

Kapitola 3

Vlastnosti grafů

3.1 Pokrytí a vzdálenost na grafech

V předchozích dvou odstavcích jsme odděleně zavedli základní pojmy neorientovaných a orientovaných grafů a vyšetřili jejich elementární vlastnosti. V dalším výkladu již nebudeme tyto dva druhy grafů od sebe tak přísně oddělovat. Při zavádění nových pojmů budeme většinou začínat opět neorientovanými grafy, a pokud se přechodem k orientovaným grafům daný pojem výrazněji obohatí, věnujeme se pak ještě jejich orientované verzi. Tento postup dovolí neztrácet čas opakováním shodných nebo velmi podobných vlastností a zaměřit se pouze na odlišnosti.

Otázky, jimiž se budeme zabývat nejdříve, souvisejí s úlohou, s níž se v určité podobě jistě každý setkal: Zadaný obrázek (např. známý „domeček“) se má nakreslit jedním tahem. Podobného charakteru je i tzv. *problém sedmi mostů města Královce*, řešený r. 1736 L. Eulerem (viz dále), jehož výsledky v tomto ohledu lze považovat za historický začátek teorie grafů. Existují však i současné a velice praktické úlohy spadající do této skupiny: Jak má projíždět kropicí vůz (popeláři apod.) ulicemi města tak, aby každou ulici projel pouze jednou a vrátil se zpět do garáže? Jestliže nelze takovou trasu nalézt, kterými ulicemi má vůz projet opakovaně, aby bylo zajištěno pokropení všech ulic s minimem najetých kilometrů? Z hlediska teorie grafů se zřejmě jedná o nějaký rozklad (uspořádání) množiny hran do tahů, a proto zavedeme potřebné pojmy.

Definice 3.1: **Pokrytím neorientovaného grafu** $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ nazveme takový rozklad $\{H_i : i = 1, 2, \dots, k\}$ množiny jeho hran, v němž jsou hrany každé třídy H_i uspořádány do tahu. Pokrytí s nejmenším počtem tříd k nazýváme **minimálním pokrytím**.

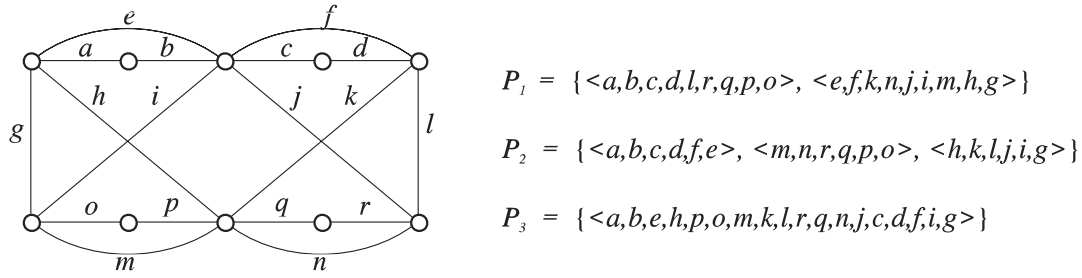
Úlohy, které jsme naznačili v úvodu odstavce, jsou tedy speciálním případem hledání minimálního pokrytí grafu: Máme rozhodnout, zda a jak je možné pokrýt graf jedním uzavřeným (popř. otevřeným) tahem. Problémy tohoto druhu jsou na základě dále uvedených tvrzení velmi snadno řešitelné. Při určování pokrytí grafu se zabýváme pouze podgrafem určeným množinou hran grafu. V tomto odstavci tedy předpokládáme, že graf neobsahuje izolované uzly.

Definice 3.2: Neorientovaný graf, jehož každý uzel má sudý stupeň, nazýváme **Eulerovým grafem** (zkráceně **E-grafem**). Pokud existuje uzavřený nebo otevřený tah obsahující všechny hrany grafu, nazýváme jej **Eulerovým tahem** daného grafu.

Na obr. 3.1 ukazujeme příklad E-grafu a tři jeho pokrytí. Vidíme, že minimální pokrytí tohoto Eulerova grafu je tvořeno uzavřeným Eulerovým tahem P_3 , což nabízí domněnku, že mezi Eulerovými grafy a existencí uzavřeného Eulerova tahu existuje nějaká souvislost. Uvedeme nejprve jedno pomocné tvrzení.

Lemma 3.3: Graf G je Eulerovým grafem právě tehdy, lze-li jej vyjádřit jako sjednocení soustavy vzájemně hranově disjunktních kružnic.

Důkaz: \Rightarrow Nechť je $G = \bigcup K_i$, $K_i \cap K_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Libovolný uzel u grafu G je pak obsažen v jistém počtu kružnic K_i , označme tento počet n_u . Vzhledem k disjunktnosti kružnic je potom

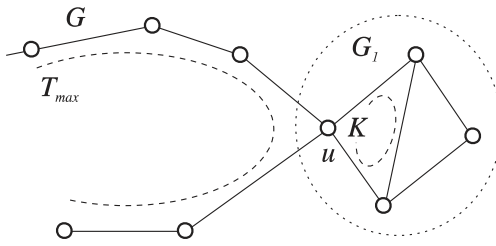


Obrázek 3.1: Pokrytí grafu

$\delta(u) = 2n_u$, což je číslo sudé.

\Leftarrow Nechť G je Eulerův graf; zvolíme jeho libovolný uzel u , vybereme některou z hran incidujících s u a označíme ji h_1 . Označme u_1 druhý krajní uzel hrany h_1 a vyberme opět libovolnou z hran incidujících s uzlem u_1 , ale různou od h_1 . Pomocí této hrany přejdeme k uzlu u_2 , a tímto způsobem postupujeme tak dlouho, dokud se nedostaneme k některému z uzlů podruhé. Takto získáme kružnici K_1 , a tu odečteme od grafu G . Vzniklý graf $G_1 = G - K_1$ je buď prázdný, nebo je opět Eulerovým grafem, a pak postup opakujeme od začátku. Soustava takto získaných kružnic $K_i, i = 1, 2, \dots$ vyhovuje tvrzení věty. \triangle

Věta 3.4: Graf lze pokrýt jediným uzavřeným tahem právě tehdy, je-li souvislým Eulerovým grafem.



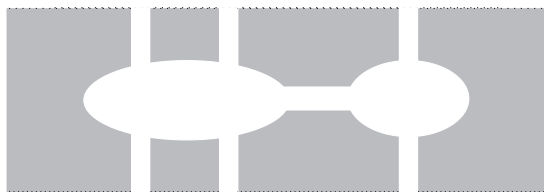
Obrázek 3.2: K větě o pokrytí

Důkaz: Tvrzení v přímém směru je zřejmé, dokážeme tedy jen zpětnou implikaci. Nechť G je souvislý Eulerův graf. Označme T_{max} uzavřený tah grafu G o největší možné délce. Pokrývá-li T_{max} celý graf G , jsme hotovi, jinak dokážeme tvrzení sporem. Nechť $G_1 = G - T_{max}$ je neprázdný podgraf grafu G . Pak G_1 je Eulerův graf a vzhledem k souvislosti grafu G má graf G_1 s tahem T_{max} alespoň jeden společný uzel u . Uzel u však musí podle

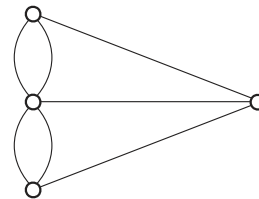
lemmatu 3.3 ležet alespoň v jedné kružnici K (viz obr. 3.2) grafu G_1 . Potom ale složením T_{max} a K získáme uzavřený tah o větší délce než má T_{max} , což je spor. \triangle

Problém sedmi mostů

Město Královec (kdysi Königsburg, pak Kaliningrad, nyní opět Königsburg?) se rozkládá na březích řeky Pregely a na dvou ostrovech v této řece. Jednotlivé části jsou spolu spojeny celkem sedmi mosty, jak ukazuje schematicky obr. 3.3a). Máme rozhodnout, zda a jak lze přejít všech sedm mostů tak, abychom po každém přešli právě jednou a vrátili se zpět do výchozího místa.



a)



b)

Obrázek 3.3: Problém sedmi mostů

Je vidět, že situaci lze znázornit grafem G (viz obr. 3.3b), a úkolem je nalézt uzavřený tah pokrývající tento graf. Podle věty 3.4 však takový tah nemůže existovat, neboť všechny čtyři uzly jsou lichého stupně. Bude však zadaná úloha řešitelná, když upustíme od požadavku návratu do výchozího místa? Tuto otázku zodpoví následující věta.

Věta 3.5: Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je souvislý neorientovaný graf, který má právě $2n$ uzlů lichého stupně, $n \geq 1$. Pak se každé minimální pokrytí grafu G skládá z n (otevřených) tahů, z nichž každý spojuje dvojici uzlů lichého stupně.

Důkaz: Doplňme graf G o n hran, jež budou spojoval dvojice uzlů lichého stupně. Každý z těchto uzlů bude incidovat s právě jednou z těchto hran. Takto vzniklý graf bude zřejmě opět souvislý a navíc Eulerův, takže lze pokrýt jediným uzavřeným tahem T . Nyní opět odebereme z tahu T dříve přidaných n hran, a tah T se tím rozpadne na n otevřených tahů, jež reprezentují pokrytí původního grafu G . Uvažujme nyní libovolné pokrytí grafu G . Potom musí obsahovat alespoň n otevřených tahů, aby pokrylo $2n$ uzlů lichého stupně (počáteční a koncový). Má-li pokrytí více než n otevřených nebo uzavřených tahů, pak už není minimální. Obsahuje-li právě n otevřených tahů, musí to být tahy požadované vlastnosti. \triangle

Graf na obr. 3.3b) obsahuje čtyři uzly lichého stupně, každé jeho minimální pokrytí budou tedy tvořit dva otevřené tahy. Problém sedmi mostů není tudíž řešitelný ani při vypuštění požadavku návratu do výchozího místa.

Orientované Eulerovy grafy

Nyní se ještě ve stručnosti zmíníme o problematice orientovaných Eulerových grafů. Základní tvrzení uvedená pro neorientované grafy lze velice snadno přeformulovat náhradou pojmů teorie neorientovaných grafů jejich orientovanými protějšky. Z tohoto důvodu si všimneme hlavně zavedení základních pojmů a některých speciálních vlastností.

Definice 3.6: Orientovaný graf, jehož každý uzel má stejný vstupní a výstupní stupeň, nazýváme **orientovaným Eulerovým grafem**.

Každý orientovaný E-graf je sjednocením systému hranově disjunktních cyklů. Je-li navíc souvislý, pak jeho minimální pokrytí tvoří jediný uzavřený orientovaný tah. Zrušíme-li orientaci v orientovaném E-grafu, dostaneme zřejmě neorientovaný E-graf, a naopak každý neorientovaný Eulerův graf lze alespoň dvěma různými způsoby orientovat tak, aby vznikl orientovaný E-graf. Je-li G orientovaným E-grafem, pak bude i opačně orientovaný graf G^- E-grafem. Ověření všech těchto vlastností ponecháme jako cvičení.

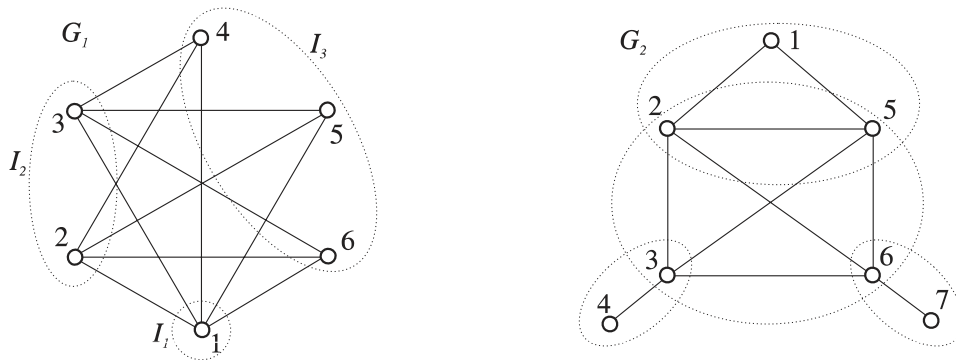
Problematika minimálního pokrytí obecného orientovaného grafu je poněkud komplikovanější. Pro libovolný orientovaný graf $G = \langle H, U, \sigma \rangle$ můžeme zavést rozklad jeho množiny uzlů do následujících tří podmnožin:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u \in U : \delta^+(u) = \delta^-(u)\} \\ U_2 &= \{u \in U : \delta^+(u) > \delta^-(u)\} \\ U_3 &= \{u \in U : \delta^+(u) < \delta^-(u)\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pro E-grafy bude zřejmě $U_1 = U$, $U_2 = U_3 = \emptyset$, takže o rozklad v pravém slova smyslu se bude jednat pouze u grafů, které nejsou E-grafy. Potom jsou již všechny tři množiny neprázdné a platí následující vztah, který využijeme při určení minimálního pokrytí orientovaného grafu:

$$\sum_{u \in U_2} (\delta^+(u) - \delta^-(u)) = \sum_{u \in U_3} (\delta^-(u) - \delta^+(u)) = k \quad (> 0) \quad (3.2)$$

Věta 3.7: Nechť $G = \langle H, U, \sigma \rangle$ je souvislý orientovaný graf, nechť podmnožiny uzlů U_1, U_2, U_3 jsou zavedeny vztahy (3.1), přičemž $U_2, U_3 \neq \emptyset$. Potom každé minimální pokrytí grafu G bude



Obrázek 3.5: Nezávislé podmnožiny a kliky grafu

Každý samostatně uvažovaný uzel (bez smyčky) tvoří nezávislou podmnožinu, bude tedy účelné zabývat se **maximálními nezávislými podmnožinami**, tzn. podmnožinami, které již nelze zvětšit bez porušení nezávislosti. Např. pro graf G_1 na obr. 3.5 jsou všechny tři vyznačené podmnožiny uzlů $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3\}$, $I_3 = \{4, 5, 6\}$ nezávislé a všechny jsou i maximální. Označíme-li $\text{Ind}(G)$ soustavu všech nezávislých podmnožin uzlů grafu G , potom číslo

$$\alpha(G) = \max |I| \quad \text{pro } I \in \text{Ind}(G) \quad (3.4)$$

nazýváme **nezávislostí grafu** G . Pro graf G_1 na obr. 3.5 platí $\alpha(G_1) = 3$, neboť v něm nelze nalézt nezávislou podmnožinu o více než třech uzlech. S nezávislostí grafu těsně souvisí pojem tzv. **klikovosti grafu**.

