Introduction à la Théorie des Graphes

Dr. Guelzim ibrahim

Email: ib.guelzim@gmail.com

Graphes

- Les Graphes modélisent de nombreuses situations où des objets, lieux entrent en interaction.
- Exemples:
  - Réseaux sociaux
  - Interconnections routières, ferroviaires entre villes, régions …,
  - Liens entre les composants d'un circuit électronique,
  - Plan d'une ville et de ses rues en sens unique,…
  - En chimie, sociologie, bio-informatique, biologie, réseaux de communication , écologie, sciences sociales, l'organisation des services de secours,…

Graphes

- Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets et modéliser leurs relations avec une meilleure représentation visuelle.

- La théorie des graphes permet de :
  - Déduire des méthodes de résolution, des algorithmes,….
  - Par exemple :
    - **Quel est le plus court chemin (en distance ou en temps) pour se rendre d’une ville à une autre ?**
    - **Comment exploiter la diffusion sur un réseau d'une manière optimale ?**
    - Comment minimiser la longueur totale des connexions d’un circuit ?
    - Comment organiser un horaire d’occupation ?
    - …

Sommaire

- Graphes :
  - Généralité
  - Graphes orientés, Non orientés : Vocabulaire

- Connexité
  - Chemin, chaîne
  - Circuit, cycle
  - Graphe connexe
  - Composante connexe

Graphes: Plus concrètement

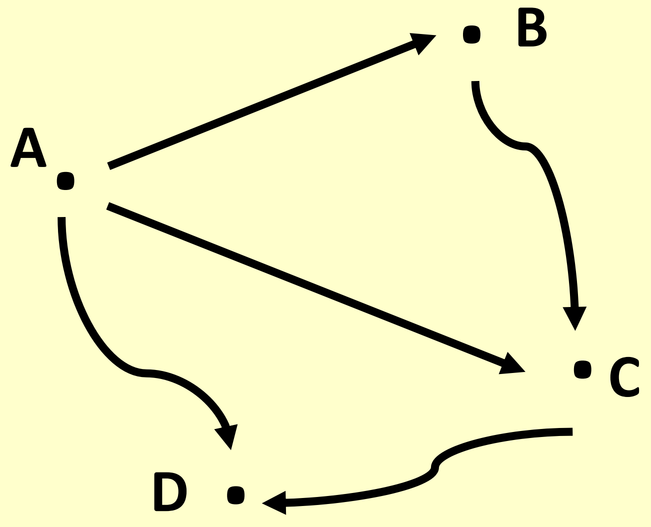


Figure 1.1

- Soit les schémas suivants
- Constitués de :
  - points étiquetés (A,B,C,D)
  - liés par des flèches
- Ces flèches symbolisent une application Γ de l'ensemble $X = \{A,B,C,D\}$ dans $P(X)$ tq :
  - $\Gamma(A) = \{ B,C,D \}$; $\Gamma(B) = \{ C \}$; $\Gamma(C) = \{ D \}$ et $\Gamma(D) = \emptyset$
  - $\Gamma^{-1}(A) = \emptyset$; $\Gamma^{-1}(B) = \{ A \}$; $\Gamma^{-1}(C) = \{ A,B \}$ et $\Gamma^{-1}(D) = \{ A,C \}$ (images réciproques)

Graphes

- Le couple (Γ, χ) constitue un **graphe** nommé G

- On note $G = (\chi \; , \Gamma)$

- Dorénavant, on appellera :
  - X ensemble des **sommets**
  - les flèches reliant les sommets, des **arcs**.
  - Ex : la flèche $A \rightarrow B$ reliant A à B est l'arc (A,B)
  - Remarque : $(A,B) \neq (B,A)$ (l'ordre d'apparition des sommets est important)

Graphes

- Le graphe G peut aussi être noté par G = (χ, U) tq U étant l'ensemble des arcs dans G.

- Ex Figure 1.1 : U = { (A,B); (A,C); (A,D); (B,C); (C,D) }

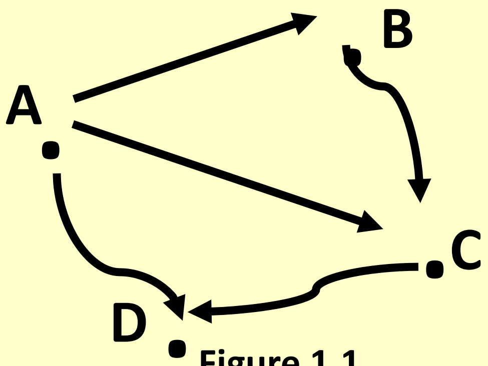


Figure 1.1

Sources et Références Utiles

- Ait Abdelouahed A : Théorie des Graphes. (Cours Master BIBDA)
- Claude Berge : "Graphes"
- Michel Gondran et Michel Minoux : "Graphes et Algorithmes"
- Christian Prins : "Algorithmes de Graphes"
- Eugene Lawler : "Combinatorial Optimization"
- Ahuja, Magnanti et Orlin : "Network Flows "
- R. Tarjan : "Data Structures and Network Algorithms"
- R. Faure : "Précis de recherche opérationnelle - Méthodes et exercices d'application"
- http://www.graphes.fr/connexite.html
- https://perso.liris.cnrs.fr/samba-ndojh.ndiaye/fichiers/App_Graphes.pdf

Graphes orientés: vocabulaire

- Définitions:
  - Soit l'arc (x,y) on dit que:
    - y est un **successeur** de x
    - x est un **prédécesseur** de y
  - On dit également que
    - x est l'**origine** de l'arc (x,y)
    - y est son **extrémité**

Graphes orientés: vocabulaire

- Définitions:
  - L'ensemble des successeurs de x est noté $\Gamma^{+}(x)$
  - L'ensemble des prédécesseurs de x est noté : $\Gamma^{-}(x)$
  - L'ensemble $\Gamma^{+}(x) \cup \Gamma^{-}(x)$ est appelé ensemble des **voisins** de x
  - L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
  - Une **boucle** est un arc où un sommet est le successeur (prédécesseur) de lui-même.

