

Přednáška #5: **Vnořování a simulace propojovacích sítí**

Vnořovací problém

Statický vnořovací problém: (embedding problem)

- // algoritmus = množina procesů posílajících si zprávy.
- Známe velikost a strukturu grafu procesů.
- Máme počítač s distribuovanou pamětí se známou topologií propojovací sítě (PS).
- Jak mapovat graf procesů na tento stroj, aby výpočet byl co nejefektivnější?

Dynamický vnořovací problém:

- // algoritmus = množina procesů posílajících si zprávy.
- Procesy dynamicky vznikají a zanikají, neznáme velikost ani strukturu grafu procesů, pouze máme nějaké částečné informace (např. max. # potomků jednoho rodiče).
- Máme počítač s distribuovanou pamětí se známou topologií PS.
- Jak distribuovat dynamicky vznikající procesy mezi procesory tak, aby výpočet byl co nejefektivnější?
- Alternativní přístupy: dynamické **vyvažování zátěže** nebo **migrace procesů**.

Vnoření (embedding) $G \xrightarrow{\text{emb}} H$

Vnoření zdrojového grafu $G = (V(G), E(G))$ do **cílové** sítě $H = (V(H), E(H))$
= **dvojice** zobrazení (φ, ξ) , kde

$$\varphi : V(G) \rightarrow V(H) \quad \text{a} \quad \xi : E(G) \rightarrow \mathcal{P}(H)$$

($\mathcal{P}(H)$ = množina všech **cest** sítě H .)

Zatížení

(Zatížení cílových uzlů zdrojovými.)

- **Zatížení** cílového uzlu $v \in V(H)$: $\text{load}(v) = |\{u \in V(G); \varphi(u) = v\}|$.
- **Zatížení** vnoření (φ, ξ) : $\text{load}(\varphi, \xi) = \max_{v \in V(H)} \text{load}(v)$.
- **Průměrné zatížení** vnoření (φ, ξ) : $\overline{\text{load}}(\varphi, \xi) = \frac{1}{|V(H)|} \sum_{v \in V(H)} \text{load}(v)$.
- Vnoření (φ, ξ) má **stejnoméřné zatížení**, pokud $\text{load}(\varphi, \xi) = \lceil \overline{\text{load}}(\varphi, \xi) \rceil$.

(Poměr velikosti cílové sítě (= # uzlů) a zdrojového grafu (= # procesů).)

$$\text{vexp}(\varphi, \xi) = \frac{|V(H)|}{|V(G)|}.$$

Dilatace

(Protažení zdrojových hran v cílové síti.)

- **Dilatace** zdrojové hrany $e \in E(G)$: $\text{dil}(e) = \text{len}(\xi(e))$.
- **Dilatace** vnoření (φ, ξ) : $\text{dil}(\varphi, \xi) = \max_{e \in E(G)} \text{dil}(e)$.
- **Průměrná dilatace** vnoření (φ, ξ) : $\overline{\text{dil}}(\varphi, \xi) = \frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \text{dil}(e)$.
- Vnoření (φ, ξ) má **stejnoměrnou dilataci**, pokud $\text{dil}(\varphi, \xi) = \lceil \overline{\text{dil}}(\varphi, \xi) \rceil$.

Výrok 1. Pokud $G \xrightarrow{\text{emb}} H$ má $\text{dil} = \text{load} = 1$, pak $G \subset H$.
 Pokud také $\text{vexp} = 1$, pak $G = \text{kostra } H$.

- **Poznámka:** Statická vnoření nemohou postihnout **dynamické chování** aplikace na cílové síti, např. velká dilatace nevadí, pokud je odpovídající cesta používána zřídka.

Linkové a uzlové zahlcení

(Komunikační zatížení cílových uzlů/linek.)

- **Linkové zahlcení** cílové linky $e_2 \in E(H)$: $\text{ecng}(e_2) = |\{e_1 \in E(G); e_2 \subseteq \xi(e_1)\}|$.
- **Linkové zahlcení** vnoření (φ, ξ) : $\text{ecng}(\varphi, \xi) = \max_{e_2 \in E(H)} \text{ecng}(e_2)$. (maximální # obrazů zdrojových hran procházejících skrz cílové linky)
- **Uzlové zahlcení** cílového uzlu $u_2 \in V(H)$: $\text{ncng}(u_2) = |\{e_1 \in E(G); u_2 \in \xi(e_1)\}|$.
- Podobně: $\text{ncng}(\varphi, \xi)$, $\overline{\text{ecng}}(\varphi, \xi)$, $\overline{\text{ncng}}(\varphi, \xi)$, a **stejnoměrná zahlcení**.

Quasiisometrické a výpočetně ekvivalentní sítě

- G a H jsou **quasiisometrické**, pokud existují vnoření $G \xrightarrow{\text{emb}} H$ i $H \xrightarrow{\text{emb}} G$ s konstantními hodnotami měřítek vnoření.
- H **simuluje** G se **zpomalením** h ,
jestliže jeden krok výpočtu na G může být simulován v $O(h)$ krocích na H .
- G a H jsou **výpočetně ekvivalentní sítě**, pokud G dokáže simulovat H s konstantním zpomalením a naopak.

Výrok 2. *Quasiisometrické sítě \implies výpočetně ekvivalentní, ale ne naopak.*

Zatížení vs. expanze

Výrok 3.

$$\text{load}(\varphi, \xi) \geq \max \left(1, \left\lceil \frac{1}{\text{vexp}(\varphi, \xi)} \right\rceil \right).$$

Průměrový argument

Věta 4. Jestliže $|V(G)| = |V(H)|$ a $\text{load}(\varphi, \xi) = 1$, pak

$$\text{dil}(\varphi, \xi) \geq \lceil \text{diam}(H) / \text{diam}(G) \rceil.$$

Důkaz. Stejnoměrná dilatace cesty délky $\text{diam}(G)$ mezi 2 uzly ve vzdál. $\text{diam}(H)$.



Dilatace vs. zahlcení

Věta 5. Jestliže $k = \overline{\text{dil}}(\varphi, \xi)$, pak

$$\text{ecng}(\varphi, \xi) \geq \left\lceil \frac{k|E(G)|}{|E(H)|} \right\rceil.$$

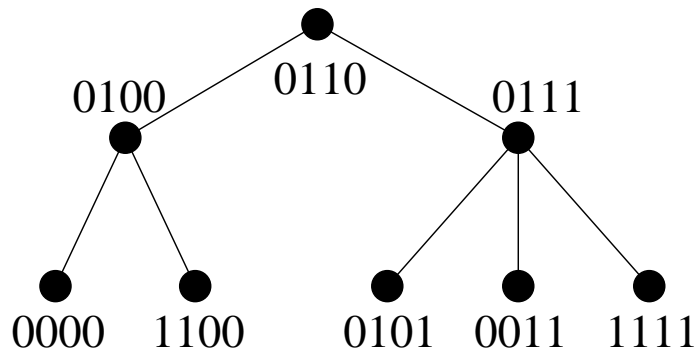
Důkaz. Čítáním obrazů hran G v H za předpokladu stejnoměrného zahlcení hran.

Hyperkrychle simuluje optimálně téměř každou známou propojovací topologii.

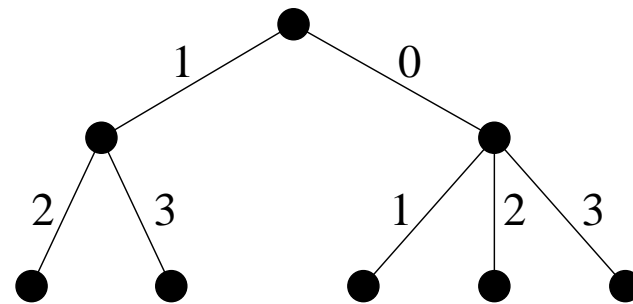
Díky **symetrii** Q_n může být vnoření $G \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ popsáno pomocí

- **značení uzlů**: ohodnocení uzlů ve $V(G)$ n -bitovými binárními adresami,
- nebo
- **značení hran**: ohodnocení hran v $E(G)$ čísly dimenzí $0, 1, \dots, n - 1$.

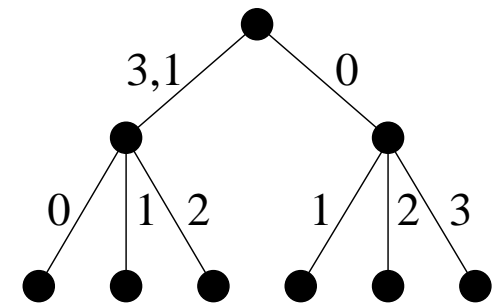
Definice 6. Q_n je optimální hyperkrychle pro $G \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ s $\text{load} = 1 \iff n = \lceil \log |V(G)| \rceil$.



(a) Značení uzlů stromu vnořeného do Q_4 a $\text{dil} = 1$ a $\text{load} = 1$.



(b) Značení hran při téměř vnoření.



(c) Značení hran jiného stromu vnořeného s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = 2$.

Lemma 7. *Nechť*

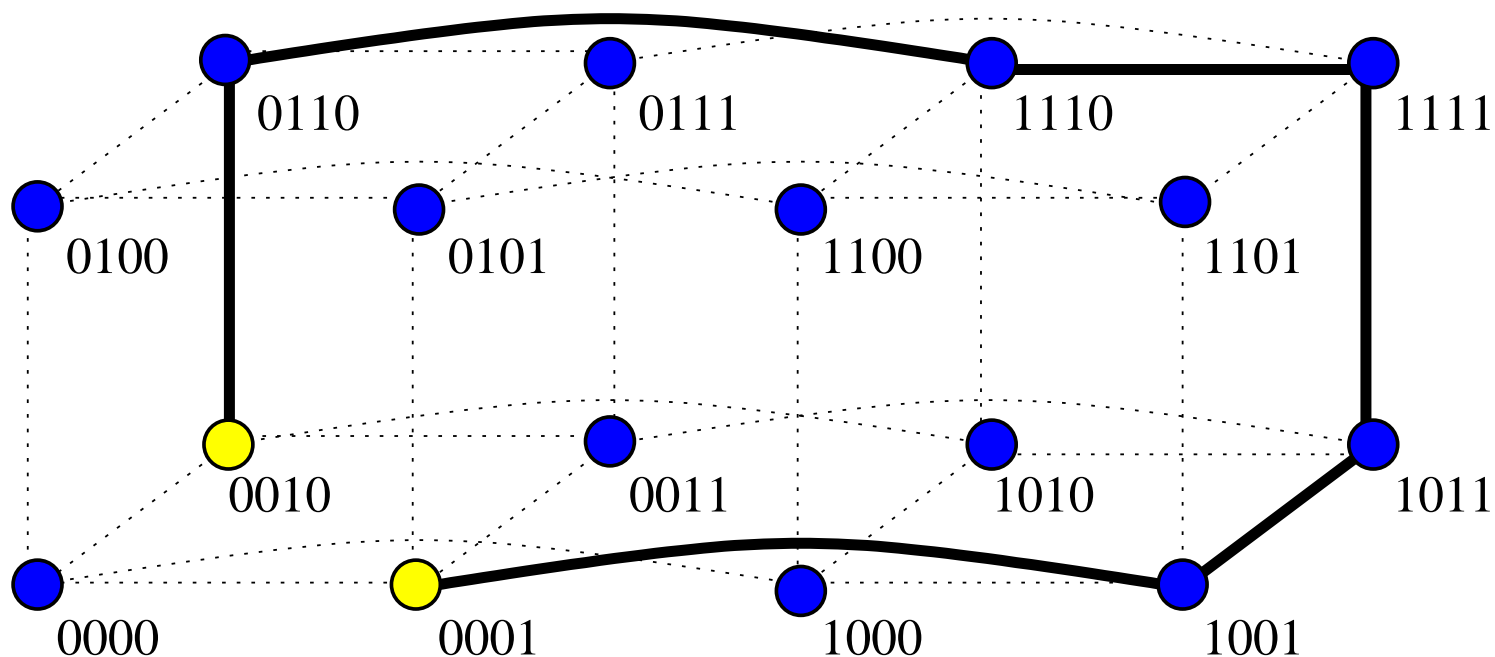
- $u, v \in V(Q_n)$ v Hammingově vzdálenosti $\varrho(u, v)$,
- $\delta(u, v)$ = množina dimenzí, v kterých se u a v liší,
- $P(u, v)$ = cesta délky m v Q_n ,
- $\mathcal{P} = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$ = n -tice popisující hranové značení $P(u, v)$, kde
 $p_j = \#$ hran cesty $P(u, v)$, které leží v dimenzi j .

