

1. Náhodná veličina X je hodnota náhodně voleného přirozeného čísla z intervalu $\langle 1, 100 \rangle$. Určete:

- a) pravděpodobnostní funkci p a nakreslete její graf;
- b) distribuční funkci F a nakreslete její graf;
- c) pravděpodobnosti $P(X \leq 45)$, $P(X > 35)$ a $P(21 \leq X \leq 45)$;
- d) střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

$$[a) p(k) = \frac{1}{100}, k = 1, 2, \dots, 100; \quad b) F(n) = \frac{n}{100}, n = 1, 2, \dots, 100;]$$

$$[c) P_1 = 0,45, P_2 = 0,65, P_3 = 0,54;]$$

$$[d) E(X) = 50,5, D(X) = 833,25, \sigma(X) = 28,8661.]$$

2. Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = ax, x \in \{1, 2, \dots, 20\}.$$

- a) Určete hodnotu čísla a a vyjádřete pravděpodobnostní funkci p .
- b) Vyjádřete distribuční funkci F .
- c) Vypočtete pravděpodobnosti $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 6)$ a $P(3 < X \leq 10)$.
- d) Vypočtete střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

$$[a) a = \frac{1}{210}, p(k) = \frac{k}{210}, 1 \leq k \leq 20; \quad b) F(n) = \frac{n(n+1)}{420}, 1 \leq k \leq 20;]$$

$$[c) P_1 = 0,5714, P_2 = 0,92857, P_3 = 0,2119;]$$

$$[d) E(X) = 13,3667, D(X) = 23,333, \sigma(X) = 4,8189.]$$

3. Náhodný jev A nastává s pravděpodobností $p = 0,3$. Náhodná veličina X je počet pokusů, které musíme provést, aby nastal jev A .

- a) Určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$, distribuční funkci F a nakreslete jejich grafy.
- b) Vypočtete pravděpodobnosti $P(X \leq 5)$, $P(X > 3)$ a $P(2 < X < 8)$.
- c) Vypočtete střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.
- d) Kolik pokusů musíme minimálně provést, aby jev A nastal s pravděpodobností $P^* = 0,9$ a $P^{**} = 0,99$.

$$[a) p(k) = p(1-p)^k, k \geq 1; \quad F(x) = 1 - (1-p)^n, n \leq x < n+1;]$$

$$[b) P_1 = 0,83193, P_2 = 0,343, P_3 = 0,40765.]$$

$$[c) E(X) = \frac{1}{p} = 3,333\bar{3}; D(X) = \frac{1-p}{p^2} = 7,7778; \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = 2,7889;]$$

$$[d) m \geq \frac{\ln(1-P^*)}{\ln(1-p)}, m_1 = 7, m_2 = 13.]$$

4. V osudí je 10 bílých a 9 černých koulí. Náhodně vybereme 6 koulí. Náhodná veličina X je počet bílých koulí.

a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X .

b) Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

$$[a] \ p(0) = 0,00309, \ p(1) = 0,04644, \ p(2) = 0,20898, \ p(3) = 0,37151, \\ p(4) = 0,27863, \ p(5) = 0,08359, \ p(6) = 0,00774;]$$

$$[b] \ E(X) = 3,1579, \ D(X) = 1,0803, \ \sigma(X) = 1,0394.]$$

5. Náhodná veličina X má hustotu f dānu vztahem

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \langle 0, 3 \rangle, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

a) Určete čísló a a nakreslete graf funkce f .

b) Určete distribuční funkce F a nakreslete její graf.

c) Vypočtěte pravděpodobnosti $P(X \leq 2)$, $P(-3 < X \leq 1)$, $P(X > 3)$ a $P(X^2 < 2)$.

d) Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

e) Určete p -kvantil x_p , mediān $x_{0,5}$ a mezikvartilové rozpětí IQR .

f) Určete čísló ε tak, aby $P(|X - 2| < \varepsilon) = 0,9$.

