Přednáška #1: **Analýza složitosti a škálovatelnosti paralelních algoritmů**

Typy paralelních počítačů

Definice 1. *(Almasi, Gottlieb 89) Paralelní počítač je skupina* **výpočetních prvků** *(processing elements, (PEs)) (nebo* **výpočetních uzlů** *(computing nodes, CNs)), které komunikují a spolupracují, aby rychle vyřešily velké a náročné problémy (úlohy).* ♣

- **Multicore** processors: jednotky až desítky procesorových **jader** na 1 čipu.
- **GPU clusters**: desítky a stovky GPU (Graphical PU) připojených k CPU.
- **Desktop** multiprocessors: jednotky CPU v PC nebo pracovní stanici.
- **SMP** (Symmetric Multi-Processors) **servers**: desítky CPU se sdílenou pamětí (HP SuperDome, Sun SunFire, IBM Regatta, SGI Altix)
- **Distributed shared memory multiprocessors**: desítky CPU s virtuálně sdílenou ale fyzicky distribuovanou pamětí.
- **Clusters of workstations** (COW): svazky stovek až tisíců výpočetních uzlů (Linux svazky).
- Tightly coupled **massively parallel multiprocessors**: stovky až desetitisíce CPU se speciální propojovací sítí (IBM BlueWaters, IBM BlueGene).

Příklad náročné aplikace: předpověď počasí

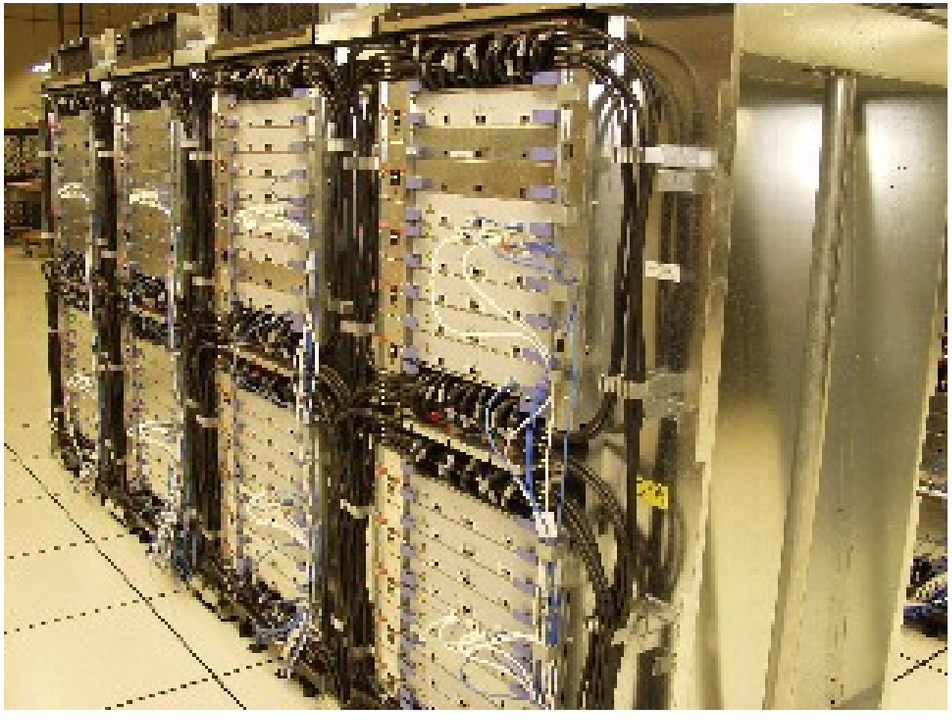
- Uvažujme předpověď počasí v **oblasti** o velikosti $3000 \times 3000 \times 11\ km^3$ na dobu **2 dnů**.
- Tato oblast je rozdělena na **segmenty** (např. metodou konečných prvků) o velikosti $0.1 \times 0.1 \times 0.1\ km^3 \implies$ počet segmentů je řádově 10^{11}.
- Parametry modelu (teplota, rychlost větru) jsou počítány s časovým krokem 30 minut.
- **Nové** hodnoty parametrů jednoho segmentu jsou počítány z **předchozích** hodnot parametrů tohoto segmentu a segmentů sousedních.
- Předpokládejme, že výpočet parametrů 1 segmentu spotřebuje 100 instrukcí.
- Pak 1 **iterace** = **aktualizace hodnot** všech parametrů v celé oblasti vyžaduje cca $10^{11} \times 100 \times 96 \doteq 10^{15}$ operací.
- Sekvenční počítač s 1Gflop bude potřebovat 10^6 sekund $\doteq 280$ hodin $= 11$ dní.
- To je ale pozdě, protože modelujeme počasí pro příští 2 dny.
- Paměťový problém (data se nevejdou do hlavní paměti sekv. počítače a musí být odkládána na disk) může řešení ještě mnohonásobně zhoršit!
- Pro výpočet spolehlivého modelu počasí je třeba mnoho iterací!!!!!

$\implies$ rozdělení dat do pamětí mnoha PE a // zpracování s pravidelnou výměnou dat je jediné schůdné řešení.

