Zednický metr

Vladislav Vávra

12. května 2012

1 Zadání

Instance: ZM stávající z n segmentů o délkách $A = (a_1 \dots a_n)$ (přirozená čísla) spojených po řadě pomocí pantů a přirozené číslo k. Otázka: Lze metr složit do pouzdra o délce k_z?

2 Je NP?

Předpokládám řešení ve tvaru $(+, -, -, +, \dots)$, kde $+$ značí směr "tam"a $-$ značí směr zpátky. Pak lze vypočítat velikost pouzdra tak, že budu postupně sčítat délky segmentů jdoucích po sobě vynásobené odpovídajícím znaménkem z řešení. Současně si budu pamatovat maximální a minimální hodnotu mezivýsledku. Výsledné pouzdro pak bude odpovídat vzdálenosti mezi maximem a minimem. Výsledná složitost tohoto výpočtu je lineární a tak se jedná o úlohu NP.

3 Převod Subset Sum na ZM

3.1 Úloha Subset Sum

Tato úloha spočívá v zadané množině $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, kde jednotlivé elementy množiny jsou přitozená čísla a prvku k, který je také přirozené číslo. Úlohou je potvrdit, zda existuje taková podmnožina $R \subset S$, jejiž součet všech elementů je roven právě číslu k.

3.2 Hlavní myšlenka

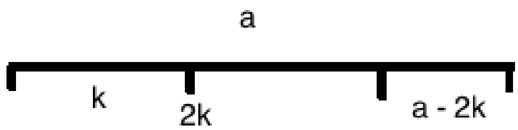
Úloha Subset Sum, pokud má řešení, zaručuje, že lze množinu rozdělit na dvě části a to tak, že jedna část, R, bude v součtu rovna k a druhá zbytku do celkové sumy množiny S. Do množiny S pak přidám takový prvek, který zaručí, že součet obou množin bude stejný. Toto mi zaručí, že v budoucím zednickém metru se obě poloviny navzájem vyruší a bude možné najít velikost pouzdra. Pokud ovšem Subset Sum mít řešení nebude, nebude možné jej rozdělit na dvě stejné poloviny a tak ani převod nebude vracet správný výsledek.

3.3 Řešení

Napřed rozdělím množinu S na dvě části. Označím písmenem a součet všech prvků množiny S a pásmenem s_x vkládáný prvek do množiny S. Pak mohou nastat dvě následující možnosti:

3.3.1 $2k \leq a$

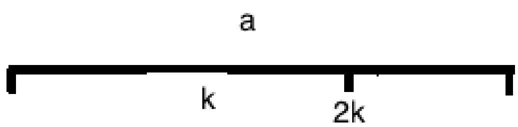
Obrázek 1: $2k \leq a$



Dle obrázku 1 přidáme do množiny S prvek o hodnotě $a - 2k$. Toto bylo zvoleno tak, že v první množině je součet k a ve druhé je zbytek, tedy $a - k$, což je ale více než k a tak budeme přidávat prvek do první množiny. Přidáním zmíněného prvku zaručíme, že v první množině bude součet roven $k + a - 2k = a - k$, což je nyní stejný součast jako v množině druhé. A tedy obě množiny mají stejný součet. Pokud by SS nemělo řešení, pak by nebylo možné vložit pomocný prvek tak, aby měly obě množiny stejný součet.

3.3.2 $2k > a$

Obrázek 2: $2k > a$



Dle obrázku 2 přidáme do množiny S prvek o hodnotě $2k - a$. Toto bylo zvoleno tak, že v první množině je součet k a ve druhé je zbytek, tedy $a - k$, což je ale v tomto případě meně než k a tak budeme přidávat prvek do druhé množiny. Přidáním zmíněného prvku zaručíme, že v druhé množině bude součet roven $a - k + 2k - a = k$, což je nyní stejný součast jako v množině první. A tedy obě množiny mají stejný součet. Pokud by SS nemělo řešení, pak by nebylo možné vložit pomocný prvek tak, aby měly obě množiny stejný součet.

3.3.3 Převod SS $\propto$ ZM

Nyní označím součet již upravené množiny S písmenem a' a velikost jedné poloviny písmenem k'. Samotnou upraveno množinu pak označím S'. Následně sestavím instanci zednického metru tak, že $A = (a', \frac{1}{2}a', s_1, s_2, \ldots s_n, a', \frac{1}{2}a')$ a $k_z = a'$.

3.3.4 Převod SS -> ZM

Pokud bylo možné upravit množinu S dle postupu výše, lze předpokládat, že prvky z jedné výsledné množiny půjdou "tam"a prvky z druhé množiny zas "zpět". Tudíž všechny prvky musí zkončít tam, kde začali a zároveň nemohou přesáhnout délku $\frac{1}{2}a'$, jelikož předpokládám, že množina S' lze rozdělit na dvě stejné poloviny. Prvky na začátku a na konci metru jsou tam umístěny proto, aby bylo vždy zaručeno, že se velikost pouzdra vždy vejde do velikosti a' - na začatku posunu řešení "doprostřed"a na konci opět vyžaduji, aby řešení zkončilo buď na jedné straně nebo na druhé.

3.3.5 Převod SS <- ZM

Pokud má zednický metr řešení ve výše uvedeném tvaru, znamé na to, že lze množinu S' rozdělit na dvě poloviny. Pokud lze množinu S' rozdělit na dvé poloviny, znamená to, že musela existovat takové podmnožina $R \subset S$, pro kterou bylo možné najít pomocný prvek s_x a velikost množin "vyrovnat".

3.4 Výsledek

Převod zde použitý využíva pouze součtu prvků množiny, což má polynomiální složitost a překopírování prvků z jedné množiny do druhé, což je také polynomiální a tak redukce je taký polynomiální a tudíž úloha Zednického metru je NPC.