Pak platí:

- $\sum_{j=0}^{n-1} p_j = m$,
- $|\delta(u, v)| = \varrho(u, v)$,
- každá dimenze z $\delta(u, v)$ se objeví v \mathcal{P} **lichý-počet** krát a každá z $n - \varrho(u, v)$ zbývajících dimenzí se objeví v \mathcal{P} **sudý-počet** krát,
- $m = \varrho(u, v) \pmod{2}$,
- jestliže $u = v$, pak m je sudé (\implies neexistují kružnice s lichou délkou),
- jestliže $P(u, v)$ je hamiltonovská cesta v Q_n , pak $\varrho(u, v)$ je lichá.

Důkaz. Plyne ze dvou elementárních faktů:

1. Přejchod hyperkubické hrany = negace příslušného bitu.
2. Dvojitá negace je identita: $\overline{\overline{x_i}} = x_i$.

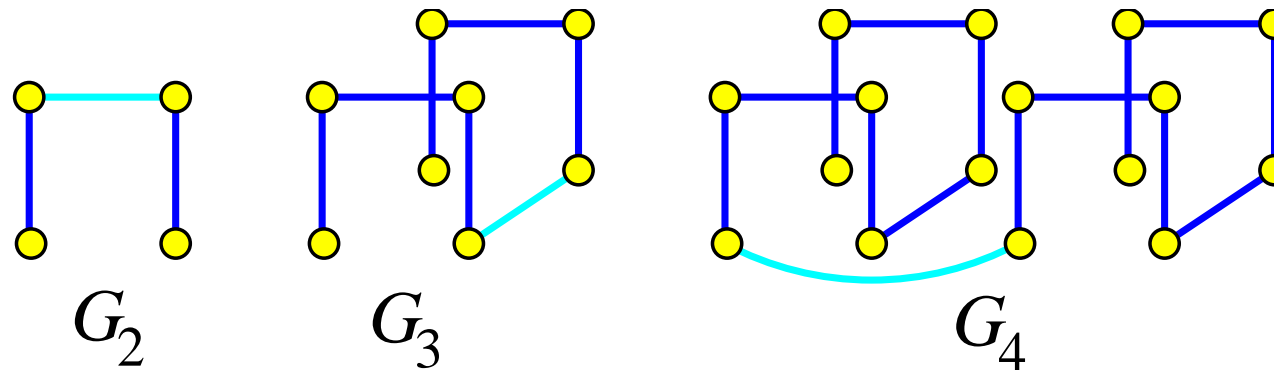


■ $u = 0001, v = 0010 \implies \varrho(u, v) = 2$

■ $\delta(u, v) = \{0, 1\}$ a $m = 6$

■ $\mathcal{P} = \{1, 1, 2, 2\}$

- **Grayova posloupnost** = uzlové značení cesty v Q_n .
- **n -bitový Grayův kód** = uzlové značení hamiltonovské cesty/kružnice v Q_n .
- \exists mnoho různých Grayových kódů.
- Základní a nejpřirozenější je **Binární zrcadlový Grayův kód (BRGC)** G_n
 1. $G_1 = \{0, 1\}$,
 2. $G_n = \{0G_{n-1}, 1G_{n-1}^R\}$, kde
 - $0G_i$ ($1G_i$) = každý prvek G_i dostane 1-bitovou předponu 0 (1),
 - G_i^R = zrcadlově otočená posloupnost G_i .



Věta 8. BRGC zakódování binárního čísla $b = b_{n-1} \dots b_0$ je $G_n(b) = g_{n-1} \dots g_0$, kde

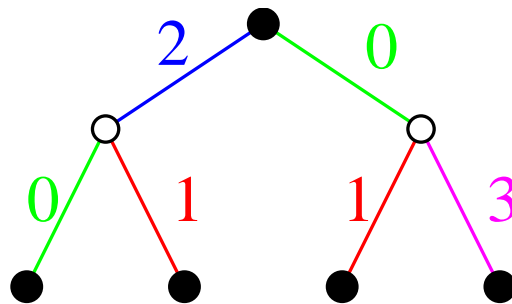
1. $g_{n-1} = b_{n-1}$,
2. $g_i = b_{i+1} \text{ XOR } b_i$ pro $i = n-2, \dots, 0$.



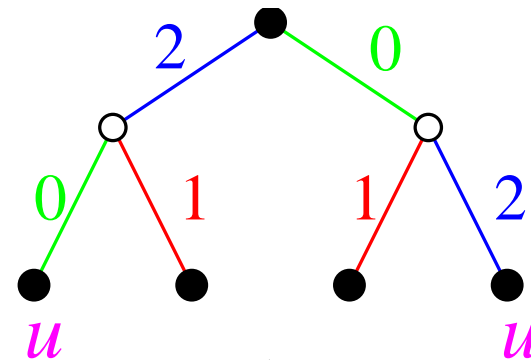
Úplné binární stromy (CBT)

- $CBT_n \not\subset Q_{n+1}$, i když $|V(CBT_n)| < |V(Q_{n+1})|$
(nepoměr v počtu černých a bílých uzlů ve 2-barvení).
- $CBT_n \subset Q_{n+2}$ (obecný důkaz je netriviální) - malý příklad je na obr. (a).
- $CBT_n \rightarrow Q_{n+1}$ s $dil = 1$ a $load = 2$ - malý příklad je na obr. (b). Pak

$2^{n-2} + 2^{n-4} + \dots$ uzlů hyperkrychle bude mít $load = 2$ a
 $2^{n-1} - 2^{n-3} + \dots$ uzlů hyperkrychle bude mít $load = 0$.



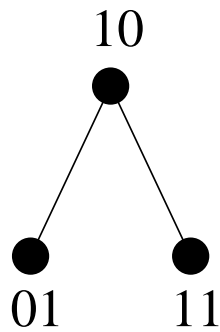
(a)



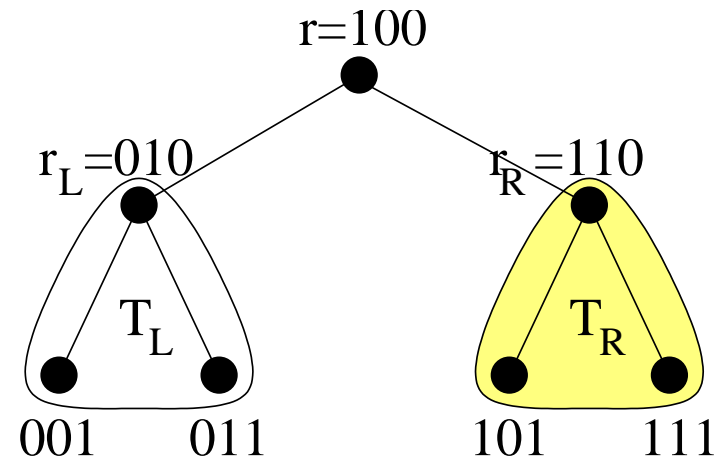
(b)

- $CBT_n \xrightarrow{\text{emb}} Q_{n+1}$ s $\text{dil} = 2$ a $\text{load} = 1$ a $\text{ecng} = 2$:

Inorder číslování počínaje číslem 1 indukuje takové vnoření.



(a) Indukční základ.



(b) Indukční krok.

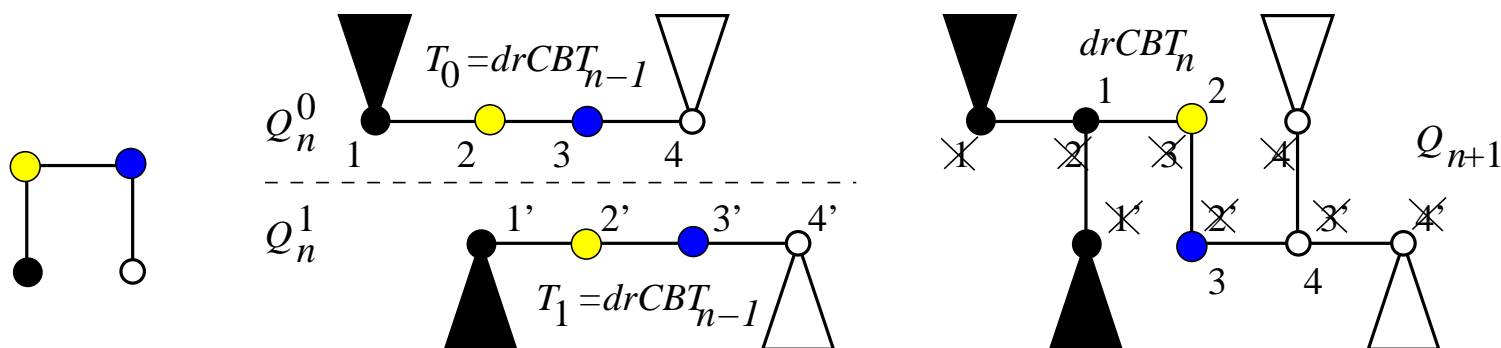
- Nejlepší a krásně rekurzivní vnoření $CBT_n \xrightarrow{\text{emb}} Q_{n+1}$ s $\boxed{\text{dil} = 2 \text{ a load} = \text{ecng} = 1}$.

Trik: přeměň CBT_n na **vyvážený** bipartitní graf $drCBT_n$ s 2^{n+1} uzly

zdvojením kořenu.

Potom

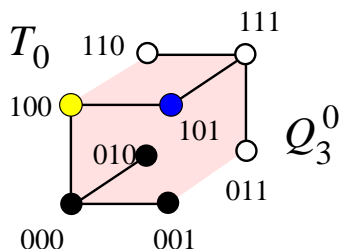
$drCBT_n$ je faktorem Q_{n+1} .



