Kontrolní úlohy pro týdny 1 a 2

Poznámky:

a) **Při zasílání řešených úloh přednášejícímu se zaměřte především na řešení úloh zdůrazněných tučným fontem, ostatní úlohy řešte pouze "pro sebe".**

b) **Úlohy, které jste nedokázali vyřešit, neváhejte konzultovat na prosemináři, na cvičení nebo na osobní konzultaci s vyučujícím.**

1.1 Lze určit maximální počet hran obyčejného (resp. prostého, resp. obecného) neorientovaného grafu o n uzlech ?

1.2 Jaká je role incidence v definici neorientovaného grafu ?

1.3 Kolik různých faktorů má neorientovaný graf o m hranách a n uzlech ?

1.4 Kolik různých faktorů má úplný graf Kn ?

1.5 Který graf o n uzlech má pouze jeden faktor ?

1.6 Charakterizujte podgraf úplného grafu Kn indukovaný libovolnou podmnožinou jeho uzlů.

1.7 <u>Zvažte pravdivost tvrzení:</u>
Je-li graf G1 podgrafem grafu G , pak existuje taková podmnožina uzlů U1 , že G1 je podgrafem indukovaným touto podmnožinou uzlů.

1.8 <u>Zvažte pravdivost tvrzení:</u>
Je-li graf G1 podgrafem grafu G , pak existuje taková podmnožina hran H1 , že G1 je podgrafem indukovaným touto podmnožinou hran.

1.9 Nechť G1, resp. G2 je podgraf grafu G indukovaný podmnožinou uzlů U1, resp. U2. Za jakých podmínek bude platit, že G1 $\cup$ G2 je roven podgrafu indukovanému podmnožinou uzlů U1 $\cup$ U2 ?

1.10 Kolik neizomorfních faktorů má úplný graf K4 (K5) ?

1.11 Může být uzel obyčejného (resp. prostého, resp. obecného) grafu sousedem sám sobě ?

1.12 Jak souvisí stupeň uzlu obyčejného (resp. obecného) grafu s počtem sousedů tohoto uzlu?

1.13 Jak bude vypadat obyčejný graf $G = \langle H,U \rangle$ s n uzly a minimálním počtem hran, pro jehož nějaký uzel u platí $\Gamma(u) = U - \{u\}$?

1.14 Vyslovte tvrzení o struktuře pravidelného grafu stupně 1, resp. 2.

1.15 Může být graf se souborem stupňů (1,1,1,1,1,1,1,3,4) stromem ?

1.16 Obyčejný graf G má n1 uzlů stupně k1, dále n2 uzlů stupně k2 a už žádné další uzly. Jaký maximální počet různých automorfismů může mít graf G ?

1.17 Je možné nalézt nějaký pravidelný graf stupně 3, který má 7 uzlů ?

1.18 Nalezněte příklady dvou neizomorfních obyčejných grafů se shodným souborem stupňů (1, 1, 2, 2, 3, 3).

1.19 Nechť u je uzel stupně k grafu G a u' jeho obraz v izomorfním grafu G'. Vyslovte nějaké tvrzení o stupních sousedů uzlu u a sousedů uzlu u'.

1.20 Mějme graf G = ⟨H,U⟩ a libovolnou podmnožinu jeho uzlů A ⊆ U. Označme jako B množinu sousedů uzlů z množiny A: B=Γ(A). Lze tvrdit, že platí Γ(B) = A ?

1.21 Vytvořte návod, jak pro danou neklesající posloupnost přirozených čísel

(d1, d2, ..., dn) určit nějaký obecný graf (pokud existuje), jehož je tato posloupnost souborem stupňů.

1.22 Nechť G1 a G2 jsou dva různé faktory neorientovaného grafu G, označíme ∂1(ui), resp. ∂2(ui) stupeň uzlu ui v grafu G1, resp. G2. Vyjádřete pomocí ∂1(ui) a ∂2(ui) možné rozpětí hodnot pro stupeň ∂'(ui) uzlu ui ve faktoru G' grafu G vytvořeném jako symetrická diference faktorů G1 a G2 (G' = G1 ⊕ G2).

2.1 Mějme dva souvislé grafy G1 a G2. Je sjednocení G1 ∪ G2 souvislý graf ?

2.2 Nechť G je obyčejný graf s n uzly. Stanovte podmínky pro počet jeho hran, které zaručí, že

a) určitě není souvislý
b) určitě je souvislý

2.3 Kolik různých kružnic délky k (k≥3) obsahuje úplný graf Kn (n≥3) ? Za různé nepovažujte kružnice, které se jakožto posloupnosti uzlů liší pouze volbou počátečního uzlu nebo opačným pořadím procházení uzlů.

2.4 Kolik různých cest (resp. sledů) délky k existuje mezi pevně zvolenými uzly u a v úplného grafu Kn?

2.5 Nechť stromy T1 a T2 mají alespoň jednu společnou hranu. Je symetrická diference T1 ⊕ T2 souvislým grafem ?

2.6 Vyjádřete podmínku souvislosti grafu G pomocí (tranzitivního uzávěru) relace sousednosti Γ.

2.7 Určete minimální a maximální možný počet komponent obyčejného grafu, který má 10 uzlů a 16 hran.

2.8 Existuje nějaký graf, který nemá žádnou komponentu?

2.9 G1 a G2 jsou dva disjunktní neorientované grafy, G1 (G2) má m1 (m2) hran, n1 (n2) uzlů a p1 (p2) komponent.

a) Jakým minimálním počtem hran je třeba doplnit sjednocení G1∪ G2 tak, aby vznikl souvislý graf?
b) Změní se tento počet, pokud stanovíme, že doplňované hrany musí mít vždy jeden krajní uzel v G1 a druhý v G2?
c) Kolik hran musíme odebrat z grafu vytvořeného v bodu a), aby zbyla jeho kostra?

2.10 Bude graf vzniklý zrušením orientace libovolného obyčejného orientovaného grafu obyčejným neorientovaným grafem ?

2.11 Je možné, aby byl silně souvislý nějaký orientovaný graf, jehož některé uzly mají vstupní stupeň rovný nule ?

2.12 Orientovaný graf G vznikl jako sjednocení několika cyklů. Je graf G silně souvislý ?

2.13 Kolik silných komponent má orientovaný graf G = ⟨H,U,⟩σ, který neobsahuje žádný cyklus?

2.14 Jaký je minimální počet hran silně souvislého orientovaného grafu s n (≥2) uzly ?

2.15 Pokuste se formulovat nutnou a postačující podmínku pro to, aby orientovaný graf G obsahoval nekonečně mnoho spojení z uzlu u do uzlu v.

2.16 Jaký je minimální počet hran orientovaného grafu, který má n (≥3) uzlů a k (2 ≤ k ≤ n-1) silných komponent ?

2.17 Souvislý orientovaný graf G obsahuje aspoň dva uzly a má konečně mnoho různých spojení. Může být tento graf silně souvislý ?

2.18 Existuje nějaký orientovaný graf, který nemá žádnou sinou komponentu?