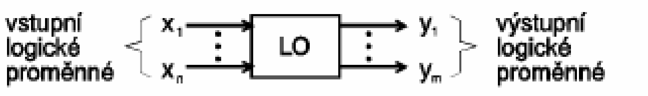
Y36SAP-2

Logické obvody kombinační
Formy popisu
Příklad návrhu
Sčítačka

Logický obvod

- Vstupy a výstupy nabývají pouze hodnot 0 nebo 1



Kombinační obvod – popsán kombinační funkcí

Hodnoty všech výstupních proměnných jsou v každém časovém okamžiku určeny pouze hodnotami vstupních proměnných v témže časovém okamžiku

Logický obvod

- Dvojkové signály – 0 a 1
- Číslicový návrh
- Číslicové obvody – logické obvody
- Realizace základních bloků číslicového počítače – obecněji číslicového systému - a jejich komunikace
- Kombinační obvody x sekvenční obvody
- Práce s moderními návrhovými systémy (Laboratoř)

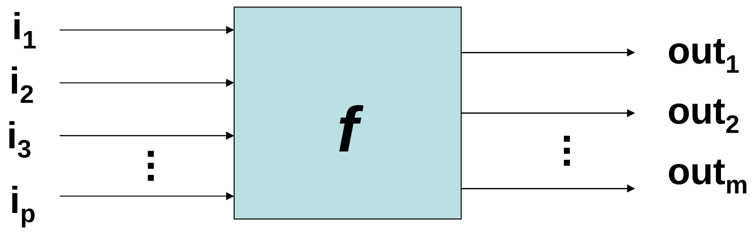
Problémy k řešení při návrhu

- Specifikace – co chceme realizovat
- Hlavně aby to fungovalo
- Optimalizace z různých hledisek
  - Velikost
  - Rychlost
  - Příkon
  - Spolehlivost
  - Cena včetně návrhových prostředků
  - Rychlost návrhu
- Testovatelnost – DFT = design for testability

Kombinační funkce

Kombinační funkce:

$$out_k = f(i_1, i_2, i_3, \dots i_p),\ k=1,2,\dots,m$$



Jednotlivé fáze návrhového procesu pro číslicové systémy

- Specifikace
- Určení vstupů a výstupů

Příklad 1, sl. 7 - 9

- Pravdivostní tabulky
- Booleovské rovnice

Příklad 1, sl. 10 - 12

- Návrh realizace na úrovni hradel **Příklad 1, sl. 12-15**
- Simulace na úrovni hradel
- Realizace číslicového obvodu
- Ověření návrhu

Příklad 1

Co ?

Chci sčítat …

JAK ???

Co chci dostat?

Příklad 1

Dvojková čísla A a B

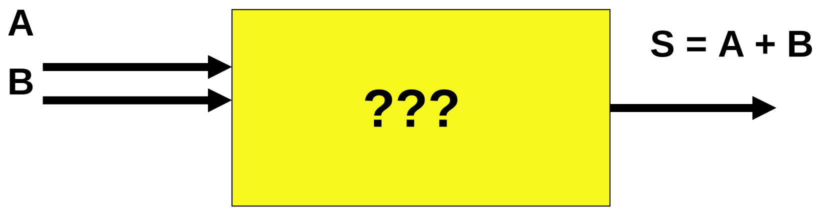
JAK – číslicově, dvojkově (binárně)

Dvojkové číslo S = A + B

Dvojková čísla budou nejprve 1 bitová, tzn.:

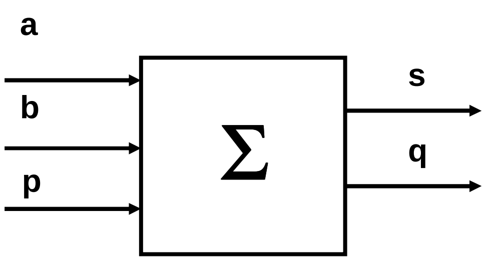
0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, ale pozor 1+1=10 !!! Přenos !!!

Příklad 1



A co přenos ???

