Optimalizace

Zárodek skript k předmětu A4B33OPT.
Text je neúplný a v průběhu semestru je doplňován a vylepšován.
Toto je verze ze dne **15. září 2012**.

Tomáš Werner

České vysoké učení technické
Fakulta elektrotechnická

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Disciplína optimalizace

Optimalizace (přesněji matematická optimalizace) se zabývá minimalizací (či maximalizací) funkcí mnoha proměnných za případných omezujících podmínek. Tato formulace pokrývá mnoho úloh z inženýrské praxe i přírodních věd: často přeci chceme něco udělat 'nejlépe' v rámci 'daných možností'. Umět rozpoznávat optimalizační problémy kolem sebe je inženýrovi velmi užitečné. Optimalizace, též zvaná *matematické programování*, je část aplikované matematiky, ležící na pomezí matematické analýzy, lineární algebry a informatiky. Je to moderní obor, který se rychle rozvíjí.

Příklady problémů, které vedou na optimalizační úlohy:

- Aproximuj naměřenou funkční závislost funkcí z dané třídy funkcí (např. polynomem).
- Investuj 1000 Kč do daných druhů akcií tak, aby očekávaný výnos byl velký a riziko malé.
- Rozmísti daný počet prodejen po městě tak, aby každý člověk měl do prodejny blízko.
- Najdi průběh řídícího signálu ruky robota tak, aby se dostala z místa A do místa B po dráze minimální délky (příp. minimálního času či výdaje energie) a bez kolize.
- Reguluj přívod plynu do kotle tak, aby teplota v domě byla blízká kýžené teplotě.
- Navrhni plošný spoj daného zapojení, aby délka spojů byla nejmenší.
- Najdi nejkratší cestu v počítačové síti.
- Vyhledej nejlepší spojení v jízdním řádu z místa A do místa B.
- Navrhni nejlepší školní rozvrh.
- Postav most o dané nosnosti při nejmenší spotřebě materiálu.
- Nauč umělou neuronovou síť.

Mimo inženýrskou praxi je optimalizace významná v přírodních vědách. Většinu fyzikálních zákonů lze formulovat tak, že nějaká veličina nabývá extrémální hodnoty. Živé organismy v každém okamžiku přibližně řeší, vědomě či podvědomě, množství optimalizačních úloh – např. se rozhodují pro nejlepší z možných chování.

V tomto kursu se nenaučíte řešit všechny tyto úlohy. Ale naučíte se rozpoznat druh a obtížnost úloh a dostanete základy pro řešení těch snadnějších a přibližné řešení těch obtížnějších. Spektrum úloh, které dokážete řešit, se ještě podstatně rozšíří po absolvování navazujícího kursu *Kombinatorická optimalizace.*

1.2 Značení

Pokud potkáte ve skriptech slovo vysázené **tučně**, jde o nově definovaný pojem, který máte chápat a pamatovat si jej. Slova vysázená *kurzívou* znamenají zdůraznění.

1.2.1 Množiny

$\{a_1, \ldots, a_n\}$	množina s prvky $a_1, \ldots, a_n$
$a \in A$	prvek a patří do množiny A (neboli a je prvkem A)
$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou množiny B, tj. každý prvek z A patří do B
$A = B$	množina A je rovna množině B, platí zároveň $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$
$\{\, a \in A \mid \varphi(a) \,\}$	množina prvků z A s vlastností φ. Někdy zkracujeme na $\{\, a \mid \varphi(a) \,\}$.
$A \cup B$	sjednocení množin, množina $\{\, a \mid a \in A \text{ nebo } a \in B \,\}$
$A \cap B$	průnik množin, množina $\{\, a \mid a \in A \text{ a zároveň } a \in B \,\}$
$(a_1, \ldots, a_n)$	uspořádaná n-tice prvků $a_1, \ldots, a_n$
$A \times B$	kartézský součin množin, množina $\{\, (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$
A^n	kartézský součin n stejných množin, $A^n = A \times \cdots \times A$ (n-krát).
$f\colon A \to B$	zobrazení z množiny A do množiny B

1.2.2 Zobrazení

Zápisem $f\colon A \to B$ rozumíme zobrazení z množiny A do množiny B. Formální definice je tato: podmnožina f kartézského součinu $A \times B$ (tedy *relace*) se nazývá zobrazení, platí-li $(a, b) \in f,\ (a, b') \in f \ \Rightarrow\ b = b'$. Neformálně si představujeme zobrazení jako černou skříňku, která přiřadí každému prvku $a \in A$ jediný prvek $b = f(a) \in B$. Přísně vzato, 'zobrazení' (*mapping, map*) znamená přesně totéž jako 'funkce' (*function*), ovšem slovo 'funkce' se obvykle používá pouze pro zobrazení do číselných množin (tedy $B = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ apod.).

