TEORETICKÁ INFORMATIKA

J. Kolář

kolar@fit.cvut.cz

Důležité reference:

- **http://service.felk.cvut.cz/courses/36TI**
- **skripta** (v prodeji ve Studentském domě)

Info o výuce předmětu

Bodové hodnocení studia:

- cvičení $\leq$ **40 bodů** (pravidelné testy, sem. práce, aktivita – sdělí cvičící)
- zkouška $\leq$ **60 bodů** (písemka1 ... cca 30b., písemka2 ... cca 20b., ústní 10 b.)

Na cvičení studenti

- píší krátké testy
- vybírají a konzultují semestrální práce
- řeší typické úlohy

Na prosemináři vyučující

- kontroluje přítomnost a připravenost studentů
- připomene látku probranou na přednášce
- se studenty diskutuje a řeší příklady zadané na přednášce

Účast na cvičeních a proseminářích je povinná

Přednášky – zadání **kontrolních úloh** jejichž řešením

- se **připravíte** na proseminář (a **na zkoušku**!)
- získáte max. **6 bodů**

Novinka – řešení se odevzdávají přes Moodle (pokyny viz www stránky)

Stručný obsah předmětu

Hlavní tématické celky:

- **Neorientované a orientované grafy (60%)**
  základní pojmy a vlastnosti, počítačová reprezentace grafů, typické algoritmy (prohledávání, minimální kostry, nejkratší cesty, ...), jejich složitost a (tvořivé) použití
- **Toky v sítích (10%)**
- **Algoritmy umělé inteligence (7%)**
- **Modely strojů, programů a výpočtů (16%)**
  jazyky (regulární) a automaty (konečné), Turingovy stroje, nerozhodnutelné problémy
- **P/NP třídy složitosti, NP-úplné problémy (7%)**

Jinými slovy ...

- **X36TIN** je "volné pokračování" **X36DSA** do grafů a k tomu pár informaticko - teoretických témat navíc
- **O CO** půjde (kromě jiného)?

NAUČIT SE MYSLET!

(nebo si to aspoň připomenout)

- **JAK** na to ?
  - určitě **NE** jenom čtením (těchto) příprav
  - (radši) chodit na **přednášky**
  - **ptát se** dřív než pozdě nebo vůbec
  - sledovat **Web** a **skripta**
  - řešit **kontrolní úlohy**

Co je to informatika ?

Systematické studium **algoritmických procesů** spojených s popisem a zpracováním **INFORMACÍ.**

Zabývá se jejich **teorií, analýzou, návrhem, efektivností, realizací, použitím, ...**

Základní otázka:

CO JE MOŽNO (EFEKTIVNĚ) AUTOMATIZOVAT?

Pod-oblasti informatiky (P. Denning et al., 1989):

algoritmy a datové struktury
architektura počítačů
operační systémy
databáze a vyhledávání
komunikace člověk – počítač

programovací jazyky
numerické a symbolické výpočty
softwarová metodologie a inženýrství
umělá inteligence

Co bychom dnes ještě přidali?

Základní paradigmata informatiky

Několik ukázkových příkladů (problémů)

Pražská MHD (1)

Systém pražské MHD zahrnuje linky tramvají, autobusů a metra. Každou z linek máme zadánu jako seznam zastávek od jedné konečné do druhé. Předpokládejme, že z linky na linku lze přesedat pouze na stejně pojmenované zastávce.

Jak zjistit, zda je možné projet všechny úseky všech linek v rámci jediné okružní jízdy s libovolným počtem přestupů tak,aby se každý usek (příp. každá zastávka) projel právě jednou?

(???)

Pražská MHD (2)

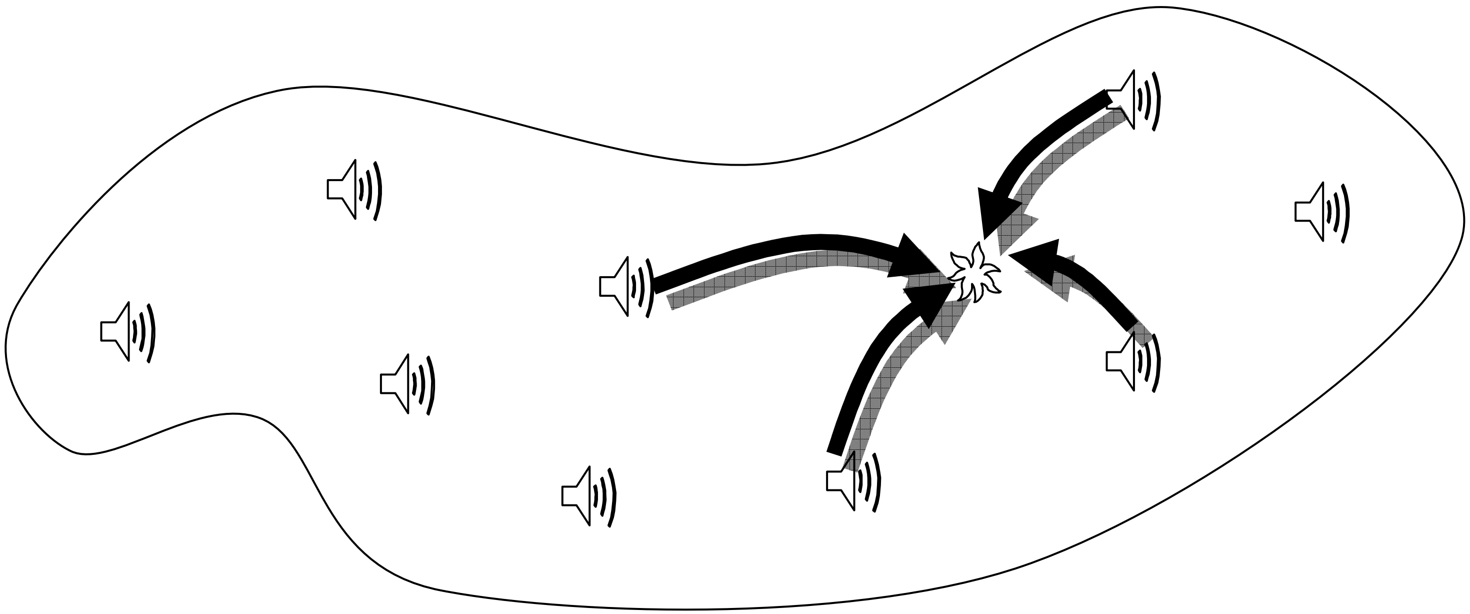
Jakým minimálním počtem "otevřených" jízd je možné projet všechny úseky (zastávky) všech linek pokud to nelze zvládnout jedinou okružní jízdou?