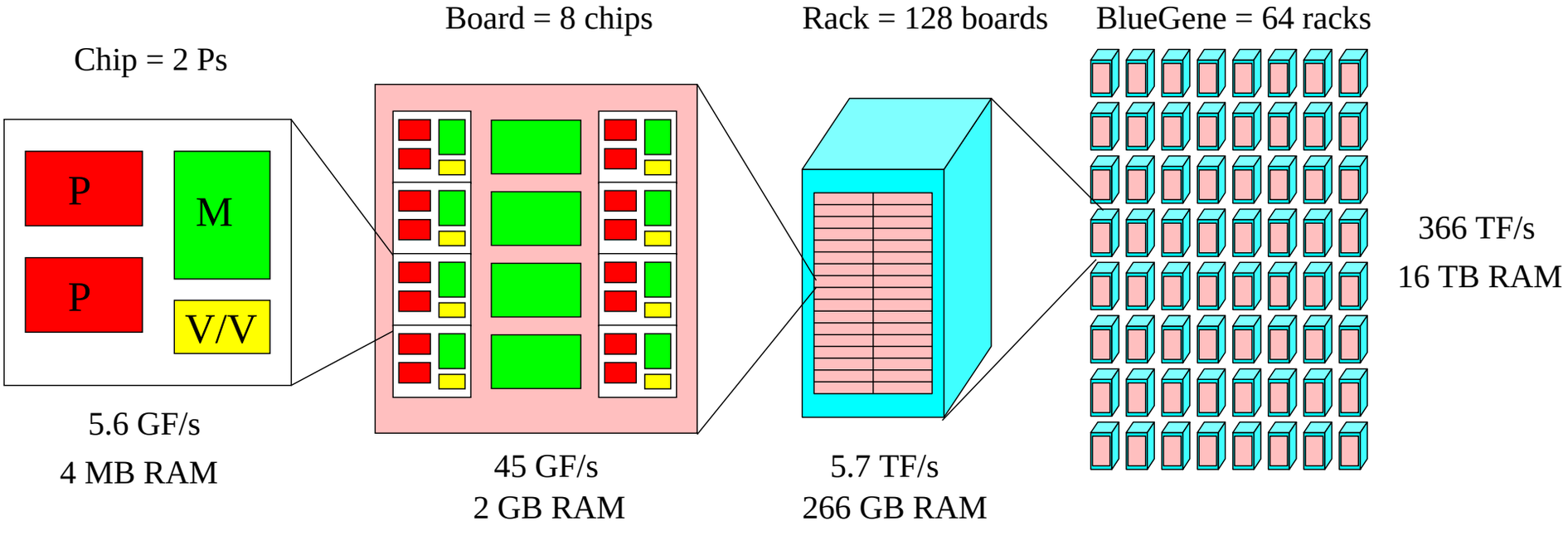
Zdroje na Internetu

www.top500.org

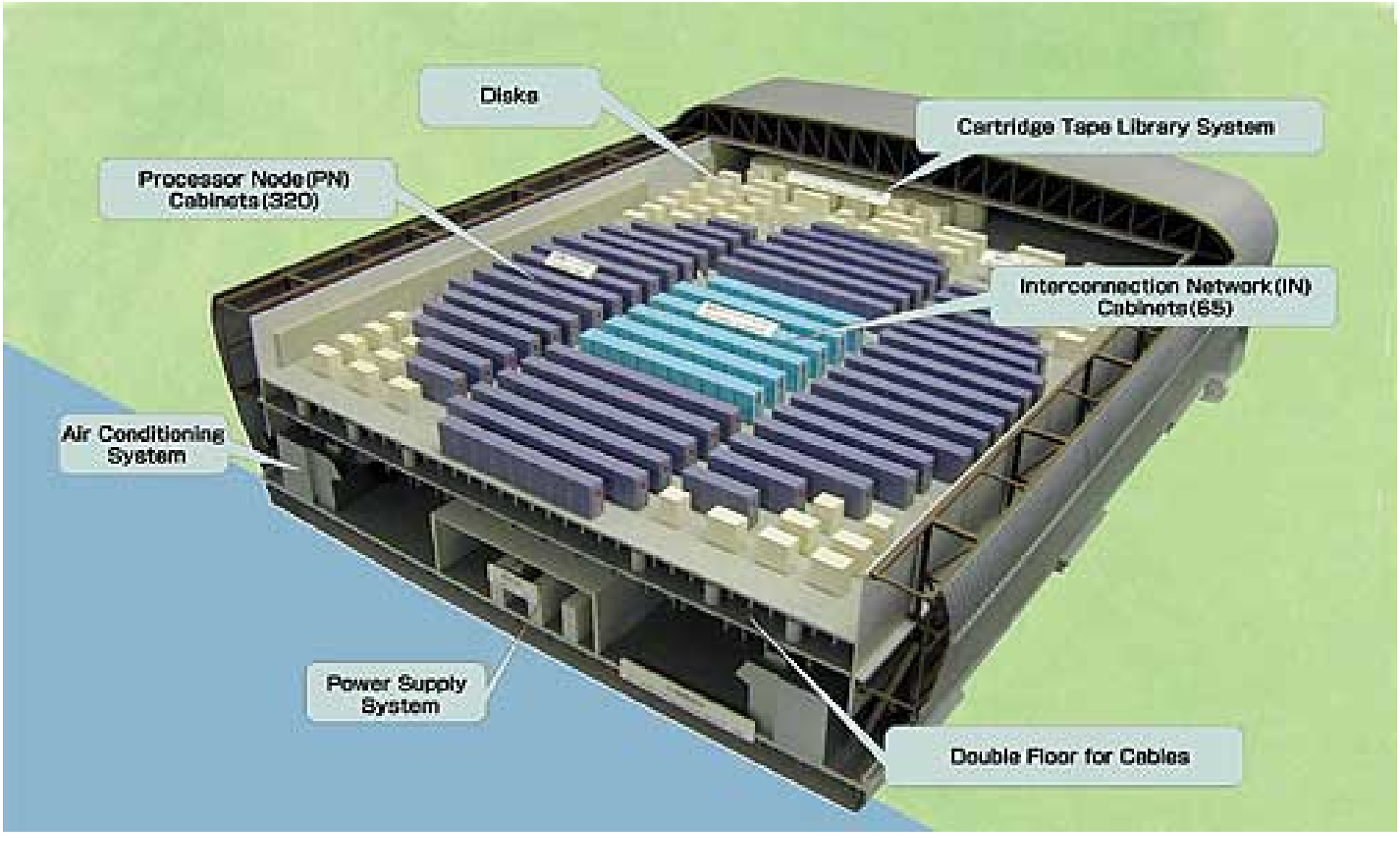
IBM Blue Gene



IBM Blue Gene (pokr.)



Simulátor Země



Vyhodnocování složitosti algoritmů

Je-li dán problém a algoritmus pro jeho řešení, pak vzniká důležitá otázka:

Roste-li velikost problému, jak se mění chování/časová/paměťová složitost algoritmu?

$\Longrightarrow$ nutnost znát/odvozovat asymptotické spodní a dolní meze složitostí.

Asymptotika - definice

Definice 2. *Nechť $\mathcal{N}^+$ = množina přirozených čísel a R^+ = množina kladných reálných čísel. Nechť $f, g : \mathcal{N}^+ \to \Re^+$ jsou 2 funkce. Pak*

- $f(n)$ *je řádu nejvýše* $g(n)$, *psáno* $f(n) = O(g(n))$, *jestliže*
  $$\exists c \in \Re^+ \quad \exists n_0 \in \mathcal{N}^+ \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \leq c.g(n).$$
- $f(n)$ *je řádu nejméně* $g(n)$, *psáno* $f(n) = \Omega(g(n))$, *jestliže*
  $$\exists c \in \Re^+ \quad \exists n_0 \in \mathcal{N}^+ \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \geq c.g(n).$$
- $f(n)$ *je téhož řádu* $g(n)$, *psáno* $f(n) = \Theta(g(n))$, *jestliže*
  $$f(n) = O(g(n)) \text{ a } f(n) = \Omega(g(n)).$$
- $f(n)$ *je striktně nižšího řádu než* $g(n)$, *psáno* $f(n) = o(g(n))$, *jestliže*
  $$\forall c \in \Re^+ \quad \exists n_0 \in \mathcal{N}^+ \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) < c.g(n).$$
- $f(n)$ *je striktně vyššího řádu než* $g(n)$, *psáno* $f(n) = \omega(g(n))$, *jestliže*
  $$\forall c \in \Re^+ \quad \exists n_0 \in \mathcal{N}^+ \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) > c.g(n).$$

Příklad 3. ■ Základní vztahy: $1 = o(\log n)$, $\log n = o(\sqrt{n})$, $\sqrt{n} = o(n)$.

■ Odvozené vztahy: $n/\log n = \omega(\sqrt{n})$, $n = o(n \log n)$, $n \log n = o(n^2)$.

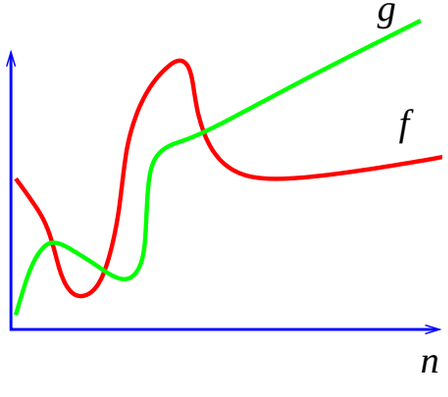
■ Jelikož $\log n = o(n)$, platí $\log \log n = o(\log n)$. Ale: $\log n^2 = \Theta(\log n)$.

■ $n = O(n + \log n)$ a taky $n + 1000 \log n = O(n)$, a tudíž $n = \Theta(n + \log n)$.

