VLASTNOSTI GRAFŮ

Pokrytí a vzdálenost

Seznámíme se s následujícími pojmy:

- **pokrytí grafu, Eulerův graf, Eulerův tah**
- **nezávislá podmnožina uzlů, nezávislost grafu, klika, klikovost grafu, dominující podmnožina uzlů, dominance, barevnost (chromatické číslo) grafu, bichromatický graf, úplný bichromatický graf**
- **vzdálenost na grafu, excentricita uzlu v grafu, průměr grafu, poloměr grafu, střed grafu**

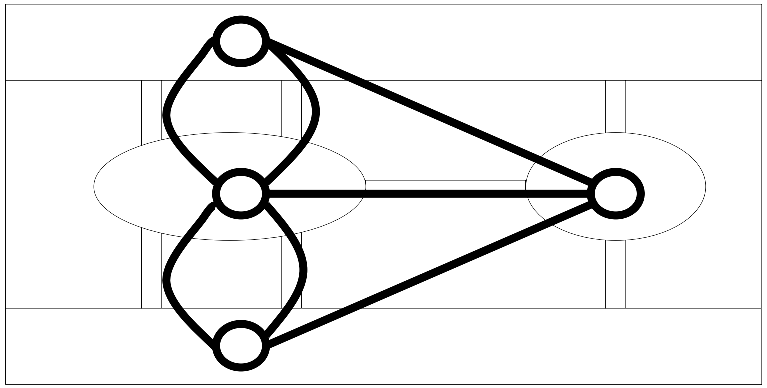
Skripta odstavec 3.1, str. 37 - 49

Vzpomeňme si na okružní jízdu pražskou MHD ...

- chceme projet všechny úseky všech linek právě jednou a v rámci jediné okružní jízdy
- problém **čínského listonoše**

Zkusíme to nejdříve se sedmi mosty v Královci ...

