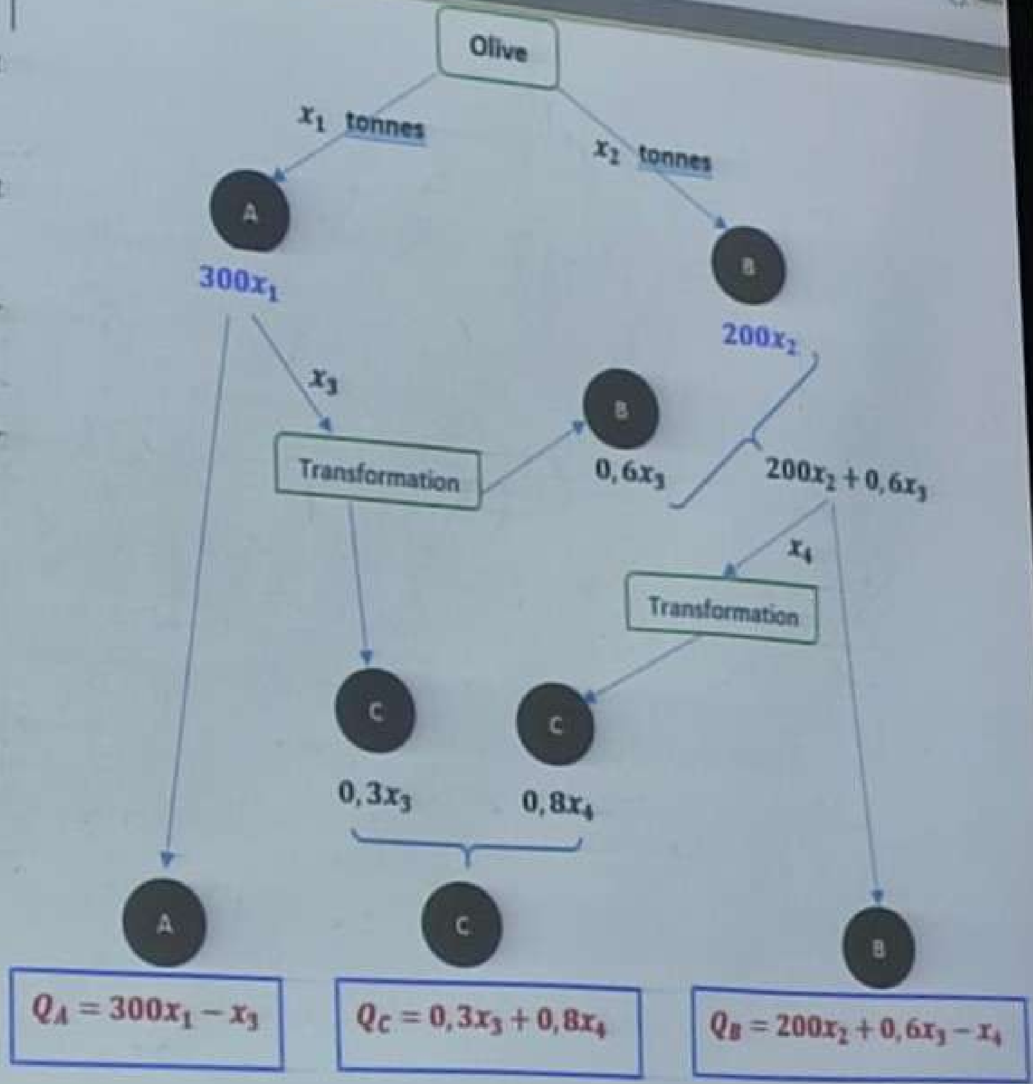
On considère les variables suivants :

- x_1 *nombre de tonnes d'olive à extraire pour la transformer en huile* **A**
- x_2 *nombre de tonnes d'olive à extraire pour la transformer en huile* **B**
- x_3 *nombre de litres d'huile* **A** *à transformer pour produire* **B** *et* **C**
- x_4 *nombre de litres d'huile* **B** *à transformer pour produire* **C**

