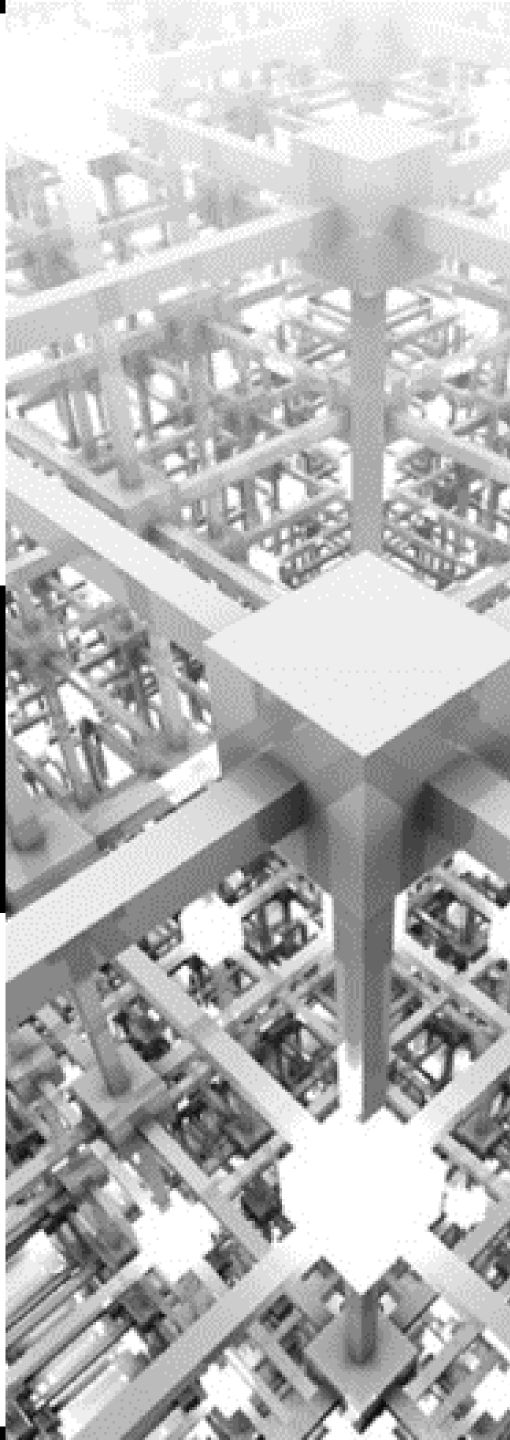
ENSAM

STRUCTURES DE DONNÉES EN C

1ère Année «Cycle ingénieur : Intelligence Artificielle et Génie Informatique»

