ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Recherche Opérationnelle
R.O.
Partie 2: Programmation Linéaire P.L

Pr. Abdessamad Kamouss

Cycle Ingénieur
ENSAM Casablanca

Contenu du module

1. Introduction à la recherche opérationnelle

2. Programmation linéaire
   - Modélisation en Programmation linéaire
   - Résolution des PL
   - Dualité
   - Post-Optimisation

3. Optimisation combinatoire
   - Généralités sur les graphes
   - Parcours eulériens et hamiltoniens des graphes
   - Problème de plus court chemin
   - Problèmes de transport et de flots

Contenu du module

1. Introduction à la recherche opérationnelle

2. Programmation linéaire
   - Modélisation en Programmation linéaire
   - Résolution des PL
   - Dualité
   - Post-Optimisation

3. Optimisation combinatoire
   - Généralités sur les graphes
   - Parcours eulériens et hamiltoniens des graphes
   - Problème de plus court chemin
   - Problèmes de transport et de flots

Programmation linéaire

La programmation linéaire est une branche de la recherche opérationnelle dont l'objectif est de **minimiser** ou **maximiser** une fonction numérique multilinéaire (dite **fonction objectif** ou **fonction économique**) à plusieurs variables, sachant que ces dernières sont liées moyennant **des équations ou des inéquations linéaires** dites **contraintes**.

De nombreux problèmes concrets provenant de domaines aussi divers que l'industrie lourde, le raffinage, les transports, l'agriculture, la gestion, la production, l'informatique, l'ingénierie... peuvent être modélisés comme des programmes linéaires, la résolution de ces modèles ayant permis l'obtention de gains substantiels.

Exemple (Production de voiture)

Un fabricant de voitures propose 2 modèles à la vente, des grosses voitures et des petites voitures. La grosse voiture est vendue à $16000€$ tandis que les petites voitures à 10000 €. Son problème vient de l'approvisionnement limité en deux matières premières, le caoutchouc et l'acier.
La construction d'une petite voiture nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier, tandis que celle d'une grosse voiture nécessite une unité de caoutchouc mais deux unités d'acier.

Matière	Caoutchouc	Acier
Disponibilités	**400 unités**	**600 unités**

Question

Le fabriquant souhaite savoir combien de petites et de grosses voitures doit-il produire afin de maximiser son chiffre d'affaires en prenant en compte son stock actuel.

Modélisation

Variables de décision :

- x : nombre de grosses voitures produites
- y : nombre de petites voitures produites

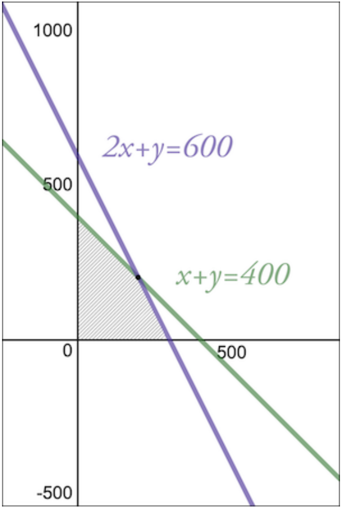
Fonction objectif :

$$[\mathbf{Max}] \ \ z = 16000x + 10000y$$

Contraintes :

- $x + y \leq 400$ (caoutchouc)
- $2x + y \leq 600$ (acier)
- $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Problème de production



Solution optimale $x^* = 200$, $y^* = 200$ et $z^* = 5.200.000$€.

Programme linéaire - Définitions

Définition

Un programme linéaire est une modélisation mathématique en R.O dans lequel les variables sont des réels qui doivent satisfaire un ensemble d'équations et/ ou d'inéquations linéaires (dites contraintes) et la valeur d'une fonction linéaire de ces variables (appelée fonction objectif) qu'on souhaite rendre minimum ou maximum.

Ingrédients principaux :

- Alternatives - variables de décision - inconnues du problème - variables d'activité.
- Restrictions - contraintes.
- Fonction à optimiser - fonction objectif - fonction économique.

Programme linéaire - Modélisation

Forme générale d'un programme linéaire :

$$
\begin{cases}
\text{Maximiser ou Minimiser } z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Sous les contraintes } \begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \leq, =, \geq b_1 \\
\sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \leq, =, \geq b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \leq, =, \geq b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Programme linéaire - Modélisation

- second membre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

- n var. de décision $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- matrice de format $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle

$$\max z \quad = cx$$

$$s.c. \qquad Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b$$

- coût (ou profit) $c = (c_1, c_2 \dots c_n)$

Programme linéaire - Forme Canonique

Forme canonique d'un PL :

Un programme linéaire est dit **canonique** s'il est écrit sous la forme suivante :

$$(PC)\begin{cases} [Max]\ \ z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques

Deux propriétés caractérisent la forme canonique.

- Toutes les variables sont astreintes à être positives ou nulles (non négatives).
- Toutes les contraintes sont des inéquations.

Programme linéaire - Forme Standard

Forme standard d'un PL :

Un programme linéaire est dit **standard** s'il est écrit sous la forme suivante :

$$(PC)\begin{cases}[Max]\ \ z = c^T x\\ Ax = b\\ x \geq 0\end{cases}$$

Remarques

Deux propriétés caractérisent la forme canonique.

- Toutes les variables sont astreintes à être positives ou nulles.
- Toutes les autres contraintes sont des équations.

