Kombinatorická optimalizace
cvičení č.2
Celočíselné lineární programování

Přemysl Šůcha (suchap@fel.cvut.cz)

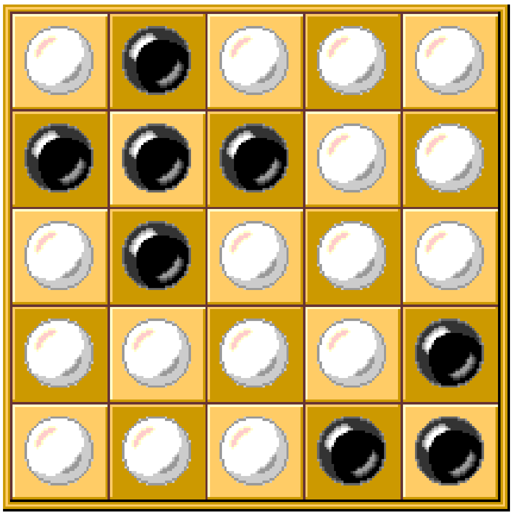
22. února 2010

1 Celočíselné lineární programování

Celá řada praktických problémů týkajících se optimalizace může být modelována a řešena pomocí integer (celočíselného nebo také diskrétního) lineárního programování ILP (Integer Linear Programming). Tato úloha se od úlohy běžného lineárního programování LP liší v tom, že proměnné jsou omezeny na celá čísla [1].

Pokud bychom takovou úlohu řešili pomocí lineárního programování tak, že bychom výsledek zaokrouhlili, neměli bychom zaručeno to, že výsledné řešení bude optimální, a ani to, zda bude přípustné. Hlavní nevýhodou ILP je časová složitost algoritmu řešícího tuto úlohu. Zatímco úloha LP je řešitelná v polynomiálním čase, úloha ILP je tzv. NP-obtížná (NP-hard) tzn. není znám polynomiální algoritmus. Mezi nejznámější metody řešení obecné úlohy ILP patří výčtové metody, metoda větví a mezí a metody sečných nadrovin.

2 Game of Fiver - hra s pěticemi

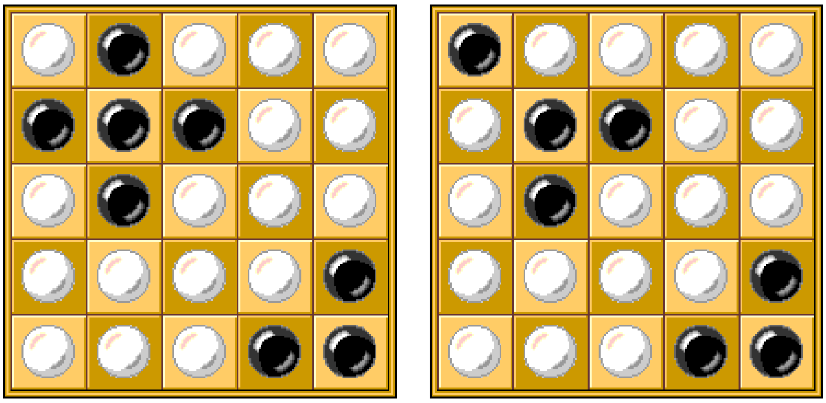


Obrázek 1: Game of Fivers.

Hra „Game of Fiver“ je velice hezká, ale poměrně náročná. Hraje na poli $n \times n$ s n^2 kameny (viz obrázek 1) [2]. Kameny mají z každé strany různou barvu (bílou a černou). Na začátku jsou všechny kameny otočeny bílou barvou vzhůru.

V každém tahu je možno obrátit libovolný kámen, ale pokud tak učiníme, musíme otočit všechny jeho přímé sousedy (nahoře, dole, vlevo a vpravo), jak je ukázáno na obrázku 2. Tzn. otáčíme vždy jednu „pětici“ (pokud nejsme na okraji hrací plochy). Cílem hry je s co nejmenším počtem tahů otočit všechny kameny. Hru si můžete vyzkoušet například na adrese

`http://www.math.com/students/puzzles/fiver/fiver.html`.



Obrázek 2: Jeden tah ve hře.

I tuto hru lze řešit pomocí ILP. Zaveďme proměnnou $x_{i,j}$, která nabývá hodnoty jedna, pokud byl kámen otočen, a nula, pokud otočen nebyl (dvojnásobné otočení je stejné jako bychom žádný tah neprovedli).

Klíčová myšlenka pro celé řešení je, že pokud má mít kámen černou barvu, musel být v jeho okolí (pětici) proveden lichý počet tahů. Pro prvek na pozici (i, j) to lze zaručit jednoduchou podmínkou

$$x_{i,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 2y_{i,j} = 1, \tag{1}$$

ve které $y_{i,j} \in \{0, 1, 2\}$ je pomocná binární proměnná. Pokud bude $y_{i,j} = 0$, je suma počtu tahů rovna jedné. Pokud bude $y_{i,j} = 1$, je suma počtu tahů rovna třem a pro $y_{i,j} = 2$ bude tato suma rovna pěti. Více tahů v libovolné pětici na optimální řešení nevede. Protože cílem je vyhrát tuto hru v co nejméně tazích, cílová funkce je jednoduše rovna sumě všech tahů $x_{i,j}$. Formulace tohoto problému pomocí ILP můžeme shrnout následovně

min $\sum_{i,j\in\langle 1,n\rangle} x_{i,j}$

s.t. $x_{i,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 2y_{i,j} = 1 \;\; \forall i, j$
$x_{i,j} \in \{1, 0\} \;\; \forall i, j$
$y_{i,j} \in \{0, 1, 2\} \;\; \forall i, j.$

Úkol: Pomocí ILP formulace nalezněte optimální řešení hry „Game of Fiver“ a řešení zobrazte na obrazovce.

Rada: Pro řešení této úlohy použijte funkci `ilinprog` z TORSCHE.

Reference

[1] R. Vanderbei, *Linear Programming : Foundations and Extensions*. `http://www.princeton.edu/~rvdb/LPbook`: Princeton University, second ed., 2001.

[2] J. B. Orlin, „Introduction to optimization.“ MIT OpenCourseWare, 2004.

[3] J. Demel, *Grafy a jejich aplikace*. Academia, second ed., 2002.

[4] B. H. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer, third ed., 2006.

[5] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall; United States Ed edition, 1993.