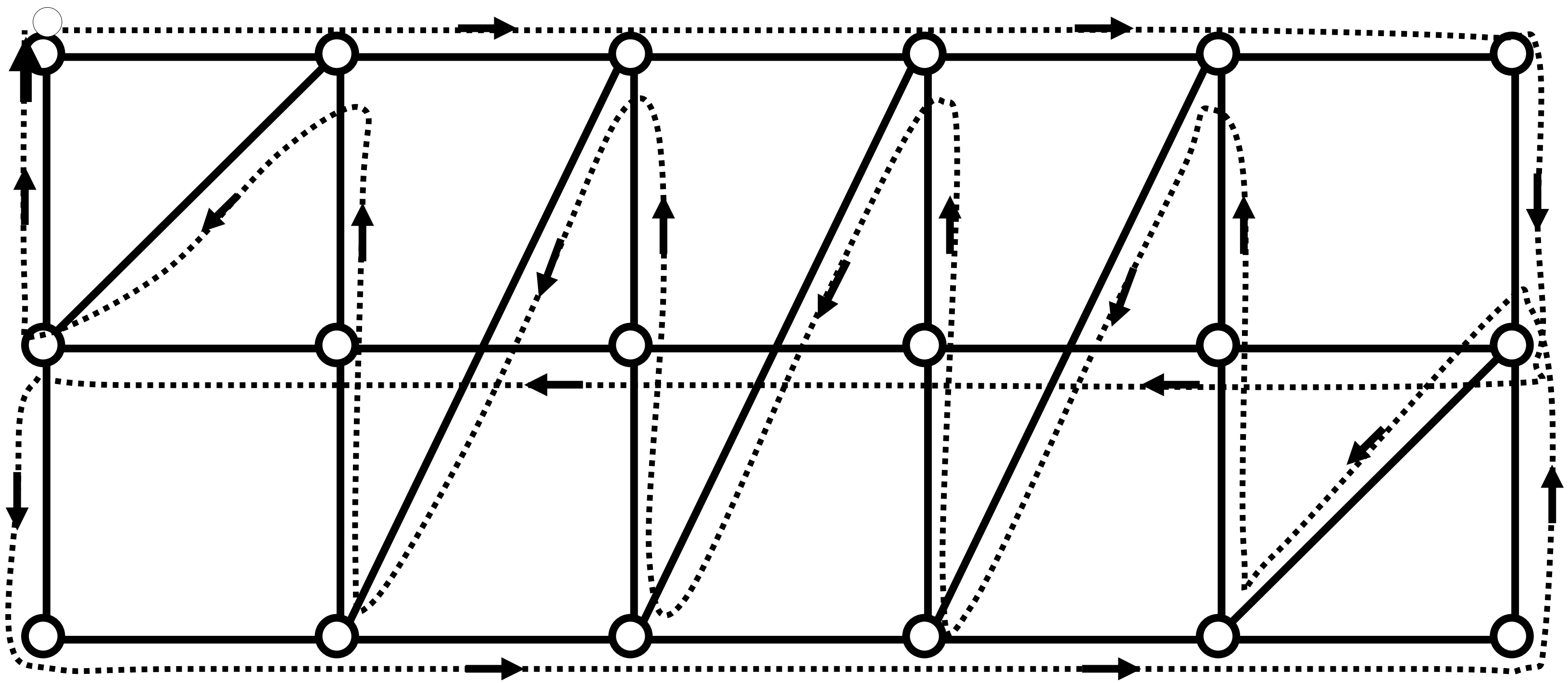
Problém sedmi mostů města Královce



Pokrytí (neorientovaného) grafu = $\{H_i\}$ ... rozklad množiny hran H do tříd, kde každá třída H_i je **tahem** grafu G.

Minimální pokrytí má minimální počet tahů

Jak asi vypadají grafy, které lze pokrýt jediným uzavřeným tahem ???



Eulerův graf : $\delta(u)$ je sudé pro všechny uzly $u \in U$

POZOR – jiná definice požaduje i souvislost (hned uvidíme, proč)

?Jaké vlastnosti mají Eulerovy grafy?

V: G je Eulerův graf $\Leftrightarrow$ $G = \cup K_i,\ K_i \cap K_j = \emptyset$ (hranově)
(tj. Eulerův graf je sjednocení hranově disjunktních kružnic)

Být Eulerovým grafem k pokrytí **NESTAČÍ:**

V: Graf lze pokrýt **jedním uzavřeným tahem** $\Leftrightarrow$
je-li **souvislý a Eulerův.**

?A co když netrváme na uzavřeném tahu?

V: Nechť má souvislý graf G právě **2n uzlů lichého stupně**.
Potom každé jeho minimální pokrytí tvoří **n otevřených tahů**.

Orientovaný Eulerův graf: $\delta^+(u) = \delta^-(u)$

?A jak to dopadlo s čínským pošťákem? O tom snad jindy ...

Nezávislost, klikovost, dominance

Nezávislá podmnožina uzlů $I \subseteq U$: $I \cap \Gamma(I) = \emptyset$

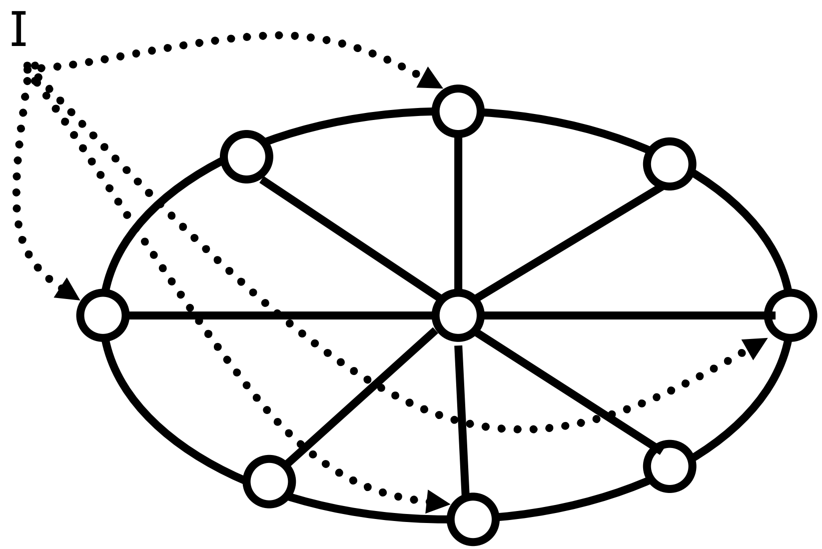
maximální nezávislá podmnožina (v sobě) ...

