PLANARITA A TOKY V SÍTÍCH

Separabilita a planarita

Seznámíme se s následujícími pojmy:

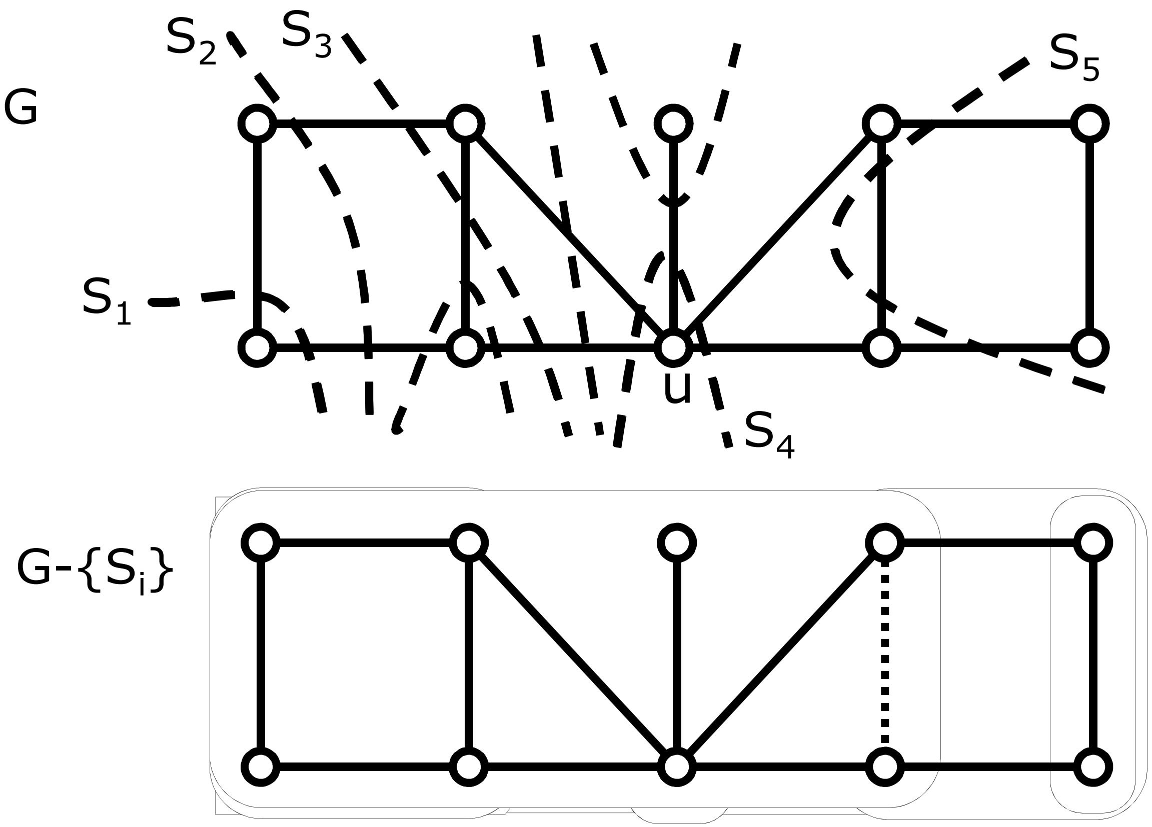
- **hranový řez, artikulace, neseparabilní graf**
- **planární graf, Eulerova formule, základní neplanární grafy, homeomorfismus**

Skripta odst. 3.3, str. 58 – 63

? Co je třeba z grafu odebrat, aby se "rozpadl" ?

Hranový řez ... minimální $S \subseteq H$: **$h(G - S) = h(G) - 1$**

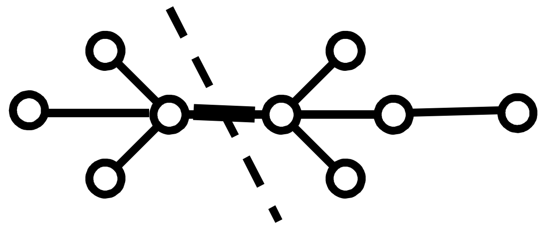
Artikulace grafu ... $u \in U$: $G - \{u\}$ má více komponent než G



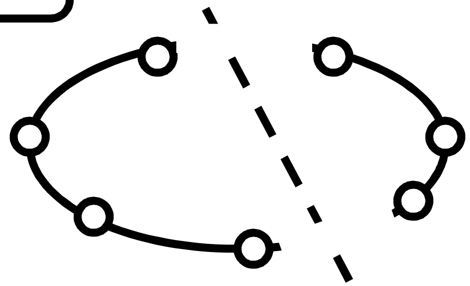
Vlastnosti hranových řezů a artikulací:

- Množina hran incidujících s uzlem **u** souvislého grafu je jeho **hranovým řezem**, právě **když u není artikulací**.
- Hranový řez obsahuje alespoň jednu **větev každé** kostry.