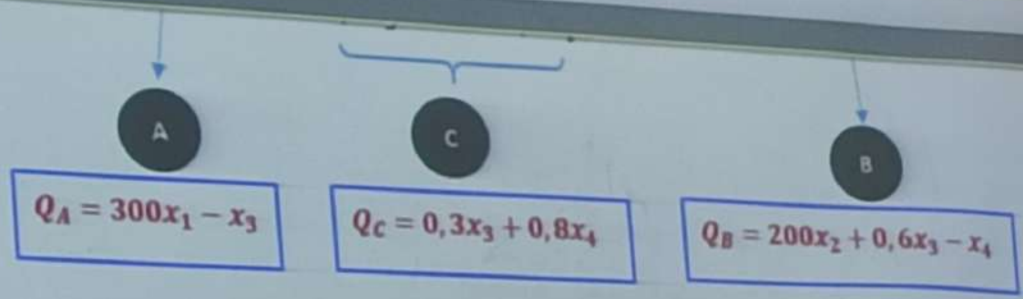
On a donc :

- **Prix de vente :** $V = 4Q_A + 6Q_B + 10Q_C$
- **Achat olive :** $A = 1000x_1 + 1000x_2$
- **Transformation Olive → huile :** $T = 0$
- **Raffinage huile :** $R = 0,5x_3 + 0,3x_4$
- **Profit:** $\mathbf{z = V - A - T - R}$



On obtient

- **Transformation Olive → huile :** $T = 0$
- **Raffinage huile :** $R = 0,5x_3 + 0,3x_4$
- **Profit:** $\mathbf{z = V - A - T - R}$



On obtient

$$
\begin{aligned}
z &= V - A - T - R \\
&= 4Q_A + 6Q_B + 10Q_C - (1000x_1 + 1000x_2) - 0 - (0,5x_3 + 0,3x_4) \\
&= 1200x_1 + 1200x_2 + 2,6x_3 + 2x_4 - 1000x_1 - 1000x_2 - 0,5x_3 - 0,3x_4 \\
&= 200x_1 + 200x_2 + 2,1x_3 + 1,7x_4
\end{aligned}
$$

sous les contraintes : $\quad [\mathrm{Max}]\ \mathbf{z = 200x_1 + 200x_2 + 2,1x_3 + 1,7x_4}$

$$
(PL)\begin{cases}
x_3 \leqslant 300x_1 \\
x_4 \leqslant 200x_2 + 0,6x_3 \\
Q_A \leqslant 3000 \\
Q_B \leqslant 3000 \\
Q_C \leqslant 2000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0
\end{cases}
\Longrightarrow \quad
(PL)\begin{cases}
-300x_1 + x_3 & \leqslant 0 \\
-200x_2 - 0,6x_3 + x_4 & \leqslant 0 \\
300x_1 - x_3 & \leqslant 3000 \\
200x_2 + 0,6x_3 - x_4 & \leqslant 3000 \\
0,3x_3 + 0,8x_4 & \leqslant 2000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqslant 0
\end{cases}
$$

Exercice 2 *On considère :*

- x_1 : *Nombre de barils de type (A) à transformer en essence*
- x_2 : *Nombre de barils de type (B) à transformer en essence*
- x_3 : *Nombre de barils de type (A) à transformer en fioul*
- x_4 : *Nombre de barils de type (B) à transformer en fioul*
- Q_E : *Quantité d'essence fabriquée* ($\mathbf{Q_E = x_1 + x_2}$)
- Q_F : *Quantité de fioul fabriquée* ($\mathbf{Q_F = x_3 + x_4}$)
- Q_A : *Quantité de barils de type (A) transformée* ($\mathbf{Q_A = x_1 + x_3}$)
- Q_B : *Quantité de barils de type (B) transformée* ($\mathbf{Q_B = x_2 + x_4}$)

On a le profit z est :

$$
\begin{aligned}
z &= \textit{Prix de vente} - \textit{Prix d'achat} - \text{coût de publicité} \\
&= 25 \times Q_E + 20 \times Q_F - (4 \times Q_A + 2 \times Q_B) - (2 \times Q_E + 1 \times Q_F) \\
&= 23 \times Q_E + 19 \times Q_F - 4 \times Q_A - 2 \times Q_B \\
&= 23\,(x_1 + x_2) + 19\,(x_3 + x_4) - 4\,(x_1 + x_3) - 2\,(x_2 + x_4) \\
&= 19x_1 + 21x_2 + 15x_3 + 17x_4
\end{aligned}
$$

$$= 19x_1 + 21x_2 + 15x_3 + 17x_4$$

Sous les contraintes suivantes :

$$(PL)\begin{cases} Q_A \leqslant 5000 \\ Q_B \leqslant 10000 \\ \dfrac{10x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2} \geqslant 8 \\ \dfrac{10x_3 + 5x_4}{x_3 + x_4} \geqslant 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