Jak určit způsob dopravy ze zastávky A do zastávky B nějakých linek se zaručeně minimálním počtem přestupů ?

(???)

Problém dispečera hasičů

Dispečer má aktualizovanou mapu města (neprůjezdné a jednosměrné ulice, ...) a zná polohu a stav **n** hasičských stanic. Pro hašení požáru na nějakém místě potřebuje určit **k** (≤ n) stanic, které jsou nejblíže požáru, a určit jejich příjezdovou trasu.



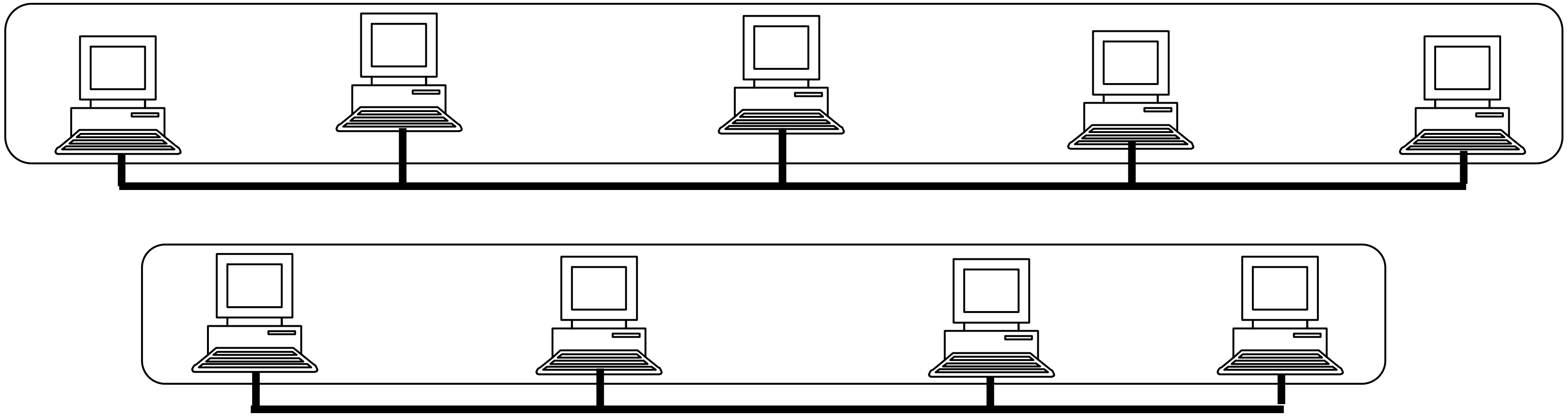
Jak vybrat oněch k stanic a jejich trasy?

Problém počítačové sítě

n - počet stanic v laboratoři, které se mají spojit "lineárně" do skupin, známe souřadnice polohy každé stanice

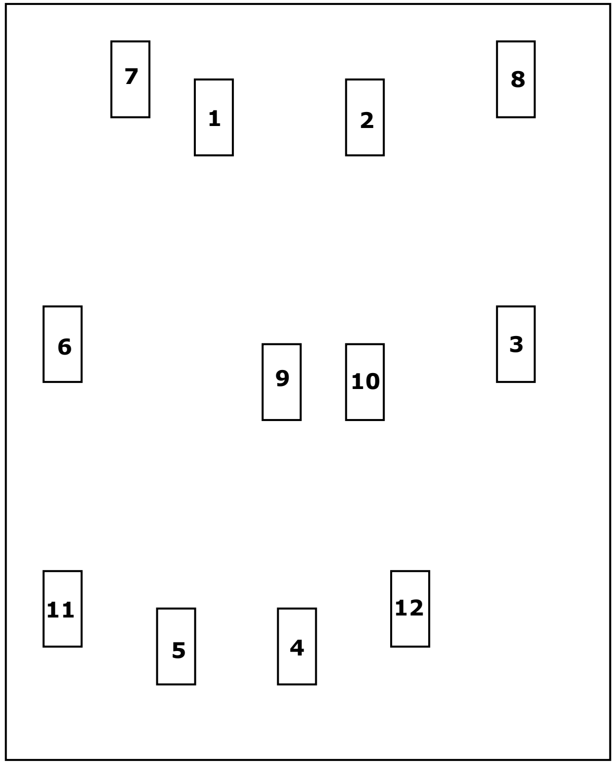
k - počet skupin

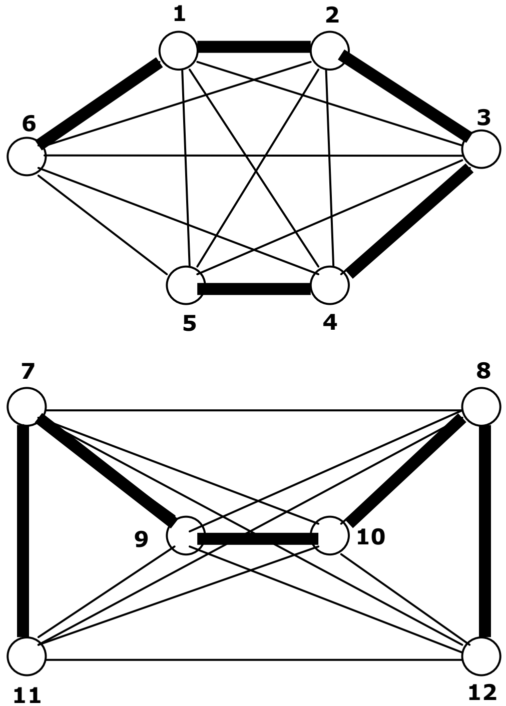
n_i (i=1, 2, ..., k), $2 \leq n_i \leq 8$ - počet stanic v i-té skupině



Jak určit minimální potřebnou délku kabelu?
(délka propojení + 2m na každou stanici v řadě)

Model rozmístění stanic





Eukleidovské vzdálenosti "každý s každým"

NEOORIENTOVANÉ A ORIENTOVANÉ GRAFY

(Neorientované) grafy a grafové operace

Seznámíme se s následujícími pojmy:

- neorientovaný graf, hrany, uzly, incidence, krajní uzly hrany
- multigraf, prostý graf, obyčejný graf, úplný graf, prázdný graf, diskrétní graf, izolovaný uzel
- podgraf, faktor, indukovaný podgraf
- operace s grafy (sjednocení, průnik, rozdíl, symetrická diference a doplněk), disjunktní a hranově disjunktní grafy, konečný / nekonečný graf
- izomorfismus grafů

Skripta viz odstavec 2.1, str. 18 - 22

Co je to neorientovaný graf ?