Definice 3.10: **Klikou grafu** $G = \langle H, U, \rho \rangle$ nazýváme každý maximální úplný podgraf grafu G , tzn. podgraf $K \subseteq G$, $K \cong K_n$, pro který neexistuje podgraf K' takový, že $K \subset K' \subseteq G$, $K \cong K_m$ pro nějaké $m > n$.

Název klika je přenesen z aplikace teorie grafů ve společenských vědách: Jestliže uzly grafu představují osoby a hrany např. vyjadřují shodu politických názorů příslušných osob, pak klikou bude skupina osob se shodnými politickými názory. Pro graf G_2 na obr. 3.5 budou klikami podgrafy indukované podmnožinami uzlů $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{6, 7\}$, jiné kliky daný graf nemá.

Klikovostí grafu G nazýváme takové maximální číslo n , pro které existuje klika $K \subseteq G$, $K \cong K_n$; značíme je $\omega(G)$. V případě grafu G_2 z obr. 3.5 platí tedy $\omega(G_2) = 4$.

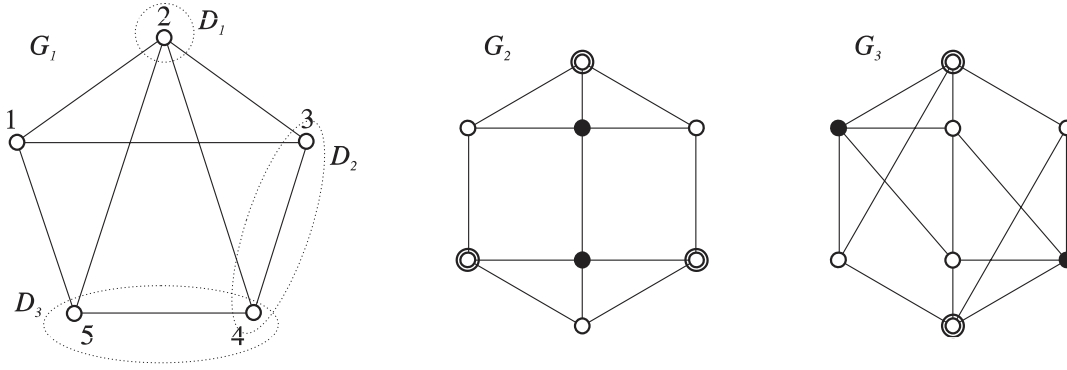
Protože v nezávislé podmnožině jsou uzly, mezi nimiž v grafu G neexistuje žádná hrana, bude každá maximální nezávislá podmnožina uzlů obyčejného grafu G určovat kliku v doplňku $-G$ ke grafu G . Z této úvahy plyne platnost vztahu

$$\alpha(G) = \omega(-G) \quad (3.5)$$

Definice 3.11: **Dominující podmnožinou uzlů** grafu $G = \langle H, U, \rho \rangle$ nazýváme takovou podmnožinu $D \subseteq U$, která svou množinou sousedů pokrývá všechny zbývající uzly grafu G , tzn. pro kterou platí

$$D \cup \Gamma(D) = U \quad (3.6)$$

Množina $D = U$ bude jistě dominující, a má tedy smysl zabývat se **minimálními dominujícími podmnožinami**; to jsou takové dominující podmnožiny, jejichž žádná vlastní podmnožina již není dominující. Tak např. v grafu G_1 na obr. 3.6 jsou vyznačeny podmnožiny $D_1 = \{2\}$, $D_2 = \{3, 4\}$, $D_3 = \{4, 5\}$; kromě nich má daný graf ještě čtyři další minimální dominující podmnožiny (které?). Minimální dominující podmnožinou úplného grafu je každý jeho uzel a žádné jiné tento graf nemá.



Obrázek 3.6: Dominující podmnožiny

Označíme-li $\text{Dom}(G)$ soustavu všech dominujících podmnožin grafu G , potom číslo

$$\beta(G) = \min |D| \quad \text{pro } D \in \text{Dom}(G) \quad (3.7)$$

nazýváme **dominanci grafu** G . Následující tvrzení ukazuje, jaký je vztah mezi nezávislostí a dominancí grafu.

Věta 3.12: Nezávislá podmnožina uzlů neorientovaného grafu je maximální právě tehdy, je-li jeho dominující podmnožinou.

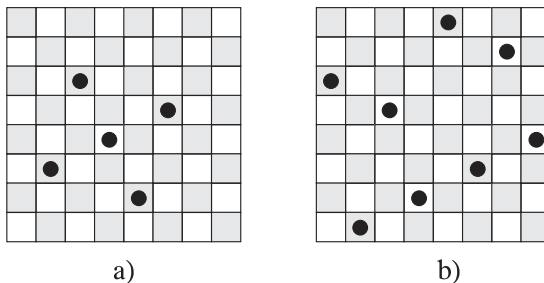
Důkaz: Je-li I maximální nezávislá podmnožina, znamená to, že ji již nelze rozšířit o žádný uzel bez porušení nezávislosti, takže všechny zbývající uzly jsou už v jejím sousedství. To je ale vlastnost dominující podmnožiny. \triangle

Důsledek : Pro nezávislost a dominanci grafu G platí vztah

$$\beta(G) \leq \alpha(G) \quad (3.8)$$

Důkaz: Při výběru minimálních dominujících podmnožin lze v nejhorším případě dosáhnout stejné mohutnosti, jakou má maximální nezávislá podmnožina s nejmenší mohutností, neboť i ta je současně dominující. \triangle

Na obr. 3.6 ukazujeme příklady grafů, pro které platí ve vztahu (3.8) ostrá nerovnost (graf G_2) a rovnost (graf G_3) – dvojitými kroužky jsou vyznačeny uzly maximální nezávislé podmnožiny určující $\alpha(G)$ a plnými kroužky uzly minimální dominující podmnožiny určující $\beta(G)$.



Obrázek 3.7: Řešení úlohy o dámách

jejichž políčka se nacházejí na téže horizontální, vertikální nebo diagonální linii šachovnice. Pro zřejmou složitost zde tento graf nebudeme znázorňovat, bylo však dokázáno, že pro něj platí $\alpha(G) = 8$, $\beta(G) = 5$; možná řešení ukazuje obr. 3.7.

Příklad 3.13: Na šachovnici máme rozmístit

- (a) co nejmenší počet dam tak, aby ovládaly všechna pole,
- (b) co největší počet dam tak, aby se navzájem neohrožovaly.

Tyto úlohy vedou ke hledání minimální dominující (případ a), resp. maximální nezávislé (případ b) podmnožiny uzlů v jistém grafu. Uzly tohoto grafu odpovídají jednotlivým políčkům šachovnice, hranou jsou spojeny uzly,

Příklad 3.14: Velitel čtyř o 10 strážných má sestavit co nejvíce tříčlenných hlídek, přičemž musí dodržet předpis, že se v žádné hlídce spolu nesmějí znovu setkat dva strážní, kteří už byli spolu ve hlídce. Jedná se tedy o speciální případ výběru n -tic prvků z N -prvkové množiny ($n = 3, N = 10$), přičemž každé dvě různé n -tice musí mít méně než k společných prvků ($k = 2$). Každou n -tici vyjádříme uzlem grafu, hranou spojíme ty uzly, pro něž mají n -tice k nebo více společných prvků. Pro náš případ dostaneme graf o $\binom{10}{3} = 120$ uzlech, každý uzel má stupeň 21 – tento graf pro jeho složitost pochopitelně nebudeme graficky znázorňovat. Výběr hlídek odpovídá nalezení maximální nezávislé podmnožiny uzlů v tomto grafu – pro náš případ bude $\alpha(G) = 9$ a příslušné hlídky mohou mít např. složení:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{1, 8, 9\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{2, 8, 10\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}$$

Pro obecné hodnoty N, n, k není hodnota čísla $\alpha(G)$ tohoto grafu známa.

Při určování nezávislosti a dominance u málo rozsáhlých grafů dokážeme intuitivně sestavit příslušné množiny $\text{Ind}(G)$ a $\text{Dom}(G)$. Určení hodnot $\alpha(G)$ a $\beta(G)$ obecného grafu však patří mezi úlohy, při jejichž řešení se patrně nelze vyhnout systematické probírce všech (nebo téměř všech) podmnožin uzlů. K těmto úlohám se ještě vrátíme v kap. 9.

Chromatické číslo grafu

Základní úkol obarvení (uzlů) grafu lze formulovat takto: máme nalézt minimální počet barev, s jejichž pomocí lze „obarvit“ uzly grafu tak, aby žádná jeho hrana neincidovala se stejně obarvenými uzly. Je vidět, že množina stejně obarvených uzlů tvoří nezávislou podmnožinu, a jedná se tedy o nalezení co nejmenšího počtu nezávislých podmnožin, které by pokryly všechny uzly grafu.

Definice 3.15: Graf G nazýváme k -chromatickým, pokud lze jeho uzly obarvit s použitím k různých barev. **Chromatickým číslem grafu** G nazýváme takové nejmenší číslo k , pro něž je graf G k -chromatickým; značíme je $\chi(G)$.

Na problém obarvení grafu je možné převést řadu úloh souvisejících např. s otázkami skladování a distribuce zboží, rozdělování úkolů v rámci určité výrobní jednotky nebo při řízení činnosti výpočetního systému a ze školské problematiky především vytváření rozvrhů.

Příklad 3.16: Uvažujeme množinu $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ tříd ve škole, množinu $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ předmětů vyučovaných v určitém období a množinu $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ reprezentující pedagogický sbor. Pro každou třídu t_i je určen počet d_{ij} vyučovacích hodin předmětu P_j týdně a je-li různý od nuly, pak je určen i učitel u_k , který bude tento předmět vyučovat.

Nyní můžeme vytvořit graf s množinou uzlů tvořenou čtveřicemi $(t_i, p_j, u_k, 1), (t_i, p_j, u_k, 2), \dots, (t_i, p_j, u_k, d_{ij})$, pro všechny třídy t_i a v nich vyučované předměty p_j . Hranami spojíme ty uzly $(t_i, p_j, u_k, x), (t_a, p_b, u_c, y)$, pro které platí buď $i = a$, nebo $k = c$. Potom určuje chromatické číslo $\chi(G)$ tohoto grafu minimální počet hodin týdně, během kterých bude na škole probíhat výuka. Přesný rozvrh hodin je opět určité obarvení tohoto grafu, které ovšem splňuje ještě další podmínky.

Chromatické číslo grafu nezávisí na existenci rovnoběžných hran, pro úplný graf je rovno počtu jeho uzlů. Graf, který není úplný, má chromatické číslo menší než je počet jeho uzlů. Chromatické číslo je další z obtížně stanovitelných globálních charakteristik grafu, a nelze je tedy přímo určit např. jen z počtu uzlů a hran nebo souboru stupňů. Pro chromatické číslo však lze stanovit různé odhady využívající další charakteristiky grafu.

Věta 3.17: Pro nezávislost a chromatické číslo grafu $G = \langle H, U \rangle$ platí

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |U| \quad (3.9)$$

Důkaz: Nechť $\{U_i : i = 1, 2, \dots, \chi(G)\}$ je minimální rozklad na nezávislé podmnožiny obarvené stejnou barvou. Pak je nutně $|U_i| \leq \alpha(G)$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, \chi(G)$, a tedy platí $|U| = \sum |U_i| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ \triangle

Věta 3.18: Je-li m maximální stupeň uzlu grafu G , pak platí

$$\chi(G) \leq m + 1 \quad (3.10)$$

Důkaz: (indukcí podle počtu uzlů)

1. Graf o jenom uzlu lze obarvit jedinou barvou a nerovnost (3.10) tedy platí.
2. Nechť tvrzení platí pro grafy s $n(\geq 1)$ uzly a uvažujeme graf G , který má $n + 1$ uzlů. Nechť m je maximální stupeň uzlu v grafu G . Vybereme libovolný uzel u a z grafu G jej vypustíme. Vzniklý podgraf $G' = G - \{u\}$ grafu G bude mít jistě maximální stupeň uzlů nejvýše rovný m a podle indukčního předpokladu lze obarvit s použitím nejvýše $m + 1$ barev. Nyní opět přidáme uzel u a protože $\delta(u) \leq m$, můžeme na jeho obarvení použít některou z $m + 1$ barev. \triangle

Předchozí tvrzení lze ještě zesílit takto: Není-li G úplný a není-li kružnici liché délky, pak platí

$$\chi(G) \leq m \quad (3.11)$$

Uvedené odhady poskytují o chromatickém čísle grafu jen velmi hrubou informaci, neboť je např. dokázáno, že rozdíl mezi chromatickým číslem a klikovostí grafu může být libovolně velký. Přesné určení chromatického čísla je však známo pouze pro základní případy. Chromatické číslo 1 má pouze graf tvořený izolovanými uzly a strukturu grafů s chromatickým číslem 2 určuje následující tvrzení.

Věta 3.19: Pro graf G s neprázdnou množinou hran je $\chi(G) = 2$ právě tehdy, neobsahuje-li G kružnici liché délky.