Et-il possible de passer d'une forme à une autre forme d'un programme linéaire quelconque ?

Théorème

- *Tout programme linéaire sous* **forme standard** *peut être écrit sous* **forme canonique**, *et*
- *tout programme linéaire sous* **forme canonique** *peut être écrit sous* **forme standard**.

Programme linéaire - Passage entre Formes

- équation $\rightarrow$ inéquation

$$ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- inéquation $\rightarrow$ équation : ajouter une variable d'écart ou d'excédent

$$\begin{array}{lcl} ax \leq b & \Longleftrightarrow & ax + e = b, \quad e \geq 0 \\ ax \geq b & \Longleftrightarrow & ax - e = b, \quad e \geq 0 \end{array}$$

- variable non contrainte $\rightarrow$ variables positives

$$x \lesseqgtr 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = e_1 - e_2 \\ e_1,\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

- $\max \leftrightarrow \min$: * $\quad \min f(x) = -\max(-f(x))$

Algorithme pour construire le programme linéaire

Afin de transformer un problème en un programme linéaire, on suit l'algorithme suivant :

Algorithme de construction de programme linéaire

1. Identifier les variables de décision nécessaires ;
2. Identifier les contraintes du problème et les exprimer en fonction des variables d'activités ;
3. Identifier la fonction objectif ;
4. Ecrire le programme linéaire et spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Exemple d'un PL d'optimisation de production

Exemple (Problème de production)

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Chacun de ces produits demande pour son usinage, des heures de fabrications unitaires sur les machines A, B, C, D, E comme indiqué dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
P_1	0	1,5	2	3	3
P_2	3	4	3	2	0
Disponiblité de chaque machine	39h	60h	57h	70h	57h

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :

$M_1 = 1700$ UM $\quad M_2 = 3200$ UM

Question

Ecrire le programme linéaire qui détermine les nombres de produits de type P_1 et de type P_2 à fabriquer pour maximiser sa marge brute.

Exemple d'un PL d'optimisation de production

- Les variables : x_1 quantité à fabriquer de P_1 et x_2 quantité à fabriquer de P_2
- L'objectif :

$$\text{Maximiser } z = 1700x_1 + 3200x_2$$

- Les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} 3x_2 &\leq 39 \\ 1,5x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 57 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 70 \\ 3x_1 &\leq 57 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exemple d'un PL d'optimisation de production

Le PL correspondant

$$[Max]\; z = 1700x_1 + 3200x_2$$

$$\begin{cases} 3x_2 \leq 39 \\ 1,5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 57 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 70 \\ 3x_1 \leq 57 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple (Problème de transport)

Une entreprise de construction d'automobiles possède trois usines situées respectivement à Tanger, Kénitra et Agadir. Un certain métal nécessaire à la construction des véhicules est disponible aux stocks de Casa et El Jadida. Les quantités de ce métal nécessaires aux usines sont 400, 300 et 200 tonnes respectivement pour les usines de Tanger, Kénitra et Agadir chaque semaine, tandis que les quantités disponibles sont 550 et 350 tonnes par semaines respectivement à Casa et à El Jadida. Les coûts de transport unitaires sont comme suit :

	Tanger	Kénitra	Agadir
Casa	5	6	3
El Jadida	3	5	4

Exemple d'un PL d'optimisation de transport

Exemple (Suite)

Ce tableau signifie que pour envoyer x tonnes de Casa à Kénitra, par exemple, il en coûte $6x$ UM. Le problème consiste à déterminer un **plan de transport optimal**, c'est-à- dire à trouver quels sont les poids de métal à envoyer de chaque stock à chaque usine de sorte que :

(i) Les demandes soient satisfaites (chaque usine reçoit au moins la quantité de métal qui lui est nécessaire).

(ii) Les quantités demandées à chaque stock n'excèdent pas les quantités disponibles.

(iii) Les quantités envoyées sont positives ou nulles.

(iv) Le coût total du transport est rendu minimum compte tenu des contraintes ci-dessus.

Exemple d'un PL d'optimisation de transport

Le PL correspondant

Affectant au stock de Casa l'indice 1, au stock d'El Jadida l'indice 2 et aux trois usines les indices 1,2 et 3 respectivement pour Tanger, Kénitra et Agadir, on conviendra que x_{ij} représentera le nombre de tonnes de métal qui sont acheminées chaque semaine depuis le stock d'indice i vers l'usine d'indice j.
Le programme linéaire s'écrit alors :

$$[Min]z = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} \geq 300 \\ x_{13} + x_{23} \geq 200 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{cases}$$

Contenu du module

Résolution d'un programme linéaire

Méthodes de résolution de programme linéaire

Les méthodes suivantes sont les plus utilisées :

- Méthode graphique
- Méthode algébrique
- Méthode Simplexe
- Fonction Solveur
- Python en utilisant PuLP

Programme linéaire - Solutions

Définition (Solution admissible)

Une solution **admissible** est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes.

Définition (Solution optimale)

Une **solution optimale** est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.