Příklad 1



Příklad 1 - intuitivně

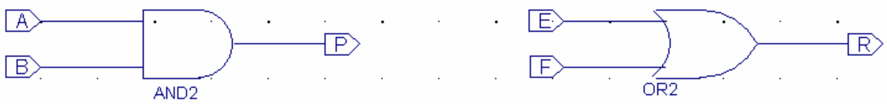
a	b	p	q	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$s = \bar{a}\bar{b}p + \bar{a}b\bar{p} + a\bar{b}\bar{p} + abp$$

$$q = \bar{a}bp + a\bar{b}p + ab\bar{p} + abp$$

Úpravy výrazů na tabuli:

Realizace ???



A .B = P …. and

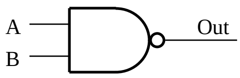
E+F = R … or, V

$\overline{C.D}$ = P

G xor H = S

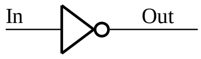
Funkce hradel, Booleova algebra

NAND Gate



A	B	Out
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

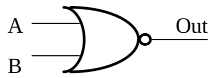
Invertor



$Out = \overline{In}$

In	Out
0	1
1	0

NOR Gate

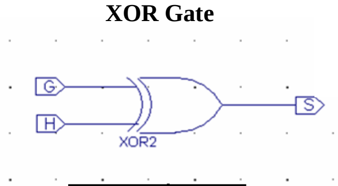


A	B	Out
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 13

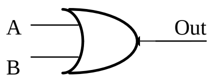
Funkce hradel, Booleova algebra

XOR Gate



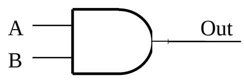
G	H	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

OR Gate



A	B	Out
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

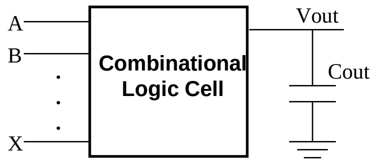
AND Gate



A	B	Out
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 14

Obecná kombinační logická buňka, zpoždění



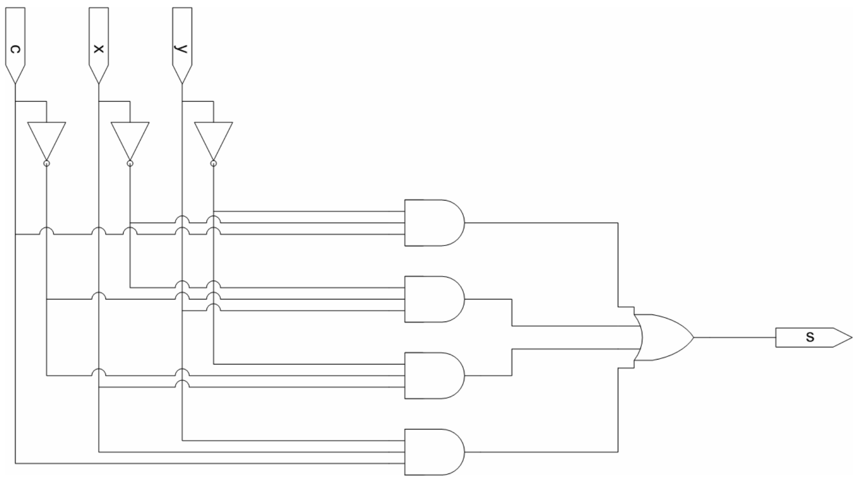
Kombinační buňka

je plně určena:

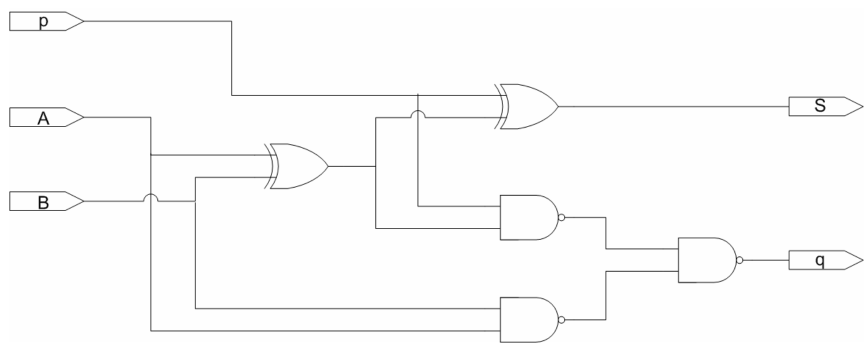
- Funkčním chováním
  - Pravdivostní tabulka,
  - Algebraický výraz (logická rovnice), ….
- Zatížením vstupů
- Propagačním zpožděním z každého vstupu na výstup a pro každou změnu signálu
- Ty nejrychlejší a nejmenší (z nejméně transistorů) jsou