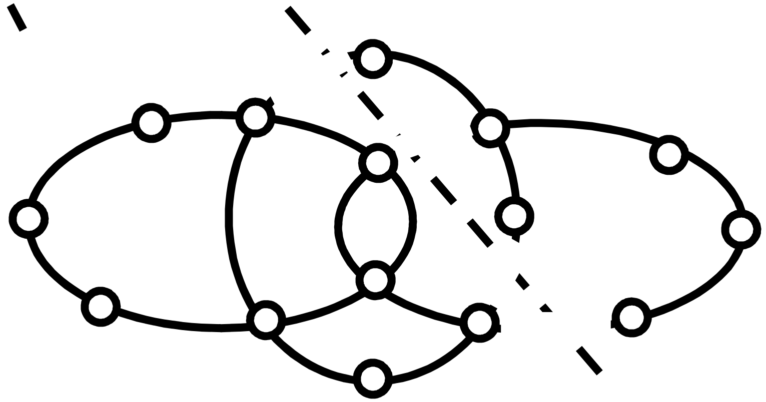
? Hranové řezy stromů,



kružnic,

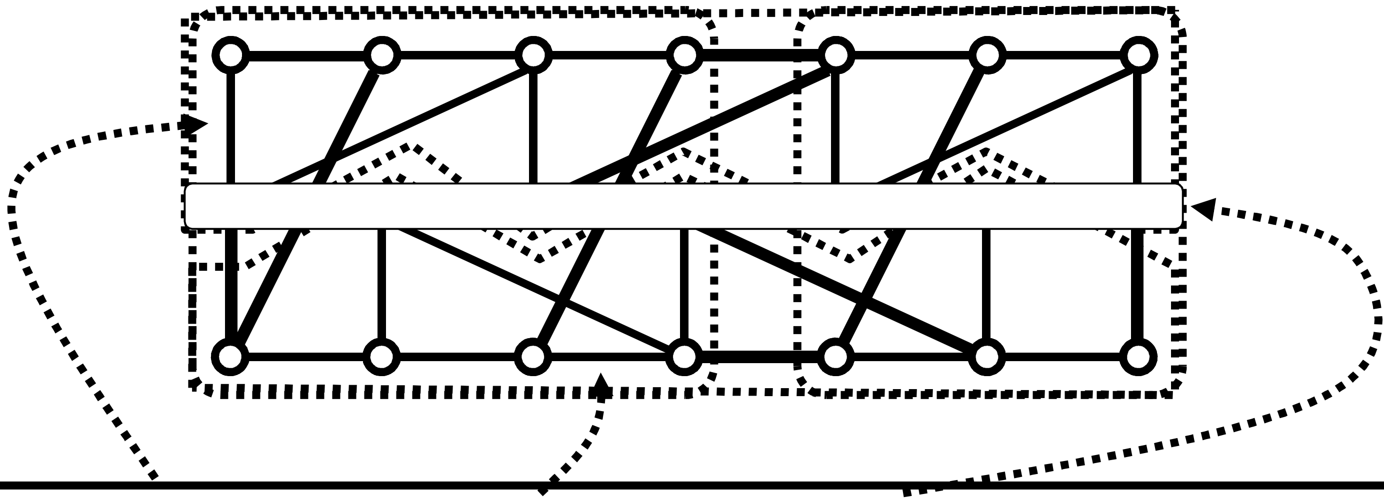


E-grafů ... ?



?Jak hledat hranové řezy?

Začneme rozkladem $\mathbf{U = U_1 \cup U_2}$ takovým, že podgrafy indukované množinami uzlů U_1 a U_2 jsou **souvislé.**



H = ´ ` $\cup$ ´ ` $\cup$ ´ `

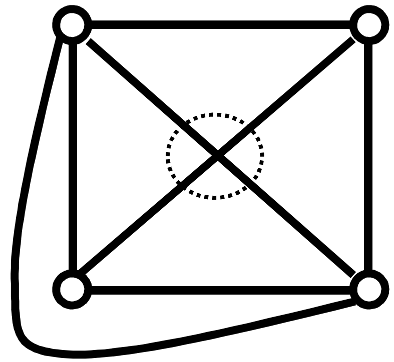
Fundamentální soustava hranových řezů / kružnic

Neseparabilní graf: pro $\forall\ G_1 \subseteq G$ mají G_1 a $G\text{-}G_1$ alespoň dva uzly společné

