

# Fonctions de plusieurs variables

## 1. Introduction

En première année vous avez étudié les fonctions d'une variable, par exemple si  $t \mapsto f(t)$  représente l'évolution d'une population en fonction du temps, vous savez déterminer ses caractéristiques (croissance, maximum, limite,...). Mais de nombreux phénomènes dépendent de plusieurs paramètres, par exemple le volume d'un gaz dépend de la température et de la pression ou bien les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point à la surface de la Terre dépendent de la latitude et de la longitude. Le but de ce cours est de faire le même travail que pour les fonctions d'une variable : étudiant la croissance, les maximums, les limites,... Bien sûr la situation est plus délicate, mais aussi plus intéressante, du fait qu'il y ait plusieurs variables !

+ [[image ligne de niveau]]

### 1.1. Que sont les fonctions de plusieurs variables ?

Dans ce chapitre nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , mais également dans le cadre général de  $\mathbb{R}^n$ . Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

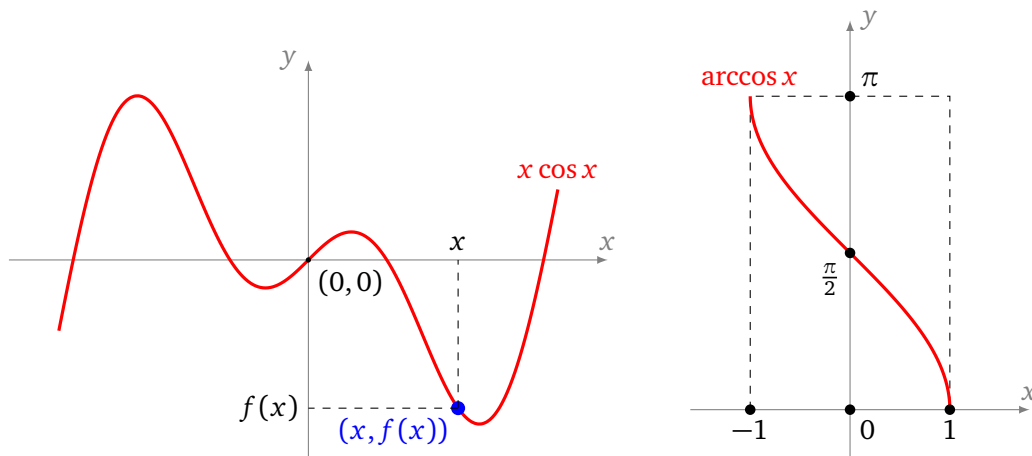
où  $n$  est un entier naturel  $\geq 1$ .

Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ  $E$  seront des vecteurs du type  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des réels.

#### Exemple 1.

1.  $n = 1$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  : c'est le cas le plus simple,  $x \mapsto f(x)$ , celui qui est connu depuis le lycée.

Voici les graphes des fonctions  $x \mapsto x \cos x$  et  $x \mapsto \arccos x$  :



2.  $n = 2$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . On préfère noter les variables par  $(x, y)$  (au lieu de  $(x_1, x_2)$ ). Ces fonctions  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , sont représentées par exemple par des surfaces :

[[Figure : Courbe représentant la fonction  $(x, y) \mapsto -x \cdot y \cdot e^{-x^2-y^2}$ . ]]

[[Autres exemples : à faire]]

Dès que  $n > 2$ , il est assez difficile d'avoir une vision graphique.

Nous allons aussi étudier des fonctions, dites fonctions vectorielles, dont l'ensemble d'arrivée n'est pas  $\mathbb{R}$ , mais  $\mathbb{R}^p$ , donc de la forme

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

où  $n$  et  $p$  sont des entiers naturels  $\geq 1$ .

Dans ce cas, pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $f(x)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , du type  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ .

### Exemple 2.

1.  $n = 1, p = 2$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est représentée par une courbe paramétrée du plan.

[[figure à faire]] [[ dire  $\{(x(t), y(t))\}$  de nature différente, on est dans l'ensemble d'arrivée]]

2.  $n = 1, p = 3$ .  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est représentée par une courbe paramétrée de l'espace.

[[  $\{(x(t), y(t), z(t))\}$  ]]

[(cas  $p = 1, q = 3$ ) Courbe représentant la fonction  $t \mapsto ((2 + \cos(1.5t))\cos(t), (2 + \cos(1.5t))\sin(t), \sin(1.5t))$  (nœud de trèfle). ]

+ [[hélice]]

3.  $n = 2, p = 3$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  : elles sont représentées par exemple par des surfaces paramétrées.

[(cas  $p = 2, q = 3$ ) Courbe représentant la fonction  $(u, v) \mapsto ((2 + \sin(v))\cos(u), (2 + \sin(v))\sin(u), u + \cos(v))$  ]

[[figure à faire, à un élément  $(u, v)$  on associe]]

4.  $n = 2, p = 2$ .  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  : elles sont représentées par exemple par des champs de vecteurs.

[[détails, figure à faire]]

[[Représentation du champ de vecteur donné par  $(x, y, z) \mapsto (y/z, -x/z, z/4)$ .]]