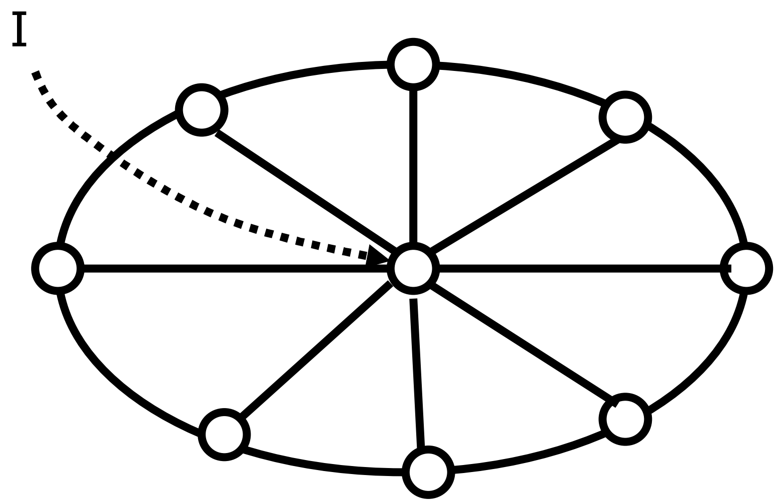
Nezávislost grafu

$$\alpha(G) = \max |I| \text{ pro } I \in Ind(G)$$

Klika grafu – maximální úplný podgraf

Klikovost $\omega(G)$: platí $\omega(G) = \alpha(-G)$

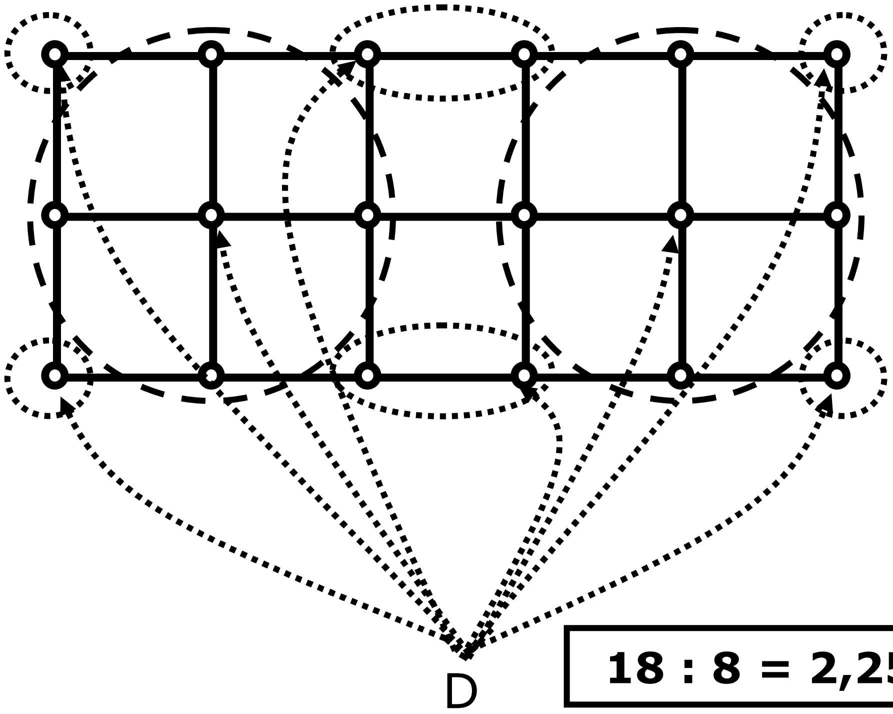




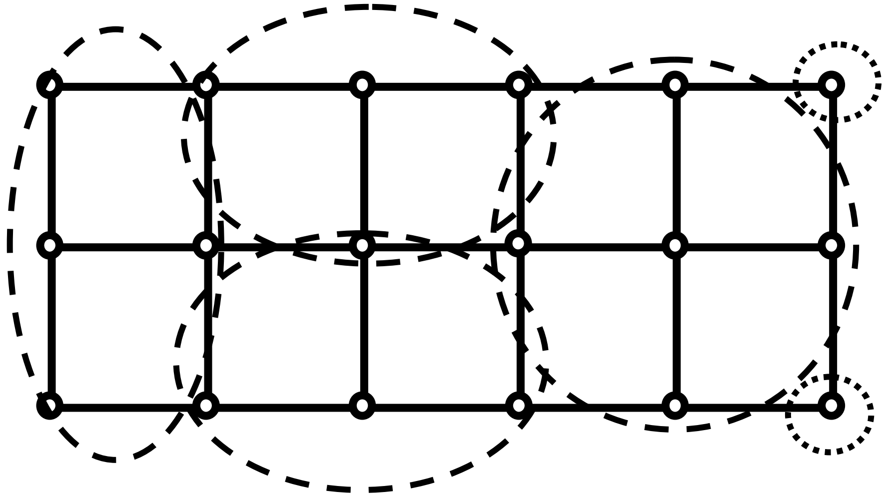
Dominující podmnožina uzlů $D \subseteq U$: $D \cup \Gamma(D) = U$
minimální dominující podmnožina (v sobě) ...