Invertor (v CMOS 2 transistory), NAND a NOR (4), AND a OR (6)
XOR

Sčítačka



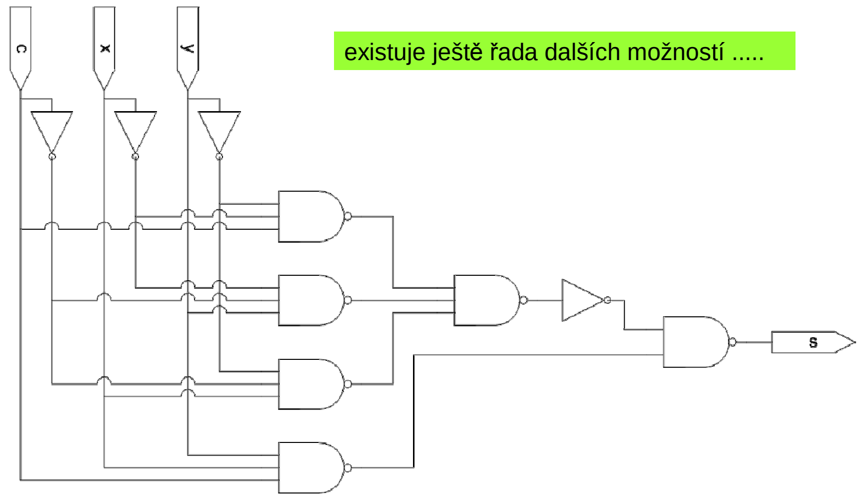
Sčítačka



2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 17

Sčítačka - ještě jiné řešení

existuje ještě řada dalších možností .....



2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 18

Návrhový proces

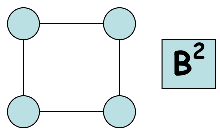
- Specifikace
- Určení vstupů a výstupů
- Pravdivostní tabulky
- Boolovské rovnice
- Návrh realizace na úrovni hradel
- Simulace na úrovni hradel
- Realizace číslicového obvodu
- Ověření návrhu

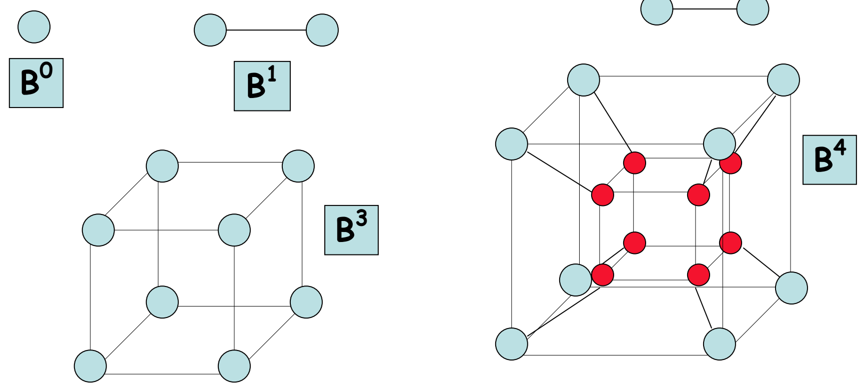
Základní pojmy logické syntézy

- Logické funkce a jejich reprezentace, formy popisu a jejich vzájemný převod
  - tabulka
  - n-rozměrné krychle
  - algebraický zápis
  - mapy
- Logická minimalizace –
  - Karnaughova mapa
  - existuji další metody ....
- Realizace na úrovni hradel