Graphes orientés: Exemple

- Le graphe G possède l'arc (B,D), donc
  - B est prédécesseur de D, et
  - D est un successeur de B.

- Le sommet E est l'origine de l'arc (E,A) et A son extrémité.

- L'ordre du graphe G est égal à 5.

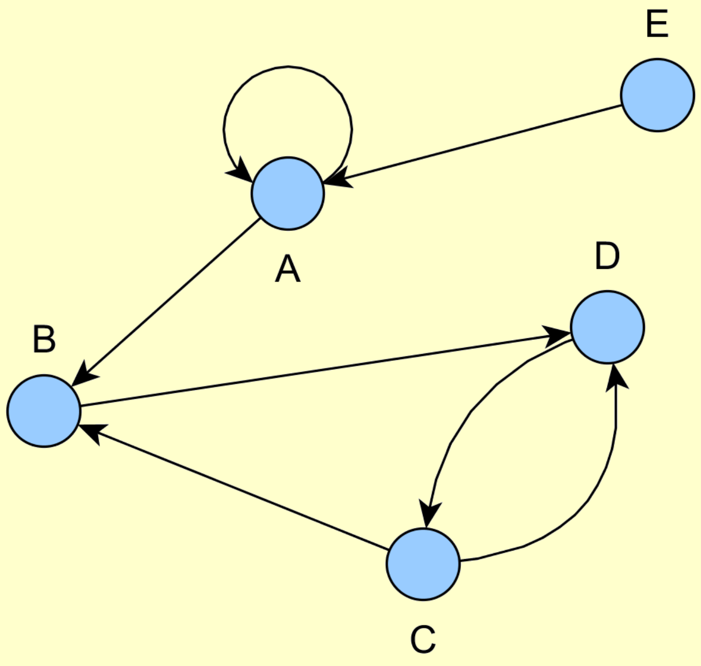


Figure 1.2 Graphe G

Graphes Non orientés: vocabulaire

- Lorsque la représentation des flèches n'est pas unidirectionnelle, le graphe n'est pas **<u>orienté</u>**.
- Les flèches deviennent des **<u>arêtes</u>**.
- On parle de graphe **<u>non orienté</u>** (Figure 1.3)
- Dans la Figure 1.3 on parle alors de l'arête [A,B] ≡ [B,A] (peu importe l'ordre)
- Un graphe non orienté *G* = (V,E) est la donnée :
  - L'ensemble de **<u>sommets</u>** V (V pour Vertex en anglais) .
  - L'ensemble E des **<u>arêtes</u>** (E pour Edge en anglais).
- La Figure 1.3 illustre une représentation **sagittale** d'un graphe *G* (Latin : *sagitta* :: flèche)
- À noter qu'un même graphe peut avoir **plusieurs** représentations sagittales Fig 1.3 et 1.4

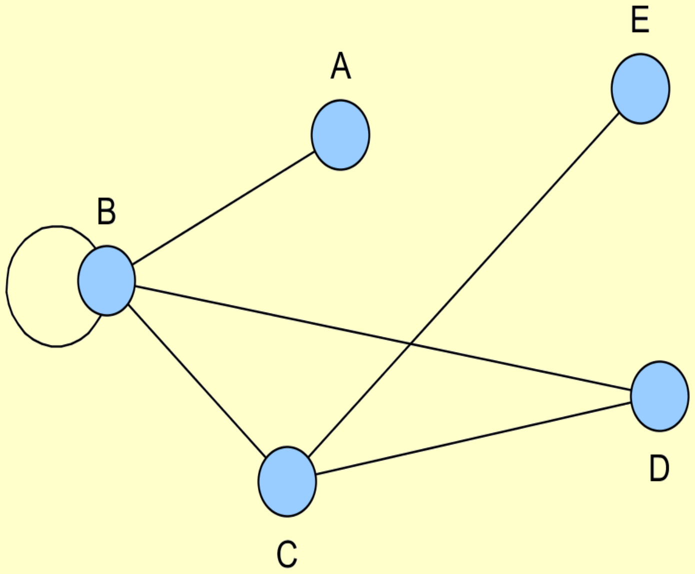


Figure 1.3

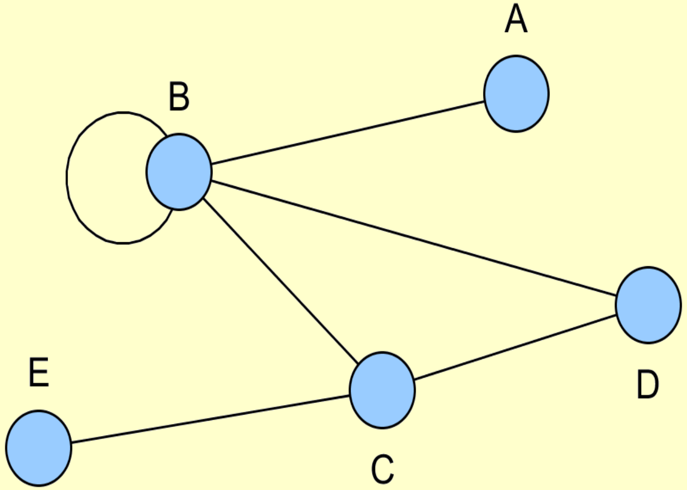
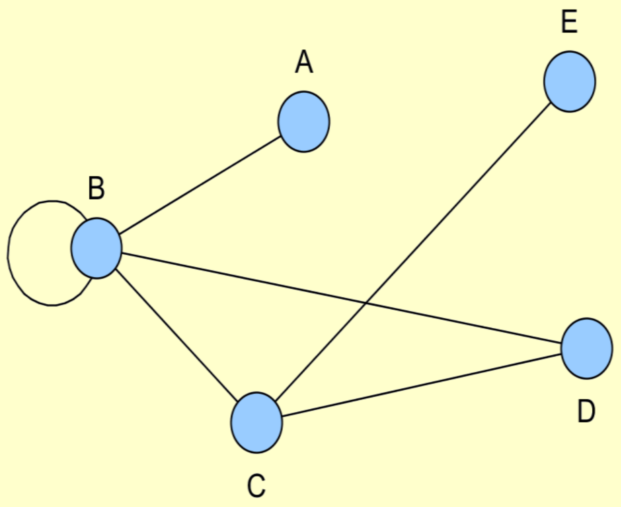


Figure 1.4

Graphes Non orientés: vocabulaire

- Deux sommets **i** et **j** reliés par une arête **a** sont dits adjacents.
- **i** et **j** sont incidents à l'arête **a**, et **a** est incidente à **i** et **j**
- Deux arêtes sont adjacentes si elles sont incidentes à un même sommet.
- Une boucle est une arête où un sommet est adjacent à lui-même.