$$[a] \ a = \frac{2}{9}; \ b) \ F(x) = \frac{x^2}{9}, \ 0 \leq x \leq 3;]$$

$$[c] \ P_1 = 0,4444, \ P_2 = 0,1111, \ P_3 = 0, \ P_4 = 0,2222.]$$

$$[d] \ E(X) = 2, \ D(X) = 0,5, \ \sigma(X) = 0,7071.]$$

$$[e] \ x_p = 3\sqrt{p}, \ 0 < p < 1; \ x_{0,5} = 2,1213, \ x_{0,75} = 2,5981, \ x_{0,25} = 1,5,$$

$$[IQR = 1,0981; \ f) \ \varepsilon = 1,0513.]$$

6. Náhodná veličina X má spojité rozdělení určené distribuční funkcí F , kde

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1), \\ a + b \arcsin x, & x \in \langle -1, 1 \rangle, \\ 1, & x \in \langle 1, \infty \rangle. \end{cases}$$

a) Určete číslá a , b a nakreslete graf funkce F .

b) Určete hustotu f a nakreslete její graf.

c) Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

d) Určete pravděpodobnosti $P(-2 \leq X < \frac{1}{2})$, $P(X > \frac{1}{3})$ a $P(X^2 < \frac{1}{2})$.

e) Vypočtěte kvantil x_p , mediān a mezikvartilové rozpětí.

f) Určete čísló ε takové, že $P(|X| < \varepsilon) = 0,8$.

$$[a] \ a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{1}{\pi}; \ b) \ f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1;]$$

$$[c) P_1 = 0,6667, P_2 = 0,30182, P_3 = 0,5;]$$

$$[d) E(x) = 0, D(X) = 0,5, \sigma(X) = 0,7071.]$$

$$[e) x_p = \sin(\pi(p - 0,5)); x_{0,5} = 0, x_{0,75} = 0,7071, x_{0,25} = -0,7071.]$$

7. Náhodná veličina X má spojité rozdělení určené hustotou f , kde

$$f(x) = ae^{-|x|}, x \in (-\infty, \infty).$$

a) Určete hodnotu a a nakreslete graf funkce f .

b) Určete distribuční funkci F a nakreslete její graf.

c) Vypočtěte pravděpodobnosti $P(-1 < X < 2)$ a $P(|X - 1| > 3)$.

d) Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$, směrodatnou odchylku $\sigma(X)$, koeficient šikmosti $\alpha(X)$ a koeficient špičatosti $\varepsilon(X)$.

e) Určete p -kvantil x_p , vyčíslete jeho hodnotu pro $p = 0,1$; $p = 0,5$ a $p = 0,9$ a vypočtěte mezikvartilové rozpětí.

f) Určete číslo ε tak, aby $P(|X| < \varepsilon) = 0,95$.

g) Určete modus \hat{x} .

$$[a) a = 1/2; b) F(x) = \frac{1}{2}e^x, x \leq 0, F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, x \geq 0;]$$

$$[c) P_1 = 0,7484, P_2 = 0,0768;]$$

$$[d) E(X) = 0, D(X) = 0,5, \sigma(X) = 0,7071, \alpha(X) = 0, \varepsilon = 3;]$$

$$[e) x_p = \ln(2p), 0 < p \leq 0,5; x_p = -2\ln(2(1-p)); x_{0,1} = -1,60944, x_{0,5} = 0,$$

$$x_{0,9} = 1,60944, x_{0,75} = 0,6931, x_{0,25} = -0,6931, IQR = 1,3863;]$$

$$[f) \varepsilon = 0,9511; g) \hat{x} = 0.]$$

8. Náhodná veličina má spojité rozdělení určené hustotou f , kde

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

a) Určete hodnotu a a nakreslete graf funkce f .

b) Určete distribuční funkci F a nakreslete její graf.

c) Vypočtěte pravděpodobnost $P(-1 < X \leq \frac{3\pi}{4})$.

d) Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$, směrodatnou odchylku $\sigma(X)$ a koeficienty šikmosti a špičatosti

e) Určete p -kvantil x_p a vypočtěte medián a mezikvartilové rozpětí.

f) Určete číslo ε tak, aby $P(|X - \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon) = 0,95$.

g) Určete modus \hat{x} .

