

Y36SAP - aritmetika

Číslo se znaménkem
a aritmetické operace
pevná a pohyblivá
řádová čárka

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

1

Osnova

- Zobrazení záporných čísel
 - Příímý, aditivní a doplňkový kód a operace sčítání a odčítání, přetečení
- Číslo s pohyblivou řádovou čárkou
 - Zobrazení v řádové mřížce
 - Provádění základních aritmetických operací
 - Normalizovaný tvar, skrytá jednička

Kubátová 2008

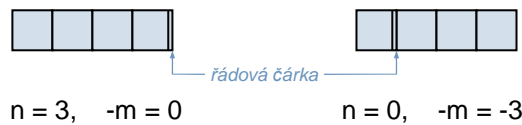
Y36SAP-aritmetika

2

Řádová mřížka (opakování)

- **Zobrazení čísel na počítači je limitováno** (rozsahem registrů, paměť. míst, apod.)
- **Řádová mřížka určuje formát zobrazitelných čísel** (tj. definuje nejvyšší řád n a nejnižší řád $-m$)

- Příklad řádových mřížek



Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

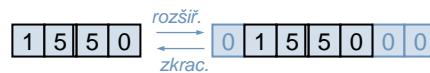
3

Aritmetické operace v ř.m. - chyby

- Někdy se lze chybám vyhnout změnou délky ř.m.

– **rozšiřování** × **zkracování** ř.m.

Př.



- Při ztrátě přesnosti můžeme velikost chyby ovlivnit způsobem **zaokrouhlení**

- zaokrouhlení nahoru/dolů
- zaokrouhlení s pref. sudé číslice
- zaokrouhlení s pref. většího čísla

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

4

Aritmetické operace v ř.m. (3)

- **Zaokrouhlení dolů (oříznutí)**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

- **Zaokrouhlení nahoru**

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\ + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

5

Aritmetické operace v ř.m.

- **Zaokrouhlení s preferencí sudé číslice**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

- **Zaokrouhlení s preferencí většího čísla**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Kubátová 2008

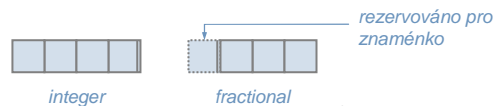
Y36SAP-aritmetika

6

Řádová čárka vzhledem k ř.m.

- Pevně definovaná pozice \Rightarrow **čísla s pevnou řádovou čárkou (fixed-point)**

– nejpoužívanější



- Řádová čárka je definována posunem vůči definované pozici \Rightarrow **čísla s pohyblivou řádovou čárkou (floating-point)**



Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

7

Zobrazení záporných čísel

- Standardní polyadické soustavy \Rightarrow pouze nezáporná čísla
- Zobrazení záporných čísel \Rightarrow **číselné kódy**
 - popisují transformaci z omezené množiny celých čísel do omezené množiny nezáporných čísel
- Nejpoužívanější číselné kódy:
 - **přímý**
 - **aditivní**
 - **doplňkový**

Kubátová 2008

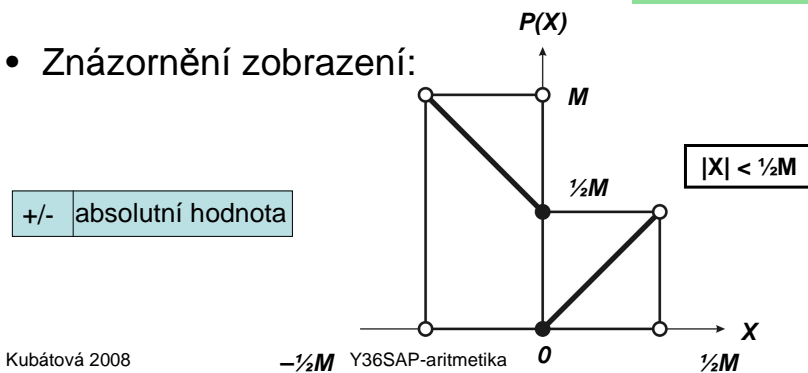
Y36SAP-aritmetika

8

Přímý kód

- Nejvyšší řád ř.m. představuje znaménko, zbytek ř.m. je absolutní hodnota
- Znaménko reprezentováno číslicí: $+\dots 0, -\dots 1$

