

9. Transformace náhodné

veličiny

9.1. Definice: Transformovaná náhodná veličina. Je-li X náhodná veličina a h je reálná funkce taková, že její definiční obor obsahuje obor hodnot náhodné veličiny X , pak náhodnou veličinu Y , která je definována vztahem

$$(\clubsuit) \quad X = x \Rightarrow Y = h(x)$$

nazýváme *transformovanou náhodnou veličinou* a označujeme ji symbolem

$$(\clubsuit\clubsuit) \quad Y = h(X).$$

9.2. Věta: Transformace diskrétního rozdělení. Nechť má náhodná veličina X diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí p , potom má transformovaná náhodná veličina $Y = h(X)$ také diskrétní rozdělení a pro její distribuční funkci p^* platí:

$$p^*(y) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} p(x), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Důkaz: První část tvrzení je zřejmá. Jestliže náhodná veličina X nabývá diskrétních hodnot z množiny $\{x_i\}$, pak hodnoty náhodné veličiny Y jsou z množiny $\{h(x_i)\}$. Pro pravděpodobnostní funkci p^* náhodné veličiny Y pak platí:

$$\begin{aligned} p^*(y) &= P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X \in h^{-1}(y)) = \\ &= \sum_{x \in h^{-1}(y)} p(x), \quad y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Příklad: Nechť je rozdělení náhodné veličiny X dáno tabulkou Tab. 9.1. Utvořme tabulku pro rozdělení náhodné veličiny $Y = X^2 - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0,1	0,25	0,15	0,3	0,2

Tab. 9.1

y	3	0	-1	0	3
x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0,1	0,25	0,15	0,3	0,2

Tab. 9.2.

Přidáme k tabulce řádek funkčních hodnot proměnné x po transformaci $y = x^2 - 1$. Dostaneme rozšířenou tabulku Tab. 9.2.

Z tabulky vidíme, že náhodná veličina Y nabývá hodnot -1, 0 a 3. Je pak:

$$p^*(-1) = P(Y = -1) = P(X^2 - 1 = -1) = P(X = 0) = p(0) = 0,15;$$

$$p^*(0) = P(Y = 0) = P(X^2 = 1) = P(X = -1 \cup X = 1) = 0,55;$$

$$p^*(3) = P(Y = 3) = P(X^2 = 4) = P(X = -2 \cup X = 2) = 0,3.$$

Pravděpodobnostní funkce p^* náhodné veličiny Y je uvedena v tabulce Tab. 9.3.

y	-1	0	3
$p^*(y)$	0,15	0,55	0,3

Tab. 9.3.

9.3. Algoritmus pro transformovanou distribuční funkci. Nechť má náhodná veličina X distribuční funkci F , případně hustotu f , $f(x) = F'(x)$. Označme si G distribuční funkci, případně $g, g(y) = G'(y)$ hustotu transformované náhodnou veličiny $Y = h(x)$. Potom podle definice distribuční funkce je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \in h^{-1}(-\infty, y]), \quad y \in \mathbf{R},$$

kde symbolem $h^{-1}(-\infty, y]$ označujeme vzor množiny $(-\infty, y]$, tedy množinu všech x , pro které je $h(x) \leq y$. Tato množina je intervalem, nebo sjednocením intervalů a odpovídající pravděpodobnost zjistíme pomocí původní distribuční funkce či hustoty.

9.4. Příklad: Lineární transformaci $Y = \alpha X + \beta$ jsme uvedli v kapitole 8 pro normální rozdělení. Zopakujme si uvedený výpočet.

V souladu s uvedeným označením je

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(\alpha X + \beta \leq y) = P(\alpha X \leq y - \beta) = \\ &= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}) = F(\frac{y-\beta}{\alpha}) & \alpha > 0 \\ P(X \geq \frac{y-\beta}{\alpha}) = 1 - F(\frac{y-\beta}{\alpha}), & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Potom pro hustotu g rozdělení náhodné veličiny Y dostaneme:

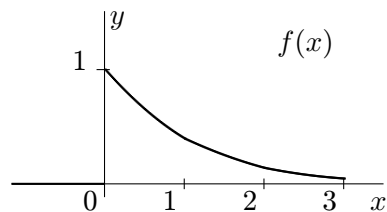
$$g(y) = G'(y) = \left\langle \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left(F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \\ \frac{d}{dy} \left(1 - F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \right) = \frac{-1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \end{array} \right\rangle = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

9.5. Příklad: Nechť má náhodná veličina X exponenciální rozdělení $Exp(0; 1)$ s hustotou, která je určena vztahy:

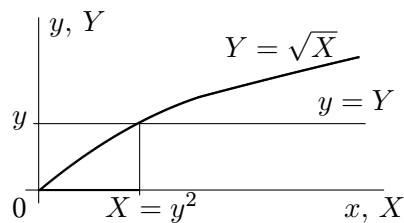
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Určete hustotu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \sqrt{X}$.