On obtient donc le programme linéaire (PL) *suivant :*

$$[\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 19x_1 + 21x_2 + 15x_3 + 17x_4}$$

$$(PL)\begin{cases} x_1 + x_3 \leqslant 5000 \\ x_2 + x_4 \leqslant 10000 \\ 2x_1 - 3x_2 \geqslant 0 \\ 4x_3 - x_4 \geqslant 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère

- x_1 *: le nombre de kg à traiter de brut 1*
- x_2 *: le nombre de kg à traiter de brut 2.*

Une fois les brut 1 et 2 sont traités on va les répartir comme suit :

- *Pour* **calibre A** *: on prends 20% de* x_1 *et 40% de* x_2 *soit* $Q_A = 0,2x_1 + 0,4x_2$
- *Pour* **calibre B** *: on prends 60% de* x_1 *et 40% de* x_2 *soit* $Q_B = 0,6x_1 + 0,4x_2$.
- *Pour* **calibre C** *: on prends 20% de* x_1 *et 20% de* x_2 *soit* $Q_C = 0,2x_1 + 0,2x_2$

La modélisation du problème peut s'écrire:

$$\begin{cases} [\mathrm{Max}]\ \mathbf{z = 5x_1 + 8x_2} \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \leqslant 640 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 \leqslant 800 \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 \leqslant 400 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow (PL) \begin{cases} [\mathrm{Max}]\ \mathbf{z = 5x_1 + 8x_2} \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 3200 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 4000 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2000 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(PLS) \begin{cases} [\mathrm{Max}]\ \mathbf{z = 5x_1 + 8x_2} \\ x_1 + 2x_2 + e_1 = 3200 \\ 3x_1 + 2x_2 + e_2 = 4000 \\ \ldots \end{cases}$$

$$
(PLS)\begin{cases}
[\text{Max}]\ \mathbf{z = 5x_1 + 8x_2}\\
x_1 + 2x_2 + e_1 = 3200\\
3x_1 + 2x_2 + e_2 = 4000\\
x_1 + x_2 + e_3 = 2000\\
x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0
\end{cases}
$$

On commence par la solution de base initiale suivante : $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 3200, 4000, 2000)$.
Puisque $z = 5x_1 + 8x_2$, *on va choisir* x_2 *comme variable entrante* ($x_1 = 0$).
On écrit les variables en base en fonction des variables hors base :

$$
\begin{cases}
e_1 = 3200 - x_1 - 2x_2\\
e_2 = 4000 - 3x_1 - 2x_2\\
e_3 = 2000 - x_1 - x_2
\end{cases}
\overset{x_1=0}{\Longrightarrow}
\begin{cases}
e_1 = 3200 - 2x_2 \geq 0\\
e_2 = 4000 - 2x_2 \geq 0\\
e_3 = 2000 - x_2 \geq 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
x_2 \leq 1600\\
x_2 \leq 2000\\
x_2 \leq 2000
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
x_2 = 1600\\
e_2 = 800\\
e_3 = 400\\
e_1 = 0\\
x_1 = 0
\end{cases}
$$

On a :
$$
\begin{aligned}
z &= 5x_1 + 8x_2\\
&= 5x_1 + 4(3200 - x_1 - e_1)\\
&= 12800 + x_1 - 4e_1 \Rightarrow \textbf{No stop.}
\end{aligned}
$$

On va choisir x_1 *comme variable entrante* ($e_1 = 0$).
On écrit les variables en base en fonction des variables hors base :

$$
\begin{cases}
x_2 = 1600 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}e_1\\
e_2 = 4000 - 3x_1 - 2(1600 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}e_1)\\
\quad = 800 - 2x_1 + e_1\\
e_3 = 2000 - x_1 - (1600 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}e_1)\\
\quad = 400 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}e_1
\end{cases}
\overset{e_1=0}{\Longrightarrow}
\begin{cases}
x_2 = 1600 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0\\
e_2 = 800 - 2x_1 \geq 0\\
e_3 = 400 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 \leq 3200\\
x_1 \leq 400\\
x_1 \leq 800
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = 400\\
x_2 = 1400\\
e_3 = 200\\
e_1 = 0\\
e_2 = 0
\end{cases}
$$

On a :
$$
\begin{aligned}
z &= 12800 + x_1 - 4e_1\\
&= 12800 + \frac{1}{2}(800 + e_1 - e_2) - 4e_1\\
&= 13200 - \frac{7}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \Rightarrow \textbf{Stop.}
\end{aligned}
$$

Donc la solution optimale est : $\mathbf{x_1^* = 400}$, $\mathbf{x_2^* = 1400}$ *qui réalise l'objectif maximal* $\mathbf{z^* = 13200}$.