- Exemple :



  - Les sommets D et C sont adjacents car le graphe G comporte l'arête {C,D}.
  - L'ordre du graphe G est égal à 5.

Graphe Simple

- Soient e et v deux arcs (resp. arêtes) distincts
- x; y deux sommets d'un graphe,
  si e = (x , y) = v alors, on dit que **e** et **v** sont deux arcs (resp. arêtes) **parallèles**.
- Un graphe orienté (resp. non orienté) est dit **Simple** s'il est :
  - sans boucles, et
  - sans arcs (resp. arêtes) parallèles.

- Ex : le graphe G n'est pas simple car il contient une boucle en A.

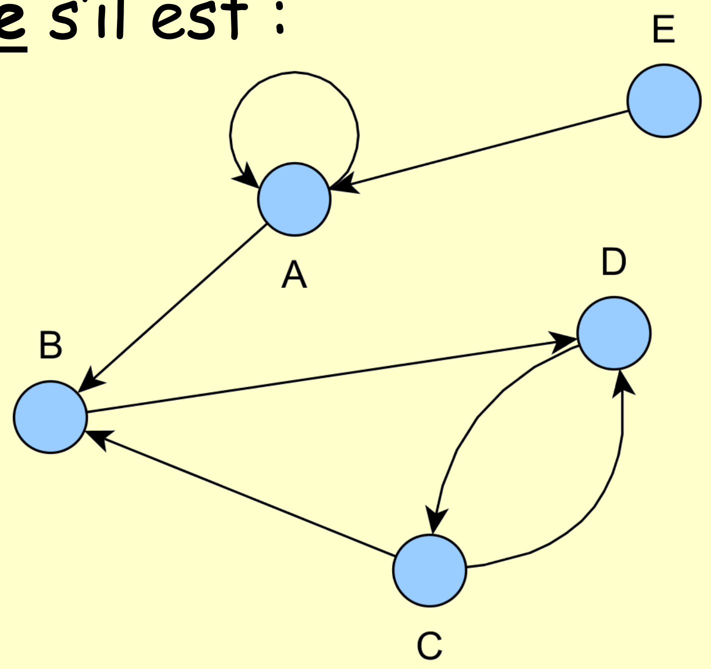


Figure 1.2 Graphe G

Graphe Complet

- Un graphe orienté est complet si:
  - il est simple, et
  - pour toute paire de sommets {x,y} il existe au moins l'un des deux arcs (x,y) ou (y,x).

- Exemple: Un graphe complet orienté d'ordre 4

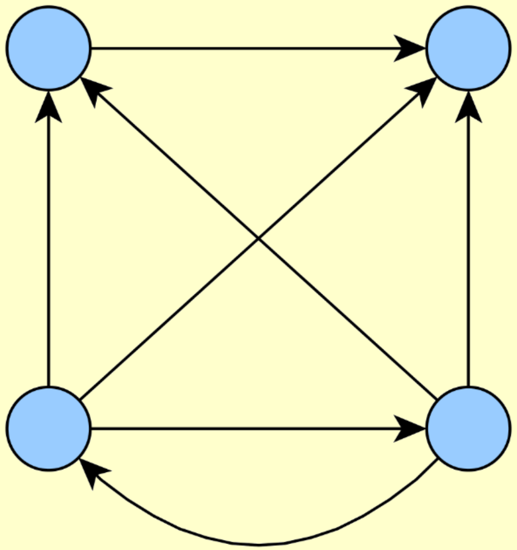
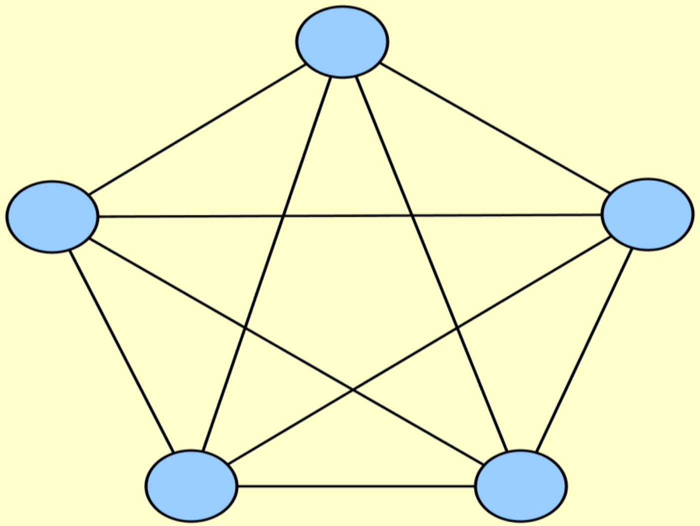


Figure 1.5 Exemple d'un graphe Complet

Graphe Complet

- Un graphe Non orienté est complet si:
  - il est simple, et
  - si deux sommets quelconques sont reliés par une arête.
- Exemple: graphe complet non orienté d'ordre 5



Usuellement, la notion de graphe complet est plus utilisée pour des **Graphes NON Orientés**.

Graphe Complet

- Propriété
  - Un graphe non orienté complet d'ordre n possède **n(n-1)/2** arêtes.