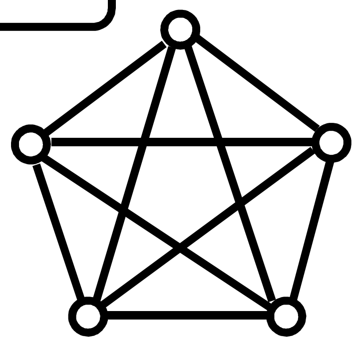
Planární grafy

Planární graf … lze nakreslit v rovině bez křížení hran

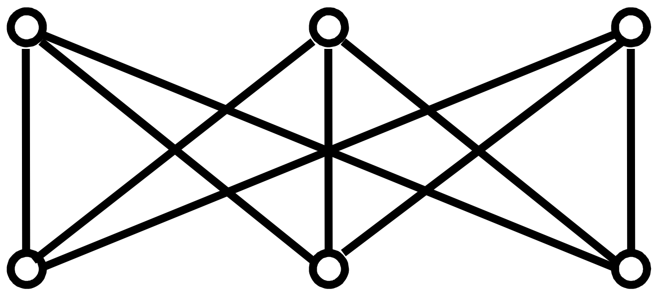
? Je K_4 planární ?



? a co K_5?



? a $K_{3,3}$?



V: Nechť G = ⟨H,U, ρ⟩ je (souvislý) planární graf. Potom platí

$$|H| - |U| + 2 = r \quad \textbf{(Eulerova formule)}$$

kde **r** je počet stěn grafu G (včetně vnější).

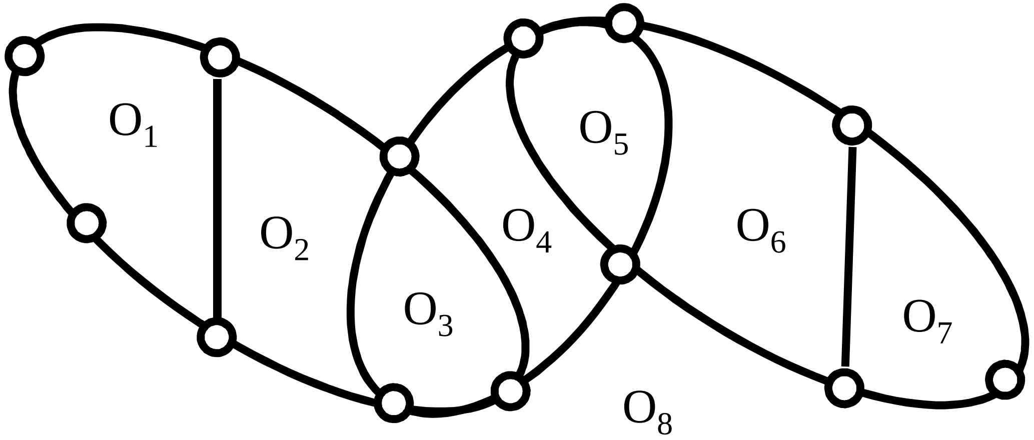
Jinak řečeno: $\mathbf{r = \mu(G)+1}$

|H| = 19

|U| = 13

r = 8

8 = 19 -13 + 2



Důkaz: indukcí podle r

Důsledek:

Je-li každá stěna ohraničena kružnicí o **k** hranách, pak

$$|H| = k \cdot (|U|-2) / (k-2)$$

D: $r=|H|-|U|+2$, $r.k = k.|H|-k.|U|+2k = 2.|H| \Rightarrow$

$$k.(|U|-2) = |H|.(k-2)$$

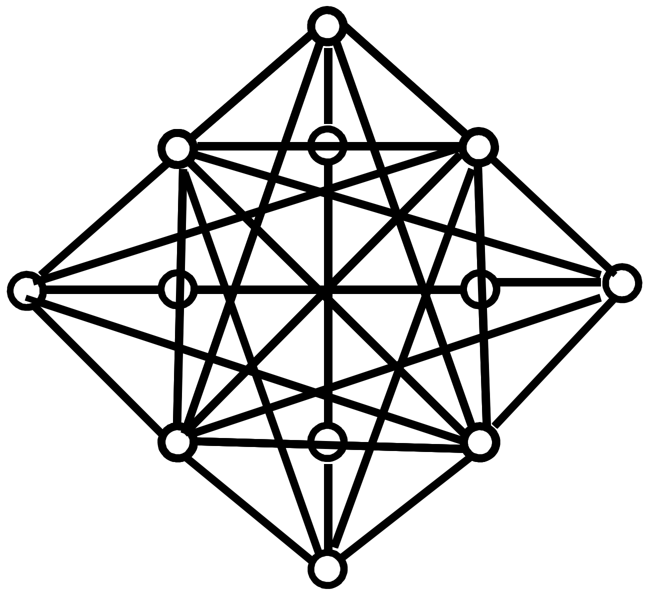
Takže:

- $|H| \leq 3 \cdot (|U| - 2)$ (pro k=3)
- $|H| \leq 2 \cdot (|U| - 2)$ pokud G neobsahuje K_3

$\Rightarrow$ planární grafy jsou **řídké**!