Dans ce chapitre nous étudions surtout les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , les exemples étant des fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nous reviendrons plus tard sur les fonctions vectorielles  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

## 1.2. Topologie de $\mathbb{R}^n$ (rappels/compléments)

Voici quelques rappels de topologie dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

- Le **produit scalaire** usuel de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , noté  $\langle x | y \rangle$ , ou bien  $x \cdot y$ , est défini par

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

- La **norme euclidienne** sur  $\mathbb{R}^n$  est la norme associée à ce produit scalaire. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne de  $x$ , notée  $\|x\|$ , est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

- La **distance** entre le point  $A$  et le point  $M = (x_1, \dots, x_n)$  est  $\|M - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$ .
- La **boule ouverte** de centre  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et de rayon  $r > 0$ , notée  $B_r(A)$ , est l'ensemble suivant :

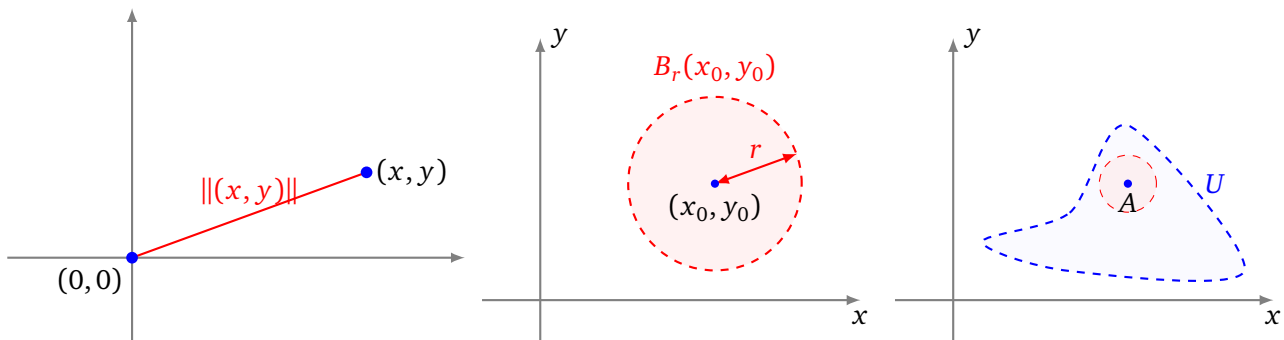
$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \|M - A\| < r\}.$$

- Soient  $U$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $A \in U$ . On dit que  $U$  est un **voisinage** de  $A$ , si  $U$  contient une boule ouverte centrée en  $A$ .
- On dit que  $U$  est un **ouvert** de  $\mathbb{R}^n$ , si tout pour tout point  $A \in U$ ,  $U$  contient une boule ouverte centrée en  $A$ .

Dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ , on note plutôt les coordonnées d'un point par  $(x, y)$ , alors :

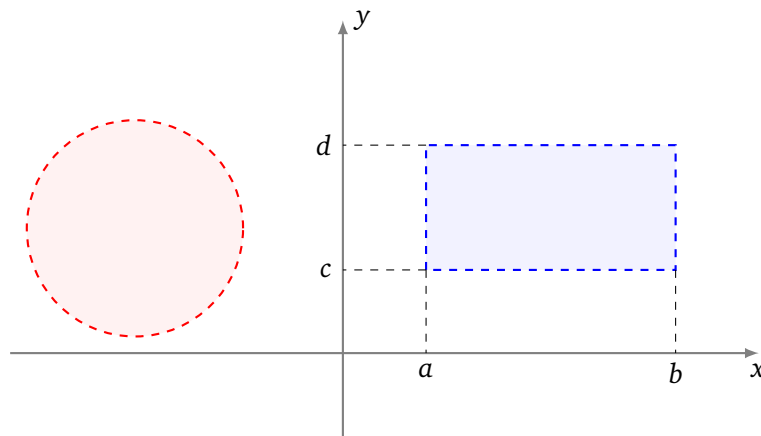
- $\langle (x, y) | (x', y') \rangle = xx' + yy'$
- $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$  (On parle de **disque** plutôt que de boule.)

De gauche à droite : la distance, un disque ouvert, un ouvert  $U$ .



Exemples :

- tout rectangle ouvert  $]a, b[ \times ]c, d[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (à droite sur la figure),
- tout disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  (à gauche sur la figure).



## 2. Graphe

### 2.1. Fonctions

#### Définition 1.

Soit  $E$  une partie  $\mathbb{R}^n$ . Une **fonction**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  associe à tout  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E$ , un seul nombre réel  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

#### Exemple 3.

1. Distance d'un point à l'origine en fonction de ses coordonnées :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

2. Surface d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned}$$

3. Surface d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto 2(xy + yz + xz). \end{aligned}$$

#### Définition 2.

Si on nous donne d'abord une expression pour  $f(x_1, \dots, x_n)$ , alors le **domaine de définition** de  $f$  est le plus grand sous-ensemble  $D_f$ , tel que pour chaque  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $D_f$ ,  $f(x_1, \dots, x_n)$  soit bien définie. La fonction est alors  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Exemple 4.

1.  $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$

Il faut que  $1 + x + y$  soit strictement positif, afin de pouvoir calculer son logarithme. Donc :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x + y > 0\}$$

Pour tracer cet ensemble, on trace d'abord la droite d'équation  $1 + x + y = 0$ . On détermine ensuite de quel côté de la droite est l'ensemble  $1 + x + y > 0$ . Ici c'est au-dessus de la droite.

[[dessin]]

2.  $f(x, y) = \exp\left(\frac{x+y}{x-y^2}\right)$

Le dénominateur ne doit pas s'annuler :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 \neq 0\}$$

Les points de l'ensemble de définition, sont tous les points du plan qui ne sont pas sur la parabole d'équation  $(x - y^2 = 0)$ .

[[dessin]]

3.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2}}$

L'expression sous la racine doit être positive (pour pouvoir prendre la racine carrée) et ne doit pas s'annuler (pour pouvoir prendre l'inverse), ainsi

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 2\}$$

Autrement dit ce sont tous les points en dehors de la boule fermée, centrée en  $(0, 0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

[[dessin]]

### Définition 3.

L'**image** d'une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est l'ensemble des valeurs  $f(x_1, \dots, x_n)$  prises par  $f$  lorsque  $(x_1, \dots, x_n)$  parcourt  $E$  :

$$\text{Im } f = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in E\} \subset \mathbb{R}$$

### Exemple 5.

1.  $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$

L'image de  $f$  est  $\mathbb{R}$  tout entier :  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ .

Preuve : soit  $z \in \mathbb{R}$ . Alors pour  $(x, y) = (e^z, -1)$ , on a

$$f(x, y) = f(e^z, -1) = \ln(e^z) = z.$$

Donc tout  $z \in \mathbb{R}$  est dans l'image de  $f$ .

2.  $f(x, y) = \exp\left(\frac{x+y}{x-y^2}\right)$

$\text{Im } f = ]0, +\infty[$ .

Preuve : soit  $z \in ]0, +\infty[$ . Alors pour  $(x, y) = (0, -\frac{1}{\ln z})$ , on a

$$f(x, y) = f(0, -\frac{1}{\ln z}) = \exp\left(\frac{-\frac{1}{\ln z}}{-(\frac{1}{\ln z})^2}\right) = \exp(\ln z) = z.$$

3. Pour  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2}}$  alors  $\text{Im } f = ]0, +\infty[$ . À vous de faire la preuve !

### Définition 4.

Soit  $E$  une partie  $\mathbb{R}^n$ . Une **fonction vectorielle**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^p$  associe à tout  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E$ , une suite de  $p$  nombres réels. On la note

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)). \end{aligned}$$

Nous nous limiterons souvent aux dimensions  $\leq 3$  pour  $n$  et  $p$ . La généralisation aux dimensions supérieures ne posant pas de problème particulier, sauf pour faire des dessins ! Voici quelques exemples simples.

**Exemple 6.**

1. Surface et volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2(xy + yz + xz), xyz). \end{aligned}$$

2. Coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

**2.2. Graphe et lignes de niveau****Définition 5.**

Soit  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de 2 variables. Le **graphe**  $\mathcal{G}_f$  de  $f$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  formé des points de coordonnées  $(x, y, f(x, y))$  avec  $(x, y) \in D_f$  dans l'ensemble de définition. Le graphe est donc :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

Représenter graphiquement le graphe n'est possible que pour les fonctions d'une seule variable ou deux variables. Pour les fonctions d'une variables  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on rappelle que le graphe est

$$\mathcal{G}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_g \text{ et } y = g(x)\}.$$

Dans le cas d'une variable (à gauche) le graphe est une courbe, dans le cas de deux variables qui nous intéresse ici, c'est une surface.

[[dessin 2 var, et 1 var]]

Afin de tracer le graphe d'une fonction de deux variables, on découpe la surface en morceaux.

**Tranches.**

Une première façon de faire : tracer, pour quelques valeurs de  $a$ , les graphe des fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x, a) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(a, y).$$

La première représente l'intersection du graphe  $\mathcal{G}_f$  avec le plan  $(y = a)$  et la seconde représente l'intersection du graphe avec le plan  $(x = a)$ .

[[dessin, expliquer couleurs]]

**Lignes de niveau.**

On va aussi s'intéresser à d'autres courbes tracées sur la surface : les courbes de niveau.

**Définition 6.**

Soit  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables.

- La **ligne de niveau**  $z = c \in \mathbb{R}$  est

$$L_c = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}.$$

- La **courbe de niveau**  $z = c$  est la trace de  $\mathcal{G}_f$  dans le plan  $(z = c)$  :

$$\mathcal{G}_f \cap \{z = c\} = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = c\}.$$

La ligne de niveau  $a$  est une courbe du plan  $\mathbb{R}^2$ , la courbe de niveau  $a$  est une courbe de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On obtient la courbe de niveau  $a$ , en partant de la ligne de niveau  $a$  et en remontant à l'altitude  $a$ .

**Exemple 7.**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

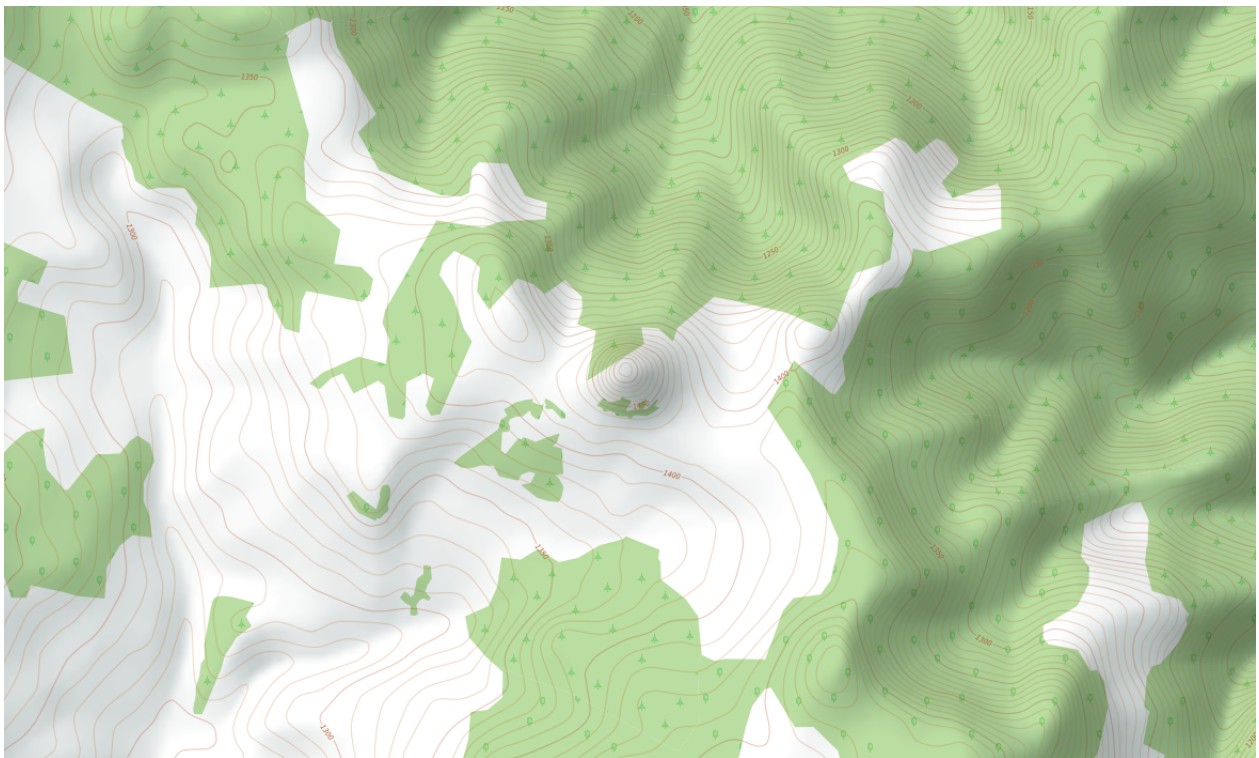
- Si  $c < 0$ , la ligne de niveau  $L_c$  est vide (aucun point n'a d'altitude négative).
- Si  $c = 0$ , la ligne de niveau  $L_0$  se réduit à  $\{(0, 0)\}$ .
- Si  $c > 0$ , la ligne de niveau  $L_c$  est le cercle du plan de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{c}$ . On remonte  $L_c$  à l'altitude  $z = c$  : la courbe de niveau est alors le cercle horizontal de l'espace de centre  $(0, 0, c)$  et de rayon  $\sqrt{c}$ .