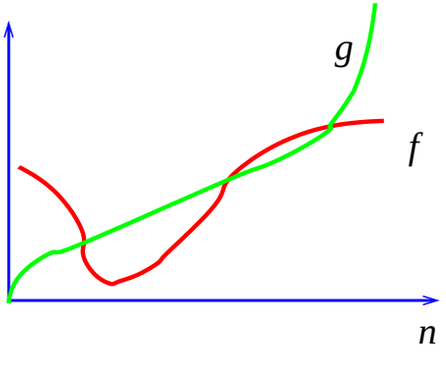
■ Stirlingova formule $n! \doteq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ implikuje $\log(n!) = \Sigma_{k=1}^{n} \log k = \Theta(n \log n)$.

■ Jelikož $\Sigma_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x} dx < \Sigma_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, dostaneme $\ln n + \frac{1}{n} < \Sigma_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln n + 1$. A proto, $\Sigma_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$.

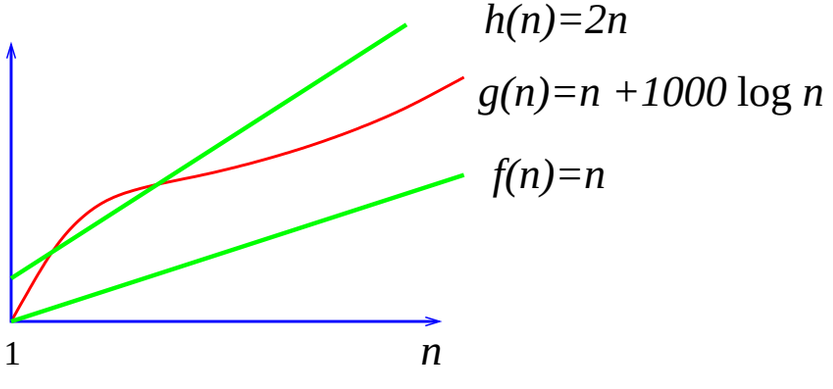
■ Je-li p konstanta, pak $\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p = \frac{n^{p+1}}{2^{p+1}} < \Sigma_{k=1}^{n} k^p < n.n^p$, a proto $\Sigma_{k=1}^{n} k^p = \Theta(n^{p+1})$. ♣



(a) $f(n) = \Theta(g(n))$.



(b) $f(n) = o(g(n))$.



(c) $n + 1000 \log n = \Theta(n)$.

Zákony asymptotiky

Transitivita:	$f(n) = O(g(n)) \ \wedge \ g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$. Podobně pro $\Omega, \Theta, o, \omega$.
Reflexivita:	$f(n) = O(f(n))$. Podobně pro Ω, Θ.
Symetrie:	$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$.
Transpoziční symetrie:	$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$, $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$.
Inkluze:	$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$.

Zapamatujte si následující analogie:

$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$	$f(n) = \omega(g(n))$
		$\approx$		
$a \leq b$	$a \geq b$	$a = b$	$a < b$	$a > b$

Definice 4.

1. *Neznámá konstanta se zapisuje* $O(1)$.
2. $f(n)$ *je polynomiální funkce, jestliže platí* $f(n) = \Theta(n^{O(1)})$.
4. $f(n)$ *je polylogaritmická funkce, jestliže platí* $f(n) = \Theta(\log^{O(1)}(n))$. ♣
3. $f(n)$ *je sublineární funkce, jestliže platí* $f(n) = o(n)$.

Měřítka výkonnosti sekvenčních algoritmů

Definice 5.

$T_A^K(n)$	*časová složitost/doba výpočtu sekv. algoritmu A, který řeší problém K na vstupních datech velikosti n (měří se čítáním výpočetních kroků/instrukcí).*
$SL^K(n)$	*spodní mez časové složitosti jakéhokoli sekv. algoritmu pro řešení problému K =nejhorší časová složitost nejlepšího možného sekv. algoritmu pro řešení K. Triviální spodní mez je dána velikostí množiny vstupních (výstupních) dat n.*
$SU^K(n)$	*horní mez časové složitosti pro řešení problému K (=nejhorší časová složitost nejrychlejšího známého sekv. algoritmu pro K.)*

Optimální sekvenční algoritmy

Definice 6.

- *A je (asymptoticky) optimální sekv. alg. pro řešení problému K, jestliže platí*

$$T_A^K(n) = \Theta(SU^K(n)) = \Theta(SL^K(n)).$$

- *A je nejlepší známý sekv. alg. pro řešení K, jestliže platí*

$$T_A^K(n) = \Theta(SU^K(n)) = \omega(SL^K(n)).$$

♣

Příklad 7. Nechť K_1 = problém třídění posloupnosti n čísel pomocí binární operace porovnání. Pak

$SL^{K_1}(n) = \Omega(n \log n)$ (minimální hloubka binárního stromu s $n! = \Theta(n^n)$ listy)

$SU^{K_1}(n) = O(n \log n)$ (MergeSort, HeapSort, QuickSort)

Příklad 8. Nechť K_2 = problém násobení matic $A_{n,n} \times B_{n,n}$. Pak

$SL^{K_2}(n) = \Omega(n^2)$ (triviální spodní mez)

$SU^{K_2}(n) = O(n^q)$, $2 < q < 3$ (Strassen $q = 2.81$, Coppersmith-Winograd $q = 2.376$)

Měřítka výkonnosti paralelních algoritmů

V porovnání se **sekvenčními** algoritmy zde $\exists$ navíc 1 parametr/dimenze:

počet procesorů p.

Přirozeným cílem při paralelním řešení úloh je dosáhnout

lineárního zrychlení :

Jestliže stoupne počet procesorů k krát, chceme, aby výpočetní čas klesnul k krát.

- Tento cíl je obecně velmi obtížně splnitelný.
- Pro dosažení potřebné rychlosti/efektivnosti/zrnitosti je nutno mezi p a n udržovat určitou závislost, např.
  - $p = n^x$, kde $0 < x < 1$,
  - $p = \frac{n}{\log n}$,
  - $p = \log^2 n$.

Paralelní čas $T(n,p)$

Definice 9. *$T(n,p)$ je čas, který uplynul od začátku paralelního výpočtu do okamžiku, kdy poslední (nejpomalejší) procesor skončil výpočet.* ♣

Diskuze

- $T(n,p)$ závisí na architektuře paralelního počítače

  $\Longrightarrow$

  hodnocení výkonnosti paralelního algoritmu musí vždy brát v úvahu architekturu počítače.

- $T(n,p)$ je měřen čítáním:

  1. výpočetních kroků: aritmetické, logické, paměťové operace

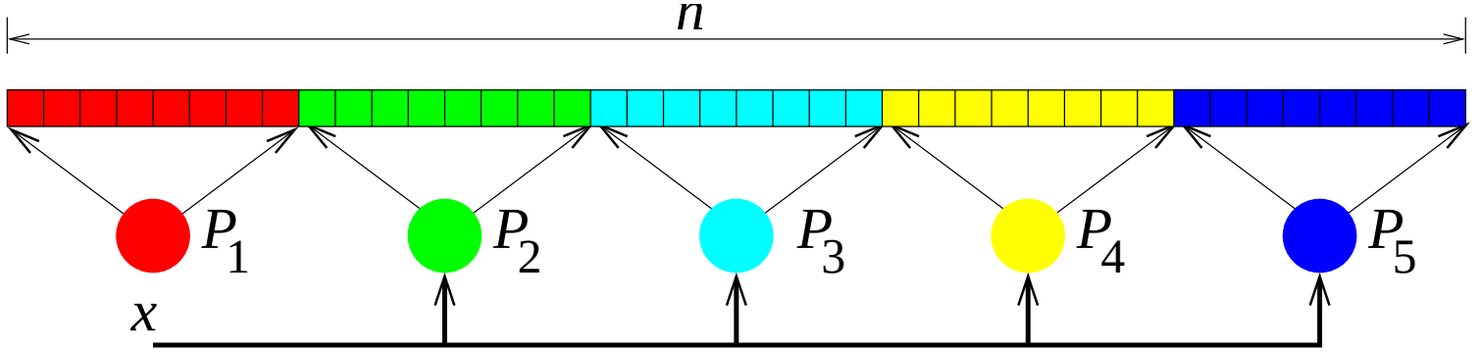
  $+$

  2. komunikačních kroků: přenos a výměna dat mezi procesory.

