9. Transformace náhodné veličiny

9.1. Definice: Transformovaná náhodná veličina. Je-li X náhodná veličina a h je reálná funkce taková, že její definiční obor obsahuje obor hodnot náhodné veličiny X, pak náhodnou veličinu Y, která je definována vztahem

$$(\clubsuit) \qquad X = x \Rightarrow Y = h(x)$$

nazýváme *transformovanou náhodnou veličinou* a označujeme ji symbolem

$$(\clubsuit\clubsuit) \qquad Y = h(X).$$

9.2. Věta: Transformace diskrétního rozdělení. Nechť má náhodná veličina X diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí p, $p(x) = P(X = x)$, potom má transformovaná náhodná veličina $Y = h(X)$ také diskrétní rozdělení a pro její distribuční funkci p^* platí:

$$p^*(y) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} p(x), \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

Důkaz: První část tvrzení je zřejmá. Jestliže náhodná veličina X nabývá diskrétních hodnot z množiny $\{x_i\}$, pak hodnoty náhodné veličiny Y jsou z množiny $\{h(x_i)\}$. Pro pravděpodobnostní funkci p^* náhodné veličiny Y pak platí:

$$p^*(y) = P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X \in h^{-1}(y)) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} p(x), \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

Příklad: Nechť je rozdělení náhodné veličiny X dáno tabulkou Tab. 9.1. Utvořme tabulku pro rozdělení náhodné veličiny $Y = X^2 - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0,1	0,25	0,15	0,3	0,2

Tab. 9.1.

y	3	0	-1	0	3
x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0,1	0,25	0,15	0,3	0,2

Tab. 9.2.

Přidáme k tabulce řádek funkčních hodnot proměnné x po transformaci $y = x^2 - 1$. Dostaneme rozšířenou tabulku Tab. 9.2.

Z tabulky vidíme, že náhodná veličina Y nabývá hodnot -1, 0 a 3. Je pak:

$$p^*(-1) = P(Y = -1) = P(X^2 - 1 = -1) = P(X = 0) = p(0) = 0,15;$$

$$p^*(0) = P(Y = 0) = P(X^2 = 1) = P(X = -1 \cup X = 1) = p(-1) + p(1) = 0,55;$$

$$p^*(3) = P(Y = 3) = P(X^2 = 4) = P(X = -2 \cup X = 2) = p(-2) + p(2) = 0,3.$$

Pravděpodobnostní funkce p^* náhodné veličiny Y je uvedena v tabulce Tab. 9.3.

y	-1	0	3
$p^*(y)$	0,15	0,55	0,3

Tab. 9.3.

9.3. Algoritmus pro transformovanou distribuční funkci. Nechť má náhodná veličina X distribuční funkci F, případně hustotu f, $f(x) = F'(x)$. Označme si G distribuční funkci, případně $g, g(y) = G'(y)$ hustotu transformované náhodnou veličiny $Y = h(x)$. Potom podle definice distribuční funkce je:

$$G(y) = P(Y \le y) = P(h(X) \le y) = P(X \in h^{-1}(-\infty, y\rangle), \quad y \in \boldsymbol{R},$$

kde symbolem $h^{-1}(-\infty, y\rangle)$ označujeme vzor množiny $(-\infty, y\rangle$, tedy množinu všech x, pro které je $h(x) \le y$. Tato množina je intervalem, nebo sjednocením intervalů a odpovídající pravděpodobnost zjistíme pomocí původní distribuční funkce či hustoty.

9.4. Příklad: Lineární transformaci $Y = \alpha X + \beta$ jsme uvedli v kapitole 8 pro normální rozdělení. Zopakujme si uvedený výpočet.