$\mathbf{G} = \langle \mathbf{H}, \mathbf{U}, \rho \rangle$

hrany grafu G, H(G), H_G

uzly grafu G, U(G), U_G

incidence, ρ**(G)**, $\rho_{\mathbf{G}}$

$\rho : H \rightarrow U \otimes U$ (množina neuspořádaných dvojic, též jedno- a dvoj- prvkových podmnožin množiny uzlů)

$\rho(h) = [u, v]$ ... **krajní uzly** hrany h, u a v jsou **sousedi**

$\rho(h_1) = \rho(h_2)$ ... rovnoběžné hrany => **multigraf**

prostý graf = graf **bez** rovnoběžných hran, tzn. hranu určují její krajní uzly => ρ je zbytečné, $\mathbf{G} = \langle \mathbf{H}, \mathbf{U} \rangle$

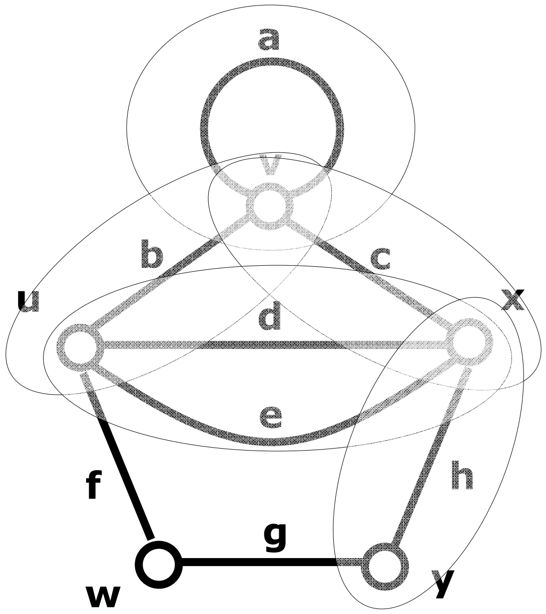
obyčejný graf = prostý graf bez smyček

Příklad neorientovaného grafu

Nakreslení grafu

G = $\langle$**{a,b,c,d,e,f,g,h}, {u,v,w,x,y},** $\rho\rangle$

= jeho grafické znázornění (v rovině)



ρ(a)=[v,v] **- smyčka**

ρ(b)=[u,v]

ρ(c)=[x,v]

ρ(d)=[u,x] = ρ(e)

. . .

ρ(h)=[x,y]

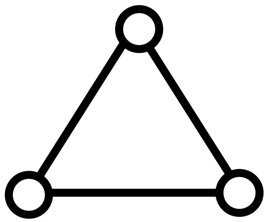
Speciální případy grafů

prázdný graf: $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$

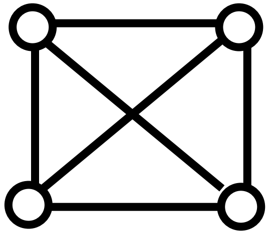
diskrétní graf: $D_n = \langle \emptyset, U \rangle$
(jen n **izolovaných** uzlů)

úplný graf: $K_n = \langle \binom{U}{2}, U \rangle$, $|U| = n$

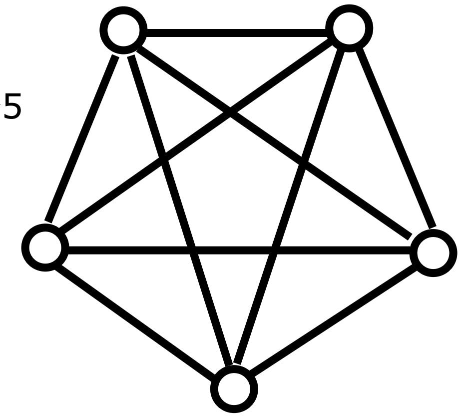
K_3



K_4



K_5

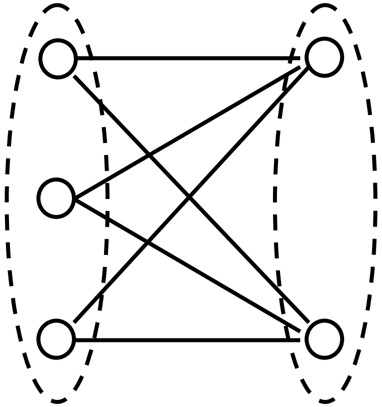


"úplný graf" $K_{m,n}$ se všemi hranami $m \leftrightarrow n$ hranami
(**úplný bipartitní graf**), podobně $K_{k,m,n}$, ... , $K_{n1,n2,\dots nk}$

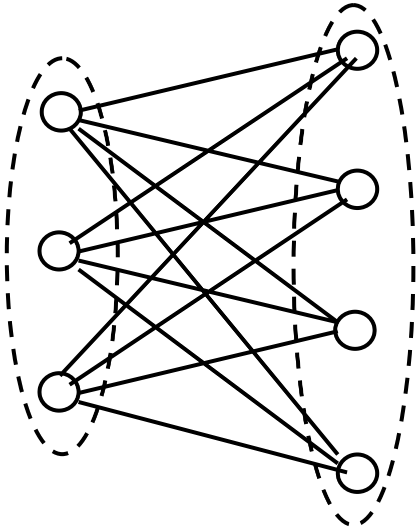
?? počet hran v takovém grafu ??