2023/2024

Dep. Informatique
Pf. CHERGUI Adil



LES ARBRES AVL

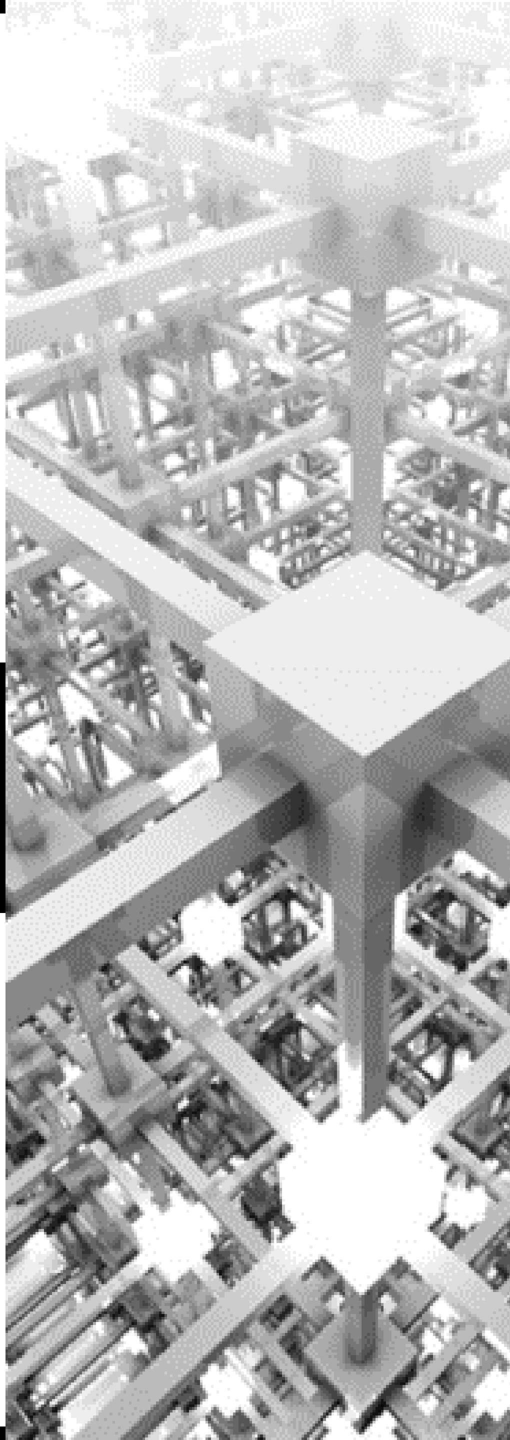
Séance 7

(ADELSON-VELSKII ET LANDIS)

Objectifs de la séance :

- La compréhension des principes des AVLs
- Maitriser les opérations de Rotation
- L’implémentation des arbres binaires AVL

Pf. Adil CHERGUI



INTRODUCTION

introduction

L'intérêt des **ABR** réside dans le fait que, **s'ils sont équilibrés**, c'est-à-dire si chaque nœud a à peu près autant de descendants gauches que de descendants droits, alors la recherche d'un élément est dichotomique (c.-à-d. : à chaque étape la moitié des clés restant à examiner sont éliminées), et demande donc log2 (n) itérations, l'insertion consécutive à une recherche a un constant ***O(1)***.

Cela est possible à condition que l'arbre soit **équilibré**, car si on le laisse **se déséquilibrer** au moment de l'insertion ou la suppression, les performances peuvent se dégrader significativement, jusqu'au cas extrême où l'arbre est tout à fait **dégénéré** (filiforme), où l'arbre devient une liste chaînée, et la recherche devient **séquentielle**.

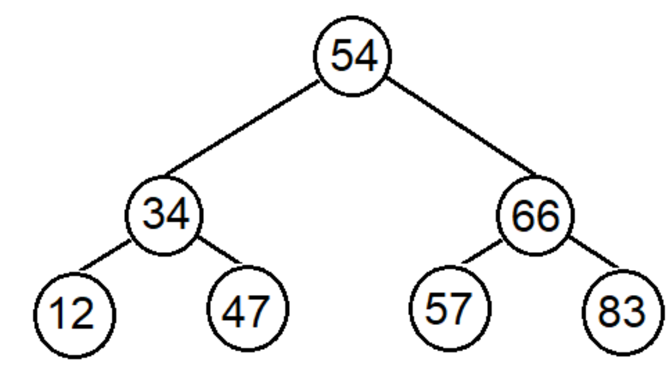
DÉFINITION

Définition de l'équilibré

Équilibre parfait** :* pour tout nœud ***a de l'arbre, la valeur absolue de la différence entre le nombre des nœuds du **FD** et le nombre des nœuds du **FG** est inférieure ou égale à 1.

$$|n(\boldsymbol{a} \to FG) - n(\boldsymbol{a} \to FD)| \leq 1$$

Voir Figure ci-contre



Équilibre partiel (H-équilibré): pour tout nœud ***a*** de l'arbre, la valeur absolue de la différence entre la hauteur du FD et la hauteur du FG est inférieure ou égale à 1.