V souladu s uvedeným označením je

$$G(y) = P(Y \le y) = P(\alpha X + \beta \le y) = P(\alpha X \le y - \beta) =$$

$$= \left\langle \begin{array}{ll} P(X \le \frac{y-\beta}{\alpha}) = F(\frac{y-\beta}{\alpha}) & \alpha > 0 \\ P(X \ge \frac{y-\beta}{\alpha}) = 1 - F(\frac{y-\beta}{\alpha}), & \alpha < 0. \end{array} \right.$$

Potom pro hustotu g rozdělení náhodné veličiny Y dostaneme:

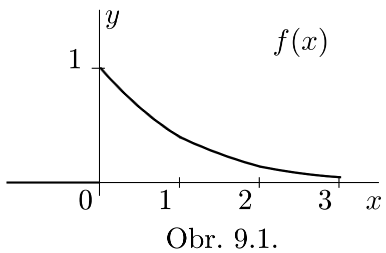
$$g(y) = G'(y) = \left\langle \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(F(\frac{y-\beta}{\alpha})\right) = \frac{1}{\alpha} f(\frac{y-\beta}{\alpha}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - F(\frac{y-\beta}{\alpha})\right) = \frac{-1}{\alpha} f(\frac{y-\beta}{\alpha}) \end{array} \right\rangle = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

9.5. Příklad: Nechť má náhodná veličina X exponenciální rozdělení $Exp(0; 1)$ s hustotou, která je určena vztahy:

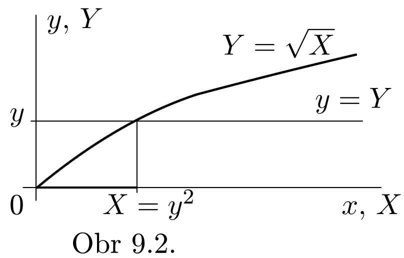
$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x \ge 0. \end{array} \right.$$

Určete hustotu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \sqrt{X}$.

Řešení: Znázorníme si na obrázku Obr. 9.1. průběh hustoty f a na obrázku Obr. 9.2. vyznačíme průběh trasformující funkce $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \infty)$.



Obr. 9.1.



Obr 9.2.

Z obrázku 9.1 vyplývá, že náhodná veličina X nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \infty)$, neboť zde je hustota f kladná. Z obrázku 9.2 vyplývá, že funkce $y = \sqrt{x}$ zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, \infty)$. To znamená, že náhodná veličina nabývá pouze hodnot z tohoto intervalu a tudíž jsou její distribuční funkce G a hustota g rovny nule pro $y < 0$. Pro hodnoty $y \ge 0$ vypočteme hodnotu distribuční funkce G výše popsaným algoritmem. Je

$$G(y) = P(Y \le y) = P(\sqrt{X} \le y) = P(0 \le X \le y^2) = F(y^2) - F(0) = F(y^2), \quad y \in \langle 0, \infty).$$

Odtud dostaneme, že pro hustotu g platí vyjádření:

$$g(y) = G'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(F(y^2)\right) = 2yf(y^2) = 2y\mathrm{e}^{-y^2}, \quad y \in (0, \infty).$$

Snadno vypočteme i hodnotu distribuční funkce F náhodné veličiny X. Je

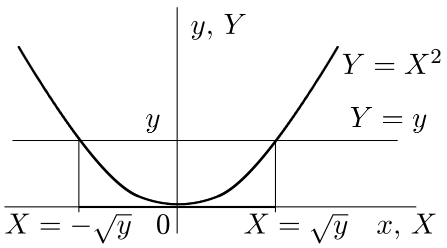
$$F(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geq 0. \end{array} \right.$$

Odtud plyne, že

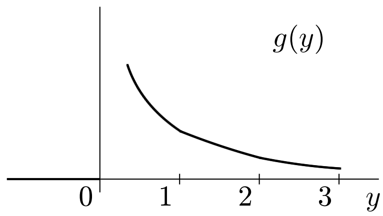
$$G(y) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & y \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-y^2}, & y \geq 0. \end{array} \right.$$

9.6. Příklad: Jestliže má náhodná veličina X normální rozdělení $N(0;1)$, určete hustotu a distribuční funkci transformované náhodné veličiny $Y = X^2$.