Speciální případy grafů

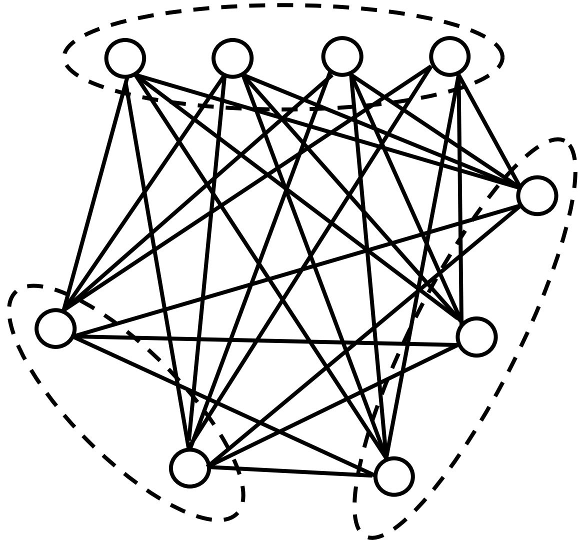
$K_{3,2}$



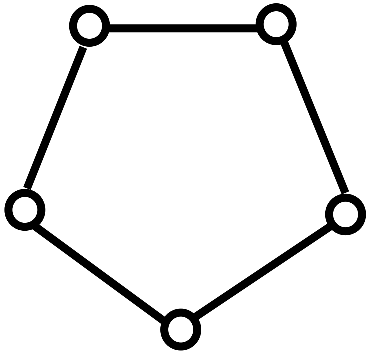
$K_{3,4}$



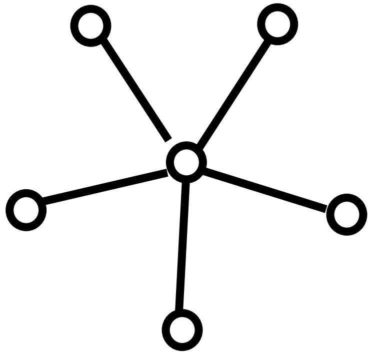
$K_{2,4,3}$



kružnice C_5



hvězdice



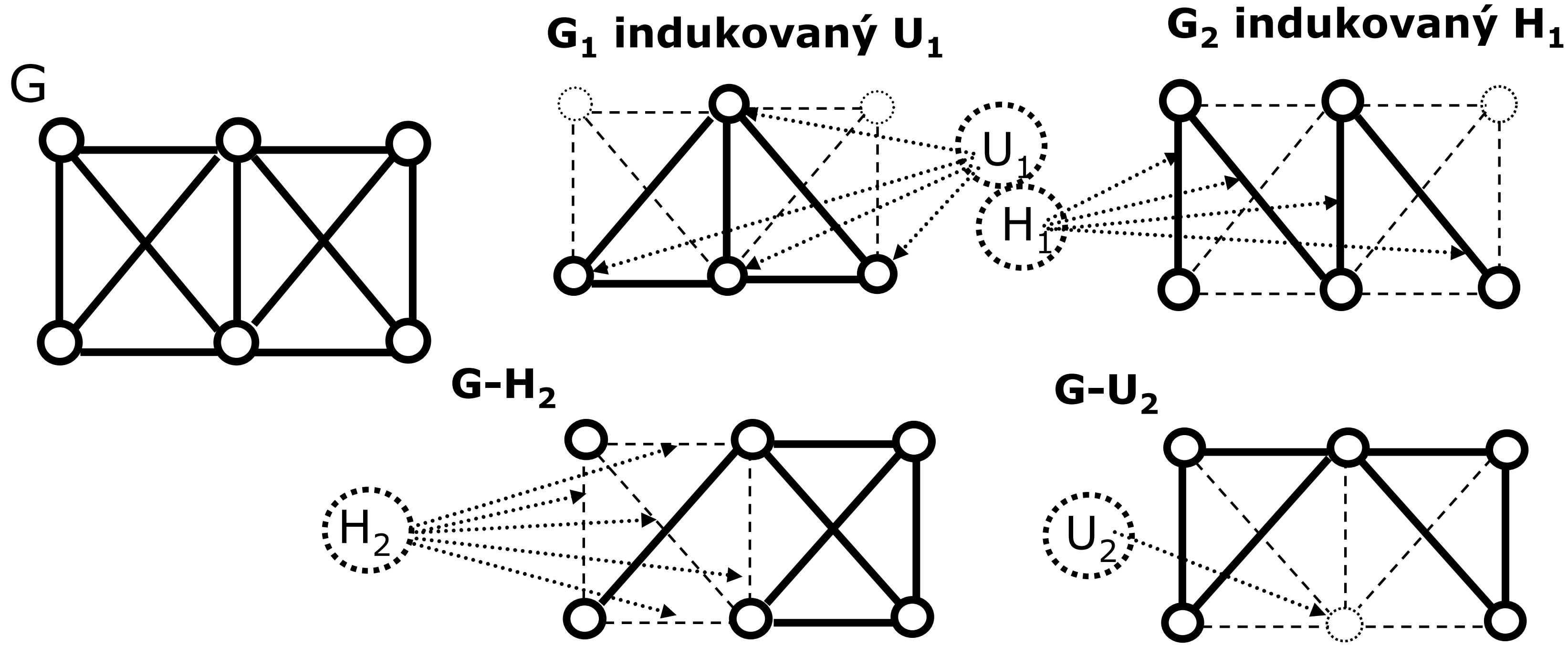
podgraf ... $G' = \langle H', U', \rho' \rangle$, $G = \langle H, U, \rho \rangle$:

$$G' \subseteq G \iff H' \subseteq H \;\&\; U' \subseteq U \;\&\; \rho'(h) = \rho(h) \text{ pro všechny } h \in H'$$

faktor grafu ... podgraf se všemi uzly (hranový podgraf)

podgraf **indukovaný podmínkou:**

- podmnožina uzlů U_1
- vypuštění uzlů U_2
- podmnožina hran H_1
- vypuštění hran H_2



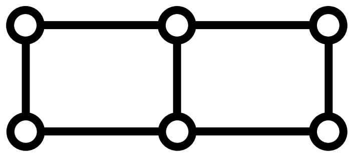
$G_1 = \langle H_1, U_1, \rho_1 \rangle$, $G_2 = \langle H_2, U_2, \rho_2 \rangle$ ... dva neorientované grafy

sjednocení a průnik grafů G_1 a G_2

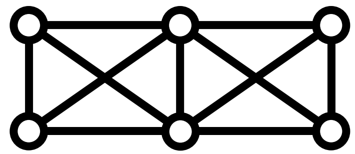
$\mathbf{G_1 \cup G_2 = \langle H_1 \cup H_2, U_1 \cup U_2, \rho_1 \cup \rho_2 \rangle}$ **(výsledkem musí**

$\mathbf{G_1 \cap G_2 = \langle H_1 \cap H_2, U_1 \cap U_2, \rho_1 \cap \rho_2 \rangle}$ **být opět grafy!!!)**