- **K_5 a $K_{3,3}$** jsou **neplanární** (základní neplanární grafy)

<u>V:</u> (Kuratowski) Graf G je **planární** $\Leftrightarrow$
neobsahuje podgraf **homeomorfní** s $\mathbf{K_5}$ **a** $\mathbf{K_{3,3}}$ **.**



Homeomorfismus $\mathbf{G_1 \sim G_2}$ ... jsou izomorfní nebo se jimi stanou po provedení **půlení hran** v jednom nebo obou

Kontrolní otázky

9.1 Charakterizujte neorientovaný graf, jehož každý uzel stupně většího než 1 je jeho artikulací.

9.2 Charakterizujte neorientovaný graf, jehož každý hranový řez je tvořen pouze jednou hranou.

9.3 Dokažte, že každý hranový řez má s každou kostrou grafu alespoň jednu společnou hranu.

9.4 Jak se mohou změnit hodnoty charakteristických čísel hodnost h(G), cyklomatické číslo μ(G), nezávislost α(G), dominance β(G) a chromatické číslo χ(G) pokud v grafu G provedeme rozpůlení jedné hrany?

9.5 Nalezněte neorientovaný graf s co nejmenším počtem hran, který je neplanární a má průměr roven 4.

9.6 Mějme dvojici homeomorfních grafů G1 a G2. Existuje nějaký vztah mezi jejich hodnostmi h(G1) a h(G2) nebo jejich cyklomatickými čísly μ(G1) a μ(G2)?

9.7 Určete všechny neizomorfní faktory úplného grafu s pěti uzly K_5, které mají tři nebo čtyři hrany a neobsahují žádnou kružnici. Tyto faktory rozdělte do skupin vzájemně homeomorfních grafů.

9.8 Nechť T1 a T2 jsou dva homeomorfní neorientované stromy. Co bude platit pro soubory stupňů těchto dvou stromů?

Toky v sítích

Seznámíme se s následujícími pojmy:

- **síť, kapacita hran, tok v síti, velikost toku**
- **maximální tok, řez sítě, kapacita řezu, zlepšující cesta**
- **algoritmus Forda-Fulkersona, sítě s omezeným tokem**
- **párování, maximální párování, přiřazovací úloha**

Skripta kap. 8, str. 148 – 155

CT 24.4.2008

Síť : $\mathbf{S = \langle G, q, s, t\rangle}$

$\mathbf{G} = \langle H, U\rangle$ - orientovaný graf

$\mathbf{q}$: $H \rightarrow R^+$ - **kapacita hran,** q(u,v) značíme q_{uv}

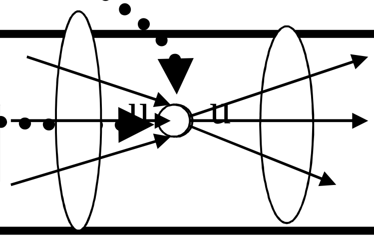
s - zdroj sítě

t - spotřebič sítě

Tok v síti S - ohodnocení hran f : $H \rightarrow R^+$ splňující

- $\forall (u,v) \in H : 0 \leq f(u,v) \leq q(u,v)$
- $\sum_{(u,v)\in H} f(u,v) - \sum_{(w,u)\in H} f(w,u) = 0$ *pro ∀u∈ U: u≠s, u≠t*

Velikost toku |f|



$$|f| = \sum_{(s,v)} f(s,v) - \sum_{(u,s)} f(u,s) = \sum_{(u,t)} f(u,t) - \sum_{(t,v)} f(t,v)$$

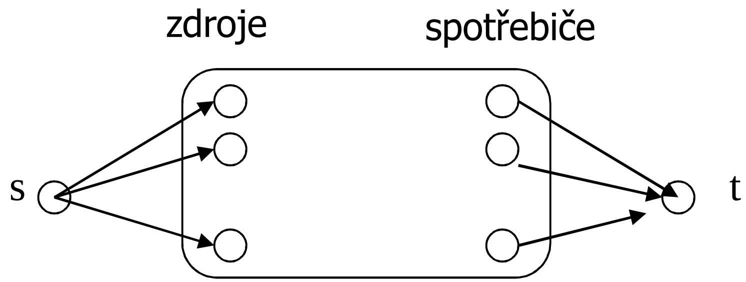
ST 23.4.2008

Základní otázky:

- **Jaká je maximální velikost s $\rightarrow$ t toku v síti?**
- **Jak se max. tok určí?**
- **Jak je max. tok rozložen do jednotlivých hran?**