Boolovská n-krychle (cube) B^n

- **B = { 0,1}**
- **B^2 = {0,1} X {0,1} = {00, 01, 10, 11}**



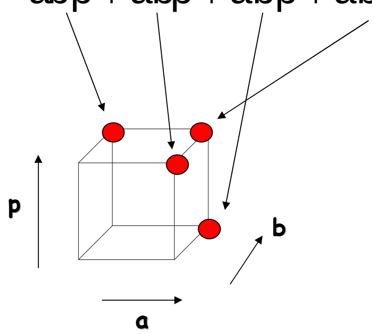


Příklad 1 – stavový index

s_i	a	b	p	q	S
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1

SOP – Úplná normální disjunktivní forma

$$q = \bar{a}bp + a\bar{b}p + ab\bar{p} + abp$$



s_i – stavový index

Booleovské funkce

$f(x) : B^n \rightarrow B$

$B = \{0, 1\}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- $x_1, x_2, \ldots$ jsou proměnné - variables
- $x_1, \overline{x}_1, x_2, \overline{x}_2, \ldots$ jsou literály - literals
- Každému vrcholu B^n je přiřazena 0 nebo 1
  - onset f je $\{x|f(x)=1\} = f^1 = f^{-1}(1)$
  - offset f je $\{x|f(x)=0\} = f^0 = f^{-1}(0)$
- jestliže $f^1 = B^n$, f je tautologie, tzn. $f \equiv 1$
- jestliže $f^0 = B^n$ ($f^1 = \emptyset$), f není splnitelná
- jestliže $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in B^n$, pak f a g jsou ekvivalentní

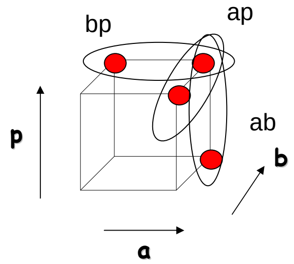
Obvyklé zjednodušení: f namísto f^1

Příklad 1 - krychle

s_i	a	b	p	q	S
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1

SOP – Úplná normální disjunktivní forma ÚNDF

$$q = \overline{a}bp + a\overline{b}p + ab\overline{p} + abp$$



SOP – Minimální normální disjunktivní forma MNDF

$q = bp + ap + ab$

Literály

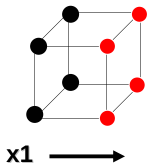
Literál je proměnná nebo její negace

$y, \bar{y}$

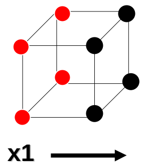
Literál reprezentuje logickou funkci.

Literál x1 reprezentuje logickou funkci f, kde

$f = \{x | x1 = 1\}$



f = x1



$g = \overline{x1}$

Literál $\overline{x1}$ reprezentuje logickou funkci g, kde

$g = \{x | x1 = 0\}$

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 25

Boolovské formule - výrazy

Boolovské formule (Boolean formulas) mohou být reprezentovány formulemi definovanými jako zřetězení

- závorek (,)
- literálů x, y, z, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
- Boolovských operátorů + (OR), . (AND)
- komplementace, např. $\overline{x + y}$

Příklady

$$f = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

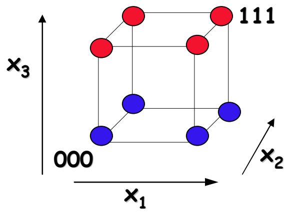
$$h = a + b \cdot c = \overline{\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c})}$$

Obvykle nahrazujeme . jen zřetězením, a . b → ab

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 26

Logické funkce

Existuje $\mathbf{2^n}$ vrcholů v prostoru $\mathbf{B^n}$



000		1
001		0
010		1
011		0
100	$\Rightarrow$	1
101		0
110		1
111		0

Existuje $\mathbf{2^{2^n}}$ různých logických funkcí

Každá podmnožina vrcholů tvoří jinou logickou funkci:

$f \subseteq \mathbf{B^n}$

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 27

Logické funkce

- Ale existuje nekonečně logických **formulí**

$$
\begin{aligned}
f &= x + y \\
&= xy + x\overline{y} + xy \\
&= x\overline{x} + x\overline{y} + y \\
&= (x + \overline{y})(x + y) + x\overline{y}
\end{aligned}
$$