Pro množinu obrazů všech vzorů s vlastností φ se používá zkratka

$$\{\, f(a) \mid a \in A,\ \varphi(a) \,\} = \{\, b \in B \mid b = f(a),\ a \in A,\ \varphi(a) \,\}$$

nebo pouze $\{\, f(a) \mid \varphi(a) \,\}$, pokud je A jasné z kontextu. Např. množina $\{\, x^2 \mid -1 < x < 1 \,\}$ je polouzavřený interval $\langle 0, 1)$. Obraz množiny A v zobrazení f značíme $f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$.

Zobrazení se nazývá:

- *injektivní* (neboli prosté) pokud každý vzor má jiný obraz, tj. $f(a) = f(a') \ \Rightarrow\ a = a'$,
- *surjektivní* (neboli A na B) pokud každý obraz má vzor, tj. $f(A) = B$, tj. pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $b = f(a)$,
- *bijektivní* (neboli vzájemně jednoznačné) pokud je zároveň injektivní a surjektivní.

1.2.3 Číselné množiny

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}_{++}$	množina kladných reálných čísel
$[x_1, x_2)$	polouzavřený interval reálných čísel, $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x < x_2 \,\}$
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel

1.2.4 Vektory a matice

$\mathbb{R}^{m\times n}$	množina reálných matic rozměru $m \times n$ (tedy s m řádky a n sloupci)
$\mathbb{R}^n$	množina sloupcových vektorů, ztotožněná s množinou $\mathbb{R}^{n\times 1}$ jednosloupcových matic
$\mathbb{R}^{1\times n}$	množina řádkových vektorů

Tyto množiny považujeme, díky možnosti jejich prvky sčítat a násobit reálným číslem, za vektorové prostory nad reálnými čísly. V kontextu těchto vektorových prostorů nazýváme prvky množiny $\mathbb{R}$ *skaláry*. Vektory a matice sázíme **tučně**, skaláry *kurzívou*.

Symbol $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ značí funkci n proměnných, která vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadí skalár $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Jméno funkce píšeme kurzívou, neboť její hodnoty jsou skaláry.

Symbol $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ značí zobrazení, které vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadí vektor

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^m,$$

kde funkce $f_1, \ldots, f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou složky zobrazení. Jméno zobrazení píšeme tučně, $\mathbf{f}$, neboť jeho hodnoty jsou vektory.

Kapitola 2

Formulace optimalizačních úloh

2.1 Minimum a infimum

Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel je přirozeně obdařena *úplným uspořádáním*, které značíme $\leq$. Pro množinu $Y \subseteq \mathbb{R}$ definujme:

- **Dolní mez** množiny Y je každý prvek $a \in \mathbb{R}$, pro který je $a \leq y$ pro všechna $y \in Y$.
- **Infimum** množiny Y je její největší dolní mez. Značíme jej $a = \inf Y$.
- **Nejmenší prvek** (neboli **minimum**) množiny Y je její dolní mez, která v ní leží. Pokud taková dolní mez existuje, je určena jednoznačně. Značíme $a = \min Y$.

Horní mez, největší prvek (maximum, $\max Y$) a supremum ($\sup Y$) se definují analogicky.

Minimum či maximum podmnožiny reálných čísel nemusí existovat. Je hlubokou vlastností reálných čísel, že v nich existuje infimum [supremum] každé zdola [shora] omezené podmnožiny. Tato vlastnost se nazývá **úplnost**.

