Přednáška #10: **Kolektivní komunikační algoritmy I**

Kolektivní komunikační operace (KKO)

- vysílání jeden-všem (OAB)
- vysílání skupině (MC)
- rozesílání jeden-všem (OAS)
- vysílání všichni-všem (AAB)
- rozesílání všichni-všem (AAS)

Komunikační modely

- Počet portů: 1-portový, výstupně všeportový, nebo všeportový model.
- Směrovost kanálů: simplexní, poloduplexní, nebo plně-duplexní.
- Technika přepínání: ulož-a-pošli-dál (SF) nebo červí (WH) přepínání.
- Možnosti manipulace s pakety: kombinující nebo nekombinující model.
- Velikost paketu: μ

Parametry pro měření komunikační složitosti

- Časová složitost kolektivní operace XXX:
  - Model konstantního času: počet kroků (kol): spodní mez $\rho_{\mathrm{XXX}}(G)$, horní mez $r_{\mathrm{XXX}}(G)$.
    - SF sítě: 1 krok = množina souběžných hopů mezi sousedy.
    - WH sítě: 1 krok = množina současně použitých linkově disjunktních cest.
  - Model lineárního času: kom. zpoždění v sek.: spodní mez $\tau_{\mathrm{XXX}}(G)$, horní mez $t_{\mathrm{XXX}}(G)$.
- Komunikační práce: celkový počet hopů (SF) či paketo-hran (WH).
  Spodní mez $\eta_{\mathrm{XXX}}(G)$, horní mez $h_{\mathrm{XXX}}(G)$.
- Požadavky na velikost pomocných front uvnitř směrovačů β:
  vztahuje se většinou pouze na SF sítě, WH směrovače mívají $\beta = 0$.
- Komunikační efektivnost: efektivní kolektivní komunikační algoritmy by měly
  - plně využívat propustnost (bisekční/síťovou) sítě

    = být schopny využít všech použitelných kanálů a front během celé operace.
  - eliminovat redundantní komunikaci
    - podmínka NODUP = NO-DUPlication,
    - podmínka NOHO = NO-node-Hears-its-Own-information.

Příklad výpočtů spodních mezí složitosti KKO

Lemma 1. *Spodní meze počtu kroků a kom. práce KKO pro všeportovou plně-duplexní SF nekombinující Q_n.*

kom. operace XXX	$\rho_{\mathrm{XXX}}(Q_n)$	$\eta_{\mathrm{XXX}}(Q_n)$
OAB	n	$2^n - 1$
AAB	$\lceil (2^n - 1)/n \rceil$	$2^n(2^n - 1)$
OAS	$\lceil (2^n - 1)/n \rceil$	$n2^{n-1}$
AAS	2^{n-1}	$n2^{2n-1}$

Důkaz.

1. $\rho_{\mathrm{OAB}}(Q_n) = \mathrm{diam}(Q_n)$. $\eta_{\mathrm{OAB}}(Q_n) =$ počet cílových uzlů.
2. $\rho_{\mathrm{AAB}}(Q_n)$: Každý uzel má přijmout $2^n - 1$ různých paketů a přitom může přijmout nejvýše n paketů v 1 kroku. $\eta_{\mathrm{AAB}}(Q_n) = 2^n \eta_{\mathrm{OAB}}(Q_n)$.
3. $\rho_{\mathrm{OAS}}(Q_n)$: Každý zdroj má vyslat $2^n - 1$ různých paketů a přitom v 1 kroku může vyslat nejvýše n paketů. Ve vzdálenosti k od zdroje existuje $\binom{n}{k}$ vrcholů Q_n, proto $\eta_{\mathrm{OAS}}(Q_n) = \Sigma_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
4. AAS $= 2^n$ operací OAS běžících současně, proto $\eta_{\mathrm{AAS}}(Q_n) = 2^n \eta_{\mathrm{OAS}}(Q_n) = n2^{2n-1}$. Plně-duplexní všeportová Q_n může realizovat $n2^n$ hopů (paketo-hran) v 1 kroku, proto $\rho_{\mathrm{AAS}}(Q_n) = \left(n2^{2n-1}\right)/(n2^n) = 2^{n-1}$. ♣

Poznámka: $\exists$ optimální hyperkubické algoritmy dosahující přesně těchto spodních mezí.

Dolní meze

Lemma 2. *Mějme d-portovou propojovací síť G se SF přepínáním a uvažujme OAB ze zdroje $s \in V(G)$. Pak*

- $\eta_{\mathrm{OAB,d}}(G, s) = |V(G)| - 1$,
- $\rho_{\mathrm{OAB,d}}(G, s) = \begin{cases} \max(\mathrm{diam}(G), \log_{d+1}(|V(G)|)), & \textit{je-li } G \textit{ uzlově symetrická,} \\ \max(\mathrm{exc}(s, G), \log_{d+1}(|V(G)|)), & \textit{je-li nesymetrická} \end{cases}$,
- *spodní mez na* **součet délek použitých cest** $\gamma_{\mathrm{OAB,d}}(G, s) = \mathrm{exc}(s, G)$,
- $\tau_{\mathrm{OAB,d}}(G, s) = \varrho_{\mathrm{OAB,d}}(G, s)(t_s + mt_m) + \gamma_{\mathrm{OAB,d}}(G, s)t_d$.

Důkaz.

- Počet informovaných uzlů se v každém kroku může v nejlepším případě nejvýše d-násobit a růst řadou 1, $1 + d$, $1 + d + d(d + 1) = (d + 1)^2$, $\ldots$.
- Obecně, v kroku i jich může být nejvýše $(1 + d)^i \implies$ i v tom nejlepším případě nemůže OAB skončit dříve než mocnina $d + 1$ přeroste $|V(G)|$.
- Současně platí omezení, že se informace předává vždy pouze sousedům, proto je počet kroků OAB limitován excentricitou nebo průměrem.
- Délka žádné cesty nemůže být menší než excentricita.
- V každém kroku se posílají paralelně pakety o velikosti m po linkách s rychlostí t_m. ♣

Optimální OAB ve výstupně-všeportových SF sítích

Lemma 3. *Jakákoli výstupně-všeportová SF síť G má triviální krokově-optimální OAB algoritmus, zvaný záplavový.*

Algoritmus $\textsc{FloodingOAB}(G, s)$
Zdroj s: pošli paket všem svým sousedům.
Ostatní uzly: **if** (paket přišel poprvé) **then** nech si kopii a pošli ho všem zbývajícím sousedům **else** ignoruj ho.

Důkaz.

- Vysílací vlna dosáhne každý uzel poprvé po nejkratší cestě, čili $r_{\mathrm{OAB}}(G, s) = \mathrm{exc}(s, G)$.
- Obsahuje-li G cykly, některé uzly mohou obdržet paket více než jednou, čili není obecně NODUP. ♣

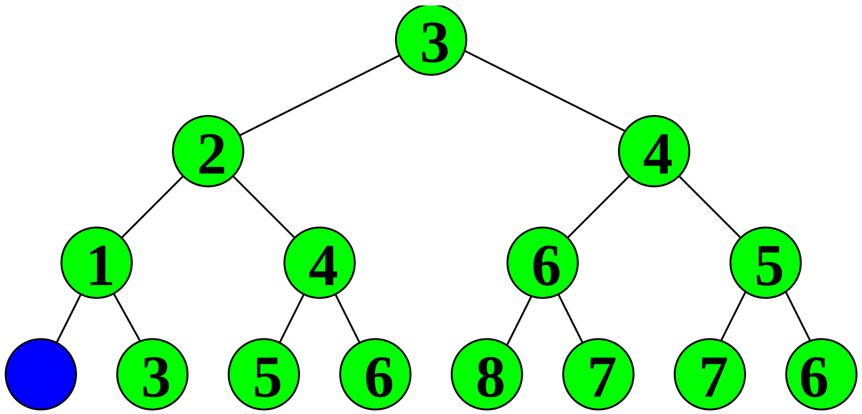
Diskuze:

- Funguje pro ortogonální i hyperkubické sítě.
- Zajištění NODUP: nutné používat kostry nejkratších cest ($=$ BFS stromy).

SF OAB: 1-portové a d-portové sítě

- Optimalita OAB v 1-portové síti: v nejlepším případě se počet informovaných uzlů může zdvojovat.
- Zjistit, zda $\exists$ optimální OAB algoritmus v 1-portové síti G, je NP-úplný problém.

Příklad: 1-portový úplný binární strom



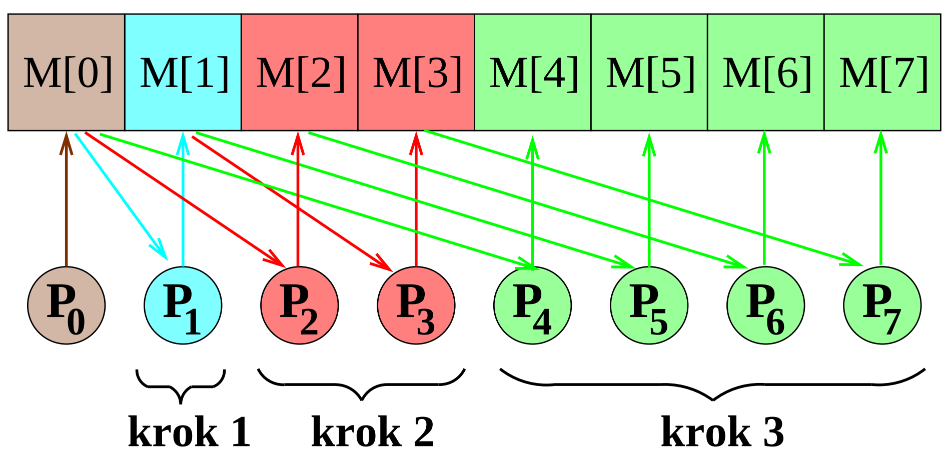
- 1-portový záplavový algoritmus: v případě volby ze 2 směrů strategie FF.
- $r_{\mathrm{OAB}}(CBT_m) = 3m - 1 > \varrho_{\mathrm{OAB}}(CBT_m) = \mathrm{diam}(CBT_m) = 2m \implies$ nelze dosáhnout přesně spodní meze.