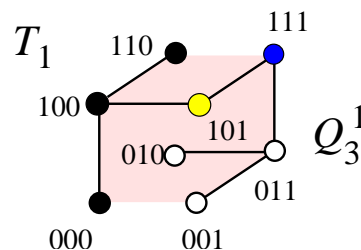
(a) Indukční základ.

(b) Indukční hypotéza v Q_n^0 a automorfismus v opačné Q_n^1 .

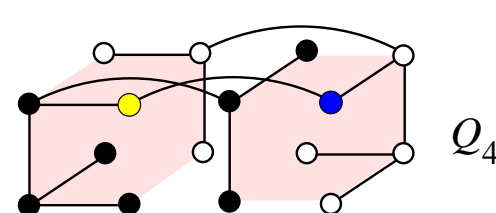
(c) Indukční krok.



(a) $T_0 \xrightarrow{\text{emb}} Q_3^0$.



(b) $T_1 \equiv T_0 \xrightarrow{\text{emb}} Q_3^1$.



(c) Indukční krok.

1. Kořen stromu je umístěn do libovolného uzlu hyperkrychle.
2. Každý uzel x vnořeného stromu
 - zná **dimenzi** hyperkrychle $n \geq 1$,
 - zná svou hyperkubickou **adresu** $\varphi(x)$,
 - zná číslo své **hladiny** $l(x)$ ve stromu,
 - vypočte si **číslo cesty** $t(x) = l(x) \pmod{n}$, reprezentované jako n -bitové slovo s jedinou 1 na pozici $t(x)$,
 - má **náhodný generátor** svého **flip bitu** $fb(x)$.
3. Jestliže listový proces x stromu vnořený do $\varphi(x)$ **porodí jednoho nebo 2 syny**, vygeneruje $fb(x)$ a provede následující kroky:

```
if ( $fb(x) = 0$ ) then umístí levého syna (pokud existuje) do svého uzlu  $\varphi(x)$ ;  
                    umístí pravého syna (pokud existuje) do uzlu  $\varphi(x) \text{ XOR } t(x)$ ;  
else umístí levého syna (pokud existuje) do uzlu  $\varphi(x) \text{ XOR } t(x)$ ;  
     umístí pravého syna (pokud existuje) do svého uzlu  $\varphi(x)$ .
```

Věta 9. Pro strom s M uzly a pro hyperkrychli s N uzly, tento algoritmus dává $dil = 1$ a $load = O(M/N + \log N)$ s vysokou pravděpodobností.



Jednovlnový n -úrovňový D&C výpočet:

1. Kořen rozdělí problém do dvou polovin, které předá svým dvěma potomkům.
2. Potomci provedou rekurzivně totéž.
3. Na úrovni n jsou podproblémy vyřešeny listovými procesy.
4. Výsledky jsou rekurzivně předány zpět kořenu.
5. Nová vlna může začít, až se předchozí vlna vrátí do kořene.

Vícevltnový n -úrovňový D&C výpočet:

- Jednotlivé vlny, popsané výše, procházejí stromem po úrovních za sebou.

D&C na hyperkrychli**Vícevltnový D&C:**

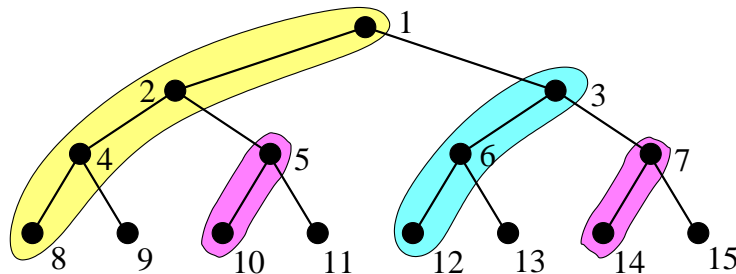
Standardní vnoření CBT_n do Q_{n+1} s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = 2$ je optimální.

Jednovlnový D&C:

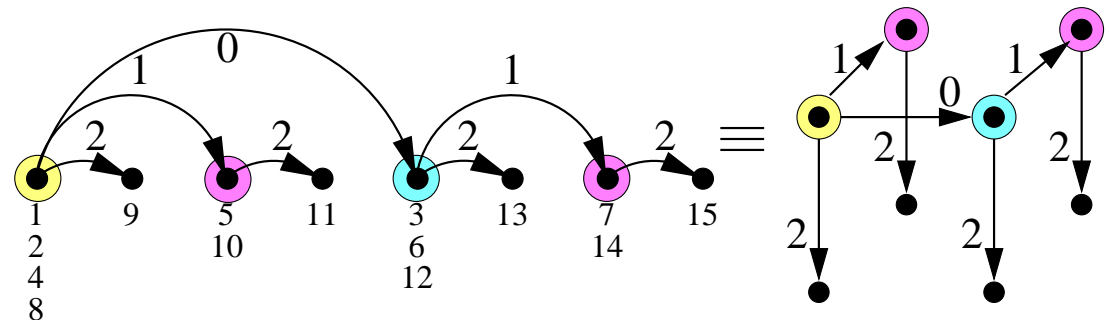
Standardní vnoření CBT_n do Q_{n+1} s $\text{load} = 1$ **plýtvá** 50% uzlů.

Založeno na **binomiální kostře** hyperkrychle.

1. Kořen rozdělí problém (vstupní data) do dvou polovin.
2. Předá polovinu svému sousedu v dimenzi 0 a nechá si druhou polovinu.
3. Oba tyto uzly jsou aktivní a udělají totéž s použitím dimenze 1.
4. To se opakuje pro dimenze $2, \dots, n$.
5. **Všechny** uzly Q_n se stanou listy CBT_n a spočítají listové podproblémy.
6. Výsledky jsou sbírány v opačném pořadí zpět do kořenu.



(a) Uzlové zatížení.



(b) Komunikační strom.

Implementace 3-úrovňového jednovlnového D&C výpočtu na Q_3 .

Věta 10. *Nechť $k > 1$ a z_1, \dots, z_k , $z_i \geq 2$, jsou přirozená čísla. Nechť $n_i = \lceil \log z_i \rceil$ pro všechny i a $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Pak*

- $M(z_1, z_2, \dots, z_k) \subseteq Q_n$.
- $K(z_1, z_2, \dots, z_k) \subseteq Q_n$, jsou-li všechny z_i sudé.
- $K(z_1, z_2, \dots, z_k) \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = 2$, je-li některé z_i liché.
- Q_n je **optimální** hyperkrychle pro všechna tato vnoření, pokud

$$\lceil \log z_1 \rceil + \dots + \lceil \log z_k \rceil = \lceil \log(z_1 \dots z_k) \rceil.$$

Důkaz.

1. Vnoř každou 1-D $M(z_i)$ nebo $K(z_i)$ do Q_{n_i} pomocí Grayova kódování G_{n_i} .
2. Aplikuj na tato dílčí vnoření kartézský součin.

Nechť $[x_1, \dots, x_k] \in V(M(z_1, z_2, \dots, z_k))$, kde $0 \leq x_i \leq z_i - 1$. Pak

$$\varphi([x_1, \dots, x_k]) = G_{n_1}(\text{bin}_{n_1}(x_1)) \circ G_{n_2}(\text{bin}_{n_2}(x_2)) \circ \dots \circ G_{n_k}(\text{bin}_{n_k}(x_k)),$$

kde $\text{bin}_m(x)$ = m -bitová reprezentace čísla $x < 2^m$ a

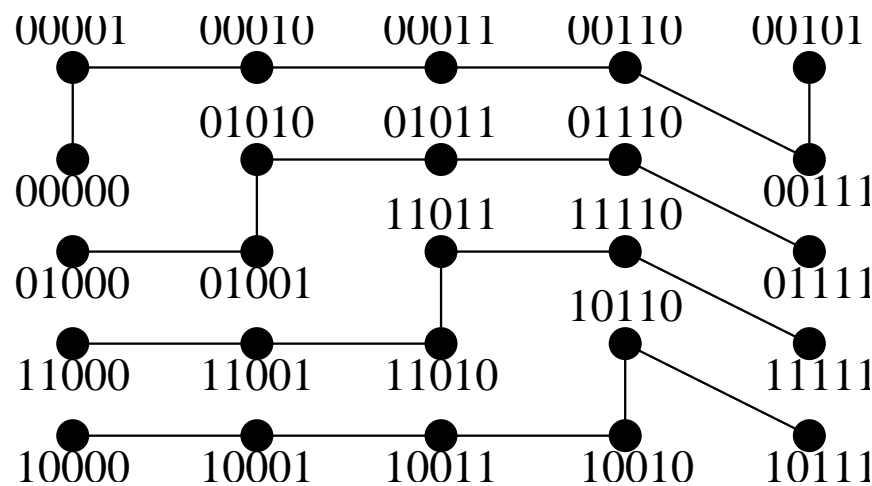
\circ = zřetězení.



- Jestliže $\lceil \log z_1 \rceil + \dots + \lceil \log z_k \rceil > \lceil \log(z_1 \dots z_k) \rceil$, pak tato

metoda “kartézské dekompozice” dává $M \xrightarrow{\text{emb}} Q_n$ s $v_{\text{exp}} > 2$ (není optimální).

- Optimální expanze, $\text{dil} = 1$ a $\text{load} \geq 2$: velká hyperkrychle se zmačkne do menší.
- Optimální expanze, $\text{load} = 1$ a $\text{dil} > 1$: velmi **sofistikované metody** (zde pouze konstatujeme výsledky).
 - Jakákoli **2-D mřížka** $M(a, b)$ taková, že $\lceil \log a \rceil + \lceil \log b \rceil > \lceil \log(ab) \rceil$, může být vnořena do své optimální $Q_{\lceil \log(ab) \rceil}$ s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = \text{ecng} = \text{ncng} = 2$.



Vnoření $M(5, 5)$ do Q_5 s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = 2$.

- Podobně: nejlepší algoritmus pro **3-D mřížky** dává vnoření s $\text{dil} = 5$.

Věta 11. *Nechť $n \geq 2$.*

1. *Optimální hyperkrychle pro vnoření CCC_n nebo wBF_n s $\text{load} = 1$ je $Q_{n+\lceil \log n \rceil}$. Podobně, $Q_{n+\lceil \log(n+1) \rceil}$ je optimální pro oBF_n .*
2. *Je-li n sudé, pak $CCC_n \subset Q_{n+\lceil \log n \rceil}$.*
3. *Je-li n liché, pak $CCC_n \xrightarrow{\text{emb}} Q_{n+\lceil \log n \rceil}$ s $\text{dil} = 2$ a $\text{load} = 1$.*
4. *$wBF_n \xrightarrow{\text{emb}} Q_{n+\lceil \log n \rceil}$ s $\text{dil} = O(1)$ a $\text{ecng} = O(1)$.*
5. *$oBF_n \subset Q_{n+\lceil \log(n+1) \rceil}$.*

Důkaz. (Opět metodou kartézské dekompozice.)

