

Představte si nekonečný dvourozměrný spreadsheet s výrazy odpovídajícími následující gramatice: $E \rightarrow N \mid E \oplus E \mid [Z, Z]$ (N je množina přirozených čísel, Z je množina celých čísel). Jeho přepisovací relace \Rightarrow přepisuje funkce $Z \times Z \rightarrow E$ a používá pomocnou přepisovací relaci \leadsto nad $(Z \times Z \rightarrow E) \times E$, množina finálních konfigurací je množina funkcí $Z \times Z \rightarrow N$.

$$(f, [z_1, z_2]) \leadsto (f, f(z_1, z_2))$$

$$(f, n_1 \oplus n_2) \leadsto (f, n_1 + n_2)$$

$$\frac{(f, e_1) \leadsto^* (f, e_3)}{(f, e_1 \oplus e_2) \leadsto (f, e_3 \oplus e_2)}$$

$$\frac{(f, e_2) \leadsto^* (f, e_3)}{(f, e_1 \oplus e_2) \leadsto (f, e_1 \oplus e_3)}$$

$$\frac{f(z_1, z_2) = e \quad (f, e) \leadsto^* (f, n)}{f \Rightarrow \lambda x, y. \text{if } x = z_1 \wedge y = z_2 \text{ then } n \text{ else } f(x, y) \text{ fi}}$$

1. Nadefinujte funkci $dep : (Z \times Z \rightarrow E) \times (Z \times Z) \rightarrow \mathcal{P}(Z \times Z)$, která ke spreadsheetu a adrese buňky vrátí adresy buněk, na kterých hodnota původní buňky (i tranzitivně) závisí. Formálně popište, za jakých podmínek je možné celý spreadsheet vyhodnotit tak, že v každé buňce je číslo. Je u výše popsané sémantiky garantovaná terminace v konečném počtu kroků?
2. Napište denotační sémantiku nekonečného spreadsheetu.
3. V reálných spreadsheetech probíhá vyhodnocování online—po změně výrazu v nějaké buňce se přepočítá obsah všech buněk, které na dané buňce závisí. Namodelujte tyto změny jako sekvenci instrukcí ve tvaru $(z_1, z_2) = e$ a napište sémantiku vyhodnocování těchto sekvencí. Minimalizujte nutnost přepočítávání, předpokládejte, že funkci dep máte korektně nadefinovanou.