

# Y36SAP

Číselné soustavy a kódy,  
převody,  
aritmetické operace

Tomáš Brabec, Miroslav Skrbek - X36SKD-cvičení. Úpravy pro SAP Hana Kubátová

## Osnova

- Poziční číselné soustavy a převody
  - Dvojková soust., převod do desítkové
  - Šestnáctková soust., převod do dvojkové
- Aritmetika (1)
  - Sčítání
  - Násobení
- Řádová mřížka
- Zobrazení záporných čísel
- Aritmetika (2)
  - Odčítání

## Literatura

- [1] Pluháček, A., „*Projektování logiky počítačů*“, skripta, Praha, ČVUT, 2000, ISBN 80-01-02145-9

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

3

## Poziční číselné soustavy I

- Určeny bází (základem)  $z$ ,  $z \in \mathbb{N}$  a  $z \geq 2$
- Soustava s bází  $z$  ...  $z$ -adická
- Nejčastěji používané soustavy:

$z = 2$	dvojková (binární)
$z = 10$	desítková (dekadická)
$z = 16$	šestnáctková (hexadecimální)

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

4

## Poziční číselné soustavy II

- Zápis čísla v  $z$ -adické soustavě:

$$A_z = \underbrace{(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)}_{\text{celá část}}, \underbrace{(a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})}_z, \quad \begin{array}{l} \text{řádková čárka} \\ \text{základ soustavy} \end{array} \quad n, m \in \mathbb{N}$$

- $a_i$  ...  $z$ -adická cifra (číslice) na pozici  $i$
- $a_i$  ... hodnota číslice  $a_i$ ,  $0 \leq a_i < z$
- $i$  ... řád číslice (řádkové místo, pozice), určuje její váhu  $v_i = z^i$
- $n$  ... nejvyšší řád s nenulovou číslicí
- $-m$  ... nejnižší řád s nenulovou číslicí

- Hodnota čísla  $A_z$ :

$$A = v(A_z) = \sum_{i=-m}^n a_i \cdot v_i = \sum_{i=-m}^n a_i \cdot z^i$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

5

## Dvojková soustava

- Základ (báze) soustavy  $z = 2 \Rightarrow$  zápis čísla tvořen posloupností 0 a 1

Př.

$$\begin{array}{cccccccc} v_i & \dots & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & , & 1 & 0 & 1_2 \end{array}$$

$$v(A) = 2^4 + 2 + 1 + 1/2 + 1/8 = 19,625$$

*Toto je ekvivalentní zápis  
čísla A v desítkové soustavě.*

- Určení hodnoty čísla  $\approx$  převod do desítkové soust., tj.  
**Dvojková  $\rightarrow$  Desítková**

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

6

## Desítková → Dvojková (celá část)

- **Postupným dělením celé části číslem 2** (tj. základem dvojkové soustavy)

Př. Převedte číslo  $57_{10}$  do dvojkové soustavy.

$$57_{10} \approx A_2 \quad \left\{ \begin{array}{lll} 57 : 2 = 28 & \text{zbytek} & 1 \dots a_0 \\ 28 : 2 = 14 & \text{zbytek} & 0 \\ 14 : 2 = 7 & \text{zbytek} & 0 \\ 7 : 2 = 3 & \text{zbytek} & 1 \\ 3 : 2 = 1 & \text{zbytek} & 1 \\ 1 : 2 = 0 & \text{zbytek} & 1 \dots a_5 \end{array} \right.$$

$$A_2 = 111001_2$$

Pozn. Zápis čísla odpovídá posloupnosti zbytků brané v opačném pořadí.

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

7

## Desítková → Dvojková (zlomková část)

- **Postupným násobením zlomkové části číslem 2** (tj. základem dvojkové soustavy)

Př. Převedte číslo  $0,65625_{10}$  do dvojkové soustavy.

$$0,65625_{10} \approx A_2 \quad \left\{ \begin{array}{lll} 0,65625 \cdot 2 = 1,3125 & \dots a_{-1} \\ 0,3125 \cdot 2 = 0,625 & \\ 0,625 \cdot 2 = 1,25 & \\ 0,25 \cdot 2 = 0,5 & \\ 0,5 \cdot 2 = 1,0 & \dots a_{-5} \end{array} \right.$$

$$A_2 = 0,10101_2$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

8

## Úloha: Převádějte mezi desítkovou a dvojkovou soustavou.

1.  $11010001,11_2 \rightarrow ?_{10}$
2.  $1111111_2 \rightarrow ?_{10}$
3.  $1,011001_2 \rightarrow ?_{10}$
4.  $147,15625_{10} \rightarrow ?_2$
5.  $1345,125_{10} \rightarrow ?_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

