Uvažujte jazyk výrazů sestavených podle následující gramatiky:

$$E \to Z \mid \text{INPUT} \mid [E \oplus E] \mid [E \otimes E],$$

kde Z reprezentuje celá čísla (literály) a INPUT označuje vstup programu. Výrazy vyhodnocujeme podle následující operační sémantiky: vstupní funkce $\mathit{input} : Z \times E \to Z \times E$ je definována předpisem $\mathit{input}(z, e) = (z, e)$, výstupní funkce $\mathit{output} : Z \times Z \to Z$ je definována předpisem $\mathit{output}((z, z')) = z'$ a přepisovací relace $\rightsquigarrow : (Z \times E) \times (Z \times E)$ je definována pravidly ($z, z', z_1, z_2 \in Z, e_1, e_2 \in E$)

$$\frac{}{(z, z') \rightsquigarrow (z, z')}$$

$$\frac{}{(z, \text{INPUT}) \rightsquigarrow (z, z)}$$

$$\frac{(z, e_1) \rightsquigarrow (z, z_1) \qquad (z, e_2) \rightsquigarrow (z, z_2)}{(z, [e_1 \oplus e_2]) \rightsquigarrow (z, z_1 + z_2)}$$

$$\frac{(z, e_1) \rightsquigarrow (z, z_1) \qquad (z, e_2) \rightsquigarrow (z, z_2)}{(z, [e_1 \otimes e_2]) \rightsquigarrow (z, z_1 * z_2)}$$

1. Napište odvození dokazující, že $(3, [[\text{INPUT} \oplus 1] \otimes \text{INPUT}]) \rightsquigarrow (3, 12)$. Odvození by mělo mít podobu stromu vytvořeného z odvozovacích pravidel, kde dole (v kořeni) je dokazovaný výrok a v listech jsou axiomy (pravidla bez předpokladů).

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{(3,\text{INPUT}) \rightsquigarrow (3,3)} \qquad \dfrac{}{(3,1) \rightsquigarrow (3,1)}}{(3,[\text{INPUT} \oplus 1]) \rightsquigarrow (3,4)} \qquad \dfrac{}{(3,\text{INPUT}) \rightsquigarrow (3,3)}}{(3, [[\text{INPUT} \oplus 1] \otimes \text{INPUT}]) \rightsquigarrow (3, 12)}$$

2. Předělejte odvozovací pravidla tak, aby místo sémantiky velkého kroku definovala sémantiku malého kroku. Formát konfigurace $(Z \times E)$ zachovejte, celkovou sémantiku samozřejmě také. Vytvořte opravdovou sémantiku malého kroku, tzn. sémantiku, která netriviální výrazy vyhodnocuje ve více netriviálních krocích.

$$(z, z') \rightsquigarrow (z, z')$$

$$(z, \text{INPUT}) \rightsquigarrow (z, z)$$

$$(z, [z_1 \oplus z_2]) \rightsquigarrow (z, z_1 + z_2)$$

$$(z, [z_1 \otimes z_2]) \rightsquigarrow (z, z_1 * z_2)$$

$$\frac{(z, e_1) \rightsquigarrow (z, e_1')}{(z, [e_1 \oplus e_2]) \rightsquigarrow (z, [e_1' \oplus e_2])}$$

$$\frac{(z, e_2) \rightsquigarrow (z, e_2')}{(z, [e_1 \oplus e_2]) \rightsquigarrow (z, [e_1 \oplus e_2'])}$$

$$\frac{(z, e_1) \rightsquigarrow (z, e_1')}{(z, [e_1 \otimes e_2]) \rightsquigarrow (z, [e_1' \otimes e_2])}$$

$$\frac{(z, e_2) \rightsquigarrow (z, e_2')}{(z, [e_1 \otimes e_2]) \rightsquigarrow (z, [e_1 \otimes e_2'])}$$

3. Napište denotační sémantiku výše definovaného jazyka, která výraz převede na funkci z celých čísel do celých čísel. Dejte si pozor na formální správnost vašeho popisu — dá se podle ní poznat, jestli víte, co děláte, nebo jestli jen obklopujete podvýrazy dvojitými závorkami.

   Příklad: $[\![2]\!] = \lambda x.2$ (jinak zapsáno $[\![2]\!] = f$, kde $f(x) = 2$), $[\![[[\text{INPUT} \oplus 1] \otimes \text{INPUT}]]\!] = \lambda x.(x+1) * x$ (nebo $[\![[[\text{INPUT} \oplus 1] \otimes \text{INPUT}]]\!] = f$, kde $f(x) = (x+1) * x$).

$$
\begin{aligned}
[\![z]\!] &= \lambda x.z \\
[\![\text{INPUT}]\!] &= \lambda x.x \\
[\![e_1 \oplus e_2]\!] &= \lambda x.([\![e_1]\!](x)) + ([\![e_2]\!](x)) \\
[\![e_1 \otimes e_2]\!] &= \lambda x.([\![e_1]\!](x)) * ([\![e_2]\!](x))
\end{aligned}
$$

Následující otázky nejsou součástí písemky, slouží pouze jako podklady pro radu OI.

1. Napište definici operátoru $\subseteq$ ("být podmnožinou"), můžete v ní použít operátor $\in$ ("být prvkem").

$$A \subseteq B \equiv \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

2. Napište definici tranzitivního uzávěru relace R nad množinou A. Pokud chcete, můžete si nadefinovat pomocné množiny/relace/funkce.

$$
\begin{aligned}
R^* = &\{(a,a) | a \in A\} \cup R \cup \\
&\{(a_1, a_3) \in A \times A | \exists a_2 \in A((a_1, a_2) \in R^* \vee (a_2, a_3) \in R^*)\}
\end{aligned}
$$

   Pozn.: k definici tranzitivního uzávěru se dá přistoupit opravdu hodně různými způsoby, zde je jen jeden z nich.

3. Napište formuli (výrok), která rozhodne, zda je relace $R \subseteq A \times B$ funkce z A do B (jinými slovy napište, co musí relace splňovat, aby mohla být označena za funkci).

$$f \text{ je funkce } \equiv \forall a \in A, b_1, b_2 \in B((a, b_1) \in f \vee (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2)$$