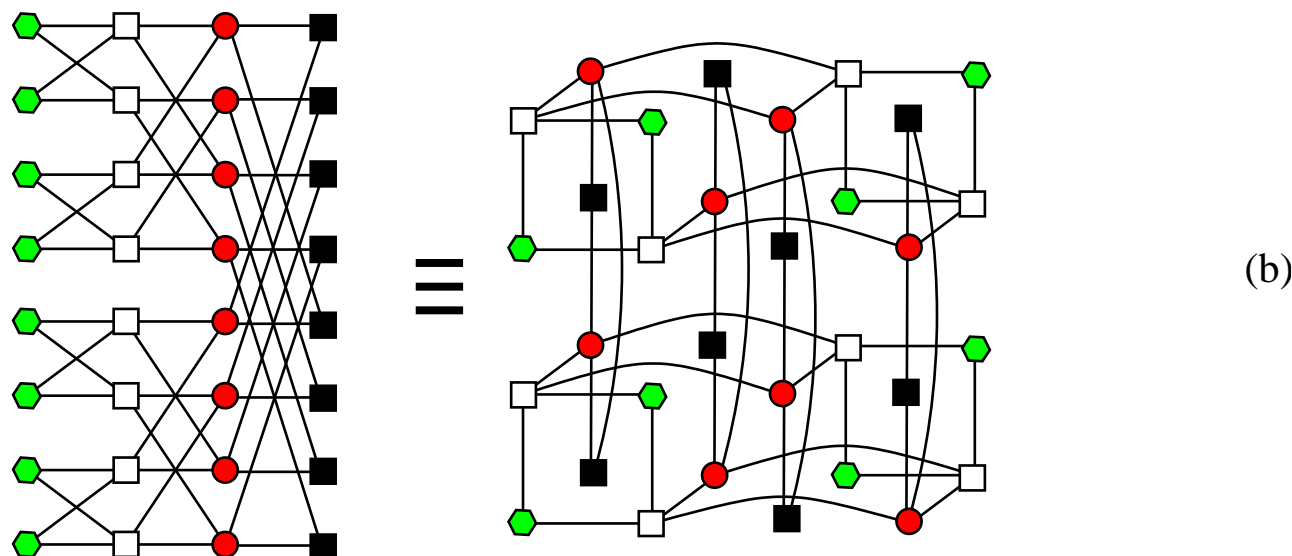
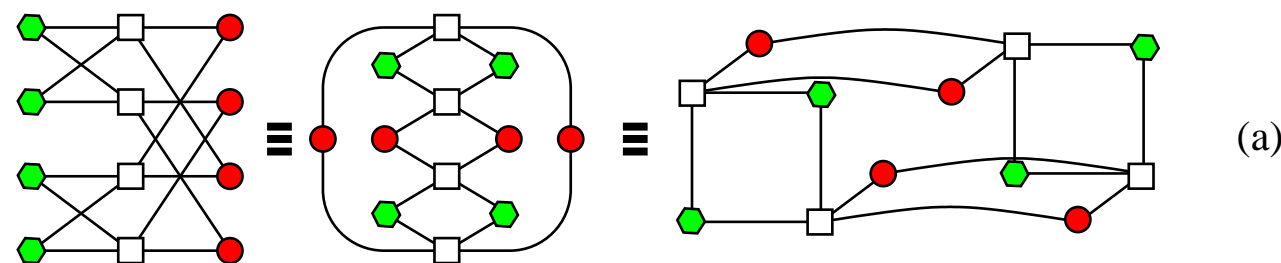
ad (1): $|V(CCC_n)| = |V(wBF_n)| = n2^n$ a $|V(oBF_n)| = (n+1)2^n$.

ad (2): $CCC_n \subset Q_n \times K(n) \subset Q_n \times Q_{\lceil \log n \rceil} = Q_{n+\lceil \log n \rceil}$.

ad (3): Je-li n liché, pak $K(n) \xrightarrow{\text{emb}} Q_{\lceil \log n \rceil}$ s $\text{dil} = 2$.

ad (4): Plyne z Věty 22.

ad (5): Jak oBF_n tak $Q_{n+\lceil \log(n+1) \rceil}$ jsou rekurzivní.



(a) $oBF_2 \subset Q_4$. (b) $oBF_3 \subset Q_5$: příklad indukčního kroku.

Vnoření ostatních grafů

- Je-li dán graf G a celá čísla k a n , pak problém existence vnoření G do Q_n s dilatací k je

NP-úplný.

- Velmi důležité v praxi, např. návrhování VLSI obvodů.
- Je-li dán graf G , celá čísla k a n , problém existence vnoření G do n -rozměrné mřížky s $\text{dil} \leq k$ je **NP-úplný**.
Toto platí dokonce pro $k = 1$, $n = 2$ a $G =$ binární strom.

Vnoření mezi stejnými mřížkami a toroidy

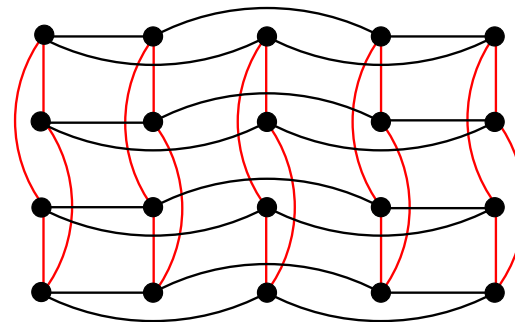
Věta 12. *Mřížky a toroidy jsou quaziizometrické \implies výpočetně ekvivalentní!!!*

Důkaz. Nechť $M = M(z_1, \dots, z_n)$ a $K = K(z_1, \dots, z_n)$.

1. $M \subset K \implies K$ simuluje M bez zpomalení.
2. Existuje $K \xrightarrow{\text{emb}} M$ s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = \text{ecng} = 2$: opět metoda kartézské dekompozice.
 - (a) Dekomponuj $M = M(z_1) \times \dots \times M(z_n)$ a $K = K(z_1) \times \dots \times K(z_n)$.
 - (b) Vnoř každý $K(z_i) \xrightarrow{\text{emb}} M(z_i)$ s $\text{load} = 1$ a $\text{dil} = \text{ecng} = 2$, viz. obr. (a).
 - (c) Použij kartézský součin, viz. obr. (b).

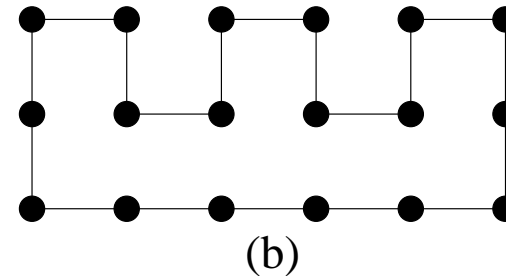
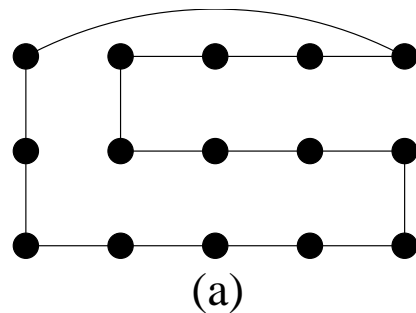


(a) $K(5) \xrightarrow{\text{emb}} M(5)$.

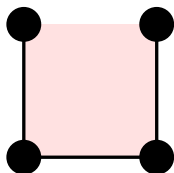


(b) $K(4,5) \xrightarrow{\text{emb}} M(4,5)$.

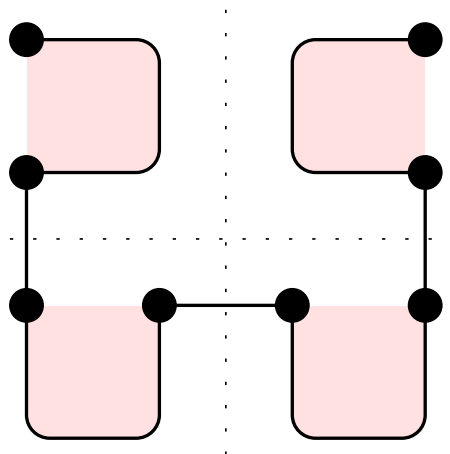
- Jakýkoli $K(z_1, \dots, z_n)$ má hamiltonovskou kružnici (viz obr. (a)).
- Jakákoli $M(z_1, \dots, z_n)$ má hamiltonovskou cestu.
- $M(z_1, \dots, z_n)$ má hamiltonovskou kružnici \iff nejméně jedno z_i je sudé (viz obr. (b)).



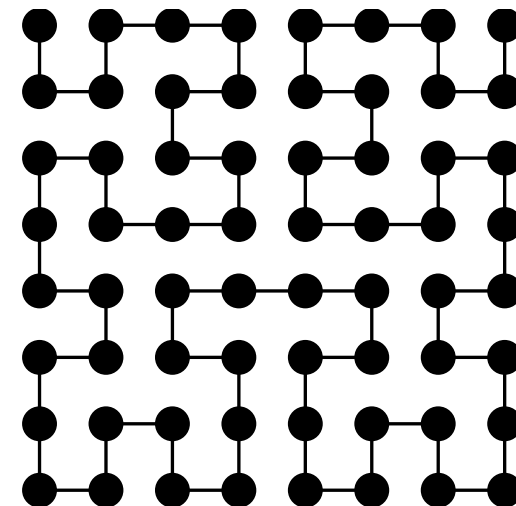
Fraktálovité (rekurzivní) hamiltonské cesty v $M(2^k, 2^k)$



(a) $M(2, 2)$.



(b) Indukční krok.

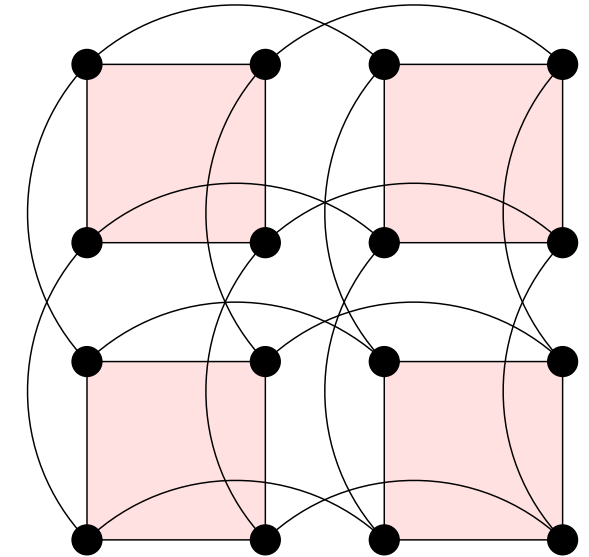
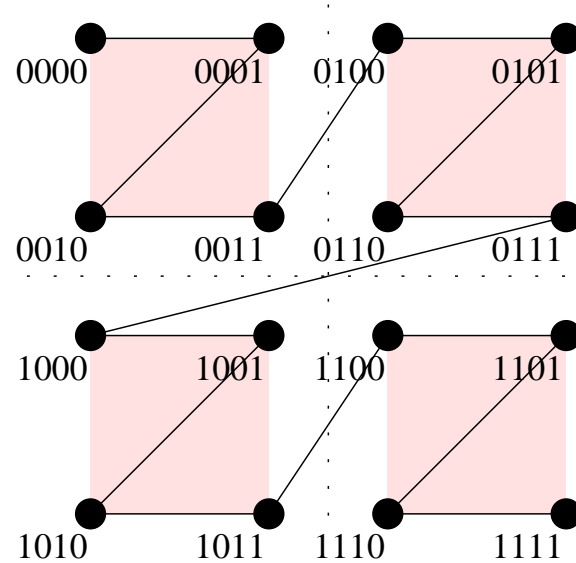
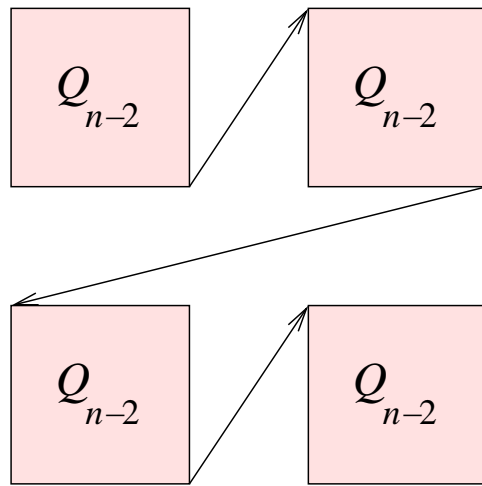


(c) $M(2^3, 2^3)$.