Rekurzivní zdvojování (RD)

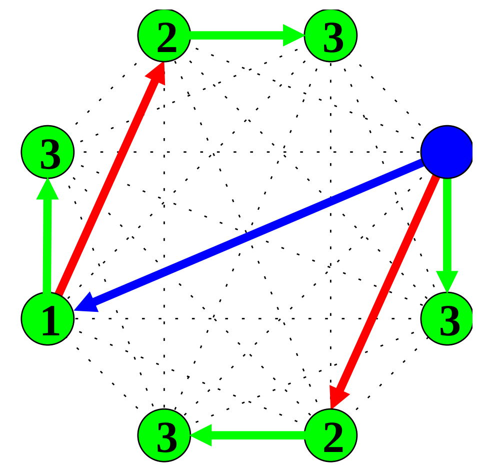
Zdvojování = binární množení (obrácená paralelní binární redukce)

Algoritmus $\textsc{GenRecDoubl}(G, s)$

Rozděl graf G do 2 podgrafů G_1 a G_2 téže velikosti tak, že
    zdroj $s \in V(G_1)$ a $\exists$ jeho soused $s' \in V(G_2)$;
Zdroj s pošle paket tomuto sousedu s';
do_in_parallel
    { $\textsc{GenRecDoubl}(G_1, s)$;
      $\textsc{GenRecDoubl}(G_2, s')$ }



(a)

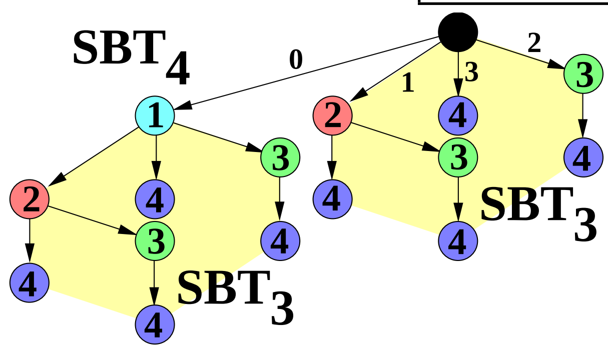


(b)

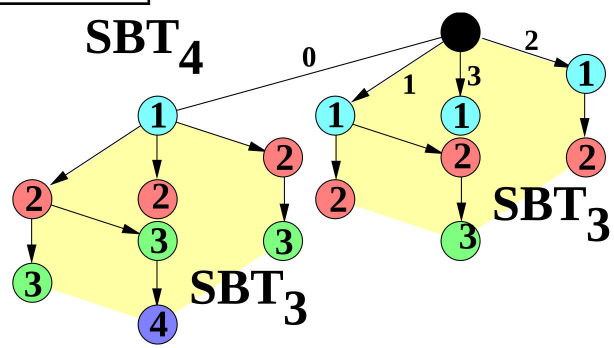
(a) RD v EREW PRAM: $r_{\mathrm{OAB}}(EREW) = \lceil \log p \rceil$ - optimální

(b) RD v U_p: $r_{\mathrm{OAB}}(U_p) = \lceil \log p \rceil$ - optimální

SF OAB: hyperkrychle



(a) 1−portovy model



(b) vseportovy model

- n-úrovňová binomiální kostra SBT_n (izomorfní se stromem pro binární D&C na Q_n).
- SBT_n je rekurzivní: $SBT_n =$ spodní SBT_{n-1} a horní SBT_{n-1} s propojenými kořeny.
- Optimální jak pro 1-portovou (RD) tak pro všeportovou (řízená záplava) hyperkrychli.
- Počet uzlů, které obdrží paket v kroku i, je
  - 2^{i-1} v 1-portovém modelu,
  - $\binom{n}{i}$ ve všeportovém modelu ($\implies$ proto název binomiální kostra).
- Oba případy jsou optimální i co do komunikační práce, neboť každý uzel obdrží paket přesně jednou a od svého souseda:

$$h_{\text{OAB}}(Q_n) = \Sigma_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \Sigma_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n - 1 = \eta_{\text{OAB}}(Q_n).$$

SF OAB: Mřížky

Dimenzionálně uspořádané kostry (dimension-ordered trees, DOT).

- Zobecnění hyperkubických SBT.
- Každý uzel používá dimenze ve stejném pořadí, např. $0, 1, 2, \ldots$.
- Řízená záplava $\Longrightarrow$ zajištění NODUP.

Výstupně všeportové mřížky

Algoritmus $\mathrm{DOTM{\small ESH}A{\small LL}P{\small ORT}OAB}(M(\ldots), s)$

Zdroj s: Pošli paket všem svým sousedům.

Ostatní uzly:

if (paket přišel z kanálu v dimenzi i, kde $0 \leq i \leq n-1$)
then pošli ho dál v dimenzi i (je-li to možné) & ho pošli všem sousedům ve směrech $(i+1)^+, (i+1)^-, \ldots, (n-1)^+, (n-1)^-$ (pokud $\exists$)

$$t_{\mathrm{OAB}}(M(\ldots), \mu, s) = (t_s + t_d + \mu t_m)\,\mathrm{exc}(s, M(\ldots)).$$

1-portové mřížky - statické uspořádání směrů

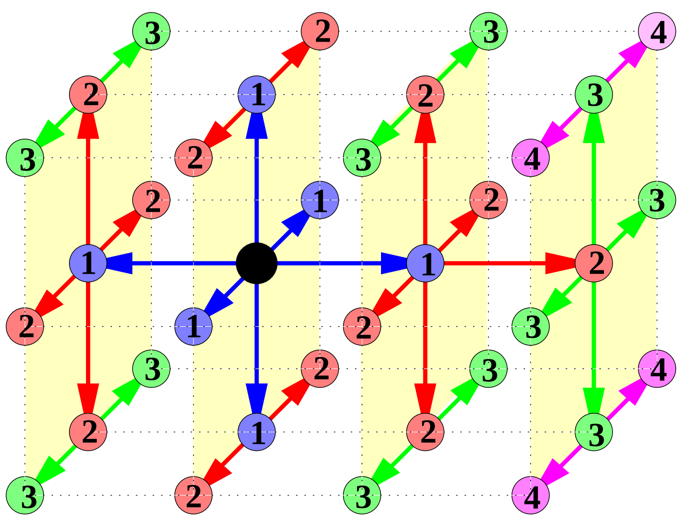
Nechť $z_0 \geq z_1 \geq \cdots \geq z_{n-1}$.

Algoritmus $\text{DOTM}\textsc{esh}\text{1P}\textsc{ort}\text{OAB}(M(\ldots), s)$

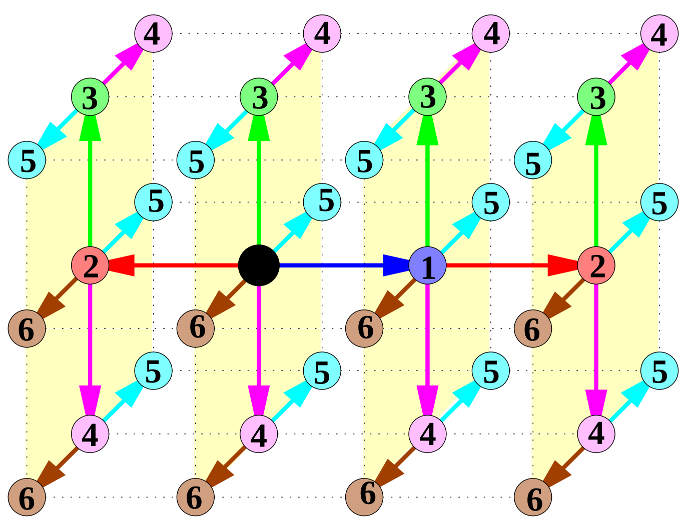
Zdroj s: Pošli paket postupně sousedům ve směrech $0^+, 0^-, \ldots, (n-1)^-, (n-1)^+$.

Ostatní uzly:

if (paket přišel z kanálu v dimenzi i, kde $0 \leq i \leq n-1$)
then
{ **if** (nejsi poslední uzel ve dimenzi i) **then** pošli paket v dimenzi i dále;
for $j := (i+1)^+, (i+1)^-, \ldots, (n-1)^+, (n-1)^-$ **do_sequentially**
if (nejsi krajní uzel ve směru j)
then pošli paket tímto směrem j }



(a) všeportová mřížka

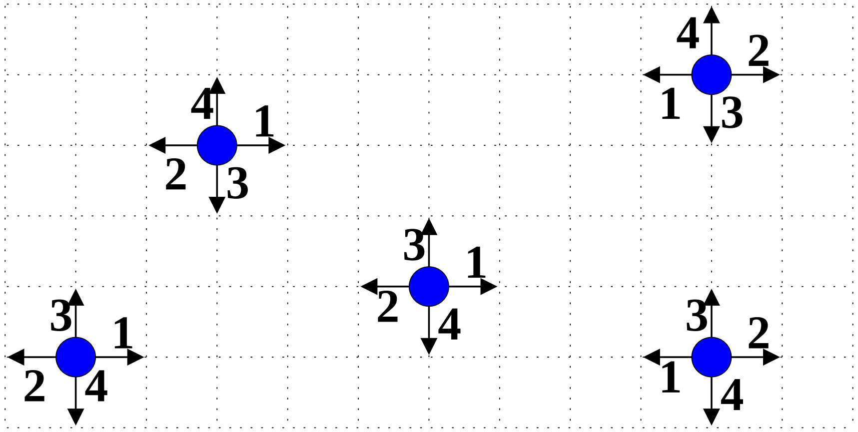


(b) 1-portová mřížka - statické pořadí směrů.

$$t_{\mathrm{OAB}}(M(\ldots), \mu, s) \geq (t_s + t_d + \mu t_m)\,\mathrm{exc}(s, M(\ldots)).$$

1-portové mřížky: dynamické uspořádání směrů = FF

- Při volbě ze 2 směrů dané dimenze se řídíme strategií FF.



$$t_{\mathrm{OAB}}(M(\ldots), \mu, s) \geq (t_s + t_d + \mu t_m)\,\mathrm{exc}(s, M(\ldots)).$$

SF OAB: Toroidy

- Toroidy jsou uzlově symetrické, takže můžeme použít

předchozí mřížkový algoritmus se zdrojem umístěným *uprostřed* mřížky.