$$[a) a = 1/2; b) F(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x), 0 \leq x \leq \pi; c) P = 0,85355.]$$

$$[d) E(X) = \frac{\pi}{2} = 1,5708, D(X) = 0,4674, \sigma(X) = 0,68366;]$$

$$[e) x_p = \arccos(1 - 2p), x_{0,5} = 1,5708, x_{0,75} = 2,0944, x_{0,25} = 1,0472, IQR = 1,0472, x_{0,9} = 2,4981, x_{0,1} = 0,6435.]$$

$$[f) \varepsilon = 1,25324.]$$

9. Náhodná veličina má spojitě rozdělení určené hustotou f , kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ axe^{-x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

- Určete hodnotu a a nakreslete graf funkce f .
- Určete distribuční funkci F a nakreslete její graf.
- Vypočtěte pravděpodobnosti $P(X \geq 1)$ a $P(X^2 \leq X + 2)$.
- Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$, směrodatnou odchylku $\sigma(X)$, koeficient šikmosti $\alpha(X)$ a koeficient špičatosti $\varepsilon(X)$.
- Určete rovnici pro p -kvantil x_p a vyčíslete medián $x_{0,5}$ a jeho hodnotu pro $p = 0,95$ a $p = 0,9$.
- Určete modus \hat{x} .

[a] $a = 1$; b) $F(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$, $x > 0$; c) $P_1 = 0,73576$, $P_2 = 0,594$;

[d] $E(X) = 2$, $D(X) = 2$, $\sigma(X) = \sqrt{2}$, $\alpha(X) = \sqrt{2}$, $\varepsilon(X) = 3$;

[e] $(x_p + 1)e^{-x_p} = 1 - p$; $x_{0,5} = 1,6784$, $x_{0,9} = 3,889$, $x_{0,95} = 4,744$; f) $\hat{x} = 1$.]

10. Náhodná veličina X má spojitě rovnoměrné rozdělení v intervalu $(-3, 5)$ a náhodná veličina $Y = \text{sgn}(X)$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y (její pravděpodobnostní funkci), její střední hodnotu $E(Y)$, rozptyl $D(Y)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(Y)$.

[a] $X \in \{-1, 1\}$; $p(-1) = \frac{3}{8}$, $p(1) = \frac{5}{8}$; $E(X) = 0,25$, $D(X) = 0,9375$, $\sigma(X) = 0,96824$.]

11. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $\text{Exp}(0; 1)$ a náhodná veličina $Y = \min\{X, 2\}$.

- Určete rozdělení náhodné veličiny Y (její distribuční funkci).
- Vypočtěte střední hodnotu $E(Y)$, rozptyl $D(Y)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(Y)$.

[a] $G(y) = 1 - e^{-y}$, $0 \leq y < 2$, $G(y) = 1$, $y \geq 2$; b) $E(Y) = 0,86466$, $D(Y) = 0,47697$, $\sigma(X) = 0,69063$.]

12. Náhodná veličina X má spojitě rozdělení určené distribuční funkcí F , kde

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1), \\ a + \frac{b}{x^2}, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

- Určete čísla a , b a nakreslete graf distribuční funkce F .
- Určete hustotu f a nakreslete její graf.
- Vypočtěte pravděpodobnosti $P(-3 < X \leq 2)$, $P(X > 3)$, a $P(X^2 < 2)$.
- Vypočtěte střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.
- Určete číslo x_p (p -kvantil) takové, že $P(X \leq x_p) = p$, $0 < p < 1$ a vyčíslete jeho hodnoty pro $p = 0,5$, $p = 0,95$ a $p = 0,995$.
- Určete číslo ε takové, že $P(|X - 2| \leq \varepsilon) = 0,95$.

[a) $a = 1$, $b = -1$; b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $x > 1$; c) $P_1 = 0,75$, $P_2 = 0,1111$, $P_3 = 0,5$;
[d) $E(X) = 2$, $D(X)$ neexistuje; e)
 $x_p = \frac{1}{\sqrt{1-p}}$; $x_{0,5} = 1,4142$, $x_{0,95} = 4,47214$, $x_{0,995} = 14,142$; e) $\varepsilon = 2,47214$.]