Důsledek 13. (věty 4) Spodní mez na dilataci vnoření $Q_{2k} \xrightarrow{\text{emb}} M(2^k, 2^k)$ s $\text{load} = 1$ je $2^{k+1}/(2k) = 2^k/k$.



Peanova křivka: spojuje uzly v lexikographickém pořadí při dělení střídavě podle osy x a y.



(a) Indukční krok. (b) φ vnoření $Q_4 \xrightarrow{\text{emb}} M(4, 4)$. (c) ξ vnoření $Q_4 \xrightarrow{\text{emb}} M(4, 4)$.

■ Manhattanská vzdálenost 2 uzlů lišících se v bitu i , $0 \leq i \leq n - 1$, je

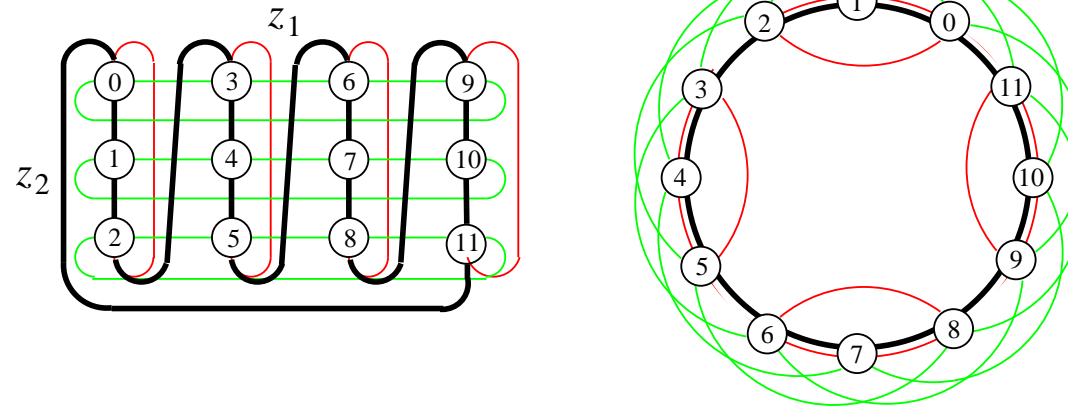
$$d(u, u \text{ XOR } 2^i) = 2^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}.$$

\implies dilatace vnoření $Q_{2k} \xrightarrow{\text{emb}} M(2^k, 2^k)$ je $2^{\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor} = 2^{k-1}$.

- **Obtížný a otevřený** problém pro obecné vícerozměrné kvádrové a krychlové toroidy.
- Řešení 1 speciálního případu:

Věta 14. Pro $z_1 \neq z_2$, \exists optimální vnoření $K(z_1, z_2) \xrightarrow{\text{emb}} K(z_1 z_2)$ s $\text{load} = 1$, $\text{dil} = \text{ecng} = \min(z_1, z_2)$.

Důkaz. Lexikografické mapování uzlů **po řádcích** $K(z_1, z_2)$, jestliže $z_1 \geq z_2$, **po sloupcích** v opačném případě. ♣



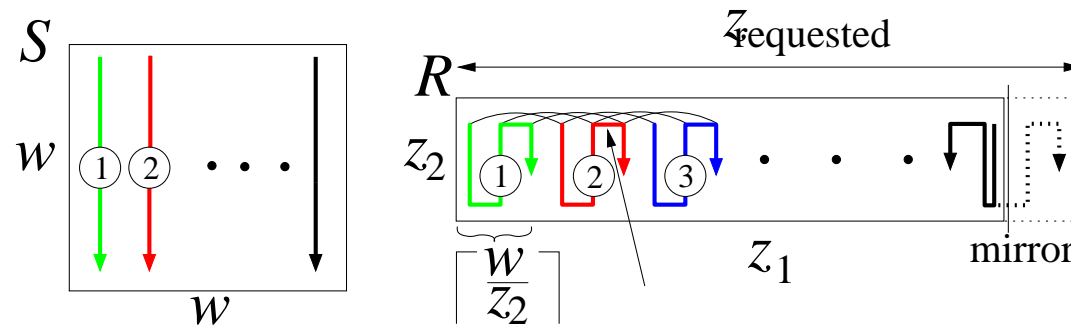
Vnoření $K(3, 4) \xrightarrow{\text{emb}} K(12)$ s $\text{dil} = 3 = \min(3, 4)$, horizontální hrany $K(3, 4)$ mají $\text{dil} = 3$, vertikální obalující hrany mají $\text{dil} = 2$.

- Poznámka: Je-li $z_1 \geq z_2$, pak spodní mez na dilataci $K(z_1, z_2) \xrightarrow{\text{emb}} K(z_1 z_2)$ je

$$\frac{z_2}{2} \leq \frac{\text{diam}(K(z_1 z_2))}{\text{diam}(K(z_1, z_2))} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \leq z_2.$$

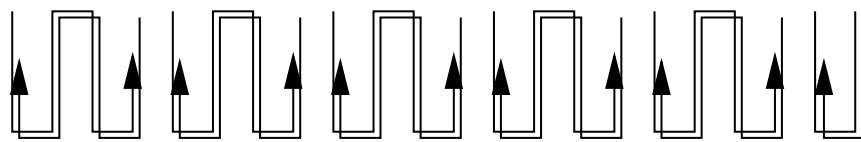
Věta 15. Necht' $z_1 > z_2$ a $w = \sqrt{z_1 z_2}$. Pak $S = M(w, w)$ lze vnořit do $R = M(z_1, z_2)$ s $\text{dil} = \left\lceil \sqrt{z_1/z_2} \right\rceil$, $\text{load} = 2$ a $\text{ecng} = 1 + \left\lceil \sqrt{z_1/z_2} \right\rceil$.

Důkaz.

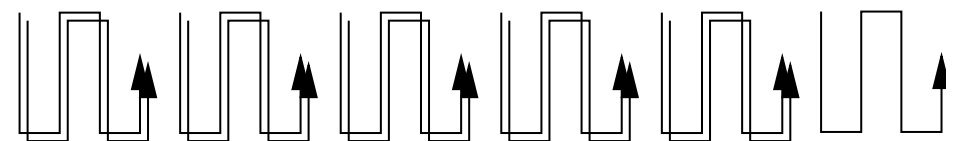


Řešení s lepší expanzí

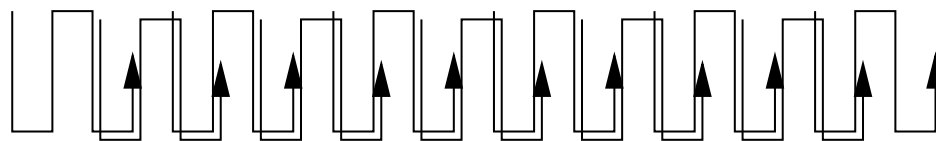
- (a) Vlož zrcadlo doprostřed R .
- (b) Použij stejné hady, ale zdvojuj je.
- (c) Použij stejné hady, ale částečně je překrývej.
- (d) Použij užší hady (= hady s $\text{load}=2$)



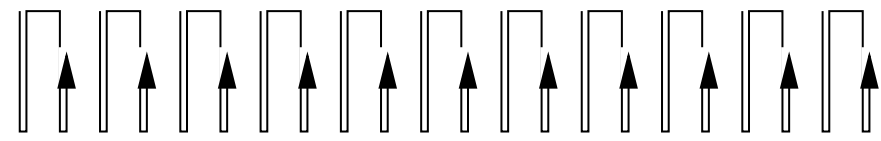
(a)



(b)



(c)

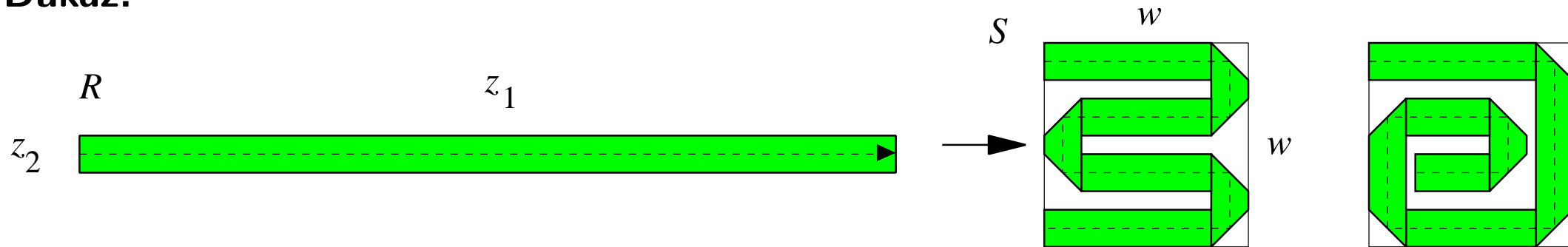


(d)

Věta 16. *Nechť $z_1 > z_2$ a $w = \sqrt{z_1 z_2}$. Pak*

$R = M(z_1, z_2)$ může být vnořena do $S = M(w, w)$ s $\text{dil} = 1$ a $\text{load} = \text{ecng} = 2$.

Důkaz.