Zaveďme množinu **rozšířených reálných čísel** $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, přičemž rošíříme relaci uspořádání na $-\infty$ a $+\infty$ tak, že definujeme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Zdůrazněme, že $-\infty$ a $+\infty$ nepatří do $\mathbb{R}$. Pokud množina Y je zdola [shora] neomezená, definujeme $\inf Y = -\infty$ [$\sup Y = +\infty$]. Pro prázdnou množinu definujeme $\inf \emptyset = +\infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$.

Příklad 2.1.

1. Množina všech horních mezí intervalu $[0, 1)$ je $[1, +\infty)$.
2. Množina všech horních mezí množiny $\mathbb{R}$ je $\emptyset$.
3. Množina všech horních mezí množiny $\emptyset$ je $\mathbb{R}$.
4. Interval $[0, 1)$ nemá největší prvek, ale má supremum 1.
5. Minimum množiny $\{\, 1/n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ neexistuje, ale infimum je rovno 0.
6. Maximum množiny $\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \,\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ neexistuje, ale supremum je rovno $\sqrt{2}$.
7. $\max\{1, 2, 3\} = \sup\{1, 2, 3\} = 3$ (minimum a maximum každé konečné množiny existují a jsou rovny infimu a supremu)
8. $\max \mathbb{R}$ neexistuje.

$\square$

2.2 Minimum a infimum funkce na množině

Mějme nyní funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$, kde X je zcela libovolná množina. Označme

$$Y = f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$$

obraz množiny X v zobrazení f. Zřejmě je $Y \subseteq \mathbb{R}$. Pak píšeme

$$\min_{x \in X} f(x) = \min Y, \qquad \inf_{x \in X} f(x) = \inf Y$$

a hovoříme o *minimu a infimu funkce na množině*. Zatímco infimum libovolné reálné funkce na libovolné množině existuje, minimum existovat nemusí. Pokud minimum existuje, tak existuje nejméně jeden prvek $x^* \in X$ tak, že $f(\mathbf{x}^*) = \min Y$. Říkáme, že se minimum **nabývá** v argumentu x^*. Pro množinu prvků X, ve kterých se minimum nabývá, se používá symbol 'argument minima',

$$\operatorname*{argmin}_{x \in X} f(x) = \{\, x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \,\}.$$

Podotkněme, že zápisy $\operatorname{argmin} Y$ nebo $\operatorname{arginf}_{x \in X} f(x)$ jsou nesmysly.

Pro maximum je to analogické. Minima a maxima funkce se souhrnně nazývají její **extrémy** nebo **optima**.

Příklad 2.2.

1. $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} |x-1| = \min\{\, |x-1| \mid x \in \mathbb{R} \,\} = 0$, $\operatorname*{argmin}\limits_{x \in \mathbb{R}} |x-1| = \{1\}$
2. Nechť $(a_1, a_2, \dots, a_5) = (1, 2, 3, 2, 3)$. Pak $\max\limits_{i=1}^{5} a_i = 3$, $\operatorname*{argmax}\limits_{i=1}^{5} a_i = \{3, 5\}$.

□

2.3 Obecný tvar optimalizační úlohy

Optimalizační úlohy lze formulovat jako hledání minima dané reálné funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ na dané množině X. V optimalizaci se užívá následující názvosloví. Funkce f se nazývá **účelová** (také pokutová, cenová, kriteriální) funkce. Prvky množiny X se nazývají **přípustná řešení** (což je vlastně protimluv, protože prvky X nejsou řešeními úlohy). Prvkům množiny

$$\operatorname*{argmin}_{x \in X} f(x)$$

se pak říká **optimální řešení**. Optimální řešení může být jedno, více, nebo nemusí existovat.

Tato formulace je velmi obecná, neboť množina X může být zcela libovolná. Existují tři široké kategorie úloh:

- Pokud je množina X konečná (i když třeba velmi velká), mluvíme o *kombinatorické optimalizaci*. Její prvky mohou být např. cesty v grafu, konfigurace Rubikovy kostky, nebo textové řetězce konečné délky. Příkladem je nalezení nejkratší cesty v grafu nebo problém obchodního cestujícího.
- Pokud množina X obsahuje reálná čísla či reálné vektory, mluvíme o *spojité optimalizaci*. Příkladem je úloha lineárního programování.
- Pokud množina X obsahuje reálné funkce, mluvíme o *variačním počtu*. Příkladem je nalézt tvar rovinné křivky, která při dané délce obepíná co největší obsah.