Résolution de PL - Méthode Graphique

Description de la méthode

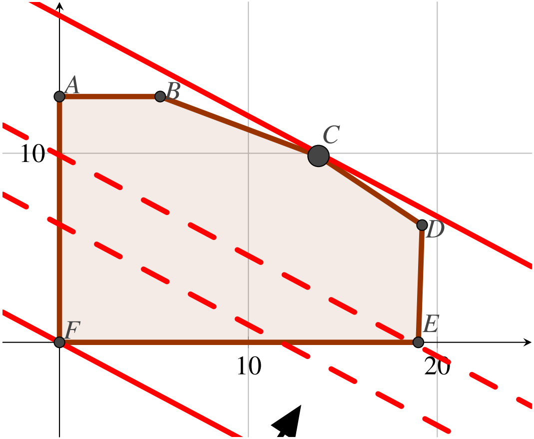
1. On trace les droites représentant les contraintes. Chaque inéquation est satisfaite dans un demi-plan limité par la droite d'équation correspondante.
2. Après avoir hachuré les parties du plan ne respectant pas les contraintes, il reste une zone non hachurée qui représente l'ensemble des solutions possibles (ensemble admissible).
3. Une solution optimale du programme linéaire est située en un sommet du domaine de l'ensemble des solutions possibles.

Résolution de PL - Méthode Graphique

Résolution du PL du problème de l'optimisation de la production

$$\begin{cases} [\mathbf{Max}]\ \mathbf{z = 1700x_1 + 3200x_2} \\ \\ 3x_2 \leq 39 \\ 1,5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 57 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 70 \\ 3x_1 \leq 57 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution de PL - Méthode Graphique



L'optimum se trouve au point **C** $\left(x_1 = \frac{96}{7} \text{ et } x_2 = \frac{69}{7}\right)$. Donc

$$z_{max} = \frac{384000}{7}.$$

Résolution de PL - Méthode Graphique

- L'ensemble des solutions réalisables est toujours un polyèdre (intersection de demi-espaces)
- Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont des hyperplans affines $(n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

Optimum atteint au bord

L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, est atteint en un ou plusieurs **sommets** du polyèdre.

Justification mathématique :

Les dérivées partielles de $f(X) = c.X$ ne s'annulent jamais, et le domaine $\left\{X / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ \ i \in \{1, \ldots, m\}\right\}$ est un compact.
Donc l'optimum est atteint au bord.

Solution de base

Considérons un PL dans sa forme standard qui sera noté **(PLS)** :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{Sous les contraintes } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \pm e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \pm e_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \pm e_m = b_m \\ x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \end{cases}$$

- n désigne le nombre de variables de décision $x_1,x_2,\ldots,x_n$.
- m le nombre des contraintes = le nombre de variables d'écart ou d'excédent $e_1,e_2,\ldots,e_m$.
- On obtient donc un système de m équations linéaires à $n' = n+m$ inconnues $(m < n')$: infinité de solutions possible.

Définition (Solutions de base)

Une solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n, e_1, e_2, \ldots, e_m)$ vérifiant les m contraintes de **(PLS)** est dite **solution de base** de **(PLS)** si au moins $(n' - m)$ de ses variables sont égales à 0.
Les variables fixées à zéro sont appelées variables hors base et les autres variables en base.

Remarque

Une solution de base est dites **dégénérée** lorsque certaines variables de base sont nulles.

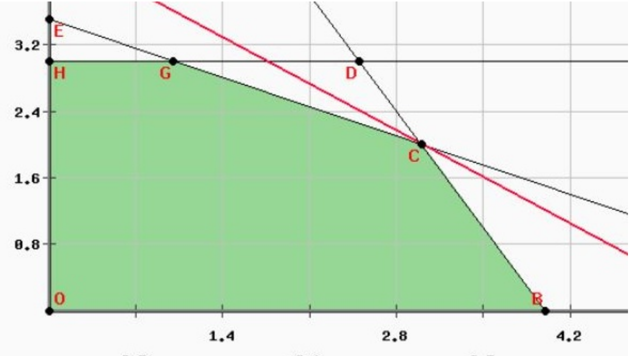
Définition (Solutions de base admissible)

Une solution de base dont tout les coordonnées sont **non négatives** est dite **solution de base admissible** de **(PLS)**.

PLS - Bases et points extrêmes

Considérons l'exemple suivant :

$$(PL)\begin{cases} 2x+y & \leq 8 \\ x+2y & \leq 7 \\ y & \leq 3 \\ x,\ y & \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (PLS)\begin{cases} 2x+y+e_1 & = 8 \\ x+2y+e_2 & = 7 \\ y+e_3 & = 3 \\ x,\ y,\ e_1,\ e_2 & ,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$



PLS - Bases et points extrêmes

$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	sol de base	admiss.	pt extrême
0	0	8	7	3	✓	✓	$(0,0)$
0	8	0	-9	-5	✓	×	
0	3.5	4.5	0	-0.5	✓	×	
0	3	5	1	0	✓	✓	$(0,3)$
4	0	0	3	3	✓	✓	$(4,0)$
7	0	-6	0	3	✓	×	
	0			0	×	×	
3	2	0	0	1	✓	✓	$(3,2)$
2.5	3	0	-1.5	0	✓	×	
1	3	3	0	0	✓	✓	$(1,3)$

PLS - Bases et points extrêmes

Base voisine et pivotage

Bases voisines

Deux sommets voisins correspondent à deux bases B et B' telles qu'on remplace une variable de B pour obtenir B'

$\Longrightarrow$ passer à un sommet voisin $=$ changer de base (base voisine).

C'est le principe du pivotage.