- Preuve1:
  - Chacun des n sommets est adjacent aux n – 1 autres.
  - Ce qui donne a priori n(n – 1) arêtes.
  - Dans ce calcul, chaque arête est comptabilisée deux fois (une pour chacune de ses extrémités).
  - D'où le nombre final d'arêtes est n(n-1)/2

- Preuve2: Par récurrence
  - Vrai pour n = 1
  - Supposons vrai pour le rang n [nb arêtes : n(n-1)/2]
  - Mq vrai rang m = n+1 ? [nb = m(m-1)/2 ?]
    - Nb = n(n-1)/2 + n = (n+1)n/2 = m(m-1)/2 ; CQFD

MultiGraphe

- Un multigraphe non orienté (resp orienté) est un graphe où l'on autorise le fait d'avoir plusieurs arêtes (resp arcs de même sens) entre deux sommets.

- Exemples :

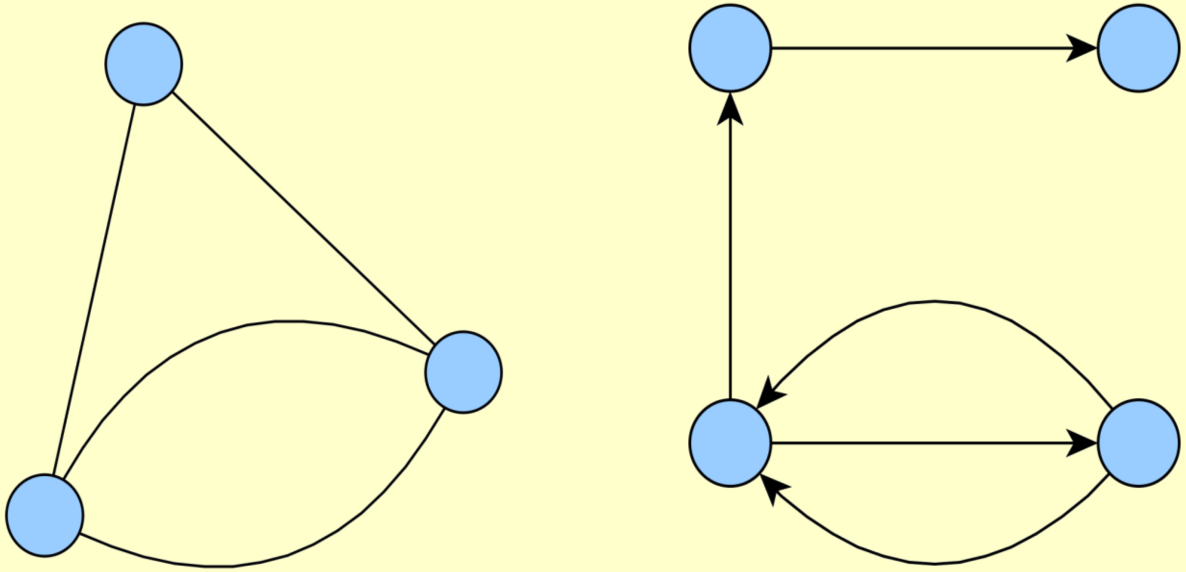
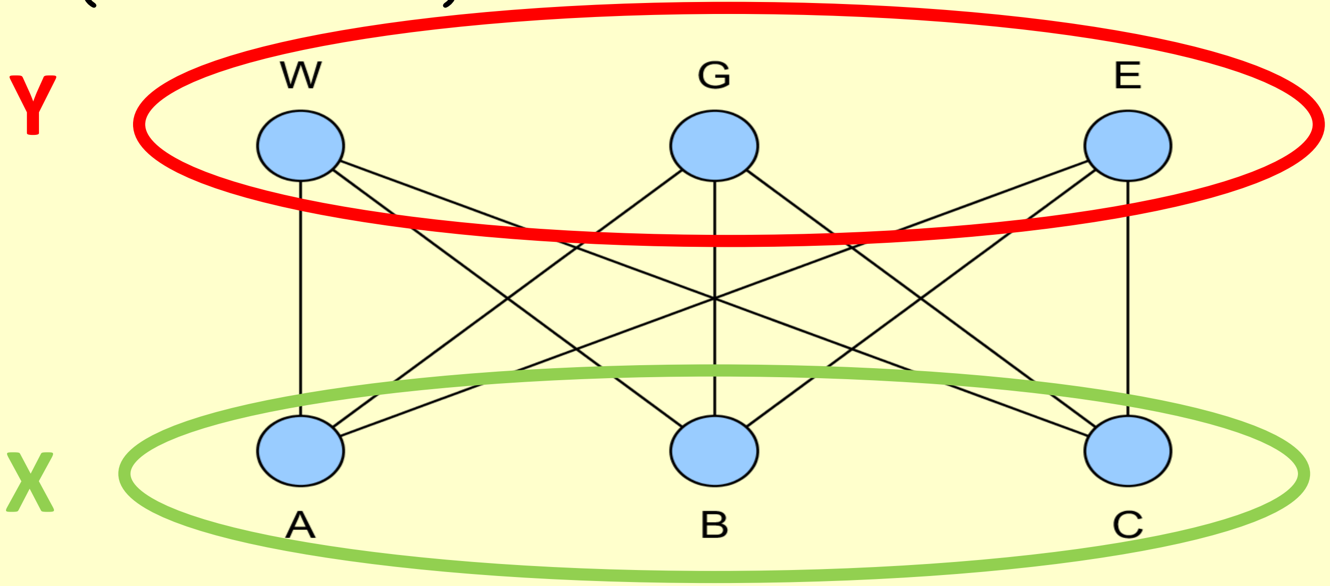


Figure 1.6 Exemples de Multi-Graphe

Graphe biparti

- Un graphe est biparti si
  - L'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X et Y,
  - toutes les arrêtes (arcs) du graphe relient, obligatoirement, un sommet dans X à un sommet dans Y (ou vice-versa).
  - Exemple:

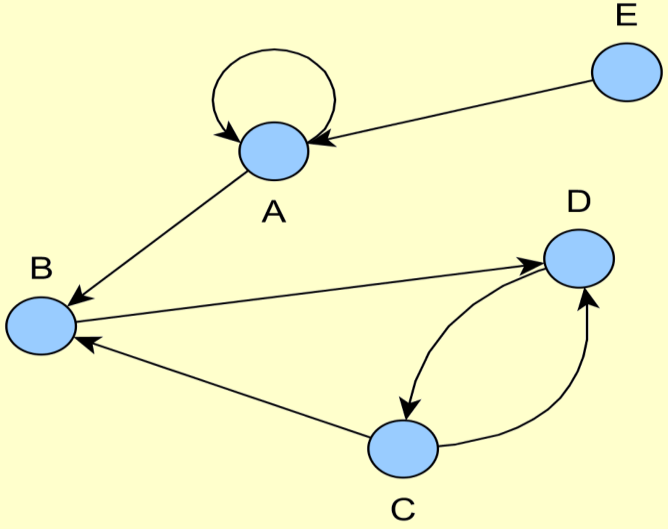


  - Les deux ensembles X et Y sont respectivement :
    - X = { A, B, C }
    - Y = { W, G, E }

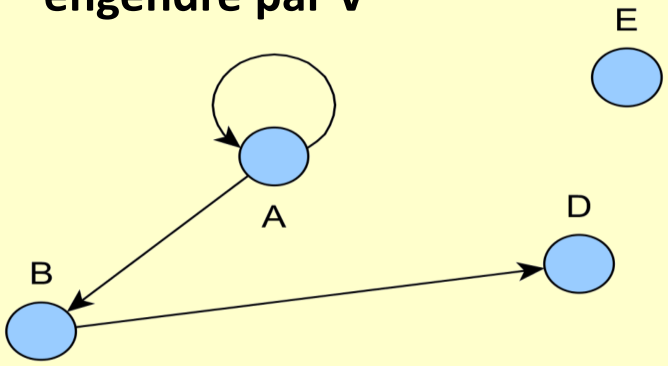
Sous-Graphe, Graphe Partiel et Sous-Graphe Partiel

- Définitions
  - Soit $G = (V,T)$ un graphe orienté (ou non), et soit $V' \subseteq V$ et $T' \subseteq T$
  - On appelle
    - **Sous-graphe engendré par V '** le Graphe $G_{V'} = (V', T')$ dont les sommets sont les éléments de V' et tel que $T' \subseteq \{ (x,y) \in T, x \in V' \text{ et } y \in V' \}$
- Exemple $V' = \{A, B, D, E\}$

Graphe G



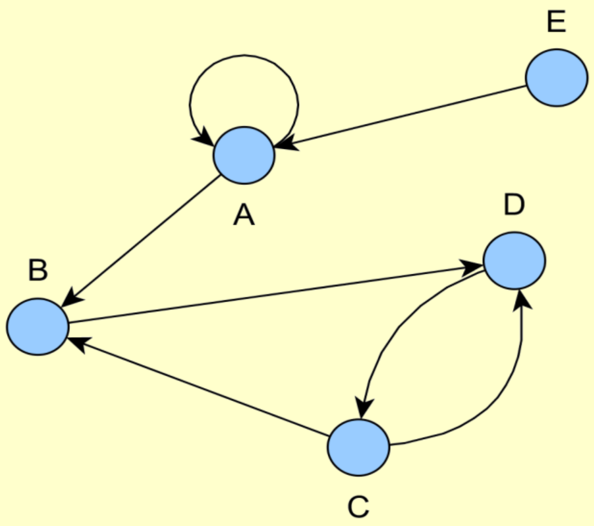
Un sous graphe de G engendré par V '



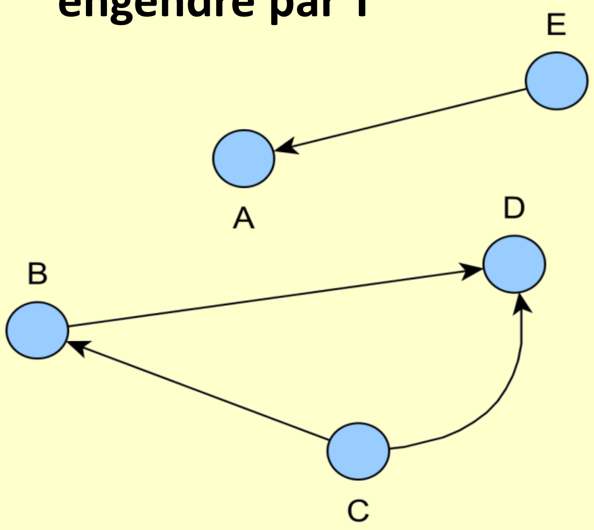
Sous-Graphe, Graphe Partiel et Sous-Graphe Partiel

- Définitions
  - Soit $G = (V,T)$ un graphe orienté (ou non), et $T' \subseteq T$.
  - On appelle
    - **Graphe partiel engendré par T '** le Graphe ayant comme ensemble de sommets V et dont les arcs sont les arcs de T '
- Exemple : $T' = \{ (B,D), (C,B), (C,D), (E,A) \}$

Graphe G



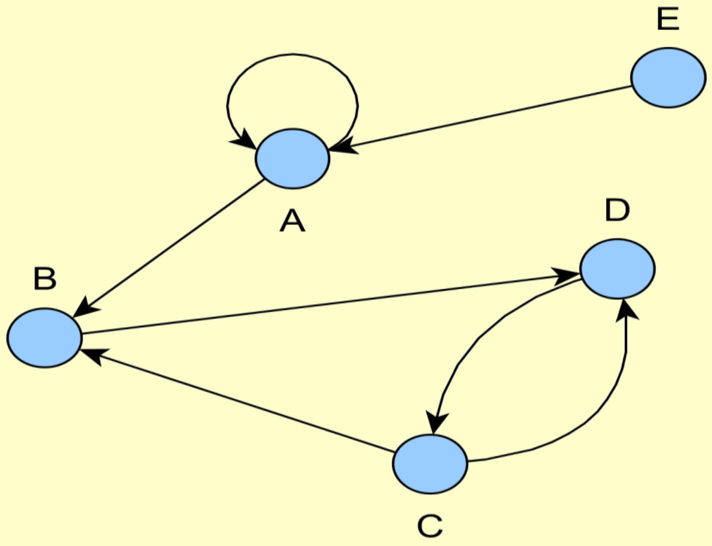
Un graphe partiel de G engendré par T '