Dominance grafu G

$\boldsymbol{\beta(G) =}$ min $|D|$ pro $D \in Dom(G)$



18 : 8 = 2,25



18 : 6 = 3,0

? Obecné vlastnosti ?

<u>V:</u> Nechť I je nezávislá podmnožina uzlů v G. Potom

(I je maximální $\Leftrightarrow$ I je dominující v G).

<u>Důsledek:</u> $\beta(G) \leq \alpha(G)$

<u>Příklady aplikací:</u> úlohy o dámách x úlohy o strážích

? Složitost určování nezávislosti a dominance ?

Strom generování nezávislých podmnožin - **exponenciální**

Barevnost grafu

? Co znamená "barvit" graf (uzly, hrany) ?

Stejně obarvené uzly **nesmí sousedit (tj. být spojeny hranou).**

? Jak definovat barvení hran?

Chromatické číslo grafu G:

χ**(G) = minimální počet barev** postačující k obarvení

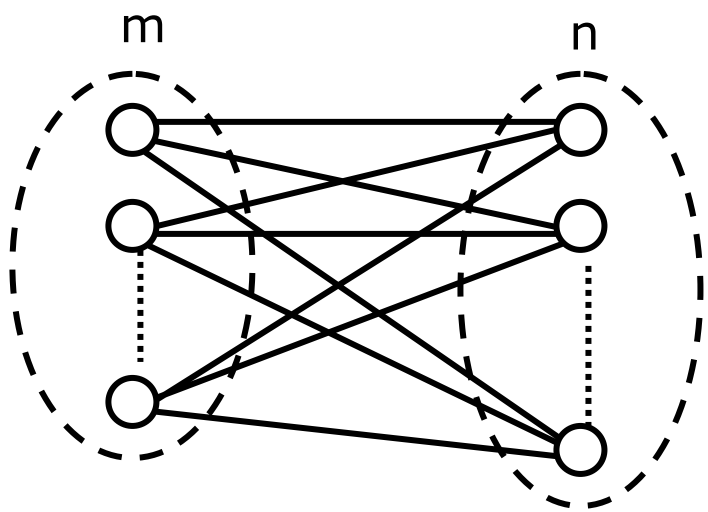
?Jak se určí chromatické číslo grafu? Těžko!

Jednoduchá zjištění o barevnosti:

- $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |U|$
- $\chi(G) \geq \omega(G)$
- $\chi(G) \leq \delta_{max} + 1$
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ **G neobsahuje kružnici liché délky**

Bipartitní graf - $\chi(G) = 2$

(bichromatický graf) - uzly se rozpadají do dvou tříd



Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

má všechny možné hrany

?Jak vypadá maximální k-chromatický graf?

označíme $n_1, n_2, \ldots, n_k$ počty uzlů jednotlivých barev

počty hran budou

$$n_1n_2 + n_1n_3 + \ldots n_1n_k + n_2n_3 + \ldots + n_{k-1}n_k =$$

$$= \sum n_in_j \quad \ldots \text{ přes } i<j$$

?Pro jaké hodnoty n_i bude počet hran maximální ?

Kontrolní otázky

5.1 Vyslovte tvrzení o tom, kdy lze orientovaný graf pokrýt jedním uzavřeným orientovaným tahem.

5.2 Je možné prohlásit, že orientovaný Eulerův graf je silně souvislý? Pokud ano, dokažte, pokud nikoliv, vyvraťte protipříkladem.

5.3 Nechť {S1, S2, ..., Sk} je minimální pokrytí neorientovaného grafu G tvořené k otevřenými tahy. Je z této skutečnosti možné odvodit nějaké tvrzení o stupních uzlů grafu G nebo o počtu jeho komponent?

5.4 Graf G vzniknul jako sjednocení několika hranově disjunktních kružnic. Lze tento graf pokrýt jediným uzavřeným tahem?