Tento kurs se věnuje především spojité optimalizaci. Zde prvky množiny X jsou n-tice reálných proměnných $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, tedy $X\subseteq\mathbb{R}^n$. Množina přípustných řešení X se definuje jako množina všech řešení soustavy rovnic a nerovnic

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)\le 0,\quad i=1,\ldots,m \tag{2.1a}$$
$$h_i(x_1,\ldots,x_n)=0,\quad i=1,\ldots,\ell \tag{2.1b}$$

pro dané reálné funkce n proměnných $g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_\ell\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Tyto funkce nemusí být nezbytně spojité (i když často budou), jak by se mohlo zdát z názvu 'spojitá optimalizace'. Rovnice a nerovnice (2.1) se nazývají **omezující podmínky**, krátce **omezení**. Omezení (2.1a) příp. (2.1b) se nazývají omezení **typu nerovnosti** příp. **typu rovnosti**. Omezení mohou někdy chybět ($m=\ell=0$). Úloha $\min_{x\in X}f(x)$ se zapisuje také jako

$$\begin{aligned}\min\quad & f(x_1,\ldots,x_n)\\ \text{za podmínek}\quad & g_i(x_1,\ldots,x_n)\le 0,\quad i=1,\ldots,m\\ & h_i(x_1,\ldots,x_n)=0,\quad i=1,\ldots,\ell\end{aligned}\tag{2.2}$$

Často budeme psát kratčeji $(x_1,\ldots,x_n)=\mathbf{x}$. Úloha pak zní

$$\begin{aligned}\min\quad & f(\mathbf{x})\\ \text{za podmínek}\quad & g_i(\mathbf{x})\le 0,\quad i=1,\ldots,m\\ & h_i(\mathbf{x})=0,\quad i=1,\ldots,\ell\end{aligned}$$

Příklad 2.3. Hledejme bod $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ v rovině, který leží na kružnici s jednotkovým poloměrem a se středem v počátku a který je nejblíže danému bodu $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$. Zde máme $n=2$, $m=0$, $\ell=1$, $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$, $h_1(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|-1$. Řešíme úlohu

$$\min\{\,\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\ \|\mathbf{x}\|=1\,\},$$

tedy minimalizujeme $\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|$ za podmínky $\|\mathbf{x}\|=1$. □

Příklad 2.4. Hledejme dvojici nejbližších bodů v rovině, z nichž jeden je v kruhu se středem v počátku a jednotkovým poloměrem a druhý je ve čtverci se středem v bodě $(2,2)$ a jednotkovou stranou.

Bod (x_1,x_2) v kruhu splňuje ${x_1}^2+{x_2}^2\le 1$. Bod (x_3,x_4) ve čtverci splňuje $-\frac12\le x_3-2\le\frac12$, $-\frac12\le x_4-2\le\frac12$. Množina přípustných řešení je

$$X=\{\,(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid {x_1}^2+{x_2}^2-1\le 0,\ \tfrac32-x_3\le 0,\ x_3-\tfrac52\le 0,\ \tfrac32-x_4\le 0,\ x_4-\tfrac52\le 0\,\},$$

což je podmnožina $\mathbb{R}^4$. Hledáme minimum funkce $\sqrt{(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2}$ na množině X. To lze psát také jako

$$\begin{aligned}\min\quad & \sqrt{(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2}\\ \text{za podmínek}\quad & {x_1}^2+{x_2}^2-1\le 0\\ & \tfrac32-x_3\le 0\\ & x_3-\tfrac52\le 0\\ & \tfrac32-x_4\le 0\\ & x_4-\tfrac52\le 0\end{aligned}$$

Máme $n=4$, $m=5$, $\ell=0$. □

2.4 Cvičení

2.1. Následující množiny jsou podmnožiny $\mathbb{R}$ a každá je sjednocením (otevřených, uzavřených či polouzavřených) intervalů. Najděte tyto intervaly. Příklad: $\{\, x^2 \mid x \in \mathbb{R} \,\} = [0, +\infty)$.

