Kombinatorická optimalizace
cvičení č.3
Aplikace celočíselného lineárního programování

Zdeněk Bäumelt (baumezde@fel.cvut.cz)
Přemysl Šůcha (suchap@fel.cvut.cz)

2. března 2011

1 Úlohy celočíselného lineárního programování

Celočíselné lineární programování (ILP) je možné aplikovat na celou řadu optimalizačních úloh. Hlavním omezením ale zůstává skutečnost, že se jedná o úlohu NP těžkou. Přesto existují případy, kdy lze úlohu ILP vyřešit v polynomiálním čase.

1.1 Celočíselné lineární programování a totálně unimodulární matice

Nejznámějším speciálním případem úlohy ILP řešitelné v polynomiálním čase je případ, kdy je matice $\mathbf{A}$ takzvaně totálně unimodulární [1].

Definice 1.1 ***Totálně unimodulární matice***. *Řekneme, že matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu $m \times n$ je totálně unimodulární, jestliže*

1. $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$
2. *determinant každé čtvercové podmatice matice $\mathbf{A}$ je roven 0; 1 nebo -1.*

Věta 1.1 *Úlohu ILP s totálně unimodulární maticí $\mathbf{A}$ a celočíselným vektorem b lze řešit simplexovým algoritmem a výsledné řešení je celočíselné.*

Věta 1.2 *Úloha ILP s totálně unimodulární maticí $\mathbf{A}$ a celočíselným vektorem b je řešitelná v polynomiálním čase.*

Věta 1.3 *Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ taková, že*

1. $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
2. *každý sloupec matice $\mathbf{A}$ obsahuje buď nejvýše jeden nenulový prvek nebo právě dva nenulové prvky, a to $+1$ a -1.*

Pak je matice $\mathbf{A}$ totálně unimodulární.

2 Rozvrhování směn telefonních operátorů

Telefonní společnost potřebuje vytvořit denní rozvrh směn pro svoje operátory [2]. Je dán *vektor požadavků* b_i pro $i = 1, 2, \ldots, 24$, obsahující minimální počty operátorů v hodině i na pracovišti (např. b_{10} odpovídá počtu operátorů v intervalu 9:00 - 10:00). Všechny směny jsou shodné, neuvažujeme kvalifikaci zaměstnanců, směny mají stejnou délku. Délka směny je v našem případě 8 hodin, přičemž směna může začínat v jakoukoli celou hodinu. Cílem optimalizace je stanovit cyklický rozvrh s periodou 24 hodin (tj.

počet zaměstnanců pracujících např. od 6:00 do 14:00 je každý den stejný) s nejmenším možným počtem zaměstnanců na pokrytí vektoru požadavků b.

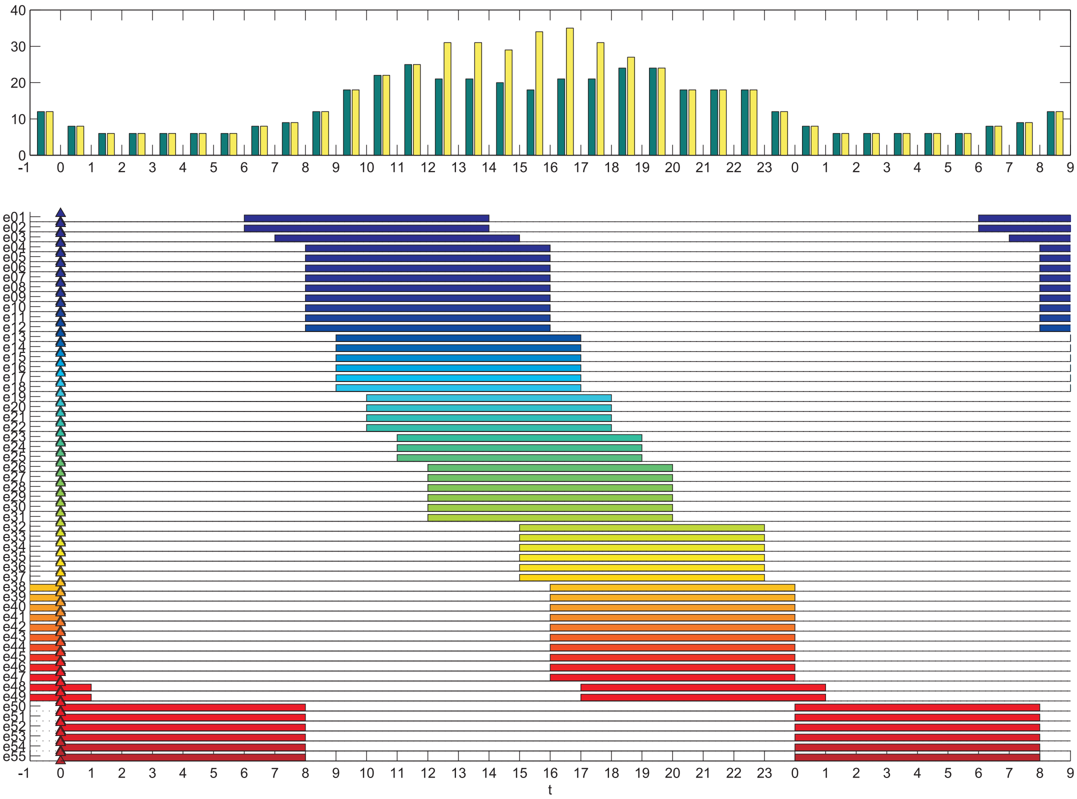
Řešení tohoto problému jako úlohy ILP je založeno na proměnné x_i reprezentující počet zaměstnanců, kterým začala směna v $(i-1)$ hodinu. Poté lze výše zmíněný problém vyjádřit pomocí následujícího matematického modelu:

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{24} x_i \\ \text{s.t.} \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{i-7} + x_{i-6} + \cdots + x_i &\geq b_i, && \forall i = 8 \ldots 24 \\ x_{i+17} + \cdots + x_{24} + x_1 + \cdots + x_i &\geq b_i, && \forall i = 1 \ldots 7 \\ x_i &\geq 0 && \forall i \end{aligned}$$

Omezení z matematického modelu (1) vyjadřují, že i-tá hodina je pokryta směnami začínajícími nejdéle před $(i-7)$ hodinami.

Při formulaci tohoto problému si povšimněte obsahu a struktury matice $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}$ obsahuje pouze prvky 0 a 1 a to tak, že po úpravě Gaussovou eliminací lze získat získat matici $\mathbf{A}'$, která je dle věty 1.3 maticí totálně unimodulární. Během Gaussovy eliminace byla zachována celočíselnost vektoru b, a proto lze tuto úlohu dle vět 1.1, 1.2 řešit jako úlohu LP s tím, že výsledné řešení bude vždy celočíselné. Pro ověření totální unimodularity konkrétní matice lze samozřejmě využít také definici 1.1.



Obrázek 1: Pokrytí vektoru požadavků b a výsledný denní rozvrh telefonních operátorů

Úloha je zadána vektorem b:

```
>> b = [6 6 6 6 6 8 9 12 18 22 25 21 21 20 18 21 21 24 24 18 18 18 12 8]';
```

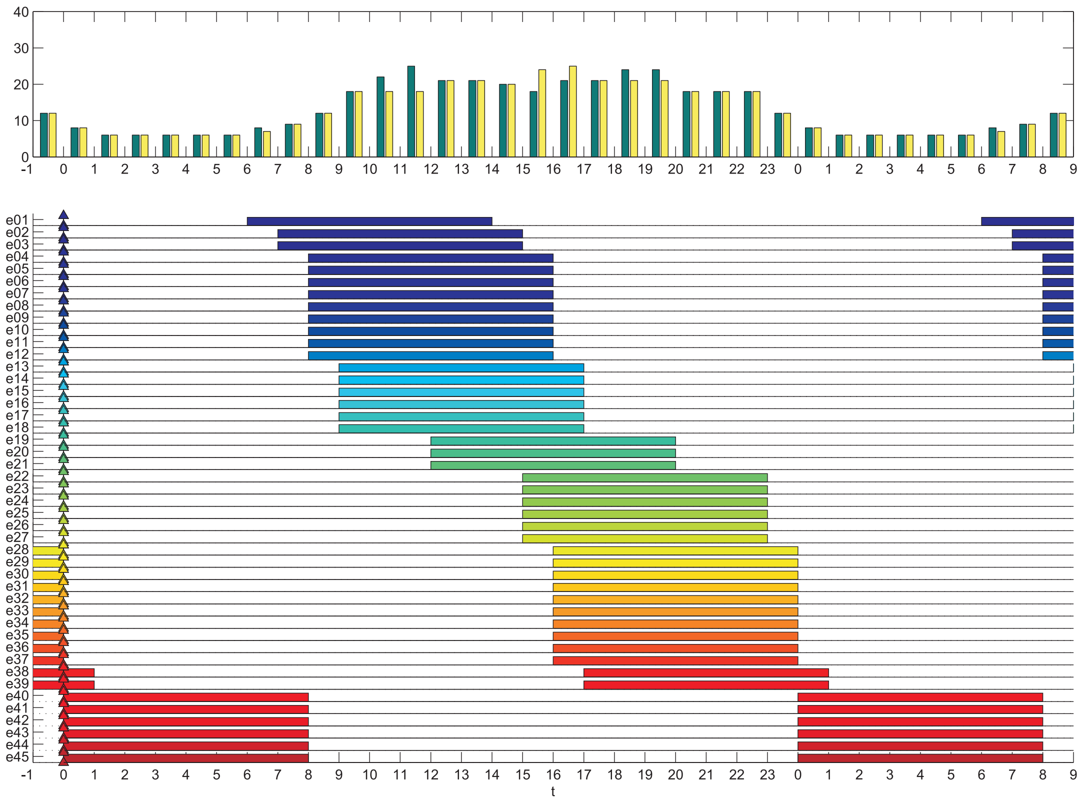
Pro řešení použijte funkci `ilinprog` z TORSCHE, podobně jako na předchozím cvičení. Zobrazte výsledné pokrytí hodinových intervalů spolu s požadovaným pokrytím b tak, jak je ukázáno v horní části obr. 1 (vektor požadavků b (zeleně) v porovnání se skutečným pokrytím vektoru (žlutě)). K tomuto zobrazení použijte standardní funkci `bar`. Ve spodní části obr. 1 jsou zobrazeny směny potřebné k pokrytí vektoru požadavků b. Je patrné, že minimální počet operátorů je roven 55-ti (za předpokladu, že by každý den každý operátor chodil do práce, tj. neměl ani jeden den volna). Z obr. 1 je také zřejmé, že v některých hodinách (např. 12:00 - 18:00) bude na pracovišti velké množství „nadbytečných“ operátorů. Tento fakt lze řešit modifikací matematického modelu, která je popsána v následující části.