- Nutnost ošetření duplikací paketů v kružnicích.

WH OAB: Spodní a horní meze

- Komunikace necitlivá na vzdálenost $\Longrightarrow$ průměr/excentricita neovlivní počet kroků.

  Lemma 4. *Mějme d-portovou propojovací síť G se WH přepínáním a uvažujme OAB ze zdroje $s \in V(G)$. Pak*

  - $\eta_{\mathrm{OAB,d}}(G,s) = |V(G)| - 1$,
  - $\rho_{\mathrm{OAB,d}}(G,s) = \lceil \log_{d+1} |V(G)| \rceil$
  - *spodní mez na* **součet délek použitých cest** $\gamma_{\mathrm{OAB,d}}(G,s) = \mathrm{exc}(s,G)$,
  - $\tau_{\mathrm{OAB,d}}(G,s) = \varrho_{\mathrm{OAB,d}}(G,s)(t_s + mt_m) + \gamma_{\mathrm{OAB,d}}(G,s)t_d$.

- Dosažení spodní meze je snadné na 1-portových mřížkách a toroidech:

  simulováním hyperkubického RD OAB.

- Dosažení spodní meze

$$\rho_{\mathrm{OAB}}(G) = \log_{k+1} |V(G)|.$$

  je mnohem obtížnější na všeportových mřížkách, toroidech, hyperkrychlích.

WH OAB: 1-portová hyperkrychle

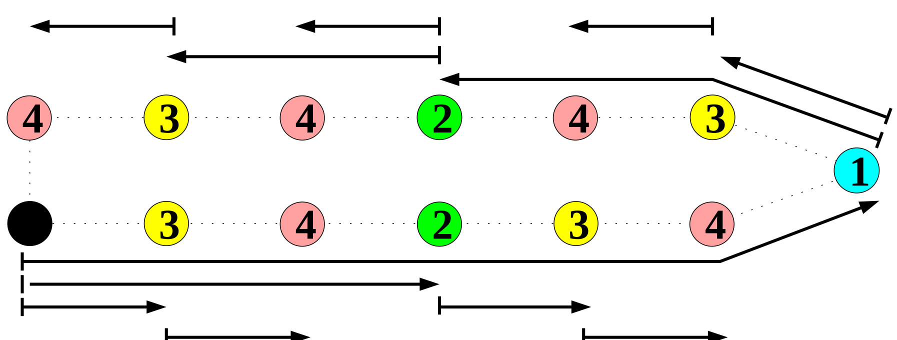
WH přepínání neposkytuje žádné zlepšení ve srovnání se SF případem, protože

SF algoritmus založený na SBT_n (Slajd 8) s časovou složitostí $(t_s + t_d + \mu t_m)n$ je optimální.

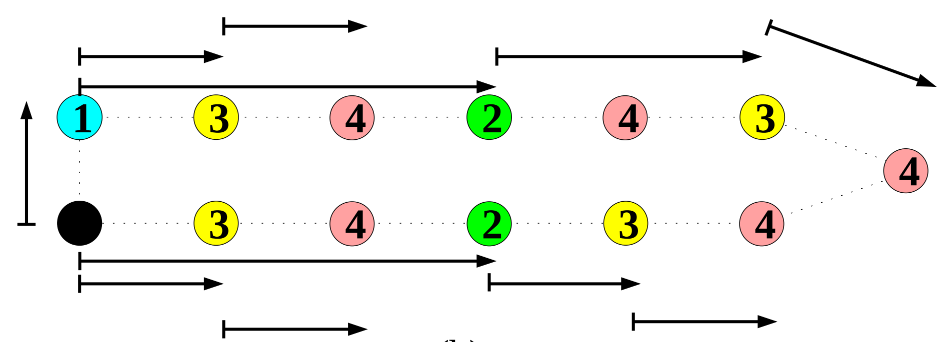
WH OAB: RD v 1-portových toroidech a mřížkách

Algoritmus $\text{1-DTorusRecDoublOAB}(K(z), s)$	
Fáze 1.1:	Zdroj s rozdělí toroid do 2 polovin (lineárních polí):
	Je-li z liché, pak si s podrží menší část.
Fáze 1.2:	Zdroj s pošle paket svému protějšku v 2.polovině (varinta (a) nebo (b)).
Fáze 2:	Opakuj Fázi 1 rekurzivně v obou polovinách souběžně.

(a) $t_{\mathrm{OAB}}(K(z),\mu) = \Sigma_{i=1}^{\lceil \log z \rceil}(t_s + \left\lceil \frac{z}{2^i} \right\rceil t_d + \mu t_m) = (t_s + \mu t_m)\left\lceil \log z \right\rceil + t_d(z-1).$

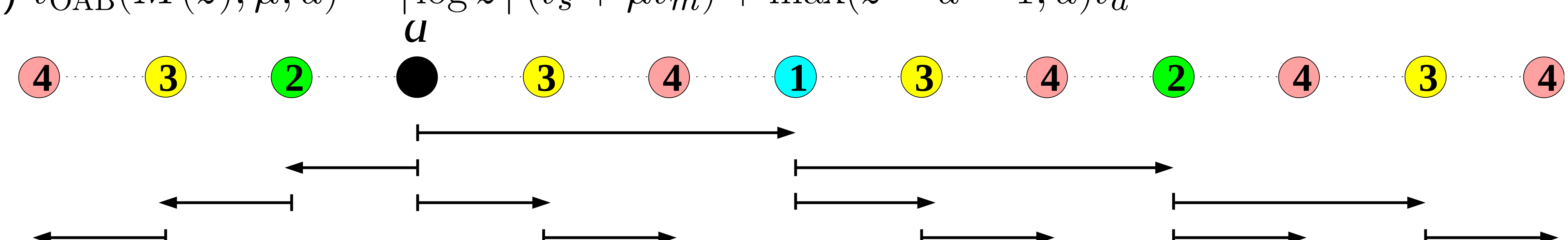


(a)



(b)

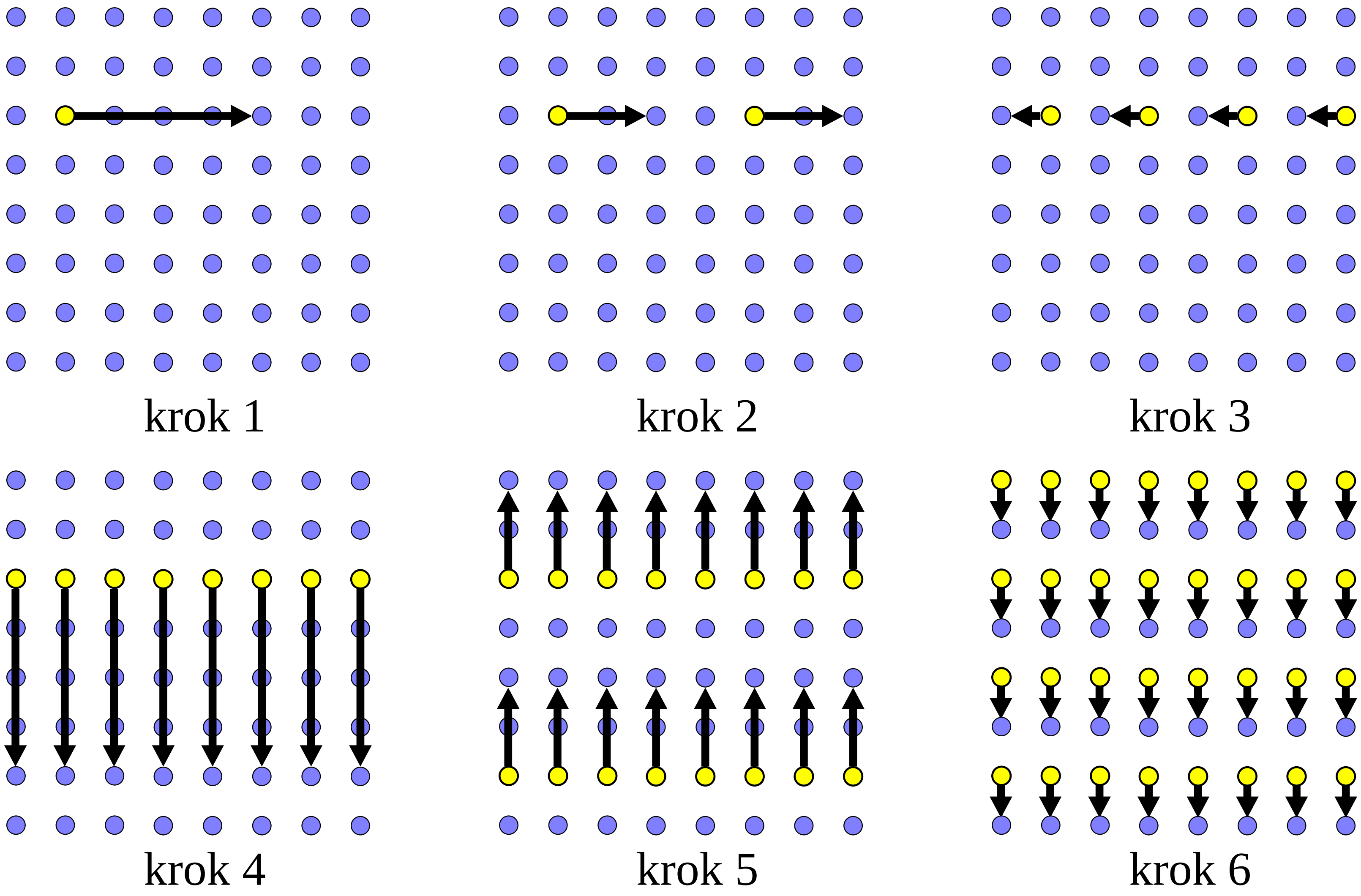
(c) $t_{\mathrm{OAB}}(M(z),\mu,a) = \left\lceil \log z \right\rceil (t_s + \mu t_m) + \max(z-a-1, a)t_d$



(c)

WH OAB: 1-portové více-D mřížky

Simulace hyperkubického 1-portového RD.