$$|h(\boldsymbol{a} \to FG) - h(\boldsymbol{a} \to FD)| \leq 1$$

Le degré de déséquilibre d'un nœud :

Le Si **a** est un arbre (ou sous arbre)

$$\boldsymbol{Dg}(\boldsymbol{a}) \ = \boldsymbol{h}(\ a -> G) \ - \boldsymbol{h}(\ a -> D)$$

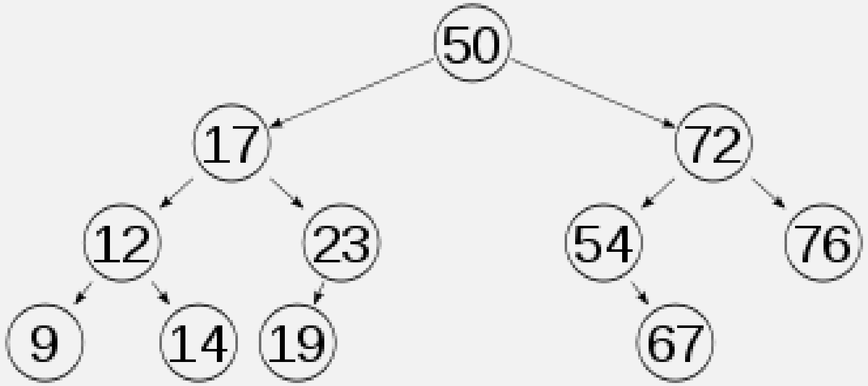
un arbre **a** est **H-équilibré** si pour tous ces sous arbre **b**, on a : $\boldsymbol{Dg}(\boldsymbol{b}) \in \{\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$

.

DÉFINITION

Définition d’un arbre AVL

Un arbre équilibré partiellement (ou arbre **AVL** de ***Adelson-Velskii et Landis***, ou arbre **H-équilibré**) est tel que, à chaque nœud, la différence de profondeur de ses sous-arbres gauche et droit ne **dépasse pas l'unité**. La figure ci-dessus montre un exemple d'arbre AVL.



ARBRE AVL

L'efficacité des AVL

Si notre arbre de recherche est ***parfaitement équilibré*** la recherche est optimale et très efficace car

$$\boldsymbol{h \approx \ ln_2(n)}$$

Sauf que, pour maintenir un arbre en **équilibre parfait** est une opération **difficilement** (en *question de coût*) réalisable.

Par contre les arbres ***AVL (*** ou ***H-équilibrés),*** on démontre que :

"*la hauteur d'un arbre* ***AVL*** *est toujours inférieure ou égale à* ***1,5*** *fois la profondeur de* ***l'arbre parfait*** *correspondant (c-à-d. contenant les mêmes nœuds*) »

$$\boldsymbol{h \leq 1,5 \times ln_2(n)}$$

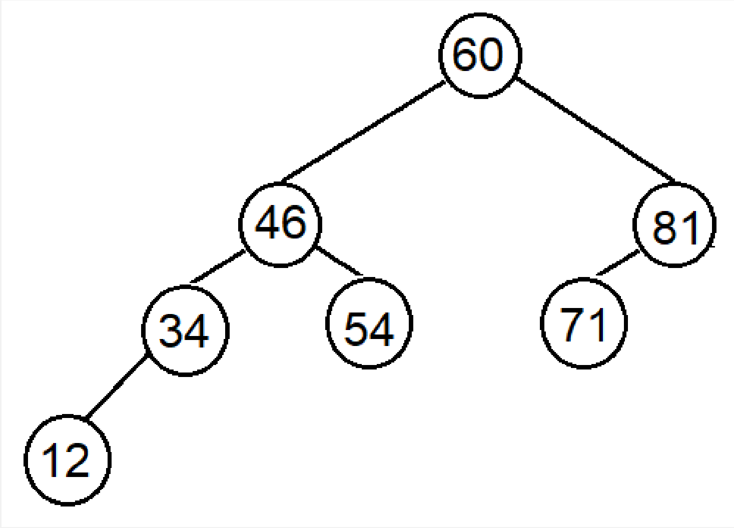
Cependant, il est possible de maintenir un arbre ***AVL*** par des **opérations** à ***coût constant*** lors des insertions et des suppressions, qui se font appelées **les rotations**.