9

## Řešení:

1.  $11010001,11_2 \rightarrow 209,75_{10}$
2.  $1111111_2 \rightarrow 127_{10}$
3.  $1,011001_2 \rightarrow 1,390625_{10}$
4.  $147,15625_{10} \rightarrow 1001\ 0011,0010\ 1_2$
5.  $1345,125_{10} \rightarrow 101\ 0100\ 0001,001_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

10

## Důležité mocniny dvou

$n$	$2^n$	Dec.
0	$2^0$	1
1	$2^1$	2
2	$2^2$	4
3	$2^3$	8
4	$2^4$	16
5	$2^5$	32
6	$2^6$	64
7	$2^7$	128

$n$	$2^n$	Dec.
8	$2^8$	256
9	$2^9$	512
10	$2^{10}$	1 024
11	$2^{11}$	2 048
12	$2^{12}$	4 096
13	$2^{13}$	8 192
14	$2^{14}$	16 384
15	$2^{15}$	32 768
16	$2^{16}$	65 536

$n$	$2^n$	Dec.
20	$2^{20}$	1 M
30	$2^{30}$	1 G
32	$2^{32}$	4 G
40	$2^{40}$	1 T
-1	$2^{-1}$	0,5
-2	$2^{-2}$	0,25
-3	$2^{-3}$	0,125
-4	$2^{-4}$	0,0625

*Toto je důležité!*

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

11

## Šestnáctková soustava

- Zápis čísla tvořen ciframi 0..9 a A..F

Hex.	Dec.	Bin.
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

Hex.	Dec.	Bin.
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

*Toto je nutné  
znát zpaměti!*

Kubátová 2008

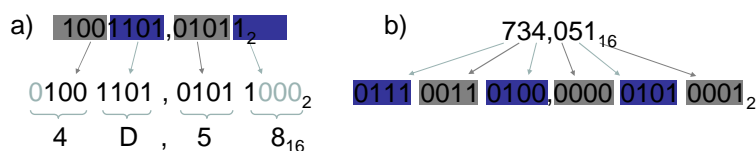
Y36SAP-Data

12

## Dvojková $\leftrightarrow$ Šestnáctková

- Jsou to příbuzné soustavy, tj.  $z_{16} = 16 = 2^4 = z_2^4$
- $\Rightarrow$  Jedna cifra v  $z_{16}$  odpovídá čtyřem cifrám v  $z_2$   
 $\Rightarrow$  **Mezi zápisy v soustavách  $z_{16}$  a  $z_2$  je pouze formální rozdíl.**

Př. Převeďte čísla mezi příbuznými soustavami:



Kubátová 2008

Y36SAP-Data

13

## Úloha: Převádějte mezi dvojkovou a šestnáctkovou soustavou.

1.  $101101011,010111_2 \rightarrow ?_{16}$
2.  $111010111010100_2 \rightarrow ?_{16}$
3.  $0,0011010111001_2 \rightarrow ?_{16}$
4.  $12A5F,1_{16} \rightarrow ?_2$
5.  $F563D,8_{16} \rightarrow ?_2$
6.  $0,98736_{16} \rightarrow ?_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

14

## Řešení

$$101101011,010111_2 \rightarrow 16B,5C_{16}$$

$$1. \quad 111010111010100_2 \rightarrow 75D4_{16}$$

$$2. \quad 0,0011010111001_2 \rightarrow 0,35C8_{16}$$

$$3. \quad 12A5F,1_{16} \rightarrow 1\ 0010\ 1010\ 0101\ 1111,0001_2$$

$$4. \quad F563D,8_{16} \rightarrow 1111\ 0101\ 0110\ 0011\ 1101,1_2$$

$$5. \quad 0,98736_{16} \rightarrow 0,1001\ 1000\ 0111\ 0011\ 0110_2$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

15

## Sčítání ve dvojkové soustavě

- Základem je součet dvou 1-ciferných čísel

+	0	1
0	0	1
1	1	<sup>1</sup> 0

Přenos do vyššího řádu. 

