

## Přednáška #11: Kolektivní komunikační algoritmy II

### Vysílání všichni-všem (AAB)

AAB = gossip = celková výměna: Každý uzel vyšle svůj paket všem ostatním uzlům.

### SF AAB s kombinováním paketů

### Spodní meze

**Lemma 1.** *Je-li  $G$   $d$ -portová síť o  $N$  uzlech, pak*

$$\rho_{\text{AAB}}(G) = \text{diam}(G) \quad a$$

$$\tau_{\text{AAB}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAB}}(G)t_s + \left\lceil \frac{N-1}{d} \right\rceil \mu t_m.$$

**Důkaz.** Díky SF přepínání nemůže AAB skončit dříve než po  $\text{diam}(G)$  krocích. Každý uzel musí přijmout  $(N-1)\mu t_m$  dat a má na to  $d$  portů.



- Nejsilnější a nejméně realistický model.
- Triviální záplavový (nebo lačný) přístup.

Uzlový program algoritmu FLOODINGMINDUPAAB( $G$ )

pošli svůj paket všem  $k$  sousedům;

**repeat**  $\text{diam}(G)$  **times**

{ přijmi zprávy ze všech  $k$  vstupních kanálů;

zkombinuj je do  $k$  nových zpráv tak, že se minimalizuje duplikace;

(\*t.j., udržuj info o tom, které pakety byly vyslány kterým sousedům  
a neposílej též paket témuž sousedovi 2krát.

Tento protokol se nazývá MINDUP a kombinovaná zpráva MINDUP agregát. \*)  
pošli nové MINDUP agregáty odpovídajícím sousedům };

- Simulace plně-duplexních kanálů na poloduplexních se zpomalením 2:

$$\text{diam}(G) \leq r_{\text{AAB}}(G) \leq 2 \text{diam}(G).$$

- Metoda **Soustřed-Rozešli**:

**Algoritmus** ACCUMULATEBROADCASTAAB( $G, u$ )

**Fáze 1:** Uzel  $u$  akumuluje všechny pakety do 1 agregátní zprávy (= AOG).

**Fáze 2:**  $u$  vyšle tuto agregátní zprávu všem ostatním (= OAB).

- Typicky, pro komunikační složitost je dominující Fáze 2.

**Lepší AAB v bipartitních sítích**

**Lemma 2.** *Je-li  $G$  bipartitní s  $\text{diam}(G) = D$ , pak  $r_{\text{AAB}}(G) \leq D + 1$ .*



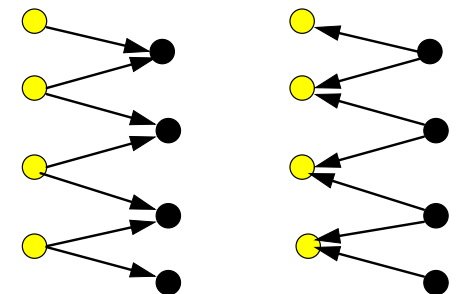
**Algorithm** FLOODINGBIPARTITEAAB( $G$ )

Obarvi uzly 2 barvami **Y**(ellow) a **B**(lack);

**repeat**  $(D + 1)/2$  **times**

{**YB:** **Y** uzly pošlou své MINDUP aggregáty **B** sousedům;

**BY:** **B** uzly pošlou své MINDUP aggregáty **Y** sousedům;}

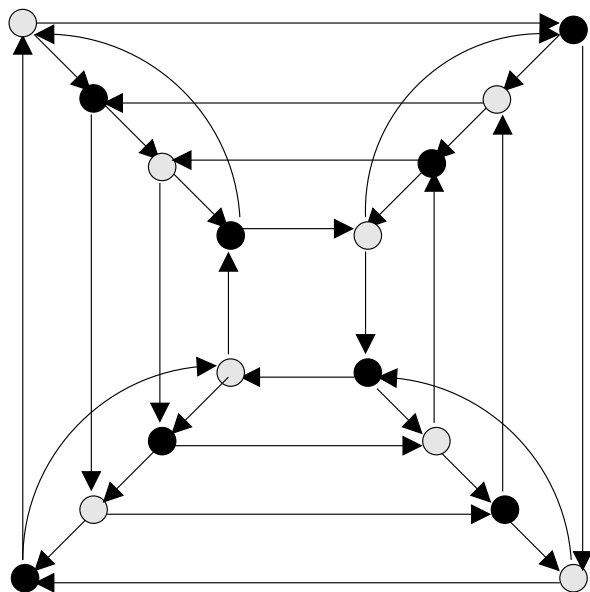


**Lemma 3.** Je-li  $\text{diam}(G) = D$  a  $\text{diam}(\vec{G}) = D'$ , pak

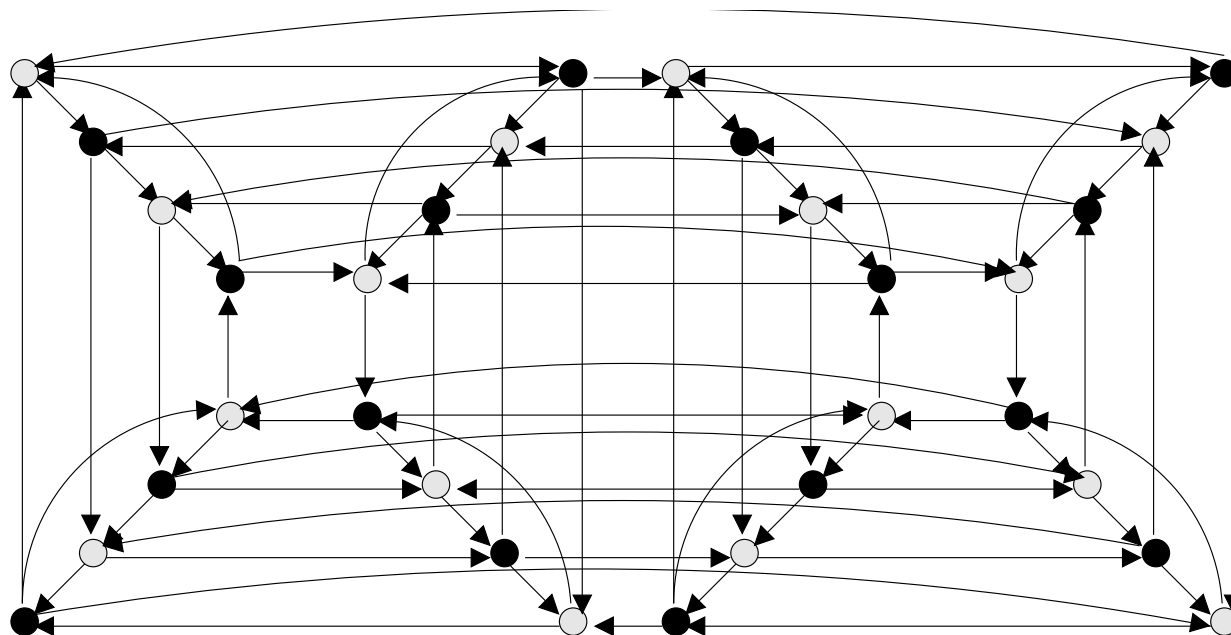
$$D \leq r_{\text{AAB}}(G) \leq \min(2D, D').$$



- Zorientování hran grafu tak, že  $D'$  je nejmenší možný, je obecně NP-těžký problém.
- Vyřešeno pro 2-D mřížky a toroidy (tzv. *Manhattanský problém*).
- Optimální řešení  $D = D'$  existuje pouze pro dostatečně rozsáhlé mřížky/toroidy.
- Částečně vyřešeno pro některé vícerozměrné mřížky a toroidy.
- Vyřešeno pro hyperkrychle:  $\text{diam}(\vec{Q}_2) = 3$ ,  $\text{diam}(\vec{Q}_3) = 5$ , and  $\text{diam}(\vec{Q}_n) = n$  for  $n \geq 4$ .



(a) Silně orientovaná  $\vec{Q}_4$  s  $D' = 4$



(b) Silně orientovaná  $\vec{Q}_5$  s  $D' = 5$ .

**Lemma 4.** *Má-li bipartitní graf  $G$  silnou orientaci s průměrem nejvýše  $k$ , kde  $k \geq 3$ , takovou, že každý uzel leží na kružnici o délce nejvýše  $k$ , pak graf  $G \times U_2$  (= kartézský součin  $G$  a úplného grafu s 2 uzly) má orientaci s průměrem nejvýše  $k + 1$  takovou, že každý uzel leží na orientované kružnici délky nejvýše  $k$ .*

**Náznak důkazu.**  $G \times U_2$  je zbudován ze 2 kopií  $G_1$  a  $G_2$  tak, že  $G_1$  je zrcadlově symetrická s  $G_2$  a 2-barvení (černá-bílá) v  $G_1$  je inverzí barvení v  $G_2$ . Pak hrany spojující odpovídající páry symetrických uzlů orientujeme od černých k bílým uzlům. Rozborem všech případů lze indukčně ukázat, že z jakéhokoli uzlu  $u_1 \in G_1$  lze dosáhnout jakýkoli uzel  $u_2 \in G_2$  (či naopak) orientovanou cestou délky nejvýš  $k + 1$ .



