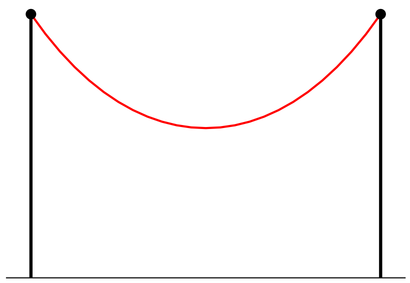
Fonctions usuelles

Vidéo ■ partie 1. Logarithme et exponentielle
Vidéo ■ partie 2. Fonctions circulaires inverses
Vidéo ■ partie 3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses
Fiche d'exercices ♦ Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

Vous connaissez déjà des fonctions classiques : exp, ln, cos, sin, tan. Dans ce chapitre il s'agit d'ajouter à notre catalogue de nouvelles fonctions : ch, sh, th, arccos, arcsin, arctan, Argch, Argsh, Argth.
Ces fonctions apparaissent naturellement dans la résolution de problèmes simples, en particulier issus de la physique. Par exemple lorsqu'un fil est suspendu entre deux poteaux (ou un collier tenu entre deux mains) alors la courbe dessinée est une ***chaînette*** dont l'équation fait intervenir le cosinus hyperbolique et un paramètre a (qui dépend de la longueur du fil et de l'écartement des poteaux) :

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$



1. Logarithme et exponentielle

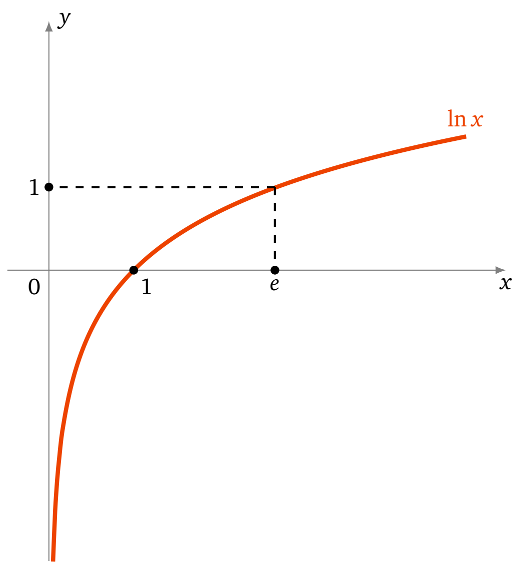
1.1. Logarithme

Proposition 1.
Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{(pour tout } x > 0) \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$*) :*

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*)*
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. *la fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln x \leqslant x - 1$ *(pour tout* $x > 0$*).*



Remarque.
$\ln x$ s'appelle le *logarithme naturel* ou aussi *logarithme néperien*. Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit le *logarithme en base a* par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

De sorte que $\log_a(a) = 1$.
Pour $a = 10$ on obtient le *logarithme décimal* $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique on utilise l'équivalence :

$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

En informatique intervient aussi le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.

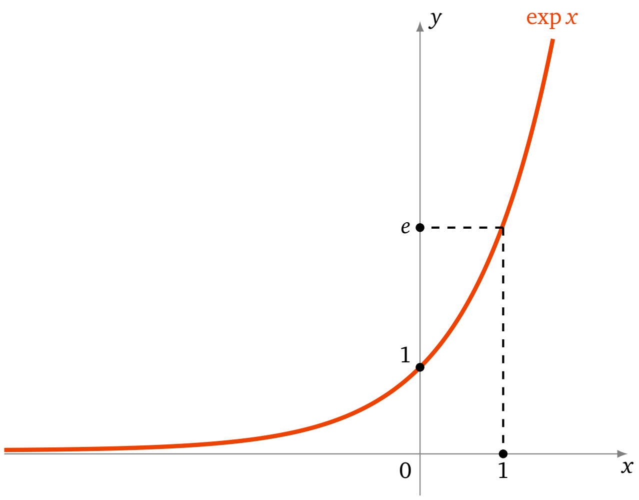
Démonstration. L'existence et l'unicité viennent de la théorie de l'intégrale : $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Passons aux propriétés.