- Znázornění zobrazení:



Příklady – přímý kód

$M = 1000 \dots$ tzn. 3bitová čísla

X	$P(X)$		
+0	0	0	0
+1	0	0	1
+2	0	1	0
+3	0	1	1
-0	1	0	0
-1	1	0	1
-2	1	1	0
-3	1	1	1

← kladná nula

← záporná nula

$-25_{10} \xrightarrow{P}$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	1	0	2	5	$+101_2 \xrightarrow{P}$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	1
1	0	2	5								
0	1	0	1								
$+0,05_{10} \xrightarrow{P}$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>	0	0	5	0	$-0,11_2 \xrightarrow{P}$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	0
0	0	5	0								
1	1	1	0								

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

10

Sčítání a odčítání

Pracuji zvlášť se znaménkem a absolutní hodnotou
Absolutní hodnota je nezáporné číslo

Příklad pro 3 bitová nezáporná čísla:

$$B=101 \quad \bar{B}=010$$

$$B + \bar{B} = 111 = 1000 - 1 = M - 1$$

$$-B = \bar{B} + 1 - M$$

$$A - B = A + \bar{B} + 1 - M$$

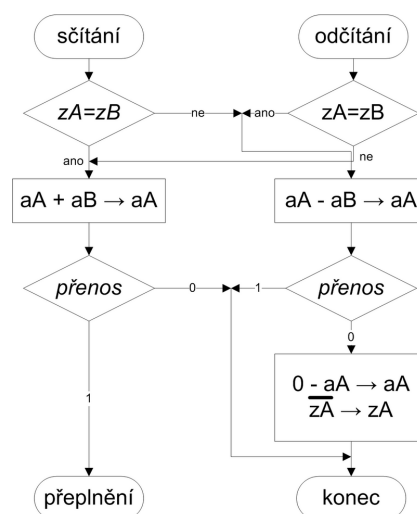
Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

11

Sčítání a odčítání v přímém kódu

- $A + B$, $A - B$,
výsledek ulož do A
- kde
 $A \sim (zA, aA)$,
 $B \sim (zB, aB)$
- z – znaménko,
a – absolutní hodnota



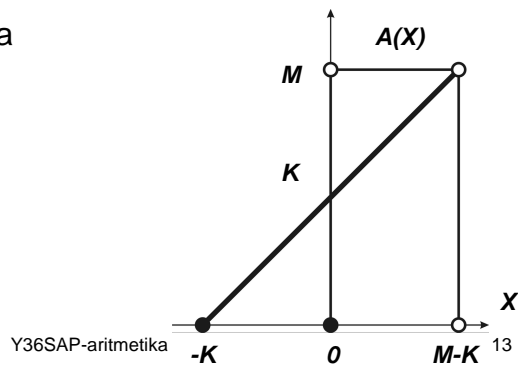
Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

12

Aditivní kód

- Též označovaný jako „kód s posunutou nulou“
- Formální definice: $A(X) = X + K$ pro $-K \leq X < M - K$
- K – vhodná konstanta
často se volí:
 $K = \frac{1}{2} Z$



Kubátová 2008

Příklady – aditivní kód

$$\begin{array}{ll}
 -25_{10} \xrightarrow[K=5000]{A} \boxed{4 \ 9 \ 7 \ 5} & +101_2 \xrightarrow[K=1000_2]{A} \boxed{1 \ 1 \ 0 \ 1} \\
 +0,05_{10} \xrightarrow[K=1,000]{A} \boxed{1 \ 0 \ 5 \ 0} & -0,11_2 \xrightarrow[K=1,000_2]{A} \boxed{0 \ 0 \ 1 \ 0}
 \end{array}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