Řešení: Znázorníme si na obrázku Obr. 9.1. průběh hustoty f a na obrázku Obr. 9.2. vyznačíme průběh transformující funkce $y = \sqrt{x}$, $x \in (0, \infty)$.



Obr. 9.1.



Obr 9.2.

Z obrázku 9.1 vyplývá, že náhodná veličina X nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, neboť zde je hustota f kladná. Z obrázku 9.2 vyplývá, že

funkce $y = \sqrt{x}$ zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, \infty \rangle$. To znamená, že náhodná veličina nabývá pouze hodnot z tohoto intervalu a tudíž jsou její distribuční funkce G a hustota g rovny nule pro $y < 0$. Pro hodnoty $y \geq 0$ vypočteme hodnotu distribuční funkce G výše popsaným algoritmem. Je

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(0 \leq X \leq y^2) = \\ &= F(y^2) - F(0) = F(y^2), \quad y \in \langle 0, \infty \rangle. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme, že pro hustotu g platí vyjádření:

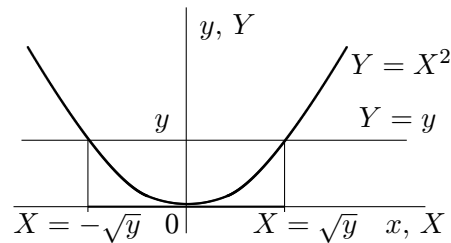
$$g(y) = G'(y) = \frac{d}{dy} (F(y^2)) = 2yf(y^2) = 2ye^{-y^2}, \quad y \in (0, \infty).$$

Snadno vypočteme i hodnotu distribuční funkce F náhodné veličiny X a z ní i distribuční funkci G . Je

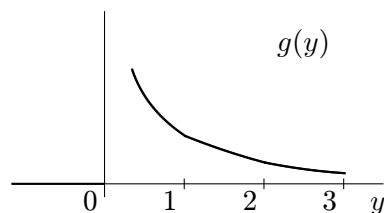
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-y^2}, & y \geq 0. \end{cases}$$

9.6. Příklad: Jestliže má náhodná veličina X normální rozdělení $N(0; 1)$, určete hustotu a distribuční funkci transformované náhodné veličiny $Y = X^2$.

Řešení: V souladu se značením v kapitole 8 označíme Φ distribuční funkci a φ hustou náhodné veličiny X . Z průběhu funkce φ na obrázku Obr. 8.1 vyplývá, že náhodná veličina X nabývá všech reálných hodnot. Znázorníme si na obrázku 9.3 průběh transformující funkce $Y = X^2$.



Obr. 9.3.



Obr 9.4.

Protože funkce $y = x^2$ nabývá všech nezáporných hodnot, bude náhodná veličina Y nabývat také nezáporných hodnot. Jsou tedy její distribuční funkce G a hustota g rovny nule pro zápornou hodnotu argumentu. Pro $y \geq 0$ pak dostaneme:

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, \end{aligned}$$

když použijeme vztahu $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ z kapitoly 8. Potom pro hustotu g náhodné veličiny Y odtud dostaneme:

$$g(y) = G'(y) = \frac{d}{dy} (2\Phi(\sqrt{y}) - 1) = \frac{1}{\sqrt{y}} \varphi(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y \in (0, \infty),$$

jestliže použijeme skutečnosti z kapitoly 8, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbf{R}$. Toto rozdělení nazýváme *rozdělení $\chi^2(1)$* o jednom stupni volnosti. Čteme chí-kvadrát a rozdělení tohoto typu patří k nejpoužívanějším v matematické statistice. Průběh hustoty je znázorněn na obrázku 9.4.

9.7. Příklad: Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení v intervalu $(0, 1)$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = -\ln X$.