<u>Variantní zadání:</u>

- **sítě s více zdroji a spotřebiči**
- **sítě s omezenou kapacitou uzlů**



- **sítě s omezeným minimálním tokem (ukážeme později)**

$$0 \leq r(u,v) \leq f(u,v) \leq q(u,v)$$

- **sítě s oceněným tokem**

$$c(f) = \sum f(u,v) \,.\, c(u,v) \quad {\scriptstyle (\forall (u,v) \in H)} \quad \text{- cena toku}$$

hledá se (přípustná) cirkulace s minimální cenou

Řešení základní úlohy

Řez sítě - hranový řez, který oddělí zdroj a spotřebič

$\{U_s, U_t\}$ - odpovídající rozklad množiny uzlů

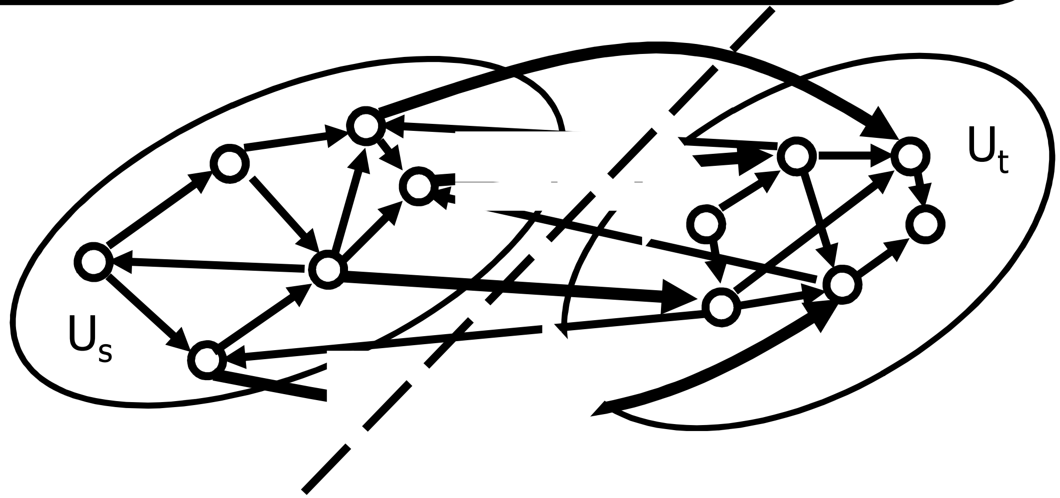
$H(U_s \times U_t)$ - hranový řez určený rozkladem uzlů

Kapacita řezu sítě:

$\mathbf{q(U_s \times U_t) = \sum q(u,v)}$

přes hrany (u,v),

$u \in U_s$, $v \in U_t$



<u>V:</u> Pro libovolný tok **f** a řez sítě $\mathbf{H(U_s \times U_t)}$ platí

$$|\mathbf{f}| \leq \mathbf{q(U_s \times U_t)}$$

Velikost toku tedy nepřekročí kapacitu (žádného) řezu sítě.
Jak poznáme, že daný tok je maximální?

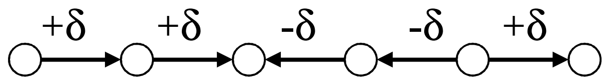
<u>V:</u> Tok **f je maximálním** tokem v síti $S=\langle G, q, s, t\rangle$ $\Leftrightarrow$ **neexistuje** (neorientovaná) cesta (tzv. **zlepšující cesta**) $P=\langle u_0,u_1,\ldots,u_n\rangle$, $u_0=s$, $u_n=t$ taková, že platí:

- $f(u_i, u_{i+1}) < q(u_i, u_{i+1})$ pro hrany $(u_i, u_{i+1})\in H$ $(s \to t)$
- $f(u_{i+1}, u_i) > 0$ pro hrany $(u_{i+1}, u_i)\in H$ $(s \leftarrow t)$

Zvýšení toku podél zlepšující cesty:

$\delta_a= \min(q(u_i, u_{i+1}) - f(u_i, u_{i+1}))$ $\delta_b= \min(f(u_{i+1}, u_i))$

$\delta = \min (\delta_a, \delta_b)$



Algoritmus Forda-Fulkersona

V: (**max flow - min cut**)

Velikost maximálního toku sítě je rovna kapacitě jejího minimálního řezu.

Ford-Fulkerson (S)

```
for ( Edge (u,v) in H(G) )  f(u,v) = 0;
while ( NajdiCestu(S) )  ZvyšTok(S);
return f;
```

NajdiCestu hledá zlepšující cestu prohledáváním sítě

d[u] průběžně počítané δ, stav[u], p[u] (+ pro $\rightarrow$, - pro $\leftarrow$)

```
boolean NajdiCestu (Node s) {
  for ( Node u in U(G) )  stav[u]=FRESH;
  p[s] = +s; d[s] = ∞; stav[s] = OPEN;
  do  { u = "libovolný otevřený uzel";
    stav[u] = CLOSED;
    for ( Node v in Γ(u) ) {
      if ( (stav[v]==FRESH) && (f(u,v)<q(u,v)) ) {
        stav[v]=OPEN; p[v]=+u; d[v]=min(d[u],q(u,v)-f(u,v));
    } }
    for ( Node v in Γ-1(u) ) {
      if (stav[v]==FRESH) && (f(v,u)>0) ) {
        stav[v]=OPEN; p[v]=-u; d[v]=min(d[u],f(v,u));
    } }
  } while ( ( "neexistuje otevřený uzel" ) || (u == t) );
  return (u == t);
}
```

```
void ZvyšTok (Node s) {
  x = t;  δ = d[t];
  do { v = x; sgn = p[v];  u = abs(sgn);
    if (sgn>0)  f(u,v) += δ;
    else  f(v,u) -= δ;
    x = u;
  } while ( v==s );
}
```

? Složitost ?