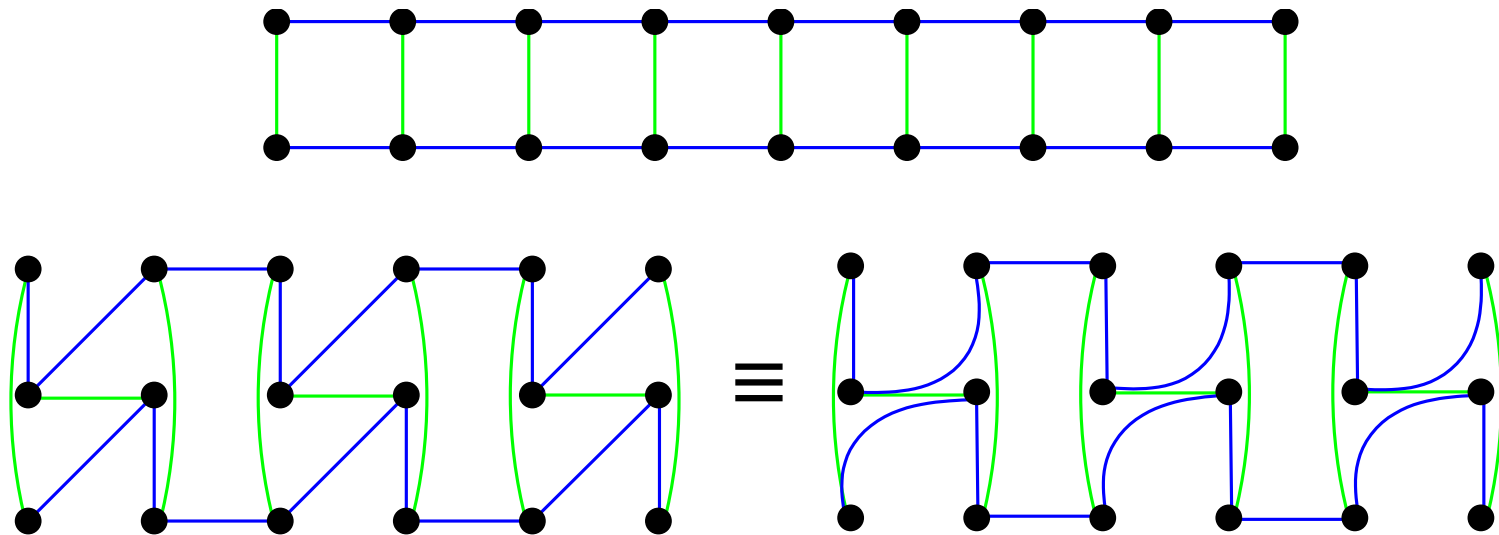


Řešení s lepší expanzí

Expanzi lze zlepšit (přiblížit ke spodní mezi $1/2$) přehýbáním **rovných** částí vnořovaného hada.

Věta 17. Uvažujme $M(a, b)$ a $M(a', b')$ takové, že $a' < a \leq b$ a b' je minimální celé číslo, pro které platí $a'b' \geq ab$. Pak

1. spodní meze na dilataci a hranové zahlcení jsou 2,
2. jestliže $a/a' \leq 2$, pak \exists vnoření $M(a, b) \xrightarrow{\text{emb}} M(a', b')$ s $\text{dil} \leq 2$,
3. jestliže $a/a' \leq 3$, pak \exists vnoření $M(a, b) \xrightarrow{\text{emb}} M(a', b')$ s $\text{dil} \leq 3$.

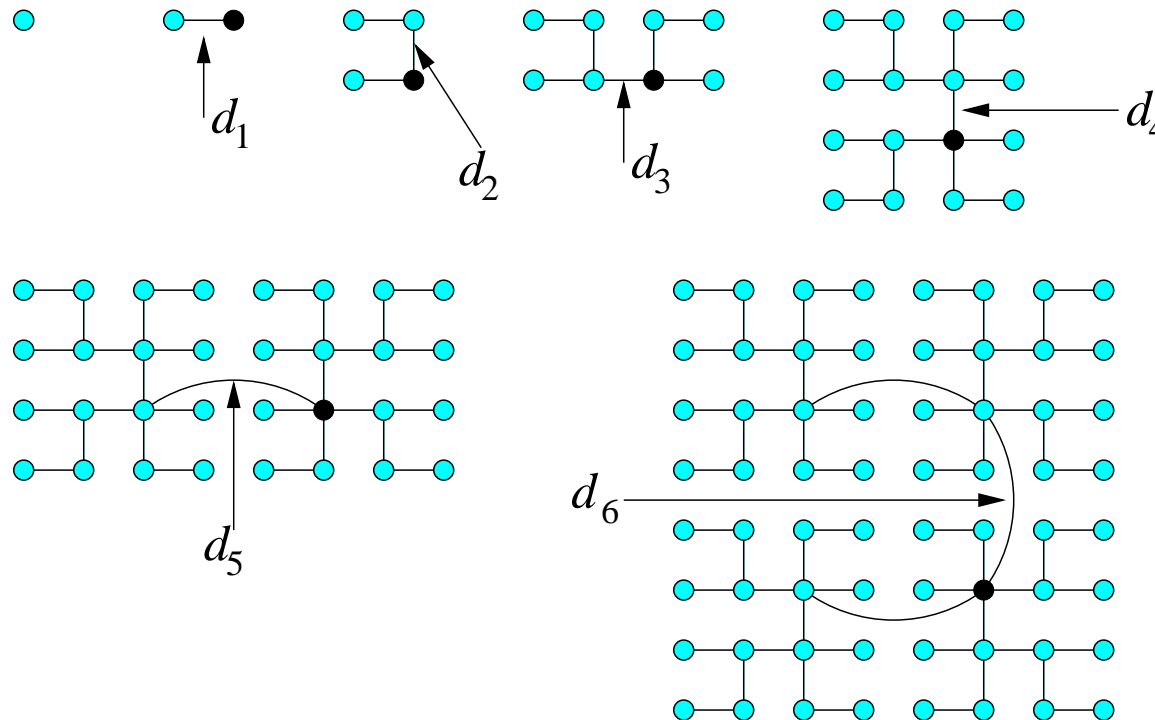


$$M(2, 9) \xrightarrow{\text{emb}} M(3, 6) \text{ s } \text{dil} = 2 \text{ a } \text{ecng} = 3.$$

Důsledek 18. (věty 4) Spodní mez na dilataci vnoření $CBT_n \xrightarrow{\text{emb}} M(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, 2^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil})$ s $\text{load} = 1$ je $(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} - 2)/(2n)$.

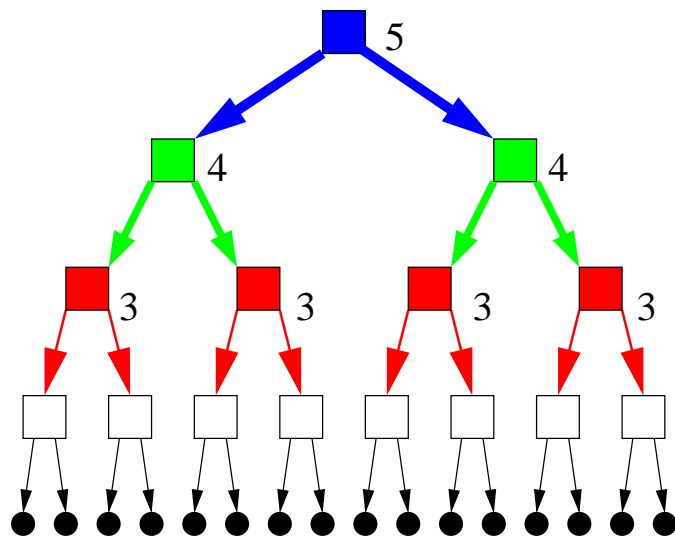
Věta 19. Jednovlnový n -úrovňový D&C výpočet lze simulovat na $M(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ tak, že každý uzel mřížky simuluje 1 list stromu a dilatace vnoření je $d_n = 1$ pro $n \leq 4$ a

$$d_n = 2(2^k + 2^{k-2} + 2^{k-4} + \dots + 2^{k \bmod 2}) + 1, \quad \text{kde } k = \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \quad \text{pro } n \geq 5. \quad \clubsuit$$

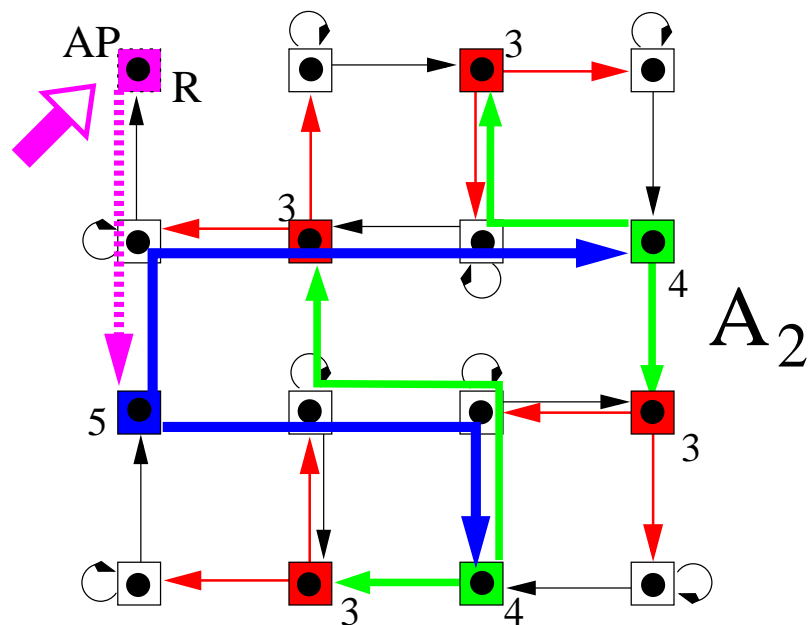


Věta 20. CBT_{2^m} může být vnořený do $M(2^m, 2^m)$ s obousměrnými linkami tak, že

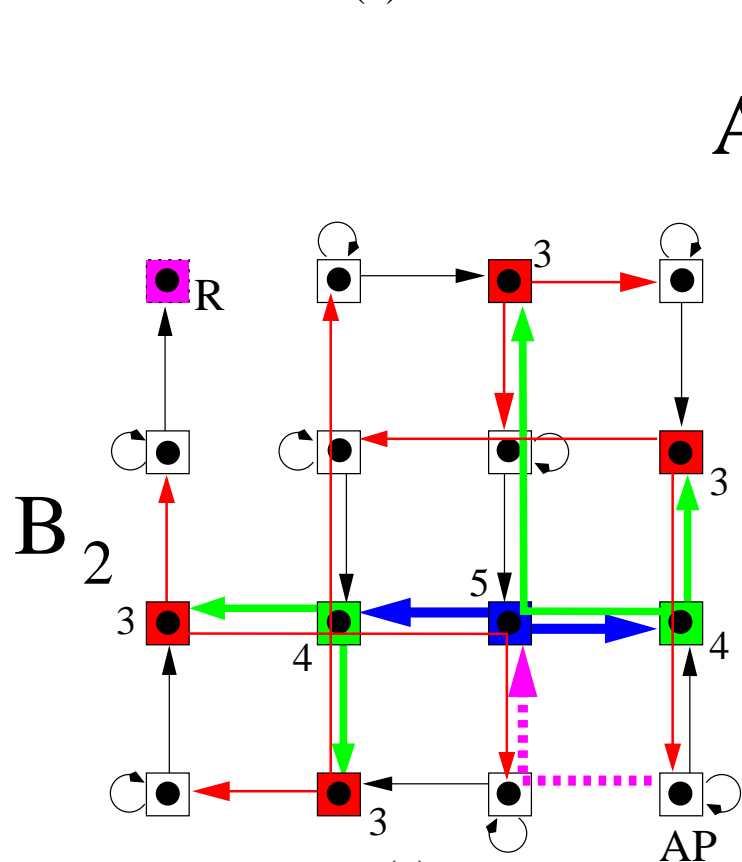
- $\text{load} = 2$: každý uzel mřížky je zatížen
 - přesně jedním listem stromu a
 - (kromě jednoho) přesně jedním vnitřním uzlem stromu,
- různé hrany stromu jsou mapované na disjunktní cesty v mřížce,
- $\text{dil} = 2^m + O(m)$.