Důkaz: Pro graf obsahující kružnici liché délky musíme na obarvení použít nejméně tři barvy, takže stačí dokázat postačitelnost podmínky. Nechť graf G neobsahuje kružnici liché délky. Ukážeme možný způsob jeho obarvení pomocí dvou barev. Zvolíme libovolný uzel u a vytvoříme rozklad $\{U_0, U_1, U_2, \dots, U_s\}$ množiny uzlů podle tohoto pravidla:

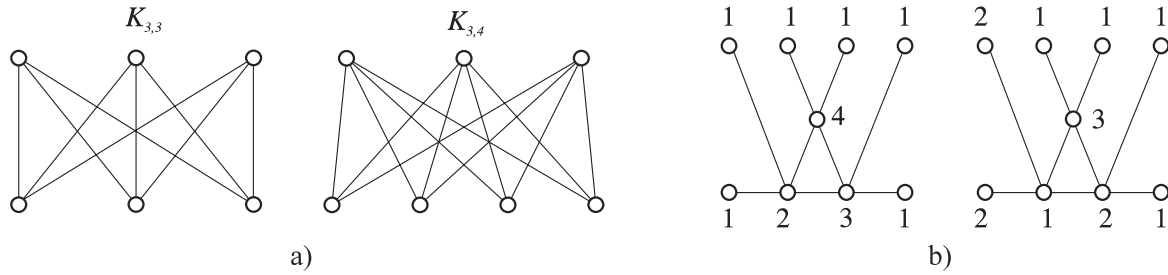
$$\begin{aligned} U_0 &= \{u\}, \\ U_1 &= \Gamma(U_{i-1}) - \left(\bigcup_{j < i} U_j\right) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (3.12)$$

Je zřejmé, že všechny hrany grafu G mohou mít oba své krajní uzly buď v téže množině U_i , nebo v sousedních množinách U_i, U_{i+1} . Existence hrany s oběma krajními uzly v téže množině U_i by však znamenala existenci kružnice liché délky (věta 2.13), takže všechny množiny $U_i, i = 0, 1, \dots, s$ jsou nezávislými množinami grafu G . Lze tedy obarvit množiny U_0, U_2, U_4, \dots barvou 1 a zbývající množiny barvou 2. \triangle

Důsledek : Každý strom s neprázdnou množinou hran má chromatické číslo 2 (strom neobsahuje žádné kružnice, a tedy ani kružnici liché délky).

Každý graf $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ s chromatickým číslem 2 nazýváme **bipartitním (bichromatickým)**. Obarvením se totiž rozloží jeho množina uzlů na dvě nezávislé podmnožiny $U = U_1 \cup U_2$, přičemž každá hrana grafu má jeden krajní uzel v U_1 a druhý v U_2 . Obyčejný bipartitní graf s maximálním počtem hran nazýváme **úplným bipartitním grafem** a pro $|U_1| = m, |U_2| = n$ jej značíme $K_{m,n}$ (viz obr. 3.8a).

S výjimkou bipartitních grafů se ovšem chromatické číslo určuje velmi obtížně. Také např. postup, při němž se vyhledá maximální nezávislá podmnožina, obarví se jednou barvou, ze zbylých uzlů se vybere další maximální nezávislá podmnožina a obarví se druhou barvou, ... atd.,



Obrázek 3.8: a) Úplné bipartitní grafy, b) obarvení grafu

nevede k minimálnímu obarvení – viz graf na obr. 3.8b, který má $\chi(G) = 3$, ale popsáním způsobem jej obarvíme čtyřmi barvami.

Vzdálenost na grafu

Představme si komunikační plán města vyjádřený grafem. Jaká bude nejkratší dopravní trasa pro přejezd z místa A do místa B? Která část města je z daného místa nejobtížněji dostupná? Do kterého místa postavit požární zbrojnici, aby měla v případě požáru co nejvýhodnější umístění vůči všem částem města? Tyto a další podobné otázky vyúsťují zcela zákonitě v potřebu zavedení vzdálenosti na grafu.

Definice 3.20: **Vzdáleností uzlů** u a v v neorientovaném souvislém grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ nazýváme délku nejkratší cesty spojující tyto dva uzly; značíme ji $d_G(u, v)$.

Většinou bude z kontextu jasné, v jakém grafu vzdálenost uvažujeme, takže budeme index G vynechávat a psát prostě $d(u, v)$. Základní vlastnosti vzdálenosti shrnuje následující tvrzení, jehož důkaz ponecháváme jako cvičení.

Věta 3.21: Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je neorientovaný souvislý graf. Potom pro libovolné jeho uzly u, v, z platí:

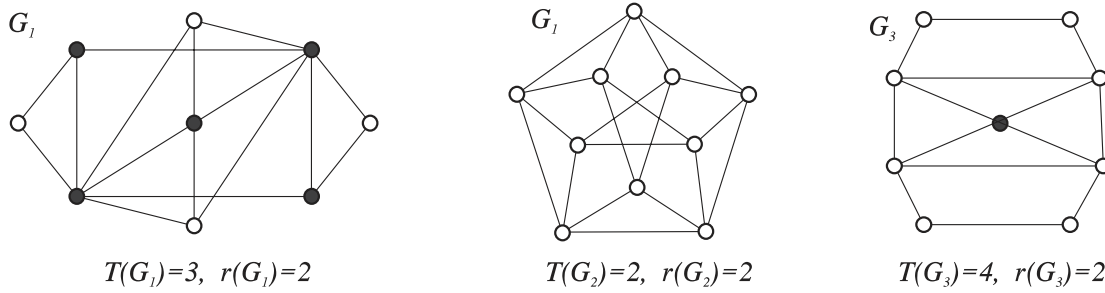
- (0) vzdálenost $d(u, v)$ je celé nezáporné číslo
- (1) $d(u, v) \geq 0$; přitom $d(u, v) = 0$, právě když $u = v$
- (2) $d(u, v) = d(v, u)$
- (3) $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$
- (4) je-li $d(u, v) > 1$, pak platí: $\exists z \in U (u \neq z \neq v \ \& \ d(u, v) = d(u, z) + d(z, v))$

Vlastnosti (1), (2), (3) jsou tzv. **axiómy metriky**, které by měla splňovat každá funkce určená k vyjadřování vztahů blízkosti a vzdálenosti na nějaké množině; vlastnosti (0) a (4) jsou specifické pro naši definici vzdálenosti na grafech. Později ukážeme, že lze na grafu zavést vzdálenost, která nemá vlastnosti (0) a (4), je dokonce možné oželeť v případě potřeby i vlastnost (2). Od pojmu vzdálenosti odvodíme nyní několik důležitých charakteristik grafu a věnujeme se jejich vlastnostem.

Definice 3.22: Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je souvislý neorientovaný graf. Potom **průměr** $T(G)$ grafu G , resp. **excentricitu** $e(u, G)$ uzlu u (v grafu G), resp. **poloměr** $r(G)$ grafu G zavádíme následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} T(G) &= \max_{u, v \in U} d(u, v) \\ e(u, G) &= \max_{v \in U} d(u, v) \\ r(G) &= \min_{u \in U} e(u, G) \end{aligned}$$

Středem grafu G nazveme každý jeho uzel s excentricitou rovnou $r(G)$.



Obrázek 3.9: Poloměr a průměr grafu

Na obr. 3.9 ukazujeme příklad grafů s určením jejich poloměrů, průměrů a středů (ty jsou vyznačeny tmavě kromě G_2 , kde je každý uzel středem).

Věta 3.23: Nechť G je neorientovaný souvislý graf. Potom platí

$$r(G) \leq T(G) \leq 2r(G) \quad (3.13)$$

Důkaz: Levá nerovnost je zřejmá z definice, pravou dokážeme sporem. Nechť je $T(G) > 2r(G)$. Potom v G existuje dvojice uzlů u, v , jejichž vzdálenost je nejméně $2r(G) + 1$, takže nejkratší cesta C_{uv} mezi těmito uzly má délku alespoň $2r(G) + 1$. Označme z střed grafu G . Pak je $d(u, z) \leq r(G)$ a také $d(z, v) \leq r(G)$, takže přes uzel z můžeme sestavit sled mezi uzly u a v o délce nejvýše $2r(G)$. To je ale spor s volbou cesty C_{uv} . \triangle

V nerovnosti (3.13) mohou nastat oba mezní případy: Graf se stejným poloměrem a průměrem je G_2 na obr. 3.9, příklad grafu s průměrem rovným dvojnásobku poloměru je G_3 . Specifické vlastnosti s ohledem na poloměr, průměr a středy grafu mají stromy.

Věta 3.24: Nechť G je strom. Je-li jeho průměr číslo sudé, pak má G jediný střed a platí $T(G) = 2r(G)$. Je-li jeho průměr číslo liché, pak má G právě dva středy a platí $T(G) = 2r(G) - 1$.

Důkaz: Mějme nejprve stromy se sudým poloměrem $2n$, tvrzení dokážeme indukcí podle n .

1. Pro $n = 0$ se jedná o strom tvořený jediným uzlem, ten má jediný střed a poloměr i průměr je roven nule, takže tvrzení platí.

2. Nechť tvrzení platí pro stromy s průměrem $2n$ (pro $n \geq 0$) a uvažujme strom G s průměrem $T(G) = 2(n + 1)$. Ze stromu G vypustíme všechny uzly stupně 1 (takové má G nejméně dva – např. krajní uzly cesty určující jeho průměr). Vzniklý podgraf G' bude opět stromem, excentricita všech zbylých uzlů v něm bude o 1 menší než ve stromu G , jeho středy jsou tedy středy stromu G a jeho průměr je o 2 menší. Platí tedy

$$r(G') = r(G) - 1, \quad T(G') = T(G) - 2 = 2n.$$

Použitím indukčního předpokladu dostáváme

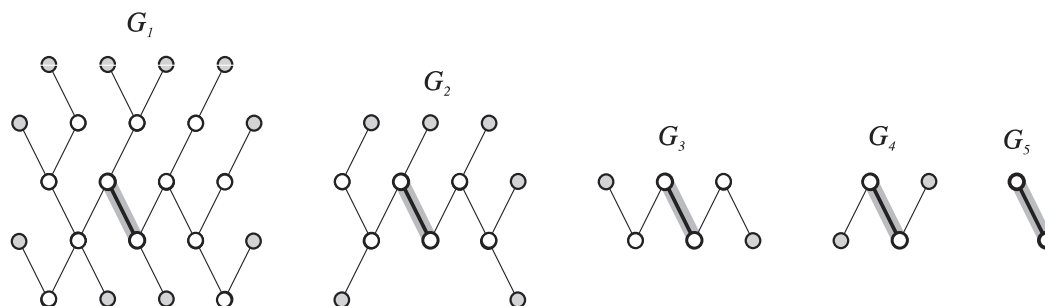
$$T(G') = 2r(G') \Rightarrow T(G) - 2 = 2(r(G) - 1) \Rightarrow T(G) = 2r(G).$$

Obdobně provedeme důkaz pro stromy s lichým průměrem. \triangle

Důsledek : Pro každý strom s alespoň dvěma hranami platí

$$r(G) < T(G) \quad (3.14)$$

Důkaz předchozí věty současně ukázal postup, jak lze určit poloměr a střed(y) stromu bez toho, že bychom znali excentricity jednotlivých uzlů, tedy ani jejich vzdálenosti. Postupně



Obrázek 3.10: Středy stromu

vypouštíme koncové uzly stromu, až se redukuje na jediný uzel nebo jedinou hranu. Tento postup ilustrujeme na posloupnosti stromů z obr. 3.10 (pro zvýraznění jsou výsledná hrana a její krajní uzly – středy stromu – ve všech grafech vyznačeny tučně).

Při výpočtu průměru a poloměru stromu jsme se tedy dokázali vyhnout postupu podle definice 3.22, který by vyžadoval znalost vzdáleností všech dvojic uzlů, v případě obecného grafu ale jinak postupovat nemůžeme. Tím se dostáváme k úkolu určování (výpočtu) vzdálenosti uzlů v grafu. Je to úkol z aplikačního hlediska mimořádně zajímavý, a tak mu budeme věnovat náležitou pozornost – ovšem až v kapitole 5 vyhrazené pro algoritmy hledání koster a cest.

Na závěr tohoto odstavce ještě zavedeme pojem **vzdálenosti** $d(u, v)$ z uzlu u do uzlu v v orientovaném grafu – definujeme ji opět jako délku (t.j. počet hran) **nejkratší orientované cesty** z u do v . Je zřejmé, že takto bude vzdálenost definována pro všechny dvojice uzlů jen v případě silně souvislého grafu. Pokud v grafu žádná cesta z u do v neexistuje, můžeme považovat vzdálenost $d(u, v)$ za nekonečnou.

Vzdálenost na orientovaných grafech má velmi mnoho společného se vzdáleností na grafech neorientovaných, je zde však nejméně jeden podstatný rozdíl – zřejmě není symetrickou funkcí svých argumentů. Při formulaci tvrzení obdobného jako věta 3.21 bychom tedy museli část (2) vynechat, ostatní části lze převzít beze změny (za předpokladu silné souvislosti grafu).

Cvičení

3.1-1. Je dáno 10 kostek domina s následujícími počty bodů na jednotlivých kostkách:

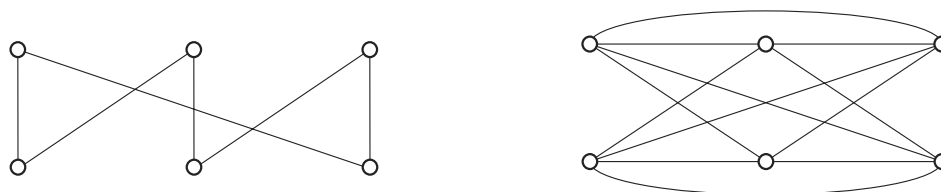
$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$$

Je možné seřadit všechny tyto kostky za sebou podle pravidel domina, tzn. aby se kostky dotýkaly částmi se stejným počtem bodů?

3.1-2. Nechť má souvislý graf čtyři uzly lichého stupně. Dokažte, že pak existují nejméně dvě jeho různá minimální pokrytí.