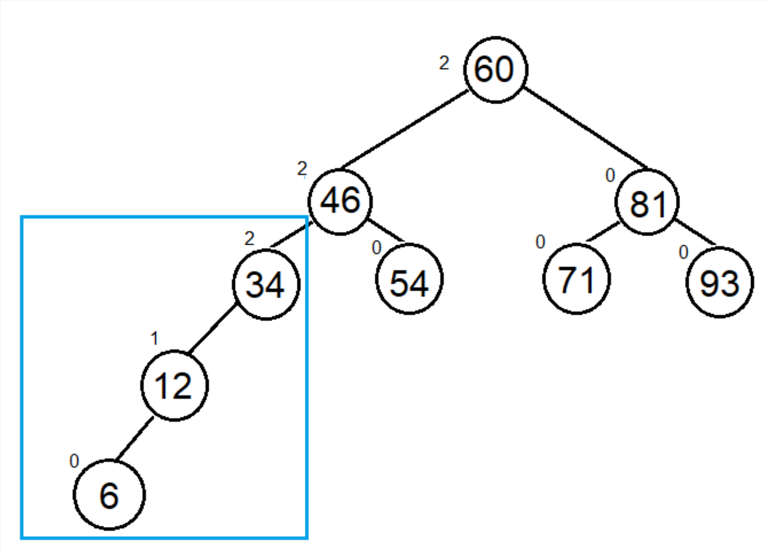
LES ROTATIONS

Maintenir l’équilibre des AVL : le rééquilibrage

Chaque opération (**ajout** ou **suppression**) doit respecter la propriété de ces arbres. En d'autres termes, si un arbre est **AVL avant** ajout ou suppression, il doit aussi l'être **après**. Cela nécessite **parfois** des opérations dites de **rééquilibrage**.

Nous ne considérerons ici que l'ajout aux feuilles les valeurs successifs 93 et 6.