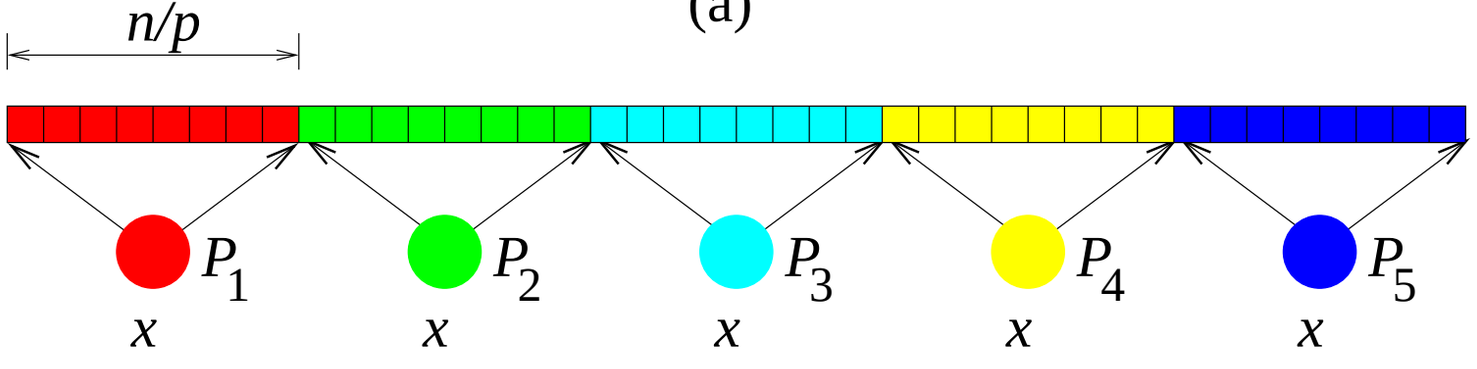
Paralelní čas - příklad

Příklad 10. Paralelní vyhledávání položky x pomocí p procesorů v neseřazeném vstupním souboru n různých položek uložených v sdílené paměti. Předpokládáme, že v daném okamžiku smí k dané buňce sdílené paměti přistupovat nejvýše 1 procesor.

$$T(n,p) = \underset{\text{(a) rozeslání } x}{O(\log p)} + \underset{\text{(b) porovnávání}}{O(n/p)} + \underset{\text{(c) zapsání výsledku}}{O(1)}$$



(a)



(b)

Paralelní zrychlení $S(n,p)$

Definice 11.

$$S(n,p) = \frac{SU(n)}{T(n,p)} \leq p. \quad \clubsuit$$

Lineární zrychlení

Definice 12.

$$S(n,p) = \Theta(p). \quad \clubsuit$$

Superlineární zrychlení

- Způsobeno určitými charakteristikami HW, které staví sekvenční algoritmy do nevýhody.
  - Typická situace: algoritmus je paměťově náročnější, než je kapacita paměti na 1-procesorovém systému, kdežto souhrnná kapacita pamětí paralelního systému stačí.
- Vzniká díky anomáliím při paralelním prohledávání kombinatorického stavového prostoru (podrobněji příští přednáška).

Spodní mez na paralelní čas $L(n,p)$

Definice 13.

$$L(n,p) = \frac{SL(n)}{p}.$$

♣

Příklad 14. Spodní mez na čas paralelního třídění n čísel s $p = n$ procesory je

$$L(n,n) = \frac{\Omega(n \log n)}{n} = \Omega(\log n).$$

♣

Paralelní cena $C(n,p)$

Definice 15.

$$C(n,p) = p \times T(n,p).$$ ♣

$C(n,p)$ se také nazývá součin procesory x čas.

Lemma 16.

$$C(n,p) = \Omega(SU(n)).$$ ♣

Cenově optimální algoritmus

Definice 17.

$$C(n,p) = O(SU(n)).$$ ♣

Z Lemmatu 15 pak plyne:

$$C(n,p) = \Theta(SU(n))).$$

Paralelní práce $W(n,p)$

Definice 18. *(Práce synchronního systému) Nechť $\tau = T(n,p)$ a $p_i = \#$ procesorů aktivních (pracujících) v kroku $i \in \{1,\ldots,\tau\}$ paralelního výpočtu. Pak*

$$W(n,p) = p_1 + p_2 + \cdots + p_\tau.$$

Definice 19. *(Práce asynchronního systému) Nechť $T_i \leq T(n,p) = \#$ kroků provedených procesorem $i \in \{1,\ldots,p\}$ během paralelního výpočtu. Pak*

$$W(n,p) = T_1 + T_2 + \cdots + T_p.$$

Lemma 20.

$$SU(n) \leq W(n,p) \leq C(n,p).$$ ♣

Pracovně optimální algoritmus

Definice 21.

$$W(n,p) = O(SU(n)).$$ ♣

- $C(n,p)$ zahrnuje nečinnost procesorů, kterou $W(n,p)$ nezapočítává.
- V praxi je užitečný spíše parametr $C(n,p)$, protože nečinné procesory ve většině systémů není možné před dokončením celého výpočtu uvolnit pro jiný výpočet.

Paralelní efektivnost $E(n,p)$

Definice 22.

$$E(n,p) = \frac{SU(n)}{C(n,p)}.$$

♣

Lemma 23. $E(n,p) =$ *zrychlení na procesor:*

$$E(n,p) = \frac{SU(n)}{C(n,p)} = \frac{S(n,p) \times T(n,p)}{p \times T(n,p)} = \frac{S(n,p)}{p}.$$

♣

Lemma 24. *Algoritmus je (asymptoticky)*

cenově optimální

$\Longleftrightarrow$

má lineární zrychlení

$\Longleftrightarrow$

má konstantní efektivnost.