3.1-3. Nechť G je souvislý orientovaný Eulerův graf. Je G silně souvislý?

3.1-4. Ukažte, jak orientovat neorientovaný Eulerův graf, aby vznikl orientovaný Eulerův graf.



Obrázek 3.11: Určení nezávislých a dominujících podmnožin

3.1-5. Dokažte, že pro každý souvislý neorientovaný graf existuje uzavřený sled, který obsahuje každou jeho hranu právě dvakrát.

3.1-6. Určete alespoň 3 maximální nezávislé a 3 minimální dominující podmnožiny uzlů grafů na obr. 3.11.

3.1-7. Dokažte, že pro nezávislost grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ platí $\alpha(G) \cdot (m + 1) \geq |U|$, kde m je maximální stupeň uzlů v grafu G .

3.1-8. Dokažte, že je-li D minimální dominující podmnožinou uzlů grafu G , pak je i její doplněk $\overline{D} = U - D$ dominující podmnožinou grafu G .

3.1-9. Dokažte, že pro klikovost $\omega(G)$ a chromatické číslo $\chi(G)$ grafu platí $\chi(G) \geq \omega(G)$.

3.1-10. Navrhněte postup, jak pro libovolné $n \geq 3$ vytvořit pravidelný graf stupně 3 s $2n$ uzly, který neobsahuje žádný trojúhelník (t.j. graf K_3).

(*Návod:* Uvažujte bipartitní graf s $n + n$ uzly a zajistěte vhodnou volbu hran.)

3.1-11. Dokažte tvrzení věty 3.21.

3.1-12. Určete nezávislost, dominanci, chromatické číslo, poloměr, průměr a množinu středů

- (a) pro cestu délky $2n$ (b) pro cestu délky $2n + 1$
- (c) pro kružnici délky $2n$ (d) pro kružnici délky $2n + 1$

3.1-13. Charakterizujte grafy G_1 a G_2 , pro které platí $r(G_1) = 1$, $T(G_2) = 1$.

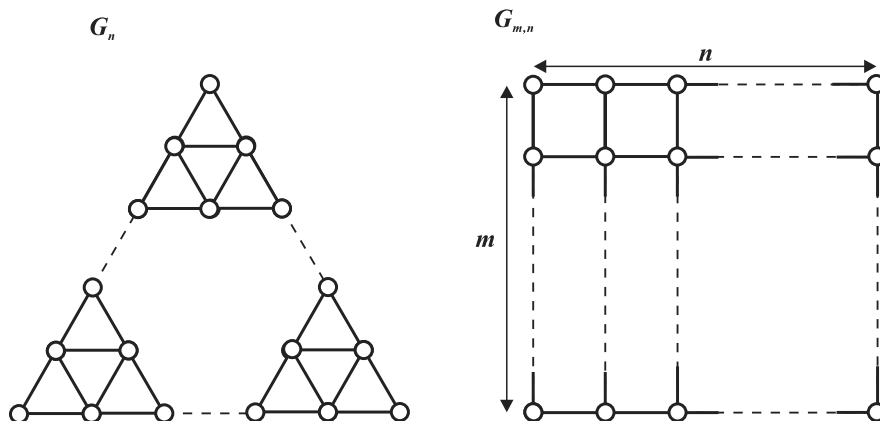
3.1-14. Necht' u je nějaký uzel souvislého (neorientovaného) grafu G . Dokažte, že G je bipartitní právě tehdy, jsou-li pro libovolnou hranu $[x, y]$ grafu G vzdálenosti $d(u, x)$ a $d(u, y)$ různé.

3.1-15. Necht' graf G_n je pravidelná síť rovnostranných trojúhelníků, na jejíž každé straně je n uzlů, graf $G_{m,n}$ je pravoúhlá síť, na jejíchž stranách je m , resp. n uzlů (viz obr. 3.12).

- (a) Určete celkový počet uzlů a hran grafů G_n a $G_{m,n}$.
- (b) Pro jaké hodnoty n a m lze výše uvedené grafy G_n , $G_{m,n}$, úplný graf K_n a úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ pokrýt jediným uzavřeným nebo otevřeným tahem?

3.1-16. Je možné, aby kůň souvisle přešel po prázdné šachovnici tak, že udělá každý možný tah právě jednou a nakonec se vrátí do výchozího místa? Je to možné, pokud netrváme na návratu do výchozího místa? (Tah považujeme za vykonaný, provedl-li jej kůň v jednom ze dvou možných směrů.)

3.1-17. Dokažte, že úplný graf K_n pro liché $n \geq 3$ je možné pokrýt $(n - 1)/2$ hranově disjunkt-ními kružnicemi délky n .



Obrázek 3.12: Obrázek ke cvičení 3.1-15

(*Návod:* Ukažte, jak pro taková n sestojit pokrytí úplného grafu K_{n-1} pomocí $(n-1)/2$ hranově disjunktních cest délky $n-2$ (inspiруйте se obr. 3.13). Přidáním n -tého uzlu pak doplňte tyto cesty na kružnice.

3.1-18. Dokažte následující nutnou a postačující podmínku bipartitnosti (neorientovaného) souvislého grafu G : platí $d(x, u) \neq d(x, v)$ pro libovolný uzel x a libovolnou hranu $[u, v]$ grafu G .

3.1-19. Podmnožinu uzlů V neorientovaného grafu $G = \langle H, U, \rho \rangle$ nazýváme **uzlovým pokrytím** grafu G , pokud alespoň jeden z krajních uzlů každé hrany leží v množině V . **Minimální uzlové pokrytí** je uzlové pokrytí s nejmenším počtem uzlů.

- Uřčete vztah mezi uzlovými pokrytími a dominujícími podmnožinami uzlů grafu.
- Uřčete počet uzlů minimálního uzlového pokrytí cesty, resp. kružnice délky n .

3.2 Stromy a kostry

Z aplikačního hlediska patří stromy k nejpobulárnějším pojmům teorie grafů. V programování jsou stromy považovány za velmi důležitý druh datových struktur a mohou být využity např. při překladu z programovacích jazyků (syntaktické stromy), při operacích řazení souborů dat (stromy řazení), při realizaci tabulek údajů s potřebou velmi rychlé lokalizace jednotlivých položek (vyhledávací stromy), atd. Pomocí stromů můžeme také přehledně vyjádřit systematický postup probírání všech možností při řešení nějaké (grafové) úlohy. Na obr. 3.14b ukazujeme např. strom všech maximálních cest grafu G z obr. 3.14a, které vycházejí z uzlu 1.

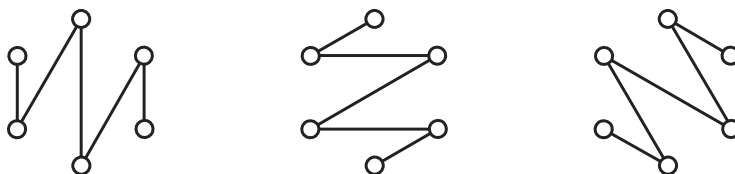
Připomeňme ještě, že podle definice 2.19 je *stromem* každý souvislý graf bez kružnic, *kostrou grafu* pak nazýváme takový faktor grafu, který je stromem. V předchozích odstavcích jsme již uvedli některé specifické vlastnosti stromů (např. jejich bichromaticnost, způsob určování poloměru a středu atd.), nyní odvodíme některé další důležité vztahy.

Věta 3.25: V grafu G existuje kostra právě tehdy, je-li souvislý.

Důkaz: 1. Nechť v G existuje kostra T ; pak je G souvislý, neboť za sled spojující libovolné dva uzly z G lze vzít sled (cestu), která je spojuje v T .

2. Nechť je G souvislý. Je-li již stromem, je sám sobě kostrou a jsme hotovi, jinak musí obsahovat alespoň jednu kružnici K_1 . Odebereme-li z G libovolnou hranu $h_1 \in K_1$, bude vzniklý graf $G_1 = G - \{h_1\}$ podle věty 2.16 souvislým faktorem grafu G . Je-li G_1 bez kružnic, je hledanou kostrou, jinak postup opakujeme od počátku. Po konečném počtu kroků nutně dospějeme ke kostře grafu G . \triangle

Postup uplatněný v důkazu předchozí věty („rozrušování“ kružnic grafu) je možné aplikovat i na nesouvislý graf. Získaný faktor sice nemůže být stromem (není souvislý), každá jeho komponenta již stromem bude – takový faktor nazýváme **lesem grafu**. Kostra (popř. les) grafu není určena jednoznačně, závislost počtu různých koster na struktuře grafu uvedeme později. Na obr. 3.15 ukazujeme různé (nikoliv všechny) kostry úplného grafu o 4 uzlech (zkuste nalézt zbývající kostry – je jich celkem 16).



Obrázek 3.13: Obrázek ke cvičení 3.1-17

Věta 3.26: Nechť $G = \langle H, U \rangle$ je prostý graf. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (a) G je strom
- (b) libovolné dva uzly v G jsou spojeny právě jednou cestou
- (c) G je souvislý, ale po odstranění libovolné hrany vznikne nesouvislý graf
- (d) G je souvislý a platí $|H| = |U| - 1$
- (e) G neobsahuje kružnice a platí $|H| = |U| - 1$
- (f) G neobsahuje kružnice, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice

Důkaz: (a) \Rightarrow (b) Nechť u a v jsou libovolné dva uzly grafu G . Mezi u a v musí vzhledem k souvislosti G existovat nejméně jedna cesta C – dokážeme sporem, že je jediná. Nechť C_1, C_2 jsou dvě různé cesty mezi uzly u a v , pak jejich složením vznikne uzavřený sled, který obsahuje alespoň jednu kružnici. Stačí totiž uvažovat spojení částí cest C_1, C_2 počínaje od prvního uzlu, kde se tyto cesty „rozházejí“ (takový existuje, neboť jsou to cesty různé) a konče prvním uzlem, kde se opět setkají (to nastane nejpozději v uzlu v). Graf G tedy obsahuje kružnici, což je spor.

(b) \Rightarrow (c) Nechť $h = [u, v]$ je libovolná hrana grafu G . Tato hrana představuje jedinou cestu mezi svými krajními uzly, a tak po jejím odstranění nebudou uzly u a v spojeny, vznikne tedy nesouvislý graf.

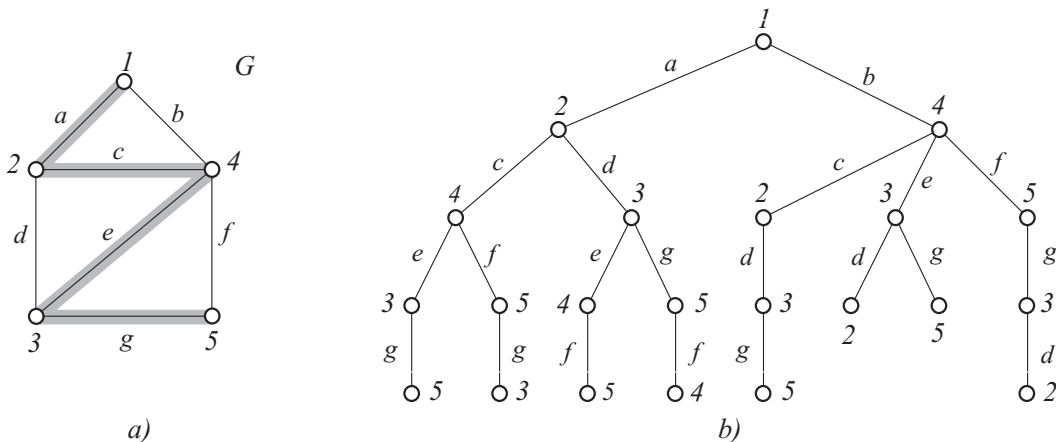
(c) \Rightarrow (d) Postupujeme indukcí podle počtu uzlů:

1. Souvislý graf s počtem $n = 1$ nebo $n = 2$ uzlů obsahuje $n - 1$ hran.
2. Nechť tvrzení platí pro všechny stromy s $n \geq 2$ uzly a mějme strom $G = \langle H, U \rangle$ s $n + 1$ uzly. Vypuštěním libovolné hrany vznikne faktor grafu G o $k (\geq 2)$ komponentách G_i , což jsou opět stromy. Podle indukčního předpokladu platí v každé komponentě $|H_i| = |U_i| - 1$, takže po sečtení dostaneme

$$|H| - 1 = |U| - k \leq |U| - 2, \quad \text{tedy je } |H| \leq |U| - 1$$

Na druhé straně musí mít každý souvislý graf alespoň $|U| - 1$ hran, což dokazuje požadovaný vztah.

(d) \Rightarrow (e) Postupujeme sporem. Mějme souvislý graf G , pro který platí $|H| = |U| - 1$, a předpokládejme, že G obsahuje kružnici $K = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$. Označme $G_k = \langle H_k, U_k \rangle$ podgraf tvořený touto kružnicí, pak platí $|H_k| = |U_k|$. Je-li $k < |U|$, pak díky souvislosti grafu G musí existovat uzel $u_{k+1} \in U - U_k$ spojený hranou h_{k+1} s některým z uzlů podgrafu G_k . Pro podgraf $G_{k+1} = G_k \cup \{h_{k+1}\} = \langle H_{k+1}, U_{k+1} \rangle$ platí stále $|H_{k+1}| = |U_{k+1}|$. Takto postupujeme až do zahrnutí všech uzlů do podgrafu $G_n = \langle H_n, U \rangle$, takže je $|H| \geq |H_n| = |U|$ – to je ale spor s předpokladem $|H| = |U| - 1$.