**Lemma 5.** *Díky existenci 1-portového algoritmu Soustřed'-Rozešli, pro jakýkoli  $N$ -uzlový graf  $G$  platí:*

$$\max(\text{diam}(G), \lceil \log N \rceil) = \rho_{\text{OAB}}(G) \leq r_{\text{OAB}}(G) \leq r_{\text{AAB}}(G) \leq 2r_{\text{OAB}}(G).$$

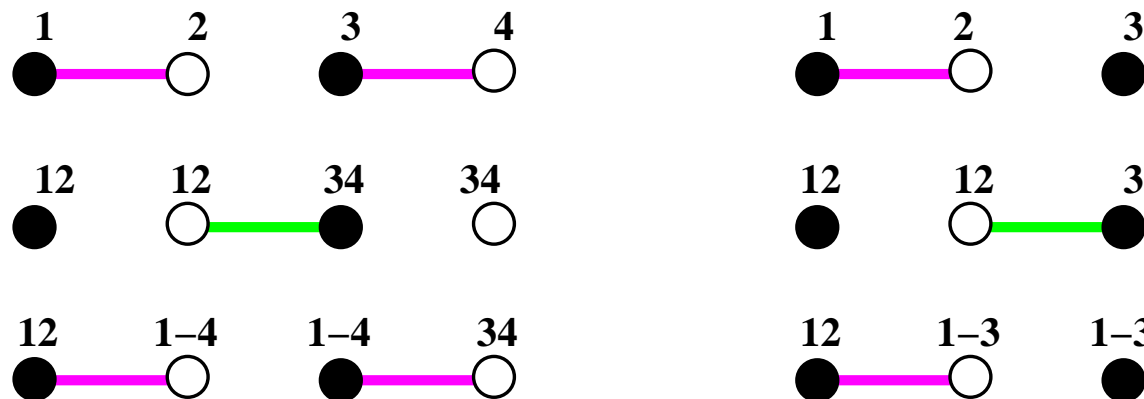
**1-D mřížky**

**Algoritmus** FLOODINGMINDUPAAB( $M(z)$ )

Střídej NODUP výměny mezi licho-sudými a sudo-lichými páry

**Lemma 6.**

$$r_{\text{AAB}}(M(z)) = \begin{cases} z - 1 \\ z \end{cases} \quad a \quad t_{\text{AAB}}(M(z), \mu) = \begin{cases} (z - 1)t_s + (2z - 3)\mu t_m & \text{je-li } z \text{ sudé,} \\ z t_s + (2z - 2)\mu t_m & \text{jinak.} \end{cases}$$



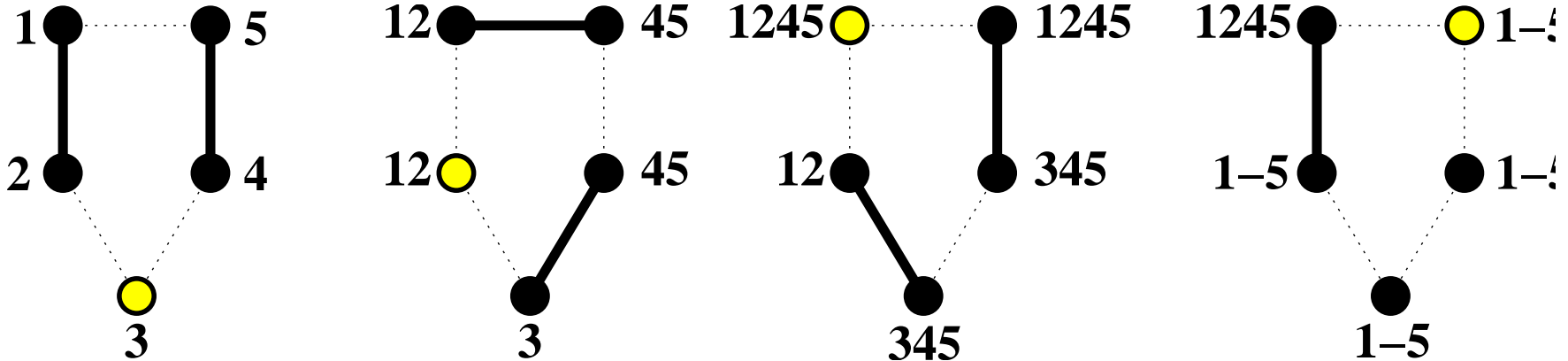
**Lemma 7.** *Je-li  $z$  je sudé, pak  $r_{\text{AAB}}(K(z)) = z/2$  (což je optimální) a*

$$t_{\text{AAB}}(K(z), \mu) = \frac{z}{2}t_s + (z - 1)\mu t_m$$

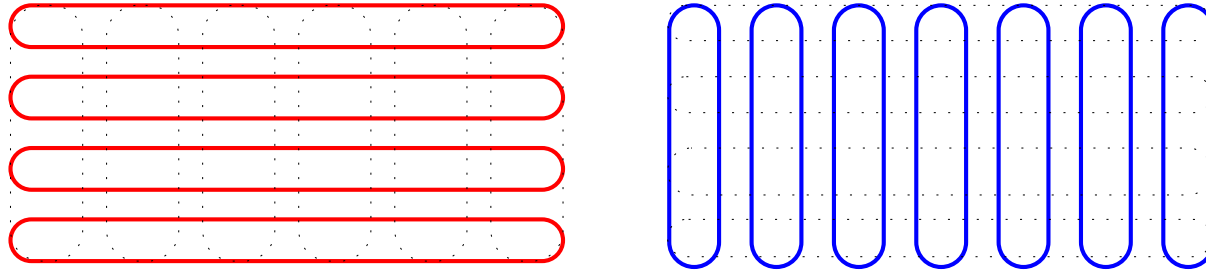
*a je-li  $z$  liché, pak  $r_{\text{AAB}}(K(z)) = (z + 3)/2$  (jeden uzel je vždy mimo hru!) a*

$$t_{\text{AAB}}(K(z), \mu) = \frac{z + 3}{2}t_s + \frac{3z - 1}{2}\mu t_m.$$

**Příklad:**  $z = 5$



4-krokový AAB na 1-portové plně-duplexní kružnici délky 5.



**Lemma 8.** *AAB po dimenzích v 1-portové mřížce (podobně v toroidu)*

$$r_{\text{AAB}}(M(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^n r_{\text{AAB}}(M(z_i)) \quad a$$

$$t_{\text{AAB}}(M(z_1, \dots, z_n), \mu) = \sum_{i=1}^n t_{\text{AAB}}(M(z_i), (\prod_{j=1}^{i-1} z_j) \mu).$$

**Důsledek 9. (Lemmy 7.)** *Časová složitost závisí na pořadí dimenzí, vyskytuje-li se lichá velikost.*

**Příklad:** Je-li  $z_1$  liché a  $z_2$  sudé, pak

$$t_{\text{AAB}}(K(z_1), \mu) + t_{\text{AAB}}(K(z_2), z_1 \mu) < t_{\text{AAB}}(K(z_2), \mu) + t_{\text{AAB}}(K(z_1), z_2 \mu).$$

Jsou-li  $z_1, z_2$  sudé, pak  $t_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2), \mu) = \frac{z_1 + z_2}{2} t_s + (z_1 z_2 - 1) \mu t_m.$

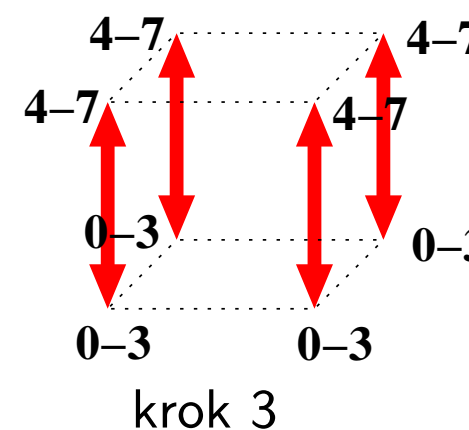
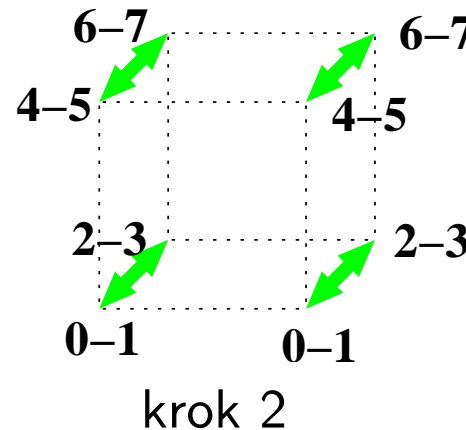
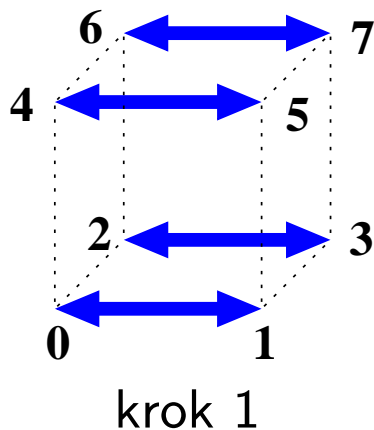


**Důsledek 10.** (Lemmy 8 a 1.)

$$\rho_{\text{AAB}}(Q_n) = r_{\text{AAB}}(Q_n) = n \quad a \quad t_{\text{AAB}}(Q_n, \mu) = \tau_{\text{AAB}}(Q_n, \mu) = nt_s + \mu t_m(2^n - 1).$$

**Důkaz.** Velikost zprávy se v každém kroku zdvojnásobí:

$$t_{\text{AAB}}(Q_n, \mu) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_s + 2^i \mu t_m) = nt_s + \mu t_m(2^n - 1).$$



## SF AAB: všeportový plně-duplexní nekombinující model

- Každý z  $N$  vstupních paketů musí být doručen individuálně všem  $N - 1$  uzlům.
- Počet paketů v síti je mnohem větší než v případě kombinujícího modelu.
- Plně-duplexní kanály jsou dvojice antiparalelních simplexních linek = orientovaných hran.
- Komunikační model a předpoklady:
  - Každý uzel  $u$  v  $G$  = kořen OAB stromu  $B(u)$ .
  - Všechny uzly začnou svůj OAB ve stejném okamžiku.
  - Všechny OAB postupují v OAB stromech synchronně toutéž rychlostí.
  - **Definice:** Orient. hrana v  $B(u)$  je úrovně  $i \iff$  paket přes ni projde v kroku  $i$ .
  - **Definice:** Výška  $B(u)$ ,  $h(B(u))$ , je číslo nejvyšší úrovně hrany v  $B(u)$ .
  - Důsledek: V kroku  $i$  jsou ve všech stromech aktivní pouze hrany na úrovni  $i$ .
- **Definice:**  $B(u)$  a  $B(v)$  = vzájemně časově-hranově-disjunktní stromy (TADT), jestliže  $\forall i$ , množiny jejich hran na úrovni  $i$  jsou disjunktní.
- Důsledek: OAB stromy jsou TADT  $\implies$  přenos paketů je na plně-duplexních kanálech sítě bezkolizní.