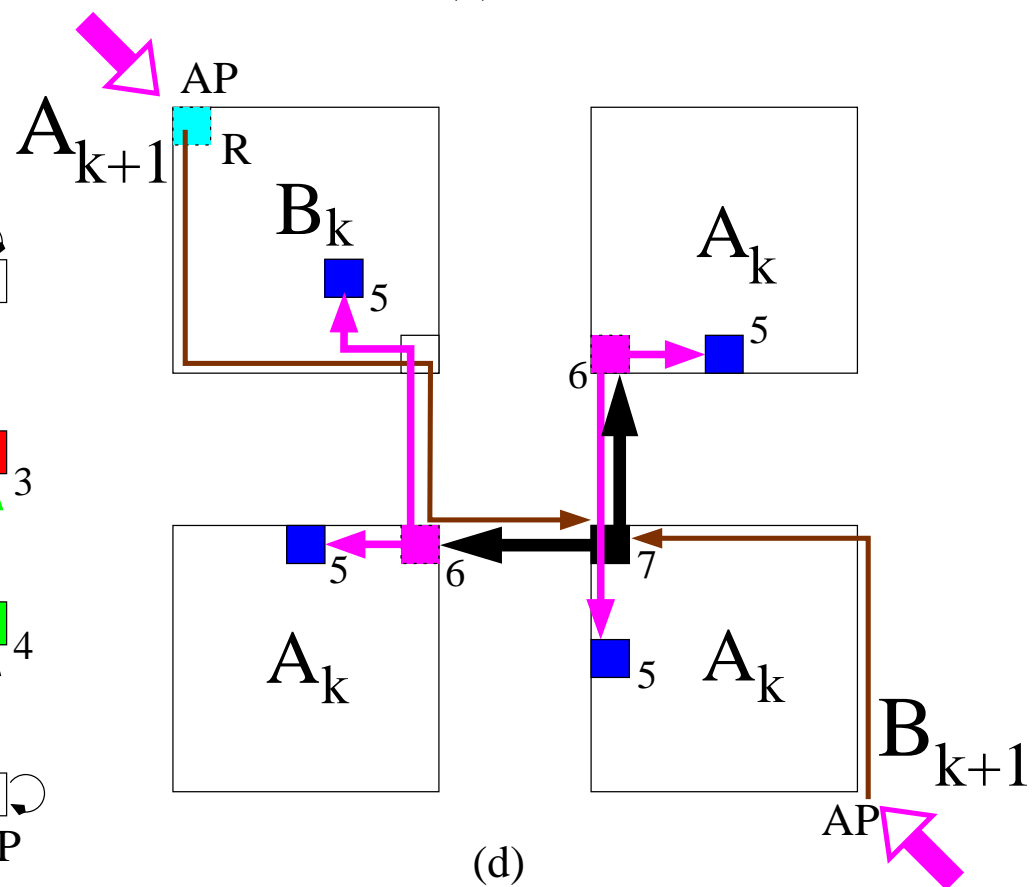
(a)



(b)



(c)

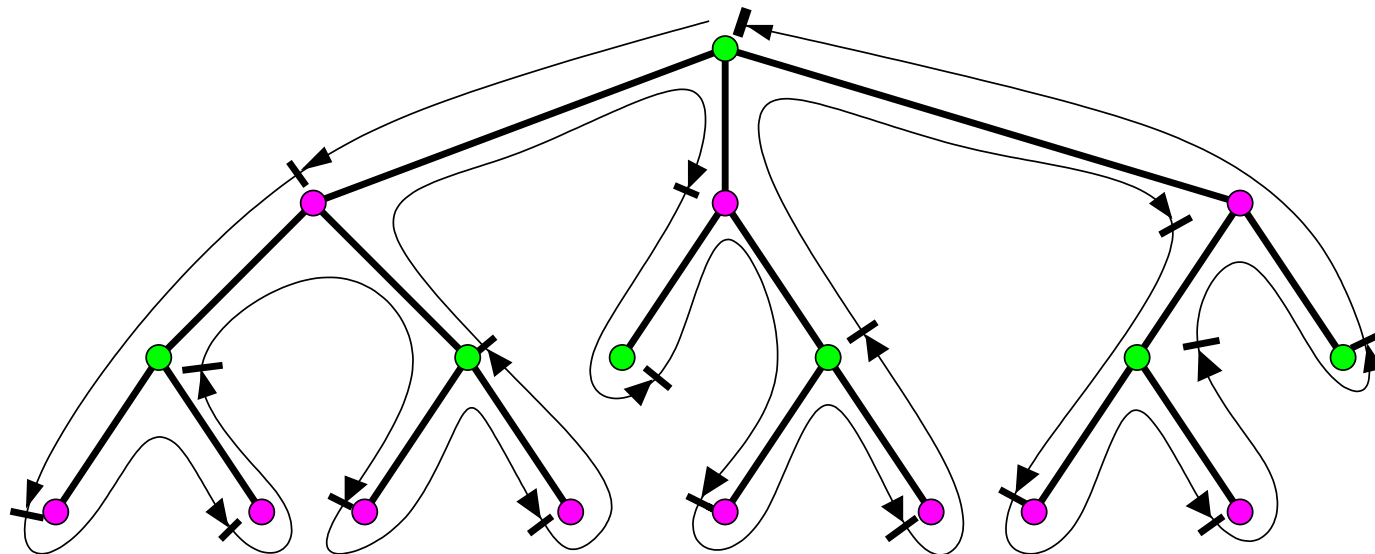


(d)

Věta 21. N -uzlová kružnice C může být vnořena do jakékoli N -uzlové sítě G s $\text{load} = 1$, $\text{dil} \leq 3$ a $\text{ecng} = 2$.

Důkaz.

1. Zkonstruuuj kostru T_G grafu G .
2. Rozděl její uzly na uzly **sudé úrovně** (V_0) a **liché úrovně** (V_1).
3. Procházej T_G **do hloubky zleva doprava (DFS)** a umísťuj postupně uzly C do T_G
 \iff
 - momentálně navštívený uzel je ve V_1 a je to **první** návštěva tohoto uzlu,
 - momentálně navštívený uzel je ve V_0 a je to **poslední** návštěva tohoto uzlu.

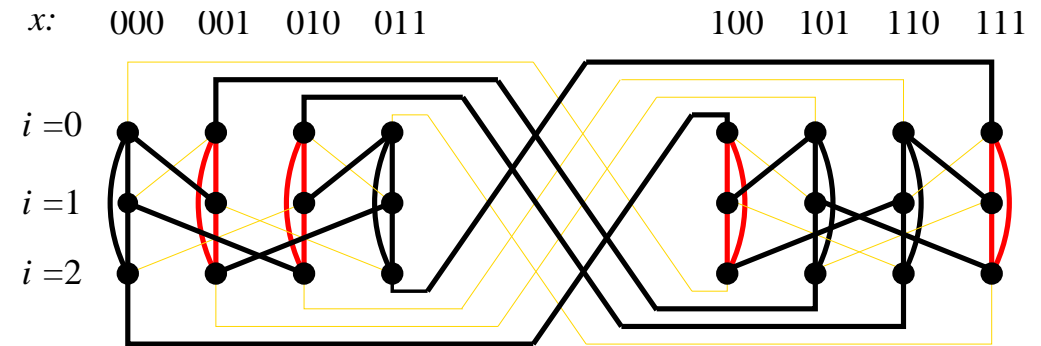
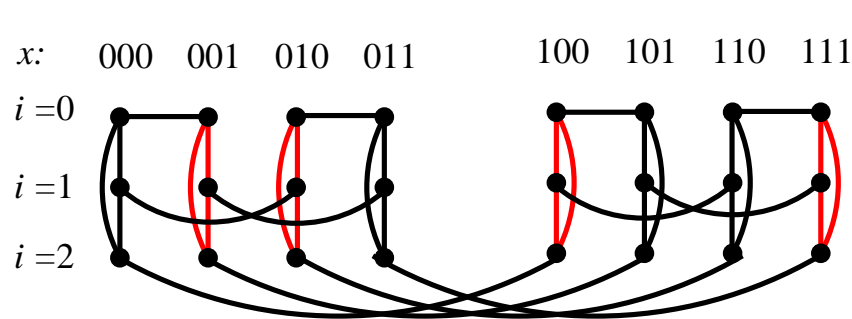


Věta 22. *CCC a oba typy motýlků jsou výpočetně ekvivalentní.*

Důkaz.

(1) CCC_n je faktorem wBF_n .

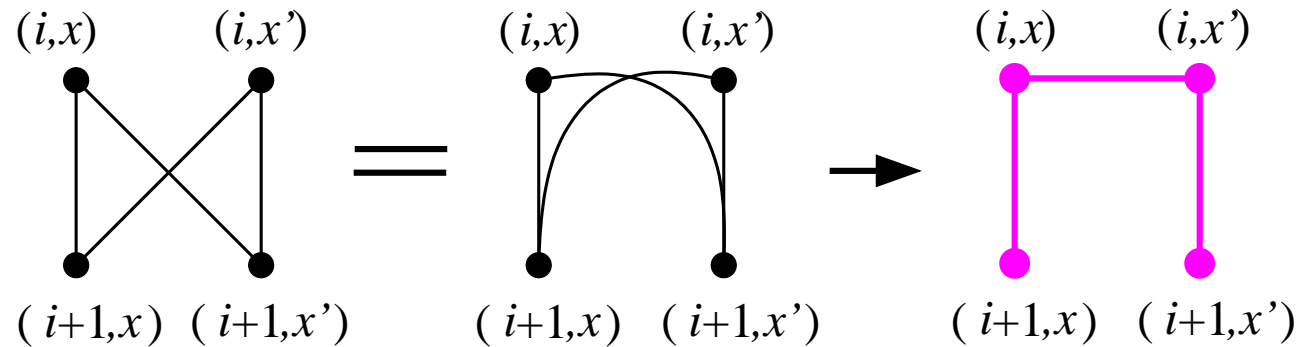
$\varphi : V(CCC_n) \rightarrow V(wBF_n)$ definovaný jako $\varphi((i, x)) = (i \oplus_n \text{parity}(x), x)$,
kde $\text{parity}(x) = 1$, jestliže x má lichou paritu, a $\text{parity}(x) = 0$ jinak.



CCC_3 je faktorem wBF_3 .

(2) wBF_n může být vnořen do CCC_n s $\text{dil} = \text{ecng} = 2$.

