Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

Exo7

Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

- Matrices et systèmes linéaires
- Matrices inversibles et systèmes linéaires
- Les matrices élémentaires
- Équivalence à une matrice échelonnée
- Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

- Matrices et systèmes linéaires
- Matrices inversibles et systèmes linéaires
- Les matrices élémentaires
- Équivalence à une matrice échelonnée
- Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

- Matrices et systèmes linéaires
- Matrices inversibles et systèmes linéaires
- Les matrices élémentaires
- Équivalence à une matrice échelonnée
- Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

Exo7

- Matrices et systèmes linéaires
- Matrices inversibles et systèmes linéaires
- Les matrices élémentaires
- Équivalence à une matrice échelonnée
- Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

- Matrices et systèmes linéaires
- Matrices inversibles et systèmes linéaires
- Les matrices élémentaires
- Équivalence à une matrice échelonnée
- Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Matrices

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

Exo7

- Matrices et systèmes linéaires
- Matrices inversibles et systèmes linéaires
- Les matrices élémentaires
- Équivalence à une matrice échelonnée
- Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Le système linéaire à n lignes et p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\ x_1 & + & a_{12}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\ x_p & = & b_1 \\ a_{21}\ x_1 & + & a_{22}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\ x_p & = & b_2 \\ & & \dots & & & & & & \\ a_{n1}\ x_1 & + & a_{n2}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\ x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Le système linéaire à n lignes et p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\ x_1 & + & a_{12}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\ x_p & = & b_1 \\ a_{21}\ x_1 & + & a_{22}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\ x_p & = & b_2 \\ & & \dots & & & & & & \\ a_{n1}\ x_1 & + & a_{n2}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\ x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

s'écrit aussi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Le système linéaire à n lignes et p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\ x_1 & + & a_{12}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\ x_p & = & b_1 \\ a_{21}\ x_1 & + & a_{22}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\ x_p & = & b_2 \\ & & \dots & & & & & & \\ a_{n1}\ x_1 & + & a_{n2}\ x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\ x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

s'écrit aussi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Théorème

Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions

Cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Proposition

Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

Cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Proposition

Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff IX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

- Trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

- Trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$
- Le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire sur A

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

- Trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$
- Le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire sur A
- Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, ce qui entraîne que les matrices élémentaires sont inversibles

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I
- $E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I
- $E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I
- $E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A
- $E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2} \times A$

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I
- $E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A
- $E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: ***multiplier une ligne par un réel non nul***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I
- $E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A
- $E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3} y_1 & \frac{1}{3} y_2 & \frac{1}{3} y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I à la i-ème ligne de I

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I à la i-ème ligne de I

- $E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I à la i-ème ligne de I

- $E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I à la i-ème ligne de I

- $E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A

- $E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I à la i-ème ligne de I

- $E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A

- $E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : ***ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j***
- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I à la i-ème ligne de I
- $E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A
- $E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 7z_1 & x_2 - 7z_2 & x_3 - 7z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A$

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

- $L_i \leftrightarrow L_j$: ***échanger deux lignes***
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A
- $E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

Définition

Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$

Définition

Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$

Définition

Une matrice est ***échelonnée*** si :

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne (et s'arrête s'il n'y a plus que des zéros)

Définition

Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$

Définition

Une matrice est ***échelonnée*** si :

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne (et s'arrête s'il n'y a plus que des zéros)

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$

Définition

Une matrice est ***échelonnée*** si :

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne (et s'arrête s'il n'y a plus que des zéros)

Elle est ***échelonnée réduite*** si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$

Définition

Une matrice est ***échelonnée*** si :

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne (et s'arrête s'il n'y a plus que des zéros)

Elle est ***échelonnée réduite*** si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème

Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Théorème

La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Théorème

La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I

Corollaire

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A est inversible

(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution X

Théorème

Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

Partie A. Passage à une forme échelonnée
Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i $(L_1 \leftrightarrow L_i) \mapsto$ A.2

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i $(L_1 \leftrightarrow L_i) \mapsto$ A.2

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i ($L_1 \leftrightarrow L_i$) $\mapsto$ A.2

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

Étape A.2. *Élimination*

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i $(L_1 \leftrightarrow L_i)$ $\mapsto$ A.2

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

Étape A.2. *Élimination*

- On ne touche plus à la ligne 1

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i $(L_1 \leftrightarrow L_i) \mapsto$ A.2

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

Étape A.2. *Élimination*

- On ne touche plus à la ligne 1
- On élimine tous les termes a'_{i1} $(i \geqslant 2)$ sous le pivot

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i $(L_1 \leftrightarrow L_i) \mapsto$ A.2

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

Étape A.2. *Élimination*

- On ne touche plus à la ligne 1
- On élimine tous les termes a'_{i1} $(i \geqslant 2)$ sous le pivot
- $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} L_1 \quad , \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{31}}{a'_{11}} L_1 \quad \ldots$

Partie A. Passage à une forme échelonnée

Étape A.1. *Choix du pivot*

- Soit la première colonne ne contient que des zéros $\mapsto$ A.3
- Un terme $a_{i1} \neq 0$ est un ***pivot***
- On échange les lignes 1 et i $(L_1 \leftrightarrow L_i) \mapsto$ A.2

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix} \qquad A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{n2} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix}$$

Étape A.2. *Élimination*

- On ne touche plus à la ligne 1
- On élimine tous les termes a'_{i1} $(i \geqslant 2)$ sous le pivot
- $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} L_1 \quad , \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{31}}{a'_{11}} L_1 \quad \ldots$