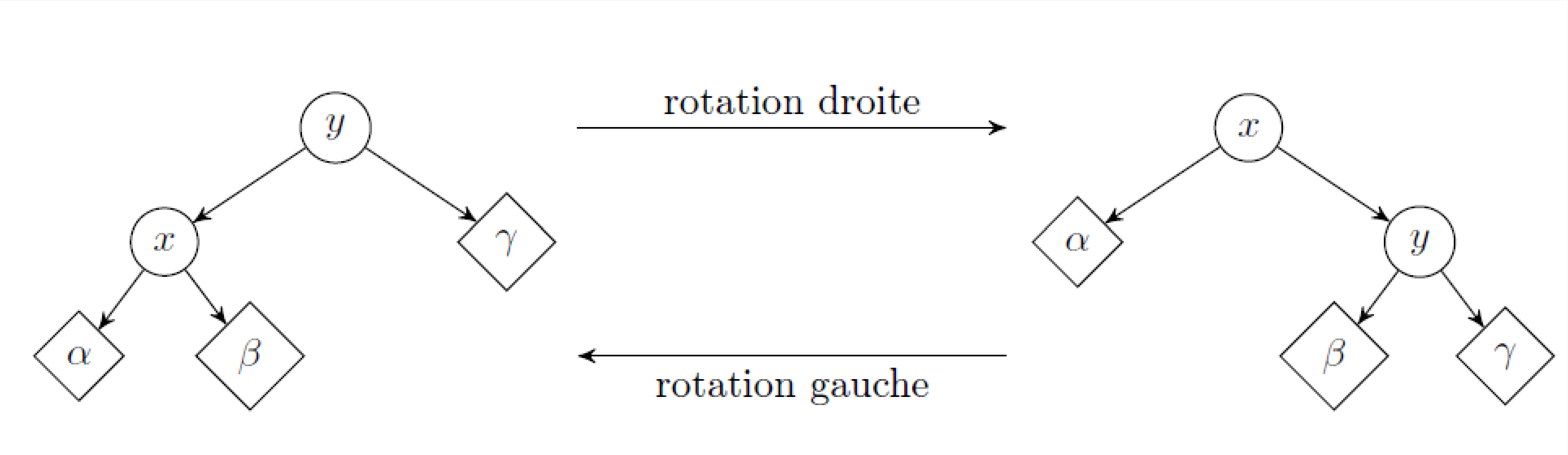




LES ROTATIONS

Types de rotation

il y a deux types de rotation entre les nœuds :