a) $\{\, 1/x \mid x \geq 1 \,\}$
b) $\{\, \mathrm{e}^{-x^2} \mid x \in \mathbb{R} \,\}$
c) $\{\, x + y \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$
d) $\{\, x + y \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$
e) $\{\, |x| + |y| \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$
f) $\{\, x_1 + \cdots + x_n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{x}\| = 1 \,\}$, kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu
g) $\{\, |x - y| \mid x \in [0, 1],\ y \in (1, 2] \,\}$

2.2. Mějme množinu bodů v rovině $X = [-1, 1] \times \{0\} = \{\, (x, 0) \mid -1 \leq x \leq 1 \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Načrtněte následující množiny:

a) $\left\{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \min_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq 1 \,\right\}$
b) $\left\{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq 2 \,\right\}$

2.3. Formulujte (řešit však nemusíte) následující úlohy ve tvaru (2.2):

a) Najdi dvě přirozená čísla se součtem 7 a nejmenším součinem.
b) Nechť $\mathbf{A}$ je matice rozměru $m \times n$, kde $m < n$, a $\mathbf{b}$ je vektor délky m. Najdi řešení $\mathbf{x}$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tak, že délka vektoru $\mathbf{x}$ je minimální.
c) Ve vesnici je n chalup o daných souřadnicích. Najdi souřadnice pošty tak, aby pošťák měl k nejvzdálenější (měřeno vzdušnou čarou) chalupě co nejblíže.

2.4. Vyřešte následující úlohy. Stačí vám k tomu první a druhá derivace a zdravý rozum.

a) $\min\{\, x^2 + y^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ xy \geq 1 \,\}$
b) $\min\{\, (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \mid x^2 \leq 1,\ y^2 \leq 1 \,\}$
c) $\max\{\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq 1 \,\}$ pro daný vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ značí skalární součin). Zkuste nejprve pro $n = 1$, pak pro $n = 2$, pak zobecněte na libovolné n.
d) Pastevec vlastní 100 metrů pletiva a chce z něj udělat ohradu pro ovce o co největším obsahu. Ohrada bude mít tvar obdélníka, z něhož tři strany budou tvořeny plotem a zbylá strana řekou (ovce neumějí plavat). Jaký bude obsah ohrady?
e) Máte vyrobit papírovou krabici o objemu 72 litrů, jejíž délka je dvojnásobek její šířky. Jaké budou její rozměry, má-li se na ní spotřebovat co nejméně papíru? Tloušťka stěn je zanedbatelná.
f) Jaké má rozměry válec s jednotkovým objemem a nejmenším povrchem?
g) Najděte rozměry půllitru, na jehož výrobu je třeba co nejméně skla. Tloušťka stěn je zanedbatelná.
h) Najděte obsah největšího obdélníka vepsaného do půlkruhu s poloměrem 1.
i) Obdélník v rovině má jeden roh v počátku a druhý na křivce $y = x^2 + x^{-2}$. Pro jaké x bude jeho obsah minimální? Může být jeho obsah libovolně veliký?
j) Najděte bod v rovině na parabole s rovnicí $y = x^2$ nejblíže bodu $(3, 0)$.

k) Hektarová oblast obdélníkového tvaru se má obehnat ze tří stran živým plotem, který stojí 1000 korun na metr, a ze zbývající strany obyčejným plotem, který stojí 500 korun na metr. Jaké budou rozměry oblasti při nejmenší ceně plotu?

l) a, b jsou čísla v intervalu $[1, 5]$ takové, že jejích součet je 6. Najděte tato čísla tak, aby ab^2 bylo co nejmenší a co největší.

m) Hledá se n-tice čísel $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, +1\}$ tak, že jejich součin je kladný a jejich součet minimální. Jako výsledek napište hodnotu tohoto minimálního součtu v závislosti na n.

n) *Potkaní biatlon.* Potkan stojí na břehu kruhového jezírka o poloměru 1 a potřebuje se dostat na protilehlý bod břehu. Potkan plave rychlostí v_1 a běží rychlostí v_2. Chce se do cíle dostat co nejrychleji, přičemž může běžet, plavat, nebo zvolit kombinaci obojího. Jakou dráhu zvolí? Strategie potkana může být různá pro různé hodnoty v_1 a v_2, uvažujte všechny případy.

Literatura