PLS - Simplexe

Algorithme du simplexe

- Dantzig, 1947.
- Algorithme itératif de résolution de problème de programmation linéaire.

Principe

A partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore la fonction objectif.

Propriété du problème

Soit X_0 un sommet non optimum.
Alors il existe X, un sommet voisin de X_0, tel que $f(X) > f(X_0)$.

$\Longrightarrow$ On peut procéder d'une manière itérative jusqu'à l'obtention d'une **solution optimale**

Résolution de PL - Méthode Simplexe : Exemple

- Transformer le **(PL)** sous sa forme standard **(PLS)** .

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{Maximizer } z & = 4x+5y \\ 2x+y & \leq 8 \\ x+2y & \leq 7 \\ y & \leq 3 \\ x,y & \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \text{Maximizer } z & = 4x+5y \\ 2x+y+e_1 & = 8 \\ x+2y+e_2 & = 7 \\ y+e_3 & = 3 \\ x,y,e_1,e_2,e_3 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- Trouver une solution de base admissible initiale. Par exemple $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y+e_1 = 8 \\ x+2y+e_2 = 7 \\ y+e_3 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1 = 8-2x-y \\ e_2 = 7-x-2y \\ e_3 = 3-y \end{array}\right.$$

On obtient donc $x = y = 0$ et $(e_1, e_2, e_3) = (8, 7, 3)$.
Donc $\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base.
La valeur de la fonction objectif est $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Résolution de PL - Méthode Simplexe : Exemple

- Déterminer la solution de base admissible voisine (une variable entrante et une variable sortante) qui permet d'augmenter la valeur de la fonction objectif z :

Regardons bien : $z = 4x + 5y$
On peut faire augmenter z en faisant entrer x ou y dans la base. On prends y vu qu'elle a le plus grand coefficient positif.
Quelle est la valeur maximale que pourra prendre y ?

$$\begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8 \\ e_2 = 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5 \\ e_3 = 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3 \end{cases}$$

Le max de y est 3 , pour $y = 3$, on obtenons $e_1 = 5 - x, e_2 = 1 - x$ et $e_3 = 0$.
Nouvelle base candidate :

$$\{e_1, e_2, e_3\} \cup \{y\} \setminus \{e_3\} = \{e_1, e_2, y\}$$

Résolution de PL - Méthode Simplexe : Exemple

$$\begin{cases} e_1 = 8 - 2x - y \\ e_2 = 7 - x - 2y \\ e_3 = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 5 - 2x + e_3 \\ e_2 = 1 - x + 2e_3 \\ y = 3 - e_3 \end{cases}$$

- On exprime z en fonction des variables hors base :

$$z = 4x + 5y$$

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

$\Longrightarrow$ Solution de base associée : $x = e_3 = 0$

$$\begin{cases} e_1 = 5 - 2x + e_3 = 5 \\ e_2 = 1 - x + 2e_3 = 1 \\ y = 3 - e_3 = 3 \end{cases}$$

Donc $(e_1, e_2, y) = (5, 1, 3)$ et la fonction objectif prends la valeur $\mathbf{z = 15}$.

Résolution de PL - Méthode Simplexe : Exemple

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer x
Quelle est la valeur maximale que pourra avoir x ?

$$\begin{cases} e_1 = 5 - 2x + e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5 \\ e_2 = 1 - x + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ \ y = 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{ pas de contrainte} \end{cases}$$

Le max de x est 1, et e_2 peut sortir de la base.
Nouvelle base candidate : $\{e_1, x, y\}$

$$\begin{cases} e_1 = 3 + 2e_2 - 3e_3 \\ x = 1 - e_2 + 2e_3 \\ y = 3 - e_3 \\ z = 19 - 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Résolution de PL - Méthode Simplexe : Exemple

$$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer e_3
Quelle est la valeur maximale que pourra avoir e_3 ?

$$\begin{cases} e_1 = 3 + 2e_2 - 3e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 1 \\ x = 1 - e_2 + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{ pas de contrainte} \\ y = 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 3 \end{cases}$$

Le max de e_3 est 1, et e_1 peut sortir de la base.
Nouvelle base candidate : $\{e_3, x, y\}$

$$\begin{cases} e_3 = 1 + 2/3e_2 - 1/3e_1 \\ x = 3 + 1/3e_2 + 2/3e_1 \\ y = 2 - 2/3e_2 + 1/3e_1 \\ z = 22 - 2e_2 - e_1 \end{cases}$$

Résolution de PL - Méthode Simplexe : Exemple

Finalement, on a :

$$z = 22 - 2e_2 - e_1$$

donc $z^* \leq 22$.

Or la solution de base $x = 3, y = 2$ et $e_3 = 1$ permet d'obtenir la valeur optimale de la fonction objectif $\mathbf{z^* = 22}$.

$\Longrightarrow$ Donc on a trouvé l'optimum

Contenu du module

Définition (Dualité)

- La dualité fait référence à la relation entre un problème d'optimisation appelé **"problème primal"** et un autre problème associé appelé **"problème dual"**.
- Chaque problème est formulé de manière complémentaire, et les solutions des deux problèmes sont liées.
- Cela permet :
  - d'obtenir des informations supplémentaires
  - de simplifier la résolution du problème primal.
  - avoir une autre vision du problème.
  - réaliser un équilibre sur un marché.
  - ...