5.5 Mějme libovolný orientovaný graf. Jak určíme minimální počet hran, jejichž přidáním se tento graf stane orientovaným Eulerovým grafem? Bude třeba ještě přidávat nějaké hrany, aby bylo možné vzniklý graf pokrýt jedním uzavřeným tahem?

5.6 Dokažte následující tvrzení: Neorientovaný graf G je Eulerův právě tehdy, pokud pro libovolný rozklad {U1, U2} jeho množiny uzlů platí, že má sudý počet hran s jedním krajním uzlem v U1 a druhým v U2.

5.7 Pro které hodnoty m,n ($m \geq n \geq 2$) je úplný neorientovaný bipartitní graf $K_{m,n}$ možné pokrýt jediným uzavřeným, resp. otevřeným tahem?

5.8 Určete nezávislost $\alpha(C_n)$ a dominanci $\beta(C_n)$ kružnice C_n tvořené n (≥ 3) hranami (výsledkem mají být výrazy závislé na n).

Kontrolní otázky

5.9 Jaký je maximální možný počet hran v obyčejném (neorientovaném) bichromatickém grafu s 21 uzly?

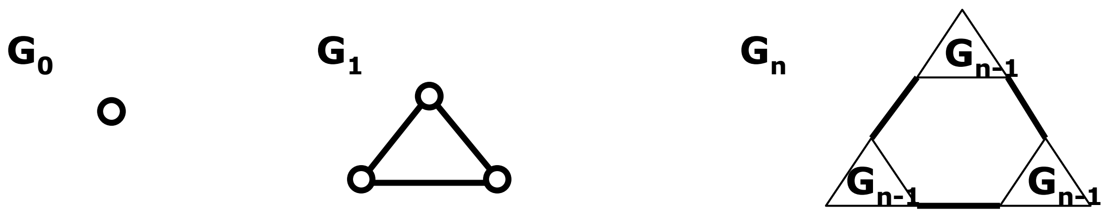
5.10 Navrhněte algoritmus, který zjistí, zda je zadaný neorientovaný graf bipartitní (tj. má chromatické číslo 2). Určete asymptotickou složitost navrženého algoritmu.

5.11 Jak vypadá neorientovaný graf, který má chromatické číslo 3, ale odebráním libovolné jeho hrany vznikne graf s chromatickým číslem 2?

5.12 Sestrojte nesouvislý obyčejný neorientovaný graf, který má 13 uzlů, chromatické číslo 3 a maximální počet hran.

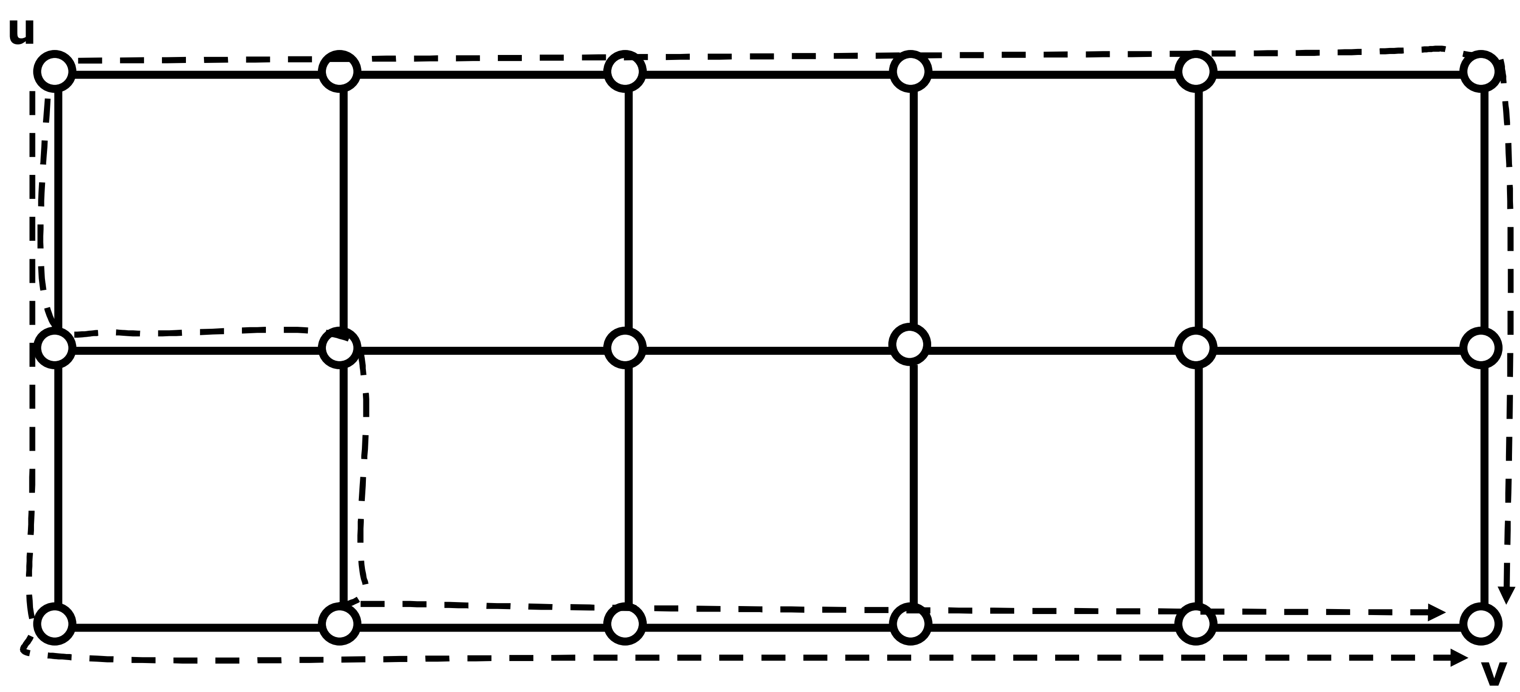
5.13 Graf G′ nazýváme barycentrickým zjemněním neorientovaného grafu G, pokud G′ vznikl rozpůlením všech hran grafu G. Odvoďte nějaké tvrzení o chromatickém čísle grafu G′.