Exercice 4

1. On considère x_1 et x_2 le nombre de produit 1 et produit 2 à fabriquer respectivement. La modélisation du problème :

$$(\mathbf{P})\begin{cases}[\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 3x_1 + 5x_2}\\ x_1 \leqslant 4\\ 2x_2 \leqslant 12\\ 3x_1+2x_2 \leqslant 18\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases} \Longrightarrow (\mathbf{PS})\begin{cases}[\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 3x_1 + 5x_2}\\ x_1+e_1 = 4\\ x_2+e_2 = 6\\ 3x_1+2x_2+e_3 = 18\\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0\end{cases}.$$

2. On commence par la solution de base initiale suivante : $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 4, 6, 18)$.
Puisque $z = 3x_1 + 5x_2$ On choisit x_2 comme variable entrante $(x_1 = 0)$

$$\begin{cases}e_1 = 4 - x_1\\ e_2 = 6 - x_2\\ e_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2\end{cases} \overset{x_1=0}{\Longrightarrow} \begin{cases}e_1 = 4 \geq 0\\ e_2 = 6 - x_2 \geq 0\\ e_3 = 18 - 2x_2 \geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_2 \leq 6\\ x_2 \leq 9\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_2 = 6 & e_2 = 0\\ e_1 = 4 & x_1 = 0\\ e_3 = 6\end{cases}$$

On a $z = 3x_1 + 5x_2 = 3x_1 + 5(6 - e_2) = 30 + 3x_1 - 5e_2 \Rightarrow$ **No stop**

$\Rightarrow$ On choisit x_1 comme variable entrante ($e_2 = 0$)

$$\begin{cases}e_1 = 4 - x_1\\ x_2 = 6 - e_2\\ e_3 = 18 - 3x_1 - 2(6 - e_2) = 6 - 3x_1 + 2e_2\end{cases} \overset{e_2=0}{\Longrightarrow} \begin{cases}e_1 = 4 - x_1 \geq 0\\ x_2 = 6 \geq 0\\ e_3 = 6 - 3x_1 \geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 \leq 4\\ x_1 \leq 2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 = 2 & e_2 = 0\\ x_2 = 6 & e_3 = 0\\ e_1 = 2\end{cases}$$

On a $z = 30 + 3x_1 - 5e_2 = 30 + (6 + 2e_2 - e_3) - 5e_2 = 36 - 3e_2 - e_3 \Rightarrow$ **Stop** . Donc $\mathbf{z^* = 36,\ x_1^* = 2,\ x_2^* = 6}$.

3. On remplace $c_1 = 3$ par $c_1' = 3 + \delta$. On a $z = (3+\delta)x_1 + 5x_2 = (3+\delta)(2 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3) + 5(6 - e_2)$

1. On considère x_1 et x_2 le nombre de produit 1 et produit 2 à fabriquer respectivement. La modélisation du problème :

$$(\mathbf{P})\begin{cases}[\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 3x_1 + 5x_2}\\ x_1 \leqslant 4\\ 2x_2 \leqslant 12\\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases} \Longrightarrow (\mathbf{PS})\begin{cases}[\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 3x_1 + 5x_2}\\ x_1 + e_1 = 4\\ x_2 + e_2 = 6\\ 3x_1 + 2x_2 + e_3 = 18\\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0\end{cases}.$$

2. On commence par la solution de base initiale suivante : $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 4, 6, 18)$.
Puisque $z = 3x_1 + 5x_2$ On choisit x_2 comme variable entrante $(x_1 = 0)$

$$\begin{cases}e_1 = 4 - x_1\\ e_2 = 6 - x_2\\ e_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2\end{cases} \overset{x_1=0}{\Longrightarrow} \begin{cases}e_1 = 4 \geq 0\\ e_2 = 6 - x_2 \geq 0\\ e_3 = 18 - 2x_2 \geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_2 \leq 6\\ x_2 \leq 9\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_2 = 6 \quad e_2 = 0\\ e_1 = 4 \quad x_1 = 0\\ e_3 = 6\end{cases}$$