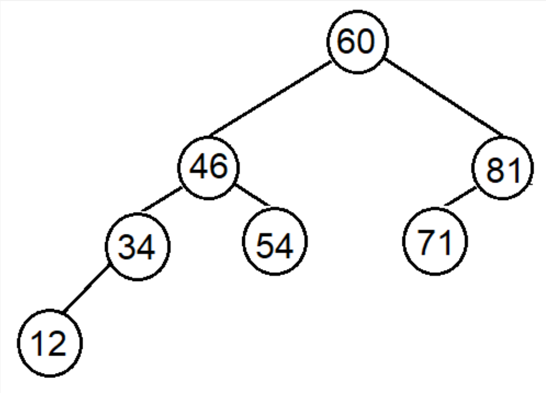
G=Ar->FG
Ar->FG=G->FD
G->FD=Ar
Ar=G

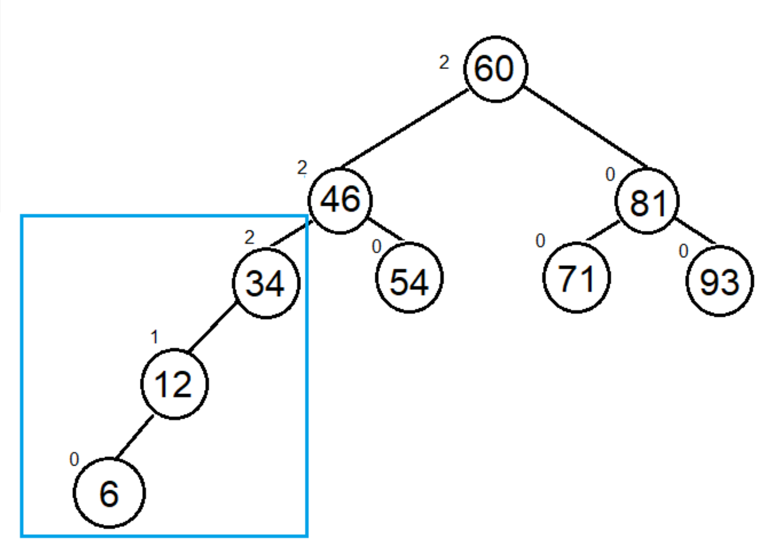
G=Ar->FD
AR->FD=G->FG
G->FG = Ar
Ar=G

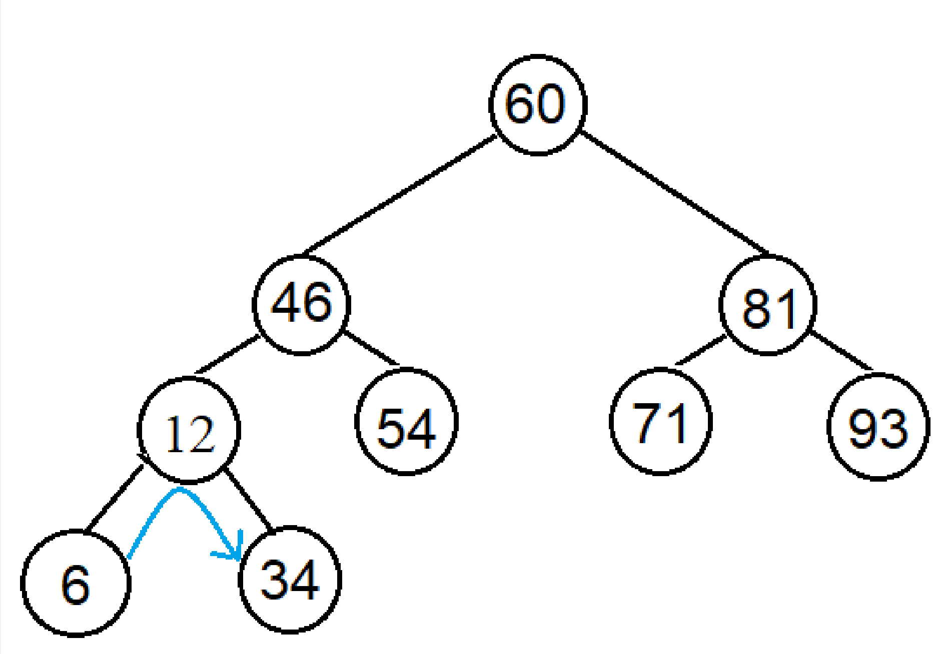
LES ROTATIONS

Bord gauche (droit) du sous-arbre

Comme on peut le constater, l'ajout de la valeur 6 provoque un **déséquilibre** du **bord gauche du sous-arbre** dont la racine est le nœud de valeur 34 (partie encadrée), ce déséquilibre se propageant ici jusqu'à la racine.