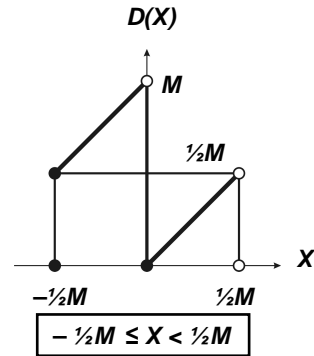
14

Doplňkový kód

Definice: $D(X) = \begin{cases} X, & \text{je-li } X \geq 0 \\ M + X, & \text{je-li } X < 0 \end{cases}$

Příklad – napsat všechna 3 bitová čísla
($M = 1000$, $\varepsilon = 1$, $l = 3$)

X	$D(X)$
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
-4	1 0 0
-3	1 0 1
-2	1 1 0
-1	1 1 1



Znaménko je určeno prvním bitem zleva,
ale tento bit je organickou součástí obrazu !!!

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

15

Doplňkový kód - pokračování

- Obraz záporného čísla X je doplňkem jeho hodnoty do modulu M řádové mřížky
- Příklad.

$$\begin{array}{ll}
 -25_{10} \xrightarrow{D} \boxed{9 \ 9 \ 7 \ 5} & +101_2 \xrightarrow{D} \boxed{0 \ 1 \ 0 \ 1} \\
 +0,05_{10} \xrightarrow{D} \boxed{0 \ 0 \ 5 \ 0} & -0,11_2 \xrightarrow{D} \boxed{1 \ 0 \ 1 \ 0}
 \end{array}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

16

Sčítání a odčítání v doplňkovém kódu

		$D(A) + D(B)$	$D(A + B)$
1	$A \geq 0 \ B \geq 0$	$A + B$	$A + B$
2	$A \geq 0 \ B < 0$	$A + B + M$	$A + B$
3	$A < 0 \ B \geq 0$		$A + B + M$
3	$A < 0 \ B < 0$	$A + B + M + M$	$A + B + M$

$$D(A + B) = \begin{cases} D(A) + D(B) \\ D(A) + D(B) - M \end{cases}$$

Sečtou se obrazy a ignoruje se přenos !!!

Příklady – viz tabule a cvičení

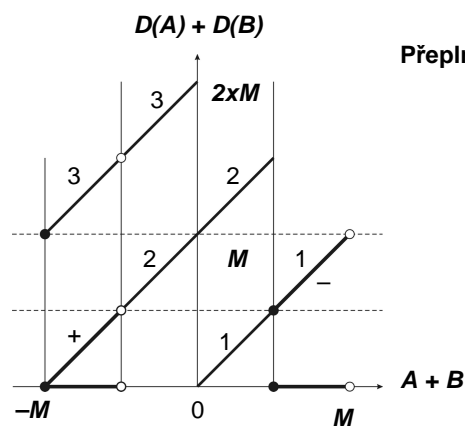
Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

17

Přeplnění

Přeplnění (overflow) není přenos (carry) !!!!!



Přeplnění: $\begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline + \\ \hline \end{array}$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

18

Přeplnění

a	b	p	q	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Přeplnění: $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline + & + & + & \rightarrow - \\ \hline - & + & - & \rightarrow + \\ \hline \end{array}$

Overflow = $p \text{ xor } q$

Kubátová 2008 Y36SAP-aritmetika 19

Odčítání v doplňkovém kódu

Příklad pro 3 bitová nezáporná čísla (opakování):

$$B=101 \quad \bar{B}=010$$

$$B + \bar{B} = 111 = 1000 - 1 = M - 1$$

$$-B = \bar{B} + 1 - M$$

$$A - B = A + \bar{B} + 1 - M$$

V doplňkovém kódu:

$$A - B = A + (-B)$$

$$D(B) + D(-B) = B + (-B) + M = M$$

$$D(-B) = M - D(B)$$

$$D(-B) = \overline{D(B)} + 1$$

Správný výsledek – musím mít možnost odečíst modul, Musí vyjít přenos !!