Řešení: Náhodná veličina X nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$ a transformující funkce $y = -\ln x$ nabývá v tomto intervalu všech kladných hodnot. Náhodná veličina Y nabývá tudíž kladných hodnot a jsou tedy její distribuční funkce G a hustota g rovny nule pro záporné hodnoty argumentu. Situaci si znázorníme na obrázku Obr. 9.5. Hodnoty distribuční funkce pro kladný argument vypočteme popsáním způsobem. Je

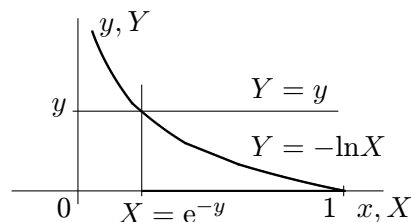
pak

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P(\ln X \geq -y) = P(X \geq e^{-y}) = \\ &= 1 - F(e^{-y}) = 1 - e^{-y}, \quad y > 0, \end{aligned}$$

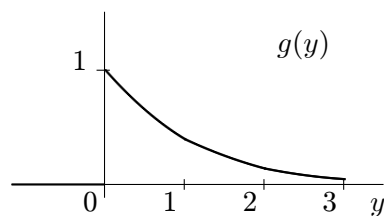
když použijeme výsledků o rovnoměrném rozdělení z odstavce 5.9. Hustotu g získáme přímo derivováním nebo ze vztahu

$$g(y) = G'(y) = \frac{d}{dy} (1 - F(e^{-y})) = f(e^{-y}) = e^{-y}, \quad y > 0.$$

Opět použijeme vyjádření pro hustotu rovnoměrného rozdělení z odstavce 5.9. Průběh hustoty g je znázorněn na obrázku Obr. 9.6.



Obr. 9.5.



Obr 9.6.

9.8. Příklad: Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $\text{Exp}(0; 1)$ a náhodná veličina $Y = \min\{X, 2\}$.

- Určete rozdělení náhodné veličiny Y (její distribuční funkci).
- Vypočtěte střední hodnotu $E(Y)$, rozptyl $D(Y)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(Y)$.

Řešení: Náhodná veličina nabývá kladných hodnot. Její hustota rozdělení pravděpodobnosti f je rovna

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ e^{-x}, & x \in \langle 0, \infty \rangle. \end{cases}$$

Distribuční funkci F určíme ze vzorce $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, $x \in \mathbf{R}$.

Je pak

$$\text{pro } x \leq 0 : \quad F(x) = 0;$$

$$\text{pro } x > 0 : \quad F(x) = F(0) + \int_0^x e^{-t} dt = 0 + [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Tedy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1 - e^{-x}, & x \in \langle 0, \infty \rangle. \end{cases}$$

Náhodná veličina Y nabývá hodnot z intervalu $(0, 2)$. Pro její distribuční funkci G platí:

$$y \in (-\infty, 0) : G(y) = P(Y \leq y) = P(\min\{X; 2\} \leq y) = P(X \leq y) = 0;$$

$$y \in (0, 2) : \quad G(y) = P(Y \leq y) = P(\min\{X; 2\} \leq y) = P(X \leq y) = \\ = F(y) = 1 - e^{-y};$$

$$y \in \langle 2, \infty \rangle : \quad P(Y \leq y) = P(\min\{X; 2\} \leq y) = 1.$$

Náhodná veličina Y má smíšené rozdělení a $P(Y = 2) = P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} = 0,13533$.

Střední hodnotu Y vypočteme takto:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x; 2\} f(x) dx = \int_0^2 x e^{-x} dx + 2 \cdot \int_2^{\infty} e^{-x} dx =$$

$$= [e^{-x}(-x - 1)]_0^2 + 2 \cdot (1 - F(2)) = -3e^{-2} + 1 + 2e^{-2} = 0,86466.$$

K výpočtu rozptylu použijeme vzorce $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Je

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\min\{x; 2\})^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx + 4 \cdot P(X \geq 2) =$$

$$= [e^{-x}(-x^2 - 2x - 2)]_0^2 + 4 \cdot (1 - F(2)) = 2 - 6e^{-2} = 1,187988.$$

Potom je

$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 2 - 6e^{-2} - (1 - e^{-2})^2 = 0,47697.$$

Pro směrodatnou odchylku dostaneme $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 0,69063$.

9.9. Definice: Charakteristická funkce Je-li X náhodná veličina, pak funkci ψ_X reálné proměnné t , která je definována vztahem

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \quad t \in \mathbf{R},$$

nazýváme *charakteristickou funkcí* náhodné veličiny X .

9.10. Věta: Výpočet charakteristické funkce. Charakteristickou funkci náhodné veličiny vypočteme pomocí vzorce, který závisí na typu rozdělení .

1. Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí $p(x)$, pak je její charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \sum_{x \in \mathbf{R}} e^{itx} p(x), \quad t \in \mathbf{R}.$$

2. Náhodná veličina X má spojité rozdělení s hustotu $f(x)$, pak je její charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbf{R}.$$

3. Náhodná veličina X má smíšené rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$, pak je její charakteristická funkce rovna

$$\psi_X(t) = \sum_{x \in \mathbf{R}} [F(x) - F(x-)] e^{itx} + \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbf{R}.$$

9.11. Příklad: Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení (alternativní), kdy

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p, \quad p(1) = P(X = 1) = p, \quad 0 < p < 1.$$

Řešení: Podle vzorce v 1 z odstavce 9.10. je

$$\psi_X(t) = p(0)e^{it \cdot 0} + p(1)e^{it \cdot 1} = 1 - p + pe^{it}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

9.12. Příklad: Náhodná veličina X má spojité rovnoměrné rozdělení v intervalu $(0, 1)$.

Řešení: Hustota f náhodné veličiny X je rovna jedné v intervalu $(0, 1)$ a jinde je nulová. Potom podle vzorce v 2 z odstavce 9.10 je

$$\psi_X(t) = \int_0^1 e^{jtx} dx = \left[\frac{e^{jtx}}{jt} \right]_0^1 = \frac{j(1 - e^{jt})}{t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad t \neq 0.$$

9.13. Příklad: Náhodná veličina X rozdělení $Exp(0; \delta)$.

Řešení: Náhodná veličina má kladnou hustotu $f(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}}$, $x > 0$. Podle vzorce 2 z věty 9.10 je charakteristická funkce rovna

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \frac{1}{\delta} \int_0^\infty e^{jtx} e^{-\frac{x}{\delta}} dx = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty e^{x(jt - \frac{1}{\delta})} dx = \\ &= \frac{1}{\delta(jt - \frac{1}{\delta})} \left[e^{x(jt - \frac{1}{\delta})} \right]_0^\infty = \frac{1}{1 - j\delta t}. \end{aligned}$$

9.14. Věta: Vlastnosti charakteristické funkce. Pro charakteristickou funkci náhodné veličiny X platí:

1. Je $\psi_X(0) = 1$, $|\psi_X(t)| \leq 1$, $t \in \mathbf{R}$.
2. Funkce ψ_X je spojitá v \mathbf{R} .
3. Funkce ψ_X má tolik derivací v nule, kolik má náhodná veličina momentů a je

$$\psi_X^{(k)}(0) = j^k E(X^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Pro čísla α , β je

$$\psi_{\alpha X + \beta}(t) = e^{jt\beta} \psi_X(\alpha t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

5. Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak je

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \cdot \psi_Y(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Důkaz: Tvrzení 1 snadno vyplývá ze vzorců 1-3 z odstavce 9.10. Tvrzení 2 nebudeme odvozovat, jeho důkaz není obtížný, je pouze pracný.

Ke tvrzení 3 uvedeme jako příklad formální odvození vztahu pro spojité rozdělení. Je

$$\psi'_X(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jtx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) jx e^{jtx} dx$$

a odtud po dosazení dostaneme

$$\psi'_X(0) = j \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = jE(X).$$

Vzorec pro další momenty dostaneme opětovným derivováním. Poměrně snadno ověříme možnost záměny derivování a integrace.

Tvrzení 4 snadno odvodíme z vlastností střední hodnoty. Je totiž

$$\psi_{\alpha X + \beta}(t) = E(e^{jt(\alpha X + \beta)}) = E(e^{jt\beta} \cdot e^{j(\alpha t)X}) = e^{jt\beta} \psi_X(\alpha t).$$

Tvrzení 5 vyplývá z vlastnosti pro střední hodnotu součinu nezávislých veličin. Je

$$\psi_{X+Y}(t) = E(e^{jt(X+Y)}) = E(e^{jtX} \cdot e^{jtY}) = E(e^{jtX}) E(e^{jtY}) = \psi_X(t) \psi_Y(t).$$

9.15. Příklad: Náhodné veličiny X_i , $1 \leq i \leq n$, jsou nezávislé a mají exponenciální rozdělení $Exp(0; \delta)$. Určete charakteristickou funkci náhodné veličiny $T = \frac{2n\bar{X}}{\delta}$.

Řešení: Podle příkladu 9.13. má každá z náhodných veličin X_i charakteristickou funkci $\psi(t) = \frac{1}{1-j\delta t}$. Potom podle tvrzení 5 z věty 9.14 má jejich součet $\tilde{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ charakteristickou funkci

$$\psi_{\tilde{X}} = \frac{1}{(1-j\delta t)^n}.$$

Potom podle tvrzení 4 z věty 9.14, kde volíme $\alpha = \frac{2}{\delta}$, $\beta = 0$ je

$$\psi_T(t) = \psi_{\tilde{X}}\left(\frac{2}{\delta}t\right) = \frac{1}{(1-2jt)^n}.$$

Poznámka: Charakteristická funkce ψ_T je charakteristickou funkcí náhodné veličiny, která má rozdělení $\chi^2(2n)$. Této skutečnosti se využívá při odhadech parametrů exponenciálního rozdělení.