Př. Sečtěte čísla  $0101_2$  a  $1110_2$ .

$$\begin{array}{r}
 0\ 1\ 0\ 1 \\
 +\ 1\ 1\ 1\ 0 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 1
 \end{array}$$

*Přenos z řádu i se sčítá s ciframi v řádu (i+1).*

Pozn. Součtem dvou  $N$ -ciferných čísel může vzniknout  $(N+1)$ -ciferné číslo.

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

16



## Úloha: Sčítejte ve dvojkové soustavě.

1.  $10110001_2 + 11001101_2 = ?_2$
2.  $1111_2 + 1111_2 = ?_2$
3.  $111010_2 + 110_2 = ?_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

17

## Řešení:

1.  $10110001_2 + 11001101_2 = 1\ 0111\ 1110_2$
2.  $1111_2 + 1111_2 = 1\ 1110_2$
3.  $111010_2 + 110_2 = 100\ 0000_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

18

## Násobení ve dvojkové soustavě

- Základem je součin dvou 1-ciferných čísel

x	0	1
0	0	0
1	0	1

- Více-ciferné násobení se převádí na sčítání

Př. Vynásobte čísla  $1110_2$  a  $101_2$ .

$$\begin{array}{r}
 1110 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1110 \quad \dots 1 \times (1110) \\
 + 0000 \quad \dots 0 \times (1110) \\
 + 1110 \quad \dots 1 \times (1110) \\
 \hline
 1000110
 \end{array}$$

Pozn. Součinem  $N$ - a  $M$ -ciferného čísla může vzniknout  $(N+M)$ -ciferné číslo.

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

19

## Úloha: Vynásobte ve dvojkové soustavě.

- $1010_2 \times 101_2 = ?_2$
- $100000_2 \times 1101_2 = ?_2$
- $1111_2 \times 1111_2 = ?_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

20

## Řešení:

1.  $1010_2 \times 101_2 = 11\ 0010_2$
2.  $100000_2 \times 1101_2 = 1\ 1010\ 0000_2$
3.  $1111_2 \times 1111_2 = 1110\ 0001_2$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

21

## Řádová mřížka

- **Řádová mřížka určuje formát zobrazitelných čísel** na počítači (tj. definuje nejvyšší řád  $n$  a nejnižší řád  $-m$ )

Př.



- **Základní vlastnosti:**
  - **Délka ř.m.** ( $l$ ) – počet řádů obsažených v ř.m.
  - **Jednotka ř.m.** ( $\varepsilon$ ) – nejmenší číslo zobrazitelné v ř.m.
  - **Modul ř.m.** ( $M$ ) – nejmenší číslo, které již v ř.m. zobrazitelné není

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

22

## Určete vlastnosti ř.m.

- Určete vlastnosti následujících řádových mřížek ( $z = 2$ ):

a)



$$l = 8, \quad M = 2_{10}, \quad \varepsilon = (2^{-7})_{10}$$

b)



$$l = 8, \quad M = (2^8)_{10}, \quad \varepsilon = 1$$

c)



$$l = 6, \quad M = (2^3)_{10}, \quad \varepsilon = (2^{-3})_{10}$$

- obecně, tj. v závislosti na  $n$  a  $-m$ :

$$l = n + m + 1, \quad M = z^{n+1}, \quad \varepsilon = z^{-m}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

23

## Úloha: Zobrazte čísla v ř.m.

- Převeďte čísla do dvojkové soustavy a zapište je do ř.m. zadaných parametrů.

$$1. (-9)_{10} = ?_2 \quad n = 5, m = 0 \quad \dots 110 \ 111_2$$

$$2. (-17)_{10} = ?_2 \quad n = 7, m = 0 \quad \dots 1110 \ 1111_2$$

$$3. (-6C)_{16} = ?_2 \quad n = 8, m = 0 \quad \dots 1 \ 1001 \ 0100_2$$

$$4. (-0)_{16} = ?_2 \quad n = 4, m = 0 \quad \dots 0 \ 0000_2$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

24

## Zobrazení záporných čísel (čísel se znaménkem)

- Standardní polyadické soustavy  $\Rightarrow$  pouze nezáporná čísla
- Zobrazení záporných čísel  $\Rightarrow$  **číselné kódy**
  - popisují transformaci z omezené množiny celých čísel do omezené množiny nezáporných čísel
- Nejpoužívanější číselné kódy:
  - **přímý (znaménko a absolutní hodnota – sign-magnitude)**
  - **aditivní (s posunutou nulou – biased)**
  - **doplňkový (pro dvojkovou soustavu – 2's complement)**
  - (inverzní)

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

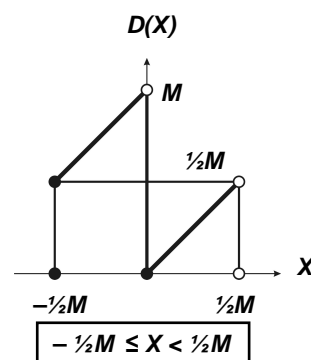
25

## Doplňkový kód

Definice:  $D(X) = \begin{cases} X, & \text{je-li } X \geq 0 \\ M + X, & \text{je-li } X < 0 \end{cases}$

Příklad – napsat všechna 3 bitová čísla  
( $M = 1000$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $l = 3$ )

$X$	$D(X)$
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
-4	1 0 0
-3	1 0 1
-2	1 1 0
-1	1 1 1



Znaménko je určeno prvním bitem zleva,  
ale tento bit je organickou součástí obrazu !!!

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

26

Př. Obrazy čísel +5 a -5 ( $z = 2$ ,  $M = 10000_2$ ,  $16_{10}$ ).

$$\mathcal{D}(5) = 5_{10} = 101_2$$

$$\dots +101_2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}(-5) = 16_{10} + (-5_{10}) = 11_{10} = 1011_2$$

$$\dots -101_2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nejvyšší bit představuje znaménko

- Algoritmus určení obrazu záporného čísla (ve dvojkové soustavě):

1. Zapišeme číslo  $X_2$  do řádové mřížky.
2. Invertujeme všechny bity.
3. Přičteme jedničku.

Př. Obraz čísla -5 ( $z = 2$ ,  $Z = 16$ ).

$$5_{10} = 101_2 \xrightarrow{\text{1. zápis v ř.m.}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2. inverze bitů}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3. přičtení jedničky}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dots \mathcal{D}(-5_{10})$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

27

## Odečítání ve dvojkové soustavě

- Odčítání  $\approx$  přičítání opačného čísla

Př. Určete rozdíl čísel  $10_{10} - 6_{10}$  (ve dvojkové soustavě).

Všimněte si volby ř.m. Obě čísla v ní musí být správně zobrazena!

$$6_{10} = 00110_2 \xrightarrow{-} -6_{10} = 11010_2 \xrightarrow{+} +10_{10} = 01010_2 \xrightarrow{=} 4_{10} = 00100_2$$

známénko výsledku  
tento přenos ignorujeme (prozatím)

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

28

## Úloha: Odečtěte ve dvojkové soustavě.

- Převed'te čísla do dvojkové soustavy (je-li to nutné) a spočítejte jejich rozdíl.

$$1. 6_{10} - 10_{10} = ?_2$$

$$2. 7_{10} - 7_{10} = ?_2$$

$$3. 1001_2 - 0110_2 = ?_2$$

$$4. F1_{16} - 3_{16} = ?_2$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

29

## Úloha: Odečtěte ve dvojkové soustavě.

- Převed'te čísla do dvojkové soustavy (je-li to nutné) a spočítejte jejich rozdíl.

$$1. 6_{10} - 10_{10} = 11\ 100_2$$

$$2. 7_{10} - 7_{10} = 0_2$$

$$3. 1001_2 - 0110_2 = 0\ 0011_2$$

$$4. F1_{16} - 3_{16} = 0\ 1110\ 1110_2$$

### Problémy:

velikost řádové mřížky, určení a zobrazení správného výsledku, jestliže používáme nezáporná čísla

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

30

## Odčítání pro nezáporná čísla

pozorování na příkladu  $M=1000$ ,  $\epsilon=1$ :

$$B=101 \quad \bar{B}=010$$

$$B + \bar{B} = 111 = 1000 - 1 = M - 1$$

$$-B = \bar{B} + 1 - M$$

$$A - B = A + \bar{B} + 1 - M$$

Abychom dostali správný výsledek  
– musíme mít možnost odečíst modul ....  
Musí vyjít přenos !!

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

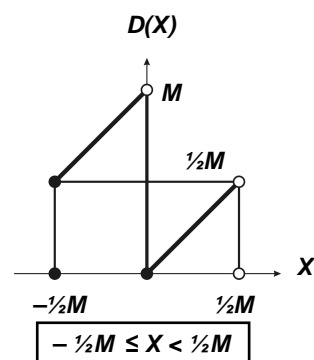
31

## Doplňkový kód

Definice:  $D(X) = \begin{cases} X, & \text{je-li } X \geq 0 \\ M + X, & \text{je-li } X < 0 \end{cases}$

Příklad – napsat všechna 3 bitová čísla  
( $M = 1000$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $l = 3$ )

$X$	$D(X)$
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
-4	1 0 0
-3	1 0 1
-2	1 1 0
-1	1 1 1



Znaménko je určeno prvním bitem zleva,  
ale tento bit je organickou součástí obrazu !!!