- Syntéza – nalezení "nejlepší" formule (nebo “reprezentace”) z hlediska cílové platformy

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 28

Boolovské operace - AND, OR, KOMPLEMENT

$f : B^n \rightarrow B$

$g : B^n \rightarrow B$

- AND - **fg = h** kde
  h = {x| f(x)=1 and g(x)=1}

- OR - **f + g = h** kde
  h = {x| f(x)=1 or g(x)=1}

- KOMPLEMENT - $\overline{\mathbf{f}}$ **= h** kde
  h = {x| f(x) = 0}

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 29

Úpravy algebraických výrazů

Shannonův expanzní teorém:

$$f(a,b,....,c) = a.f(1,b,...,c) + \overline{a}.f(0,b,...,c)$$

Důkaz: platí pro všechna *a* ..... $\forall a \in \{0,1\}$

Důsledek:

$$f(a,b,....,c) = a.g(b,...,c) + \overline{a}.h(b,...,c)$$

Každá logická funkce se dá zapsat pomocí logického součtu, součinu a negace

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 30

Zákony Booleovy algebry

Booleeova agebra:

$BA = \{B, +, \bullet, \bar{\ }, 0, 1\}$

$B = \{0, 1\}$

$x, y, z \in B$

a platí Huntingtonovy axiomy

komutativní

$x + y = y + x$ $\quad$ $x \cdot y = y \cdot x$

asociativní

$(x + y) + z = x + (y + z)$ $\quad$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

distributivní

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ $\quad$ $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$

o neutrálnosti 0 a 1

$x + 0 = x$ $\quad$ $x \cdot 1 = x$

o agresivitě 0 a 1

$x \cdot 0 = 0$ $\quad$ $x + 1 = 1$

o idempotenci prvků

$x + x = x$ $\quad$ $x \cdot x = x$

vyloučeného třetího

$x + \overline{x} = 1$ $\quad$ $x \cdot \overline{x} = 0$

dvojí negace

$\overline{\overline{x}} = x$

De Morganova pravidla

$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\quad$ $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

Huntingtonovy axiomy

Princip duality:

platí zákon Z →• platí zákon Z*

Z → Z* :

+ → •

• → +

0 → 1

1 → 0

Př.: viz. pravidla Booleovy algebry

Další zákony Booleovy algebry

absorbce

$x + x \cdot y = x$ $\quad$ $x \cdot (x + y) = x$

absorbce negace

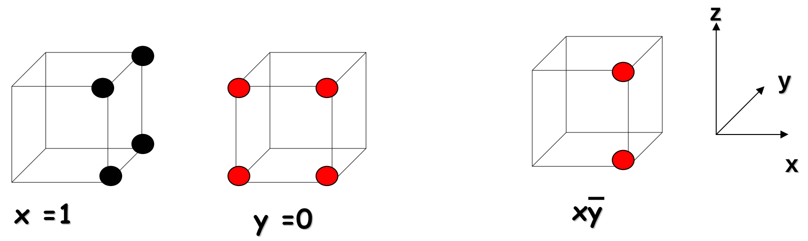
$x + \overline{x} \cdot y = x + y$ $\quad$ $x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$

Krychle - cube

- Logický součin (AND) množiny literálů ("conjunction - konjunkce" literálů) je krychle

$C = x\overline{y}$ $\qquad C = (x=1)(y=0)$

ale může to být i samotný literál



Reprezentace Boolovských funkcí

- Pravdivostní tabulka funkce f : $B^n \rightarrow B$ je vyjádření jejich hodnot všech 2^n vrcholů z B^n.
- Pro

  $f = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}d + \overline{a}\,\overline{b}cd + \overline{a}b\overline{c}d + a\overline{b}\,\overline{c}d + a\overline{b}cd + ab\overline{c}d + abc\overline{d} + abcd$

  Pravdivostní tabulka (truth table):

  Nepoužitelná pro velká n
  (ale je kanonická - canonical)

  Kanonická znamená: když jsou dvě funkce stejné, je jejich kanonická reprezentace izomorfní.

	abcd	f
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	0
3	0011	1
4	0100	0
5	0101	1
6	0110	0
7	0111	0
8	1000	0
9	1001	1
10	1010	0
11	1011	1
12	1100	0
13	1101	1
14	1110	1
15	1111	1