On a $z = 3x_1 + 5x_2 = 3x_1 + 5(6 - e_2) = 30 + 3x_1 - 5e_2 \Rightarrow$ **No stop**
$\Rightarrow$ On choisit x_1 comme variable entrante ($e_2 = 0$)

$$\begin{cases}e_1 = 4 - x_1\\ x_2 = 6 - e_2\\ e_3 = 18 - 3x_1 - 2(6 - e_2) = 6 - 3x_1 + 2e_2\end{cases} \overset{e_2=0}{\Longrightarrow} \begin{cases}e_1 = 4 - x_1 \geq 0\\ x_2 = 6 \geq 0\\ e_3 = 6 - 3x_1 \geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 \leq 4\\ x_1 \leq 2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 = 2 \quad e_2 = 0\\ x_2 = 6 \quad e_3 = 0\\ e_1 = 2\end{cases}$$

On a $z = 30 + 3x_1 - 5e_2 = 30 + (6 + 2e_2 - e_3) - 5e_2 = 36 - 3e_2 - e_3 \Rightarrow$ **Stop** . Donc $\mathbf{z^* = 36}$, $\mathbf{x_1^* = 2}$, $\mathbf{x_2^* = 6}$.

3. On remplace $c_1 = 3$ par $c_1' = 3 + \delta$. On a $z = (3 + \delta)x_1 + 5x_2 = (3 + \delta)(2 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3) + 5(6 - e_2)$
Donc $z = (36 + 2\delta) - \frac{9 - 2\delta}{3}e_2 - \frac{3 + \delta}{3}e_3$
Afin de garder la même solution optimale, il faut avoir $9 - 2\delta \geq 0$ et $3 + \delta \geq 0$.
On obtient $-3 \leq \delta \leq 4,5$, $0 \leq c_1' \leq 7,5$ et $30 \leq z^* \leq 45$

On a $z = 3x_1 + 5x_2 = 3x_1 + 5(6 - e_2) = 30 + 3x_1 - 5e_2 \Rightarrow$ **No stop**

$\Rightarrow$ *On choisit* x_1 *comme variable entrante* ($e_2 = 0$)

$$\begin{cases} e_1 = 4 - x_1 \\ x_2 = 6 - e_2 \\ e_3 = 18 - 3x_1 - 2(6 - e_2) = 6 - 3x_1 + 2e_2 \end{cases} \xRightarrow{e_2=0} \begin{cases} e_1 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_2 = 6 \geq 0 \\ e_3 = 6 - 3x_1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & e_2 = 0 \\ x_2 = 6 & e_3 = 0 \\ e_1 = 2 \end{cases}$$

On a $z = 30 + 3x_1 - 5e_2 = 30 + (6 + 2e_2 - e_3) - 5e_2 = 36 - 3e_2 - e_3 \Rightarrow$ **Stop** . *Donc* $\mathbf{z^* = 36, x_1^* = 2, x_2^* = 6}$.

3. *On remplace* $c_1 = 3$ *par* $c_1' = 3 + \delta$. *On a* $z = (3 + \delta)x_1 + 5x_2 = (3 + \delta)(2 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3) + 5(6 - e_2)$

   Donc $z = (36 + 2\delta) - \frac{9-2\delta}{3}e_2 - \frac{3+\delta}{3}e_3$

   Afin de garder la même solution optimale, il faut avoir $9 - 2\delta \geq 0$ *et* $3 + \delta \geq 0$.

   On obtient $-3 \leq \delta \leq 4,5$, $0 \leq c_1' \leq 7,5$ *et* $30 \leq z^* \leq 45$