1. Posons $f(x) = \ln(xy) - \ln(x)$ où $y > 0$ est fixé. Alors $f'(x) = y\ln'(xy) - \ln'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. Donc $x \mapsto f(x)$ a une dérivée nulle, donc est constante et vaut $f(1) = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$. Donc $\ln(xy) - \ln(x) = \ln(y)$.
2. D'une part $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln a + \ln\frac{1}{a}$, mais d'autre part $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(1) = 0$. Donc $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$.
3. Similaire ou récurrence.
4. ln est dérivable donc continue, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction est strictement croissante. Comme $\ln(2) > \ln(1) = 0$ alors $\ln(2^n) = n\ln(2) \to +\infty$ (lorsque $n \to +\infty$). Donc $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. De $\ln x = -\ln\frac{1}{x}$ on déduit $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Par le théorème sur les fonctions continues et strictement croissantes, $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une bijection.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ est la dérivée de ln au point $x_0 = 1$, donc cette limite existe et vaut $\ln'(1) = 1$.
6. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante, donc la fonction ln est concave. Posons $f(x) = x - 1 - \ln x$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Par une étude de fonction f atteint son minimum en $x_0 = 1$. Donc $f(x) \geqslant f(1) = 0$. Donc $\ln x \leqslant x - 1$.

$\square$

1.2. Exponentielle

Définition 1.
La bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction *exponentielle*, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 2.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\boxed{\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0}$ *et* $\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty$.
- *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Elle est convexe et* $\exp x \geqslant 1 + x$.

Remarque.
La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\exp(1) = e$. Où $e \simeq 2,718\ldots$ est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$.

Démonstration. Ce sont les propriétés du logarithme retranscrites pour sa bijection réciproque.
Par exemple pour la dérivée : on part de l'égalité $\ln(\exp x) = x$ que l'on dérive. Cela donne $\exp'(x) \times \ln'(\exp x) = 1$ donc $\exp'(x) \times \frac{1}{\exp x} = 1$ et ainsi $\exp'(x) = \exp x$. □

1.3. Puissance et comparaison

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a^b = \exp\big(b \ln a\big)}$$

Remarque.

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln a\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right)$ (la **racine n-ème** de a)
- On note aussi $\exp x$ par e^x ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp\big(x \ln e\big) = \exp(x)$.
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

Proposition 3.
Soit $x, y > 0$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$.

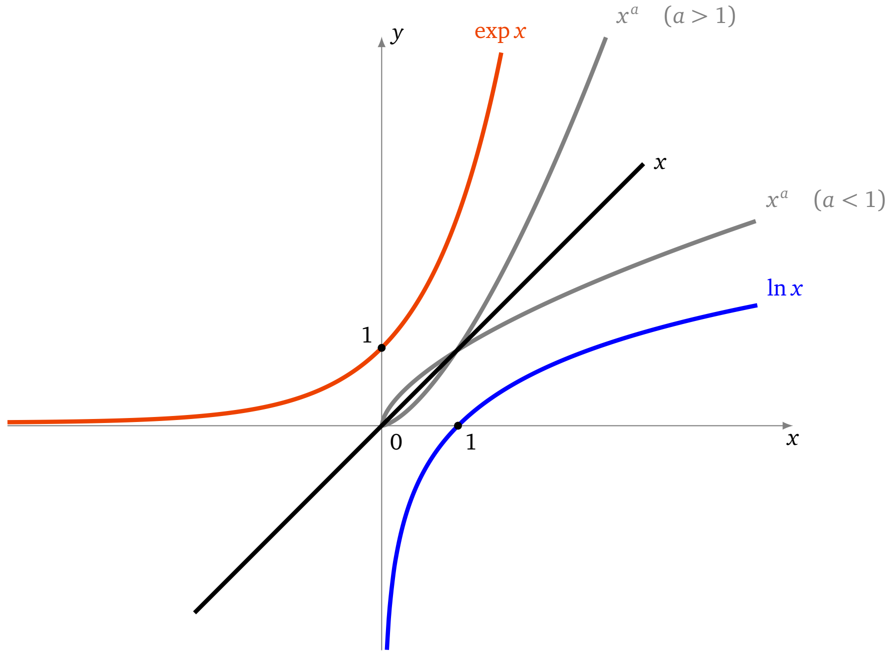
- $\boxed{x^{a+b} = x^a x^b}$
- $\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}}$
- $\boxed{(xy)^a = x^a y^a}$
- $\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$