**Lemma 11.** *Nechť  $G$  je síť s  $N$  uzly a s minimálním stupněm  $d$ . Pak*

$$\rho_{\text{AAB}}(G) = \lceil (N - 1)/d \rceil \quad a \quad \tau_{\text{AAB}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAB}}(G)(t_s + \mu t_m).$$



### Mřížky

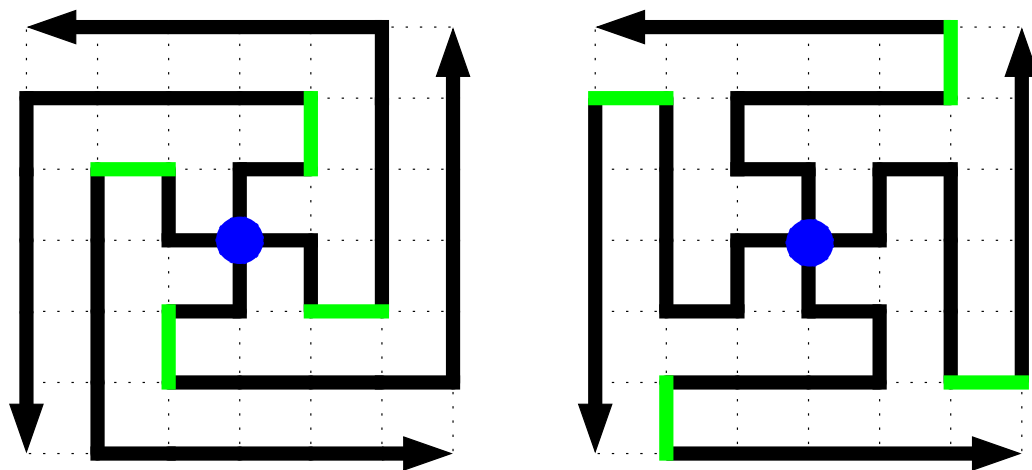
- Nejsou uzlově symetrické.
- 2-D mřížka  $M(z_1, z_2)$ :  $\exists$  optimální algoritmy s  $r_{\text{AAB}}(M(z_1, z_2)) = \lceil (z_1 z_2 - 1)/2 \rceil$ .
  - všechny pakety se posunují podél 1 hamiltonovské kružnice,
  - nebo soustava TADTů  $B(u)$ , kde struktura  $B(u)$  závisí na  $u$  a navíc  $\beta \approx z_1 + z_2$  (složitě).
- Vícerozměrné mřížky: ???

### Uzlově symetrické topologie

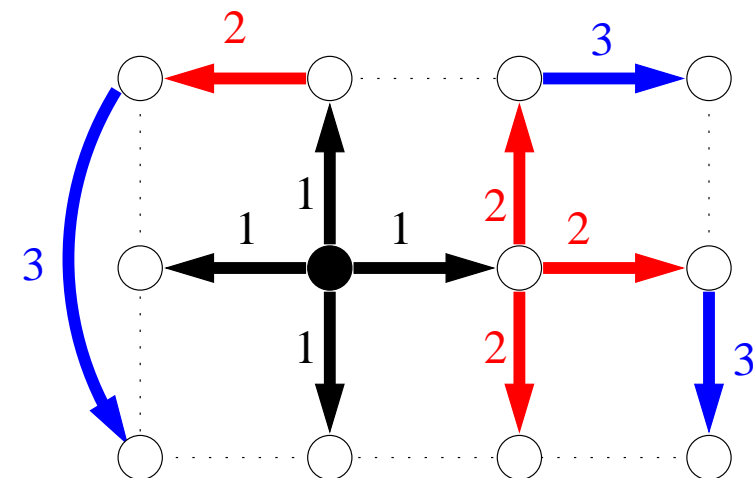
- Všechny TADTy jsou izomorfní: odvozeny z generického TADT  $B(*)$ !!!!
- Automorfizmus = přeložení (zachovává časové úrovně hran stromu).
- Vyřešeno pro 2-D a 3-D toroidy.
- Vyřešeno pro hyperkrychle.

**Lemma 12.** *Libovolná 2 přeložení generického  $B(*)$  jsou  $\underline{TADTy} \iff$  všechny hrany na každé úrovni  $i$  v  $B(*)$  jsou různých směrů (např.  $N, E, W, S$  ve 2-D).* ♣


- $K(z, z)$ ,  $z$  je liché: triviální optimální řešení,  $\beta = 0$ :  
 $B(*) = 4$  rotace 2-D hada velikosti  $(z_1 z_2 - 1)/4$  a pokrývajícího 1 čtvrtinu toroidu.



(a) 2 různá řešení pro  $K(7, 7)$



(b) řešení pro  $K(4, 3)$

- Obecné  $K(z_1, z_2)$ : časově-optimální a  $\beta \leq 3$ , viz příklad (b).
- $K(z, z, z)$ ,  $z$  je liché: triviální řešení, kde  $B(*) = 6$  rotací 3-D hada vyplňujícího pyramidu. ( $K(z, z, z)$  je sjednocení 6 pyramid.) 
- Obecné 3-D  $K(z_1, z_2, z_3)$ : časově-optimální a  $\beta \leq 60$ .

- Alternativní řešení pro 2-D: 2 hranově disjunktní hamiltonovské kružnice  $H_1$  a  $H_2$ .

**Algoritmus** PARALLELHAMILCYCLEAAB( $G$ )

Každý uzel rozpůlí svůj paket  $p$  na 2 dvojčata = 2 stejné části  $p_1$  a  $p_2$

Pak pošle  $p_1$  podél  $H_1$  a  $p_2$  podél  $H_2$ , resp., v obou směrech.

Každý uzel v každém dalším kroku

přijme a uloží 4 subpakety

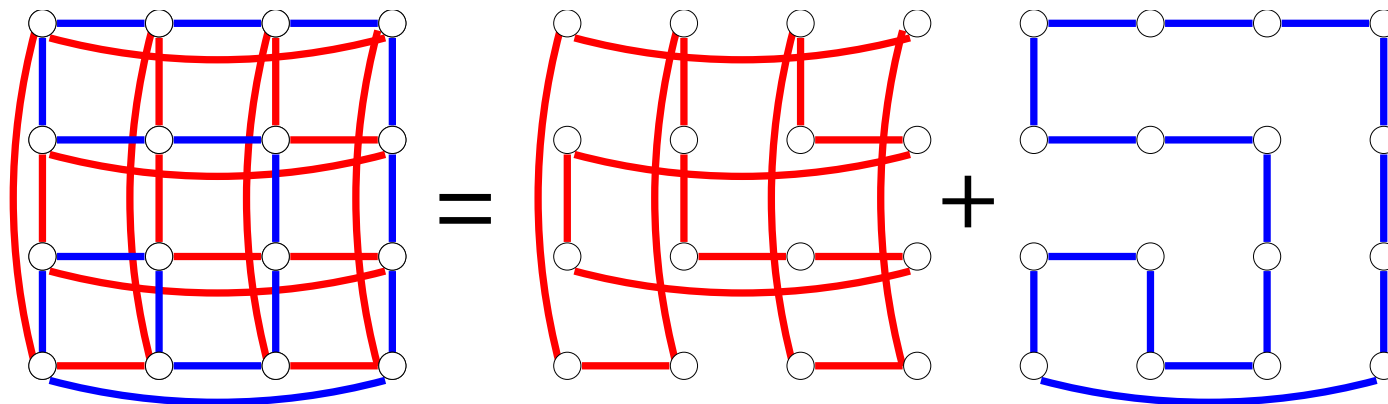
přešle je podél jejich Hamiltonských kružnic.

pokud pro nějaký paket už obdržel obě dvojčata,

pak je složí zpět do původního paketu.

**Lemma 13.**  $r_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2)) \doteq \frac{z_1 z_2}{2}$  (každý subpaket cestuje pouze do půlky své kružnice) a

$$t_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2), \mu) = r_{\text{AAB}}(K(z_1, z_2))(t_s + \frac{\mu}{2}t_m) \doteq \frac{z_1 z_2}{2}t_s + \frac{z_1 z_2}{4}\mu t_m.$$



