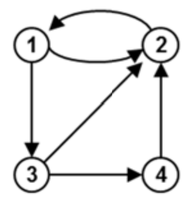
B **Jméno** ______________________________

V následujících otázkách je pouze správná odpověď hodnocena uvedeným počtem bodů. Částečná nebo nepřesná odpověď je hodnocena 0 body. Než odpověď vepíšete do archu, dobře si ji rozmyslete a připravte nanečisto na jiném papíru.

1. (b.)

1 .. 4
2 .. 4
3 .. 2
4 .. 1

Zkoumaná archeologická naleziště a způsob, jakým jsou propojena, lze znázornit uvedeným orientovaným grafem. V i-tém uzlu grafu se nalézá tým T_i, v němž je p_i archeologů. V daném čase T se každý tým T_i rozdělí na tolik přesně stejně velkých skupin, kolik je výstupní stupeň uzlu i, každá skupina zvolí jednu výstupní hranu a po ní přejde do sousedního uzlu, kde skončí v čase T+1. Po tomto přesunu bude v každém uzlu přesně stejný počet archeologů jako před časem T. Určete, jaký je minimální počet archeologů na každém nalezišti, který umožňuje přesun s těmito vlastnostmi.



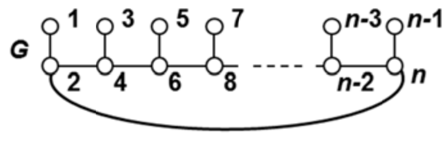
2. (b.)

Je dána abeceda A = {a,b,c,d,e,f} a množina M slov nad A, M = {dba, dbd, dccba, dccbb, dXf, dcYcb}, Nakreslete přechodový diagram slovníkového automatu pro množinu M, který lze použít pro hledání v textu nad A libovolného slova množiny M. Váš automat může být deterministický i nedeterministický.

3. (b.)

n

Je dán graf G = (V, E). Automorfizmus grafu G je takové prosté zobrazení *f* z V na V (bijekce), pro které platí
$\forall(u, v) \in V\times V$: $(u, v) \in E \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E$.
Určete počet automorfizmů grafu G na obrázku, pro $n > 4$.



Kružnici (2, 4, 6, 8, ... *n*) i s navěšenými uzly stupně 1 lze "pootočit " o 0, 1, 2, 3, ... $n/2-1$ uzlů v jednom směru (otáčení v opačném směru nepřinese nic nového, zdůvodněte), což poskytuje právě $n/2$ automorfizmů (včetně identity). Celou kružnici lze navíc nejprve zrcadlit podle vertikální osy (uzly se na sebe zobrazují $2 \leftrightarrow n$, $4 \leftrightarrow n-2$, atd.), čímž získáváme dvojnásobek uvedených možností.

4. (b.)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Najděte LU rozklad dané matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

5. (b.)

$\Theta(n^2\cdot\mathrm{sqrt}(n))$

Je dán graf G = (V, E). Platí $|V| = n$, $|E| \in \Theta(n\cdot\mathrm{sqrt}(n))$. Graf je reprezentován maticí incidence. Určete asymptotickou složitost algoritmu BFS v závislosti na *n*, za předpokladu, že algoritmus při zjišťování informací o grafu využívá pouze danou reprezentaci G.

V každém otevřeném uzlu je nutno projít horizonálně celou matici incidence, abychom získali všechny sousedy aktuálního uzlu. V každém uzlu tak strávíme čas uměrný počtu hran. Při *n* uzlech to bude $n \cdot \Theta(n\cdot\mathrm{sqrt}(n)) = \Theta(n^2\cdot\mathrm{sqrt}(n))$

6. (b.)

Afinní transformace $T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$, je složena ze tří zobrazení $T(\boldsymbol{x}) = f_1(f_2(f_3(\boldsymbol{x})))$.
Zobrazení f_1 je rotace o 90° v záporném smyslu (po směru hod. ručiček) , zobrazení f_2 je posunutí o jednotku v kladném směru osy *y* a zobrazení f_3 je

B

Jméno ______________________________

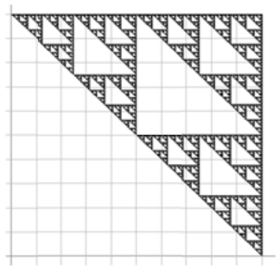
$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ -0.4 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

kontrakce s faktorem 0.4.
Napište T($\boldsymbol{x}$) ve tvaru T($\boldsymbol{x}$) = A$\boldsymbol{x}$ + $\boldsymbol{z}$, kde A $\in \mathbf{R}^{2\times 2}$ a $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^2$.

7. (b.)

$T_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$
$T_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
$T_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Śierpińského trojúhelník patří k nejznámějším fraktálům. Na obrázku je schématicky zachycena jedna z jeho možných podob. Je to také množina bodů v rovině, která je atraktorem iterovaného systému funkcí, který obsahuje tři afinní transformace. Určete tyto transformace.
Předpokládejte, že levý horní roh trojúhelníka leží v bodě (0, 1), pravý horní roh leží v bodě (1, 1) a pravý dolní roh leží v bodě (1, 0).



8. (b.)

$\binom{n}{4}$

Uvažujeme permutace množiny M = {1, 2, 3, ..., n}. Cyklus délky k v permutaci p je množina A = {a_1, a_2, ..., a_k} $\subseteq$ M, pro kterou platí:
$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_k \le n$,
$p(a_j) = a_{j+1}$ pro $1 \le j < k$, $p(a_k) = a_1$.