- $\boxed{\ln(x^a) = a \ln x}$

Comparons les fonctions $\ln x$, $\exp x$ avec x :

Proposition 4.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$



Démonstration.

1. On a vu $\ln x \leqslant x - 1$ (pour tout $x > 0$). Donc $\ln x \leqslant x$ donc $\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leqslant 1$. Cela donne
$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{x} = 2\frac{\ln\sqrt{x}}{x} = 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$
Cette double inégalité entraîne $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. On a vu $\exp x \geqslant 1 + x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc $\exp x \to +\infty$ (lorsque $x \to +\infty$).
$$\frac{x}{\exp x} = \frac{\ln(\exp x)}{\exp x} = \frac{\ln u}{u}$$
Lorsque $x \to +\infty$ alors $u = \exp x \to +\infty$ et donc par le premier point $\frac{\ln u}{u} \to 0$. Donc $\frac{x}{\exp x} \to 0$ et reste positive, ainsi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$.

□

Mini-exercices.

1. Montrer que $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x) - 1$. Tracer son graphe. Résoudre l'équation ($f(x) = 0$). Idem avec $g(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Idem avec $h(x) = x^x$.
3. Expliquer comment $\log_{10}$ permet de calculer le nombre de chiffres d'un entier n.
4. Montrer $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$ (faire une étude de fonction). Idem avec $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$.
5. Calculer la limite de la suite définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$. Idem avec $v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ et $w_n = n^{\frac{1}{n}}$.

2. Fonctions circulaires inverses

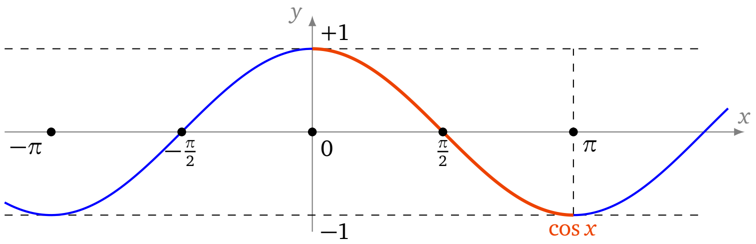
2.1. Arccosinus

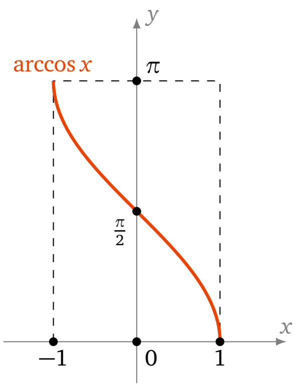
Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arccosinus*** :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\big(\arccos(x)\big) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[}$$

Démonstration. On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} & \cos(\arccos x) = x \\ \implies & -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\ \implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ \implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \qquad (*) \\ \implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Le point crucial $(*)$ se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe + car $\arccos x \in [0, \pi]$, et donc on a $\sin(\arccos x) \geqslant 0$). □