**Poznámka:** Srovnej s řešením pomocí TADTs.

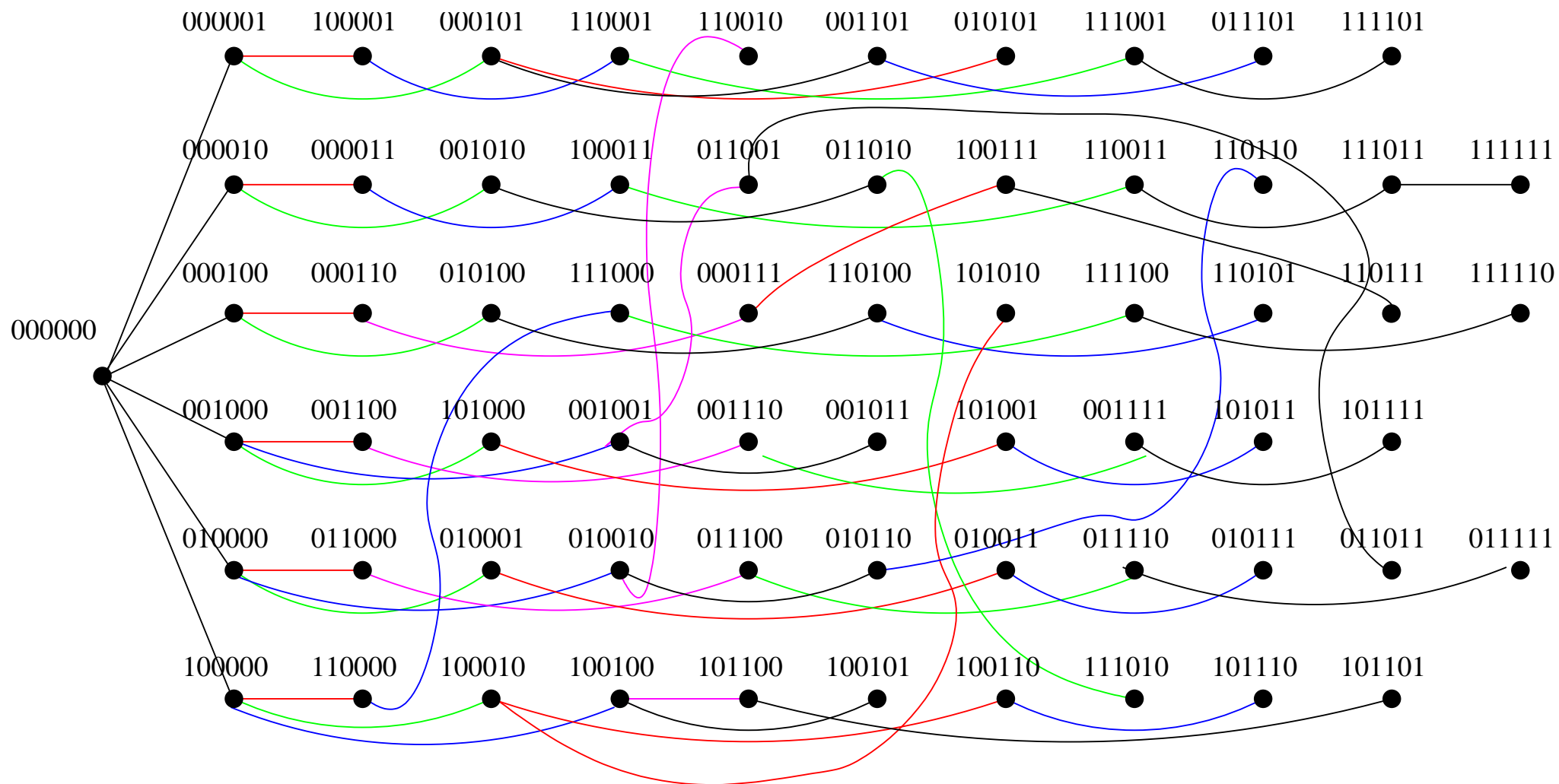
**Úkol:** zkonstruovat generickou TADT  $B(0)$  v  $Q_n$  takovou, že

- množina hran na úrovni  $i$  se skládá z  $n$  hran hyperkrychle o  $n$  různých směrech,
- kromě poslední úrovně  $\lceil (2^n - 1)/n \rceil$ , která se skládá z  $((2^n - 1) \bmod n) < n$  hran.

**Konstrukce:**

- Rozděl uzly  $Q_n$  do náhrdelníků.
- Setříd' náhrdelníky podle rostoucího počtu bitů 1, začni vždy s  $L_{k1} = \text{rotace } 1^k 0^{n-k}$ .
- Uspořádej řetězce v náhrdelnících do  $n$ -sloupcové tabulky tak, že
  - řádek  $i$  tabulky definuje uzly  $B(0)$  na úrovni  $i$ ,
  - začíná-li náhrdelník v sloupci  $j$ , začni v něm řetězcem  $u = u_{n-1} \dots u_0$  s  $u_j = 1$ ,
  - náhrdelník pokračuje rotováním.
- OAB strom:  $u = u_{n-1} \dots u_{j+1} 1 u_{j-1} \dots u_0 \longrightarrow \text{neg}_j(u) = u_{n-1} \dots u_{j+1} 0 u_{j-1} \dots u_0$ ,  
 kde  $u$  je v sloupci  $j$  a  $\text{neg}_j(u)$  se musí objevit na předchozí úrovni (= řádku) než  $u$   
 $\implies$  každý náhrdelník  $L_{k1}$  začínající ve sloupci  $j$  musí začínat uzlem  $u$  takovým, že  
 na pozici  $j - 1$  (cyklicky) má bit 0.

	0	1	2	3	4	5
1	$L_{11}: \{00000\mathbf{1}$	$0000\mathbf{10}$	$000\mathbf{100}$	$00\mathbf{1000}$	$0\mathbf{10000}$	$\mathbf{100000}\}$
2	$L_{21}: \{0000\mathbf{11}$	$000\mathbf{110}$	$00\mathbf{1100}$	$0\mathbf{11000}$	$\mathbf{110000}$	$\mathbf{100001}\}$
3	$L_{22}: \{01000\mathbf{1}$	$1000\mathbf{10}$	$000\mathbf{101}$	$00\mathbf{1010}$	$0\mathbf{10100}$	$\mathbf{101000}\}$
4	$L_{23}: \{00100\mathbf{1}$	$0100\mathbf{10}$	$100\mathbf{100}\}$	$L_{31}: \{11\mathbf{1000}$	$\mathbf{110001}$	$\mathbf{100011}$
5	$000\mathbf{111}$	$00\mathbf{1110}$	$0\mathbf{11100}\}$	$L_{32}: \{10\mathbf{1100}$	$0\mathbf{11001}$	$\mathbf{110010}$
6	$100\mathbf{101}$	$00\mathbf{1011}$	$0\mathbf{10110}\}$	$L_{33}: \{00\mathbf{1101}$	$0\mathbf{11010}$	$\mathbf{110100}$
7	$10\mathbf{1001}$	$0\mathbf{10011}$	$100\mathbf{110}\}$	$L_{34}: \{10\mathbf{1010}$	$0\mathbf{10101}\}$	$L_{41}: \{\mathbf{100111}$
8	$00\mathbf{1111}$	$0\mathbf{11110}$	$11\mathbf{1100}$	$1\mathbf{11001}$	$\mathbf{110011}\}$	$L_{42}: \{\mathbf{111010}$
9	$110\mathbf{101}$	$10\mathbf{1011}$	$0\mathbf{10111}$	$10\mathbf{1110}$	$0\mathbf{11101}\}$	$L_{43}: \{\mathbf{110110}$
10	$10\mathbf{1101}$	$0\mathbf{11011}\}$	$L_{51}: \{11\mathbf{1101}$	$1\mathbf{11011}$	$\mathbf{110111}$	$\mathbf{101111}$
11	$0\mathbf{11111}$	$1\mathbf{11110}\}$	$L_{61}: \{11\mathbf{1111}\}$			





**Algoritmus** WHACCUMBROADCASTAAB( $G$ )

**Fáze 1:** Rozděl  $G$  do  $2^k$  souvislých regionů a zvol jejich reprezentanty.

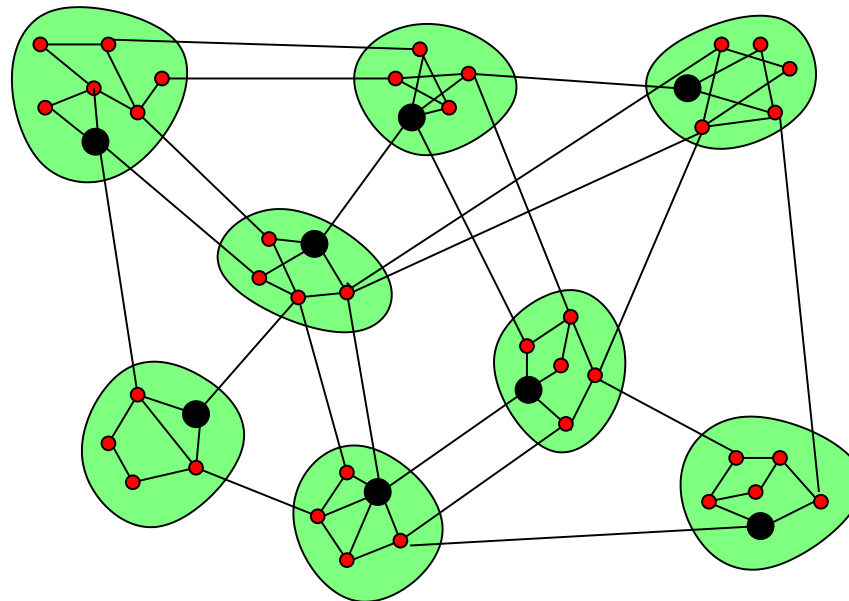
**Fáze 2:** Každý reprezentant shromáždí pakety uvnitř svého regionu použitím AOG.

**Fáze 3:** Reprezentanti provedou AAB mezi sebou simulací AAB

v kombinující  $Q_k$

(\* viz Slide 9 \*).

**Fáze 4:** Každý reprezentant distribuuje globální info uvnitř svého regionu.



- AAS = úplná výměna = osobní komunikace všichni-všem.
- Každý uzel vlastní  $N - 1$  paketů velikosti  $\mu$ , pro každý uzel jeden.
- Celkový počet paketů je  $N(N - 1)$ .
- Příklad: transpozice matice  $A_{N,N}$ , mapované po řádcích na  $N$ -procesorový počítač tak, že prvek  $a_{i,j}$  je uložen v lokální paměti procesoru  $P_i$  na adrese  $j$ .