Étape A.3. *Boucle*

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix}$$

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix}$$

- La première colonne est celle d'une matrice échelonnée

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix}$$

- La première colonne est celle d'une matrice échelonnée
- Si $a_{11}^1 \neq 0$ on conserve aussi la première ligne, $\mapsto$ A.1 appliquée à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix}$$

- La première colonne est celle d'une matrice échelonnée
- Si $a_{11}^1 \neq 0$ on conserve aussi la première ligne, $\mapsto$ A.1 appliquée à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$
- Si $a_{11}^1 = 0$, $\mapsto$ A.1 à la sous-matrice $n \times (p-1)$

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \cdots & a^1_{1j} & \cdots & a^1_{1p} \\ 0 & a^1_{22} & \cdots & a^1_{2j} & \cdots & a^1_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^1_{i2} & \cdots & a^1_{ij} & \cdots & a^1_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \cdots & a^1_{nj} & \cdots & a^1_{np} \end{pmatrix} \qquad A \sim \begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \cdots & a^1_{1j} & \cdots & a^1_{1p} \\ 0 & a^2_{22} & \cdots & a^2_{2j} & \cdots & a^2_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^2_{ij} & \cdots & a^2_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^2_{nj} & \cdots & a^2_{np} \end{pmatrix}$$

- La première colonne est celle d'une matrice échelonnée
- Si $a^1_{11} \neq 0$ on conserve aussi la première ligne, $\mapsto$ A.1 appliquée à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$
- Si $a^1_{11} = 0$, $\mapsto$ A.1 à la sous-matrice $n \times (p-1)$

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix} \qquad A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2j}^2 & \cdots & a_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij}^2 & \cdots & a_{ip}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj}^2 & \cdots & a_{np}^2 \end{pmatrix}$$

- La première colonne est celle d'une matrice échelonnée
- Si $a_{11}^1 \neq 0$ on conserve aussi la première ligne, $\mapsto$ A.1 appliquée à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$
- Si $a_{11}^1 = 0$, $\mapsto$ A.1 à la sous-matrice $n \times (p-1)$
- Chaque itération de la boucle s'applique à une matrice qui a une colonne de moins que la précédente

Étape A.3. *Boucle*

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix} \quad A \sim \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2j}^2 & \cdots & a_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij}^2 & \cdots & a_{ip}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj}^2 & \cdots & a_{np}^2 \end{pmatrix}$$

- La première colonne est celle d'une matrice échelonnée
- Si $a_{11}^1 \neq 0$ on conserve aussi la première ligne, $\mapsto$ A.1 appliquée à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$
- Si $a_{11}^1 = 0$, $\mapsto$ A.1 à la sous-matrice $n \times (p-1)$
- Chaque itération de la boucle s'applique à une matrice qui a une colonne de moins que la précédente
- Au bout d'au plus $p-1$ itérations de la boucle, on aura obtenu une matrice échelonnée

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. ***Homothéties***

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle
- On multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle
- On multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément
- Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle
- On multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément
- Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$
- Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivot

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle
- On multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément
- Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$
- Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivot

Étape B.2. *Élimination*

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle
- On multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément
- Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$
- Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivot

Étape B.2. *Élimination*

- On élimine les termes situés au-dessus des positions de pivot en procédant à partir du bas à droite de la matrice

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite

Étape B.1. *Homothéties*

- On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle
- On multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément
- Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$
- Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivot

Étape B.2. *Élimination*

- On élimine les termes situés au-dessus des positions de pivot en procédant à partir du bas à droite de la matrice
- Ceci crée une matrice échelonnée et réduite

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Passage à une forme échelonnée

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Passage à une forme échelonnée

- Étape A.1. Choix du pivot $a_{11}^1 = 1$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Passage à une forme échelonnée

- Étape A.1. Choix du pivot $a_{11}^1 = 1$
- Étape A.2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Passage à une forme échelonnée

- Étape A.1. Choix du pivot $a_{11}^{1} = 1$
- Étape A.2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
- Étape A.1. Choix du pivot $a_{22}^{2} = 2$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Passage à une forme échelonnée

- Étape A.1. Choix du pivot $a_{11}^1 = 1$
- Étape A.2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
- Étape A.1. Choix du pivot $a_{22}^2 = 2$
- Étape A.2. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ $\qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Passage à une forme échelonnée

- Étape A.1. Choix du pivot $a_{11}^1 = 1$
- Étape A.2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
- Étape A.1. Choix du pivot $a_{22}^2 = 2$
- Étape A.2. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
- Cette matrice est échelonnée

Exemple

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Passage à une forme échelonnée réduite

Exemple

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Passage à une forme échelonnée réduite

- Étape B.1. $L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Passage à une forme échelonnée réduite

- Étape B.1. $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Étape B.2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Passage à une forme échelonnée réduite

- Étape B.1. $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Étape B.2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Étape B.2. $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Passage à une forme échelonnée réduite

- Étape B.1. $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Étape B.2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Étape B.2. $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Cette matrice est échelonnée et réduite

Mini-exercices

1. Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice : $\begin{cases} 2x+4y=7 \\ -2x+3y=-14 \end{cases}$, $\begin{cases} x+z=1 \\ -2y+3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+t=\alpha \\ x-2y=\beta \\ x+y+t=2 \\ y+t=4 \end{cases}$.
2. Écrire les matrices 4×4 correspondant aux opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2$, $L_1 \leftrightarrow L_4$. Sans calculs, écrire leurs inverses. Écrire la matrice 4×4 de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 + 3L_4$.
3. Écrire les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.