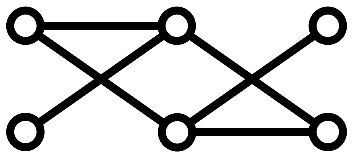
$\mathbf{G_1}$



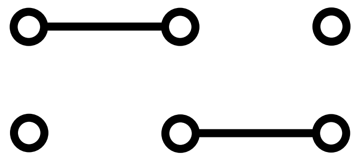
$\mathbf{G_1 \cup G_2}$



$\mathbf{G_2}$



$\mathbf{G_1 \cap G_2}$



disjunktní a hranově disjunktní grafy

$\mathbf{U_1 \cap U_2 = \varnothing}$ **(tedy i** $\mathbf{H_1 \cap H_2 = \varnothing}$ **)** $\mathbf{H_1 \cap H_2 = \varnothing}$

rozdíl G - G_1 **grafů** G a $G_1 \subseteq G$

je takový **minimální** graf G_2, pro který platí $G = G_1 \cup G_2$

- **rozdíl** pro obecné grafy G a G':

$$\mathbf{G - G' = G - (G \cap G')}$$

- **doplněk** (obyčejného) grafu $G = \langle H, U, \rho \rangle$:

$$\mathbf{-G = K_U - G}$$

- **symetrická diference** grafů G a G' :

$$\mathbf{G \oplus G' = (G \cup G') - (G \cap G')}$$

- **konečný x nekonečný graf**

izomorfizmus grafů

$$G_1 = \langle H_1, U_1, \rho_1 \rangle \text{ a } G_2 = \langle H_2, U_2, \rho_2 \rangle$$

zobrazení φ množiny $H_1 \cup U_1$ na $H_2 \cup U_2$ takové, že:

φ / H_1 : $H_1 \leftrightarrow H_2$ je bijekce

φ / U_1 : $U_1 \leftrightarrow U_2$ je bijekce

φ **zachovává incidenci**, t.zn.

φ : $\rho_1(h) = [u,v] \Rightarrow \rho_2(\varphi(h)) = [\varphi(u), \varphi(v)]$

$\mathbf{G_1} \cong \mathbf{G_2}$ ... izomorfní grafy **(neumíme snadno zjistit!!)**

automorfizmus grafu – izomorfizmus na sebe,
počet automorfizmů ~ míra symetrie grafu

morfizmus grafů ... zachovává incidenci, ale není nutně bijekcí

Příklady na počty izomorfizmů

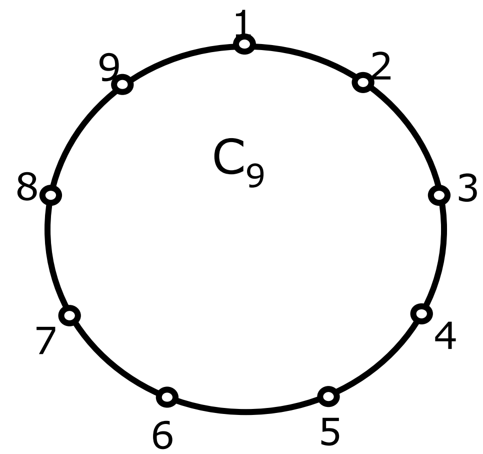
1. Kolika způsoby lze úplný graf K_n zobrazit izomorfně na sebe?

Graf je zcela symetrický, za izomorfizmus lze vzít libovolnou permutaci uzlů (a odpovídající přiřazení hran) => **n!**

2. Kolika způsoby lze na sebe izomorfně zobrazit kružnici C_n o n hranách?

Graf je opět symetrický, ale uzly tvoří přirozenou posloupnost – tu je třeba zachovat:

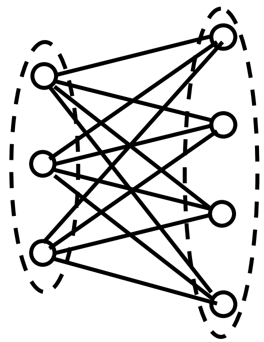
nx otočit + (překlopit a nx otočit) ... **2n**



3. Kolika způsoby lze na sebe izomorfně zobrazit úplný bipartitní graf $K_{m,n}$?

Graf je velmi symetrický, ale uzly tvoří dvě skupiny:

m!.n! (pro m≠n) a **2.n!.n!** (pro m=n)



Kontrolní otázky

1.1 Lze určit maximální počet hran obyčejného (resp. prostého, resp. obecného) neorientovaného grafu o n uzlech ?

1.2 Jaká je role incidence v definici neorientovaného grafu ?

1.3 Kolik různých faktorů má neorientovaný graf o m hranách a n uzlech ?

1.4 Kolik různých faktorů má úplný graf K_n ?

1.5 Který graf o n uzlech má pouze jeden faktor ?

1.6 Charakterizujte podgraf úplného grafu K_n indukovaný libovolnou podmnožinou jeho uzlů.

1.7 <u>Zvažte pravdivost tvrzení:</u>
Je-li graf G_1 podgrafem grafu G , pak existuje taková podmnožina uzlů U_1 , že G_1 je podgrafem indukovaným touto podmnožinou uzlů.

1.8 <u>Zvažte pravdivost tvrzení:</u>
Je-li graf G_1 podgrafem grafu G , pak existuje taková podmnožina hran H_1 , že G_1 je podgrafem indukovaným touto podmnožinou hran.

Kontrolní otázky

1.9 Nechť G_1, resp. G_2 je podgraf grafu G indukovaný podmnožinou uzlů U_1, resp. U_2. Za jakých podmínek bude platit, že $G_1 \cup G_2$ je roven podgrafu indukovanému podmnožinou uzlů $U_1 \cup U_2$?