Le graphe est alors une superposition de cercles horizontaux de l'espace de centre  $(0, 0, c)$  et de rayon  $\sqrt{c}$ ,  $c > 0$ . Il prend l'allure suivante : [[dessins]]

- Les tranches sont ici des paraboles [[détails...]]  
[[dessins]]

**Exemple 8.**

Sur une carte topographique, les lignes de niveau représentent les courbes ayant la même altitude.



- Ici, une carte *Open Street Map*, avec au centre, le mont Gerbier des Juncs (source de la Loire, 1551 m).
- Les lignes de niveau correspondent à des altitudes par cran de 10 m (par exemple, pour  $c = 1400$ ,  $c = 1410$ ,  $c = 1420$ ...).
- Lorsque les lignes de niveau sont très espacées, le terrain est plutôt plat ; lorsque les lignes sont rapprochées le terrain est pentu.
- Par définition, si on se promène en suivant une ligne de niveau, on reste toujours à la même altitude !

**Exemple 9.**

L'image qui a servi lors de l'introduction sont le graphe et les courbes de niveau de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(x, y) \mapsto z = \frac{\sin(x^2 + 3y^2)}{\frac{1}{10} + r^2} + (x^2 + 5y^2) \cdot \frac{\exp(1 - r^2)}{2} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Les courbes de niveau, sont projetées sur les plans  $z = 0$  et  $z = 9$  pour donner les lignes de niveau.  
[[figure faire]]

### Surfaces de niveau.

Pour les fonctions de 3 variables, le graphe étant dans  $\mathbb{R}^4$ , on ne peut le dessiner. La notion analogue à la ligne de niveau est celle **surface de niveau**, donnée par l'équation  $f(x, y, z) = c$ .

#### Exemple 10.

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Les surfaces de niveaux sont données par l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = c$ . Pour  $c \geq 0$ , ces surfaces sont des sphères, centrées à l'origine et de rayon  $\sqrt{c}$ . Voici ces surfaces pour  $c = 1, 4, 9$ . Elles ont été découpées pour laisser entrevoir les surfaces des différents niveaux.  
[[figure à faire]]

#### Exemple 11.

[[autre exemple : à faire]]

## 2.3. Exemples de surfaces quadratiques

Ce sont des exemples à connaître, car il seront fondamentaux pour la suite du cours.

#### Exemple 12.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

[[dessin]]

- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des ellipses.
- Le graphe est donc un **paraboloïde elliptique**.

#### Exemple 13.

$$f(x, y) = x^2$$

[[dessin]]

- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des droites.
- Le graphe est donc un **cylindre parabolique**.

#### Exemple 14.

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

[[dessin]]

- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- Le graphe est donc un **paraboloïde hyperbolique**, que l'on appelle aussi la **selle de cheval**.
- Un autre nom pour cette surface est un **col** (du nom d'un col de montagne). En effet le point  $(0, 0, 0)$ , est le point de passage le moins haut pour passer d'un versant à l'autre de la montagne.

### Mini-exercices.

- 1.
- 2.



3.

## 3. Limites

La notion de limite et de continuité des fonctions d'une seule variable se généralise en plusieurs variables sans complexité supplémentaire : il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme euclidienne.

### 3.1. Définition

Soit  $f$  une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sauf peut-être en  $x_0$ .

#### Définition 7.

La fonction  $f$  admet pour **limite** le nombre réel  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

On définirait de même  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  par :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x)| > A$$

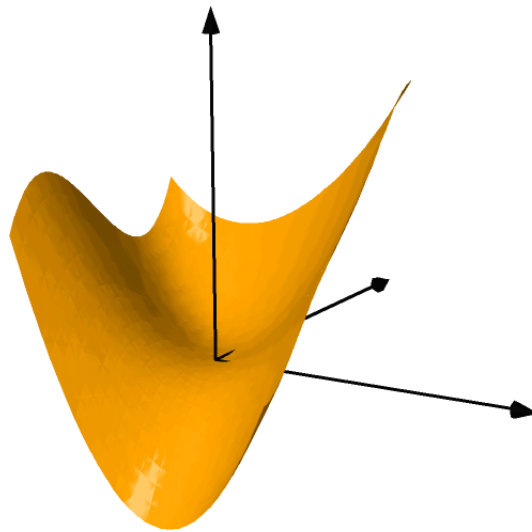
#### Remarque.