Řešení: V souladu se značením v kapitole 8 označíme Φ distribuční funkci a φ hustou náhodné veličiny X. Z průběhu funkce φ na obrázku Obr. 8.1 vyplývá, že náhodná veličina X nabývá všech reálných hodnot. Znázorníme si na obrázku 9.3 průběh trasformující funkce $Y = X^2$.



Obr. 9.3.



Obr 9.4.

Protože funkce $y = x^2$ nabývá všech nezáporných hodnot, bude náhodná veličina Y nabývat také nezáporných hodnot. Jsou tedy její distribuční funkce G a hustota g rovny nule pro zápornou hodnotu argumentu. Pro $y \geq 0$ pak dostaneme:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1,$$

když použijeme vztahu $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ z kapitoly 8. Potom pro hustotu g náhodné veličiny Y odtud dostaneme:

$$g(y) = G'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\Phi(\sqrt{y}) - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, \quad y \in (0, \infty),$$

jestliže použijeme skutečnosti z kapitoly 8, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Toto rozdělení nazýváme *rozdělení* $\chi^2(1)$ o jednom stupni volnosti. Čteme chí-kvadrát a rozdělení tohoto typu patří k nejpoužívanějším v matematické statistice. Průběh hustoty je znázorněn na obrázku 9.4.

9.7. Příklad: Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení v intervalu $(0,1)$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = -\ln X$.

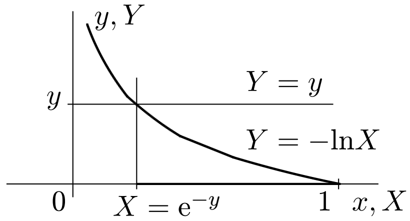
Řešení: Náhodná veličina X nabývá hodnot z intervalu $(0,1)$ a transformující funkce $y = -\ln x$ nabývá v tomto intervalu všech kladných hodnot. Náhodná veličina Y nabývá tudíž kladných hodnot a jsou tedy její distribuční funkce G a hustota g rovny nule pro záporné hodnoty argumentu. Situaci si znázorníme na obrázku Obr. 9.5. Hodnoty distribuční funkce pro kladný argument vypočteme popsaným způsobem. Je pak

$$G(y) = P(Y \le y) = P(-\ln X \le y) = P(\ln X \ge -y) = P(X \ge \mathrm{e}^{-y}) = 1 - F(\mathrm{e}^{-y}) = 1 - e^{-y},$$

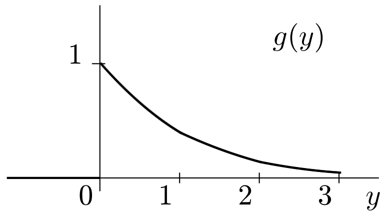
když použijeme výsledků o rovnoměrném rozdělení z odstavce 5.9. Hustotu g získáme přímo derivováním nebo ze vztahu

$$g(y) = G'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,(1 - F(\mathrm{e}^{-y})) = f(\mathrm{e}^{-y}) = \mathrm{e}^{-y}, \quad y > 0.$$

Opět použijeme vyjádření pro hustotu rovnoměrného rozdělení z odstavce 5.9. Průběh hustoty g je znázorněn na obrázku Obr. 9.6.



Obr. 9.5.



Obr 9.6.

9.8. Příklad: Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $\mathrm{Exp}(0;1)$ a náhodná veličina $Y = min\{X, 2\}$.

$a)$ Určete rozdělení náhodné veličiny Y (její distribuční funkci).

$b)$ Vypočtěte střední hodnotu $E(Y)$, rozptyl $D(Y)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(Y)$.