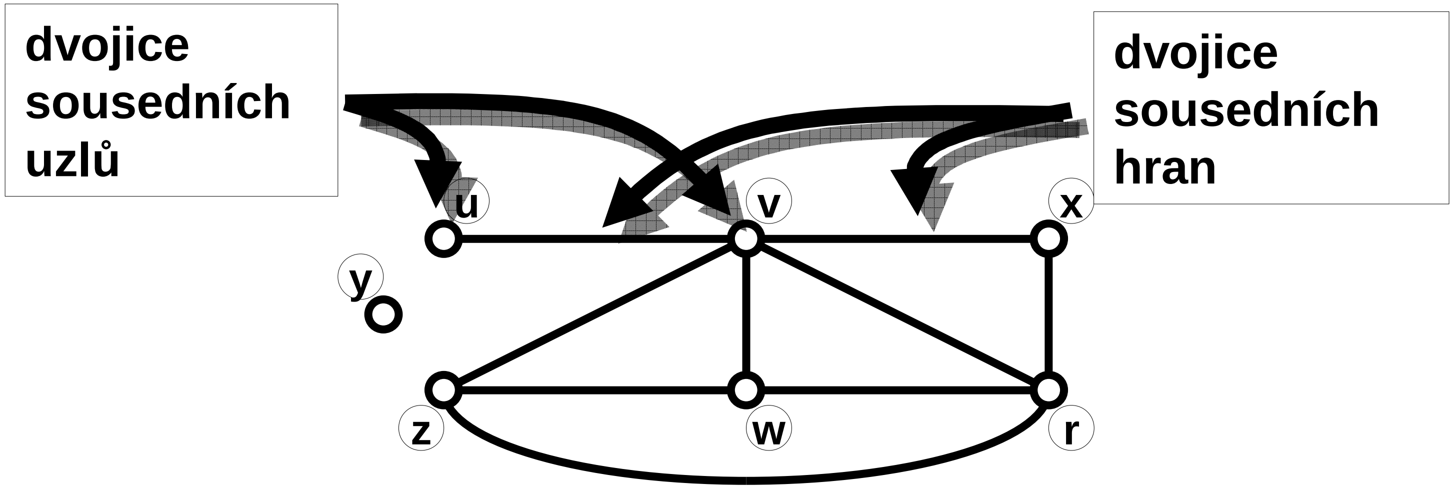
1.10 Kolik neizomorfních faktorů má úplný graf K_4 (K_5) ?

Sousednost v grafu

Seznámíme se s následujícími pojmy:

- sousední uzly, sousední hrany
- množina sousedů uzlu/podmnožiny uzlů
- stupeň uzlu, soubor stupňů
- pravidelný graf

Skripta strana 22 - 23



množina sousedů uzlu u . . . Γ(u)

množina sousedů podmnožiny uzlů A

$$\mathbf{\Gamma(A) = \cup\ \Gamma(u)} \quad \text{pro } u \in A$$

$\Gamma(u) = \{v\}$, $\Gamma(v) = \{u,x,r,w,z\}$,

$\Gamma(y) = \emptyset$

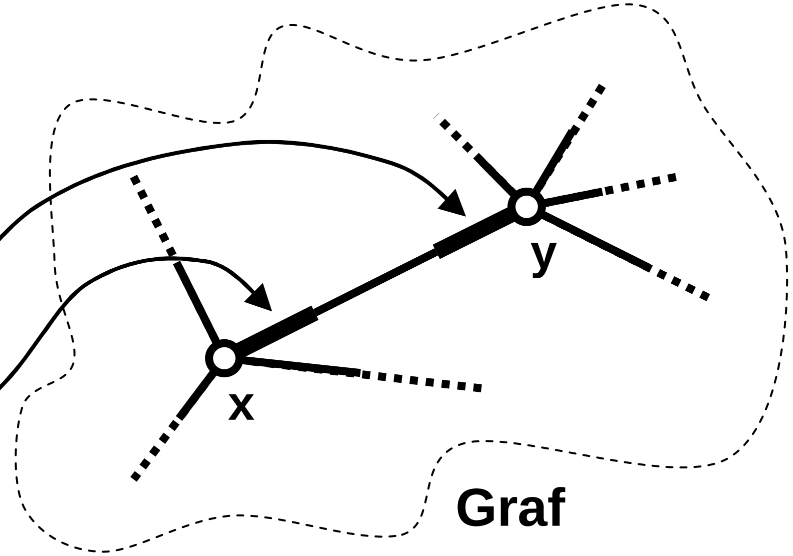
$\Gamma(\{u,z\}) = \{v,w,r\}$

$\Gamma(\{v,w\}) = \{u,v,x,z,w,r\}$

Názvosloví: Stupeň uzlu u je počet hran, které s uzlem incidují - $\delta(u)$.

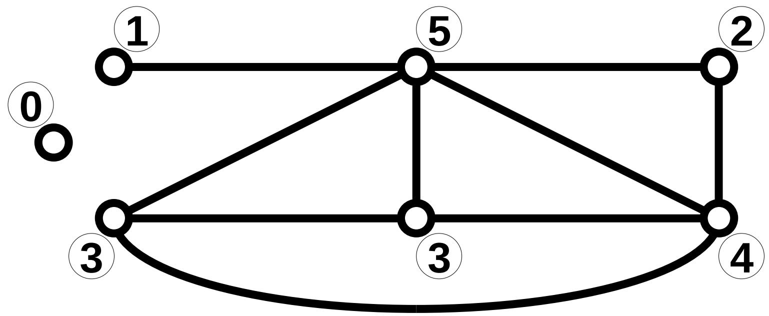
Věta: $$\sum_{u \in U} \delta(u) = 2|H|$$

Důvod:
Každá hrana přispívá do celkového součtu stupňů právě dvěma jednotkami.



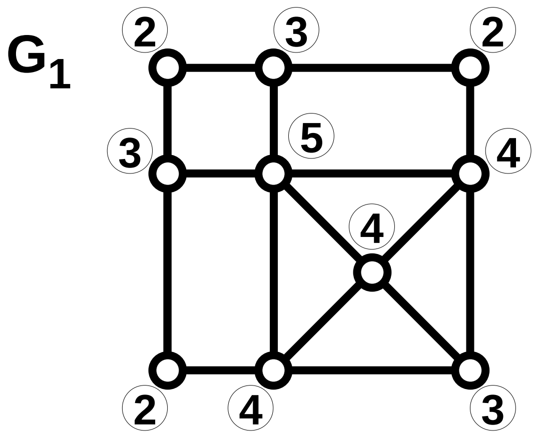
$$\sum_{u \in U} \delta(u) = 1+5+2+0+3+3+4 = 18$$

$$|H| = 9$$



Soubor stupňů grafu

(Neklesající) posloupnost sestavená ze stupňů všech uzlů grafu



Soubor stupňů grafu G1:

