Úrokový počet – základy finanční matematiky

Principy úrokového počtu

- koruna dnes má větší hodnotu než koruna získaná zítra
- může být ihned investována a přinášet výnos
- existuje časová hodnota peněz, základem je úrokování (jednoduché a složené)

Jednoduché úrokování – úrok se nepřipisuje k základu a vybírá se

Složené úrokování

- úrok se připisuje k základu a znovu se úročí
- připisování úroků je polhůtné a předlhůtné

Základem úrokování je:

- roční úroková míra
- půlroční úroková míra, … atp.

Zkratky úrokových období:

-	p.a.	roční (per annum)
-	p.s.	pololetní (per semestre)
-	p.q.	čtvrtletní (per quartale)
-	p.m.	měsíční (per mensem)
-	p.d.	denní (per diem)

Výpočet budoucí hodnoty

$$A_t = A_0 \times (1+i)^t$$

A_t	částka v roce t
A_0	částka v roce t=0
i	roční úroková míra

Složené úrokování a výpočet budoucí hodnoty

$$A_t = A_0 \times (1+\frac{i}{m})^{m*t}$$

m – počet období za rok, pro pololetní úrokování m = 2, pro čtvrtletní m = 4 atp.

Spojité úrokování

$$A_t = A_0 \times e^{f \times t}$$

t	délka období
f	úroková intenzita

Efektivní úroková míra
Je taková roční úroková míra, která má stejný efekt jako daný systém úrokování.
Platí následující vztahy:

$$(1+i_e)^T = (1+\frac{i}{m})^{m \times T}$$

$$i_e = (1+\frac{i}{m})^m - 1$$ i_e ... efektivní úroková míra

$$\lim(1+\frac{i}{m})^m = e^f$$

1. **Střadatel**

Na začátku období ukládáme pravidelně částku *S*, za n let naspoříme částku K, přičemž *i* je roční úroková míra

$$K = S \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S \times q \times \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$q \times \frac{q^n - 1}{q-1}$$ střadatel

2. **Zásobitel**

Jak velkou částku *K* musíme dnes uložit na knížku, jestliže chci každý rok vybírat částku *S*, přičemž *i* je roční úroková míra.

$$K = S \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} = S \times \frac{q^n - 1}{q^n \times (q-1)}$$

$$\frac{q^n - 1}{q^n \times (q-1)}$$ zásobitel

3. Fondovatel

Jak velkou částku *S* je nutné pravidelně při úrokové míře *i* ukládat, aby byl dosažen požadovaný obnos K.

$$S = K \times \frac{(1+i)-1}{(1+i)^n - 1} = K \times \frac{q-1}{q^n - 1}$$

$\frac{q-1}{q^n - 1}$ fondovatel

4. Anuita

Jak velkou konstantní splátku *S* (anuitu) budu splácet na konci období,
mám - li úvěr velikosti *U* při úrokové míře *i*, kde *n* je počet let splatnosti úvěru

$$S = U \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} = U \times \frac{q^n \times (q-1)}{q^n - 1}$$

$\frac{q^n \times (q-1)}{q^n - 1}$ anuita, platí: anuita=1/zásobitel

5. Perpetuita

Věčný výnos, nekonečná série pravidelných peněžních příjmů ve stejné výši. Současnou hodntou perpetuity vypočteme jako:

p = –

A	výše perpetuity (pravidelná platba) za jedno období
i	roční úroková míra

1. **Příklad (řešený)**

Na začátku roku si na účet v bance uložíte 5000 Kč při úrokové míře 10 %. Kolik budete mít na účtu peněz po 15 letech, pokud se jedná o roční, půlroční, čtvrtletní a měsíční složené úrokování?

Řešení:

p.a. : $A_{15} = 5\,000 * (1 + 0{,}1)^{15} =$ 20 886,24 Kč

p.s.: $A_{15} = 5\,000 * (1 + —)^{30} =$ 21 609,71 Kč

p.q.: $A_{15} = 5\,000 * (1 + —)^{60} =$ 21 998,95 Kč

p.m.: $A_{15} = 5\,000 * (1 + —)^{180} =$ 22 269,6 Kč

2. Příklad

Jakou částku musíme dnes uložit, aby za 5 let při úrokové míře 8 % p.m. byla k dispozici částka 20 000 Kč?

3. Příklad

Firma ukládá každoročně vždy na začátku roku na firemní účet částku ve výši 40 000 Kč. Banka poskytuje úrok 10 % p.a., kolik bude na účtu peněz po 5 letech?