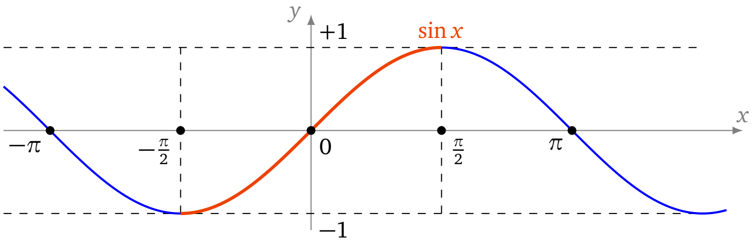
2.2. Arcsinus

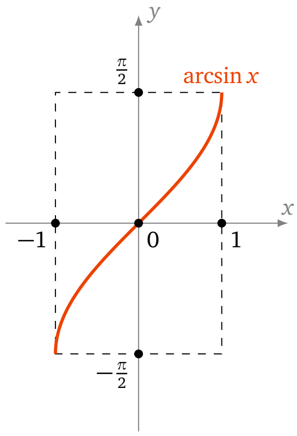
La restriction

$$\sin_| : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\big(\arcsin(x)\big) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big) = x & \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

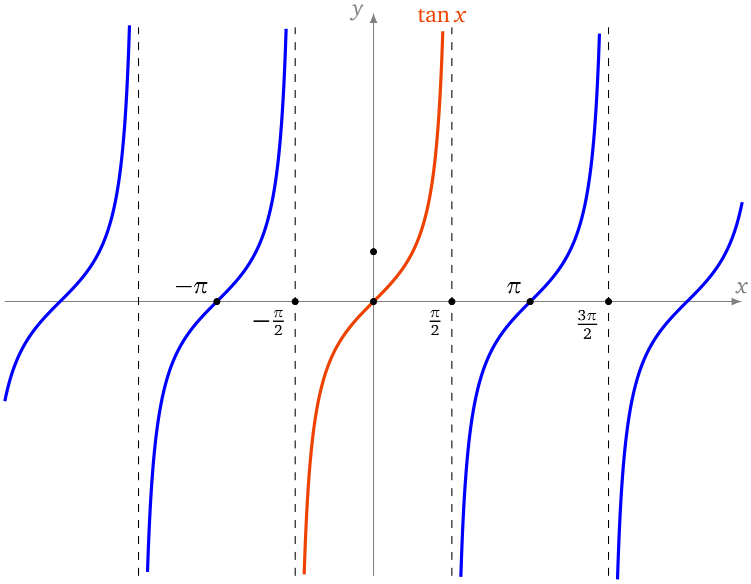
2.3. Arctangente

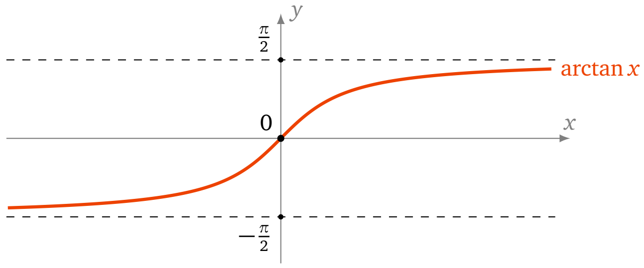
La restriction

$$\tan_| :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arctangente*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y}$$

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Mini-exercices.

1. Calculer les valeurs de arccos et arcsin en 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Idem pour arctan en 0, 1, $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Calculer $\arccos(\cos\frac{7\pi}{3})$. Idem avec $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{3})$ et $\arctan(\tan\frac{7\pi}{3})$ (attention aux intervalles !)
3. Calculer $\cos(\arctan x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arcsin x)$.
4. Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. En déduire que $f(x) = \arcsin x$, pour tout $x \in]-1,1[$.
5. Montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [-1,1]$.

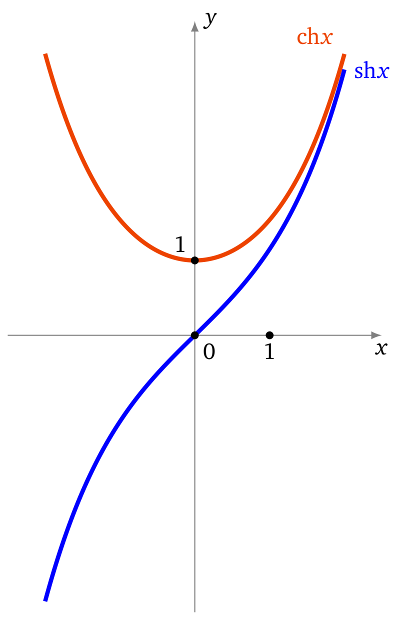
3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