Spodní mez daná síťovou propustností

**Lemma 14.** *Nechť  $G$  je  $N$ -uzlová SF plně-duplexní síť s  $m = |E(G)|$  hranami. Pak pro nekombinující AAS platí*

$$\rho_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G) = \frac{1}{2m} \left( \sum_{u \neq v} \text{dist}_G(u, v) \right) \quad a \quad \tau_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G)(t_s + \mu t_m)$$

*a pro kombinující AAS platí*

$$\rho_{\text{AAS}}^{\text{C}}(G) = \text{diam}(G) \quad a \quad \tau_{\text{AAS}}^{\text{C}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAS}}^{\text{C}}(G)t_s + \rho_{\text{AAS}}^{\text{N}}(G)\mu t_m.$$



Spodní mez daná bisekční propustností

**Lemma 15.** *Nechť  $G$  je  $N$ -uzlová plně-duplexní síť s hranovou bisekční šířkou  $\text{bw}_e(G)$ , s WH nebo SF přepínáním. Pro kombinující i nekombinující AAS platí*

$$\tau_{\text{AAS}}(G, \mu) = \rho_{\text{AAS}}(G)t_s + \frac{\lceil N/2 \rceil \lfloor N/2 \rfloor \mu t_m}{\text{bw}_e(G)},$$

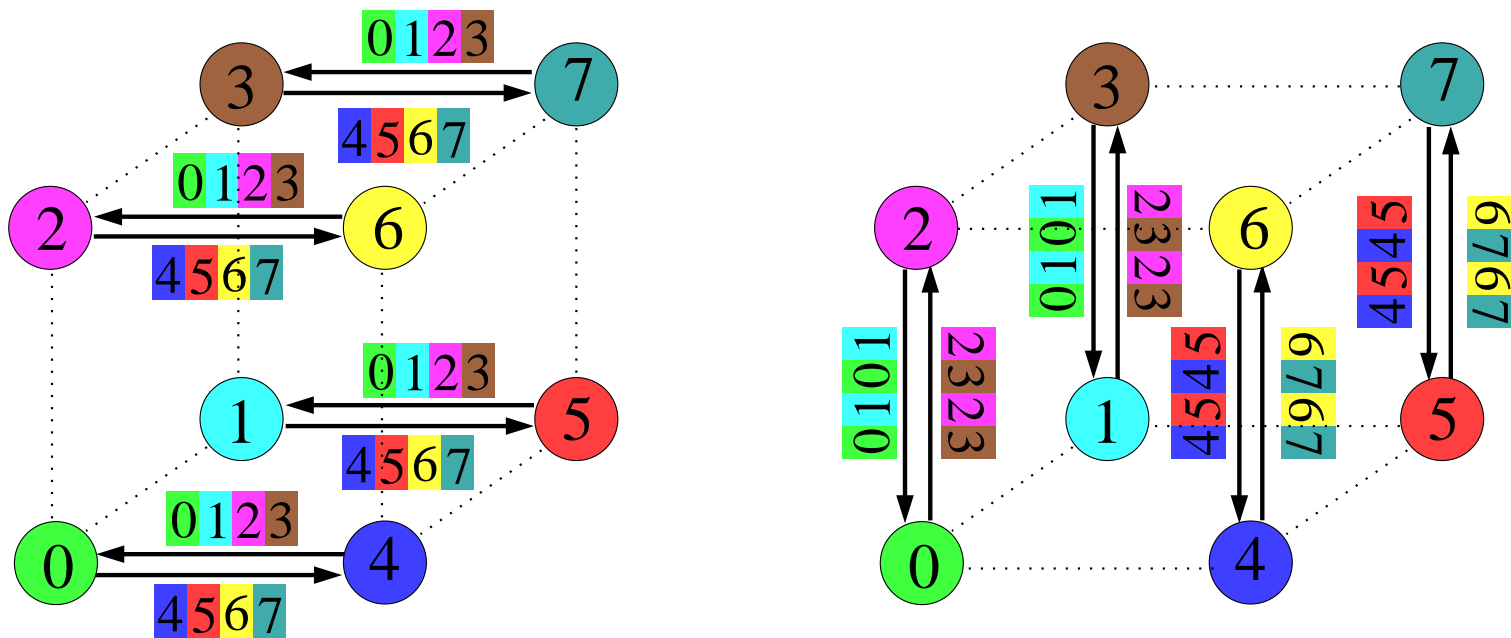
*kde  $\rho_{\text{AAS}}(G)$  závisí na modelu.*

■ **Poznámka:** V polo-duplexní síti jsou spodní meze  $\tau$  dvounásobné.

## SF AAS v 1-portové hyperkrychli: alg. stand. výměna (STANDEXCH AAS)

$$t_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) = n(t_s + 2^{n-1}\mu t_m) > \tau_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) = nt_s + \frac{2^{n-1}2^{n-1}\mu t_m}{2^{n-1}} = nt_s + 2^{n-1}\mu t_m.$$

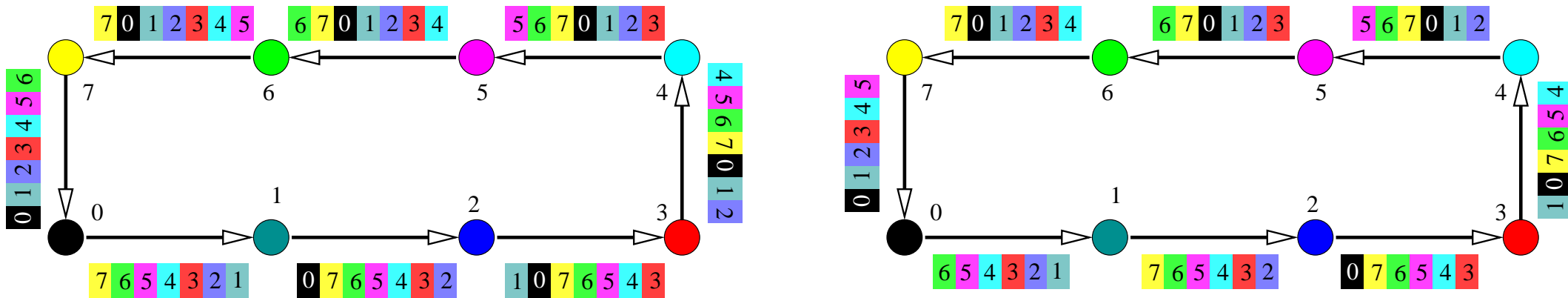
STANDEXCH AAS je pouze krokově optimální!



První 2 kroky 3-krokového AAS v kombinující 1-portové hyperkrychli  $Q_3$

$$\tau_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = (z - 1)t_s + \lceil z/2 \rceil \lfloor z/2 \rfloor \mu t_m.$$

Triviální cyklický pipeline is asymptoticky optimální!!!

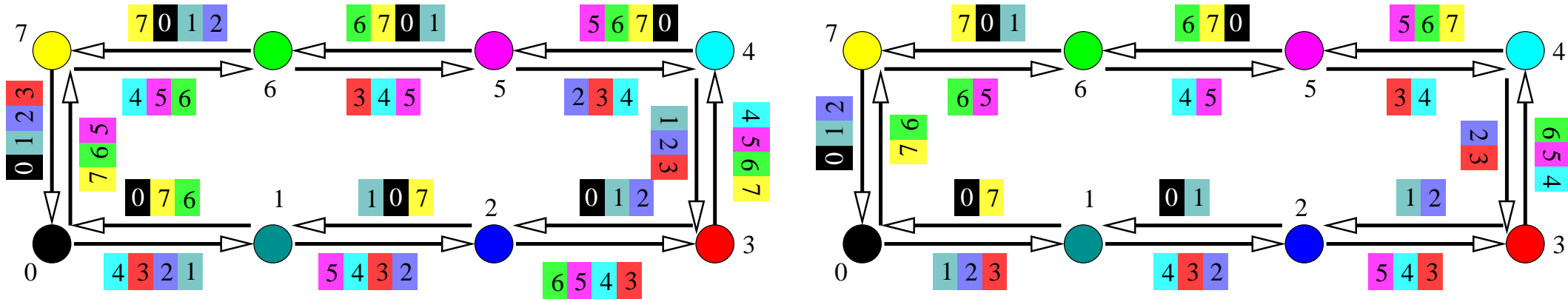


První 2 kroky AAS v kombinující 1-portové polo-dupl. kružnici.

$$t_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = \sum_{i=1}^{z-1} (t_s + \mu t_m(z - i)) = (t_s + \mu t_m z/2)(z - 1),$$

- WH přepínání neposkytne lepší algoritmus.

$$\tau_{\text{AAS}}(K(z), \mu) \doteq t_s z/2 + z^2 \mu t_m/8$$



- Zprávy jsou posílány v obou směrech a jsou menší.

Je-li  $z$  sudé, pak

$$t_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = \sum_{i=1}^{z/2} (t_s + \mu t_m i) = t_s z/2 + \mu t_m z(z+2)/8.$$

Je-li  $z$  liché, pak

$$t_{\text{AAS}}(K(z), \mu) = \sum_{i=1}^{(z-1)/2} (t_s + \mu t_m ((z+1)/2 - i)) = t_s (z-1)/2 + \mu t_m (z^2 - 1)/8.$$

**Důsledek 16.** (Lemmy 15.) *Pro  $R = K(z_1, \dots, z_n)$  s  $z_i \geq z_{i+1}$  platí*

$$\tau_{\text{AAS}}(R, \mu) = \left( \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{z_1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{z_1}{2} \right\rceil \prod_{i=2}^n z_i \right) \mu t_m.$$

**Důkaz.**

- Rozřízni  $R$  na  $R_1 = K(\lfloor z_1/2 \rfloor, \dots, z_n)$  a  $R_2 = K(\lceil z_1/2 \rceil, \dots, z_n)$ .
- Počet plně-duplexních kanálů spojujících  $R_1$  s  $R_2$ :  $2 \prod_{i=2}^n z_i$ .
- Počet paketů, které musí být vyměněny mezi  $R_1$  a  $R_2$  každým směrem:

$$|V(R_1)| \cdot |V(R_2)| = \lfloor z_1/2 \rfloor \lceil z_1/2 \rceil \prod_{i=2}^n z_i^2.$$



**SF AAS algoritmus založený na kartézském rozkladu**

$$r_{\text{AAS}}(K(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^n r_{\text{AAS}}(K(z_i)) \quad \text{a}$$

$$t_{\text{AAB}}(K(z_1, \dots, z_n), \mu) = \sum_{i=1}^n t_{\text{AAB}}(K(z_i), (\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_j) \mu)$$

Z Lemmy 15 plyne

$$\tau_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}), \mu) = \rho_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}))t_s + \frac{N\sqrt{N}\mu t_m}{4}.$$