- Uvažujme $M(z_1, \ldots, z_n)$ se zdrojem $(a_1, \ldots, a_n)$.
- OAB strom se vytváří ve fázích podle pořadí dimenzí
  - ve fázi i, všechny informované uzly tvoří podmřížku $M(*^i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

WH OAB: Všeportová hyperkrychle

$$\rho_{\mathrm{OAB}}(Q_n) = \lceil n/\log(n+1) \rceil.$$

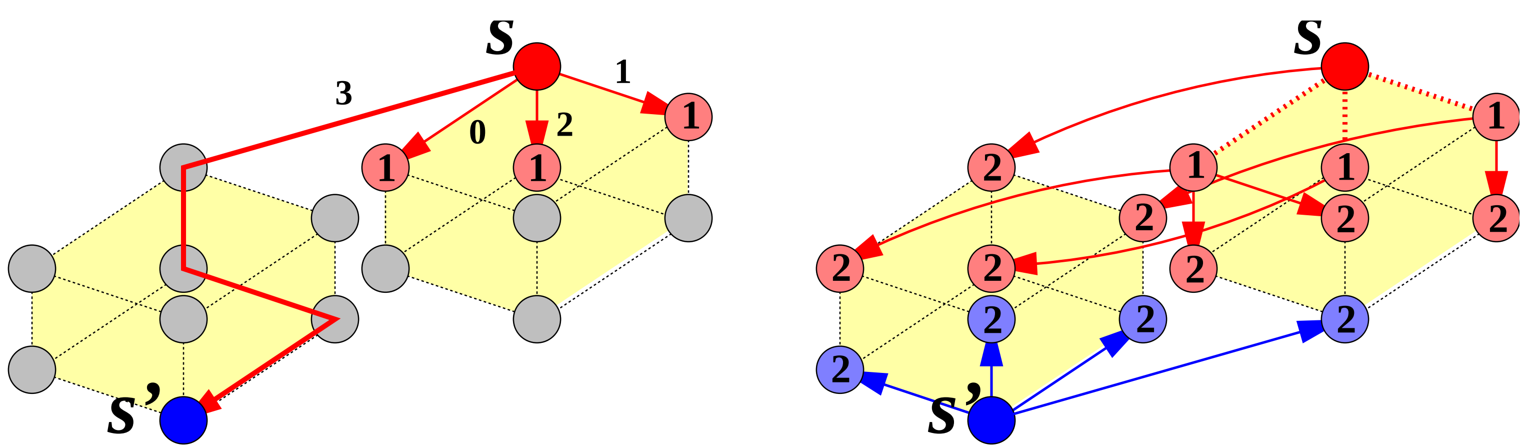
Algoritmus dvojitého stromu

- $r_{\mathrm{OAB}}(Q_n) = \lceil n/2 \rceil$ kroků pro všeportovou WH Q_n (optimální pro $n \leq 6$).

Algoritmus $\textsc{DoubleTreeOAB}(Q_n, s)$

Fáze 1: Zdroj s pošle v 1.kroku n kopií paketu:
1 kopii svému <u>doplňku</u> s' prostřednictvím svého MSB-souseda w a
$n-1$ kopií svým sousedům vyjma w.

Fáze 2: Oba s i s' provedou částečné OAB založené na <u>neúplných</u> SBT.



(a) 1. krok a ustanovení 2. kořene s'.

(b) Částečné SBTy v 2. kroku.

Popis HoKaoOAB

- Předpokládejme e-cube směrování s porovnáváním bitů zleva doprava.
- **Definice:** Je-li dáno $d \leq n$, pak jednoduchá dimenzionálně rostoucí cesta je každá cesta $u_0, \ldots, u_d$ v Q_n taková, že $\varrho(u_{j-1}, u_j) = i_j$ a $0 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n-1$.
- **Lemma:** Je-li použito e-cube směrování a $u_0, \ldots, u_d$ je j.d.r.c. v Q_n, pak je všech d cest $u_0 \to u_j$ je po dvojicích uzlově disjunktních
  $\Longrightarrow$ u_0 může při WH přepínání poslat d paketů všem u_i současně.

Algoritmus HoKaoOAB(Q_n, u_0)

Fáze 1.1: Zkonstruuj jednoduchou dimenzionálně rostoucí cestu $u_0, \ldots, u_n$ takovou, že

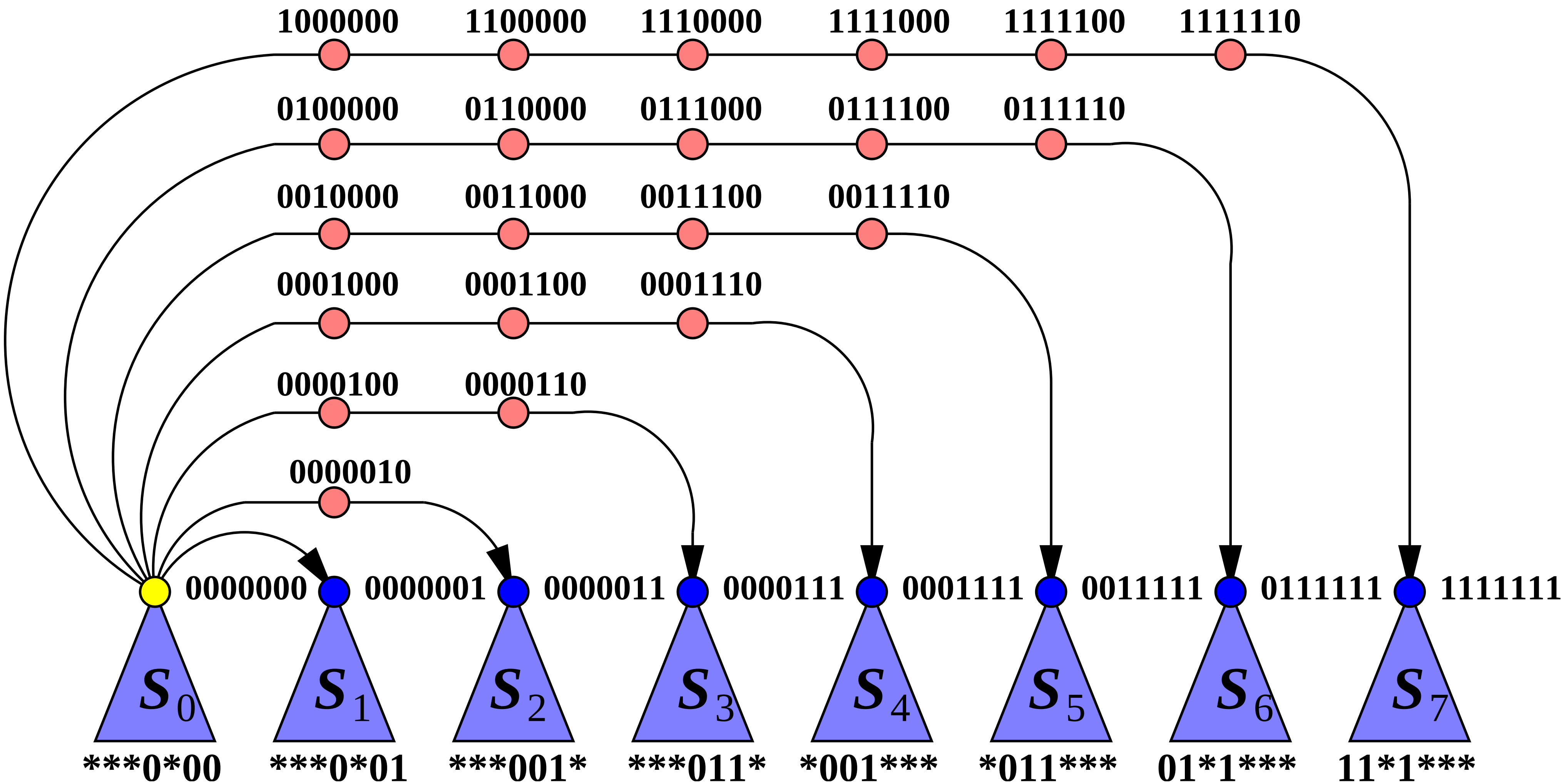
- Q_n lze rozdělit do $n+1$ disjunktních podkrychlí S_i stejné nebo téměř stejné velikosti,
- každá podkrychle S_i obsahuje u_i, $0 \leq i \leq n$.

Fáze 1.2: Zdroj u_0 pošle paket všem u_i do všech podkrychlí S_i paralelně.

Fáze 2: Opakuj Fázi 1 rekurzivně, dokud není Q_n rozdělena do podkrychlí dimenze ≤ 6 téměř stejné velikosti.

Fáze 3: Použij DoubleTreeOAB uvnitř těchto podkrychlí.

Ho-Kao-ův algoritmus

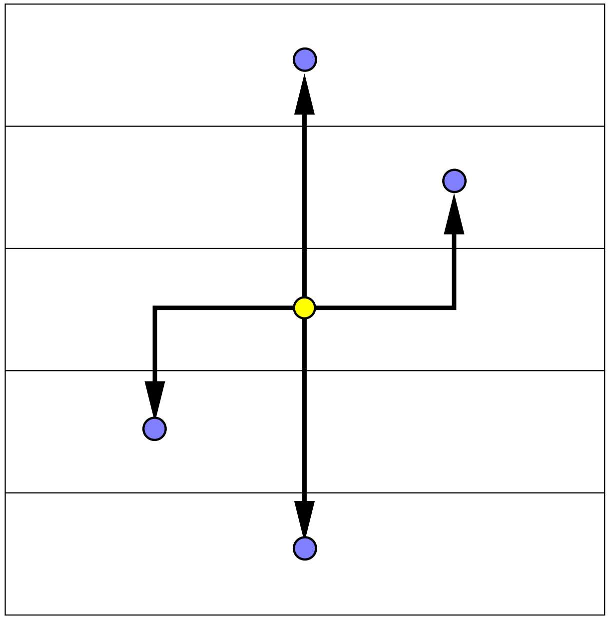


Časově-optimální HoKaoOAB algoritmus ve všeportové WH Q_7.