$$A - B = D(A) + \overline{D(B)} + 1$$

detekce přeplnění je stejná jako u sčítání

Doplňkový kód pro desítkovou soustavu 10's complement

Příklad – 3 místná desítková čísla –

$$M = 1000_{10}$$

znaménko je určeno první číslicí zleva:

0 – 4 + (kladná čísla)
5 – 9 – (záporná čísla)

X	$D(X)$	X	$D(X)$
0	000	–500	500
1	001	–499	501
...
499	499	–1	999

$$D(X) + D(-X) = 1000 = 999 + 1$$

$$D(-X) = 999 - D(X) + 1$$

$$\text{označme: } \bar{a} = 9 - a$$

$$D(X) = 499 \rightarrow D(-X) = \overline{499} + 1$$

$$D(-X) = 500 + 1 = 501$$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

21

Pohyblivá řádová čárka

- Čísla s pevnou řádovou čárkou mají výrazně omezený rozsah

Př. $z = 2$, délka ř.m. $l = 32$ (tj. 32-bitové číslo)

$$\text{max. celé číslo} \quad \dots A < 2^{32} < 5 \cdot 10^9$$

$$\text{min. zlomkové číslo} \quad \dots A > 2^{-32} > 2 \cdot 10^{-9}$$

- Pro zvětšení rozsahu přidáme exponent e
 $X \cdot z^e$... odpovídá posunu řádové čárky v čísle X o e
 \Rightarrow čísla s pohyblivou řádovou čárkou

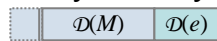
Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

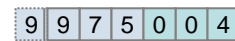
22

...pohyblivá řádová čárka

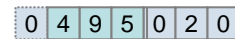
- Řádová mřížka má 2 části (podmřížky):
 - **mantisa** (m) - informace o „hodnotě“ čísla, často zlomkový tvar
 - **exponent** (e) - informace o pozici řád. čárky, celé číslo
- m i e používají kódy pro zobrazení záporných čísel
- Ukázky možných formátů ř.m.



Př. $(-25 \cdot 10^2)_{10}$



Př. $(0,02 \cdot 10^{-5})_{10}$



Kubátová 2008

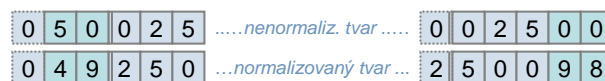
Y36SAP-aritmetika

23

...pohyblivá řádová čárka

- **Normalizovaný tvar**
 - je tvar čísla, kdy už nelze mantisu posunout více doleva
 - zjednodušuje aritmetické operace
- Normalizovaný tvar operandů nezaručí normalizovaný tvar výsledku
 - ⇒ **normalizace**
 - tj. **úprava výsledku na normalizovaný tvar** $A = 0,025_{10}$
 - nutno provádět po každé operaci

- Př.



Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

24

...pohyblivá řádová čárka

• Skrytá jednička

- předpokl. $z = 2$, normaliz. tvar, M přímý kód, $M \neq 0$, $A(e) \neq 0$
 \Rightarrow v nejvyšším řádu mantisy bude vždy 1
 \Rightarrow tuto 1 můžeme „skrýt“ (tj. vynechat ze zápisu čísla v ř.m.)

$$A = 1,0_2 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{!!! A(e) = e_2 - 11_2 !!!} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- používá se např. u standardu *ANSI/IEEE Std. 754 - 1985*
- V případě $A(e) = 0$ se skrytá jednička nepoužívá!!!

$$A = (2^{-3})_2 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A = 0_2 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Kubátová 2008