Problème Dual - Vision économique

Exemple (Vision du Primal)

Une societé **META** fabrique, deux articles P_1 et P_2 qu'elle vend à des grossistes aux prix respectifs de 320 et 550 UM.
La fabrication de ces deux produits P_1 et P_2 nécessite l'utilisation de trois machines différentes M_1, M_2 et M_3 pendant des temps exprimés en heures dans le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3	Prix
P_1	50	30	20	320
P_2	10	20	15	550
Disponibilités	600	500	300	-

But

Maximiser le profit obtenu par la fabrication et la vente des produits P_1 et P_2.

Exemple (Vision du Primal)

On considère les variables suivantes :

- x_1 la quantité produite de P_1.
- x_2 la quantité produite de P_2.

On peut modiliser le problème **PRIMAL** de la manière suivante :

$$[Max]z = 320x_1 + 550x_2$$

$$sc \begin{cases} 50x_1 + 10x_2 \leq 600 \\ 30x_1 + 20x_2 \leq 500 \\ 20x_1 + 15x_2 \leq 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Exemple (Vision du Dual)

- Maintenant un autre fabriquant **VISION** souhaite produire les mêmes produits P_1 et P_2 mais ne dispose pas des disponibilités nécessaires au niveau de ses ateliers.
- Pour cela, il souhaite acheter l'utilisation des disponibilités **600h**, **500h** et **300h** des machines M_1, M_2 et M_3 respectivement pour produire P_1 et P_2.
- Il cherche à déterminer le prix unitaire d'achat de chaque heure de ces machines afin de faire une proposition minimale convaincante au fabriquant **META**.

But

Minimiser le coût d'acquisition des ressources M_1, M_2 et M_3 tout en restons concurrentiel.

Problème Dual - Vision économique

Exemple (Vision du Dual)

Pour cela on considère les variables suivantes :

- y_1 le coût d'achat d'une heure d'utilisation de M_1.
- y_2 le coût d'achat d'une heure d'utilisation de M_2.
- y_3 le coût d'achat d'une heure d'utilisation de M_3.

On peut modéliser donc le problème **DUAL** comme suit :

$$[Min]w = 600y_1 + 500y_2 + 300y_3$$

$$sc \quad \begin{cases} 50y_1 + 30y_2 + 20y_3 \geq 320 \\ 10y_1 + 20y_2 + 15y_3 \geq 550 \end{cases}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0.$$

Problèmes Primal - Dual - Vision économique

Pour le fabriquant META : On cherche à déterminer le plan de fabrication permettant de **maximiser** le profit.

Pour le fabriquant VISION : On cherche à déterminer l'offre d'achat permettant de **minimiser** le coût de sa production.

PRIMAL vs DUAL

$$[\mathbf{Max}]\mathbf{z} = \mathbf{320x_1} + \mathbf{550x_2}$$

$$sc \begin{cases} 50x_1 + 10x_2 \leq 600 \\ 30x_1 + 20x_2 \leq 500 \\ 20x_1 + 15x_2 \leq 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$[\mathbf{Min}]\mathbf{w} = \mathbf{600y_1} + \mathbf{500y_2} + \mathbf{300y_3}$$

$$sc \begin{cases} 50y_1 + 30y_2 + 20y_3 \geq 320 \\ 10y_1 + 20y_2 + 15y_3 \geq 550 \end{cases}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0.$$

Problèmes Primal - Dual

Dualité

- La dualité est un concept important en Recherche Opérationnelle.
- Tout programme linéaire admet un programme dual. Le premier est alors appelé **PRIMAL** et le second est son **DUAL**.
- Le **DUAL** a une interprétation économique différente du **PRIMAL** .
- Le **DUAL** et le **PRIMAL** sont liés et on peut trouver la solution de l'un dès que la solution de l'autre est bien connue.
- La recherche du DUAL peut souvent s'imposer si l'on voit que le PRIMAL parait difficile à résoudre.

Problèmes Primal - Dual : Définition

Matrice A de taille $m \times n$
Vecteurs $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Définition (problème dual)

Au programme linéaire **primal**

$$(PL) \begin{cases} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right] \\ \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

on associe le programme linéaire **dual**

$$(PLD) \begin{cases} \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \right] \\ \begin{cases} A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Programme linéaire primal **Programme linéaire dual**

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}} \left[\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \qquad \min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{\mathbf{m}}} \left[\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right]$$

$$(PL) \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \qquad (PLD) \begin{cases} A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases}$$

Comparaison primal/dual.

Primal		Dual
$\max(F)$	$\leftrightarrow$	$\min(G)$
coefficient $\mathbf{c}$ de F	$\leftrightarrow$	second membre $\mathbf{c}$
second membre $\mathbf{b}$	$\leftrightarrow$	coefficient $\mathbf{b}$ de G
m contraintes inégalités $(A\mathbf{x} \leq \mathbf{b})$	$\leftrightarrow$	m contraintes de positivité $(\mathbf{y} \geq 0)$
n contraintes de positivité $(\mathbf{x} \geq 0)$	$\leftrightarrow$	n contraintes inégalités $(A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c})$

Règles de passage :

Min	Max
Primal	Dual
Dual	Primal
Variable ≥ 0	Contrainte $\leq$
Variable ≤ 0	Contrainte $\geq$
Variable $\lesseqgtr 0$	Contrainte $=$
Contrainte $\leq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable $\lesseqgtr 0$
Contrainte $\geq$	Variable ≥ 0