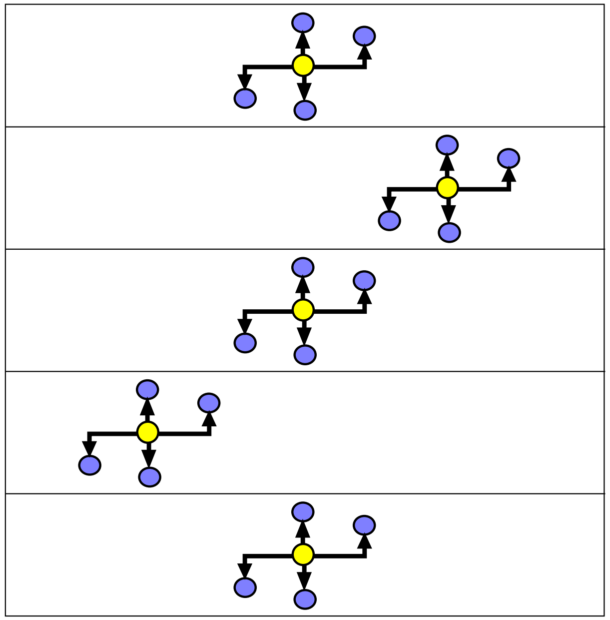
WH OAB: Všeportové mřížky a toroidy

- $\rho_{\mathrm{OAB}}() = \log_{2n+1} N$ pro n-rozměrnou WH všeportovou mřížku nebo toroid s N uzly.
- Aby tato spodní mez byla dosažena, každý uzel, jakmile je zapojen do OAB, v každém kroku musí
  - nalézt $2n$ neinformovaných uzlů,
  - doručit jim paket po cestách, hranově disjunktních se všemi paralelně existujícími cestami v daném kroku.
- To je velmi obtížný problém. Existují přístupy založené
  - na rekurzivním dělení,
  - na dominujících množinách,
  - na zobecněné diagonále.

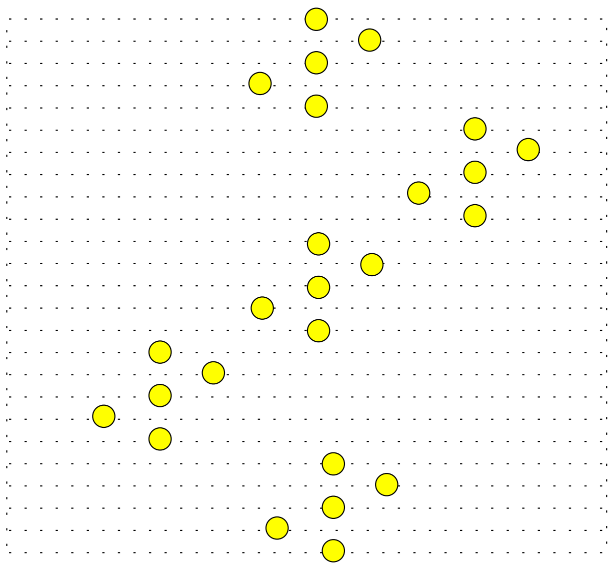
Algoritmus Zobecněná diagonála: obrázky



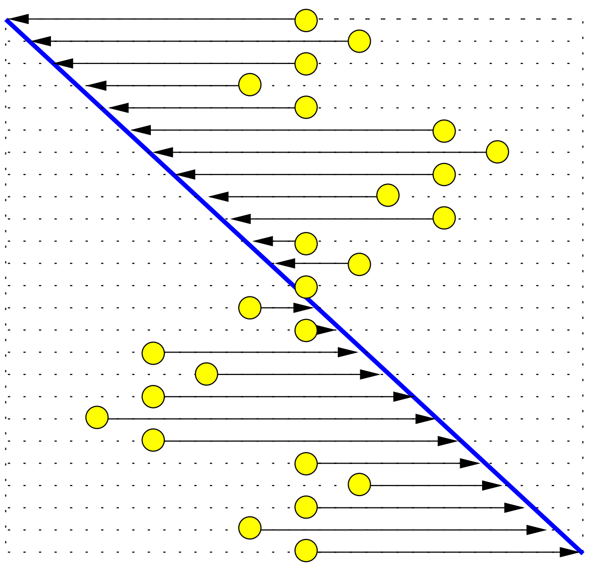
Faze 1 – krok 1



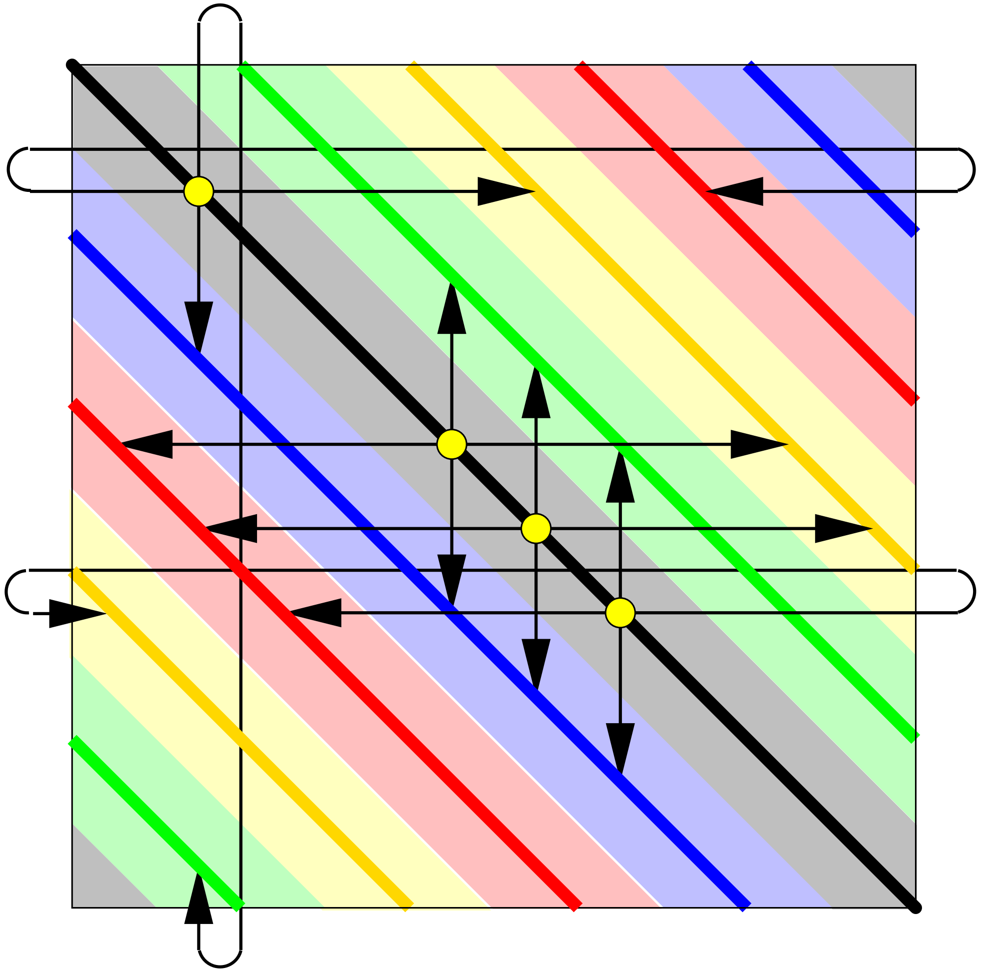
Faze 1 – krok 2



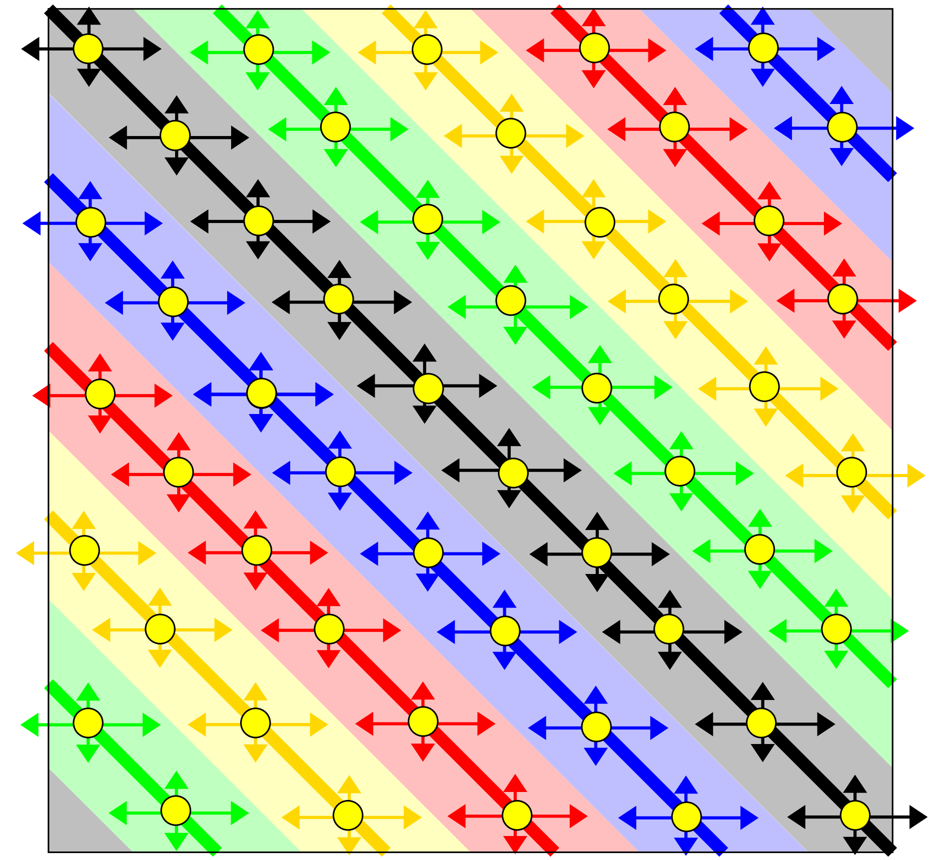
Vysledek Faze 1



Faze 2



Fáze 3 – krok 1



Fáze 3 – krok 2

Algoritmus Zobecněná diagonála: popis

- Funguje optimálně pro $K(5^k, 5^k)$.
- Předpokládejme pro jednoduchost čtvercový toroid $K(n, n)$. (Algoritmus lze zobecnit pro libovolný 2-D toroid použitím zobecněné (dilatované) diagonály.)