Pravdivostní tabulka

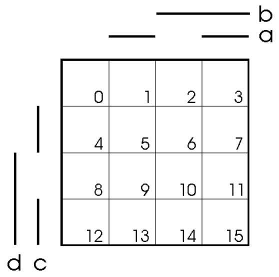
Pravdivostní tabulka:

Nejpřirozenější forma: výčet všech kombinací hodnot vstupních proměnných a jim odpovídajících hodnot výstupních proměnných

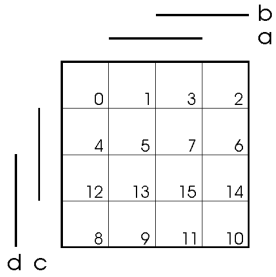
Př.: Identifikujte LF f_1 až f_6 dle pravdivostních tabulek:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0
		AND	**NAND**	**OR**	**NOR**	**EQU**	**NEQU**

Mapy



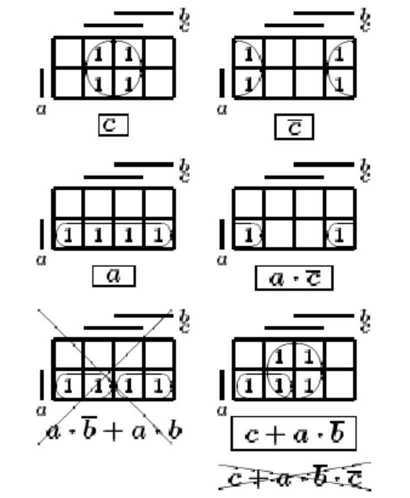
Svobodova mapa



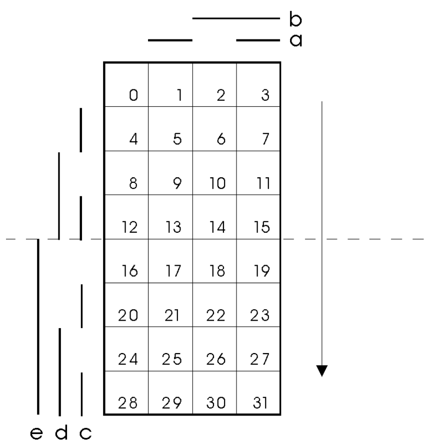
Karnaughova mapa

Zápis do mapy – podle přiřazení proměnných, tzn. proužků, které vyjadřují kdy nabývá proměnná hodnotu 1

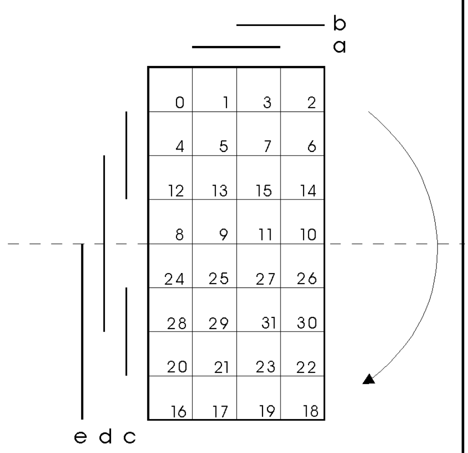
Minimalizace v mapě – viz →



Změna velikosti mapy – zvyšování počtu proměnných



Svobodova



Karnaughova

Programovatelné obvody

- Specifikace
- Určení vstupů a výstupů
- Pravdivostní tabulky
- Booleovské rovnice
- Návrh realizace na úrovni hradel
- Simulace na úrovni hradel
- Realizace číslicového obvodu
- Ověření návrhu - SW simulátotory

automatizováno

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 39

Kombinační x sekvenční obvody

- Kombinační – vystup je dán kombinací vstupů, „nezáleží“ na čase
- Sekvenční – výstup závisí na posloupnosti (sekvenci) hodnot na vstupech, realizuje se tzv. zpětnou vazbou

- Vše lze matematicky popsat
  - Logická funkce
  - Konečný automat - FSM

2008-Kubátová Y36SAP-Logické obvody 40