Problèmes Primal - Dual

Exemple

Donner le proramme dual du programme primal suivant :

$$(PL) : \begin{cases} [Max] z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ sc \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme dual du primal précédent est :

$$(PLD) : \begin{cases} [Min] w = 3y_1 + 2y_2 + 10y_3 + y_4 \\ sc \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 4y_1 + y_3 + y_4 \leq 5 \\ y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \end{cases} \\ y_1 \lesseqgtr 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Problèmes Primal - Dual

Exemple

Donner le proramme dual du programme primal suivant :

$$(PL) : \begin{cases} [Max]z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ sc \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme dual du primal précédent est :

$$(PLD) : \begin{cases} [Min]w = 3y_1 + 2y_2 + 10y_3 + y_4 \\ sc \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 4y_1 + y_3 + y_4 \leq 5 \\ y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \end{cases} \\ y_1 \lesseqgtr 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Dualité - Théorèmes

Propriété

Le dual du dual est le primal.

Preuve. On considère un programme linéaire (PL) sous forme canonique. Alors son dual (PLD) est :

$$(PLD)\begin{cases}\min_{\mathbf{y}}\left[G(\mathbf{y})=\mathbf{b}^\top\mathbf{y}\right]\\ \begin{cases}A^\top\mathbf{y}\geq\mathbf{c}\\ \mathbf{y}\geq 0\end{cases}\end{cases}\iff(PLD)\begin{cases}\max_{\mathbf{y}}\left[-G(\mathbf{y})=(-\mathbf{b})^\top\mathbf{y}\right]\\ \begin{cases}-A^\top\mathbf{y}\leq-\mathbf{c}\\ \mathbf{y}\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

On prend le dual du dual :

$$(PLDD)\begin{cases}\min_{\mathbf{x}}\left[(-\mathbf{c})^\top\mathbf{x}\right]\\ \begin{cases}\left(-A^\top\right)^\top\mathbf{x}\geq-\mathbf{b}\\ \mathbf{x}\geq 0\end{cases}\end{cases}\iff(PL)\begin{cases}\max_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{c}^\top\mathbf{x}\right]\\ \begin{cases}A\mathbf{x}\leq\mathbf{b}\\ \mathbf{x}\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

Théorème (THÉORÈME FAIBLE DE DUALITÉ)

Soit $\mathbf{x}$ une solution réalisable d'un $(\mathbf{PL})$ sous forme canonique et $\mathbf{y}$ une solution réalisable du problème dual $(\mathbf{PLD})$. Alors :

1. $F(x) \leq G(y)$
2. *Si $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y})$ alors $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des solutions optimales de $(\mathbf{PL})$ et $(\mathbf{PLD})$ respectivement.*

Preuve.

1. On a $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ et $A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$.

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \left(A^\top \mathbf{y}\right)^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \underbrace{A\mathbf{x}}_{\leq \mathbf{b}} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = G(\mathbf{y})$$

2. Soient $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ des solutions réalisables de (PL) et (PLD) telles que $F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*)$. D'après 1., pour $\mathbf{x}$ solution réalisable de (PL), on a $F(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{y}^*) = F(\mathbf{x}^*)$ donc $\mathbf{x}^*$ est une solution réalisable optimale. Idem pour $\mathbf{y}^*$.

Théorème (THÉORÈME FORT DE DUALITÉ)

Si le problème primal (PL) admet une solution réalisable optimale $\mathbf{x}^*$ alors le problème dual (PLD) admet lui aussi une solution réalisable optimale $\mathbf{y}^*$ avec

$$F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*).$$

Preuve. Preuve. On suppose (PL) mis sous forme standard. S'il existe une solution réalisable optimale, alors il existe une solution de base réalisable optimale $\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b}$. On choisit alors

$$\mathbf{y}^* = \left(A_{B^*}^{-1}\right)^{\top} \mathbf{c}_{B^*}.$$

On montre que y^* est une solution réalisable optimale pour le dual (PLD).

Dualité - Théorèmes

Rappel : Il y a 3 cas possibles (et seulement 3) pour le problème primal (PL) :

1. il existe (au moins) une solution optimale.
2. l'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.
3. pas de solution réalisable $(\mathcal{D}_R = \emptyset)$.

Théorème (Relations entre solutions de (PL) et (PLD))

Etant donnés un problème primal (PL) *et son dual (PLD), une et une seule des trois situations suivantes a lieu*

a. *les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).*
b. *un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.*
c. *aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.*

Dualité - Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

On se place dans le cas (a) où les problèmes primal et dual possèdent chacun des solutions optimales (optimum fini).