4. Příklad

Otec ve své závěti stanovil, že 0,5 mil. Kč bude převedeno do zvláštního fondu, ze kterého každé ze tří dětí dostane při dosažení 18 let stejný podíl. Fond byl investován s úrokovou mírou 10 % a čtvrtletním úrokováním. V době smrti otce bylo stáří dětí 10,12 a 15 let. Jak velkou částku při dosažení 18 let dostane každé dítě?

5. Příklad

Jakou částku musíme dnes uložit na účet, aby z něj bylo možné po dobu 10 let při úrokové míře 10 % p.s. na konci každého roku čerpat částku 15 000 Kč.

6. Příklad

Jak velkou částku musíme každoročně ukládat na účet, abychom měli po 10 letech na účtu s 5% úrokovou mírou p.a. na účtu 90 000 Kč?

7. Příklad

Rozhodujete se, do které banky uložíte peníze. První banka nabízí nominální roční úrokovou míru 10,1 % s denním úrokováním (počítejte 365 dní/rok) a druhá banka nabízí nominální roční úrokovou míru 10,2 % s čtvrtletním úrokováním a třetí banka nabízí nominální roční úrokovou míru 10,25 % s půlročním úrokováním. Kterou banku si vyberete?

8. Příklad

Každý rok ukládáte na konci každého roku částku ve výši 3 000 Kč. Za jak dlouho budete mít na účtu 18 000 Kč, je – li úroková míra 4,9 % p.q. Kolik bude činit poslední splátka?

9. Příklad

Spotřebitelský úvěr ve výši 150 000 Kč je nutné splácet po dobu 5 let stejnými ročními částkami. Vypočtěte výši splátky, pokud je úroková míra 9 % p.a.

10. Příklad

Vypočtěte efektivní úrokovou míru vypočtenou pro nominální roční úrokovou sazbu 9 % s ročním, půlročním, čtvrtletním, měsíčním, týdenním a denním úrokování.

11. Příklad

Jako vítěz soutěže si můžete vybrat mezi těmito peněžními odměnami:

a) 100 000 Kč okamžitě
b) 165 000 Kč koncem 5. roku
c) Každý rok po dobu 10 let částku 15 000, která vám bude na začátku každého roku ukládána na účet
d) 9 900 Kč každý rok, po věčné časy

Úroková sazba pro všechny varianty je 10 %. Kterou variantu si vyberete?

12. Příklad

Kolik činí roční úroková míra s pololetním složeným úrokováním, pokud se za 6 let zúročí základ 100 000 Kč na splatnou částku 150 000 Kč?

Příklady pro procvičení:

Příklad 1

Vklad 100 000 Kč je uložen na 10 let s úrokovou mírou roční 6 %. Jaká je splatná částka při ročním, půlročním, čtvrtletním a měsíčním složeném úrokování?

Řešení:

roční úročení:	*179 084,80 Kč*
půlroční úročení:	*180 611,10 Kč*
čtvrtletní úročení:	*181 401,80 Kč*
měsíční úročení:	*181 939,70 Kč*

Příklad 2

Jaká nominální roční úroková míra se čtvrtletním složeným úrokováním za 5 let zúročí základ 50000 Kč na splatnou částku 70 000 Kč?

Řešení:

Nominální roční úroková sazba je 6,79 %.

Příklad 3

Vypočtěte efektivní úrokovou míru vypočtenou pro nominální roční úrokovou sazbu 5 % s ročním, půlročním, čtvrtletním, měsíčním, týdenním a denním úrokování.

Řešení:

Půlroční	$i_e = 5{,}0625\ \%$
Čtvrtletní	$i_e = 5{,}0945\ \%$
Měsíční	$i_e = 5{,}1162\ \%$
Týdenní	$i_e = 5{,}1246\ \%$
Denní	$i_e = 5{,}1267\ \%$

Příklad 4
Zákazník chce koupit nemovitost za 130 000 \$. Při uzavření smlouvy zaplatí hotově 30 000 \$. Zbytek má zaplatit v měsíčních splátkách za 15 let. Kolik bude činit měsíční splátka při úrokové míře 15 procent?

Řešení:

Měsíční splátka bude činit 1399, 59 \$.

Příklad 5
Vkladatel chce dosáhnout 5 000 \$ při pravidelných vkladech 1 000 \$ na konci každého roku. Jak dlouho musí šetřit při 5 procentní roční úrokové míře a jaká bude poslední splátka?

Řešení:

Poslední splátka bude činit 474,40 \$.

Příklad 6
First National Bank používá nominální roční úrokovou míru 13 % s denním úrokováním, zatímco Second National Bank nominální roční úrokovou míru 13,5 % s půlročním úrokováním. Která banka nabízí vyšší efektivní úrokovou míru?

Řešení:

First National Bank	$i_e = 13{,}88\ \%$
Second National Bank	$i_e = 13{,}96\ \%$