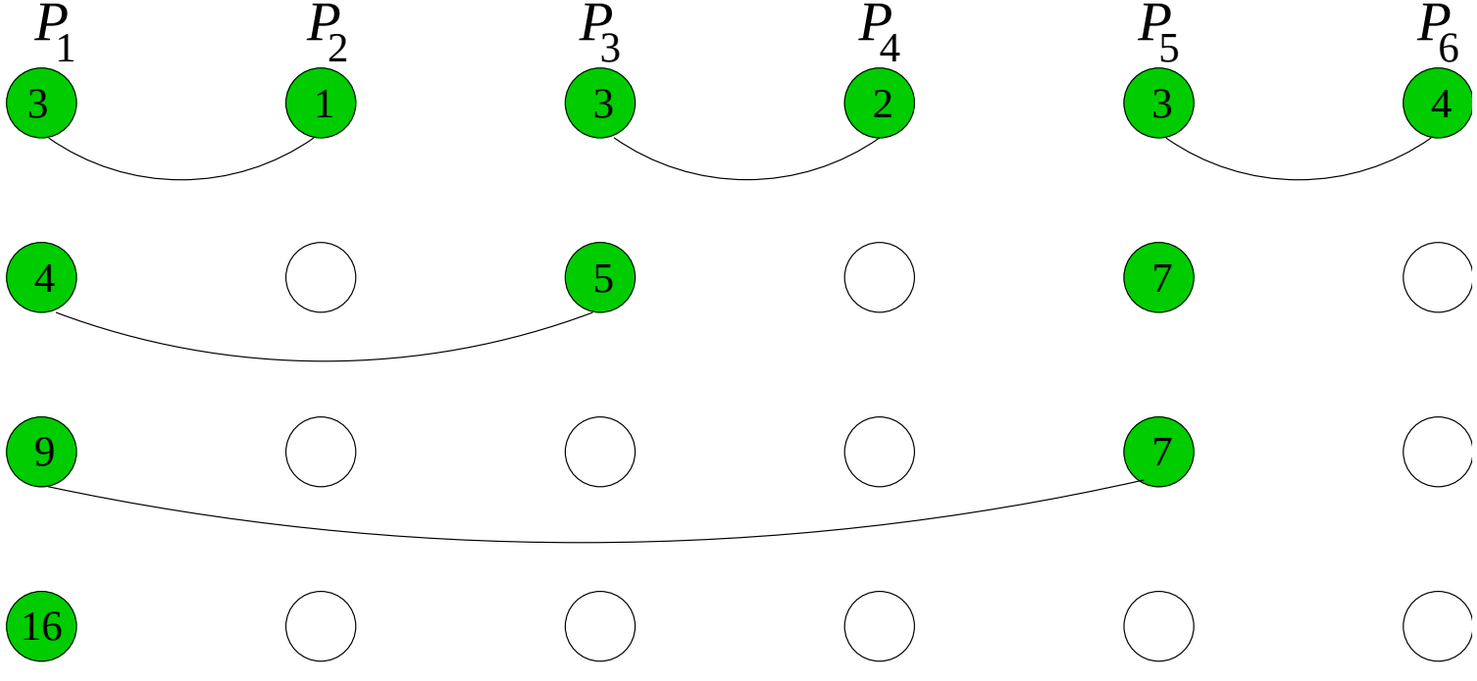
♣

Příklad: paralelní binární redukce

Příklad 25. (Paralelní Σ). Vypočtěte $\Sigma_{i=1}^{n} a_i$ čísel $a_1, \ldots, a_n$ na paralelním počítači s úplně propojenými n procesory $P_1, \ldots, P_n$. Předpokládejte:

- jednotkový-časový model:
  čili sečíst 2 čísla na 1 procesoru a poslat číslo z 1 procesoru na druhý trvá čas 1;
- na počátku má procesor P_i číslo a_i ve svém registru.

Algoritmus ParAdd:



Analýza složitosti algoritmu ParAdd.

- $SU(n) = SL(n) = \Theta(n)$
- $T(n,n) = \Theta(\log n)$
- $C(n,n) = \Theta(n \log n)$
- $W(n,n) = \Theta(n)$
- $S(n,n) = \Theta(n/\log n)$
- $E(n,n) = \Theta(1/\log n)$

Diskuze výsledků:

- ParAdd n čísel na n procesorech je pracovně optimální, ale není cenově optimální.
- Intuitivní vysvětlení: velmi malé využití procesorů. Počet procesorů, které vykonávají užitečnou práci, klesá exponenciálně rychle.

Zdroje neefektivnosti obecně

1. Nedostatek užitečné práce (příliš procesorů na málo práce).
2. Velké komunikační zpoždění v porovnání s výpočetní rychlostí
   $\Longrightarrow$ některá data by bylo lepší počítat lokálně, než o ně žádat a čekat, až dorazí.
3. Příliš velká režie synchronizace (slabá koordinace).
4. Špatná distribuce práce (nerovnoměrné rozdělení práce).

Řešení?

1. Technologické:
   - rychlejší komunikační HW,
   - zmenšení SW komunikační režie,
   - překrývání výpočetních a komunikačních kroků.
2. Algoritmické:
   - optimální mapování algoritmu na paralelní architekturu (statické),
   - vyvažování zátěže (dynamické),
   - respektování škálovatelnosti problému, tzn.:
     Škálovat p s n tak, aby $\forall$ procesory byly vytíženy užitečnými výpočty většinu času

