash x$	1	2	4	$p_2(y)$
0	0,06	0,3	0,24	0,6
3	0,04	0,2	0,16	0,4
$p_1(x)$	0,1	0,5	0,4	

Tab. 10.5.

Řešení: Marginální pravděpodobnostní funkce určíme pomocí vzorců z věty 10.9. Je pak

$$X: \quad p_1(x) = \sum_{y \in \boldsymbol{R}} p(x, y) \quad \text{a} \quad Y: \quad p_2(y) = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} p(x, y).$$

Závislost či nezávislost otestujeme z podmínky $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$, kterou jsme pro nezávislost náhodných veličin odvodili ve větě 10. 11. Ověříme postupně zda platí rovnost pro jednotlivá políčka. Pro hodnoty v prvním řádku dostaneme:

$$0,06 = 0,6.0,1; \quad 0,3 = 0,6.0,5; \quad 0,24 = 0,6.0,4;$$

v druhém řádku dostaneme

$$0,04 = 0,4.0,1; \quad 0,2 = 0,4.0,5; \quad 0,16 = 0,4.0,4.$$

Protože podmínka pro nezávislost je splněna pro všechny dvojice hodnot náhodného vektoru (X, Y) z tabulky, jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

II. Spojité rozdělení.

10. 12. Definice: Spojité rozdělení. Říkáme že náhodný vektor (X, Y) má *spojité rozdělení* jestliže pro jeho sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ platí:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Funkci $f(x, y)$ nazýváme *sdruženou hustotou* náhodného vektoru (X, Y).

10.13. Věta: Vlastnosti sdružené hustoty. Funkce $f(x, y)$ je sdruženou hustotu náhodného vektoru (X, Y) právě když platí:

1. Je $f(x, y) \geq 0$ pro $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
2. Je $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

Pro sdruženou hustotu $f(x, y)$ dále platí:

3. $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ pro skoro všechna $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.
4. Pro $A \subset \boldsymbol{R}^2$ je

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10. 14. Věta: Marginální rozdělení. Jestliže má náhodný vektor (X, Y) spojité rozdělení určené sdruženou hustotu $f(x, y)$, pak pro jeho marginální distribuční funkce platí:

$$X: \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} (\int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)\,\mathrm{d}u)\mathrm{d}y, \quad x \in \boldsymbol{R};$$

$$Y: \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} (\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)\,\mathrm{d}v)\mathrm{d}x, \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

Marginální náhodné veličiny X a Y mají spojité rozdělení a pro jejich hustoty platí:

$$X: \quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \boldsymbol{R};$$

$$Y: \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

10.15. Definice: Marginální hustoty. Hustoty $f_1(x)$ a $f_2(y)$ z věty 10. 14 se nazývají *marginální.*

10.16. Definice: Nezávislost náhodných veličin. Říkáme, že jsou náhodné veličiny X a Y *nezávislé,* jestliže jsou náhodné jevy

$$(X \leq x) \quad \text{a} \quad (Y \leq y)$$

nezávislé pro všechny hodnoty x a y z $\boldsymbol{R}$. V opačném případě nazýváme náhodné veličiny *závislými.*

10. 17. Věta: Podmínka pro nezávislost. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě když platí:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \quad \text{pro} \quad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2,$$

kde $F(x, y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X, Y) a $F_1(x)$, resp. $F_2(y)$, jsou marginální distribuční funkce náhodné veličiny X, resp. Y.

10. 18. Věta: Spojitě rozdělené náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě když pro jejich marginální a sdruženou hustotu platí:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \quad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

10. 19. Věta: Pro náhodné veličiny X a Y platí:
1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak platí:
   $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Poznámka: Pro náhodné veličiny X a Y sledujeme často jejich závislost a podobně jako u vlastností jedné náhodné veličiny se ji snažíme popsat číselnou hodnotou. Činíme tak pomocí koeficientů kovariance a korelace.

10.20. Definice: Koeficient kovariance. Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak *koeficientem kovariance* náhodných veličin X a Y nazýváme číslo

$$C(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

10.21. Věta: Vlastnosti kovariance. Pro koeficient kovariance náhodných veličin X a Y platí:

a) $C(X,X) = D(X)$.
b) $C(X,Y) = C(Y,X)$.
c) $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
d) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak $C(X,Y) = 0$.
e) Je-li $C(X,Y) \neq 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y jsou závislé.
f) $C(X, aX + b) = aD(X)$.

Poznámka: K popisu závislosti náhodných veličin používáme normovaný koeficient, který je odvozen z koeficientu kovariance.

10.22. Definice: Koeficient korelace. Pro náhodné veličiny X a Y nazýváme *koeficientem korelace* číslo

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

10.23. Věta: Vlastnosti koeficientu korelace. Pro koeficient korelace náhodných veličin X a Y platí:
a) $\rho(X,X) = 1$;
b) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$;
c) Je-li $\rho(X,Y) \neq 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y závislé.
d) Pro nezávislé náhodné veličiny X a Y je $\rho(X,Y) = 0$.
e) $\rho(X, aX + b) = sgn\, a = \frac{a}{|a|}$;
f) $|\rho(X,Y)| \leq 1$;
g) $\rho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$.
Poznámka: Z vlastností f) a g) plyne, že koeficient korelace je vlastně mírou lineární závislosti náhodných veličin. O náhodných veličinách X a Y, pro které je $\rho(X,Y) = 0$ mluvíme jako o *nekorelovaných* náhodných veličinách. Ty nemusí být nutně nezávislé. Shoda nastává pouze u náhodných veličin, které mají normální rozdělení.