Théorème (COPD)

Soient $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *des solutions réalisables respectivement du problème primal* (PL) *et du problème dual (PLD).*
Alors $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont des solutions réalisables optimales si et seulement si les conditions d'optimalité primal-dual (COPD) suivantes sont vérifiées :*

- *Si une* **contrainte** *est satisfaite en tant qu'une* **inégalité stricte** *(PL) ou (PLD) alors* **la variable correspondante** *de l'autre programme* **est nulle***.*
- *Si la valeur d'une* **variable** *dans (PL) ou (PLD) est* **strictement positive** *alors* **la contrainte correspondante** *de l'autre programme est* **une égalité***.*

Dualité - Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

$\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ solutions réalisables optimales de (PL) et (PLD) respectivement.

$$\begin{cases} \bullet \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* < b_i \quad \Rightarrow \quad y_i^* = 0 \\ \\ \bullet \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* < c_j \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bullet \quad y_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \\ \\ \bullet \quad x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \end{cases}$$

Exemple (Passage entre Primal et Dual)

Considérons le **(PL)** suivant et son dual **(PLD)** .

$$(\mathbf{PL}) \begin{cases} \text{[Max] } z & = 4x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 7 \\ x_2 & \leq 3 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{PLD}) \begin{cases} \text{[Min] } w = 8y_1 + 7y_2 + 3y_3 \\ 2y_1 + y_2 \quad \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale de **(PL)** est $x_1^* = 3$, $x_2^* = 2$ et $z^* = 22$.

- Vu que la 3ème contrainte du **(PL)** n'est pas saturée alors $y_3 = 0$.
- Vu que $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$ alors $2y_1 + y_2 = 4$ et $y_1 + 2y_2 + y_3 = 5$.

On obtient alors

$$y_1^* = 1, \quad y_2^* = 2, \quad y_3^* = 0, \quad \text{et} \quad w^* = 22$$

Contenu du module

Après l'obtention de la solution optimale d'un programme linéaire, il est judicieux de se poser la question sur la sensibilité de cette solution aux paramètres du programme linéaire ?

Motivation

Les paramètres utilisés dans la formulation d'un PL ne sont en général que des estimations, donc elle peuvent subir des variations.
D'autres parts, dans un environnement dynamique évolutif, plusieurs facteurs peuvent changer régulièrement.
L'analyse de **sensibilité post-optimale** permet de déterminer la sensibilité d'un PL par rapport aux données :

- Une variation des données entraine-t-elle un changement important de la solution optimale ?
- L'analyse poste-optimale permet de déterminer des intervalles de variations des données pour lesquels la base optimale n'est pas modifiée.

Post-Optimisation - Introduction

Objectifs

Prédire l'effet sur la fonction objectif suivant la variation des données :

1. coefficients de la fonction objectif
2. coefficients du membre de droite des contraintes

1. Supposons que l'un des coefficients $\mathbf{c_i}$ de la fonction objectif a été changé. On cherche à déterminer un intervalle dans lequel peut varier le coefficient $\mathbf{c_i}$ sans que la solution de base optimale change (x_i^*) et à mesurer la variation de la fonction objectif z^*.
   On parle d'**Intervalle d'optimalité**
2. Supposons que l'un des coefficients $\mathbf{b_i}$ du membre de droite des contraintes a été changé. Quel est l'intervalle toléré du changement de ce coefficient afin de ne pas modifier la solution de base optimale (x_i^*) et quelle sera la variation de la fonction objectif z^*
   On parle d'**Intervalle de réalisabilité**

Post-Optimisation - Coefficients de la fonction objectif

Exemple

Une société fabrique deux produits **A** et **B** en utilisant 3 machines.
Le tableau suivant donne le nombre d'heures nécessaires pour la fabrication de chaque produit au niveau de ces machines, la disponibilité de chaque machine et le prix de vente moyen de chaque produit.

Machine	**A**	**B**	**Disponibilité (h)**
Machine 1	1	2	20
Machine 2	2	1	22
Machine 3	1	1	12
Prix moyen (UM)	**300**	**200**	

Dans ce problème on cherche à identifier la fabrication optimale en **A** et **B** afin de maximiser le prix de vente total.

Après

- modélisation de ce problème sous forme d'un programme linéaire.
- écriture du problème sous sa forme standard
- la résolution de ce problème par la méthode simplexe.

On obtient la solution suivante :

Solution Optimale

$$\begin{cases} \text{[Max] } z = 300x_1 + 200x_2 \\ x_1 = 10 - e_2 + e_3 \\ x_2 = 2 + e_2 - 2e_3 \\ e_1 = 6 - e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

La solution optimale $(\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}, \mathbf{e_1^*}, \mathbf{e_2^*}, \mathbf{e_3^*}) = (\mathbf{10}, \mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ et $\mathbf{z}^* = \mathbf{3400}$.

Post-Optimisation - Coefficients de la fonction objectif

Sensibilité par rapport à c_1

Supposons que le prix de vente $\mathbf{c_1 = 300}$ du produit **A** commence à fluctuer dans le marché et on souhaite savoir l'intervalle d'optimalité de c_1 qui permet de maintenir la même solution optimale $(x_1^*, x_2^*) = (10, 2)$.
Pour cela, on considère le nouveau coefficient $\mathbf{c_1' = c_1} + \delta$.

On va avoir donc :

$$\begin{aligned}
[\max]\ z \quad &= (300+\delta)x_1 + 200x_2 \\
&= (300+\delta)(10 - e_2 + e_3) + 200(2 + e_2 - 2e_3) \\
&= (3400 + 10\delta) + (-100-\delta)e_2 + (\delta - 100)e_3
\end{aligned}$$

Afin de garder la même solution optimale il faut que $-100-\delta \leq 0$ et $\delta - 100 \leq 0$.
Ce qui conduit à $-100 \leq \delta \leq 100$.
Par la suite,

$$\mathbf{c_1'} \in [\mathbf{200; 400}] \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^* \in [\mathbf{2400; 4400}]$$

Sensibilité par rapport à c_2

Supposons que le prix de vente $\mathbf{c_2 = 200}$ du produit **B** commence à fluctuer dans le marché et on souhaite savoir l'intervalle d'optimalité de c_2 qui permet de maintenir la même solution optimale $(x_1^*, x_2^*) = (10, 2)$.
Pour cela, on considère le nouveau coefficient $\mathbf{c_2' = c_2 + \delta}$.