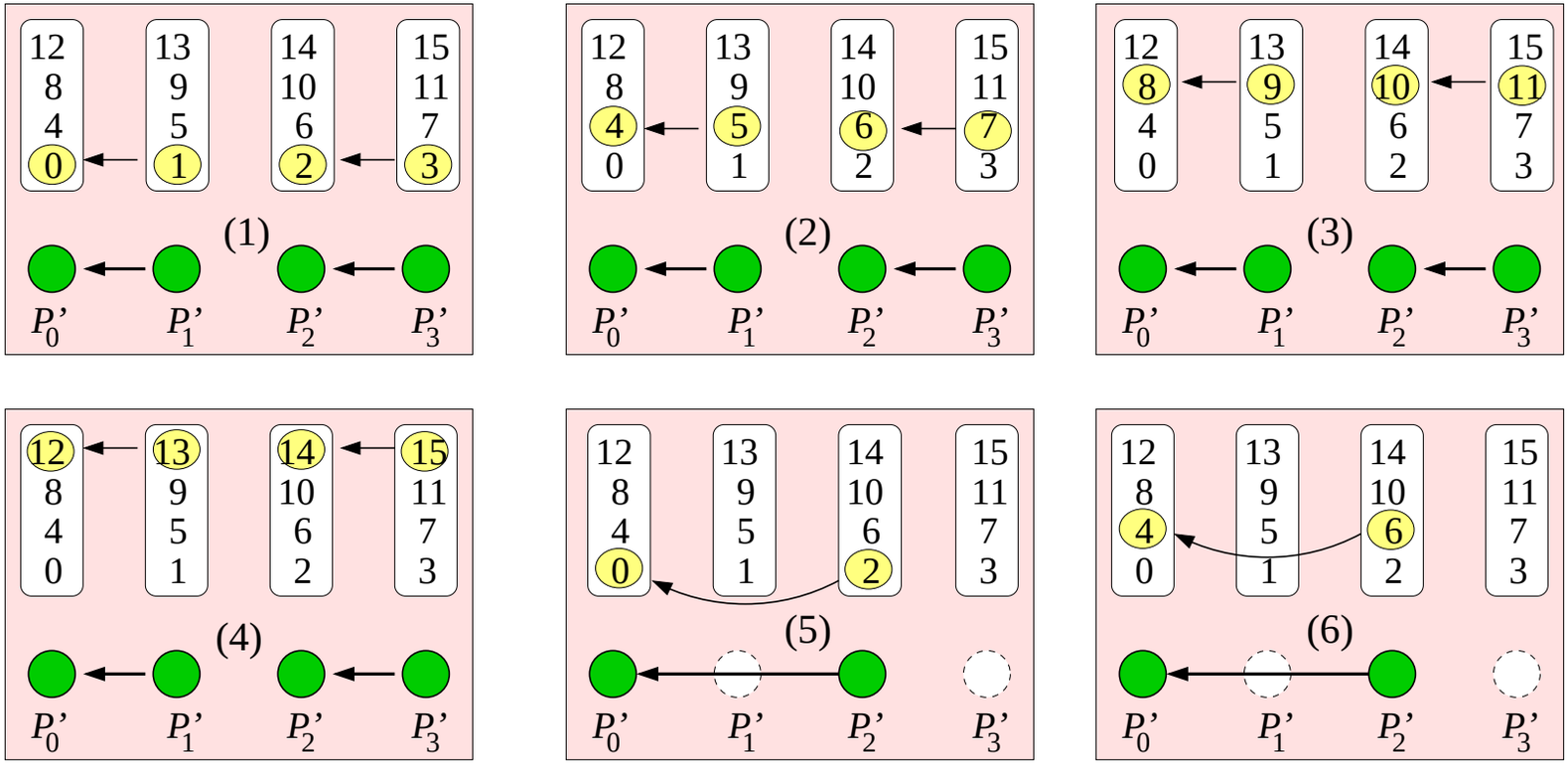
$$\Longrightarrow$$

Řešení problému škálovatelnosti = hledání vhodné závislosti

$$p \stackrel{?}{=} f(n)$$

Simulace s méně procesory: Brentovo plánování

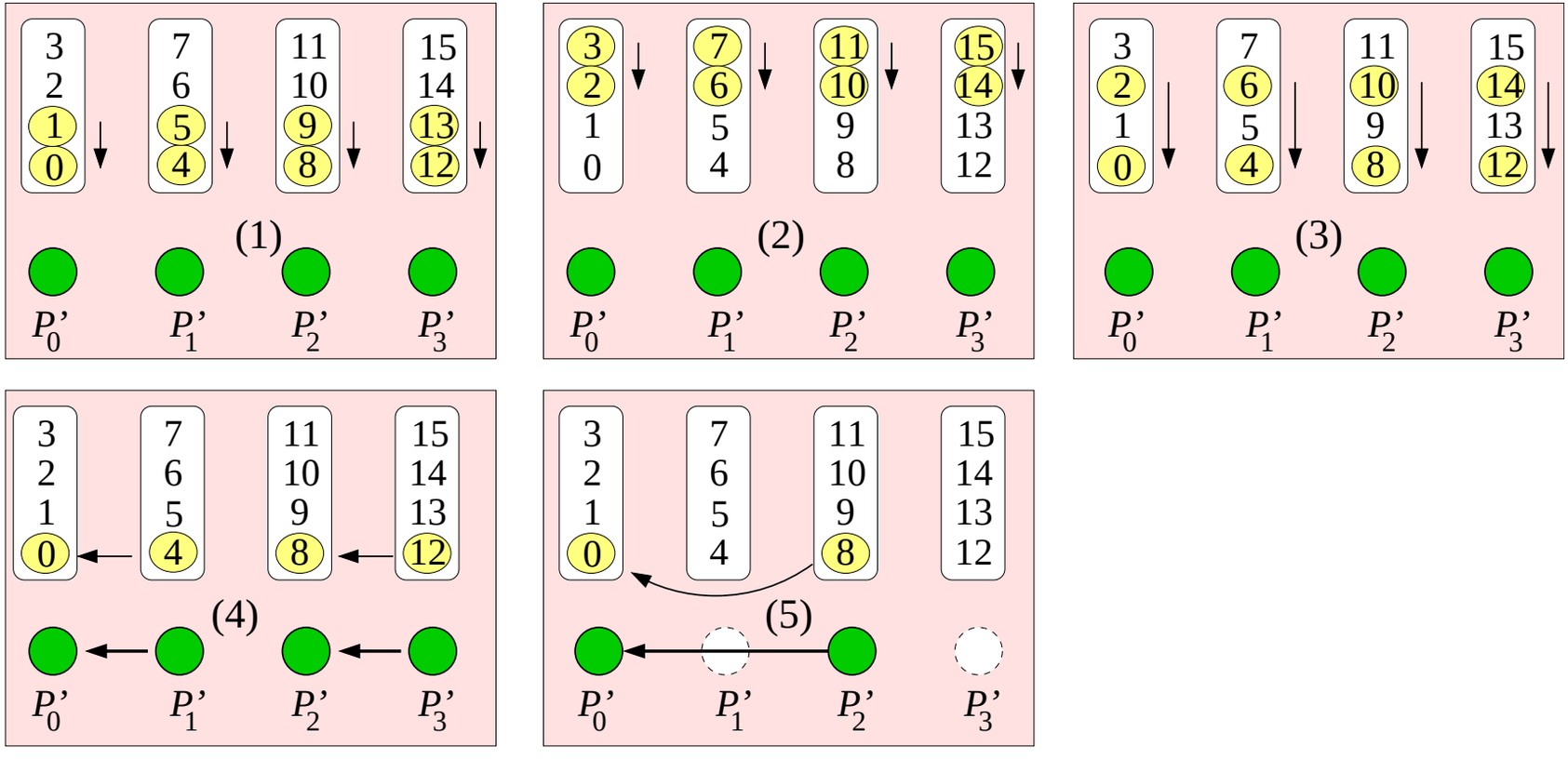
Simulace algoritmu na méně procesorech, než je stupeň paralelismu algoritmu.



RowSimParAdd: Simulace n-procesorové paralelní redukce na p procesorech, $p|n$.

- $\log p$ fází o $4n/p$ krocích.
- Na konci zbývá 1 procesor, který provede poslední fázi v $4\frac{n}{p}$ krocích.
- Proto $T(n,p) \doteq 4\frac{n}{p}\log p + 4\frac{n}{p} = \Theta(\frac{n}{p}\log p)$.
- $C(n,p) = \Theta(n\log p), \quad S(n,p) = \Theta(p/\log p), \quad E(n,p) = \Theta(1/\log p), \quad W(n,p) \doteq 5n.$

Simulace s méně procesory: Brentovo plánování II



ColSimParAdd: Alternativní simulace n-procesorové paralelní redukce na p procesorech, $p|n$, pomocí Brentova plánování.

- $T(n,p) = 4(\frac{n}{p} - 1) + 2\log p = \Theta(\frac{n}{p} + \log p)$.
- $C(n,p) = \Theta(n + p\log p)$, $S(n,p) = \Theta(\frac{np}{n+p\log p})$, $E(n,p) = \Theta(\frac{n}{n+p\log p})$.

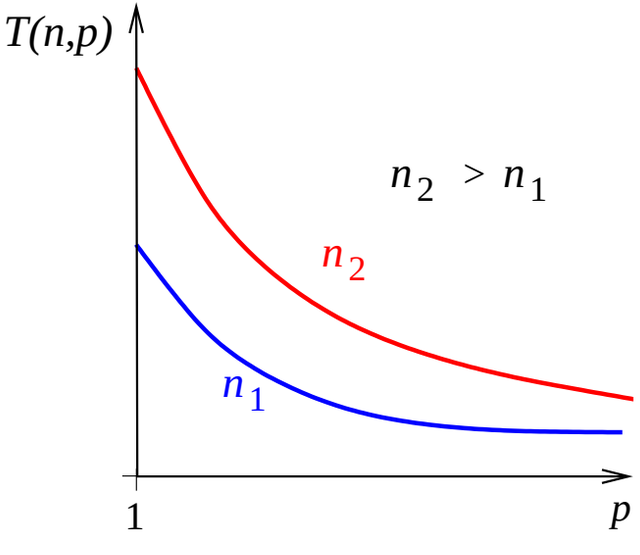
Škálovatelnost a izoefektivnost paralelních algoritmů

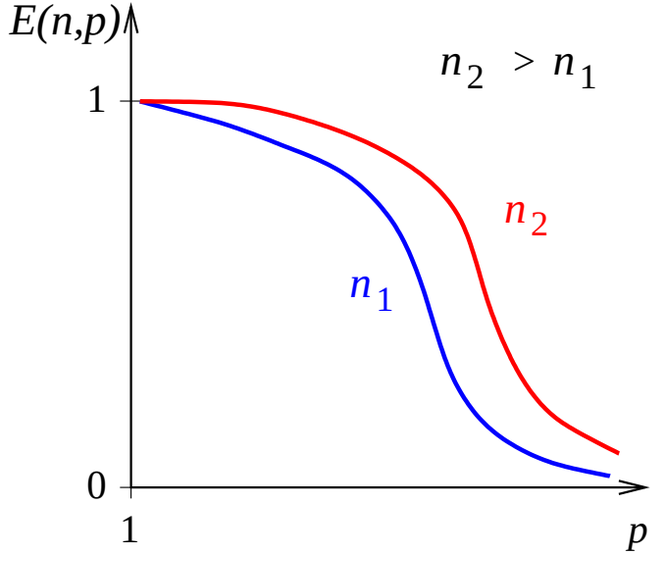
Škálovatelnost = schopnost efektivně využít rostoucí počet procesorů.