Obrázek 3.14: Strom maximálních cest grafu

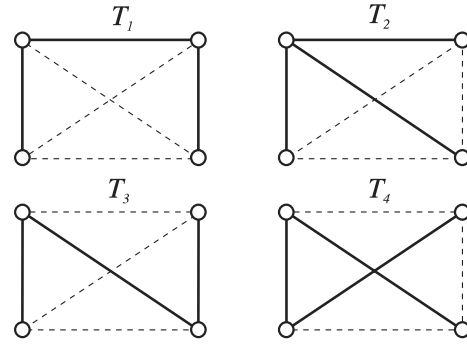
(e) \Rightarrow (f) Pokud dokážeme souvislost grafu G , bude stromem a díky části (b) přidáním libovolné hrany vytvoříme kružnici. Nechť tedy graf G splňuje podmínku (e) a má celkem $k(\geq 1)$ komponent $G_i = \langle H_i, U_i \rangle$. Každá komponenta G_i je nutně stromem, takže platí $|H_i| = |U_i| - 1$. Po sečtení v jednotlivých komponentách bude celkový počet hran $|H| = |U| - k = |U| - 1$, takže je $k = 1$ a graf G je souvislý.

(f) \Rightarrow (a) Musíme dokázat souvislost grafu G . Zvolme libovolnou dvojici nesousedních uzlů u, v , přidáním hrany $[u, v]$ vznikne podle předpokladu kružnice. To ale může nastat jen tehdy, jsou-li uzly u a v spojeni cestou. \triangle

Cyklomatické číslo a hodnost grafu

Definice 3.27: Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je souvislý graf a $T = \langle H_v, U \rangle$ jistá kostra grafu G . Hrany kostry T nazýváme **větvemi grafu** G a zbývající hrany $H_t = H - H_v$ nazýváme **tětivami grafu** G vzhledem ke kostře T .

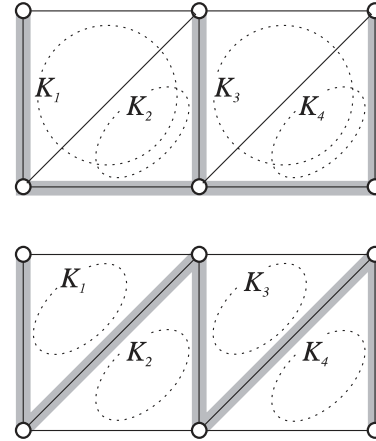
V důsledku části (d) předchozí věty má každý souvislý graf právě $|U| - 1$ větví, a tudíž zbývajících $|H| - |U| + 1$ hran jsou tětivy. Mezi kostrami a kružnicemi grafu existuje souvislost vyplývající z toho, že přidáním libovolné tětivy ke kostře vznikne podle tvrzení (f) předchozí věty právě jedna kružnice.



Obrázek 3.15: Kostry grafu

Definice 3.28: Nechť $H_t = \{h_1, h_2, \dots, h_{|H|-|U|+1}\}$ je množina tětiv souvislého grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ vzhledem ke kostře T . Pro každé $i = 1, 2, \dots, |H| - |U| + 1$ označme K_i kružnici, která vznikne přidáním tětivy h_i ke kostře T . Systém kružnic $\{K_1, K_2, \dots, K_{|H|-|U|+1}\}$ pak nazýváme **fundamentální soustavou kružnic grafu** G vzhledem ke kostře T .

Z textu před definicí plyne její korektnost, pro různé kostry dostaneme obecně různé fundamentální soustavy kružnic. Pro každou soustavu však bude stejný počet kružnic, které ji tvoří – tento počet patří mezi důležité charakteristiky grafu. Na obr. 3.16 ukazujeme dvě různé kostry grafu a jim odpovídající fundamentální soustavy kružnic. Fundamentální soustavu lze sestavit i pro nesouvislý graf tak, že vyjdeme z koster jednotlivých komponent a k nim vytvoříme fundamentální soustavy kružnic. Má-li graf p komponent, mají jejich kostry celkem $|U| - p$ hran a v grafu zbývá $|H| - |U| + p$ tětiv – to je tedy počet kružnic fundamentální soustavy obecného grafu.



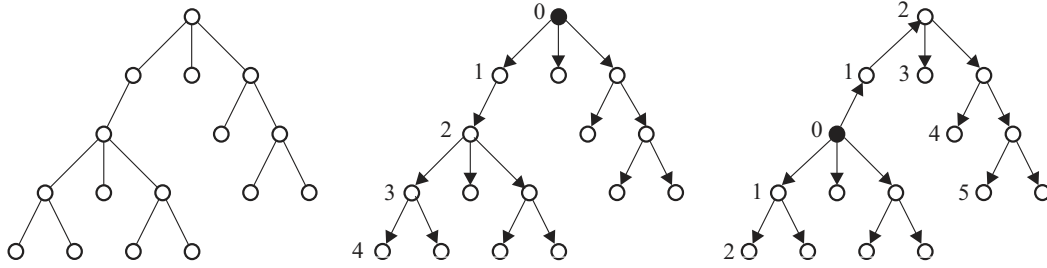
Obrázek 3.16: Fundamentální soustavy kružnic

Definice 3.29: Nechť $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ je graf o p komponentách. Potom čísla

$$h(G) = |U| - p, \quad \text{resp.} \quad (3.15)$$

$$\mu(G) = |H| - |U| + p \quad (3.16)$$

nazýváme **hodností grafu** G , resp. **cyklomatickým číslem grafu** G .



Obrázek 3.17: Kořenový strom a uspořádané stromy

Cyklomatické číslo grafu je tedy rovno počtu jeho třetiv vzhledem k libovolné kostře a udává vlastně minimální možný počet hran, jejichž odebráním lze z grafu odstranit všechny kružnice. Vzhledem k tomu, že při přechodu k izomorfnímu grafu zůstávají cyklomatické číslo i hodnota grafu (a stejně tak nezávislost, klikovost, chromatické číslo a dominance grafu) nezměněny, nazýváme tato čísla také **charakteristickými čísly grafu**.

Věta 3.30: Nechť G je souvislý graf a G_1 je jeho podgraf. Pak je G_1 podgrafem jisté kostry T grafu G právě tehdy, když G_1 neobsahuje kružnice.

Důkaz: 1. Nechť $G_1 \subseteq T$. Pak G_1 nemůže obsahovat kružnice, neboť ani T je neobsahuje.
2. Nechť $G_1 \subseteq G$ neobsahuje kružnice; zvolme libovolnou kostru T' grafu G . Podgraf $G' = T' \cup G_1$ je souvislým faktorem grafu G , může však obsahovat kružnice. V tom případě vybereme jednu z kružnic a označíme ji K . Kružnice K musí nutně obsahovat nějakou hranu $h \notin G_1$, neboť G_1 neobsahuje kružnice. Graf $G' - \{h\}$ je stále souvislým faktorem (podle věty 2.16) grafu G a navíc je $G_1 \subseteq G' - \{h\}$. Takto postupujeme tak dlouho, až vyloučíme všechny kružnice, a získáme tak kostru požadované vlastnosti. \triangle

Kořenové stromy

Nyní shrneme ještě základní údaje o orientovaných stromech a kostrách orientovaných grafů. Definice kostry orientovaného grafu je stejná jako pro neorientovaný graf, takže v tomto ohledu není orientace hran uvažována. Rovněž vlastnosti orientovaných stromů týkající se jejich počtu uzlů a hran zůstávají stejné, takže považujeme pojmy cyklomatického čísla $\mu(G)$ a hodnoty $h(G)$ orientovaného grafu G za definované vztahy v definici 3.29, v níž figuruje neorientovaný graf vzniklý z G zrušením orientace.

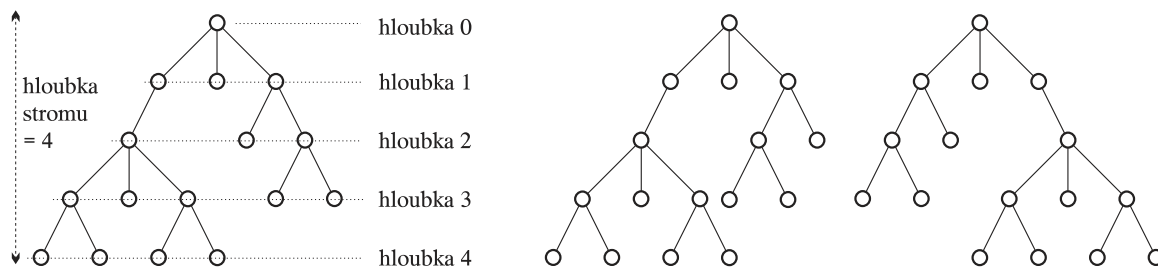
Je samozřejmé, že vlastnosti neorientovaných stromů nelze mechanicky přenést i na orientované stromy pouhým dosazením odpovídajících pojmů teorie orientovaných grafů. Za orientovaný strom totiž obecně považujeme jakýkoliv orientovaný graf, z něhož vznikne zrušením orientace strom. Jako negativní příklad můžeme uvést tvrzení (b) věty 3.26 v neplatném „orientovaném“ znění:

Graf G je orientovaným stromem právě tehdy, když mezi každými jeho dvěma uzly existuje právě jediná orientovaná cesta.

Abychom mohli požadovat existenci orientovaných cest, musíme jeden uzel orientovaného stromu odlišit od ostatních a spokojit se s existencí (jedinečné) orientované cesty z tohoto uzlu do libovolného jiného. Tak se dostáváme k velmi užitečnému pojmu kořenového stromu.

Definice 3.31: **Kořenovým stromem s kořenem u** nazýváme takový orientovaný strom T , ve kterém je každá cesta spojující uzel u s libovolným uzlem x orientovanou cestou. Délku cesty z kořene do uzlu x nazýváme **hloubkou uzlu x** v kořenovém stromu T a značíme $hl_T(x)$. **Hloubkou $hl(T)$ stromu T** rozumíme maximální hloubku nějakého jeho uzlu.

Je zřejmé, že výběrem kořene u v neorientovaném stromu je jednoznačně určena odpovídající orientace hran v kořenovém stromu, a nemusíme ji proto na diagramech kořenových



Obrázek 3.18: Uspořádané stromy

stromů znázorňovat. Pro vyjádření toho, že uzel u je kořenem kořenového stromu T , používáme označení T_u .

Na obr. 3.17 ukazujeme dvě z možných voleb kořene v neorientovaném stromu, jim odpovídající kořenové stromy s vyznačením orientace hran a hloubky některých uzlů. Je vidět, že každý uzel kořenového stromu kromě kořene má právě jednoho předchůdce, zatímco následníků může mít libovolný počet (včetně žádného). Tato vlastnost dokonce kořenové stromy plně charakterizuje.

Zavedení kořenových stromů nabízí možnost zabývat se u orientovaných souvislých grafů otázkou existence, popř. jednoznačnosti kostry, která by byla kořenovým stromem – budeme ji nazývat **kořenovou kostrou** daného orientovaného grafu. Podmínku její existence lze formulovat velmi snadno.

Věta 3.32: V orientovaném grafu $G = \langle H, U, \varrho \rangle$ existuje kořenová kostra T_u s kořenem u právě tehdy, když platí

$$\Gamma^*(u) = U \quad (3.17)$$

Důkaz: 1. Je-li $T_u \subseteq G$ kořenová kostra, pak je vztah (3.17) vyjádřením základní vlastnosti kořenového stromu T_u podle definice 3.31.

2. Nechť platí vztah (3.17), pak je G souvislý. Uvažujme jeho souvislý faktor G , který vznikne takto: Uzly grafu G rozdělíme do tříd podle jejich vzdálenosti od uzlu u :

$$U_i = \{v \in U : d(u, v) = i\}, \quad i = 0, 1, \dots, s. \quad (3.18)$$

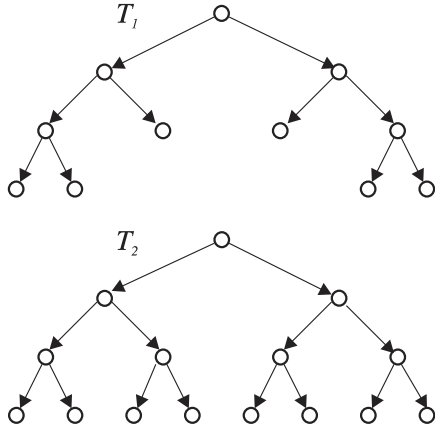
U každého uzlu ze třídy U_i ponecháváme jen jedinou vstupní hranu, která do něj vede z nějakého uzlu třídy U_{i-1} (pro $i = 1, 2, \dots, s$) – taková hrana musí podle definice tříd U_i vždy existovat. Tím je každému uzlu mimo kořene přiřazena právě jedna hrana, takže vzniklý faktor G , má $|U| - 1$ hran, a je tedy hledaným kořenovým stromem. \triangle

Všichni následníci uzlu v kořenovém stromu byli až dosud rovnocenní. Často je však užitečné následníky uspořádat, potom rozlišujeme prvního, druhého až i -tého následníka uzlu a příslušný kořenový strom nazýváme **uspořádaným stromem**. Při znázornění uspořádaného stromu vyjadřujeme pořadí následníků jejich umístěním zleva doprava. Na obr. 3.18 ukazujeme trojici izomorfních kořenových stromů, které jsou však různé jakožto uspořádané stromy.

Pravidelné a binární stromy

S ohledem na počítačovou reprezentaci jsou zajímavé takové kořenové stromy, kde má každý vnitřní uzel stejný počet následníků. Tato vlastnost totiž dovoluje zvolit homogenní datovou reprezentaci vnitřních uzlů jakožto záznamu s pevným počtem složek. Ukážeme nejprve některé vlastnosti takových stromů bez uvažování možnosti uspořádání následníků a posléze se věnujeme (uspořádaným) binárním stromům, které mají pro svou jednoduchost a univerzálnost největší význam.

Definice 3.33: Pro přirozené $r (\geq 1)$ nazýváme **pravidelným stromem stupně r** kořenový strom T_u , jehož každý uzel má výstupní stupeň 0 nebo r . **Úplným pravidelným stromem** hloubky k nazýváme pravidelný strom, ve kterém je hloubka každého jeho listu rovna k .