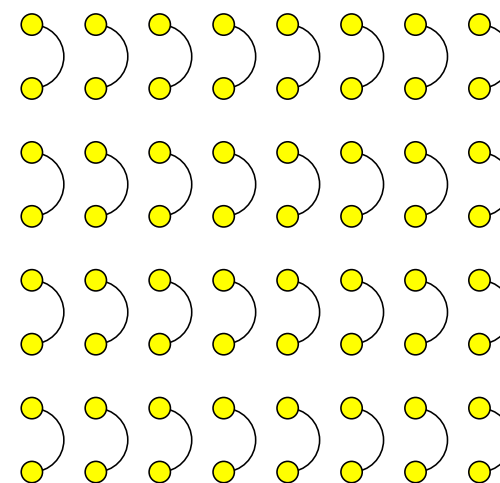
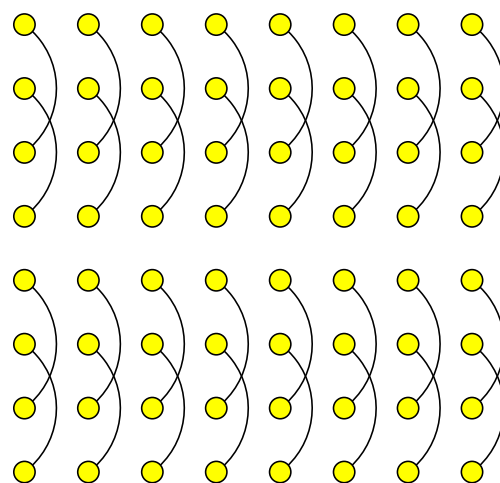
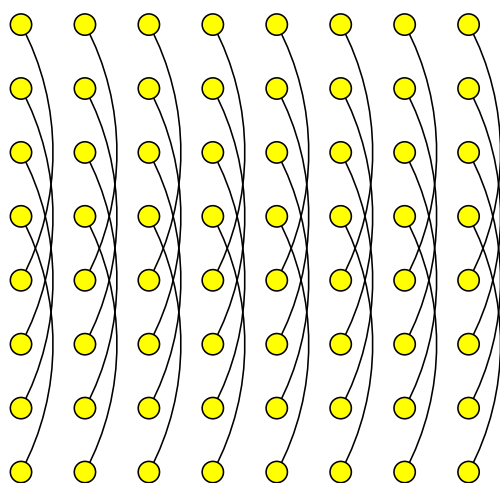
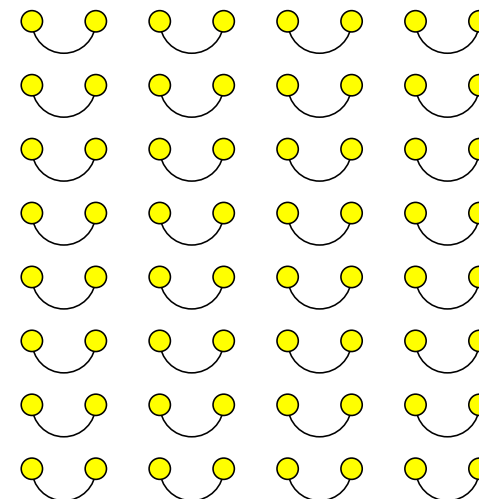
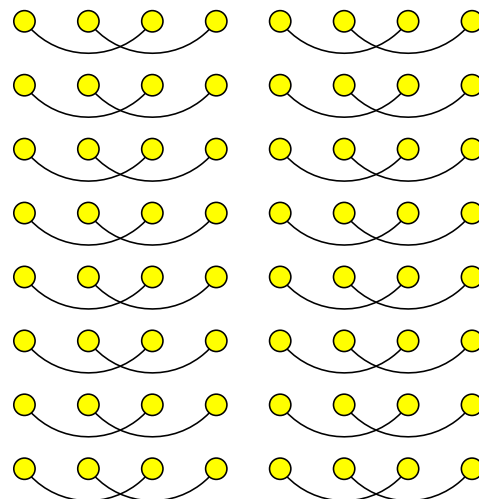
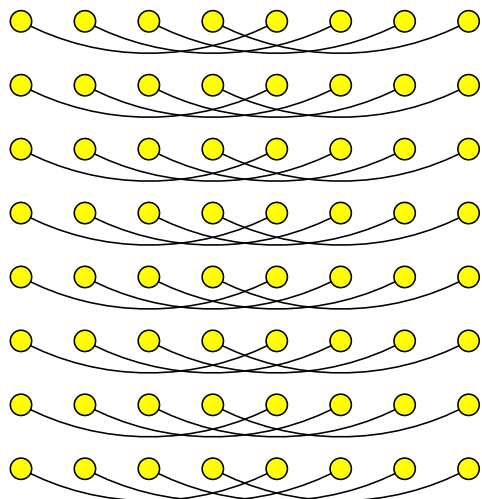
**Algoritmus Binární výměna BINEXCHAAS (= simulace STANDEXCHAAS)**

- $M(2^k, 2^l)$  je rekurzivně půlena, např. střídavě ve směrech X a Y.
- Počet fází je  $k + l = \log N$ .
- 1 fáze vyžaduje několik kroků, kvůli zahlcení WH kanálů.
- V každém kroku je mezi komunikujícími partnery vyměněn blok  $N/2$  paketů.



Pro  $N = 4^k$ :

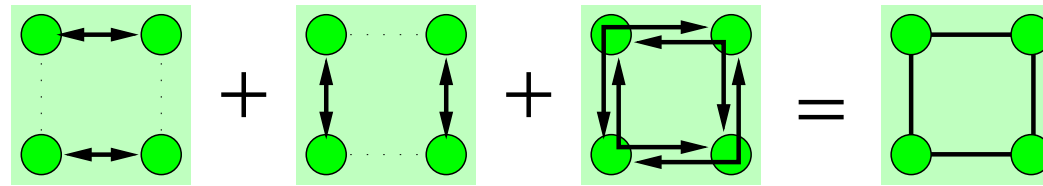
$$\begin{aligned}
t_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}), \mu) &= 2 \left[ \frac{\sqrt{N}}{2} \left( t_s + \frac{\sqrt{N}}{2} t_d + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + \right. \\
&\quad \frac{\sqrt{N}}{4} \left( t_s + \frac{\sqrt{N}}{4} t_d + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + \\
&\quad \dots + \\
&\quad \left. \left( t_s + t_d + \frac{N}{2} \mu t_m \right) \right] \\
&= 2 \left( \frac{\sqrt{N}}{2} + \frac{\sqrt{N}}{4} + \dots + 1 \right) \left( t_s + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + \\
&\quad 2t_d \left( \frac{N}{4} + \frac{N}{4^2} + \dots + 1 \right) \\
&= 2(\sqrt{N} - 1) \left( t_s + \frac{N}{2} \mu t_m \right) + 2t_d \frac{N - 1}{3} \\
&\doteq 2\sqrt{N}t_s + N\sqrt{N}\mu t_m + \frac{2}{3}Nt_d. \tag{1}
\end{aligned}$$



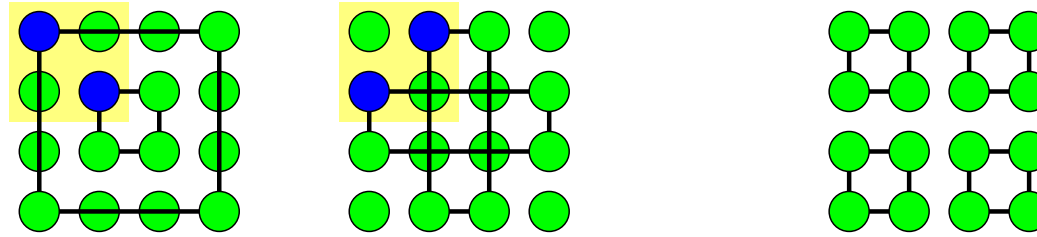
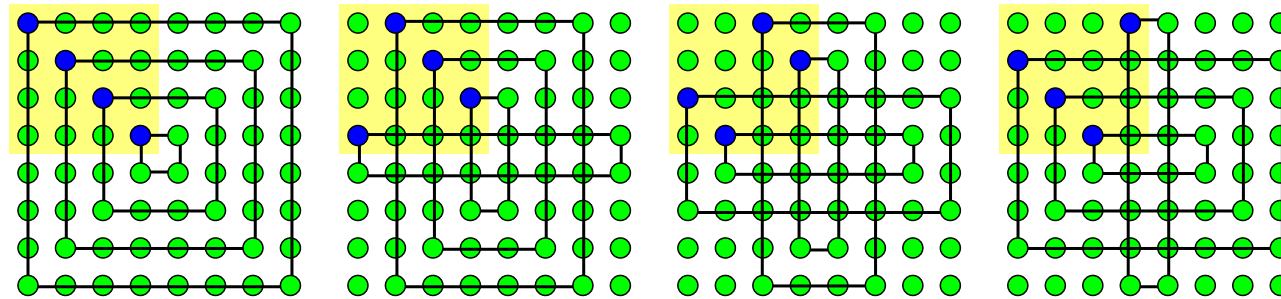
BINEXCHAS v  $M(8, 8)$ :

- (a) Fáze 1X a 1Y: 4 kroky    (b) Fáze 2X a 2Y: 2 kroky    (c) Fáze 3X a 3Y: 1 krok

- Navrženo speciálně pro WH mřížky.
- $M(2^k, 2^k)$  je rekurzivně dělena do kvadrantů  $\implies$  fáze.
- 1 fáze odpovídající kvadrantům velikosti  $2^l \times 2^l$  má  $2^l$  podfází.
- V podfázi  $i$ , všechny čtveřice zrcadlově symetrických prvků na  $i$ -tých diagonálách všech 4 kvadrantů provádějí paralelně mikro-AAS.
- 1 mikro-AAS = 3-kroková osobní výměna paketů mezi 4 rohy obdélníku.



(a) Mikro-AAS

(b) Fáze 1 v  $M(4,4)$ (b) Fáze 2 v  $M(4,4)$ (c) Fáze 1 v  $M(8,8)$ 

QUADEXCHAAS WH mřížkách  $M(2^k, 2^k)$ :

(a) 3-krokový mikro-AAS mezi 4 rohy obdélníku.