- La notion de limite ne dépend pas ici des normes utilisées.
- Si elle existe, la limite est unique.

#### Exemple 15.

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + y \sin(x + y^2)$ .

1. Montrer que  $f$  tend vers 0 lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .
2. Trouver un ouvert  $U$  contenant l'origine tel que, pour tout  $(x, y) \in U$ , on ait  $|f(x, y)| < \frac{1}{100}$ .



*Solution.*

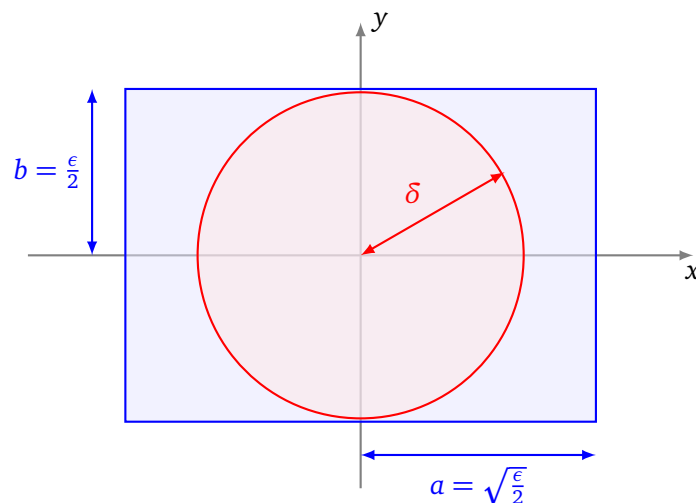
1. On majore  $f(x, y)$  en utilisant  $|\sin(t)| \leq 1$  :

$$|f(x, y)| = |x^2 + y \sin(x + y^2)| \leq x^2 + |y| |\sin(x + y^2)| \leq x^2 + |y|$$

Fixons  $0 < \epsilon < 1$ . Fixons  $a = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$  et  $b = \frac{\epsilon}{2}$ , alors pour  $x \in ]-a, a[$ , on a  $x^2 < \frac{\epsilon}{2}$ , pour  $y \in ]-b, b[$  on a  $|y| < \frac{\epsilon}{2}$ . Donc pour  $(x, y) \in ]-a, a[ \times ]-b, b[$  on a donc

$$|f(x, y)| \leq x^2 + |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Une valeur  $\delta$  qui convient, est  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ , en effet si  $\|(x, y)\| < \delta$  alors  $|x| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$  et  $|y| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$  donc  $|f(x, y)| < \epsilon$ . Conclusion :  $f$  admet pour limite 0, lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ .



2. Pour  $\epsilon = \frac{1}{100}$  on a  $a = \frac{1}{\sqrt{200}}$  et  $b = \frac{1}{200}$ . Pour chaque  $(x, y)$  de l'ouvert  $] -a, a[ \times ] -b, b[$ , on a  $|f(x, y)| < \frac{1}{100}$ .

## 3.2. Opérations sur les limites

Pour calculer les limites, on ne recourt que rarement à cette définition. On utilise plutôt les théorèmes généraux : opérations sur les limites et encadrement. Ce sont les mêmes énoncés que pour les fonctions d'une variable, il n'y a aucune difficulté ni nouveauté.

**Proposition 1** (Opérations sur les limites).

Soient  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définies au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et telles que  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $x_0$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x_0}(f + g) &= \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g & \lim_{x_0}(f g) &= \lim_{x_0} f \times \lim_{x_0} g \\ \lim_{x_0} \frac{1}{g} &= \frac{1}{\lim_{x_0} g} & \lim_{x_0} \frac{f}{g} &= \frac{\lim_{x_0} f}{\lim_{x_0} g}\end{aligned}$$

**Remarque.**

- Les résultats ci-dessus sont aussi valables pour des limites infinies avec les conventions usuelles :

$$\begin{aligned}\ell + \infty &= +\infty, \quad \ell - \infty = -\infty, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \\ \ell \times \infty &= \infty \ (\ell \neq 0), \quad \infty \times \infty = \infty \text{ (avec règle de multiplication des signes)}.\end{aligned}$$

- Les formes indéterminées sont :  $+\infty - \infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \times \infty$ ,  $1^\infty$ , et  $0^0$ .

La composition est aussi souvent utile :

- soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de plusieurs variables, telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ,
- soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'une seule variable, telle que  $\lim_{t \rightarrow \ell} g(t) = \ell'$ ,
- alors la fonction de plusieurs variables  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g \circ f(x) = g(f(x))$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \ell'$ .

Par exemple, grâce à l'exemple 15, et comme  $e^t \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , on en déduit :

$$e^{x^2+y \sin(x+y^2)} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1$$

Il existe aussi un théorème « des gendarmes ».

**Théorème 1** (Théorème d'encadrement).

Soient  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions définies dans un voisinage  $U$  de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- Si pour tout  $x \in U$ , on a  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ,
- et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = \ell$ .

Alors  $h$  admet une limite au point  $x_0$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \ell$ .

**Exemple 16.**

Soit  $h$  définie par  $h(x, y) = \cos(x + y^2)(x^2 + y \sin(x + y^2))$ . On majore la valeur absolue du cosinus par 1 :

$$|h(x, y)| \leq x^2 + y \sin(x + y^2).$$

On a vu lors de l'exemple 15 que la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + y \sin(x + y^2)$  tend vers 0 en  $(0, 0)$ . Donc par le théorème des gendarmes  $h(x, y)$  tend aussi vers 0 lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ .

### 3.3. Limite le long d'un chemin

L'unicité de la limite implique que, quelle que soit la façon dont arrive au point  $x_0$ , la valeur limite est toujours la même.

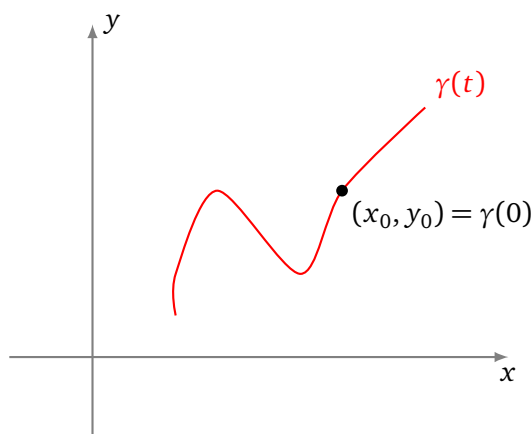
#### Proposition 2.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sauf peut être en  $x_0$ .

1. Si  $f$  admet une limite  $\ell$  au point  $x_0$ , alors la restriction de  $f$  à toute courbe passant par  $x_0$  admet une limite en  $x_0$  et cette limite est  $\ell$ .
2. Par contraposée, si les restrictions de  $f$  à deux courbes passant par  $x_0$  ont des limites différentes au point  $x_0$ , alors  $f$  n'admet pas de limite au point  $x_0$ .

Détaillons dans les cas des fonctions de deux variables :

- Une courbe passant par le point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  est une fonction continue  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , telle que  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ .
- La restriction de  $f$  le long de  $\gamma$  est  $f \circ \gamma$ ,  $t \mapsto f(x(t), y(t))$ .
- Si  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $(x_0, y_0)$  alors, la première partie de la proposition affirme,  $f(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell$ .



#### Exemple 17.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

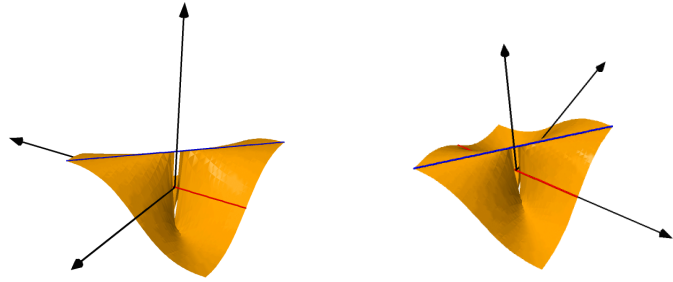
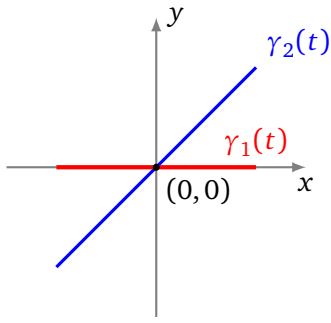
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et } f(0, 0) = 0.$$

La fonction  $f$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$ ?

*Solution.*

- Si on prend le chemin  $\gamma_1(t) = (t, 0)$ , alors  $f \circ \gamma_1(t) = f(t, 0) = 0$ . Donc lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $f \circ \gamma_1(t) \rightarrow 0$ .
- Si on prend le chemin  $\gamma_2(t) = (t, t)$ , alors  $f \circ \gamma_2(t) = f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ . Donc lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $f \circ \gamma_2(t) \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Ci-dessous, sur la figure de gauche, les deux chemins du plans ; sur les deux figures de droites, deux vues différentes des valeurs prises par  $f$  le long de ces chemins.



- Si  $f$  admettait une limite  $\ell$ , alors quel que soit le chemin  $\gamma(t)$ , tel que  $\gamma(t) \rightarrow (0, 0)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , on a  $f \circ \gamma(t) \rightarrow \ell$ . On aurait donc  $\ell = 0$  et  $\ell = \frac{1}{2}$ . Ce qui est contredit l'unicité de la limite. Ainsi  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

Une autre formulation possible :

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a pour limite  $\ell$  en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  alors pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $u_n \rightarrow x_0$ , on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$ . Pour les fonctions de deux variables, cela s'écrit ainsi : si  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $(a, b)$  alors pour toute suite  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  on a  $f(a_n, b_n) \rightarrow \ell$ .

### 3.4. Fonctions continues

#### Définition 8.

1.  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue en  $x_0 \in E$**  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
2.  $f$  est **continue sur  $E$**  si elle est continue en tout point de  $E$ .

Par les propriétés des limites, si  $f$  et  $g$  deux fonctions continues en  $x_0$ . Alors :

- la fonction  $f + g$  est continue en  $x_0$ ,
- de même  $fg$  et  $f/g$  (avec  $g(x) \neq 0$  sur un voisinage de  $x_0$ ) sont continues en  $x_0$ ,
- si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $h \circ f$  est continue en  $x_0$ .

#### Exemple 18.

- Les applications définies par  $(x, y) \mapsto x + y$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ , puis  $(x, y) \mapsto x^2 + 3xy$  et toutes les fonctions polynômes en deux variables  $x$  et  $y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ . De la même façon toutes les fractions rationnelles en deux variables sont continues là où elles sont définies.
- Comme l'exponentielle est une fonction continue, alors  $(x, y) \mapsto e^{xy}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La fonction définie par  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

#### Définition 9 (Prolongement par continuité).

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un point adhérent à  $E$  n'appartenant pas à  $E$ . Si  $f$  a une limite  $\ell$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ , on peut étendre le domaine de définition de  $f$  à  $E \cup \{x_0\}$  en posant  $f(x_0) = \ell$ . La fonction étendue est continue en  $x_0$ . On dit que l'on a obtenu un **prolongement de  $f$  par continuité** au point  $x_0$ .