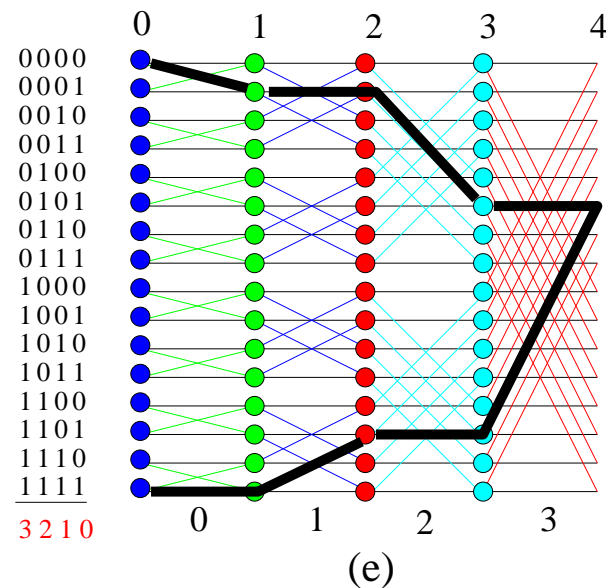
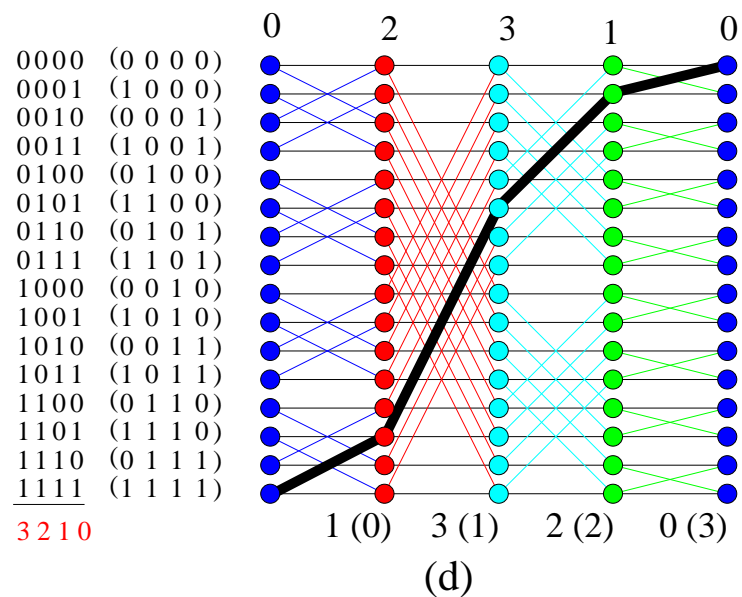
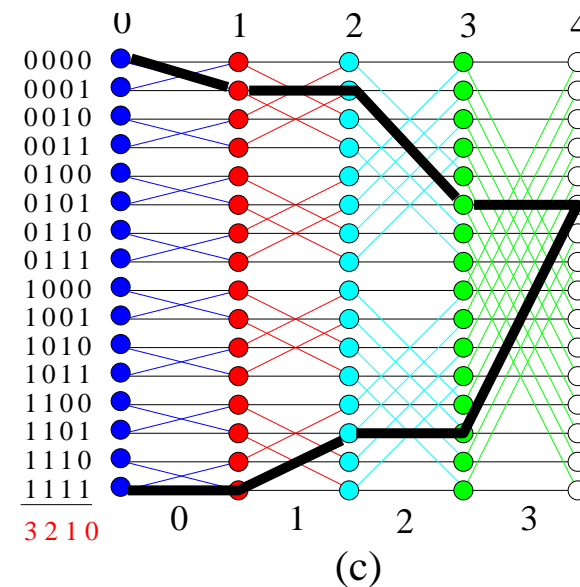
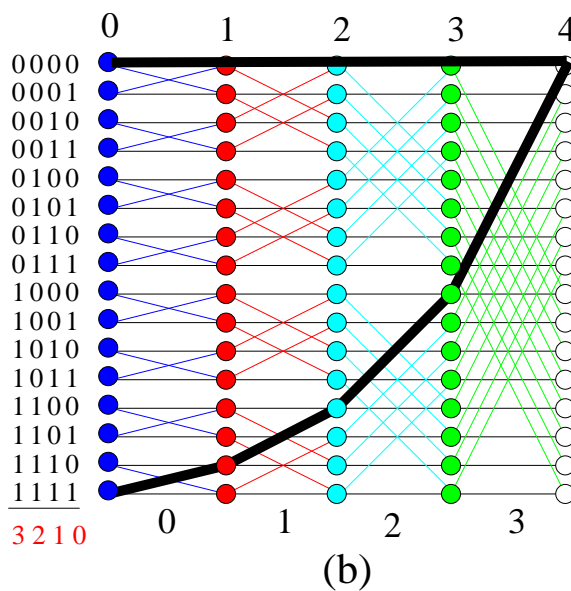
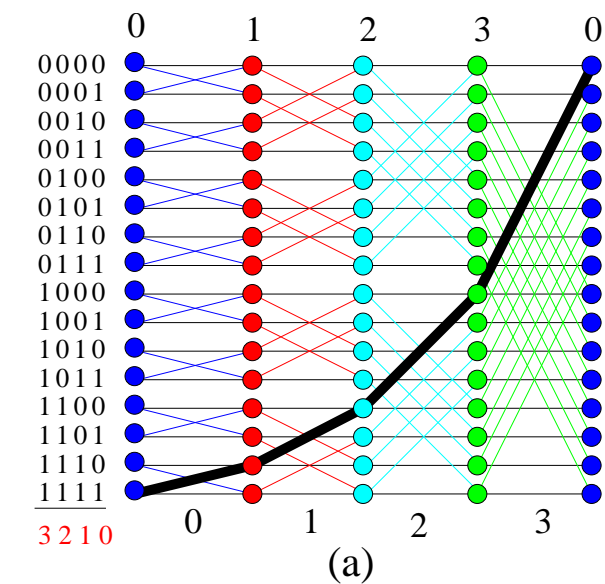
identické mapování uzlů: každý elementární 2×2 motýlek $\xrightarrow{\text{emb}}$ 3-hranovou cestu v CCC .



(3) oBF_n může být vnořen do wBF_n s $\text{load} = 2$ a $\text{dil} = 1$.

sloučením koncových uzlů řad oBF_n dostaneme kružnice ve wBF_n .

(4) wBF_n může být vnořen do oBF_n s $\text{dil} \leq 3$.



Zobecnitelný komentář k předchozímu příkladu:

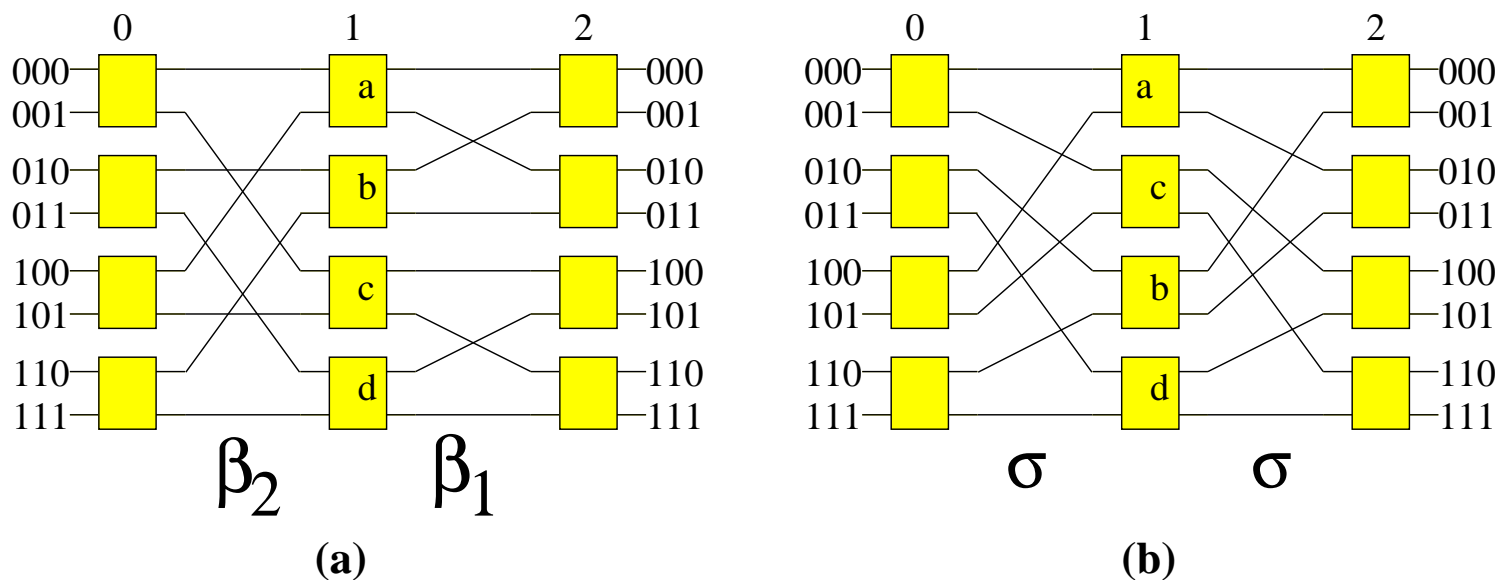
- (a) Cesta z uzlu $u = (0, 1111)$ do $v = (0, 0000)$ ve wBF_4 , bity se invertují v pořadí 0, 1, 2, 3.
- (b) Cesta z uzlu $u = (0, 1111)$ do $v = (0, 0000)$ v oBF_4 , bity se invertují v pořadí 0, 1, 2, 3, dilatace je $n = \log N$ (!!!!).
- (c) Cesta z uzlu $u = (0, 1111)$ do $v = (0, 0000)$ v oBF_4 , bity se invertují v pořadí 1, 3, 2, 0, dilatace je 3. Definujme permutaci bitů $\pi : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3, 2, 0\}$.
- (d) Permutace kružnic v wBF_4 indukovaná π^{-1} , čili kružnice k se přemístí na pozici kružnice $\pi^{-1}(k)$. V závorkách jsou původní čísla řádků a dimenzí.
- (e) Vnoření takto permutované wBF_4 do oBF_4 , čili grafu (d) do grafu (c).

Opakování z minulé přednášky:

Lemma 23. *Delta síť stejného typu a počtu a velikosti stupňů jsou izomorfní.*

Důkaz. Všechny tyto sítě se liší pouze v pořadí, v jakém jsou bity adresy vystavovány inverzi, každý bit právě jednou. Ale i stejného pořadí lze dosáhnout různými způsoby.

Příklad 24. Izomorfismus MIN sítí motýlek (a) a Omega (b).



Důsledek 25. *Stačí se zabývat vlastnostmi sítě motýlek.*

Definice 26. *Hyperkubický algoritmus v Q_n je normální, jestliže*

- 1. v jakémkoli kroku algoritmu jsou použity pouze hrany jedné dimenze hyperkrychle*
- 2. a jestliže v po sobě jdoucích krocích jsou používány po sobě jdoucí dimenze.*

Třída normálních hyperkubických algoritmů zahrnuje mnoho důležitých algoritmů, např., **D&C!!!**, maticové výpočty, třídění, kolektivní komunikační algoritmy.

Věta 27.

- *N -uzlová řídká hyperkubická síť může provést N -uzlový normální hyperkubický algoritmus s pouze konstantním zpomalením (technický důkaz).*
- *N -uzlový motýlek může simulovat jakoukoli N -uzlovou síť s omezeným stupěm se zpomalením $O(\log N)$ za předpokladu že je povoleno určité předzpracování (bude dokázáno v přednášce o permutacích).*