Řešení: Náhodná veličina nabývá kladných hodnot. Její hustota rozdělení pravděpodobnosti f je rovna

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ \mathrm{e}^{-x}, & x \in \langle 0, \infty). \end{array} \right.$$

Distribuční funkci F určíme ze vzorce $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in \boldsymbol{R}$. Je pak

pro $x \le 0:\quad F(x) = 0;$

pro $x > 0:\quad F(x) = F(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. Tedy

$$F(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \in \langle 0, \infty). \end{array} \right.$$

Náhodná veličina Y nabývá hodnot z intervalu $(0, 2\rangle$. Pro její distribuční funkci G platí:
$y \in (-\infty, 0\rangle:\quad G(y) = P(Y \le y) = P(min\{X;2\} \le y) = P(X \le y) = 0;$
$y \in (0, 2):\quad G(y) = P(Y \le y) = P(min\{X;2\} \le y) = P(X \le y) = F(y) = 1 - \mathrm{e}^{-y};$
$y \in \langle 2, \infty):\quad P(Y \le y) = P(min\{X;2\} \le y) = 1.$
Náhodná veličina Y má smíšené rozdělení a $P(Y = 2) = P(X \ge 2) = 1 - F(2) =$
$= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-2}) = \mathrm{e}^{-2} = 0,13533.$

Střední hodnotu Y vypočteme takto:
$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} min\{x;2\} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + 2.\int_2^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-x}(-x-1)\right]_0^2 +$
$2.(1 - F(2)) = -3\mathrm{e}^{-2} + 1 + 2\mathrm{e}^{-2} = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0,86466.$

K výpočtu rozptylu použijeme vzorce $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Je
$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (min\{x;2\})^2 f(x)\mathrm{d}x =$
$\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + 4.P(X \geq 2) = \left[\mathrm{e}^{-x}(-x^2 - 2x - 2)\right]_0^2 + 4.(1 - F(2)) =$
$-10\mathrm{e}^{-2} + 2 + 4\mathrm{e}{-2} = 2 - 6\mathrm{e}^{-2} = 1,187988.$

Potom je
$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 2 - 6\mathrm{e}^{-2} - (1 - \mathrm{e}^{-2})^2 = 2 - 6\mathrm{e}^{-2} - 1 + 2\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-4} = 1 - 4\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-4} = 0,47697.$
Pro směrodatnou odchylku dostaneme $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 0,69063$.

9.9. Definice: Charakteristická funkce Je-li X náhodná veličina, pak funkci ψ_X reálné proměnné t, která je definována vztahem

$$\psi_X(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}), \quad t \in \boldsymbol{R},$$

nazýváme *charakteristickou funkcí* náhodné veličiny X.

9.10. Věta: Výpočet charakteristické funkce. Charakteristickou funkci náhodné veličiny vypočteme pomocí vzorce, který závisí na typu rozdělení .

1. Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí $p(x)$, pak je její charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx} p(x), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

2. Náhodná veličina X má spojité rozdělení s hustotu $f(x)$, pak je její charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{d}x, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

3. Náhodná veličina X má smíšené rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$, pak je její charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \sum_{x \in \boldsymbol{R}} [F(x) - F(x-)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx} + \int_{-\infty}^{\infty} F'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{d}x, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

9.11. Příklad: Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení (alternativní), kdy $p(0) = P(X = 0) = 1 - p,\ p(1) = P(X = 1) = p,\ 0 < p < 1.$

Řešení: Podle vzorce v 1 z odstavce 9.10. je

$$\psi_X(t) = p(0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}t.0} + p(1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}t.1} = 1 - p + p\mathrm{e}^{\mathrm{j}t},\ t \in \boldsymbol{R}.$$

9.12. Příklad: Náhodná veličina X má spojité rovnoměrné rozdělení v intervalu $(0, 1)$.

Řešení: Hustota f náhodné veličiny X je rovna jedné v intervalu $(0, 1)$ a jinde je nulová. Potom podle vzorce v 2 z odstavce 9.10 je

$$\psi_X(t) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}}{\mathrm{j}t}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{j}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}t})}{t}, \quad t \in \boldsymbol{R},\ t \neq 0.$$

