1.10 Převody úloh

1.10.1 Na základě tvrzení 1.9.4 víme: K důkazu, že rozhodovací úloha $\mathcal{U}$ ze třídy $\mathcal{NP}$ je $\mathcal{NP}$ úplná stačí, abychom ukázali, že se na $\mathcal{U}$ polynomiálně redukuje některá $\mathcal{NP}$ úplná úloha. Zatím jediná $\mathcal{NP}$ úplná úloha, kterou známe, je SAT, splňování booleovských formulí v konjunktivním normálním tvaru. Ukážeme řadu polynomiálních redukcí a tím ukážeme, že i další rozhodovací úlohy jsou $\mathcal{NP}$ úplné.

1.10.2 3-CNF SAT. Úloha: Je dána formule φ v konjunktivním normálním tvaru, kde každá klasusule má 3 literály.
Otázka: Je formule φ splnitelná?

1.10.3 Tvrzení. Platí

$$\text{SAT} \lhd_p \text{3-CNF SAT}.$$

1.10.4 Nástin převodu SAT na 3-CNF SAT. Je dána formule φ v konjunktivním normálním tvaru. Zkonstruujeme formuli ψ, která

1. je v konjunktivním normálním tvaru, kde každá klausule obsahuje maximálně 3 literály;
2. je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule φ.

Označme $C_1, C_2, \ldots, C_k$ všechny klausule formule φ. Jestliže každá z klausulí obsahuje nejvýše 3 literály, nemusíme nic konstruovat, v tomto případě je $\psi = \varphi$.

Pro každou klausuli C, která obsahuje víc než 3 literály, sestrojíme formuli ψ_C takto: Nechť $C = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_s$, kde l_i jsou literály. Zavedeme nové logické proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_{s-3}$ a položíme

$$\psi_C = (l_1 \vee l_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee l_3 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee l_4 \vee x_3) \wedge \ldots \wedge (\neg x_{s-3} \vee l_{s-1} \vee l_s).$$

Platí: Formule ψ_C je splnitelná iff C je splnitelná.

Formuli ψ dostaneme jako konjunkci všech klasusulí formule φ, které mají nejvýše 3 literály a formulí ψ_C pro klausule C o více než 3 literálech.

Předpokládejme, že formule φ má k klausulí a nejdelší klausule má s literálů. Pak v konstrukci ψ jsme přidali maximálně $(s-3)k$ nových logických proměnných (rovnost nastává v případě, že každá z klausulí formule φ obsahuje přesně $s > 3$ literálů). Navíc jsme formuli prodloužili o maximálně o $2(s-3)k$ literálů (každá nová logická proměnná se ve formuli ψ objevuje přesně dvakrát). Tedy délka formule ψ se pouze polynomiálně zvětšila vzhledem k délce formule φ.

1.10.5 Důsledek. Protože úloha 3-CNF SAT je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

1.10.6 Problém klik. Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k.
Otázka: Existuje v grafu G klika o alespoň k vrcholech?

1.10.7 Tvrzení. Platí

$$\text{3-CNF SAT} \lhd_p \text{problém klik.}$$

1.10.8 Nástin převodu 3-CNF SAT na problém klik. Je dána formule φ v CNF, s k klasusulemi $C_1, C_2, \dots, C_k$, kde kazdá klausule má 3 literály. Sestrojíme k-partitní neorientovaný graf $G = (V, E)$ takto:

G má pro každou klausuli jednu stranu; strana odpovídající klausuli C se skládá ze 3 vrcholů označených literály klasusule C. Hrany grafu G vedou vždy mezi dvěma stranami a to tak, že spojují dva literály, které nejsou komplementární (tj. jeden není negací druhého).

Platí: Formule φ je splnitelná právě tehdy, když v grafu G existuje klika o k vrcholech. (Poznamenejme, že k je počet klausulí formule φ.)

Jestliže φ je pravdivá v ohodnocení u, vybereme v každé klausuli formule φ jeden literál, který je v daném ohodnocení pravdivý. Pak množina vrcholů odpovídajících těmto literálům tvoří kliku v G o k vrcholech.

Jestliže v grafu G existuje klika A o k vrcholech, pak A má jeden vrchol v každé straně grafu G. Položme jako pravdivé všechny literály, které se nacházejí v A a hodnoty ostatních logických proměnných zadefinujme libovolně. Pak v tomto ohodnocení je formule φ pravdivá.

Zkonstuovaný graf G má tolik vrcholů jako má formule φ literálů, tj. n vrcholů, kde n je délka formule φ. Vzhledem k tomu, že prostý graf s n vrcholy má $\mathcal{O}(n^2)$ hran, jedná se o polynomiální redukci.