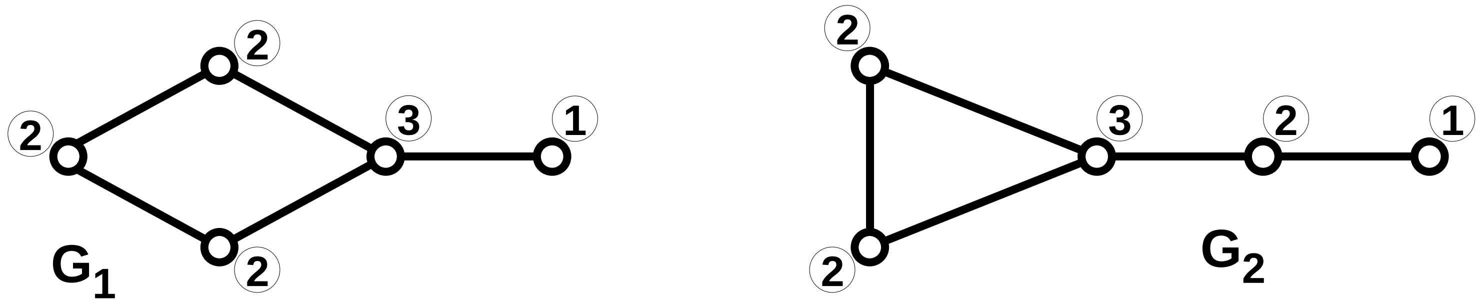
(2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5)

Věta: $G_1 \cong G_2 \quad \Rightarrow \quad G_1$ a G_2 mají stejný soubor stupňů .

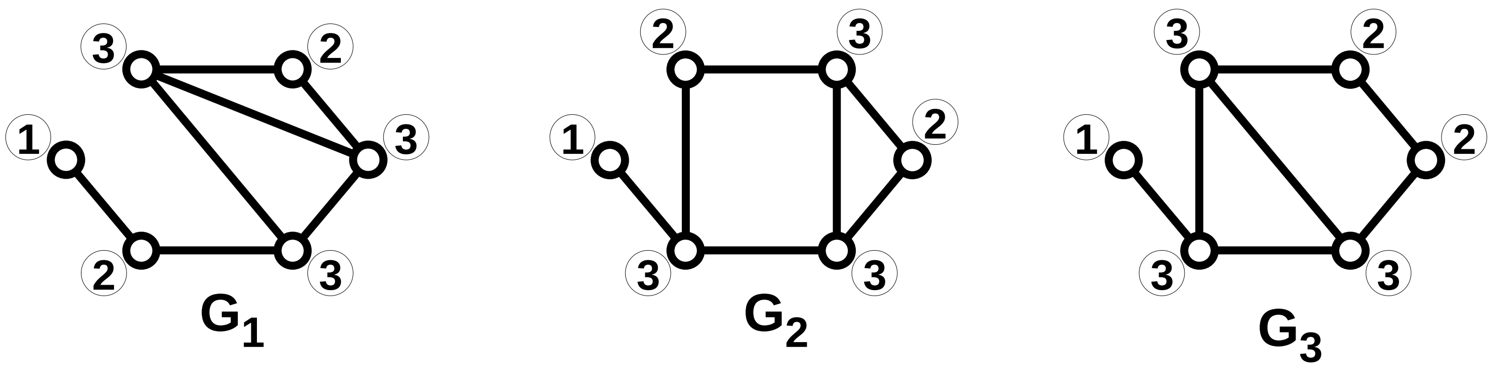
Důvod: Obrazy hran incidujících s u jsou hrany incidující s φ(u).

Jak určíme stupně uzlů se smyčkami ???

Pozorování: Když mají grafy G_1 a G_2 stejný soubor stupňů, zdaleka nemusí být izomorfní.



(1, 2, 2, 2, 3) (1, 2, 2, 2, 3)

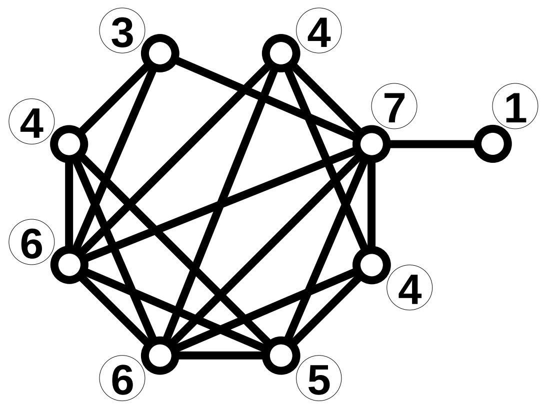


(1, 2, 2, 3, 3, 3) (1, 2, 2, 3, 3, 3) (1, 2, 2, 3, 3, 3)

<u>Věta:</u> V každém grafu je sudý počet uzlů lichého stupně.

<u>Důkaz (sporem, ale já mám radši přímý):</u>
Kdyby byl počet uzlů lichého stupně liché číslo,
přispívaly by tyto uzly do celkového součtu stupňů lichým číslem
(protože součet lichého počtu lichých čísel je číslo liché).
Ostatní uzly by do celkového součtu přispívaly jen sudými čísly,
a tak by součet všech stupňů bylo číslo liché
(přičtením sudého čísla k lichému získáme opět číslo liché).
Jenomže součet všech stupňů je roven dvojnásobku počtu hran,
tudíž je to číslo sudé.

Např.:

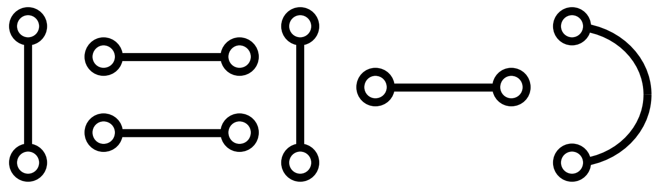


Soubor stupňů:

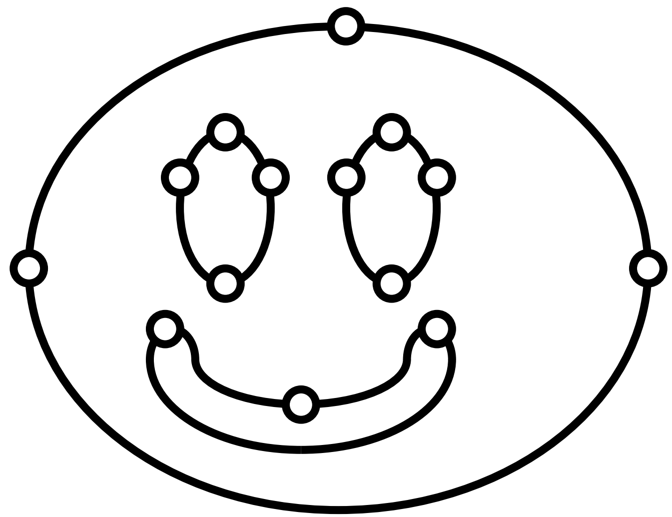
(<u>1</u>, <u>3</u>, 4, 4, 4, <u>5</u>, 6, 6, <u>7</u>)

Názvosloví: V pravidelném grafu stupně k (k ≥ 0) mají všechny uzly stupeň právě k.