(b) QEX AAS na  $M(4,4)$ : Fáze 1 (2 podfáze) a fáze 2 (1 mikro-AAS).

(c) QEX AAS na  $M(8,8)$ : Fáze 1 (4 podfáze).

$$t_{\text{AAS}} \left( M \left( \sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu = \right) = t_{\text{AAS}}^{\text{Faze1}} \left( M \left( \sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu \right) + t_{\text{AAS}} \left( M \left( \frac{\sqrt{N}}{2}, \frac{\sqrt{N}}{2} \right), 4\mu \right) \quad (2)$$

1. Fáze 1 v  $M(\sqrt{N}, \sqrt{N})$  se skládá z  $\frac{\sqrt{N}}{2}$  podfází.

- Složitost 1 podfáze je dána složitostí největšího mikro-AAS.
- Složitost 1. podfáze:  $3t_s + 3\frac{N}{4}\mu t_m + 4t_d(\sqrt{N} - 1)$
- Složitosti ostatních podfází:  $3t_s + 3\frac{N}{4}\mu t_m + kt_d\sqrt{N}$ , kde přibližně  $k \in \{3, 4\}$ .
- Horní odhad časové složitosti Fáze 1:

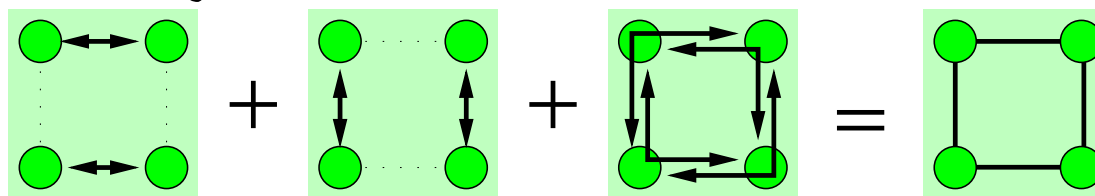
$$\begin{aligned} t_{\text{AAS}}^{\text{Faze1}} \left( M \left( \sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu \right) &\doteq \frac{\sqrt{N}}{2} \left( 3t_s + \frac{3N}{4}\mu t_m + 4t_d\sqrt{N} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{N}}{2}t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{8}\mu t_m + 2Nt_d. \end{aligned}$$

2. Z (2) plyne

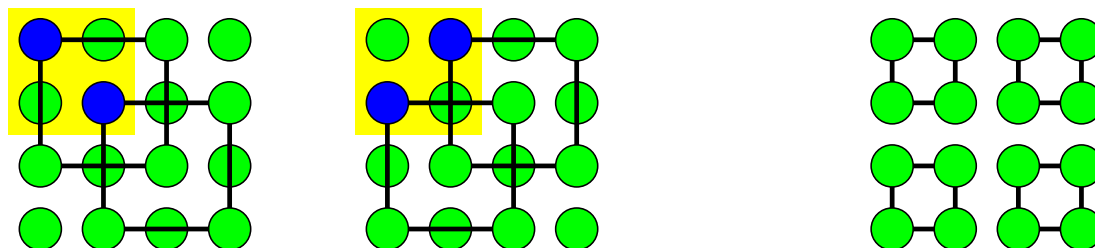
$$\begin{aligned}
t_{\text{AAS}}(M(\sqrt{N}, \sqrt{N}), \mu) &= \frac{3\sqrt{N}}{2}t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{8}\mu t_m + 2Nt_d + \\
&\quad \frac{3\sqrt{N}}{4}t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{16}\mu t_m + 2\frac{N}{4}t_d + \\
&\quad \dots + \\
&\quad 3t_s + \frac{3N}{4}\mu t_m + 4t_d \\
&\doteq 3\sqrt{N}t_s + \frac{3}{4}N\sqrt{N}\mu t_m + \frac{8N}{3}t_d.
\end{aligned}$$

3. Srovnáním s (1) na slajdu 26 plyne, že QUADEXCHAAS má ve srovnání s BINEXCHAAS menší přenosovou latenci na úkor většího počtu kroků a celkově větší délky použitých cest.

Místo zrcadlové symetrie stejnolehlost.

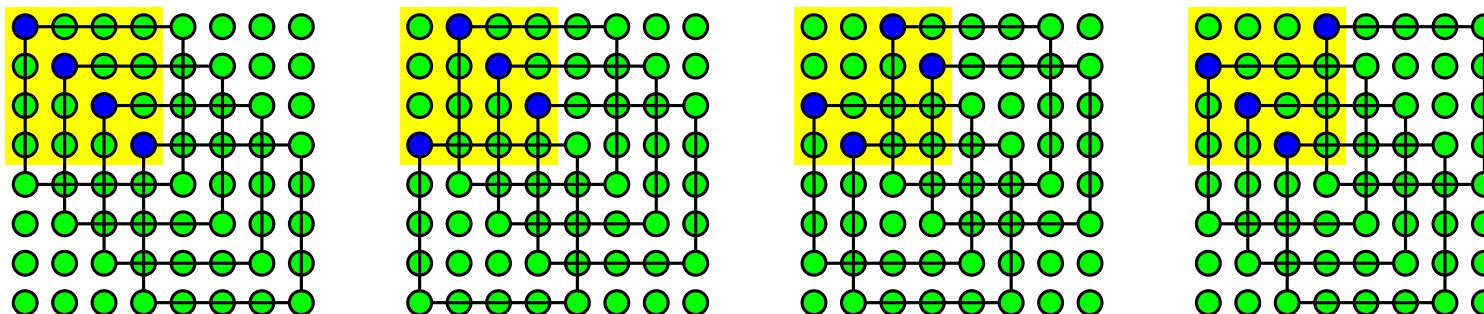


(a) Mikro-AAS



(b) Faze 1 v M(4,4)

(b) Faze 2 v M(4,4)



(c) Faze 1 v M(8,8)

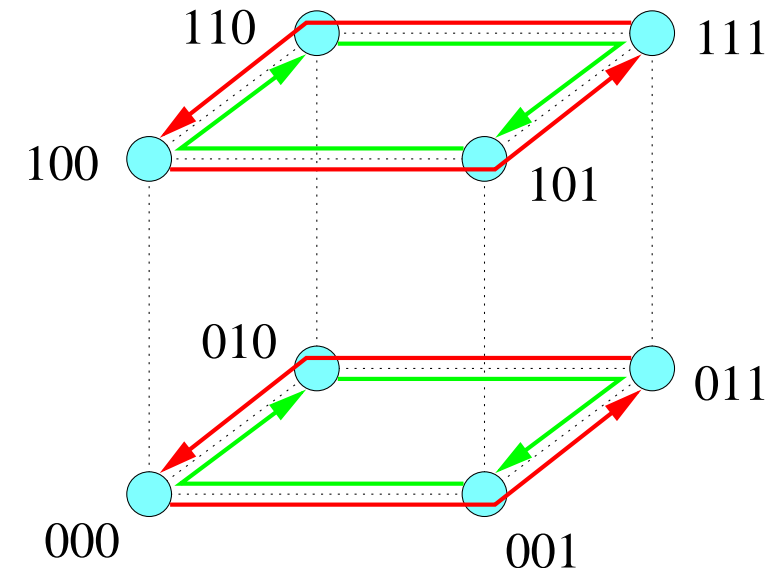
$$t_{\text{AAS}}^{\text{Faze1}} \left( M \left( \sqrt{N}, \sqrt{N} \right), \mu \right) = \frac{3\sqrt{N}}{2} t_s + \frac{3N\sqrt{N}}{8} \mu t_m + N t_d$$

## WH AAS: Přímá výměna (DIREXCHAAS) v hyperkrychli

- Je-li  $t_s \ll 2^{n-1} \mu t_m$ , STANDEXCHAAS v kombinující SF  $Q_n$  není optimální.
- DIREXCHAAS = série  $2^n - 1$  permutací přeložení  $\pi_j : x \mapsto x \text{ XOR } j$   
 $\implies$  každá dvojice uzlů  $(i, \pi_j(i))$  si vyměňuje přímo své 2 pakety.
- Každá permutace  $\pi_j$  je při použití  $e$ -cube WH přepínání bezkolizní a 1-kroková

$$\implies t_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) \doteq (2^n - 1)(t_s + nt_d/2 + \mu t_m)$$

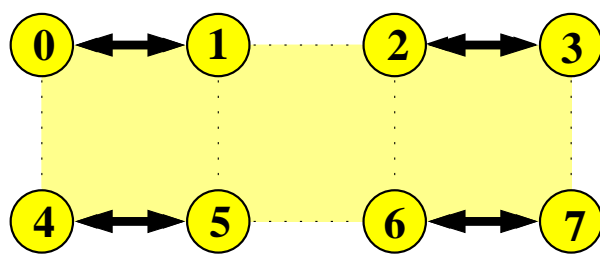
(průměrná vzdálenost je přibližně  $n/2$ )



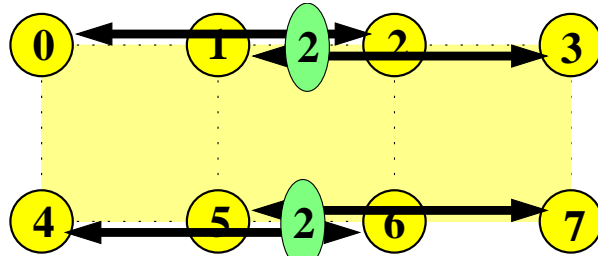
- Je-li  $t_s \ll \mu t_m$ , pak je DIREXCHAAS na WH  $Q_n$  asymptoticky optimální  
 neboť  $t_{\text{AAS}}(Q_n, \mu) \doteq 2\tau_{\text{AAS}}(Q_n, \mu)$  (viz Slajd 19).