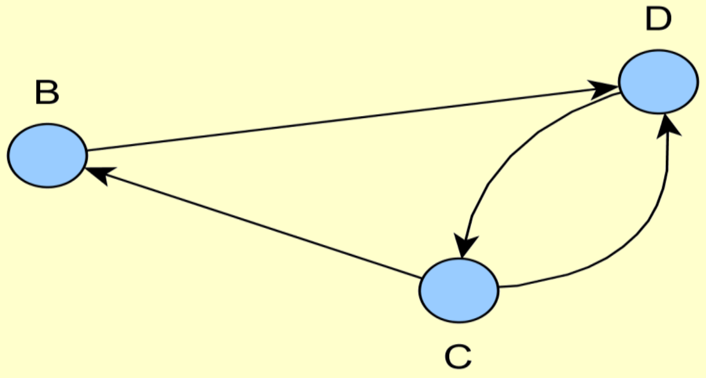
Sous-Graphe, Graphe Partiel et Sous-Graphe Partiel

- Définitions
  - Soit $G = (V, T)$ un graphe orienté (ou non), et soit $V' \subseteq V$ et $T' \subseteq T$.
  - On appelle
    - **Sous graphe partiel engendré** par V ' et T ' le graphe dont les sommets sont les éléments de V ' et dont les arcs sont les arcs de T ' ayant leurs deux extrémités dans V '
- Exemple :

Graphe G



Un sous graphe partiel de G



Sous-Graphe, Graphe Partiel et Sous-Graphe Partiel

- Autrement dit :
  - Soit $G = (V,T)$ un graphe orienté (ou non), et soit $V' \subseteq V$ et $T' \subseteq T$.
  - On appelle
    - **Sous-graphe** engendré par V' le Graphe $G_{V'}$ dont les sommets sont les éléments de V' et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans V'

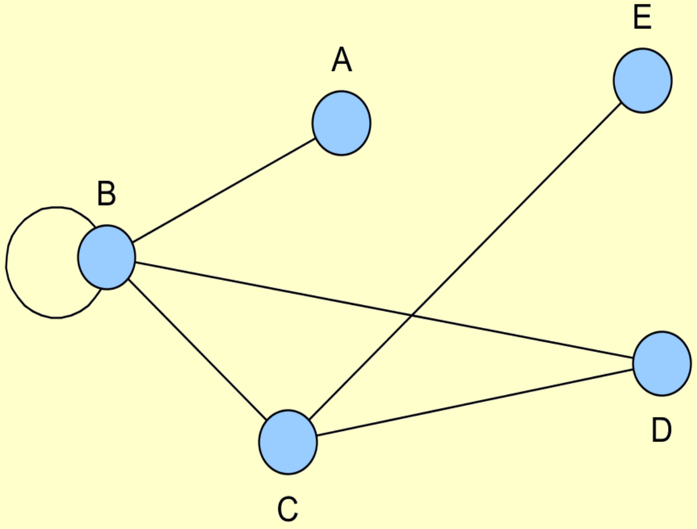
    - **Graphe partiel** engendré par T' le Graphe ayant le même ensemble **<u>V</u>** de sommets que G , et dont les arcs sont les arcs de T'

    - **Sous graphe partiel** engendré par V' et T' le graphe dont les sommets sont les éléments de V' et dont les arcs sont les arcs de T' ayant leurs deux extrémités dans V'

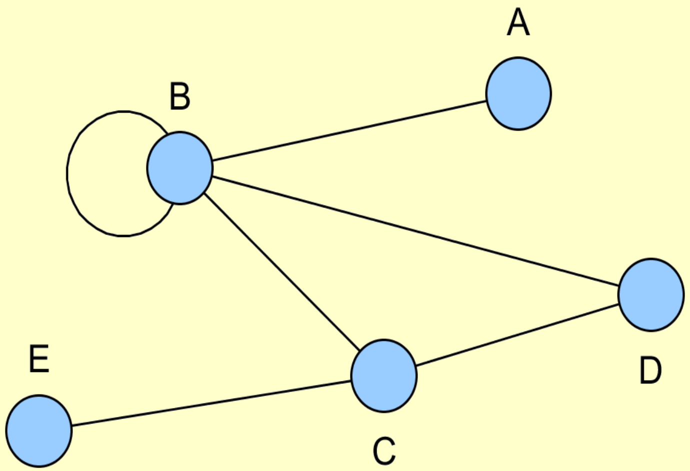
Graphes planaires

- Définition:
  - Soit G = (V,E) un graphe (orienté ou non).
  - On dira que G est **planaire** s'il <u>admet</u> <u>une</u> représentation sagittale où ses **arêtes (ou arcs) ne se coupent pas**
  - Exemple:

Graphe planaire

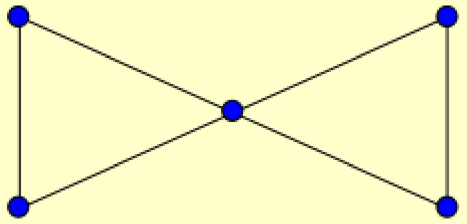


Autre représentation

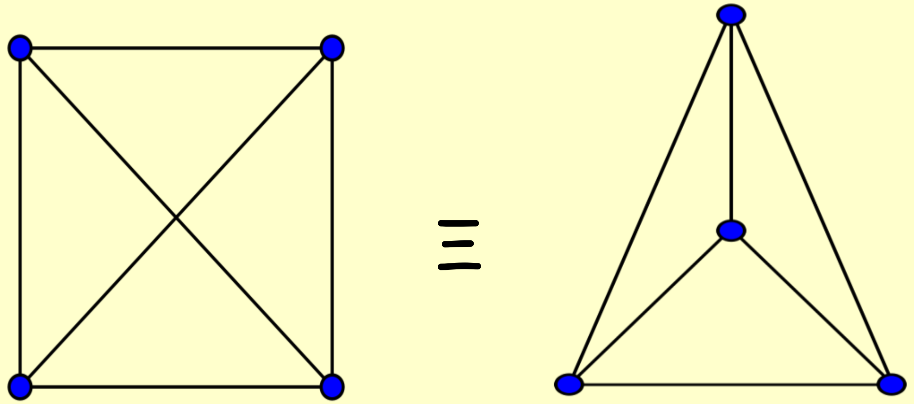


Graphes planaires

- Exemples de graphes planaires [Wk : En] :