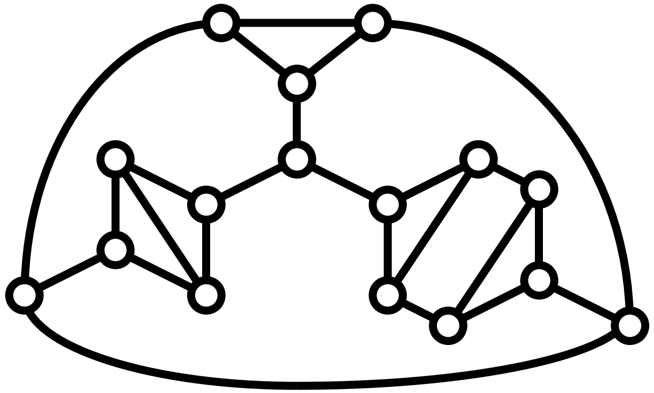
Pravidelný graf stupně 1



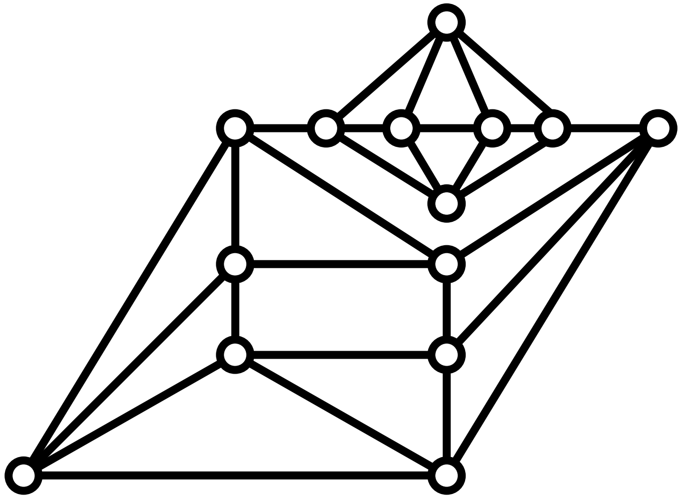
Pravidelný graf stupně 2



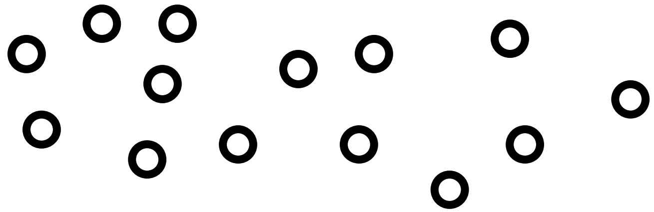
Pravidelný graf stupně 3



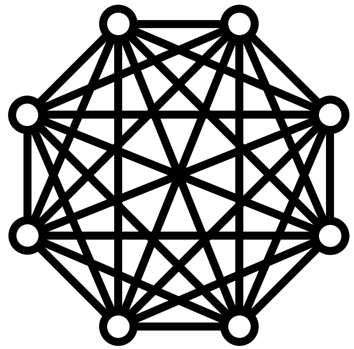
Pravidelný graf stupně 4



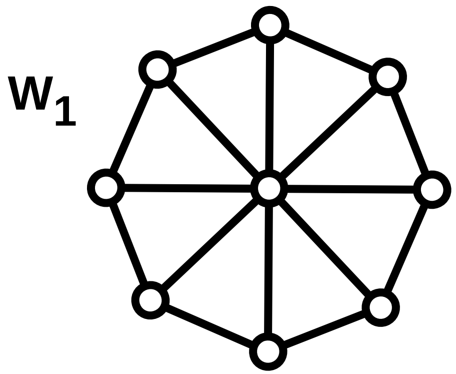
D_n je pravidelný graf stupně 0



K_n je pravidelný graf stupně (n-1)



Graf W_1 není pravidelný



Kontrolní otázky

1.11 Může být uzel obyčejného (resp. prostého, resp. obecného) grafu sousedem sám sobě ?

1.12 Jak souvisí stupeň uzlu obyčejného (resp. obecného) grafu s počtem sousedů tohoto uzlu?

1.13 Jak bude vypadat obyčejný graf $G = \langle H,U \rangle$ s n uzly a minimálním počtem hran, pro jehož nějaký uzel u platí $\Gamma(u) = U - \{u\}$?

1.14 Vyslovte tvrzení o struktuře pravidelného grafu stupně 1, resp. 2.

1.15 Může být graf se souborem stupňů (1,1,1,1,1,1,1,3,4) stromem ?

1.16 Obyčejný graf G má n_1 uzlů stupně k_1, dále n_2 uzlů stupně k_2 a už žádné další uzly. Jaký maximální počet různých automorfismů může mít graf G ?

1.17 Je možné nalézt nějaký pravidelný graf stupně 3, který má 7 uzlů ?

1.18 Nalezněte příklady alespoň dvou neizomorfních obyčejných grafů se shodným souborem stupňů (1, 1, 2, 2, 3, 3).

1.19 Nechť u je uzel stupně k grafu G a u' jeho obraz v izomorfním grafu G'. Vyslovte nějaké tvrzení o stupních sousedů uzlu u a sousedů uzlu u'.

Kontrolní otázky

1.20 Mějme graf $G = \langle H,U \rangle$ a libovolnou podmnožinu jeho uzlů $A \subseteq U$. Označme jako B množinu sousedů uzlů z množiny A: $B=\Gamma(A)$. Lze tvrdit, že platí

$\Gamma(B) = A$?

1.21 Vytvořte návod, jak pro danou neklesající posloupnost přirozených čísel $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ určit nějaký obecný graf (pokud existuje), jehož je tato posloupnost souborem stupňů.

1.22 Nechť G_1 a G_2 jsou dva různé faktory neorientovaného grafu G, označíme $\partial_1(u_i)$, resp. $\partial_2(u_i)$ stupeň uzlu u_i v grafu G_1, resp. G_2. Vyjádřete pomocí $\partial_1(u_i)$ a $\partial_2(u_i)$ možné rozpětí hodnot pro stupeň $\partial'(u_i)$ uzlu u_i ve faktoru G' grafu G vytvořeném jako symetrická diference faktorů G_1 a G_2 ($G' = G_1 \oplus G_2$).