1. Kombinatorika

Uvažujeme skupinu prvků, ze které provádíme výběr. Rozlišujeme výběry:
uspořádané, kdy záleží na pořadí výběru prvku;
neuspořádané, kdy na pořadí výběru nezáleží;
bez opakování, kdy se prvek nesmí ve výběru opakovat;
s opakováním, kdy může být prvek vybírán opakovaně.

1.1 Věta: Obecné pravidlo kombinatoriky - pravidlo součinu. Nechť ve dvojici (A, B) můžeme prvek z A vybrat n různými způsoby a prvek z B celkem m různými způsoby, potom uspořádanou dvojici prvků z (A, B) můžeme vybrat celkem $n.m$ různými způsoby.

Poznámka: Je zřejmé, že pravidlo lze uplatnit i na trojice, čtveřice atd. Počet možností pak získáváme postupným násobením.

1.2 Věta: Jestliže můžeme z množiny $A_i,\ 1 \leq i \leq k$ vybrat prvek a_i celkem n_i různými způsoby, pak lze z množiny $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ vybrat uspořádanou $k-$tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ celkem $n_1.n_2 \ldots n_k$ různými způsoby.

1.3 Definice: Permutace. Různá uspořádání množiny o n prvcích (čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$) nazýváme jejími *permutacemi.*

Poznámka: Jedná se o prostá a vzájemně jednoznačná zobrazení množiny na sebe.

1.4. Věta: Počet permutací. Permutací množiny o n prvcích je celkem

$$n! = 1.2 \ldots (n-1).n, \tag{$\spadesuit$}$$

kde symbol $n!$ čteme n faktoriál. **Definujeme** $0! = 1$.

1.5. Definice: Variace s opakováním. Uspořádané výběry k prvků s opakováním z množiny o n prvcích se nazývají *k-členné variace s opakováním.*

1.6. Věta: Počet variací s opakováním. Je celkem $n^k,\ k \geq 1$ různých $k-$členných variací s opakováním.

1.7. Definice: Variace s bez opakování. Uspořádané výběry k prvků bez opakování z množiny o n prvcích, $1 \leq k \leq n$ se nazývají *k-členné variace bez opakování.*

1.8. Věta: Počet variací bez opakování. Je celkem $n(n-1) \ldots (n-k+1)$, $1 \leq k \leq n$ různých $k-$členných variací bez opakování.

1.9. Poznámka: Je-li $k = n$, pak jsou variace bez opakování shodné s permutacemi a jejich počet je $n!$.

1.10. Definice: Kombinace. Neuspořádaný výběr bez opakování k prvků z množiny o n prvcích, $1 \leq k \leq n$ nazýváme *k-členou kombinací z n prvků,* stručněji *kombinacemi.*

1.11. Věta: Počet kombinací. Je celkem

$$\frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

$k-$čleených kombinací.

1.12. Definice: Kombinační číslo. Číslo, které uvádí počet kombinací se nazývá *kombinační číslo.* Značíme je symbolem $\binom{n}{k}$ a čteme „*n nad k.*“ Pro $n = 0, 1, \ldots$ definujeme $\binom{n}{0} = 1$.

1.13. Věta: Vlastnosti kombinačních čísel. Pro kombinační čísla a $0 \leq k \leq n$ platí:

a)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n;$$

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!};$$

c)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1.14.Definice: Permutace s opakováním. Různá uspořádání množiny n prvků, která obsahuje n_i, $1 \leq i \leq k$ prvků každého z k druhů takové že, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ nazýváme *permutacemi s opakováním.*

1.15. Věta: Počet permutací s opakováním. Všech permutací s opakováním je

$$\frac{n!}{n_1!.n_2! \ldots n_k!}.$$

1.16. Poznámka: Pro $k = 2$ jsou permutace s opakováním shodné s kombinacemi.

1.17. Definice: Kombinace s opakováním. Neuspořádané výběry všech možných $k-$tic prvků z n druhů prvků, které se liší alespoň v jedné skupině, nazýváme *kombinacemi s opakováním.*

1.18. Věta: Počet kombinací s opakováním. Všech kombinací s opakováním je celkem

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

1.19. Věta: Posloupnosti z nul a jedniček. Různých posloupností z 0 a 1, které obsahují n nul a k jedniček, $k \leq n+1$, a ve kterých nejsou žádné dvě jedničky za sebou je celkem $\binom{n+1}{k} = \dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!}$.