Určete, kolik je takových permutací množiny {1, 2, 3, ..., n}, které obsahují právě dva cykly, z nichž jeden má délku 4 a druhý délku n–4.

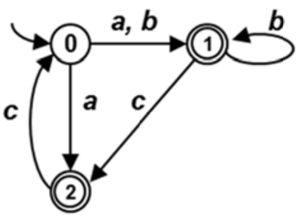
Když vybereme z M právě čtyři čísla, označme je v rostoucím pořadí a_1, a_2, a_3, a_4. Tak získáme právě jeden cyklus. Tudíž počet cyklů je roven počtu způsobů, jimiž lze z n-prvkové množiny vybrat čtyři prvky, což je vyjádřeno kombinačním číslem neboli binomickým koeficientem $\binom{n}{4}$.

9. (b.)

Nakreslete přechodový diagram automatu, kterým lze v textu nad abecedou {a, b, c} vyhledávat všechny podřetězce, které mají od slova cc Levenshteinovu vzdálenost rovnou nejvýše 1.

10. (b.)

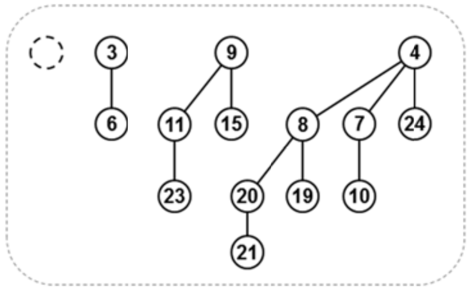
Převeďte daný NKA na DKA a napište jeho přechodovou tabulku.

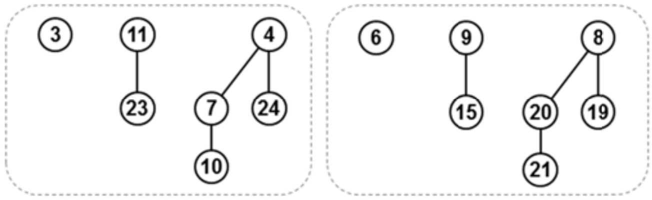


11. (b.)
Když spojíme pomocí operace Merge dvě binomiální haldy na obrázku získáme jedinou výslednou binomiální haldu. Nakreslete ji.

B **Jméno** ________________________________

Více možností, např.

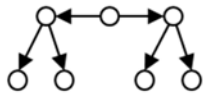




12. (b.)

80

Napište. kolika způsoby lze topologicky uspořádat graf daný na obrázku.



Uzel a musí být povinně v uspořádání na prvním místě. Množina uzlů $\{b, d, e\}$ může ležet na kterékoli trojici zbylých míst, přičemž tam může být právě ve dvou pořadích: (b, d, e) nebo (b, e, d). To je celkem $\binom{6}{3} \cdot 2 = 40$ možností. Polohou množiny $\{b, d, e\}$ je jednoznačně dána i poloha množiny zbývajících uzlů $\{c, f, g\}$. a ta se na svých míste může vyskytovat jen v pořadí (c, f, g) nebo (c, g, f). Počrt všech možností je tedy nutno už jen zdvojnásobit, $40 \cdot 2 = 80$.

13. (b.)

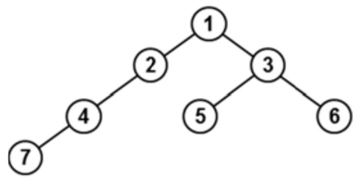
$\Theta(n^4)$

Když má daný graf n uzlů a $\Theta(n^2)$ hran, potom asymptotická složitost rekurzivního algoritmu DFS (prohledávání do hloubky) je $\Theta(n^2)$, za předpokladu, že během provádění algoritmu máme přístup v konstantním čase ke každému právě zpracovávanému uzlu a ke každé právě zpracovávané hraně. Určete, jaká bude asymptotická složitost rekurzivního DFS, pokud doba přístupu ke každému uzlu bude ve třídě $\Theta(n)$ a doba přístupu ke každé hraně bude ve třídě $\Theta(n^2)$.

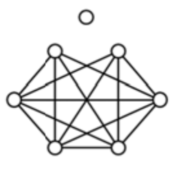
Během DFS otevřeme a zavřeme každý uzel v právě jednou, což představuje celkem $\Theta(n)$ operací. Dále musíme vykoušet každou hranu vedoucí dále z uzlu v. Těchto hran je $\Theta(n)$, čili na probírání hran k sousedním uzlům uzlu v potřebujeme $\Theta(n^3)$ operací. Na konci těchto hran potřebujene zkontrolovat sousedy uzlu v, jichž je celkem $\Theta(n)$, čili na to padne $\Theta(n^2)$ operací. Celkem v uzlu v strávíme čas úměrný $\Theta(n) + \Theta(n^2) + \Theta(n^3) = \Theta(n^3)$ operacím. Protože uzlů je $\Theta(n)$, je celková složitost $\Theta(n^4)$.

14. (b.)

Určete všechny možnosti, jak mohou být uzly daného stromu obarveny červenou a černou barvou, aby vznikl RB-strom.



15. (b.)



Najděte a nakreslete nesouvislý neorientovaný graf s nejmenším možným počtem uzlů, jehož matice incidence I má dvakrát více sloupců než má řádků.