10. Koeficient korelace

Příklad 1. Určete marginální hustoty a koeficient korelace náhodných veličin X a Y, jesliže je sdružená hustota náhodného vektoru rovna

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{x-y+1}{3}, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinde.} \end{array} \right.$$

Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

Řešení: Marginální hustoty vypočtetme ze sdružené hustoty integrací podle jedné z proměnných. Postupně dostaneme:

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{x-y+1}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[xy - \frac{y^2}{2} - y\right]_0^1 = \frac{2x+1}{6},\ 0 < x < 2$$

a $f_1(x) = 0$ jinde. Odtud dostaneme:

$$E(X) = \int_0^2 \frac{2x^2+x}{6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{11}{9}.$$

$$E(X^2) = \int_0^2 \frac{2x^3+x^2}{6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[\frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{9}.$$

Tedy

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{16}{9} - \frac{121}{81} = \frac{23}{81}.$$

Pro náhodnou veličiny Y dostaneme:

$$f_2(y) = \int_0^2 \frac{x-y+2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - xy + x\right]_0^2 = \frac{4-2y}{3},\ 0 < y < 1,$$

a $f_2(y) = 0$ jinde.

Momenty vypočteme postupně:

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{4y-2y^2}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[2y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{9};$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \frac{4y^2-2y^4}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{2y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{18};$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{18} - \frac{16}{81} = \frac{13}{162}.$$

Pro koeficient kovariance vypočteme

$$E(XY) = \int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{x^2y - xy^2 + xy}{3} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^1 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{18}(3x^2 + x)\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = \frac{5}{9}.$$

Koeficient kovariance je roven

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{5}{9} - \frac{11}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{81},$$

tedy pro koeficient korelace dostaneme

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\frac{1}{81}}{\sqrt{\frac{23}{81} \cdot \frac{13}{162}}} = \frac{\sqrt{598}}{299}.$$

Protože je koeficient korelace nenulový, musí být náhodné veličiny X a Y závislé.

Příklad 2. Určete marginální hustoty a koeficient korelace náhodných veličin X a Y, jesliže je sdružená hustota náhodného vektoru rovna

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 3xy, & y \geq 0, y \leq x,\ x + y \leq 2, \\ 0, & \text{jinde.} \end{array} \right.$$

Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

Řešení: Marginální hustoty vypočtetme ze sdružené hustoty integrací podle jedné z proměnných. Postupně dostaneme:

$$f_1(x) = \int_0^x 3xy\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3}{2}xy^2\right]_0^x = \frac{3}{2}x^3,\ 0 < x < 1;$$

$$f_1(x) = \int_0^{2-x} 3xy\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3}{2}xy^2\right]_0^{2-x} = \frac{3}{2}(4x - 4x^2 + x^3),\ 1 < x < 2;$$

a $f_1(x) = 0$ jinde. Odtud dostaneme:

$$E(X) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^4\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{3}{2}(4x^2 - 4x^3 + x^4) =$$

$$\frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = \frac{11}{10}.$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^5\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{3}{2}(4x^3 - 4x^4 + x^5) =$$

$$\frac{3}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6\right]_1^2 = \frac{13}{10}.$$

Tedy

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{10} - \frac{121}{100} = \frac{9}{100}.$$

Pro náhodnou veličiny Y dostaneme:

$$f_2(y) = \int_y^{2-y} 3xy\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left[x^2y\right]_y^{2-y} = \frac{3}{2}(4y - 5y^2 + y^3),\ 0 < y < 1,$$

a $f_2(y) = 0$ jinde.

Momenty vypočteme postupně:

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{3}{2}\left(4y^2 - 5y^3 + y^4\right)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{5}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \frac{3}{2}\left(4y^3 - 5y^4 + y^5\right)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[y^4 - y^5 + \frac{1}{6}y^6\right]_0^1 = \frac{3}{10};$$

$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Pro koeficient kovariance vypočteme

$$E(XY) = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} 3x^2y^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left[x^3y^2 \right]_y^{2-y} \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 8y^2 - 12y^3 + 6y^4 - y^5 - y^5 \mathrm{d}x = \left[\frac{8}{3}y^3 - 3y^4 + \frac{6}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^6 \right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Koeficient kovariance je roven

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{8}{15} - \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{60},$$

tedy pro koeficient korelace dostaneme

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{60}}{\sqrt{\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{20}}} = -\frac{\sqrt{5}}{9}.$$

Protože je koeficient korelace nenulový, musí být náhodné veličiny X a Y závislé.

Příklad 3. Určete marginální hustoty a koeficient korelace náhodných veličin X a Y, jesliže je sdružená hustota náhodného vektoru rovna

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{8}{\pi}(x^2 + y^2), & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{jinde.} \end{array} \right.$$

Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

Řešení: Marginální hustoty vypočtetme ze sdružené hustoty integrací podle jedné z proměnných. Postupně dostaneme:

$$f_1(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{8}{\pi}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{8}{\pi}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3)\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{8}{3\pi}(1 + 2x^2)\sqrt{1 - x^2},\ 0 \leq x \leq 1$$

a $f_1(x) = 0$ jinde.

Ze symetrie funkce a oboru hustoty vzhledem k proměnným x a y vyplývá, že jsou marginální hustoty f_1 a f_2 shodné. Odtud dostaneme:

$$E(X) = \int_0^1 \frac{8}{3\pi}\left(x + 2x^3\right)\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5\pi} = E(Y);$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{8}{3\pi}\left(x^2 + 2x^4\right)\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} = E(Y^2);$$

$D(X) = D(Y) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{8}{5\pi}\right)^2 = \frac{25\pi^2 - 192}{75\pi^2}.$

Dále je

$$E(XY) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{8}{pi}(x^3 y + xy^3)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2\pi},$$

tedy pro koeficient korelace dostaneme

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{2}{3\pi} - \frac{64}{25\pi^2}}{\frac{25\pi^2 - 192}{75\pi^2}} = \frac{50\pi - 192}{25\pi^2 - 192}.$$

Protože je koeficient korelace nenulový, musí být náhodné veličiny X a Y závislé.