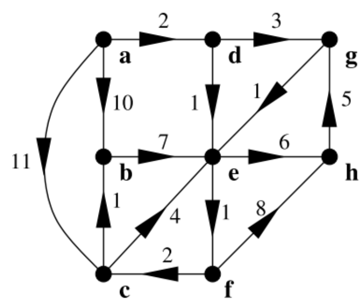
Cycle Ingénieur
TD N° 2

R.O : graphes et plus court chemin

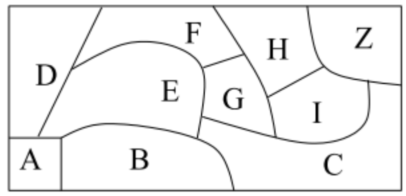
Exercice 1

On considère le graphe orienté et pondéré (valué) suivant :



1. *Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour calculer une arborescence des plus courts chemins issus du sommet* ***a***.
2. *La longueur de l'arc* ***g*** $\rightarrow$ ***e*** *est en fait* ***-9***.
   Refaire la question précédente. Commentez le résultat obtenu.
3. *Utiliser cette fois l'algorithme de Bellman-Ford pour trouver une arborescence des plus courts chemins issue du sommet* ***a***. *On traitera les arcs selon l'ordre alphabétique.*
4. *Une seconde modification a lieu, la longueur de l'arc* ***f*** $\rightarrow$ ***h*** *est maintenant de* ***2*** *(la longueur de* ***g*** $\rightarrow$ ***e*** *est toujours* ***-9****).*
   Serait-il judicieux de relancer l'algorithme de Bellman-Ford?

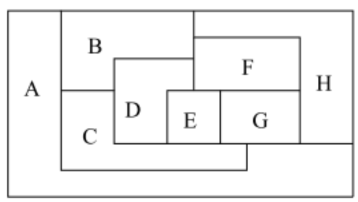
Exercice 2
Le dessin ci-dessous représente différents pays sur une île.



Une personne, dans le pays **A**, *veut s'enfuir dans le pays* **Z** *en franchissant chaque frontière parmi toutes les frontières une fois (pour brouiller les pistes) mais en ne franchissant pas deux fois une même frontière (pour ne pas être reconnu).*

1. *Modéliser ce problème par un graphe dont les sommets sont les pays et chaque arête de ce graphe représente l'existence d'une frontière commune entre les villes constituant les extrémités de cette arête.*
2. *Quelle propriété doit être vérifiée par ce graphe pour ne pas passer par la même frontière deux fois?*
3. *Est-ce que cette personne peut réaliser son objectif?*

Exercice 3
Le dessin ci-contre représente différentes régions touristiques dans le sud du Maroc.



Un guide souhaite organiser un circuit touristique passant une fois et une seule par chaque région (sans sortir de la carte).

1. *Modéliser ce problème par un graphe dont les sommets sont les régions touristiques et chaque arête de ce graphe représente l'existence d'une frontière commune entre les régions constituant les extrémités de cette arête.*
2. *Quelle propriété doit être vérifiée par ce graphe pour passer une fois et une seule par chaque région?*
3. *Est-ce que ce guide peut réaliser son objectif?*

Exercice 4
Dans un pays où la sécurité des chemins n'est pas assurée, on doit aller d'une ville **X** *à une ville* **Y** *. Le réseau routier est donné par un ensemble de villes et un ensemble de tronçons de route joignant ces villes.*
Pour chaque tronçon $\mathbf{t_i}$ *de route, on connait la probabilité* $\mathbf{p_i}$ *de se faire dépouiller sur le tronçon. On suppose que le risque de se faire dépouiller dans un tronçon n'influence pas sur les autres tronçons (les événements* $\mathbf{t_i}$ *sont indépendants).*

1. *Modéliser ce problème par un graphe.*
2. *Comment trouver le chemin de* **X** *à* **Y** *qui minimise la probabilité de se faire dépouiller? (proposer une transformation sur le graphe précédent).*

Exercice 5 Change de devises
On s'intéresse ici au problème de conversion de monnaie d'une devise en une autre. On dispose au départ d'un ensemble de conversions possibles d'une devise **i** *en une devise* **j** *et du taux de conversion* $\mathbf{t_{i,j}}$ *(Attention que la conversion n'est pas symétrique et il se peut même qu'elle soit possible dans un sens et pas dans l'autre).*
Voici un tableau de conversions d'un bureau de change (chaque ligne représente la devise source et les colonnes les devises cibles de conversion):

	euro	**yen**	**dollar**	**livre**
euro		130,89	1,14	0,84
yen			0,0087	
dollar		115,11		
livre	1,19	155,76		

Table 1: Les taux de change disponibles.

1. *Proposer une modélisation du problème par un graphe.*
2. *Proposer un algorithme pour résoudre le problème puis l'appliquer à l'exemple donné pour transformer de l'euro en dollar.*
3. *Une personne souhaite dégager du bénéfice en effectuant une série des opérations pour revenir à la monnaie initiale.*
   Comment s'assurer que cette anomalie n'est pas possible?