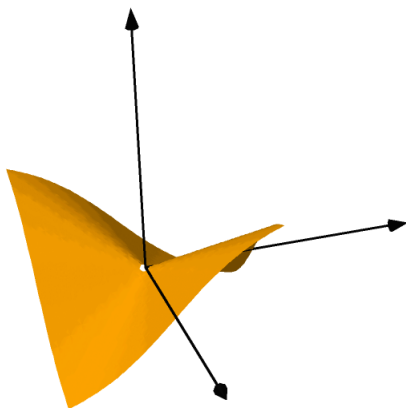
#### Exemple 19.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Est-il possible de prolonger  $f$  par continuité en  $(0, 0)$  ?

Sur la figure ci-dessous, la question devient simplement : est-il possible de boucher le trou au milieu de la surface en rajoutant juste un point ?



*Solution.*

- **Limite à l'origine.**

On utilise que  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Donc

$$|f(x, y)| = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

- **Prolongement.**

Pour prolonger  $f$  en  $(0, 0)$ , on choisit comme valeur la limite obtenue. On pose donc  $f(0, 0) = 0$ . (On note encore  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction prolongée.)

- **Continuité.**

Par notre choix de  $f(0, 0)$ ,  $f$  est continue en  $(0, 0)$ . En dehors de l'origine,  $f$  est continue comme somme, produit, composition, inverse de fonctions continue. Conclusion : la fonction prolongée est continue sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

### Mini-exercices.

1. Soit  $f(x, y) = \frac{1+x}{1+y}$ . Trouver un ouvert  $U$  contenant l'origine, telle que  $0.999 < f(x, y) < 1.001$ , pour tout  $(x, y) \in U$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue au point  $(x_1, \dots, x_n)$ . Montrer que la fonction partielle  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$  est continue en  $x_i$ .
3. Sachant que la limite de  $f(x, y) = \frac{1+x}{1+y}$  en  $(0, 0)$  est 1, calculer les limites des fonctions suivantes en  $(0, 0)$  :  $\frac{1+y}{1+x} + x^2 + y^2$  ;  $\frac{1+y}{1+x}$  ;  $\sin(xy) \frac{1+x}{1+y}$  ;  $\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ .
4. Sachant  $\ln(t) \leq t - 1$ , pour tout  $t > 0$ , calculer la limite de  $\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+y^4}$  en  $(0, 0)$ .
5. Soit  $f(x, y) =$ . Soit  $\gamma(t) =$  [avec paramètre]. Calculer la limite de  $f \circ \gamma(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .  $f$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$  ?  $f$  est-elle prolongeable par continuité ?
6. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par  $f(x, y) =$ .  $f$  admet-elle une limite en  $(0, 0)$  ?  $f$  est-elle prolongeable par continuité ? Mêmes questions avec  $f(x, y) =$ .

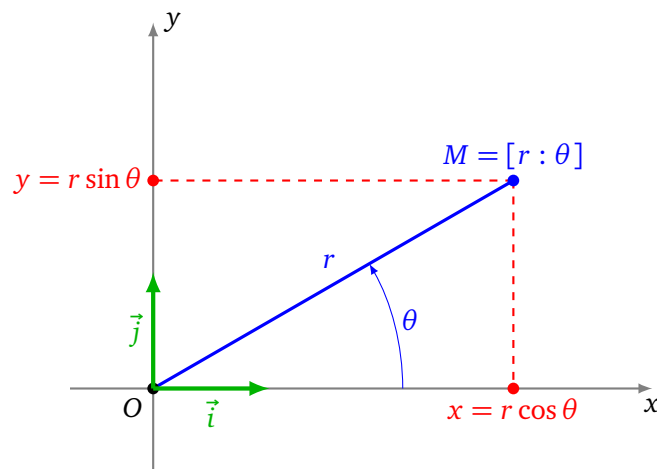
## 4. Coordonnées polaires

Plutôt que de repérer un point du plan  $\mathbb{R}^2$  par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé avec l'horizontale : ce sont les coordonnées polaires.

### 4.1. Définition

Soit  $M$  un point du plan  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $O = (0, 0)$  l'origine. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct.

- On note  $r = \|\vec{OM}\|$ , la distance de  $M$  à l'origine.
- On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{i}$  et  $\vec{OM}$ .



On note  $[r : \theta]$  les **coordonnées polaires** du point  $M$ . Dans ce cours  $r$  sera toujours positif. L'angle n'est pas déterminé de manière unique. Plusieurs choix sont possibles. Pour avoir unicité, on peut limiter  $\theta$  à l'intervalle  $[0, 2\pi[$ , ou bien  $]-\pi, +\pi]$ . On n'attribue généralement pas de coordonnée polaire au point origine (l'angle n'aurait pas de sens).

#### Coordonnées polaires vers coordonnées cartésiennes.

On retrouve les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  à partir des coordonnées polaires  $[r : \theta]$  par les formules

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

Autrement dit, on a défini une application :

$$]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

#### Coordonnées cartésiennes vers coordonnées polaires.

On retrouve  $r$  et  $\theta$  à partir de  $(x, y)$  par les formules suivantes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et dans le cas  $x > 0$  et  $y \geq 0$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{avec } x > 0 \text{ et } y \geq 0$$

Pour les points dans les autres quadrants, on se ramène au quadrant principal où  $x > 0$  et  $y \geq 0$ .

## 4.2. Limite et continuité

Lorsque l'on considère des applications  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il est quelques fois plus facile de prouver des résultats de limite, continuité, etc. en passant par les coordonnées polaires.