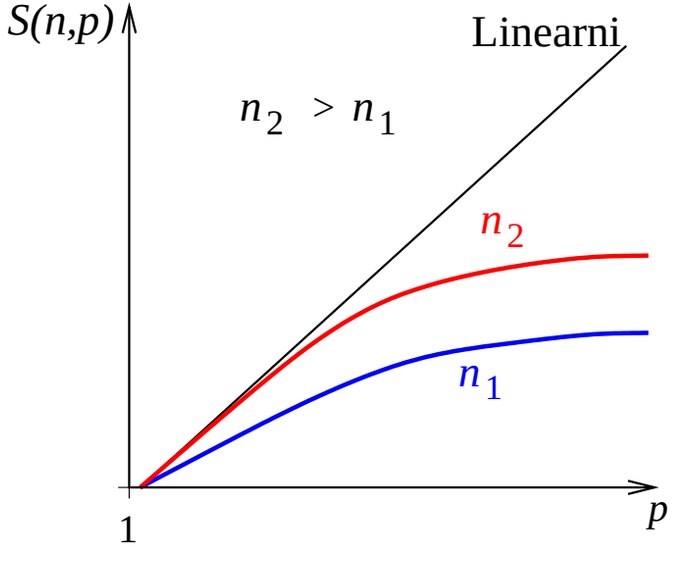
= schopnost udržet efektivnost či dobrý čas při
- $\uparrow n$, jestliže $\uparrow p$
- $\downarrow n$, jestliže $\downarrow p$
- $\uparrow p$, jestliže $\uparrow n$
- $\downarrow p$, jestliže $\downarrow n$

Pozorování

- Jestliže $p = 1$, efektivnost je nejlepší, ale čas je nejhorší.
- Jestliže p roste, čas klesá, ale jen do určité meze
  $\Longrightarrow$ začne klesat efektivnost.







Cenová škálovatelnost a izoefektivní funkce ψ_1, ψ_2

Definice 26. *Je-li dána konstanta* $0 < E_0 < 1$, *pak izoefektivní funkce*

- $\psi_1(p)$ *je asymptoticky minimální funkce taková, že* $\forall n_p = \Omega(\psi_1(p)) : E(n_p, p) \geq E_0$.
- $\psi_2(n)$ *je asymptoticky maximální funkce taková, že* $\forall p_n = O(\psi_2(n)) : E(n, p_n) \geq E_0$.

Diskuze

- Funkce $\psi_1(p)$ a $\psi_2(n)$ jsou vzájemně inverzní.
- Číselně vyjadřují, jak n musí růst s p, aby se efektivnost neměnila.
- Odrážejí schopnost paralelního algoritmu udržet konstantní efektivnost (a tudíž lineární zrychlení).
- Pomalu rostoucí $\psi_1(p)$ svědčí o dobré škálovatelnosti (pro účelné využití nově přidaných procesorů stačí zvětšit velikost problému o malý přírůstek).
- Strmě rostoucí $\psi_1(p)$ svědčí o špatné škálovatelnosti.

Příklad: paralelní binární redukce

Příklad 27. (Paralelní Σ). Vypočtěte $\Sigma_{i=1}^{n} a_i$ čísel $a_1, \ldots, a_n$ na plně propojeném paralelním počítači s $p < n$ procesory $P_1, \ldots, P_p$. Předpokládáme model jednotkového času.

Řešení:

1. Každý procesor má přiděleno $\lceil n/p \rceil$ vstupních čísel.
2. Každý procesor čte čísla z paměti a přičítá je k registru: $2\lceil n/p \rceil - 1$ kroků.
3. p procesorů sečte pomocí paralelní binární redukce p částečných součtů v $\lceil \log p \rceil$ iteracích, 1 iterace = 2 kroky.

Tudíž,

$$T(n,p) = 2\lceil n/p \rceil - 1 + 2\lceil \log p \rceil \doteq 2n/p + 2\log p$$

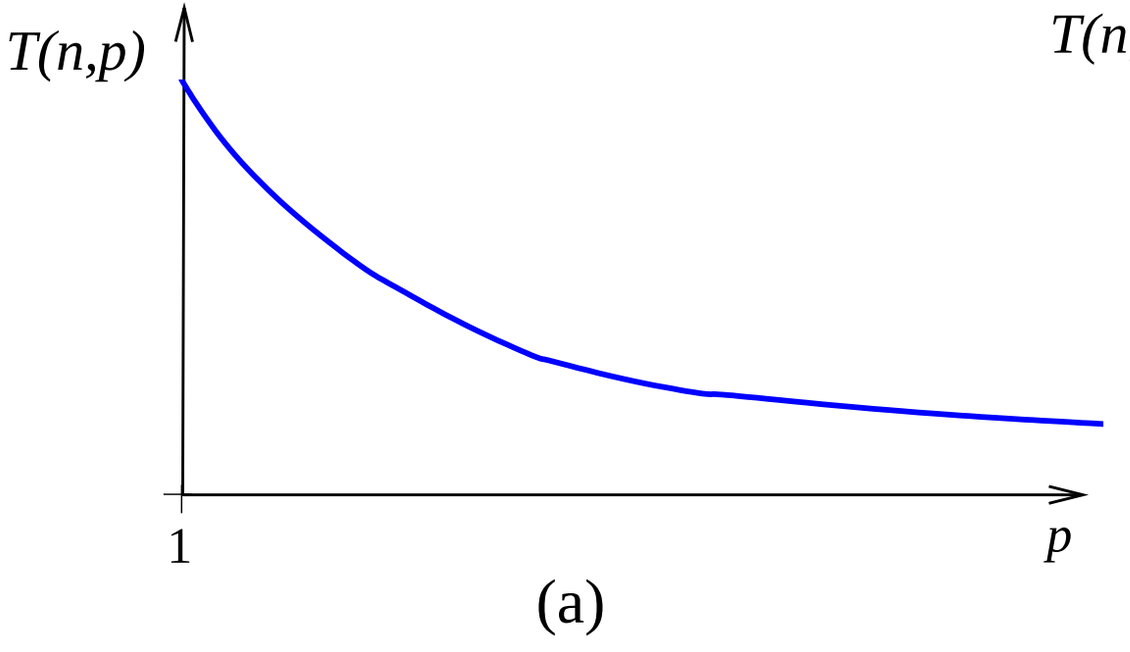
a protože $SU(n) = 2n$, je

$$C(n,p) = 2n + 2p\log p \quad \text{a} \quad S(n,p) = \frac{np}{n + p\log p} \quad \text{a} \quad E(n,p) = \frac{n}{n + p\log p}.$$