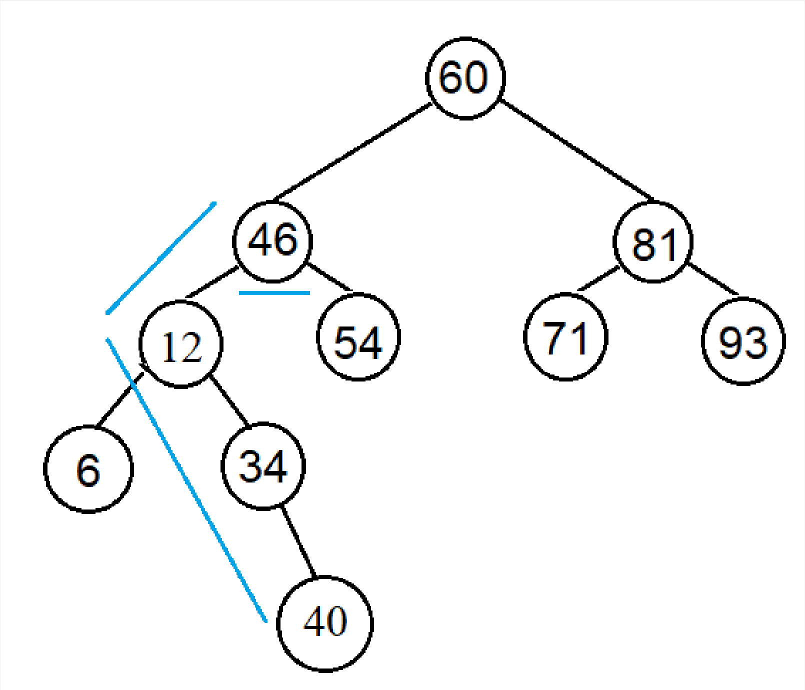


Rotation droite

LES ROTATIONS

Déséquilibré vers l'intérieur

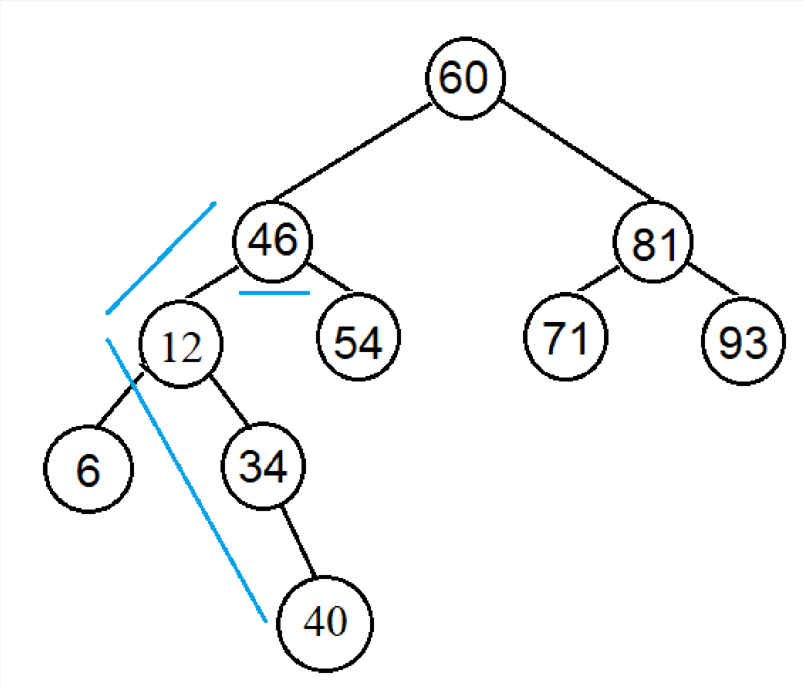
Considérons maintenant l'ajout de la valeur 40 à l'arbre ci-dessus, montre que l'arbre correspondant à la valeur 46 est **déséquilibré vers l'intérieur**.

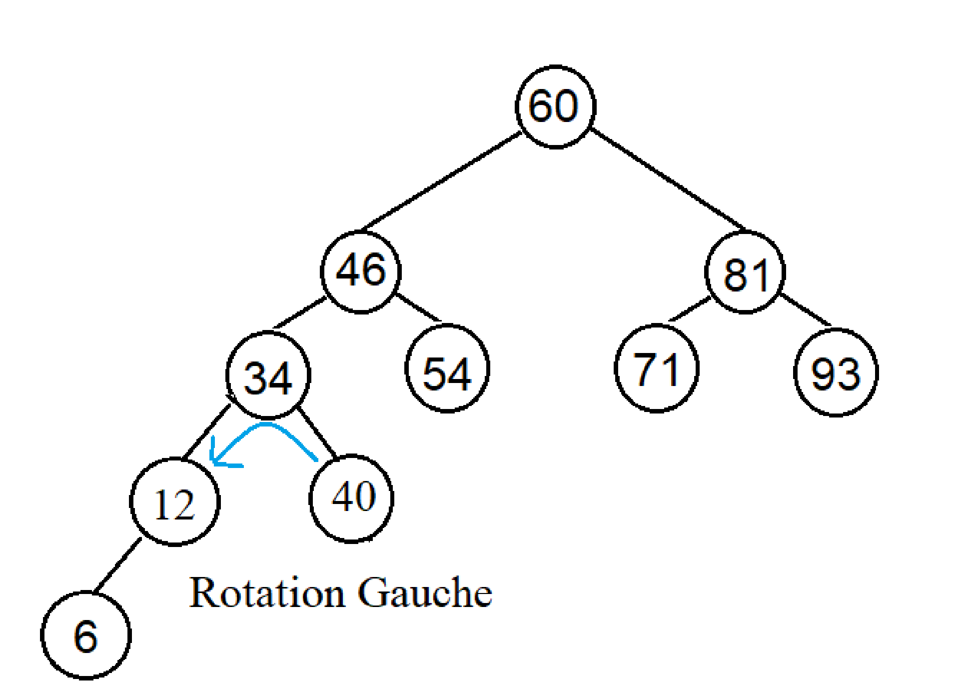


LES ROTATIONS

Déséquilibré vers l'intérieur

Le rééquilibrage est ici plus complexe et se déroule en deux étapes mettant en jeu la partie encadrée. La première phase est une "**rotation gauche**" entre les nœuds 12, 34 et 40 donnant une situation intermédiaire décrite dans la figure ci-dessus :