1.10.9 Důsledek. Protože problém klik je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

1.10.10 Nezávislé množiny. Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Množina vrcholů $N \subseteq V$ se nazývá *nezávislá množina* v G, jestliže žádná hrana grafu G nemá oba krajní vrcholy v N. Jinými slovy, indukovaný podgraf množinou N je diskrétní graf.

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k.
Otázka: Existuje v G nezávislá množina o k vrcholech?

1.10.11 Tvrzení. Platí

$$\text{problém klik} \lhd_p \text{nezávislé množiny.}$$

1.10.12 Převod problému klik na nezávislé množiny. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Definujeme opačný graf $G^{op} = (V, E^{op})$ takto:

$$\{u, v\} \in E^{op} \text{ iff } u \neq v \text{ a } \{u, v\} \notin E.$$

Platí: Množina $A \subseteq V$ je klika v grafu G právě tehdy, když je maximální nezávislou množinou v grafu G^{op}. (Jinými slovy, A je nezávislá množina a přidáním libovolného vrcholu už nebude nezávislá.)

To, že se jedná o polynomíální redukci vyplývá z faktu, že všech hran v grafu G i doplňkovém grafu G^{op} je $\frac{n(n-1)}{2}$, kde n je počet vrcholů.

1.10.13 Důsledek. Protože úloha o nezávislých množinách je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

1.10.14 Obarvení vrcholů grafu. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. *obarvení vrcholů* grafu G je přiřazení, které každému vrcholu v grafu G přiřazuje jeho barvu $b(v)$, $b(v)$ je prvek množiny (barev) B, pro které platí, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. (Jinými slovy, jestliže $\{u, v\}$ je hrana grafu G, pak $b(u) \neq b(v)$.)

Graf G se nazývá *k-barevný*, jestliže jeho vrcholy je možné obarvit k barvami (tj. množina B má k prvků).

1.10.15 k-barevnost. Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k.
Otázka: Je graf G k-barevný?

1.10.16 Tvrzení. Platí

$$3-CNF\ SAT \lhd_p \text{3-barevnost.}$$

1.10.17 Základní myšlenka převodu. Je dána formule φ, která je v CNF a každá klausule má 3 literály. K důkazu je třeba zkonstruovat prostý neorientovaný graf G bez smyček takový, že φ je splnitelná právě tehdy, když G je 3-barevný. Konstrukce využívá pomocný graf o pěti vcholech $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a pěti hranách s touto vlastností:

- Jestliže vrcholy 1 a 2 mají stejnou barvu, pak tuto barvu musí mít i vrchol 5.
- Jestliže jeden z vrcholů 1 a 2 má barvu z, pak lze tento graf obarvit tak, aby i vrchol 5 měl barvu z.

1.10.18 Důsledek. Protože 3-barevnost je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.

1.10.19 Tvrzení. Platí

$$\text{3-barevnost} \lhd_p ILP.$$

1.10.20 Převod 3-barevnosti na ILP. Je dán prostý neorientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Zkonstruujeme instanci I úlohy celočíselného lineárního programování takovou, že I má přípustné řešení právě tehdy, když graf G je 3-barevný.

Všechny proměnné budou nabývat hodnot 0 nebo 1 (tj. bude se jednat o tzv. 0-1 celočíselné lineární programování).

Proměnné: Pro každý vrchol $v \in V$ zavedeme tři proměnné:

$$x_v^c, x_v^m, x_v^z.$$

Význam: Fakt, že proměnná $x_v^b = 1$ je rovna 1, $b \in \{c, m, z\}$, znamená, že vrchol v má barvu b.

Podmínky:

- Pro každý vrchol $v \in V$ máme rovnici, která zaručuje, že vrchol v má právě jednu barvu – buď c nebo m nebo z:

$$x_v^c + x_v^m + x_v^z = 1.$$

- Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ máme tři nerovnosti (pro každou barvu jednu) zaručující, že oba vrcholy u a v nemohou mít stejnou barvu:

$$x_u^c + x_v^c \leq 1, \;\; x_u^m + x_v^m \leq 1, \;\; x_u^z + x_v^z \leq 1.$$

Platí: Graf G je 3-barevný právě tehdy, když I má přípustné řešení.

Instance I má $3\,|V|$ proměnných a $|V| + 3\,|E|$ podmínek. Jedná se tedy o instanci velikosti $\mathcal{O}(n + m)$, kde $n = |V|$ a $m = |E|$.

1.10.21 Důsledek. Protože ILP je ve třídě $\mathcal{NP}$, jedná se o $\mathcal{NP}$ úplnou úlohu.