4. *On remplace* $b_1 = 4$ *par* $b_1' = 4 + \Delta$. *On a donc*

$$\begin{cases} x_1 + e_1 = 4 + \Delta \\ x_2 + e_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + e_3 = 18 \end{cases} . \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = 4 + \Delta - x_1 \\ x_2 = 6 - e_2 \\ 3x_1 = 18 - 2x_2 - e_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3e_1 = 12 + 3\Delta - 3x_1 \\ x_2 = 6 - e_2 \\ 3x_1 = 18 - 2(6 - e_2) - e_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} [\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 36 - 3e_2 - e_3} \\ 3e_1 = 6 + 3\Delta - 2e_2 + e_3 \\ x_2 = 6 - e_2 \\ 3x_1 = 6 + 2e_2 - e_3 \end{cases} . \xRightarrow{e_2=e_3=0} \begin{cases} [\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 36} \\ e_1 = 2 + \Delta \geq 0 \\ x_2 = 6 \geq 0 \\ x_1 = 2 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient $\Delta \geq -2$, $b_1' \geq 2$ *et* $z^* = 36$

5. *On considérons* y_1, y_2 *et* y_3 *les prix de location d'une heure des usine 1, 2 et 3 respectivement. On a le programme dual*

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3e_1 = 6 + 3\Delta - 2e_2 + e_3 \\ x_2 = 6 - e_2 \\ 3x_1 = 6 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \xrightarrow{e_2=e_3=0} \begin{cases} e_1 = 2 + \Delta \geq 0 \\ x_2 = 6 \geq 0 \\ x_1 = 2 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient $\Delta \geq -2$, $b_1' \geq 2$ et $z^* = 36$

5. On considérons y_1, y_2 et y_3 les prix de location d'une heure des usine 1, 2 et 3 respectivement. On a le programme dual

$$(\mathbf{Q}) \begin{cases} [\mathbf{Min}]\ \mathbf{w} = \mathbf{4y_1 + 12y_2 + 18y_3} \\ y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. La solution du programme primal $(\mathbf{P})$ est $\mathbf{x_1^* = 2}$ et $\mathbf{x_2^* = 6}$. Dans le primal $(\mathbf{P})$, on a la première contrainte est stricte et les variables de décision optimales $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ donc

$$\begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_1^* + 3y_3^* = 3 \\ 2y_2^* + 2y_3^* = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 1,5 \\ y_3^* = 1 \\ w^* = 36 \end{cases}$$

7. On remplace $c_1 = 4$ par $c_1' = 4 + \delta$,

$$\begin{cases} [\mathbf{Min}]\ \mathbf{w} = (\mathbf{4} + \delta)\mathbf{y_1} + \mathbf{12y_2 + 18y_3} \\ y_1 + 3y_3 - a_1 = 3 \\ 2y_2 + 2y_3 - a_2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{y_1}{3} \\ y_3 = 1 + \dfrac{a_1}{3} - \dfrac{y_1}{3} \end{cases}$$

5. *On considérons* y_1, y_2 *et* y_3 *les prix de location d'une heure des usine 1, 2 et 3 respectivement. On a le programme dual*

$$(\mathbf{Q})\begin{cases}[\text{Min}]\ \mathbf{w} = \mathbf{4y_1} + \mathbf{12y_2} + \mathbf{18y_3}\\ y_1 + 3y_3 \geq 3\\ 2y_2 + 2y_3 \geq 5\\ y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{cases}$$

6. *La solution du programme primal* $(\mathbf{P})$ *est* $\mathbf{x_1^* = 2}$ *et* $\mathbf{x_2^* = 6}$. *Dans le primal* $(\mathbf{P})$, *on a la première contrainte est stricte et les variables de décision optimales* $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ *donc*

$$\begin{cases} y_1^* = 0\\ y_1^* + 3y_3^* = 3\\ 2y_2^* + 2y_3^* = 5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1^* = 0\\ y_2^* = 1,5\\ y_3^* = 1\\ w^* = 36\end{cases}$$

7. *On remplace* $c_1 = 4$ *par* $c_1' = 4 + \delta$,

$$\begin{cases}[\text{Min}]\ \mathbf{w} = (4+\delta)\mathbf{y_1} + \mathbf{12y_2} + \mathbf{18y_3}\\ y_1 + 3y_3 - a_1 = 3\\ 2y_2 + 2y_3 - a_2 = 5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{y_1}{3}\\ y_3 = 1 + \dfrac{a_1}{3} - \dfrac{y_1}{3}\\ [\text{Min}]\ \mathbf{w} = \mathbf{36} + \mathbf{2a_1} + \mathbf{6a_2} + (\mathbf{2}+\delta)\mathbf{y_1}\end{cases}$$

On doit avoir $2 + \delta \geq 0$ *d'où* $\delta \geq -2$ *et* $c_1' \geq 2$.