NajdiCestu … **O(|U|+|H|)** **ZvyšTok** … **O(|U|)**

? Celý algoritmus ?

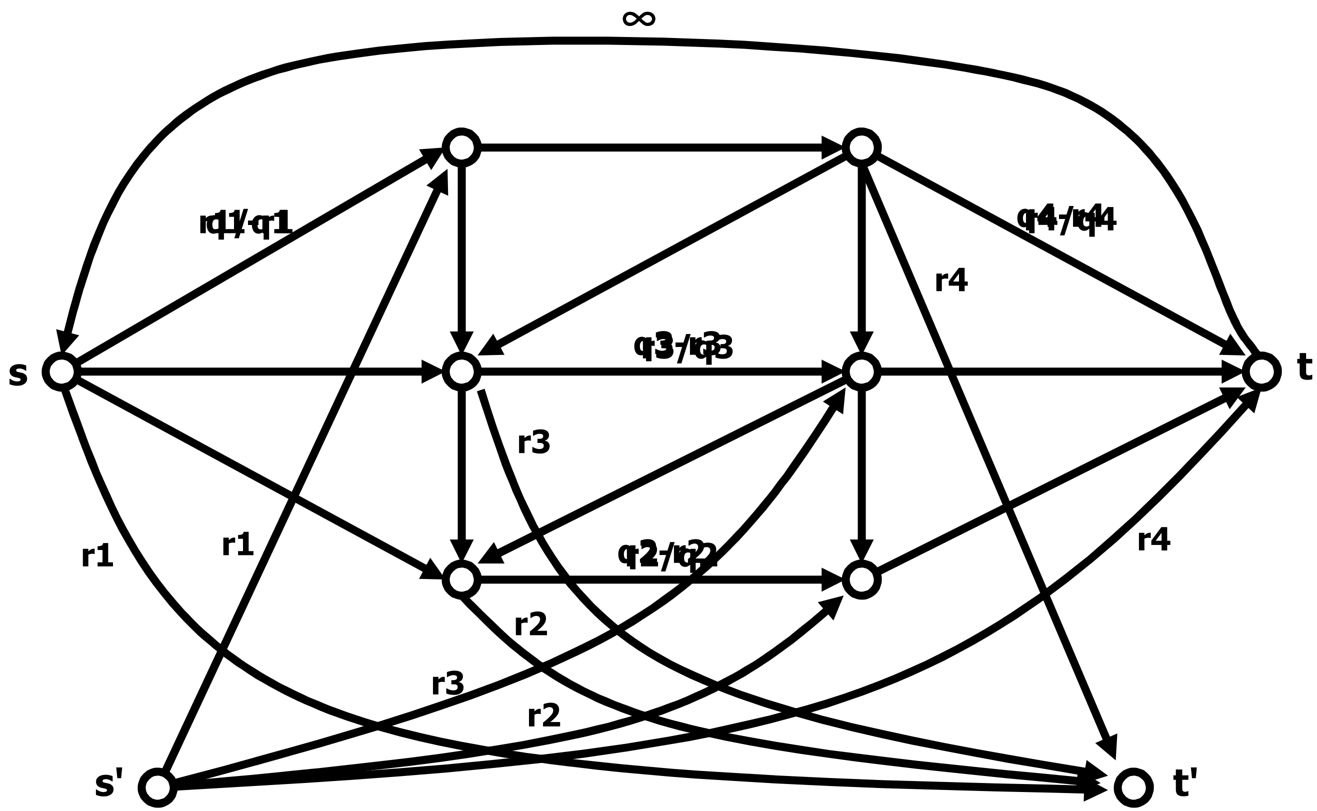
O(|U| . |H|2) , O(|U|**2 . |H|), O(|U|**3)**

Další zrychlení pro speciální případy

… až na **O(|U| . lg|U|)** pro planární sítě

Sítě s omezeným minimálním tokem

Metoda řešení: převod na základní úlohu



? Co dál ?

Nalezneme maximální tok s' $\rightarrow$ t'.

?Nasycuje nově přidané hrany?

ANO - máme přípustný tok a zlepšujeme jej standardně podél zlepšujících cest (ale nesmí klesnout pod hodnotu omezení ve hranách, kde to je požadováno!!!)

