1.9.19 Tvrzení. Platí

$$\text{3-barevnost} \lhd_p ILP.$$

1.9.20 Převod 3-barevnosti na ILP. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Zkonstruujeme instanci I úlohy celočíselného lineárního programování takovou, že I má přípustné řešení právě tehdy, když graf G je 3-barevný.

Všechny proměnné budou nabývat hodnot 0 nebo 1 (tj. bude se jednat o tzv. 0-1 celočíselné lineární programování).

Proměnné: Pro každý vrchol $v \in V$ zavedeme tři proměnné:

$$x_v^c, x_v^m, x_v^z.$$

Význam: Fakt, že proměnná x_v^b je rovna 1, $b \in \{c, m, z\}$, znamená, že vrchol v má barvu b.

Podmínky:

- Pro každý vrchol $v \in V$ máme rovnici, která zaručuje, že vrchol v má právě jednu barvu – buď c nebo m nebo z:

$$x_v^c + x_v^m + x_v^z = 1.$$

- Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ máme tři nerovnosti (pro každou barvu jednu) zaručující, že oba vrcholy u a v nemohou mít stejnou barvu:

$$x_u^c + x_v^c \leq 1, \;\; x_u^m + x_v^m \leq 1, \;\; x_u^z + x_v^z \leq 1.$$

Platí: Graf G je 3-barevný právě tehdy, když I má přípustné řešení.

Instance I má $3\,|V|$ proměnných a $|V| + 3\,|E|$ podmínek. Jedná se tedy o instanci velikosti $\mathcal{O}(n + m)$, kde $n = |V|$ a $m = |E|$.

1.9.21 Důsledek. Protože ILP je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

1.9.22 Rozklad množiny. Je dána konečná množina X a systém jejích podmnožin $\mathcal{A}$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je rozklad množiny X, jestliže jsou splněny následující dvě podmínky

1. každý prvek $x \in X$ leží v některé podmnožině $B \in \mathcal{A}$, (tj. $\bigcup\{B \mid B \in \mathcal{A}\} = X$);

2. žádné dvě různé podmnožiny z $\mathcal{A}$ nemají společný prvek, tj. jsou po dvou disjunktní.

1.9.23 Problém rozkladu. Úloha: Je dána konečná množina X a systém jejích podmnožin $\mathcal{S}$.

Otázka: Je možné z $\mathcal{S}$ vybrat prvky tak, že tvoří rozklad množiny X? Jinými slovy, existuje $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ tak, že $\mathcal{A}$ je rozklad množiny X?

1.9.24 Tvrzení. Platí

$$\text{3-barevnost} \ \lhd_p \ \text{problém rozkladu.}$$

1.9.25 Převod vrcholového pokrytí na problém rozkladu. Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček $G = (V, E)$. Zkonstruujeme množinu X a systém jejích podmnožin $\mathcal{S}$ tak, že z graf G je tříbarevný právě tehdy, když ze systému $\mathcal{S}$ lze vybrat rozklad množiny X.

Množina X:

- Pro každý vrchol $v \in V$ dáme do množiny X prvky

$$v, p_v^c, p_v^m, p_v^z.$$

- Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ dáme do množiny X prvky

$$q_{uv}^c, q_{uv}^m, q_{uv}^z, q_{vu}^c, q_{vu}^m, q_{vu}^z.$$

Množina X má $4\,|V| + 6\,|E|$ prvků.

Systém podmnožin $\mathcal{S}$ tvoří tyto množiny:

1. Pro každý vrchol $v \in V$:

$$\{v, p_v^c\}, \{v, p_v^m\}, \{v, p_v^z\}.$$

2. Pro každý vrchol $v \in V$ označme $N(v)$ množinu všech sousedů vrcholu v (tj. $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$). Do $\mathcal{S}$ dáme množiny:

$$S_v^c = \{p_v^c, q_{vu}^c \mid u \in N(v)\}, S_v^m = \{p_v^m, q_{vu}^m \mid u \in N(v)\}, S_v^z = \{p_v^z, q_{vu}^z \mid u \in N(v)\}.$$

3. Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ dáme do $\mathcal{S}$ množiny:

$$\{q_{uv}^c, q_{vu}^m\}, \{q_{uv}^c, q_{vu}^z\}, \{q_{uv}^m, q_{vu}^c\}, \{q_{uv}^m, q_{vu}^z\}, \{q_{uv}^z, q_{vu}^c\}, \{q_{uv}^z, q_{vu}^m\}.$$

Systém $\mathcal{S}$ má $3\,|V|$ množin z 1), $3\,|V|$ množin z 2) a $6\,|E|$ množina z 3).

Je-li graf G 3-barevný, je možné jeho vrcholy obarvit barvami $\{c, m, z\}$. Označme $b(v)$ barvu vrcholu $v \in V$. Z systému $\mathcal{S}$ vybereme $\mathcal{A}$ takto:

$\mathcal{A}$ se skládá z:

1. $\{v, p_v^{b(v)}\}$ pro všechny $v \in V$,
2. $S_v^{b_1}$ a $S_v^{b_2}$, kde b_1 a b_2 jsou zbylé dvě barvy, kterými není obarven vrchol v,
3. $\{q_{uv}^{b(u)}, q_{vu}^{b(v)}\}$ pro každou hranu $e = \{u, v\}$,

Jestliže existuje rozklad $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ množiny X, pak sestrojíme obarvení grafu G takto:

$$b(v) := b, b \in \{c, m, z\} \quad \text{iff} \quad \{v, p_v^b\} \in \mathcal{A}.$$

Není těžké dokázat, že z volby systému $\mathcal{S}$ a $\mathcal{A}$ vyplývá: b je obarvení vrcholů třemi barvami.

1.9.26 Důsledek. Protože problém rozkladu je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.