2.1 Cílová funkce s minimalizací odchylek

V případě, že naše telefonní společnost nemá dostatečné množství operátorů k pokrytí rozvrhu z obr. 1, je problém nutné modifikovat v podobě nové slovní formulace, která se promítne do matematického modelu problému.

Jako telefonní společnost se tedy spokojíme s takovým počtem operátorů na i-tou hodinu, který je co nejblíže požadavku b_i (vektor b je pro obě úlohy stejný). Přípustná je tedy i situace, kdy je v i-tou hodinu nedostatek operátorů na pracovišti. Počet takových odchylek však chceme redukovat, stejně tak jako nadbytek operátorů na pracovišti. Nejsnazším řešením je minimalizovat součet odchylek. Pokud bychom modifikovali problém tak, jak je popsáno výše, podoba cílové funkce by byla následující:

$$\min \sum_{i=1}^{24} \left| \sum_{j=i-7}^{i} x_{(j \bmod 24)+1} - b_i \right| \tag{2}$$



Obrázek 2: Pokrytí vektoru požadavků b a výsledný denní rozvrh telefonních operátorů

Funkci absolutní hodnoty však v cílové funkci (2) nelze použít přímo. Odchylky je nutné vyjádřit s využitím pomocné proměnné y přítomné v cílové funkci. Obecná transformace je uvedena ve vztahu (3). V případě bezchybné realizace nového matematického modelu by jste měli obdržet rozvrh zobrazený na obr. 2.

Při řešení úlohy se zamyslete nad tím, zda mohou obory hodnot proměnných spojité či musí být celočíselné (viz souvislost s unimodulární maticí, sekce 1.1).

$$
\begin{array}{lrclcrclcrcl}
 & \min \sum |\,x-q\,| & & & \longrightarrow & \min \sum z & & & \longrightarrow & \min \sum z & & \\
\text{s.t.} & & & & & & & & & & & \\
 & \ldots & & & & \ldots & & & & \ldots & & \\
 & & & & & |\,x-q\,| & = & z & & x-q & \leq & z \\
 & & & & \longrightarrow & & & & \longrightarrow & q-x & \leq & z \\
 & & & & & z & \geq & 0 & & z & \geq & 0
\end{array}
\tag{3}
$$

Úkol: Modifikujte ILP formulaci problému telefonních operátorů tak, jak je popsáno v sekci 2.1. Pro řešení použijte podobně jako v předchozím případě funkci `ilinprog` z TORSCHE a zobrazte jej pomocí funkce `bar`.

Reference

[1] Z. Ryjáček, „Teorie grafů a diskrétní optimalizace 2,“ tech. rep., `cam.zcu.cz/~ryjacek/students/ps/TGD2.pdf`, 2001.

[2] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall; United States Ed edition, 1993.

[3] J. Demel, *Grafy a jejich aplikace*. Academia, second ed., 2002.

[4] B. H. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer, third ed., 2006.

[5] J. B. Orlin, „Introduction to optimization.“ MIT OpenCourseWare, 2004.