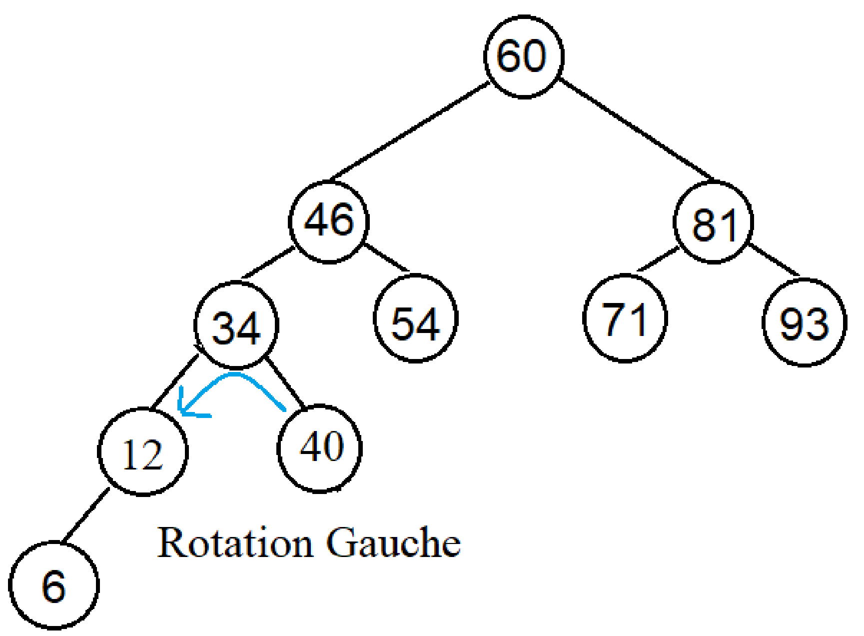




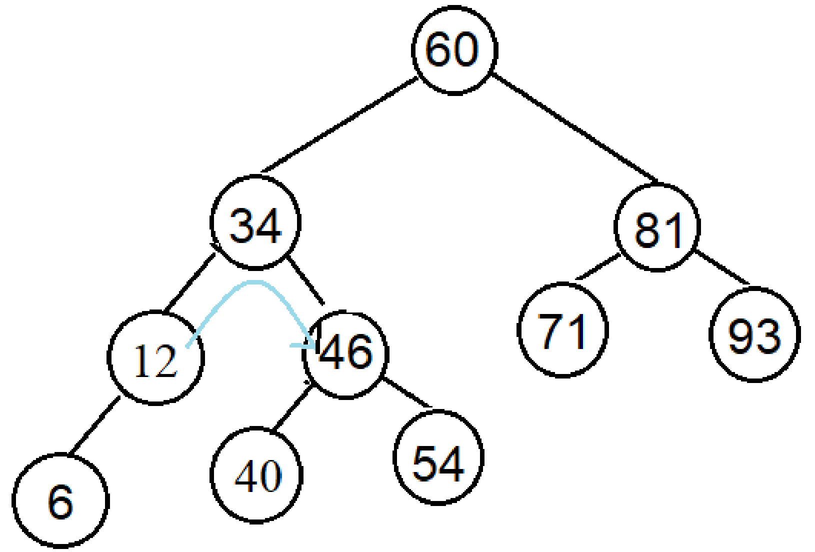
LES ROTATIONS

Déséquilibré vers l'intérieur

Puis il faut effectuer une "**rotation droite**" entre les nœuds 12, 34 et 46 pour obtenir l'arbre AVL de la figure ci-dessus. Au cours de cette rotation, le nœud 40 est rattaché au nœud 46.



Rotation Gauche



Rotation à Droite