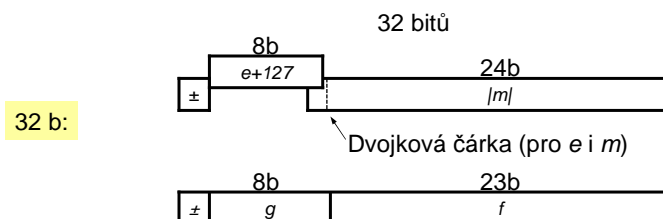
Y36SAP-aritmetika

25

ANSI/IEEE Std. 754 - 1985

	znaménko	exponent	mantisa
32 b	1b	8b	23 (24)b
64 b	1b	11b	52 (53)b

exponent – aditivní kód, $K=127$
 mantisa – přímý kód, $|M| < 2$



Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

26

Pohyblivá řádová čárka

e	M	A
0	= 0	0
0	≠ 0	$(-1)^s \cdot M \cdot 2^{-126}$
$\langle 1..254$	-	$(-1)^s \cdot (M + 1) \cdot 2^{-127}$
\rangle		
255	= 0	$(-1)^s \cdot \infty$
255	≠ 0	NaN (<i>Not a Number</i>)

Skrytá jednička!

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

27

...pohyblivá řádová čárka

Např. $-58_{10} = -11\ 1010_2 = (-1, 1101\ 0 \times 10^{101})_2$

$|m| = 1, 1101\ 0 \rightarrow f = 1101\ 00...0$

$e = 101 \rightarrow g = 1000\ 0100 \dots \dots$ tzn. $127+5$

1 1000 0100 1101 0000 00... 0

| C | 2 | 6 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

v little endian je tedy postupně

uloženo ve slabikově

organizované paměti:

adr1 00
adr2 00
adr3 68
adr4 C2

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

28

Aritmetika v pohyblivé ř.č.

- Aritmetické operace:
 - **sčítání/odčítání**: Srovnat exponenty a sečíst/odečíst mantisy.
 - **násobení**: Sečíst exponenty a vynásobit mantisy.
 - **dělení**: Odečíst exponenty a vydělit mantisy.
 - **porovnání**: Srovnat exponenty a porovnat mantisy.
 - **posuv**: Posunem mantisy nebo zvětš./zmenš. exponentu.
- Normal. tvar operandů nezaručí normal. tvar výsledku
 ⇒ **normalizace**
 - tj. **úprava výsledku na normal. tvar**
 - nutno provádět po každé operaci

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

29

Úloha: Zapište v normalizovaném tvaru.

- Předpokládejte délku ř.m. $l = 12$, přitom délka podmřížky exponentu je $l_e = 4$. Exponent v aditivním kódu, mantisa v přímém kódu, aditivní konstanta pro exponent je 8.

1. $-(1010,11)_2$
2. $7,375_{10}$
3. $13, C_{16}$
4. $-(46,875 \cdot 10^{-2})_{10}$

1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

30

Příklad: Sčítání v pohyblivé ř.č.

- Zapište čísla $3,5_{10}$ a $0,625_{10}$ v normalizovaném tvaru a pak je sečtěte.

$$\begin{aligned}
 3,5_{10} &= 11,1_2 = 0,111_2 \cdot 2^2 && \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 0,625_{10} &= 0,101_2 \cdot 2^0 && \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 3,5_{10} + 0,625_{10} &= 0,111_2 \cdot 2^2 + 0,101_2 \cdot 2^0 = && \downarrow + \\
 &= (0,111_2 + 0,00101_2) \cdot 2^2 = && \\
 &= (1,00001_2) \cdot 2^2 = 0,100001_2 \cdot 2^3 && \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

31

Příklad: Násobení v pohyblivé ř.č.

- Zapište čísla $3,5_{10}$ a $0,625_{10}$ v normalizovaném tvaru a pak je vynásobte.

$$\begin{aligned}
 3,5_{10} &= 0,111_2 \cdot 2^2 && \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 0,625_{10} &= 0,101_2 \cdot 2^0 && \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 &&& \downarrow \times \\
 \begin{array}{r}
 0,111_2 \\
 \times 0,101_2 \\
 \hline
 0,0111_2 \\
 + 0,00000_2 \\
 + 0,000111_2 \\
 \hline
 0,100011_2
 \end{array} &&& \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

32

Úloha: Spočítejte v pohyblivé ř.č.