Obrázek 3.19: Pravidelné stromy

Na obr. 3.19 ukazujeme pravidelný strom T_1 stupně 2 hloubky 3 a úplný pravidelný strom T_2 stupně 2 hloubky 3. Při znalosti stupně r je struktura pravidelného stromu zřetelná i při vynechání orientace hran – kořen má (neorientovaný) stupeň r , ostatní vnitřní uzly mají stupeň $r + 1$ a listy stupeň 1. Za pravidelný strom můžeme tedy považovat i odpovídající neorientovaný strom. Pro přehlednost však budeme kořen i na diagramech pravidelných stromů umísťovat zásadně nahoru. Následující dvě jednoduchá tvrzení o pravidelných stromech stupně 2 uvedeme bez důkazů (provedly by se snadno indukci).

Věta 3.34: Pro libovolné přirozené číslo n existuje pravidelný strom stupně 2 s právě n listy.

Je zřejmé, že pro zadané n lze sestavit více pravidelných stromů stupně 2 s n listy – na obr. 3.20 ukazujeme např. čtyři strukturálně značně odlišné pravidelné stromy stupně 2 s osmi listy. Ukážeme nyní, co mají tyto stromy společného.

Věta 3.35: Pravidelný strom stupně 2 s n listy obsahuje $n - 1$ vnitřních uzlů (včetně kořene) a $2(n - 1)$ hran.

V definici kořenového stromu je zakotven požadavek dostupnosti jednotlivých uzlů stromu z kořene, určitým měřítkem dostupnosti je přitom hloubka stromu. Důkladnější srovnání však v tomto směru dovolují charakteristiky, které nyní zavedeme.

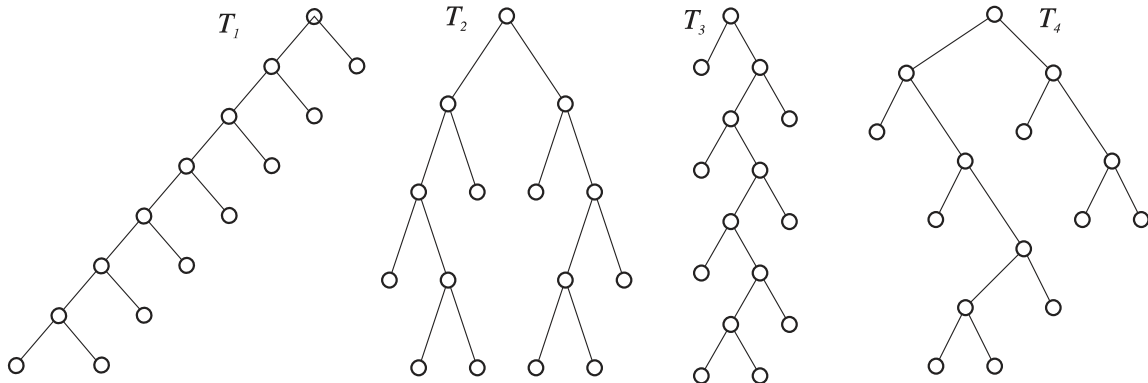
Definice 3.36: Pro kořenový strom T_u nazýváme jeho **vnější délkou** $E(T_u)$, resp. **vnitřní délkou** $I(T_u)$ čísla určená vztahy

$$E(T_u) = \sum_{v \in U_e} hl(v)$$

$$I(T_u) = \sum_{v \in U_i} hl(v),$$

kde U_e je množina listů a $U_i = U - U_e$ je množina vnitřních uzlů stromu T_u .

Pro stromy na obr. 3.20 budou mít vnější a vnitřní délky následující hodnoty:



Obrázek 3.20: Pravidelné stromy stupně 2 s 8 koncovými uzly

$$\begin{array}{llll} E(T_1) & = & 35 & E(T_2) & = & 26 & E(T_3) & = & 35 & E(T_4) & = & 27 \\ I(T_1) & = & 21 & I(T_2) & = & 12 & I(T_3) & = & 21 & I(T_4) & = & 13 \end{array}$$

Není obtížné poznat, že mezi vnitřní a vnější délkou pravidelných stromů stupně 2 (a jistě i pravidelných stromů obecně) existuje vzájemná závislost.

Věta 3.37: Necht E , resp. I je vnější, resp. vnitřní délka pravidelného stromu stupně r o n vnitřních uzlech. Potom platí

$$E = I \cdot (r - 1) + r \cdot n \quad (3.19)$$

Důkaz: (indukcí podle počtu vnitřních uzlů)

1. Strom tvořený jediným uzlem (listem) nemá žádný vnitřní uzel, tedy nulovou vnitřní i vnější délku – tvrzení věty pro něj zjevně platí.

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro pravidelné stromy stupně r mající $n(\geq 0)$ vnitřních uzlů. Necht T je pravidelný strom stupně r , který má $n + 1$ vnitřních uzlů, a buď E , resp. I jeho vnější, resp. vnitřní délka. Zvolíme libovolný vnitřní uzel v , jehož všichni následníci jsou listy stromu (takový uzel musí existovat alespoň jeden), a tyto listy ze stromu odebereme (viz obr. 3.21). Vzniklý pravidelný strom T' stupně r má jen n vnitřních uzlů a pro jeho délky platí

$$E' = E + h - r \cdot (h + 1), \quad I' = I - h,$$

kde h je hloubka uzlu v ve stromu T . Podle indukčního předpokladu tak dostáváme

$$\begin{aligned} E + h - r \cdot (h + 1) &= (I - h) \cdot (r - 1) + r \cdot n \\ E &= -h + rh + r + I \cdot (r - 1) - hr + h + rn \\ E &= I \cdot (r - 1) + r \cdot (n + 1) \end{aligned}$$

takže tvrzení platí i pro stromy s $n + 1$ vnitřními uzly. \triangle

Z uvedeného tvrzení vyplývá, že pravidelný strom s minimální vnitřní délkou má současně minimální vnější délku a totéž platí i naopak. Pro pravidelné stromy stupně 2 s n vnitřními uzly (a tedy $n + 1$ listy) dostáváme speciálně

$$E = I + 2n, \quad (3.20)$$

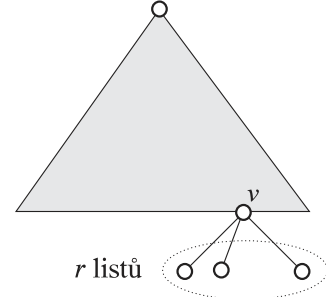
takže průměrná vzdálenost listu

od kořene je rovna $E/(n + 1)$, průměrná vzdálenost vnitřních uzlů je $I/n = E/n - 2$.

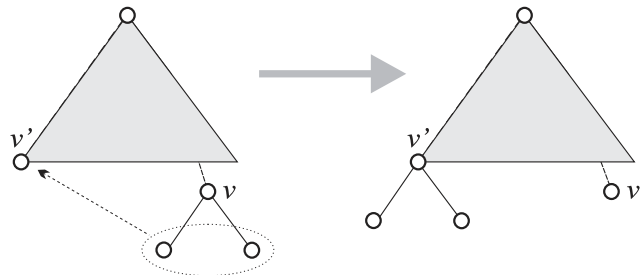
Vzniká otázka, jak vypadá pravidelný strom s n vnitřními uzly, pro který jsou tyto hodnoty minimální – stačí hledat strom s minimální vnitřní délkou. Intuitivně je zřejmé, že minimální vnější délku má každý úplný pravidelný strom. Má-li hloubku k a stupeň r , je počet jeho vnitřních uzlů n_i , resp. počet vnějších uzlů n_e dán vztahy

$$n_i = \frac{r^k - 1}{r - 1}, \quad n_e = r^k \quad (3.21)$$

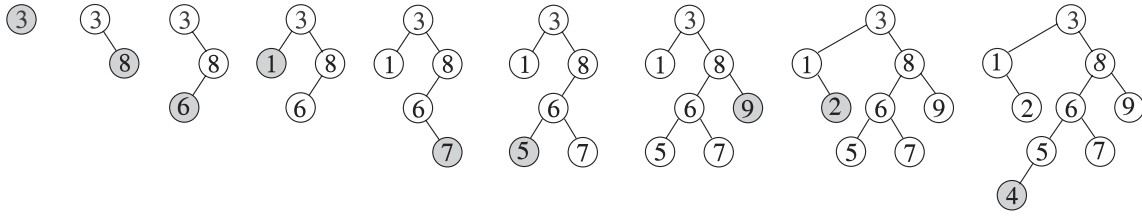
Pro obecně zadaný počet vnitřních uzlů n má zřejmě minimální vnitřní délku strom, velmi podobný úplnému pravidelnému stromu – jeho charakteristiku podává následující tvrzení.



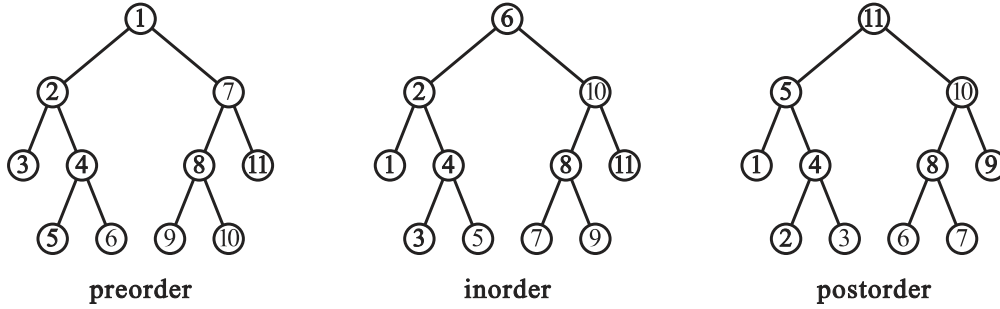
Obrázek 3.21: K důkazu věty o délkách



Obrázek 3.22: K důkazu věty 3.38



Obrázek 3.23: Binární strom řazení



Obrázek 3.24: Systematický průchod binárním stromem

Věta 3.38: Pravidelný strom T_u s počtem vnitřních uzlů n má minimální vnitřní (i vnější) délku právě tehdy, pokud pro každý jeho list v platí

$$k - 1 \leq hl(v) \leq k, \quad (3.22)$$

kde $k = hl(T_u)$ je hloubka stromu T_u .

Důkaz: Uvažujme transformaci pravidelného stromu způsobem naznačeným pro strom stupně 2 na obr. 3.22 – r listů se společným předchůdcem v přemístíme na jiné místo stromu jako následníky (dříve koncového) uzlu v' . Touto transformací se nezmění počet listů stromu a jeho vnitřní délka se zmenší o rozdíl hloubek $hl(v) - hl(v')$. Nechť T je strom s minimální vnitřní délkou, potom T splňuje podmínku (3.22). Kdyby totiž existoval uzel v' s hloubkou $k - 2$, pak bychom mohli popsanou transformací získat strom s menší vnitřní délkou.

Nechť naopak T splňuje (3.22) a mějme strom T' se stejnou množinou uzlů a minimální vnitřní délkou – podle první části důkazu T' rovněž splňuje (3.22). Je-li $T' = T$, jsme hotovi, jinak převedeme T na T' opakovaným použitím uvedené transformace beze změny vnitřní délky. \triangle

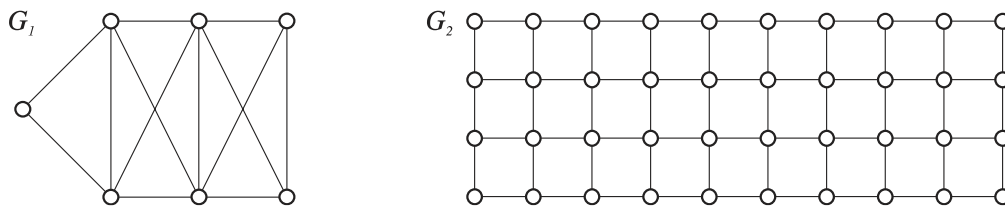
Uvažujme nyní uspořádané pravidelné stromy, ve kterých může libovolný následník uzlu (a s ním i celý odpovídající podstrom) chybět. Každý uzel má tedy nejvýše r následníků, přičemž každý z nich má přiřazeno jednoznačné pořadové číslo 1 až r . V informatice mají z těchto stromů největší využití binární stromy, které zavedeme pomocí rekurzivní definice.

Definice 3.39: Binární stromem nazýváme strukturu nad konečnou množinou uzlů, která

- (a) neobsahuje žádný uzel, nebo
- (b) je tvořena třemi disjunktními množinami uzlů: kořenem, binárním stromem označovaným jako **levý podstrom** a binárním stromem označovaným jako **pravý podstrom**.

Na obr. 3.23 ukazujeme postup vytváření binárního stromu při řazení posloupnosti čísel $\langle 3, 8, 6, 1, 7, 5, 9, 2, 4 \rangle$. Jednotlivé hodnoty se přidávají do stromu tak, aby na každé úrovni platilo, že hodnota v kořeni není menší než žádná hodnota v levém podstromu a současně není větší než žádná hodnota v pravém podstromu.

Při systematickém procházení binárního stromu se v souladu s definicí nabízí využít rekurzivně definovaného postupu v následujících třech variantách:



Obrázek 3.25: Příklady grafů ke cvičení

- preorder** – zpracuje se kořen, projde se levý podstrom a potom se projde pravý podstrom
inorder – projde se levý podstrom, zpracuje se kořen a potom se projde pravý podstrom
postorder – projde se levý podstrom, projde se pravý podstrom a potom se zpracuje kořen

Procházení podstromů se samozřejmě provádí vždy podle téhož pravidla. Na obr. 3.24 ukazujeme pořadí zpracování uzlů při procházení binárního stromu každým z uvedených tří postupů. Jedná-li se o strom řazení, pak se procházením v pořadí inorder získá (vzestupně) seřazená posloupnost.