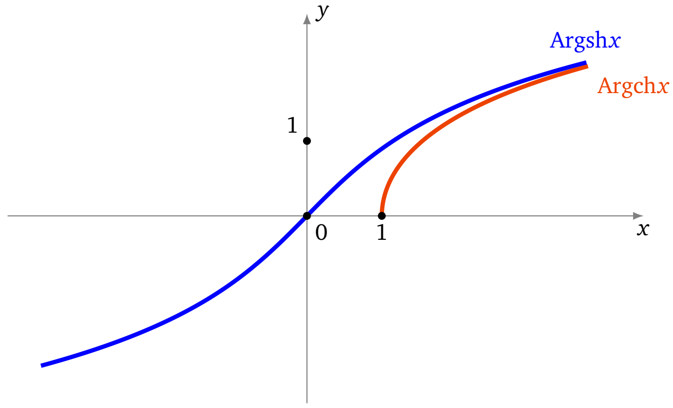
3.1. Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le *cosinus hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\operatorname{ch}_| : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$.





3.2. Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***sinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 5.
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
- Argsh *est dérivable et* $\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration.
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1$.
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Idem pour la dérivée de $\operatorname{sh} x$.
- Car c'est la réciproque de sh.
- Comme la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}' x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x$:
$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
- Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Argsh}' x$$
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\operatorname{Argsh} 0 = 0$ (car $\operatorname{sh} 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Argsh} x$.

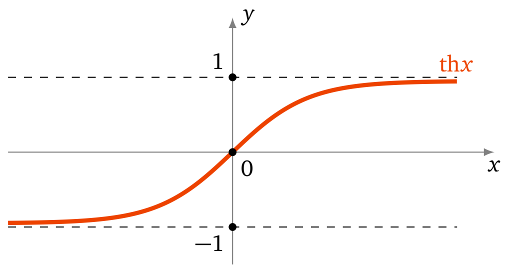
□

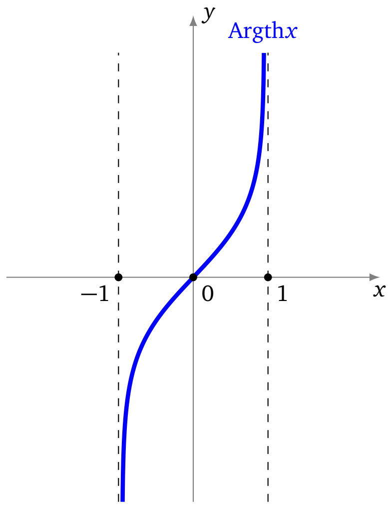
3.3. Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la *tangente hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$$

La fonction th : $\mathbb{R} \to]-1,1[$ est une bijection, on note Argth : $]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.





3.4. Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \\
\operatorname{ch}(2a) &= \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a \\
\operatorname{sh}(2a) &= 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a
\end{aligned}$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x \\
\operatorname{th}' x &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\
\operatorname{Argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\operatorname{Argth}' x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1)$$
$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

Mini-exercices.

1. Dessiner les courbes paramétrées $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ et $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Pourquoi cos et sin s'appellent des fonctions trigonométriques *circulaires* alors que ch et sh sont des fonctions trigonométriques *hyperboliques* ?
2. Prouver par le calcul la formule $\operatorname{ch}(a+b) = \ldots$ En utilisant que $\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}$ retrouver la formule pour $\cos(a+b)$.
3. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = 3$.
4. Montrer que $\frac{\operatorname{sh}(2x)}{1+\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th} x$.
5. Calculer les dérivées des fonctions définies par : $\operatorname{th}(1+x^2)$, $\ln(\operatorname{ch} x)$, $\operatorname{Argch}(\exp x)$, $\operatorname{Argth}(\cos x)$.

Auteurs du chapitre Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri