Kapitola 1

Dodatky

1.1 Řešení rekursivních vztahů pomocí rekursivních stromů.

Kromě Master Theorem můžeme k řešení rekursivních vztahů použít i metodu rekursivních stromů. Tuto metodu si ukážeme na dvou příkladech.

1.1.1 Příklad 1.

Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n^2.$$

Řešení: Vytvoříme si jednotlivé hladiny stromu, který popisuje rekursivní výpočet funkce $T(n)$. V nulté hladině máme pouze $T(n)$ a hodnotu n^2, kterou potřebujeme k výpočtu $T(n)$ (známe-li $T(\frac{n}{4})$.

V první hladině se nám výpočet $T(n)$ rozpadl na tři výpočty $T(\frac{n}{4})$. K tomu potřebujeme hodnotu $3 \cdot (\frac{n}{4})^2 = \frac{3}{16}\, n^2$.

Při přechodu z hladiny i do hladiny $i+1$ se každý vrchol rozdělí na tři a kazdý přispěje do celkové hodnoty jednou šestnáctinou předchozího. Je proto součet v hladině i roven $(\frac{3}{16})^i\, n^2$.

Poslední hladina má vrcholy označené hodnotami $T(1)$ a tím rekurse končí. Počet hladin odpovídá $\log_4 n$. V poslední hladině je $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ hodnot $T(1)$. Proto platí

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n} (\frac{3}{16})^i\, n^2 \;+\; \Theta(n^{\log_4 3}).$$

Odtud

$$T(n) < n^2 \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i \;+\; \Theta(n^{\log_4 3}) = n^2 \frac{1}{1-\frac{3}{16}} + \Theta(n^{\log_4 3}) = \frac{16}{13} n^2 + \Theta(n^{\log_4 3}).$$

Poznamenejme, že tento příklad jsme také mohli řešit pomocí Master Theorem.

1.1.2 Příklad 2.

Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + n.$$

Řešení: Vytvoříme si jednotlivé hladiny stromu, který popisuje rekursivní výpočet funkce $T(n)$. V nulté hladině máme pouze $T(n)$ a hodnotu n, kterou potřebujeme k výpočtu $T(n)$ (známe-li $T(\frac{n}{3})$ a $T(\frac{2n}{3})$.

V první hladině se nám výpočet $T(n)$ rozpadl na výpočet $T(\frac{n}{3})$ a $T(\frac{2n}{3})$. K tomu potřebujeme hodnotu $\frac{n}{3}) + \frac{2n}{3}$.

Ve druhé hladině se vrchol $T(\frac{n}{3})$ rozpadne na $T(\frac{n}{9})$ a $T(\frac{2n}{9})$; vrchol $T(\frac{2n}{3})$ se rozpadne na $T(\frac{2n}{9})$ a $T(\frac{4n}{9})$. Součet v druhé hladině je

$$\frac{n}{9} + \frac{2n}{9} + \frac{2n}{9} + \frac{4n}{9} = n.$$

V hladině i je součet n právě tehdy, když $\frac{n}{9^i}$ je větší než 3. Ve vyšších hladinách už je součet menší. Poslední nenulová hladina odpovídá takovému i, že

$$n \to \frac{2n}{3} \to \frac{2^2 n}{3^2} \to \ldots \to \frac{2^i n}{3^i} = 1,$$

t.j. $(\frac{2}{3})^i n = 1$, nebo-li $n = (\frac{3}{2})^i$ a $i = \log_{\frac{3}{2}} n$.

Proto

$$T(n) \leq n \log_{\frac{3}{2}} n, \text{ tedy } T(n) \in \mathcal{O}(n \lg n).$$

1.1.3 Strassenův algoritmus. Jedná se o algoritmus pro rychlé násobení čtvercových matic. Algoritmus vychází z následujících rovností, které platí pro násobení matic typu 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 - s_4 + s_6 & s_4 + s_5 \\ s_6 + s_7 & s_2 - s_3 + s_5 - s_7 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

kde

$$\begin{aligned} s_1 &= (b-d)\cdot(g+h) \\ s_2 &= (a+d)\cdot(e+h) \\ s_3 &= (a-c)\cdot(e+f) \\ s_4 &= (a+b)\cdot h \\ s_5 &= a\cdot(f-h) \\ s_6 &= d\cdot(g-e) \\ s_7 &= (c+d)\cdot e. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Vztahů 1.1 a 1.4 využijeme pro násobení čtvercových matic řádu 2^n takto: Matici řádu 2^n rozdělíme na čtyři matice řádu 2^{n-1} a násobíme podle vztahů

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 + S_2 - S_4 + S_6 & S_4 + S_5 \\ S_6 + S_7 & S_2 - S_3 + S_5 - S_7 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

kde

$$\begin{aligned} S_1 &= (B-D)\cdot(G+H) \\ S_2 &= (A+D)\cdot(E+H) \\ S_3 &= (A-C)\cdot(E+F) \\ S_4 &= (A+B)\cdot H \\ S_5 &= A\cdot(F-H) \\ S_6 &= D\cdot(G-E) \\ S_7 &= (C+D)\cdot E. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Algoritmus pro matici řádu n vyžaduje 7 násobení matic řádu $\frac{n}{2}$ a 18 sčítání matic řádu $\frac{n}{2}$. Vyřešením rekurentní (diferenční) rovnice

$$T(n) = 7\,T(\frac{n}{2}) + 18\,n^2$$

dostáváme

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2{,}81\cdots}),$$

což je $o(n^3)$.