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

32



## Doplňkový kód - pokračování

- Obraz záporného čísla  $X$  je doplňkem jeho hodnoty do modulu  $M$  řádové mřížky
- Př.

$$\begin{array}{ll}
 -25_{10} \xrightarrow{D} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 9 & 7 & 5 \\ \hline \end{array} & +101_2 \xrightarrow{D} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 +0,05_{10} \xrightarrow{D} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} & -0,11_2 \xrightarrow{D} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

33

## Sčítání a odčítání v doplňkovém kódu

		$D(A) + D(B)$	$D(A + B)$
1	$A \geq 0 \ B \geq 0$	$A + B$	$A + B$
2	$A \geq 0 \ B < 0$ $A < 0 \ B \geq 0$	$A + B + M$	$\begin{cases} A + B \\ A + B + M \end{cases}$
3	$A < 0 \ B < 0$	$A + B + M + M$	$A + B + M$

$$D(A + B) = \begin{cases} D(A) + D(B) \\ D(A) + D(B) - M \end{cases}$$

Sečtou se obrazy a ignoruje se přenos !!!

Příklady – viz tabule a cvičení

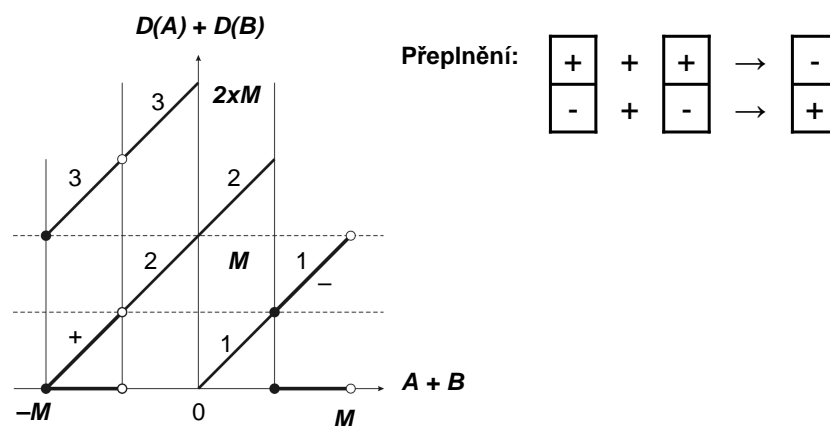
Kubátová 2008

Y36SAP-Data

34

## Přeplnění

Přeplnění (overflow) není přenos (carry) !!!!!



Kubátová 2008

Y36SAP-Data

35

## Odčítání

Příklad pro 3 bitová nezáporná čísla (opakování):

$$B=101 \quad \bar{B}=010$$

$$B + \bar{B} = 111 = 1000 - 1 = M - 1$$

$$-B = \bar{B} + 1 - M$$

$$A - B = A + \bar{B} + 1 - M$$

V doplňkovém kódu:

$$A - B = A + (-B)$$

$$D(B) + D(-B) = B + (-B) + M = M$$

$$D(-B) = M - D(B)$$

$$D(-B) = \overline{D(B)} + 1$$

Správný výsledek – musím mít možnost odečíst modul, Musí vyjít přenos !!

$$A - B = D(A) + \overline{D(B)} + 1$$

detekce přeplnění je stejná jako u sčítání

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

36

## Doplňkový kód pro desítkovou soustavu 10's complement

**Příklad** – 3 místná desítková čísla –

$$M = 1000_{10}$$

znaménko je určeno první číslicí zleva:

0 – 4 ..... + (kladná čísla)  
5 – 9 ..... – (záporná čísla)

$X$	$D(X)$	$X$	$D(X)$
0	000	–500	500
1	001	–499	501
...	...	...	...
499	499	–1	999

$$D(X) + D(-X) = 1000 = 999 + 1$$

$$D(-X) = 999 - D(X) + 1$$

$$\text{označme: } \bar{a} = 9 - a$$

$$D(X) = 499 \rightarrow D(-X) = \overline{499} + 1$$

$$D(-X) = 500 + 1 = 501$$

Kubátová 2008

Y36SAP-Data

37