On va avoir donc :

$$\begin{aligned}
[\max]\ z &= 300x_1 + (200+\delta)x_2 \\
&= 300(10 - e_2 + e_3) + (200+\delta)(2 + e_2 - 2e_3) \\
&= (3400 + 2\delta) + (-100+\delta)e_2 + (-100 - 2\delta)e_3
\end{aligned}$$

Afin de garder la même solution optimale il faut que $-100+\delta \leq 0$ et $-100 - 2\delta \leq 0$.
Ce qui conduit à $-50 \leq \delta \leq 100$.
Par la suite,

$$\mathbf{c_2' \in [150; 300]} \quad \text{et} \quad \mathbf{z^* \in [3300; 3600]}$$

Post-Optimisation - Variation du second membre

Sensibilité par rapport à b_2 (Contrainte saturée)

Supposons que la disponibilité $\mathbf{b_2 = 22}$ de la 2ème machine peut évoluer et on souhaite savoir l'intervalle de réalisabilité de b_2 qui permet de maintenir la même solution optimale $(x_1^*, x_2^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*) = (10, 2, 6, 0, 0)$.
Pour cela, on considère le nouveau coefficient du second membre $\mathbf{b_2' = b_2} + \Delta$.

On obtient :

$$\begin{cases} \text{[Max] } z = 3400 + 100\Delta - 100e_2 - 100e_3 \\ x_1 = 10 + \Delta - e_2 + e_3 \\ x_2 = 2 - \Delta + e_2 - 2e_3 \\ e_1 = 6 + \Delta - e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Pour $e_2^* = e_3^* = 0$, on doit avoir $10 + \Delta \geq 0$, $2 - \Delta \geq 0$ et $6 + \Delta \geq 0$.
Ceci donne $-6 \leq \Delta \leq 2$.
Par la suite,

$$\mathbf{b_2'} \in [\mathbf{16}; \mathbf{24}] \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^* \in [\mathbf{2800}; \mathbf{3600}]$$

Sensibilité par rapport à b_3 (Contrainte saturée)

Supposons que la disponibilité $\mathbf{b_3 = 12}$ de la 3ème machine peut évoluer et on souhaite savoir l'intervalle de réalisabilité de b_3 qui permet de maintenir la même solution optimale $(x_1^*, x_2^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*) = (10, 2, 6, 0, 0)$.
Pour cela, on considère le nouveau coefficient du second membre $\mathbf{b_3' = b_3 + \Delta}$.

On obtient :

$$\begin{cases} \text{[Max] } z = 3400 + 100\Delta - 100e_2 - 100e_3 \\ x_1 = 10 - \Delta - e_2 + e_3 \\ x_2 = 2 + 2\Delta + e_2 - 2e_3 \\ e_1 = 6 - 3\Delta - e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Pour $e_2^* = e_3^* = 0$, on doit avoir $10 - \Delta \geq 0$, $2 + 2\Delta \geq 0$ et $6 - 3\Delta \geq 0$.
Ceci donne $-1 \leq \Delta \leq 2$. Par la suite,

$$\mathbf{b_3'} \in [\mathbf{11}; \mathbf{14}] \quad \text{et} \quad \mathbf{z^*} \in [\mathbf{3300}; \mathbf{3600}]$$

Sensibilité par rapport à b_1 (Contrainte marginale)

Supposons que la disponibilité $\mathbf{b_1 = 20}$ de la 1ère machine peut évoluer et on souhaite savoir l'intervalle de réalisabilité de b_1 qui permet de maintenir la même solution optimale $(x_1^*, x_2^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*) = (10, 2, 6, 0, 0)$.
Pour cela, on considère le nouveau coefficient du second membre $\mathbf{b_1' = b_1 + \Delta}$.

On obtient :

$$\begin{cases} \text{[Max] } z = 3400 - 100e_2 - 100e_3 \\ x_1 = 10 - e_2 + e_3 \\ x_2 = 2 + e_2 - 2e_3 \\ e_1 = 6 + \Delta - e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Pour $e_2^* = e_3^* = 0$, on doit avoir $6 + \Delta \geq 0$.
Ceci donne $\Delta \geq -6$.
Par la suite,

$$\mathbf{b_1' \in [14; +\infty[} \quad \text{et} \quad \mathbf{z^* = 3400}$$

Programmation linéaire - Conclusion

Programmation linéaire

- La programmation linéaire constitue un élément très répondu dans la modélisation en Recherche opérationnelle.
- Elle permet de résoudre plusieurs problèmes réels et de réaliser des gains considérables et d'assurer des optimisations importantes.
- Il reste très important d'accorder à l'interprétation économique du dual et à la phase post-optimisation une attention particulière afin de tirer profit au maximum de cet outil de RO incontournable
- L'étude de cette partie nous ouvre la voix vers l'étude de certains programme linéaire particuliers et d'aborder la problématique de détermination de la solution de base admissible initiale dans l'algorithme Simplexe.
- Explorer la programmation linéaire entière et la programmation non linéaire.