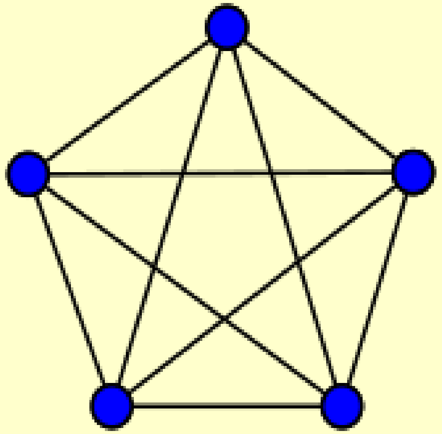


Graphe papillon



Graphe Complet K_4

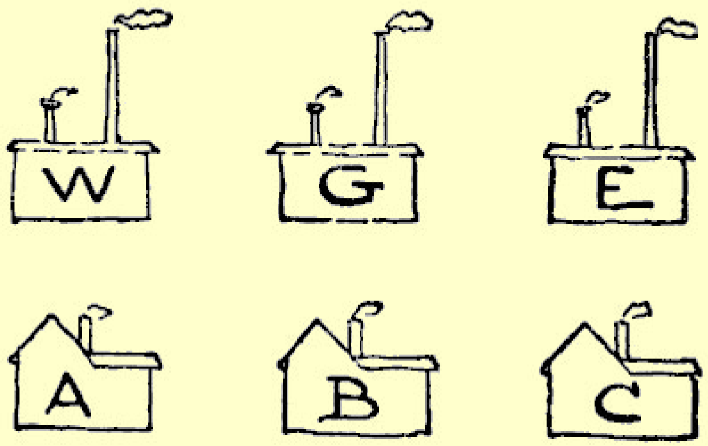
- Exemple de graphe non planaire [Wk : En] :



Graphe Complet K_5

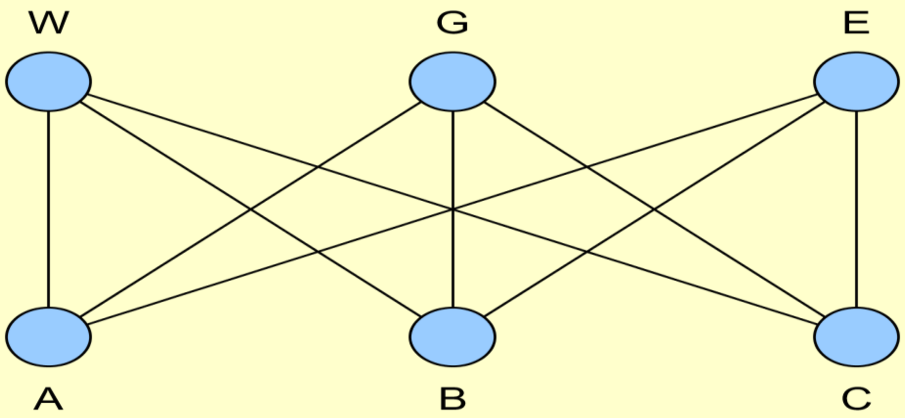
Graphes planaires

- Application: Énigme des trois maisons [En : Three utilities problem]
  - Trois maisons doivent être chacune reliées à trois usines d'eau, de gaz et d'électricité. Peut-on disposer les canalisations de telle sorte qu'elles ne se chevauchent pas ?
  - Ci-dessous figure l'illustration originale de l'auteur du problème :



Graphes planaires

- Les maisons, usines et canalisations peuvent être modélisées par un graphe biparti complet $K_{3,3}$:



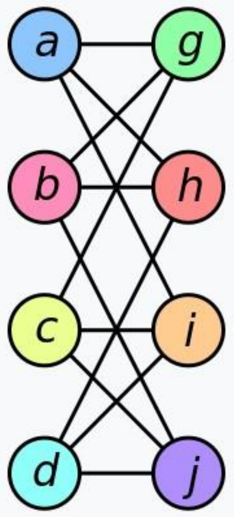
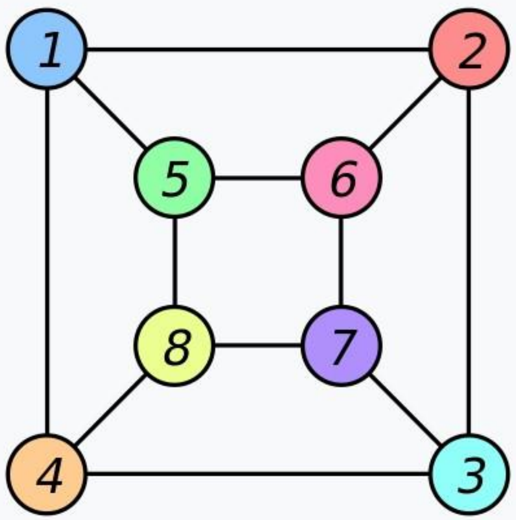
- Question : le graphe ci-dessus est-il planaire ?
- R : Non

Isomorphismes de graphes

- Définitions
  - Un isomorphisme f entre les graphes G et H est :
    - une bijection entre les sommets de G et ceux de H, telle que
    - une paire de sommets {u, v } de G est une arête de G **si et seulement si** {f (u), f (v)} est une arête de H.
  - L'isomorphisme peut aussi s'exprimer de la façon suivante :
    - les graphes ont le même nombre de sommets et sont connectés de la même façon.
  - Autrement dit, si les deux graphes sont dessinés:
    - il suffit de déplacer les sommets de l'un pour obtenir l'autre.