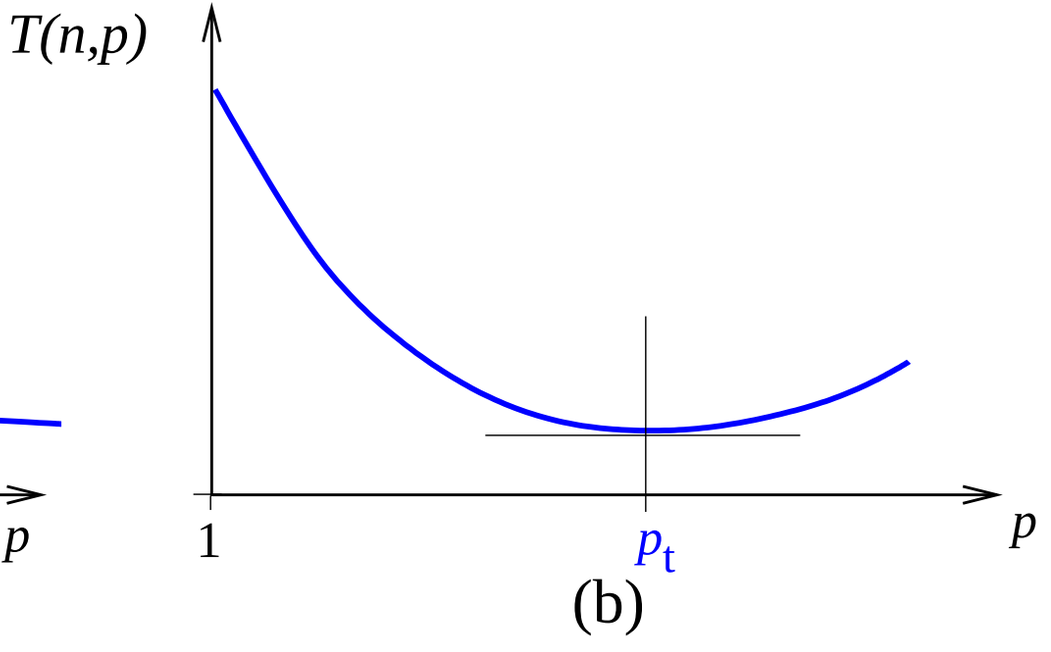
$$\psi_1(p) = p\log p \quad \text{a} \quad \psi_2(n) = \frac{n}{\log \beta n}, \qquad \text{kde } \beta = \frac{1 - E_0}{E_0}.$$

Absolutně minimální paralelní čas $T_{\min}$

Definice 28. *Je-li dáno n, pak p_{t} je nejmenší počet procesorů, pro které $T(n, p_{\mathrm{t}}) =$ absolutně minimální čas $T_{\min}$.* ♣



(a)



(b)

Varianta (a) $\Longrightarrow$ $p_{\mathrm{t}} = p_{\max}$

Varianta (b) $\Longrightarrow$ $\left.\frac{\mathrm{d}T(n,p)}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_{\mathrm{t}}} = 0$

Příklad 25. (pokračování) V případě algoritmu ParAdd se jedná o případ (b).

Pro

$$T(n,p) = \frac{2n}{p} + 2\log p = \frac{2n}{p} + \frac{2\ln p}{\ln 2}$$

má rovnice

$$\frac{\mathrm{d}T(n,p)}{\mathrm{d}p} = -\frac{2n}{p^2} + \frac{2}{p\ln 2} = 0$$

řešení:

$$p_{\mathrm{t}} = n\ln 2 \doteq 0.6n,$$

čili

$$n/2 < p_{\mathrm{t}} < n.$$

Proto

$$T_{\min} \doteq 2\log n + 1.8.$$

Protože

$$T(n,n/2) = T(n,n) = \lceil T_{\min} \rceil,$$

volíme

$$p_{\mathrm{t}} = n/2.$$

Realističtější příklad na minimální čas

Příklad 26. Paralelní redukce na plně propojeném počítači, kde

- aritmetické a paměťové operace trvají čas 1,
- kdežto přenos 1 čísla mezi 2 sousedními procesory trvá čas $k \gg 1$.

Pak

$$T(n,p) = 2n/p + (k+1)\log p,$$

a proto

$$p_{\mathrm{t}} = \frac{2\ln 2}{k+1} n.$$

Například: pro $k = 100$ je $p_{\mathrm{t}} = n/73$. ♣

Kompromisy mezi rychlostí a efektivností

- Nejrychlejší algoritmus je obecně neefektivní.
- Otázka 1: Dokáže daný algoritmus řešit úlohu současně rychle a efektivně?
- Otázka 2: Jaký počet procesorů stačí pro dosažení řádově optimálního času?

Spodní mez počtu procesorů pro dosažení časové optimality $\psi_3(n)$

$\psi_3(n)$ je asymptoticky minimální funkce taková, že

$$\forall p = \Omega(\psi_3(n)) \quad \& \quad p = O(p_{\mathrm{t}}) : T(n,p) = O(T_{\min})$$

Příklad 25. (pokračování) Protože

$$T(n,p) = \frac{2n}{p} + 2\log p,$$

dostáváme

$$\psi_3(n) = \frac{n}{\log n}.$$

Nyní ale vidíme, že

$$\psi_2(n) \doteq \psi_3(n).$$

To ale znamená, že

pro $p = \Theta(n/\log n)$ je **asymptoticky optimální čas i efektivnost**.

Amdahlův zákon

- Nestárnoucí postřeh z počátků éry paralelních počítačů.
- Speciální aplikace obecné zákonnitosti.
- Každý výpočet se skládá z přirozeně sekvenční části (kterou může provádět pouze 1 procesor) a z přirozeně paralelní části.
- Předpokládejme, že sekvenční výpočet trvá normovaný čas $1 = f_{\mathrm{s}} + f_{\mathrm{p}}$, kde $f_{\mathrm{s}} =$ přirozeně sekvenční a $f_p =$ přirozeně paralelní část.
- Pak $T(n,p) \geq f_{\mathrm{s}} + \frac{f_{\mathrm{p}}}{p}$, a proto

$$S(n,p) \leq \frac{1}{f_{\mathrm{s}} + \frac{1-f_{\mathrm{s}}}{p}}.$$

- Je zřejmé, že $\lim_{p\to\infty} S(n,p) \leq \frac{1}{f_{\mathrm{s}}}$.
- Např., jestliže $f_{\mathrm{s}} = 10\%$, pak $S(n,p) \leq 10$.
- Obecně: Pokud se nezvětšuje velikost úlohy, přidávání dalších procesorů nemá smysl, protože se saturuje paralelismus úlohy.

Gustafsonův zákon

- Když se masivně paralelní počítače staly široce dostupné, ukázalo se, že existují paralelní algoritmy, mající přirozeně sekvenční část konstantní (V/V operace, inicializace), kdežto přirozeně paralelní část může lineárně škálovat s počtem procesorů.
- Pak doba výpočtu paralelní části zůstává nezměněná, a stejně tak celkový paralelní čas.
- Můžeme bez ztráty obecnosti předpokládat jednotkový paralelní čas: $T(n,p) = f_\mathrm{s} + f_\mathrm{p} = 1$.
- Jestliže takový algoritmus provedeme sekvenčně, bude trvat $T(n,1) = f_\mathrm{s} + pf_\mathrm{p}$ (jeden procesor simuluje práci p procesorů).
- Pak je zrychlení

$$S(n,p) = f_\mathrm{s} + pf_\mathrm{p} = f_\mathrm{s} + p(1 - f_\mathrm{s}) = p(1 - f_\mathrm{s} + f_\mathrm{s}/p).$$

- Tudíž $\lim_{p\to\infty} S(n,p) = p(1 - f_\mathrm{s})$.

Závěr

Masivně paralelní počítače mohou být optimálně využity pro lineárně škálovatelné problémy.