9.13. Příklad: Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $Exp(0; \delta)$.

Řešení: Náhodná veličina má kladnou hustotu $f(x) = \frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}$ pro $x > 0$. Podle vzorce 2 z věty 9.10 je charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \mathrm{e}^{x(\mathrm{j}t-\frac{1}{\delta})}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\delta(\mathrm{j}t-\frac{1}{\delta})}\left[\mathrm{e}^{x(\mathrm{j}t-\frac{1}{\delta})}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-\mathrm{j}\delta t}.$$

9.14. Věta: Vlastnosti charakteristické funkce. Pro charakteristickou funkci náhodné veličiny X platí:

1. Je $\psi_X(0) = 1,\ |\psi_X(t)| \le 1, \quad t \in \boldsymbol{R}$.
2. Funkce ψ_X je spojitá v $\boldsymbol{R}$.
3. Funkce ψ_X má tolik derivací v nule, kolik má náhodná veličina momentů a je

$$\psi_X^{(k)}(0) = \mathrm{j}^k E(X^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

4. Pro čísla $\alpha,\ \beta$ je

$$\psi_{\alpha X+\beta}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\beta}\psi_X(\alpha t), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

5. Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak je

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t).\psi_Y(t), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Důkaz: Tvrzení 1 snadno vyplývá ze vzorců 1-3 z odstavce 9.10. Tvrzení 2 nebudeme odvozovat, jeho důkaz není obtížný, je pouze pracný.

Ke tvrzení 3 uvedeme jako příklad formální odvození vztahu pro spojité rozdělení. Je

$$\psi'_X(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{j}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\,\mathrm{d}x$$

a odtud po dosazení dostaneme

$$\psi'_X(0) = \mathrm{j}\int_{-\infty}^\infty xf(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{j}E(X).$$

Vzorec pro další momenty dostaneme opětovným derivováním. Poměrně snadno ověříme možnost záměny derivování a integrace.

Tvrzení 4 snadno odvodíme z vlastností střední hodnoty. Je totiž

$$\psi_{\alpha X+\beta}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t(\alpha X+\beta)}) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\beta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha t)X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\beta}\psi_X(\alpha t).$$

Tvrzení 5 vyplývá z vlastnosti pro střední hodnotu součinu nezávislých veličin. Je

$$\psi_{X+Y}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t(X+Y)}) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX}\cdot e^{\mathrm{j}tY}) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}tX})E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}tY}) = \psi_X(t)\psi_Y(t).$$

9.15. Příklad: Náhodné veličiny $X_i,\ 1 \le i \le n$, jsou nezávislé a mají exponenciální rozdělení $Exp(0;\delta)$. Určete charakteristickou funkci náhodné veličiny $T = \frac{2n\overline{X}}{\delta}$.

Řešení: Podle příkladu 9.13. má každá z náhodných veličin X_i charakteristickou funkci $\psi(t) = \frac{1}{1-\mathrm{j}\delta t}$. Potom podle tvrzení 5 z věty 9.14 má jejich součet $\widetilde{X} = \sum\limits_{i=1}^n X_i$ charakteristickou funkci

$$\psi_{\widetilde{X}} = \frac{1}{(1-\mathrm{j}\delta t)^n}.$$

Potom podle tvrzení 4 z věty 9.14, kde volíme $\alpha = \frac{2}{\delta}$, $\beta = 0$ je

$$\psi_T(t) = \psi_{\widetilde{X}}(\frac{2}{\delta}t) = \frac{1}{(1-2\mathrm{j}t)^n}.$$

Poznámka: Charakteristická funkce ψ_T je charakteristickou funkcí náhodné veličiny, která má rozdělení $\chi^2(2n)$. Této skutečnosti se využívá při odhadech parametrů exponenciálního rozdělení.