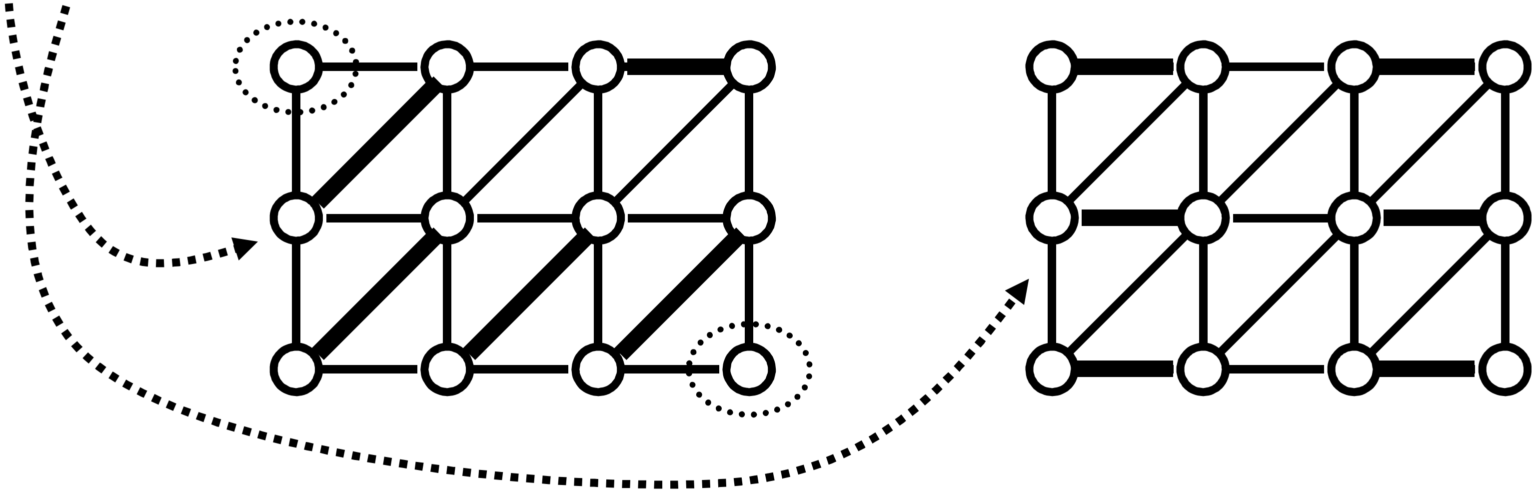
NE - úloha nemá řešení

Maximální párování

Využití algoritmu maximálního toku k hledání max. párování

Párování v grafu - "nezávislá" podmnožina hran (žádné dvě nemají společný uzel).

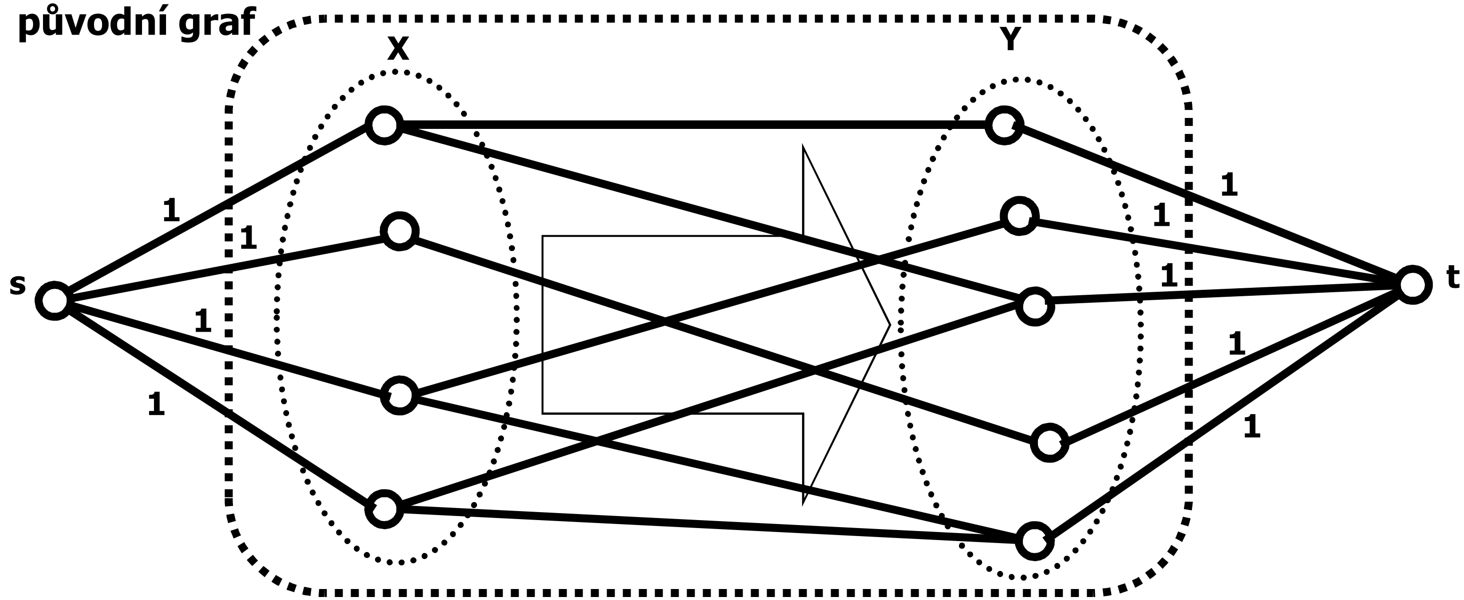
Perfektní párování pokrývá všechny uzly. Při ohodnocených hranách můžeme hledat **nejlevnější** maximální párování nebo **nejdražší** párování.