Velmi užitečnou vlastností binárních stromů je skutečnost, že jimi lze reprezentovat jakýkoliv les, t.j. posloupnost obecných stromů (speciálně tedy i libovolný strom). Při přechodu od lesu k binárnímu stromu se na všech úrovních propojí horizontálními hranami zleva doprava všichni následníci téhož uzlu a vypustí se všechny svislé hrany s výjimkou hrany od kořene k prvnímu následníkovi.

Uvedený přechod nyní popíšeme formálně. Nechť $L = \langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$ je les. Binární strom $B(L)$ odpovídající lesu L je definován následujícími pravidly:

- je-li $n = 0$, je strom $B(L)$ prázdný
- je-li $n > 0$, je kořenem stromu $B(L)$ kořen stromu T_1 , levým podstromem stromu $B(L)$ je $B(T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1m})$, kde $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1m}$ jsou podstromy kořene stromu T_1 , a pravým podstromem stromu $B(L)$ je $B(T_2, \dots, T_n)$.

Cvičení

3.2-1. Jsou čtyři kandidáti A, B, C, D na funkci předsedy a místopředsedy šachového klubu. Vyjádřete pomocí stromu všechny možnosti, jak může volba dopadnout.

3.2-2. Určete všechny neizomorfní stromy s nejvýše pěti hranami.

3.2-3. Kolik hran je třeba odstranit z grafu G_1 na obr. 3.25, aby vznikla kostra?

3.2-4. Kolik může mít maximálně, resp. minimálně listů neorientovaný strom o n uzlech?

3.2-5. Kolika tahy lze pokrýt graf G_2 na obr. 3.25? Nalezněte takovou jeho kostru, aby ji bylo možné pokrýt co nejmenším počtem tahů.

3.2-6. Určete všechny kostry úplného grafu o čtyřech uzlech. Pro každou kostru určete odpovídající fundamentální soustavu kružnic.

3.2-7. Ve stromu o m hranách provedeme náhodným způsobem orientaci hran. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne kořenový strom?

3.2-8. Máme úplný neorientovaný graf, jehož hrany náhodně orientujeme. Dokažte, že tento graf má kořenovou kostru.

3.2-9. Máme neorientovaný graf, který není úplný. Ukažte, že je možné zvolit takovou orientaci jeho hran, že vzniklý graf nemá žádnou kořenovou kostru.

3.2-10. Určete, jak se mohou změnit charakteristická čísla $h(G), \mu(G), \alpha(G), \beta(G), \chi(G)$, jestliže z G vypustíme nějakou jeho hranu.

3.2-11. Tenisového turnaje hraného vylučovacím způsobem se účastní 19 hráčů. Určete schéma průběhu turnaje tak, aby se co nejméně lišil počet zápasů, které musí každý hráč sehrát pro případné vítězství v turnaji. Kolik zápasů bude celkem sehráno? Změní se tento počet, jestliže budou někteří hráči nasazeni přímo do třetího kola? Kolik zápasů se odehraje v turnaji se 65 hráči a kolik bude kol?

3.2-12. Upravte tvrzení vět 3.34 a 3.35 pro pravidelné stromy stupně r a dokažte je.

3.2-13. Určete vnitřní a vnější délku úplného pravidelného stromu stupně r hloubky k .

3.2-14. Potvrďte nebo vyvráťte následující tvrzení: Při procházení binárního stromu libovolným ze způsobů (preorder, inorder, postorder) se listy stromu zpracovávají ve stejném relativním pořadí.

3.2-15. Uvažujte následující metodu procházení binárním stromem: zpracuje se kořen, projde se pravý podstrom, projde se levý podstrom. Má tato metoda nějaký jednoduchý vztah k některému ze způsobů preorder, inorder nebo postorder?

3.2-16. Ukažte, že je-li dáno jak preorder tak inorder pořadí uzlů binárního stromu, je možné daný strom rekonstruovat. Je možná rekonstrukce při zadání pořadí inorder, postorder nebo pořadí preorder, postorder?

3.2-17. Nalezněte binární stromy, jejichž uzly se projdou ve stejném pořadí při průchodech:

- (a) preorder a inorder (b) preorder a postorder (c) inorder a postorder

3.2-18. Uvažujme následující zobecnění systematického průchodu binárním stromem T (symboly $L(T)$, resp. $P(T)$ označujeme levý, resp. pravý podstrom stromu T):

- $\alpha\beta$ -inorder – proved' α , projdi $L(T)$, zpracuj kořen, projdi $P(T)$, proved' β
 $\alpha\beta$ -preorder – proved' α , zpracuj kořen, projdi $L(T)$, projdi $P(T)$, proved' β ,
 $\alpha\beta$ -postorder – proved' α , projdi $L(T)$, projdi $P(T)$, zpracuj kořen, proved' β .

(a) Simulujte průchod úplným binárním stromem hloubky 2 (tzn. sedmi uzly) každým z uvedených způsobů. Uzly jsou očíslovány v pořadí standardního průchodu stromem v pořadí inorder, při operaci α se má tisknout znak '(', při operaci β znak ')', při zpracování kořene se tiskne číslo uzlu.

(b) Proveďte totéž jako v případě (a) s tím, že prochází binární strom řazení vzniklý postupným vkládáním čísel z posloupnosti 4,2,5,1,7,3,6.

(c) Je možné jednoznačně rekonstruovat strukturu výchozího stromu pomocí některého ze získaných výstupů?

3.2-19. Zvažte pravdivost tvrzení: Posloupnost d_1, d_2, \dots, d_n je souborem stupňů (neorientovaného) stromu právě tehdy, je-li $d_1 \geq 1$ a dále

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

3.2-20. Dokažte, že v libovolném stromu obsahujícím alespoň jednu hranu existují nejméně dva uzly stupně 1.

3.3 Separabilita a planarita

V tomto odstavci se věnujeme stručně problematice, kterou je možnou považovat za nejvíce „grafovou“. Je tomu tak jednak proto, že otázky planarity vycházejí z grafického vyjádření (diagramu) grafu, ale především pak díky tomu, že právě v souvislosti s planárními grafy byla formulována dlouho nepotvrzená **hypotéza čtyř barev**, jež vyvolala u mnoha matematiků zájem o teorii grafů, a napomohla tak k jejímu rozvoji.

Tato hypotéza se objevila zhruba v polovině 19. století a týká se možnosti úsporného obarvení politické mapy. Stanoví, že každou mapu lze obarvit s použitím nejvýše čtyř barev tak, aby dvě sousedící země nebyly obarveny stejnou barvou (mapu každé země představuje souvislá oblast v rovině, za sousední se považují země mající společnou hranici nenulové délky). Namísto mapy můžeme uvažovat planární graf vzniklý tak, že uzly představují jednotlivé oblasti a hrany sousednost oblastí (viz obr. 3.26). Problém čtyř barev lze tedy ekvivalentně formulovat tak, zda libovolný planární graf má barevnost nejvýše rovnou čtyřem.

Problém barevnosti planárních grafů přitahoval k teorii grafů pozornost mnoha generací matematiků. Roku 1890 se podařilo dokázat, že chromatické číslo planárního grafu je nejvýše 5 a od té doby byly postupně zeslabovány postačující podmínky pro obarvitelnost planárního grafu čtyřmi barvami. Teprve roku 1976 se však podařilo uvedenou hypotézu dokázat v plné šíři a je zajímavé, že přitom sehrálo důležitou roli použití počítače. Prověřil totiž ručně nezvládnutelný počet zhruba 1900 různých případů, pro něž bylo třeba nalézt vhodné obarvení čtyřmi barvami.

Otázky související s planaritou se vyskytují v různé podobě i v technické praxi. Jako příklad můžeme uvést návrh jednovrstvého tištěného spoje. Dříve než se stručně budeme věnovat základním vlastnostem planárních grafů, zavedeme některé pojmy, které mají širší použitelnost.

Hranové řezy

Je-li graf modelem nějaké komunikační sítě, může nás zajímat otázka, zda při odebrání podmnožiny hran (tj. výpadku odpovídajících linek) bude síť nadále schopna zajistit spojení mezi všemi dvojicemi uzlů. Jak pro danou síť určíme mohutnost a složení minimálních podmnožin linek, jež mohou způsobit narušení její souvislosti? Tato otázka vede k zavedení pojmu hranového řezu.

Definice 3.40: Hranovým řezem grafu $G = \langle H, U \rangle$ rozumíme takovou minimální množinu jeho hran $S \subseteq H$, pro niž platí

$$h(G - S) = h(G) - 1. \quad (3.23)$$

Minimálnost množiny S se zde chápe tak, že nesmí existovat žádná vlastní podmnožina $S' \subset S$, pro kterou rovněž platí vztah (3.23). Všimněme si nyní blíže struktury hranových řezů. Jediná hrana může tvořit hranový řez právě tehdy, není-li obsažena v žádné kružnici grafu. Pro další charakterizaci zavedeme nový pojem.

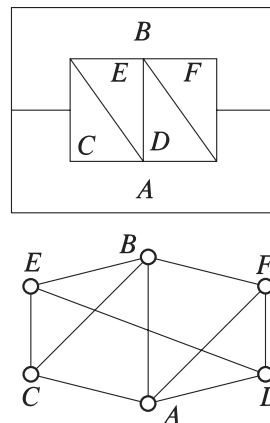
Definice 3.41: Uzel u nazýváme **artikulací** grafu G , jestliže podgraf $G - \{u\}$ má více komponent než graf G .

Odebrání uzlu u z grafu se dotkne pouze té komponenty, v níž je uzel u obsažen, na struktuře (a počtu) ostatních komponent se nic nezmění. Můžeme se tedy beze ztráty obecnosti zabývat artikulacemi a hranovými řezy souvislých grafů s neprázdnou množinou hran. Ani případná existence rovnoběžných hran nebo smyček nehraje roli, takže se v tomto odstavci omezíme na obyčejné grafy.

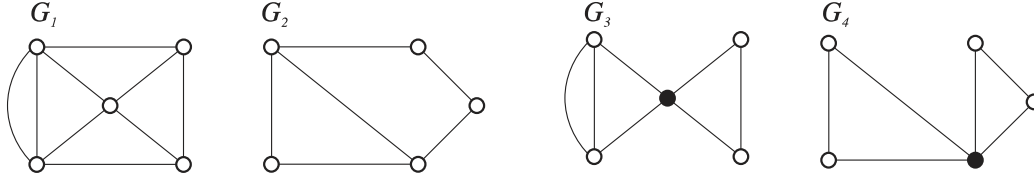
Věta 3.42: Množina hran incidujících s uzlem u souvislého grafu $G = \langle H, U \rangle$ tvoří hranový řez grafu G právě tehdy, není-li uzel u artikulací grafu G .

Důkaz: Označme S (neprázdnou) množinu hran incidujících s uzlem u . Grafy $G - S$ a $G - \{u\}$ jsou shodné až na to, že první obsahuje navíc izolovaný uzel u . Nechť p je počet komponent grafu $G - \{u\}$. Potom platí

$$h(G - \{u\}) = (|U| - 1) - p = |U| - (p + 1) = h(G - S),$$



Obrázek 3.26: Mapa a její graf



Obrázek 3.27: Separabilita grafu

takže platí $p = h(G) - h(G - S)$.

Je-li $p = 1$, pak je S hranový řez a u není artikulací grafu G . Je-li $p > 1$, pak S není hranovým řezem a u je artikulací grafu G . \triangle

Věta 3.43: Podmnožina hran $S \subseteq H$ souvislého grafu $G = \langle H, U \rangle$ je jeho hranovým řezem právě tehdy, je-li minimální množinou hran, která obsahuje alespoň jednu větev každé kostry grafu G .

Důkaz: Nechť S je minimální množinou obsahující alespoň jednu hranu každé kostry grafu G . Pak faktor $G - S$ neobsahuje žádnou kostru grafu G , a tedy je tvořen právě dvěma komponentami (ověřte!). Hodnota $G - S$ je tedy o 1 menší než $h(G)$, takže S je hranový řez. Druhá část tvrzení se dokáže sporem. \triangle

Z důkazu předchozí věty lze získat nový pohled na hranové řezy souvislého grafu: Nechť rozklad $\{U_1, U_2\}$ množiny uzlů grafu G je takový, že podgrafy indukované množinami U_1 a U_2 jsou souvislé. Potom tvoří podmnožina hran

$$H(U_1 \square U_2) = \{h = [u, v] \in H : (u \in U_1) \& (v \in U_2)\}$$

(tzn. hran s jedním krajním uzlem v U_1 a druhým v U_2) hranový řez grafu G . Ukážeme, jak lze snadno získat takové rozklady $\{U_1, U_2\}$.

Zvolme libovolnou kostru T grafu G ; nechť $\{h_1, h_2, \dots, h_{|U|-1}\}$ jsou větve této kostry. Potom $\{h_i\}$ pro libovolné $i = 1, 2, \dots, |U| - 1$ představuje hranový řez kostry T , a indukuje tedy rozklad $\{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}\}$ potřebných vlastností. Nyní již stačí položit $S_i = H(U_1^{(i)} \square U_2^{(i)})$ a získáme hranový řez grafu G .

Lemma 3.44: Každý hranový řez souvislého grafu má s libovolnou kružnicí tohoto grafu sudý počet společných hran.

Důkaz: Provedeme rozklad uzlů množiny $\{U_1, U_2\}$ indukovaný daným hranovým řezem. Pokud všechny uzly nějaké kružnice K neleží v jediné z podmnožin U_1 , resp. U_2 , pak zvolíme její libovolný uzel $u \in U_1$ a od tohoto uzlu počínaje procházíme postupně všemi hranami kružnice K . Pro každou hranu, po níž přejdeme z množiny U_1 do množiny U_2 , musí existovat hrana vedoucí z U_2 do U_1 , přičemž obě takové hrany patří do zadaného hranového řezu. \triangle

Motivaci, která vedla k zavedení hranového řezu (tzn. porušení souvislosti odebráním hran), je možné použít i pro případ uzlů. I když zde nebudeme pojem uzlového řezu grafu zavádět, všimneme si speciálního případu, kdy k porušení souvislosti grafu stačí odebrat jediný uzel.