Fáze 1: Zdrojový uzel doručí 1 paket do každého řádku ($\lceil \log_5 n \rceil$ kroků):

1. Rozděl $K(n, n)$ do 5 horizontálních pásů přibližně stejné šířky.
2. Pošli paket ze zdrojového pásu do všech ostatních 4 pásů v 1 kroku pomocí hranově disjunktních cest použitím XY směrování.
3. Proveď rekurzivně totéž v každém horizontálním pásu.

Fáze 2: Seřaď pakety na *hlavní diagonálu* paralelně ve všech řádcích (1 krok).

Fáze 3: Diagonální uzly informují zbývající uzly ($\lceil \log_5 n \rceil$ kroků):

1. Rozděl rekurzivně $K(n, n)$ do 5 diagonálních pásů přibližně téže šířky, hlavní diagonála je uprostřed prvního z nich.
2. V 1 kroku, každý uzel na hlavní diagonále informuje 4 uzly na středních diagonálách ostatních 4 pásů tak, že všechny 4 cesty jsou po dvojicích hranově disjunktní.
3. Proveď totéž rekurzivně v každém diagonálním pásu.

Vysílání skupině (MC)

- Zdroj vysílá paket <u>libovolné</u> podmnožině $\mathcal{M}$ uzlů sítě G.
- Ve SF sítích lze použít modifikaci standardního OAB algoritmu.
- Ve WH sítích je standardní OAB algoritmus velmi neefektivní, zvl. je-li $|\mathcal{M}| \ll |V(G)|$.
- Problém: je-li dána všeportová WH síť se směrováním R a několik požadavků na komunikaci typu MC
  $\Longrightarrow$ nalezni bezkolizní cesty, které nezpůsobí zablokování.
- Řádově obtížnější než problém OAB.
- Ukážeme si pouze 2 řešení: pro 1-portové WH hyperkrychle a mřížky.

Lemma 5. *Mějme d-portovou propojovací síť G se WH přepínáním a uvažujme MC ze zdroje $s \in V(G) - \mathcal{M}$ do podmnožiny uzlů $\mathcal{M}$. Pak*

- $\eta_{\mathrm{MC,d}}(G,s) = |\mathcal{M}|$,
- $\rho_{\mathrm{MC,d}}(G,s) = \lceil \log_{d+1}(|\mathcal{M}|+1) \rceil$
- *spodní mez na* **součet délek použitých cest** $\gamma_{\mathrm{MC,d}}(G,s) = \mathrm{exc}(s,G,\mathcal{M})$,
- $\tau_{\mathrm{MC,d}}(G,s) = \varrho_{\mathrm{MC,d}}(G,s)(t_s + mt_m) + \gamma_{\mathrm{MC,d}}(G,s)t_d$.

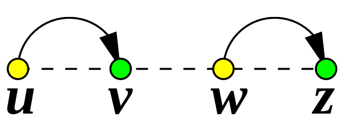
Dimenzionálně uspořádané posloupnosti uzlů v hyperkrychli

- Uvažujeme Q_n s e-cube směrováním a porovnáváním bitů zleva doprava.
- Dimenzionálně uspořádaná posloupnost uzlů v hyperkrychli $=$ posloupnost uzlů lexikograficky seřazených dle adres, kdy pořadí dimenzí je indukováno e-cube směrováním. Např.: $0100 < 0101 < 1000 < 1011$ pro $n = 4$.

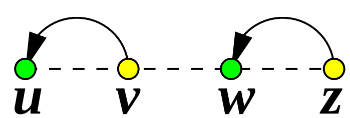
.

Lemma 6. *Je-li čtveřice uzlů $u < v < w < z$ dimenzionálně uspořádaná v hyperkrychli, pak e-cube směrováním indukované cesty*

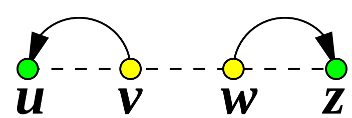
1. $u \to v$ *a* $w \to z$ *jsou hranově disjunktní,*
2. $v \to u$ *a* $z \to w$ *jsou hranově disjunktní,*
3. $v \to u$ *a* $w \to z$ *jsou hranově disjunktní,*
4. $u \to v$ *a* $u \to z$ *nejsou hranově disjunktní,* $u \to z$ *má přednost (FF),*
5. $u \to z$ *a* $v \to w$ *nejsou hranově disjunktní,* $u \to z$ *má přednost (FF).*



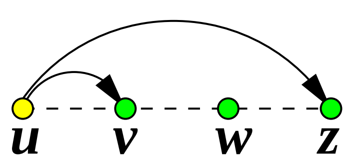
pripad 1



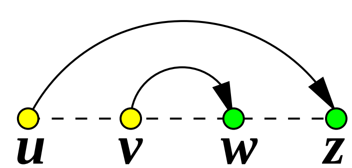
pripad 2



pripad 3



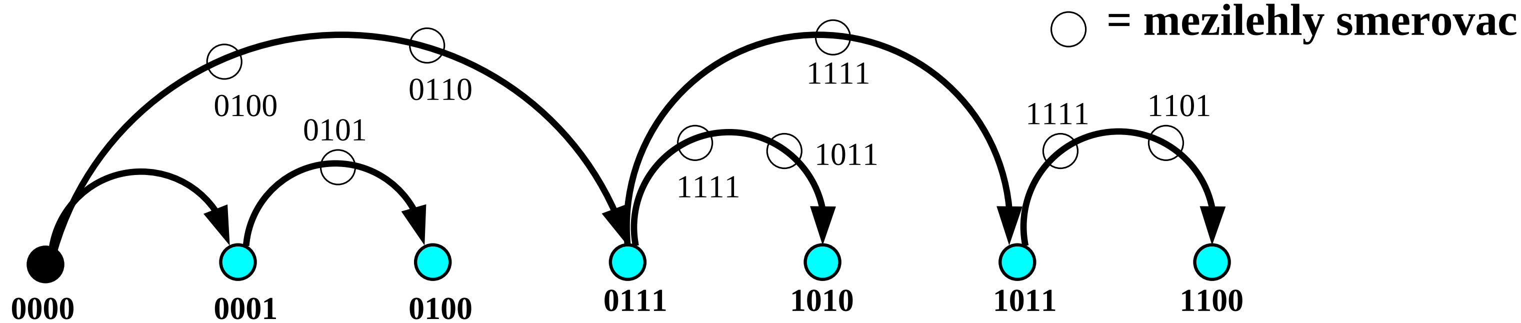
pripad 4

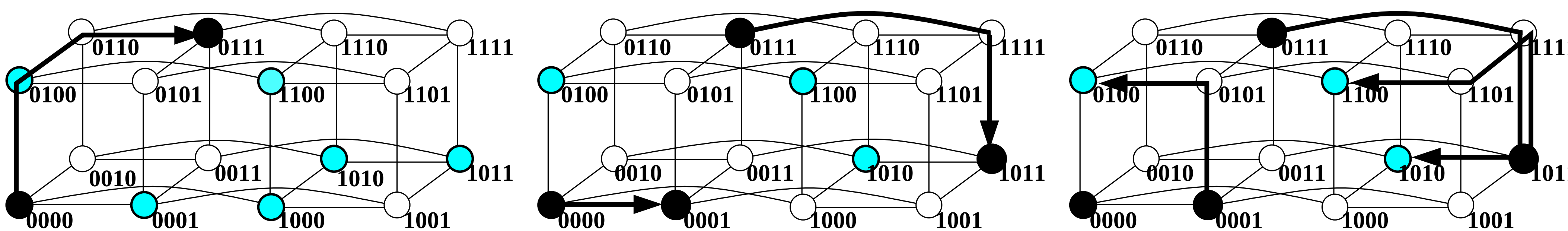


pripad 5

MC: Dimenzionálně uspořádané posloupnosti uzly v hyperkrychlích (pokr.)