5.14 Určete nezávislost $\alpha(G_n)$, dominanci $\beta(G_n)$ a chromatické číslo $\chi(G_n)$ n-tého člena fraktální rodiny grafů definovaných obrázkem.



Vzdálenost na grafu

Jak daleko je z uzlu u do uzlu v ??



d(u,v) = 7

počet různých nejkratších cest ?

= 6 + 5 + 4 + ... + 1 =

= 7 . 6 / 2 = **21**

d(u,v) = **délka** (počet hran) nejkratší cesty z u do v

(0) d(u,v) je nezáporné celé číslo

(1) $d(u,v) \geq 0$, přičemž $d(u,v)=0$, právě když $u=v$

(2) $d(u,v) = d(v,u)$

(3) $d(u,v) \leq d(u,z) + d(z,v)$

(4) je-li $d(u,v)>1$, pak $\exists z: z \neq u,v: d(u,v) = d(u,z) + d(z,v)$

Průměr grafu T(G) = $\max d(u,v) \quad \forall u,v \in U$

Excentricita uzlu **u** v grafu G: **e(u,G)** = $\max d(u,v) \quad \forall v \in U$

Poloměr grafu G: **r(G)** = $\min e(u,G)\ \forall u \in U$, **střed(-y) grafu**

<u>Věta:</u> $r(G) \leq T(G) \leq 2.r(G)$

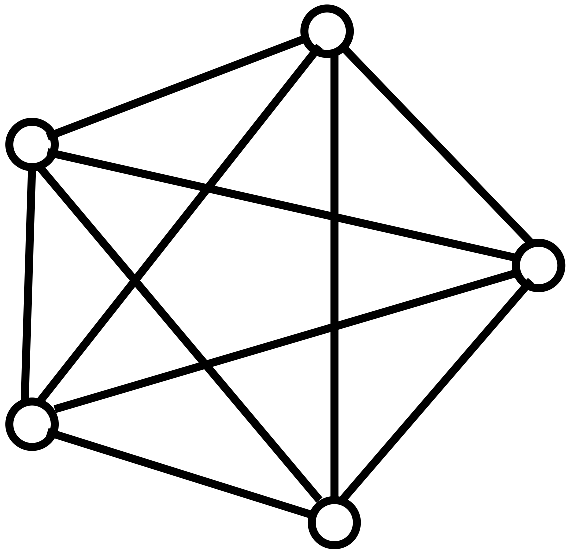
(pro stromy dokonce $T(G)=2.r(G)$ nebo $T(G)=2.r(G)-1$)

Kontrolní otázka:

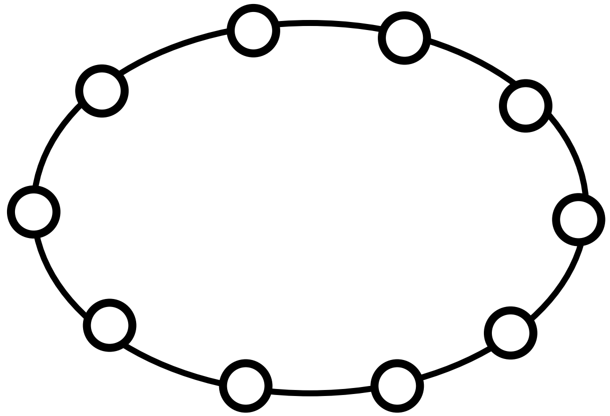
5.15 Určete poloměr, průměr a středy pro ...

a) cestu o n uzlech

b) úplný graf o n uzlech



c) kružnici o n uzlech



?Jak to bude se vzdáleností v orientovaném grafu?

Uvažuje se opět nejkratší **cesta – ale orientovaná**.

?Další možné zobecnění?

Grafy s (nezáporným) ohodnocením hran **w: H** $\rightarrow$ $\mathbf{R^+}$

w-délka (orientovaného!) spojení $S=\langle h_1, h_2, \ldots, h_n\rangle$:

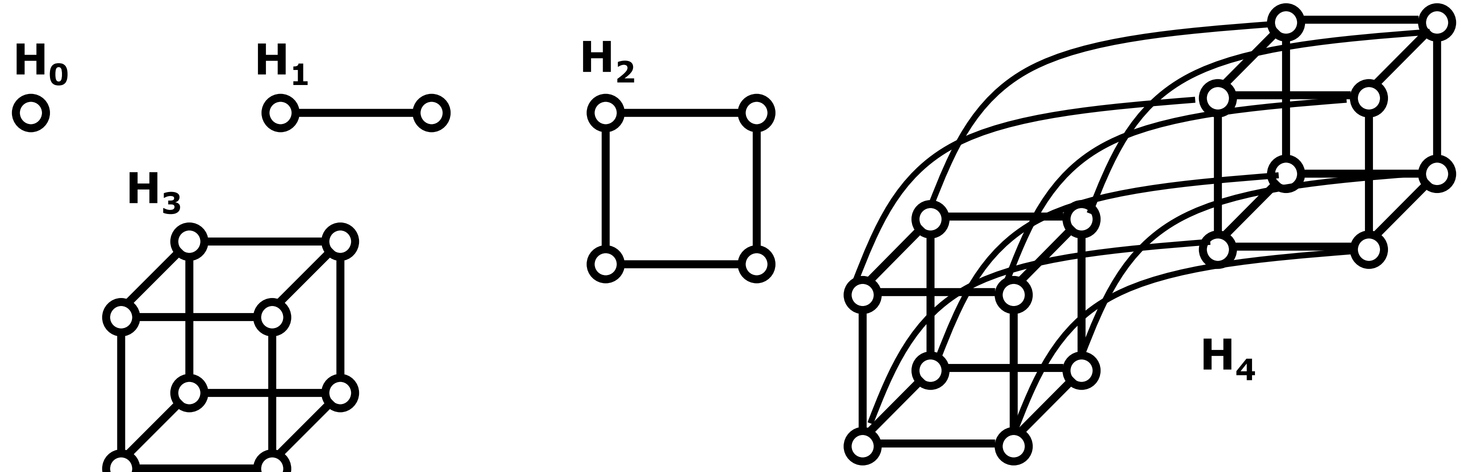
$$\sum \mathbf{w(h_i)}$$

$\mathbf{d_w(u,v)}$= w-délka nejkratšího (orientovaného!) spojení

Problém určování vzdáleností (nejkratších cest) budeme řešit později.

Kontrolní otázky

5.16 Určete poloměr a průměr hyperkrychle H_k dimenze k. Hyperkrychle dimenze k má množinu uzlů tvořenou všemi binárními posloupnostmi délky k. Hranou jsou spojeny vždy ty dvojice uzlů, jejichž binární posloupnosti se liší pouze v jediném místě.



5.17 Mějme dva disjunktní grafy G1 a G2 s poloměry r1 a r2. Graf G vytvoříme tak, že střed grafu G1 spojíme hranou se středem grafu G2. Určete poloměr vzniklého grafu G v závislosti na r1 a r2.