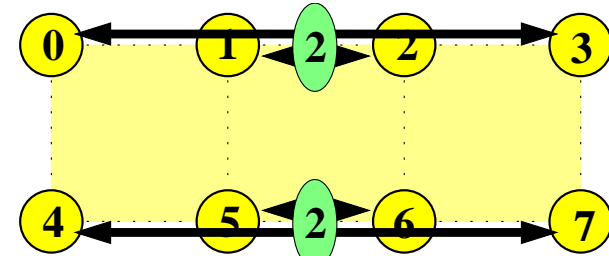
- Přiřadíme uzlům mřížky binární adresy lexikograficky: 1 řádek = 1 podkrychle.
- XY směřování produkuje zahlcení linek pro některé permutace  $\pi_j$ .
- Jednotlivé permutace vyžadují různý počet kroků.



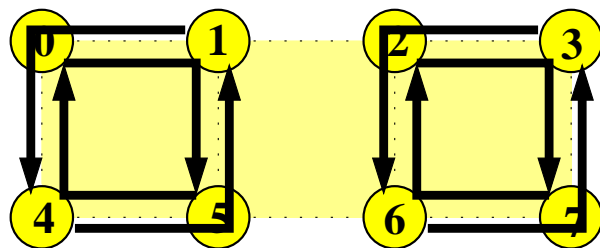
$j=001$



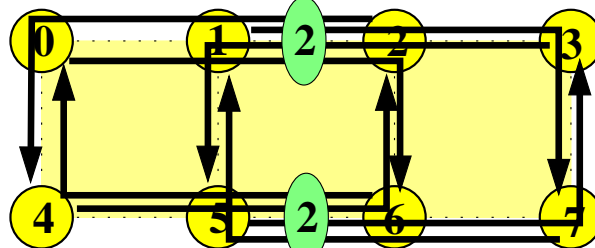
$j=010$



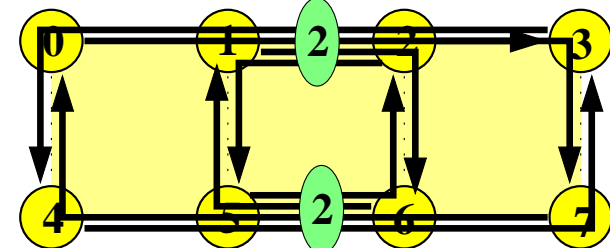
$j=011$



$j=101$



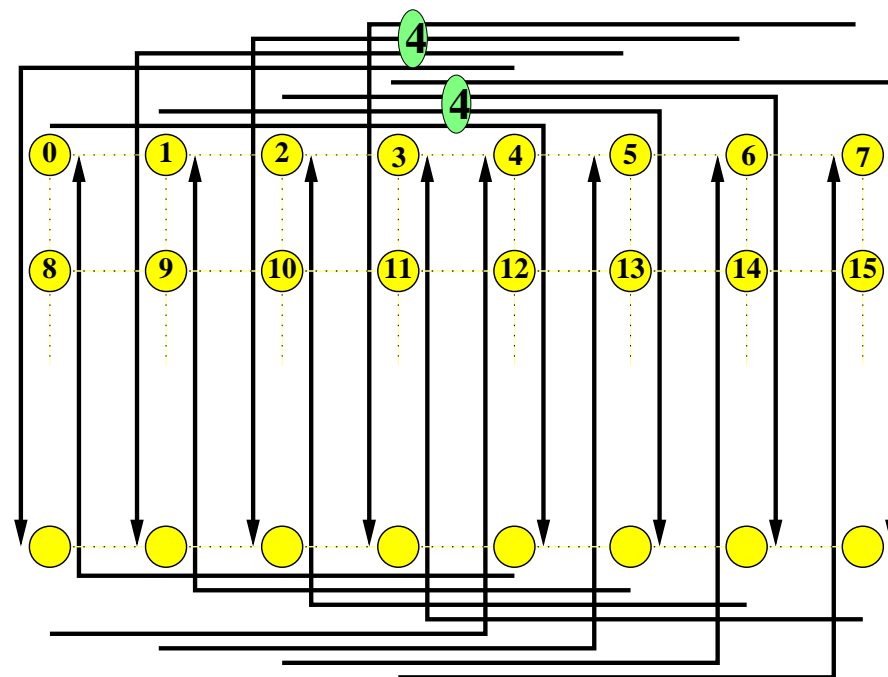
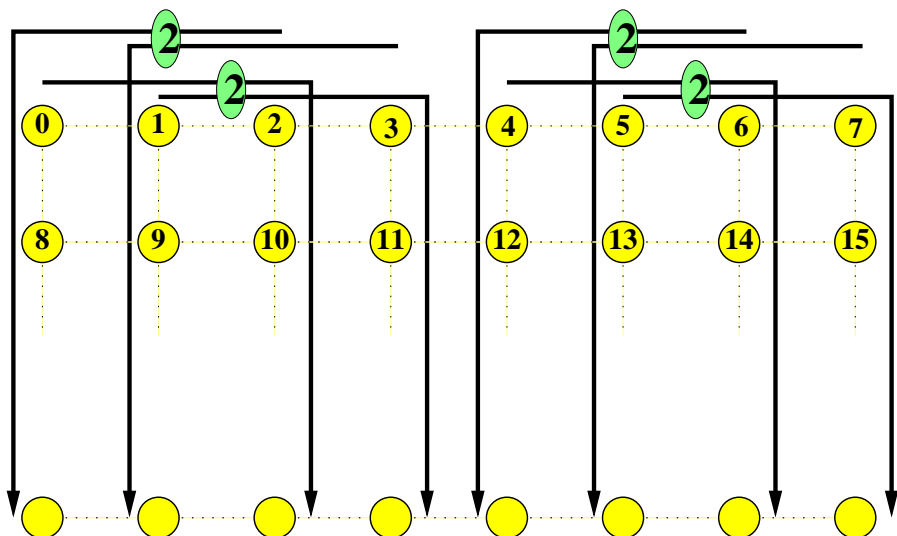
$j=110$

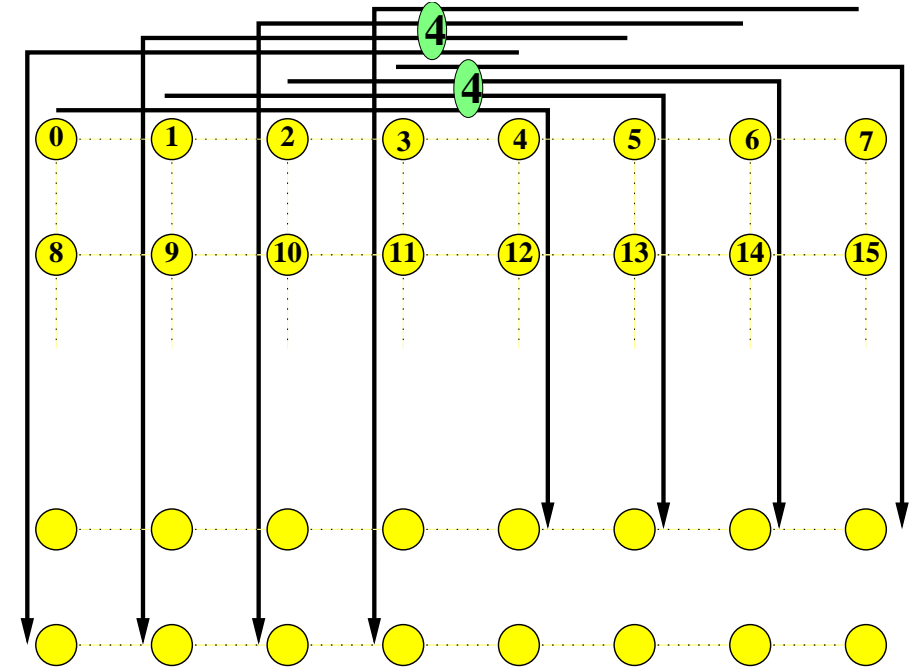
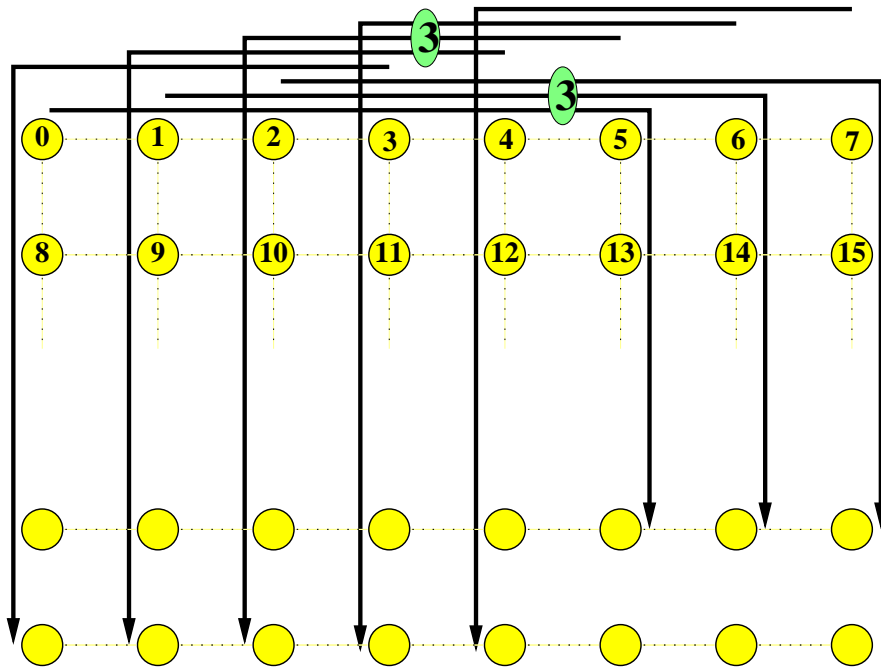


$j=111$

Realizace vybraných permutací  $\pi_j$  na  $M(2,4)$ .

- Maximální zahlčení linek v  $M(z_1, z_2)$  pro permutace je  $\max(z_1, z_2)/2$ .





- AAS se rozloží na posloupnost permutací kartézský posun.
- Stejný problém se zahlcením, hodnoty zahlcení jsou taktéž  $\max(z_1, z_2)/2$ .