Definice 3.45: Graf G nazýváme **neseparabilním**, jestliže každý jeho podgraf $G_1 \subseteq G$ obsahující alespoň jednu hranu má se zbytkem $G - G_1$ společně nejméně dva uzly. Každý jiný graf nazýváme **separabilním**.

Nesouvislý graf je tedy nutně separabilní, pro souvislý graf znamená separabilita existenci takového uzlu u , pro který lze G rozložit na vlastní podgrafy G_1 a $G_2 = G - G_1$, mající společný právě jen uzel u . Uzel s touto vlastností je ale artikulací grafu G . Na obr. 3.27 ukazujeme dva neseperabilní grafy (G_1, G_2) a dva separabilní souvislé grafy (G_3, G_4) , v nichž jsou vyznačeny

všechny artikulace. Určovat separabilitu grafu znamená tedy hledat jeho artikulace. Uvedeme nyní některá tvrzení, která artikulaci blíže charakterizují.

Věta 3.46: Uzel u je artikulací souvislého grafu G právě tehdy, pokud existuje dvojice uzlů x, y taková, že každá cesta spojující tyto dva uzly obsahuje uzel u .

Důkaz: 1. Nechť u je artikulace. Potom podgraf $G - \{u\}$ obsahuje nejméně dvě komponenty G_1, G_2 . Vybereme-li libovolnou dvojici uzlů $x \in U(G_1), y \in U(G_2)$, pak tyto uzly mají požadovanou vlastnost.

2. Nechť naopak každá cesta mezi jistými uzly x a y obsahuje uzel u . Potom podgraf $G - \{u\}$ není souvislý, a obsahuje tedy více komponent než graf G . To však znamená, že u je artikulací grafu G . \triangle

Věta 3.47: Souvislý graf G je separabilní právě tehdy, existují-li v něm dvě různé hrany incidující s tímž uzlem u takové, že žádná kružnice grafu G neobsahuje tyto dvě hrany. Uzel u je pak artikulací grafu G .

Důkaz: Stačí dokázat, že předpoklady věty jsou nutné a stačí pro to, aby u byl artikulací.

1. Existují-li takové dvě hrany, pak označme jejich zbývající krajní uzly x a y . Tyto uzly mají vlastnost požadovanou větou 3.46, takže u je artikulací.

2. Je-li u artikulací, pak graf $G - \{u\}$ obsahuje nejméně dvě komponenty G_1, G_2 . Zvolíme libovolně $x \in \Gamma(u) \cap U(G_1), y \in \Gamma(u) \cap U(G_2)$ – tyto uzly musí existovat díky souvislosti grafu G . Protože v $G - \{u\}$ neexistuje žádná cesta mezi uzly x, y , nemůžeme v grafu G existovat kružnice obsahující hrany $[x, u]$ a $[u, y]$. \triangle

Uvažujme nyní souvislý separabilní graf G a označme v některou z jeho artikulací. Má-li podgraf $G - \{v\}$ komponenty G_1, G_2, \dots, G_p ($p \geq 2$), pak ke každé komponentě G_i přidáme nový uzel v_i a spojíme jej hranami právě s těmi uzly z G_i , s nimiž byl uzel v spojen v grafu G . Této úpravě grafu budeme říkat **separace**. Vzniklé komponenty mohou opět obsahovat artikulace, a tak můžeme v separaci pokračovat, dokud je všechny neodstraníme. Tento proces nazýváme **úplnou separací** (separabilního) grafu na **neseparabilní komponenty** neboli **bloky**.

Planární grafy

Definice 3.48: Graf G nazveme **planárním**, pokud lze sestrojít jeho diagram v rovině tak, že žádné dvě hrany nemají kromě krajních uzlů žádné společné body. Ostatní grafy se nazývají **neplanární**.

Předpokládejme nadále, že planární graf je vyjádřen takovým diagramem, který splňuje podmínky uvedené v definici. Takový diagram rozčleňuje rovinu do několika disjunktních oblastí (pokud ovšem obsahuje alespoň jednu kružnici), a ty budeme nazývat **stěny** planárního grafu. **Vnější stěnou** rozumíme tu z nich, která je neomezená. Pomocí projekce na sféru, otočení a zpětné projekce od roviny lze vždy docílit toho, aby se libovolná ze stěn planárního grafu stala vnější.

Věta 3.49: Pro souvislý planární graf $G = \langle H, U \rangle$ platí tzv. **Eulerova formule**:

$$|H| - |U| + 2 = r, \quad (3.24)$$

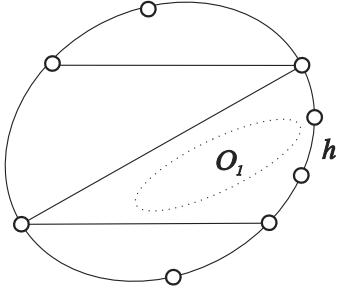
kde r značí počet stěn grafu (včetně vnější).

Důkaz: (indukcí podle počtu stěn)

1. Pro $r = 1$ se jedná o strom a tvrzení platí.

2. Nechť tvrzení platí pro grafy s počtem stěn nejvýše $r (\geq 1)$ a uvažujme planární graf G s $r + 1$ stěny. Vybereme ze stěn grafu G stěnu O_1 , která sousedí s vnější stěnou, nechť hrana h je součástí cesty, která odděluje O_1 a vnější stěnu (viz obr. 3.28). Nyní z grafu G odebereme hranu

h – tím se zmenší počet stěn v grafu G o jednu (O_1 splyne s vnější stěnou), počet hran také o jednu a počet uzlů zůstane stejný. V grafu $G - \{h\}$ bude tedy podle indukčního předpokladu platit vztah (3.24), takže máme $(|H| - 1) - |U| + 2 = (r + 1) - 1$, odkud po úpravě vychází platnost formule i pro $r + 1$ stěn. \triangle



Obrázek 3.28: K Eulerově formuli

Použitím cykломatického čísla $\mu(G)$ grafu lze Eulerovu formuli přepsat na tvar $r = \mu(G) + 1$, kdy má snadno srozumitelnou interpretaci – počet stěn planárního grafu je roven počtu nezávislých kružnic grafu zvětšenému o 1 (za vnější stěnu). Přestože Eulerova formule představuje pouze nutnou a nikoliv postačující podmínku planarity grafu, vyplývá z ní řada důsledků použitelných pro charakterizaci planarity. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat souvislost a neseparabilitu grafu, protože planaritu lze vyšetřovat odděleně pro každou komponentu a každý neseparabilní blok.

Důsledek 1: Je-li každá stěna planárního grafu $G = \langle H, U \rangle$ ohraničena kružnicí o k hranách, potom platí

$$|H| = k(|U| - 2)/(k - 2). \quad (3.25)$$

Důkaz: Každá hrana je obsažena v hranici dvou stěn, pro r stěn je třeba kr hran – platí tedy $kr = 2|H|$. Nyní stačí dosadit za r z Eulerovy formule a dostaneme (3.25). \triangle

Maximální planární graf je takový graf, jehož planarita se poruší přidáním další hrany. Využitím vlastností maximálních planárních grafů odvodíme další dvě tvrzení. Již první z nich říká, že planární grafy jsou s ohledem na počet hran **řídke**, neboť je $|H| = O(|U|)$ a nikoliv $|H| = O(|U|^2)$, jak platí u obecných grafů.

Důsledek 2: Je-li $G = \langle H, U \rangle$ planární graf, pak platí

$$|H| \leq 3|U| - 6 \quad (3.26)$$

Důkaz: Uvažujme maximální planární graf – každá jeho stěna bude již ohraničena kružnicí délky 3 (tzv. trojúhelníkem). Použitím vztahu (3.25) pro $k = 3$ a s uvažováním, že G není nutně maximální, dostáváme (3.26). \triangle

Důsledek 3: Je-li $G = \langle H, U \rangle$ planární graf bez trojúhelníků, pak platí

$$|H| \leq 2|U| - 4 \quad (3.27)$$

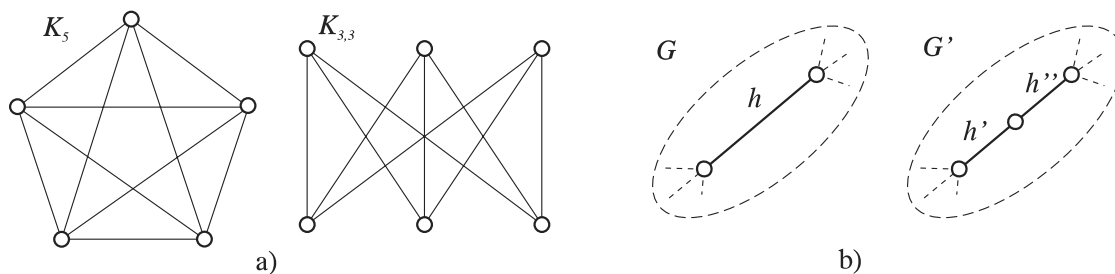
Důkaz: Maximální planární graf bez trojúhelníků bude mít všechny stěny ohraničené kružnicí délky 4 nebo 5 (kružnice délky 6 a větší by již šla rozdělit hranou bez vzniku trojúhelníku); označme počty těchto kružnic r_4 a r_5 . Potom platí $4r_4 + 5r_5 = 2|H|$, a tedy

$$r = r_4 + r_5 \leq (r_4 + 5/4r_5) = |H|/2.$$

Dosazením za r z Eulerovy formule dostáváme vztah (3.27). \triangle

Důsledek 4: Grafy K_5 a $K_{3,3}$ jsou neplanární.

Důkaz: Úplný graf o pěti uzlech má $|H| = 10$ a po dosazení do (3.26) dostáváme $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, což vylučuje planaritu. Podobně $K_{3,3}$ má $|H| = 9, |U| = 6$ a je bez trojúhelníků (je to bipartitní graf, a neobsahuje tedy kružnice liché délky), takže dosazením do (3.27) dostáváme $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$, což opět vylučuje planaritu. \triangle



Obrázek 3.29: a) Základní neplanární grafy, b) půlení a zcelování hrany

Uvedené dva grafy představují zároveň minimální neplanární grafy: K_5 má nejmenší počet uzlů (5) a $K_{3,3}$ má nejmenší počet hran (9). Ukazuje se, že tyto dva grafy hrají v souvislosti s planaritou základní roli. Abychom to mohli ukázat, budeme potřebovat **operaci půlení** a **operaci zcelování hrany** v grafu. Graf vzniklý půlením hrany h má na jejím místě cestu o dvou hranách s nově vytvořeným uzlem uprostřed. Při zcelování hrany se naopak vypustí uzel stupně dva a dvojice hran s ním incidentujících se nahradí hranou jedinou (je to opačná operace k půlení hrany) – viz obr. 3.29b.

Definice 3.50: Grafy G_1 a G_2 nazveme **homeomorfními** (zapisujeme $G_1 \sim G_2$), jestliže jsou buď izomorfní, nebo je-li možné konečným počtem půlení hran v těchto grafech dosáhnout toho, že vzniklé grafy jsou izomorfní.

Při přechodu k homeomorfnímu grafu zůstanou vlastnosti grafu týkající se planarity zřejmě nezměny, neboť rozpůlení hrany nemá na existenci vhodného diagramu grafu (bez křížení hran) žádný vliv. Na závěr uvedeme hlavní tvrzení o planárních grafech, které je plně charakterizuje použitím výhradně kombinatorických prostředků.

Věta 3.51: (Kuratowski) Graf je planární právě tehdy, jestliže neobsahuje podgraf homeomorfní s některým ze základních neplanárních grafů K_5 a $K_{3,3}$.

Důkaz této věty je zajímavou ilustrací techniky důkazu netriviálních tvrzení teorie grafů, je však obtížný a relativně zdlouhavý, takže případné zájemce odkazujeme na [6], [12] nebo [22]. Kuratowského věta představuje základní návod pro testování planarity grafu: V grafu nejprve provedeme všechna možná zcelení hran a separaci, a pak pro jednotlivé bloky hledáme podgrafy izomorfní nebo homeomorfní (v podgrafech je ještě možné zcelovat!) s K_5 nebo $K_{3,3}$. Tento postup je ovšem možné zrychlit použitím vhodného kritéria při výběru podgrafů (viz [27]). Podařilo se již dokonce nalézt algoritmy testující planaritu grafu nebo vytvořit rovinné nakreslení v čase $O(|U|)$, ty ovšem nevycházejí z Kuratowského věty – viz [16] nebo též [23] a [32].

Cvičení

- 3.3-1.** Charakterizujte graf, jehož každý hranový řez je tvořen pouze jednou hranou.
- 3.3-2.** Dokažte, že každý hranový řez Eulerova grafu má sudý počet hran.
- 3.3-3.** Dokažte, že hranový řez má s každou kostrou souvislého grafu společnou alespoň jednu hranu.
- 3.3-4.** Nechť G je obyčejný souvislý graf s nejvýše $2k$ uzly, jehož každý uzel má stupeň nejméně $k(> 1)$. Dokažte, že G nemá žádnou artikulaci.
- 3.3-5.** Jak se mohou změnit hodnoty charakteristických čísel $h(G)$, $\mu(G)$, $\alpha(G)$, $\beta(G)$, $\omega(G)$, $\chi(G)$, provedeme-li v grafu G rozpůlení hrany?
- 3.3-6.** Nalezněte všechny neizomorfní stromy se 6 a 7 uzly a zjistěte, které z nich jsou homeomorfní.

3.3-7. Navrhněte algoritmus redukce grafu zadaného maticí incidence \mathbf{A} nebo sousednosti \mathbf{V} na minimální s ním homeomorfní graf.

3.3-8. Lze sestavit strom, který není planární?