Isomorphismes de graphes

- Exemple
  - Les deux graphes G et H ci-dessous sont isomorphes :

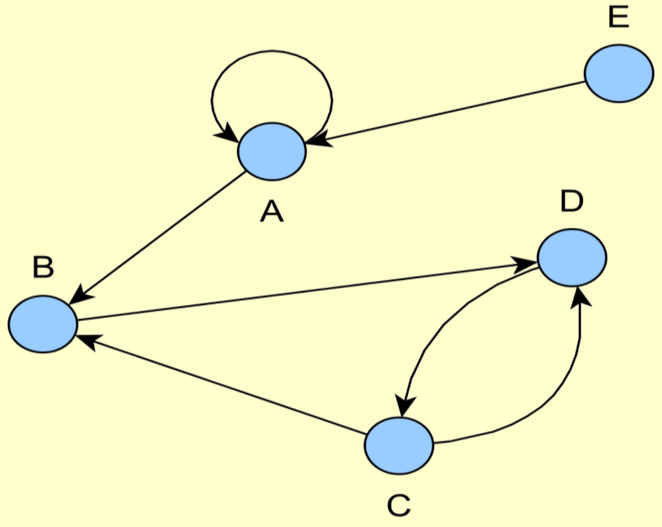
Graphe G	Graphe H	Isomorphisme entre G et H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Degré d'un sommet : Cas de graphes Orientés

- Définitions
  - Soit $G=(V,E)$ un graphe orienté et $x \in V$ l'un de ses sommets.
  - On appelle **degré sortant** de x, noté $d^+(x)$ le nombre d'arcs ayant x pour origine.
  - On appelle **degré entrant** de x, noté $d^-(x)$ le nombre d'arcs ayant x pour extrémité.
  - On appelle **degré** de x noté $d(x)$, le nombre d'arcs ayant x pour origine ou extrémité.
  - On a naturellement $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$
  - Un sommet de degré entrant non nul et de degré sortant nul est appelé **puits**
  - Un sommet de degré entrant nul et de degré sortant non nul est appelé **source**

Degré d'un sommet : Cas de graphes Orientés

- Exemple:



- $d^+(A) = 2,\ d^+(B) = 1, d^+(C) = 2,\ d^+(D) = 1,\ d^+(E) = 1$
- $d^-(A) = 2,\ d^-(B) = 2,\ d^-(C) = 1,\ d^-(D) = 2,\ d^-(E) = 0$

Degré d'un sommet : Cas de graphes Orientés

- Propriété
  - Soit G = (V,E) un graphe orienté. On a :

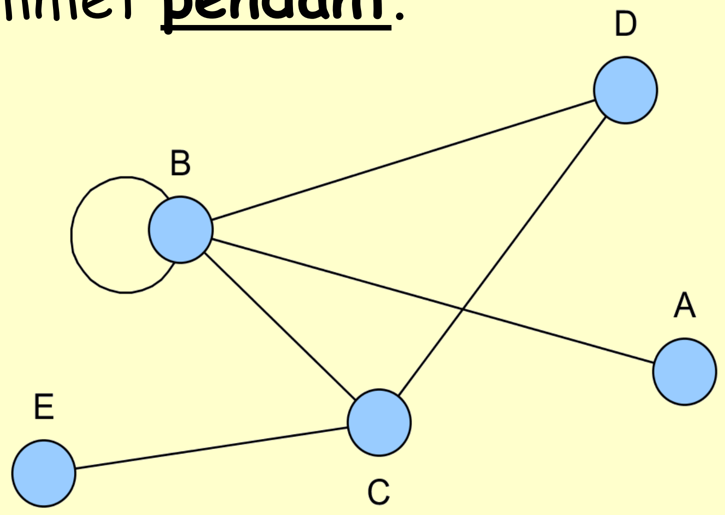
$$\sum_{x \in V} d^+(x) = \sum_{x \in V} d^-(x) = |E|$$

  - À noter l'égalité :

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E|$$

Degré d'un sommet : Cas de graphes Non Orientés

- Définitions
  - Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté et $x \in V$ l'un de ses sommets.
  - On appel degré de x noté $d(x)$ le nombre d'arêtes ayant x pour extrémité,
  - une boucle étant comptée **2** fois.
  - Un sommet dont le degré est nul est appelé sommet **isolé**.
  - Un sommet dont le degré est = 1 est appelé sommet **pendant**.
- Exemple :
  - $d(A) = 1$,
  - $d(B) = 5$,
  - $d(C) = 3$,
  - $d(D) = 2$,
  - $d(E) = 1$



Degré d'un sommet : Cas de graphes Non Orientés

- Même pour les graphes non orientés, on garde l'égalité :

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E|$$

  - À noter que la propriété est juste, grâce à la convention faite aux boucles.

- **Lemme de Poigné de main:**
  - Dans un groupe de personnes dont certaines se serrent la main, le nombre de personnes qui serrent la main d'un nombre impair d'autres personnes est pair.

  → TG: Dans un graphe non orienté, le nombre de sommets de degrés impairs est pair.

  - Démonstration:
    - Raisonnons par l'absurde :
    - Hypothèse H :
      - supposons que le nombre de sommets de degrés impairs soit impair.
    - Leur somme est donc impaire.
    - La somme des degrés pairs est par contre paire.
    - Ainsi, la somme des tous les degrés est impaire.
    - Ce qui contredit le fait que la somme est égale au double du nombre d'arêtes

    → absurdité, ce qui prouve que l'hypothèse H est fausse

Degré d'un sommet : Cas de graphes Non Orientés

- Lemme de Poigné de main:
  - Illustration :
    - On souhaite organiser un tournoi de handball entre 7 équipes.
    - Pour des raisons d'organisation, on doit limiter le nombre de matchs.
    - Est-il possible de faire jouer à chaque équipe exactement 5 matchs ?

    - Réponse:
      - Ce problème se modélise par un graphe non orienté dont:
        - les sommets correspondent aux équipes,
        - les arêtes aux matchs.
      - La question est : peut on avoir
        - un graphe non orienté
        - à 7 sommets
        - tous les sommets sont de degré 5
      - Or un tel graphe **ne peut exister** d'après le corollaire du lemme des poignées de main.