Poznámka – spočítejte doma!!!

- Předpokládejte délku ř.m. $l = 12$, přitom délka podmřížky exponentu je $l_e = 4$. Exponent v aditivním kódu, mantisa v přímém kódu.

1. $10,375_{10} \times 0,125_{10}$

2. $13,625_{10} + 1,375_{10}$

3. $4_{16} - 3_{16}$

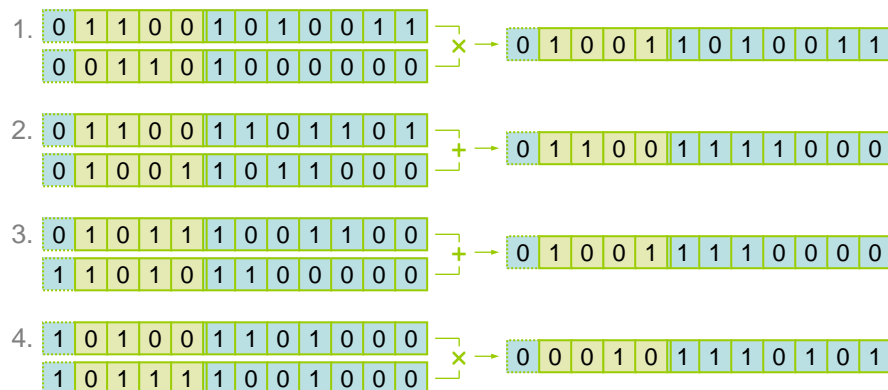
4. $(-0,40625_{10} \cdot 2^{-3}) \times (-0,28125_{10})$

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

33

Úloha: Spočítejte v pohyblivé ř.č.



Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

34

Alfanumerické kódy

26 písmen anglické (latinské) abecedy

× 2 (velká/malá)

10 číslic

další znaky (mezera, čárka, tečka, ..., plus, ...)

↓

minimálně 6 bitů/znak (raději aspoň 7 bitů/znak)

5bitový kód: CCITT 2 (ITA 2, MTA 2)

dvojitá interpretace znaků „přepínaná“ speciálními znaky

8bitový kód: EBCDIC (DKOI)

[Extended Binary-Coded-Decimal Interchange Code

(dvojitý kód dle obměny i obrabotky informací)]

mezera	40		
'a' ... 'i'	81 ... 89	'A' ... 'I'	C1 ... C9
'j' ... 'r'	91 ... 99	'J' ... 'R'	D1 ... D9
's' ... 'z'	A2 ... A9	'S' ... 'Z'	E2 ... E9
		'0' ... '9'	F0 ... F9

Kubátová 2008

Y36SAP-aritmetika

35

**7bitový kód: ASCII , též ASCII-7 , popř. USASCII
(CCITT 5, ISO-7, KOI-7)**

[American Standard Code for Information Interchange,
popř. USA Standard Code for Information Interchange
(Comité consultatif international télégraphique et
téléphonique, International Standard Organization,
kod dle obměny i obrabotky informací)]

8bitový kód: ASCII-8 (popř. ISO-8, KOI-8)

00 ... 7F — ASCII-7

80 ... FF — tzv. „národní abecedy“

„české abecedy“ (pouze některé z používaných):

KOI ◇ KOI-8 čs (ČSN 36 9103)

Kam ◇ kód bratří Kamenických (KEYBCZ, CP895)
Ælufoucký kůň úpěl áábelské ódy.
[Žlufoucký kůň úpěl ďábelské ódy.]

852 ◇ IBM – page 852 (Latin 2)

ISO ◇ ISO 8859-2 (ČSN ISO/IEC 8859-2 369111)

1250 ◇ windows 1250

MAC ◇ apple-ce

uni ◇ Unicode

Kubátová 200

36