### Proposition 3.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , sauf peut être en  $(0, 0)$ . Si

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \ell \in \mathbb{R}$$

existe indépendamment de  $\theta$ , alors  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$ .

Pour clarifier cette proposition et expliquer les différents cas pratiques de la limite, voici comment faire. On exprime  $f(x, y)$  en coordonnées polaires en calculant  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

1. Si  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  existe et si elle ne dépend pas de la variable  $\theta$ , alors cette limite est la limite de  $f$  au point  $(0, 0)$ .
2. Si  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  n'existe pas, alors  $f$  n'a pas de limite au point  $(0, 0)$ .
3. Si  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \ell(\theta)$  dépend de  $\theta$ , alors  $f$  n'a pas de limite au point  $(0, 0)$ . Pour le justifier, on donne deux valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  telles que  $\ell(\theta_1) \neq \ell(\theta_2)$ .

Voyons un exemple de chaque situation.

### Exemple 20.

$$1. f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = r \cos^3 \theta$$

Comme  $|\cos^3 \theta| \leq 1$  alors  $r \cos^3 \theta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  (même si  $\theta$  variait lorsque  $r$  varie). Ce qui implique que  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ . La limite existe (indépendamment des valeurs prises par  $\theta$ ), donc la fonction  $f$  admet bien une limite en  $(0, 0)$  :  $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ .

Pour ceux qui voudrait tout faire à la main avec plus de détails, on peut aussi écrire  $|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq r$  autrement dit  $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Donc  $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ .

$$2. f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^3}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \sin \theta}{r^2(\cos^2 \theta + r \sin^2 \theta)} = \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta + r \sin^2 \theta}$$

Fixons  $\theta$  tel que  $\sin \theta \neq 0$  (c'est-à-dire  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ ) alors, lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  n'a pas de limite. En particulier la fonction  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

$$3. f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

Pour  $\theta$  fixé, la fonction  $r \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  admet bien une limite  $\ell(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ . Mais cette limite dépend de l'angle  $\theta$  : si  $\theta = 0$ ,  $\ell(\theta) = 0$ , par contre si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\ell(\theta) = 1$ . Comme la limite dépend de l'angle, alors la fonction de deux variables  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .



### 4.3. Un exemple

Cet exemple est assez subtil et peu être passé en première lecture.

**Remarque.**

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que, pour chaque  $\theta$  fixé,  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \ell$ .

Peut-on en conclure que  $f$  est continue au point  $(0, 0)$ ? La réponse est non !

Autrement dit, regarder la limite de  $f$  le long des rayons, ne permet pas de prouver la limite de  $f$  à l'origine.

Attention la différence entre cette remarque et la proposition 3 est subtile. Dans la proposition 3, on a une hypothèse en terme de limite du type :

$$\forall \epsilon \quad \exists r_0 \quad \forall r < r_0 \quad \forall \theta \quad \dots$$

alors quand dans la remarque, on note que l'hypothèse (plus faible) suivante est insuffisante :

$$\forall \theta \quad \forall \epsilon \quad \exists r_0 \quad \forall r < r_0 \quad \dots$$

**Exemple 21.**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

1. Le long de tous les rayons  $f$  tend vers 0, c'est-à-dire, pour  $\theta$  fixé

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$$

2. Cependant  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

*Solution.*

1. Calculons d'abord :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r \sin^3 \theta}$$

Fixons  $\theta$  et discutons selon sa valeur :

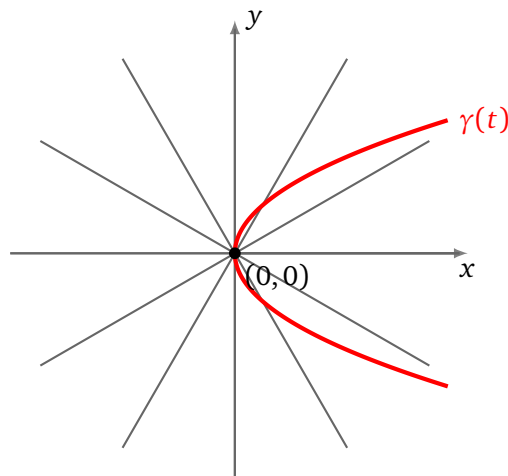
- Si  $\cos \theta \neq 0$ , alors le numérateur tend vers 0, tandis que le dénominateur tend vers  $\cos^2 \theta \neq 0$ .  
Donc  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .
- Si  $\cos \theta = 0$ , alors on se trouve sur des points  $(x, y)$  où  $x = 0$  et donc  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(0, y) = 0$ .

Dans tous les cas  $f$  tend vers 0 sur tous les rayons défini par un angle  $\theta$  fixé.

2. Considérons le chemin  $\gamma(t) = (t^2, t)$ , alors

$$f \circ \gamma(t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

Mais on a vu que le long des rayons  $f$  tend vers 0. Cela contredit l'existence d'une limite pour  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$ .



### Mini-exercices.

1. Calculer l'angle  $\theta$  des coordonnées polaires  $[r : \theta]$  d'un point  $(x, y)$  dans le cas  $x > 0, y < 0$ .  
Puis faire les cas où  $x < 0$ .
2. La fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  admet-elle une limite au point  $(0, 0)$ ? Même question avec  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ , puis  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ .
3. Montrer que pour la fonction définie par  $f(x, y) = \dots$  alors  $f$  admet une même limite en  $(0, 0)$  le long de chaque rayon, et que pourtant  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

### Auteurs du chapitre

D'après des cours de Abdellah Hanani (Lille), Goulwen Fichou et Stéphane Leborgne (Rennes), Laurent Pujo-Menjouet (Lyon).

Revu et augmenté par Arnaud Bodin.

Relu par Barbara Tumpach et Vianney Combet.