- Uzlová symetrie $\implies$ můžeme uvažovat pouze MC ze zdroje $s = 0^n$.
- MC = Rekurzivní zdvojování (RD) na posloupnosti dimenzionálně uspořádaných uzlů množiny $\mathcal{M}$.
- Logaritmický počet kroků
- 1-portový hyperkubický OAB algoritmus na SBT = speciální případ



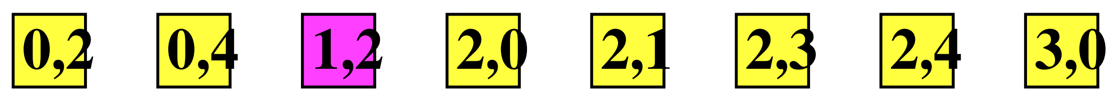


krok 1 krok 2 krok 3

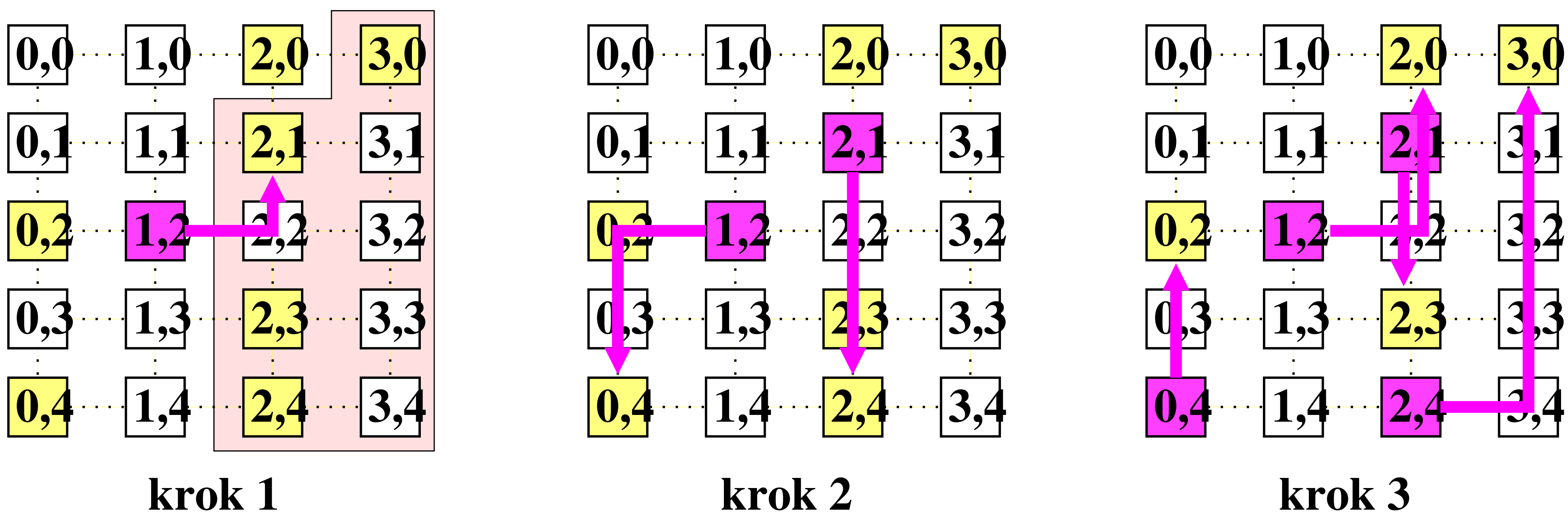
MC: Mřížky

- Mřížky nejsou uzlově symetrické
  $\Longrightarrow$ zdroj se může objevit uvnitř dimenzionálně uspořádané posloupnosti cílových uzlů.

- Algoritmus:
  - Rozděl dimenzionálně uspořádanou posloupnost na dolní a horní polovinu.
  - Je-li zdroj v dolní polovině, pošli paket prvnímu uzlu v horní polovině.
  - Jinak, pošli paket poslednímu uzlu v dolní polovině.
  - Použij rekurzivně totéž dělící schéma na obě poloviny.



dimenzionalne usporadany retezec uzlu v 2–D mrizce, zdroj je [1,2]



Rozesílání 1-všem (OAS)

- Zdrojový uzel posílá individuální (osobní) paket každému uzlu.
- Na počátku: zdroj má vyslat celkově $N - 1$ paketů velikosti μ.
- Na konci: každý uzel získá 1 paket o velikosti μ.
- Podobná složitost jako AAB (kde každý uzel má *obdržet* $N - 1$ různých paketů).
- Kombinující vs. nekombinující model.

OAS: Spodní meze pro nekombinující modely

Lemma 7. *Mějme d-portovou propojovací síť G a uvažujme* **nekombinující** *OAS ze zdroje $s \in V(G)$. Pak*

- $\rho_{\mathrm{OAS,d}}(G,s) = \left\lceil \frac{|V(G)|-1}{d} \right\rceil$,
- *spodní mez na* **součet délek použitých cest** $\gamma_{\mathrm{OAS,d}}(G,s) = \max(\mathrm{exc}(s,G), \left\lceil \frac{|V(G)|-1}{d} \right\rceil)$,
- $\tau_{\mathrm{OAS,d}}(G,s) = \varrho_{\mathrm{OAS,d}}(G,s)(t_s + mt_m) + \gamma_{\mathrm{OAS,d}}(G,s)t_d$.

Důkaz. Zdrojový uzel musí do sítě injektovat $N-1$ paketů a v 1 kroku jich dokáže injektovat nejvýše d. Jeden krok je nemůže být menší než přesun 1 paketu sousedovi. ♣

OAS: Spodní meze pro kombinující modely

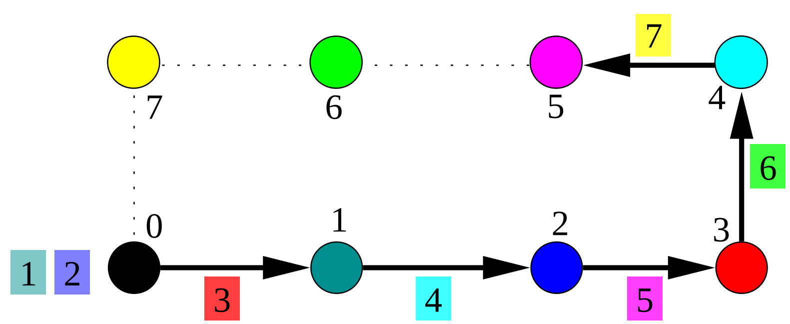
Lemma 8. *Mějme d-portovou propojovací síť G a uvažujme* **kombinující** *OAS ze zdroje $s \in V(G)$. Pak*

- $\rho_{\mathrm{OAS,d}}(G,s) = \rho_{\mathrm{OAB,d}}(G,s)$.
- *spodní mez na* **součet délek použitých cest** $\gamma_{\mathrm{OAS,d}}(G,s) = \mathrm{exc}(s,G)$,
- $\tau_{\mathrm{OAS,d}}(G,s) = \varrho_{\mathrm{OAS,d}}(G,s)t_s + \left\lceil \frac{|V(G)|-1}{d} \right\rceil mt_m + \gamma_{\mathrm{OAS,d}}(G,s)t_d$.

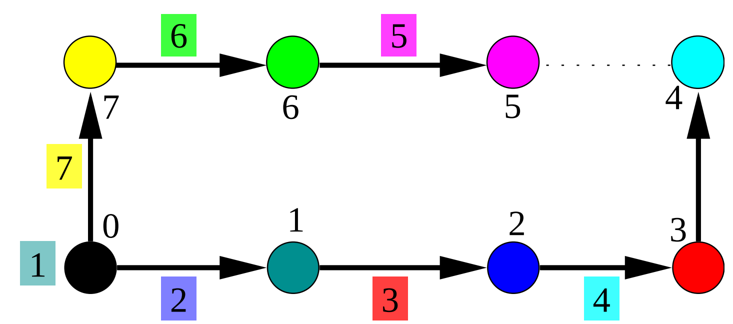
Nekombinující OAS: horní meze

Zdroj posílá všech $N-1$ paketů jako samostatné jednotky.

- 1-portový SF model $\Longrightarrow$ hamiltonovská cesta + strategie FF.
- 1-portový WH model $\Longrightarrow$ cíle jsou vybírány v libovolném pořadí.

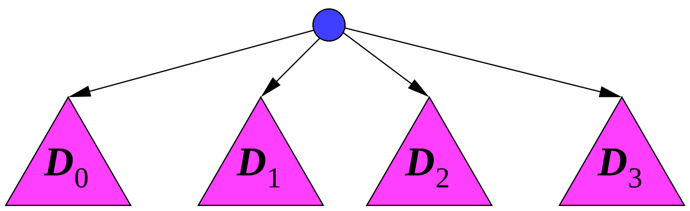


(a) 5. krok OAS v SF 1-portovém $K(8)$.

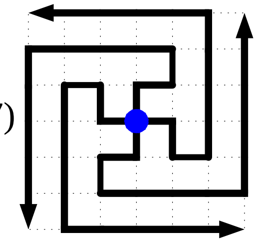


(b) 3. krok OAS v SF 2-portovém $K(8)$.

- Výstupně všeportový model:
  - Konstrukce OAS kostry D, skládající se z d přibližně stejné velkých podstromů D_i.
    - $*$ SF $\Longrightarrow$ hloubky D_i by měly být stejné.
    - $*$ WH $\Longrightarrow$ hloubky D_i se mohou různit, ale cesty mají být hranově disjunktní.

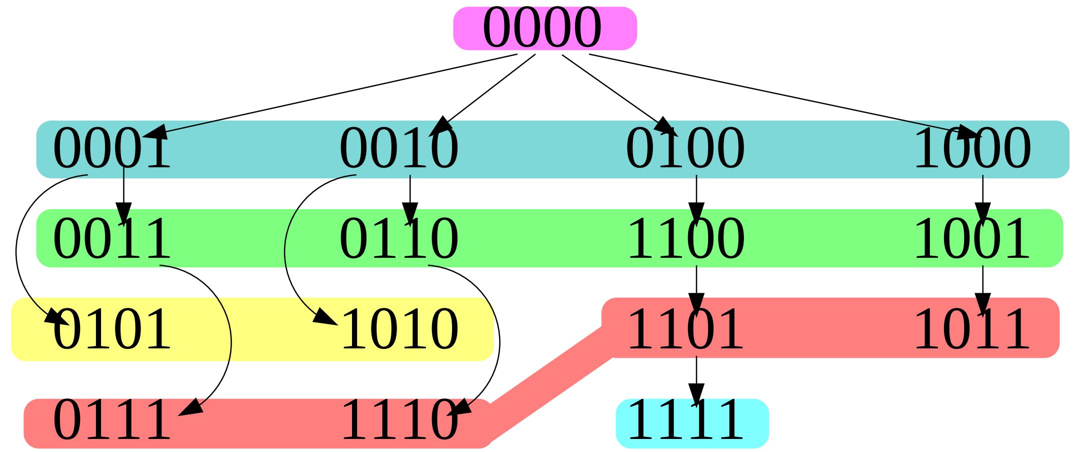


M(7,7)



OAS: Všeportová nekombinující hyperkrychle

Příklad optimálního OAS stromu ve všeportové SF nekombinující Q_4.



Tabulka pro $n = 6$.

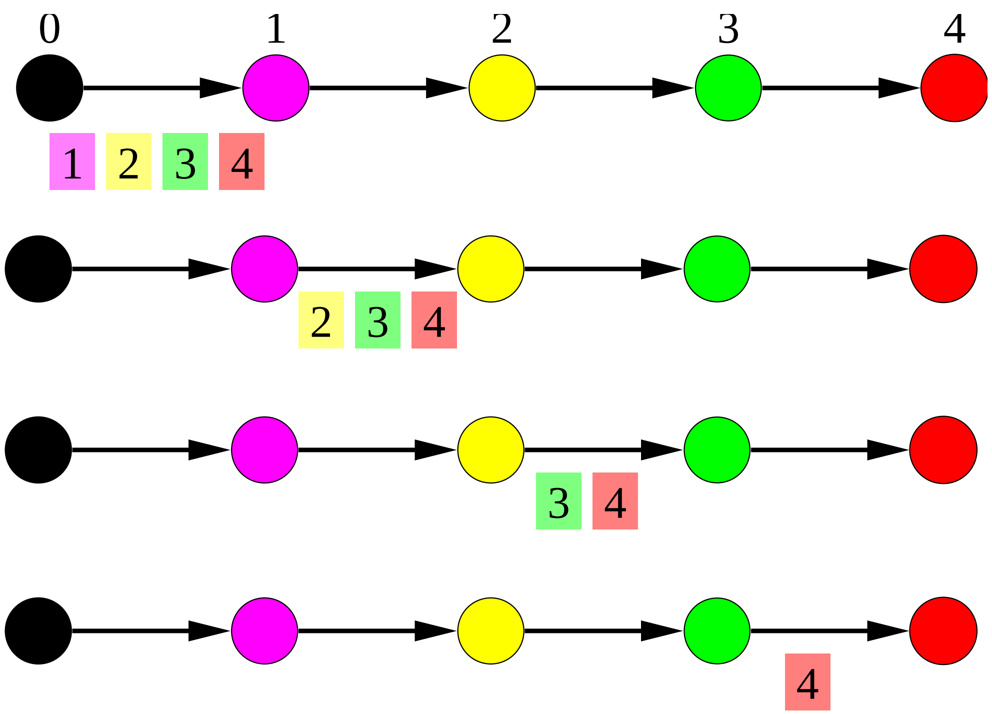
D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
L_{11}: {000001	000010	000100	001000	010000	100000}
L_{21}: {000011	000110	001100	011000	110000	100001}
L_{22}: {000101	001010	010100	101000	010001	100010}
L_{23}: {001001	010010	100100}	L_{31}: {111000	110001	100011
000111	001110	011100}	L_{32}: {011001	110010	100101
001011	010110	101100}	L_{33}: {101001	010011	100110
001101	011010	110100}	L_{34}: {101010	010101}	L_{41}: {100111
001111	011110	111100	111001	110011}	L_{42}: {101110
011101	111010	110101	101011	010111}	L_{43}: {101101
011011	110110}	L_{51}: {111110	111101	111011	110111
101111	011111}	L_{61}: {111111}			

OAS: Kombinující sítě

- Kombinující model: OAS $\approx$ OAB až na to, že se velikost zprávy zmenšuje.
  - SF $\Longrightarrow$ pipelining zpráv.
  - WH $\Longrightarrow$ rekurzivní zdvojování či znásobování.

SF OAS: Kombinující mřížky a toroidy

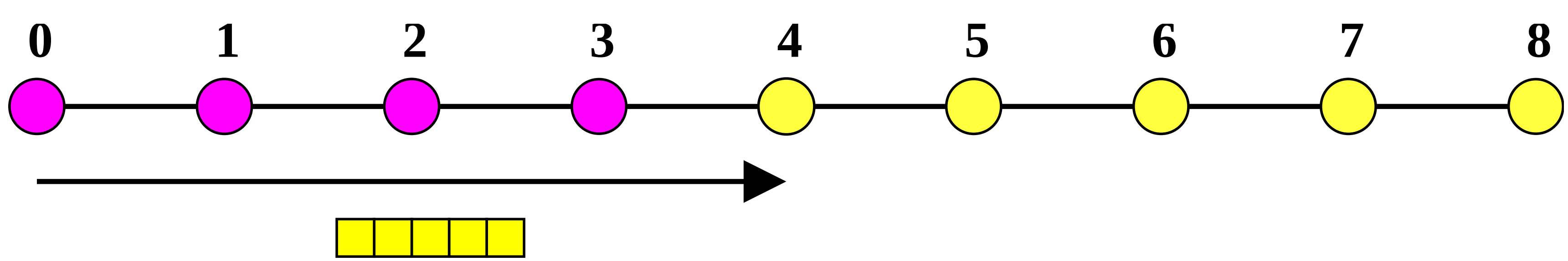
- Kombinování je kontraproduktivní v případě 1-D SF toroidů a mřížek, lepší řešení je nekombinovat, viz Slajd 28.
- Nicméně: Potřebné jako stavební kámen pro AAS v 1-D toroidech.



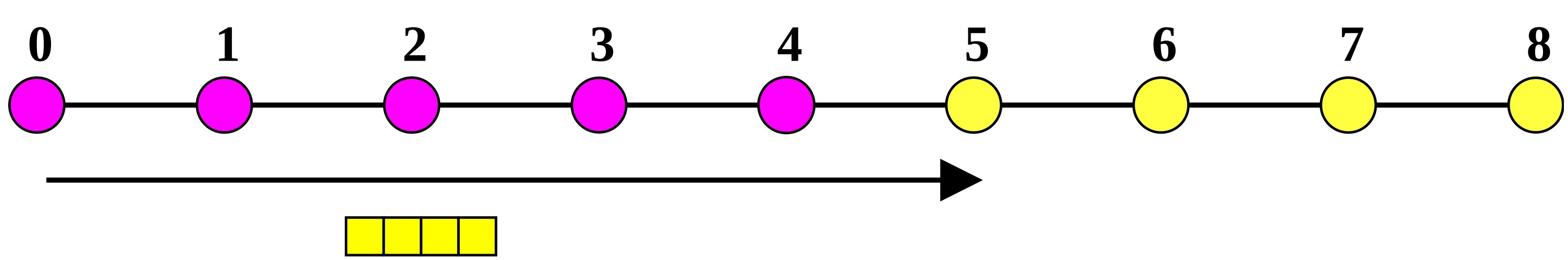
WH OAS: Kombinující mřížky a toroidy

- Rekurzivní zdvojování či znásobování, podobně jako u OAB
- Protichůdnost mezi délkami cest a velikostmi zpráv, pokud velikost mřížky není mocnina dvou.
- Přibližná formule pro časovou složitost OAS v 1-portové $K(z)$ je

$$t_{\mathrm{OAS}}(K(z),\mu) = \sum_{i=1}^{\lceil \log z \rceil} \left(t_s + \left\lceil \frac{z}{2^i} \right\rceil t_d + \mu \left\lceil \frac{z}{2^i} \right\rceil t_m\right) = t_s \lceil \log z \rceil + (t_d + \mu t_m)(z-1).$$



(a) Kratsi WH cesta, ale vetsi kombinovana zprava

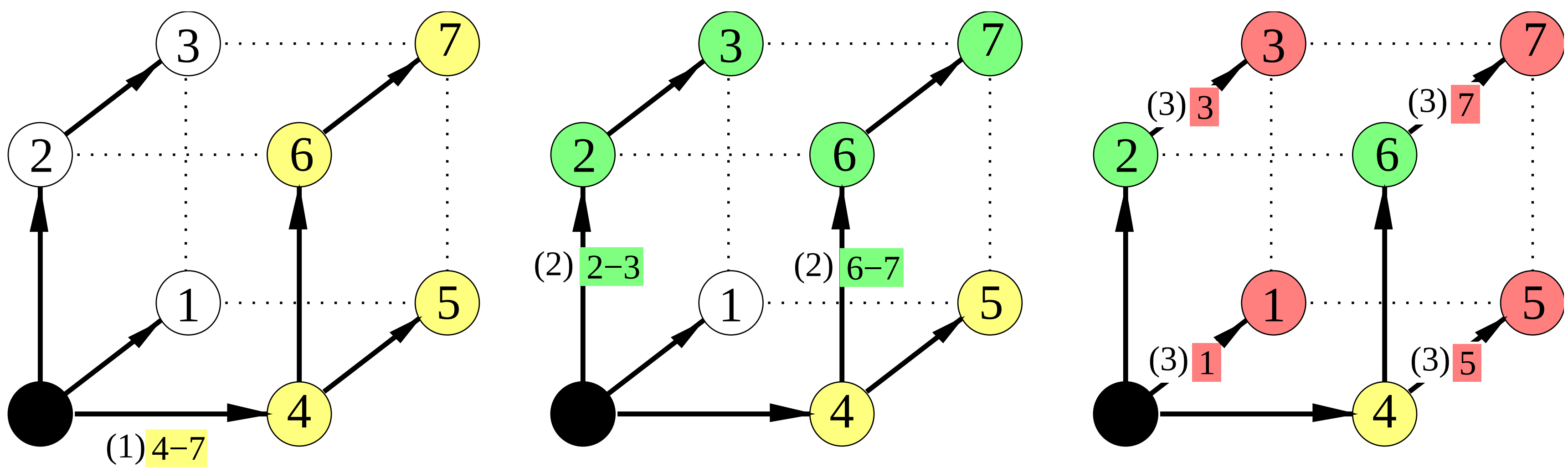


(b) Delsi WH cesta, ale mensi kombinovana zprava

WH OAS: Kombinující 1-portová hyperkrychle

- SF binomiální kostra (SBT_n), kde velikost zprávy klesá na polovinu.
- Celkový čas je

$$t_{\mathrm{OAS}}(Q_n, \mu) = \sum_{i=1}^{n}(t_s + \mu 2^{n-i} t_m) = t_s n + \mu t_m (2^n - 1).$$



3-krokový OAS v kombinující 1-portové hyperkrychli Q_3.

WH OAS: Kombinující více-portová hyperkrychle

- OAS varianta algoritmů dvojitého stromu nebo Ho-Kao-ova, viz Slajdy 15-17