Přiřazovací úloha - nejlevnější perfektní párování v úplném bipartitním grafu $K_{n,n}$.

<u>Příklad na maximální párování:</u>

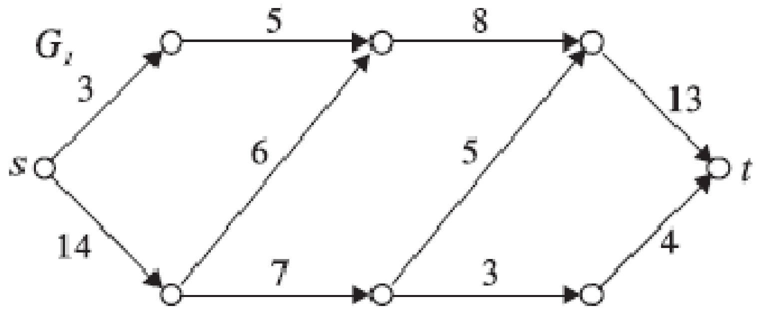
Hledání maximálního párování v neorientovaném bipartitním grafu G s rozkladem uzlů $U = X \cup Y$

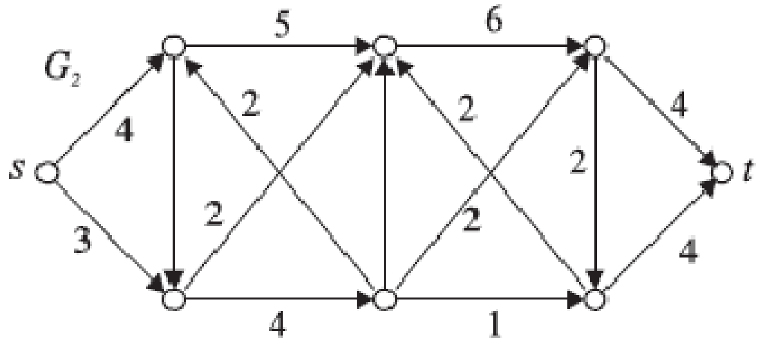


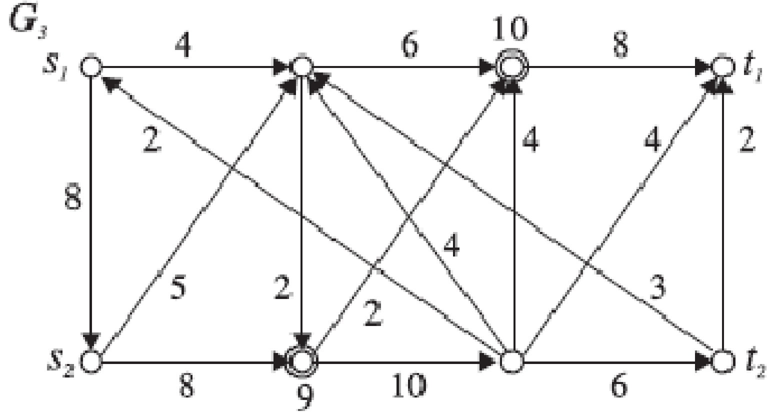
Nalezneme maximální tok pomocí algoritmu Ford-Fulkerson – získáme maximální párování (hrany s nenulovým tokem).

Kontrolní otázky

9.9 Určete maximální tok ze zdrojů do spotřebičů v sítích G_1 až G_3. Dvojitě vytažené uzly v síti G_3 mají kapacitu omezenu uvedenou hodnotou.







Kontrolní otázky

9.10 Předpokládejte, že síť má tvar kořenového stromu, zdroj sítě je umístěn v kořeni s. Navrhněte efektivní algoritmus, který pro každý list u_i stromu uvažovaný jako jediný spotřebič určí maximální tok $s \to u_i$.

9.11 Předpokládejte, že síť má tvar kořenového stromu, zdroj sítě je umístěn v kořeni s. Navrhněte efektivní algoritmus pro určení takových minimálních kapacit jednotlivých hran, které zajistí, že do všech listů $\{u_i\}$ stromu lze současně dopravit maximální tok velikosti 1.