ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Cycle Ingénieur
TD N° 1
R.O : Programmation linéaire

Exercice 1

1. *Résoudre les programmes linéaires suivants par la méthode du Simplexe :*

$$[Max] z = x_1 + 2x_2 \qquad sc \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$[Max] z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad sc \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2. *Montrer graphiquement que le programme linéaire suivant n'admet pas de solution optimale :*

$$[Max] z = 2x + 6y$$

$$sc \begin{cases} x - y \leq 30 \\ y - x \leq 40 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

3. *Montrez que le programme linéaire suivant est non borné.*

$$[Max] z = 3x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

$$sc \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq -3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq -5 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 2 *Une entreprise fabrique trois qualités différentes d'huile d'olive. Les quantités maximales pouvant être vendues chaque mois ainsi que les prix de vente sont donnés dans la table suivante :*

Produit	*Ventes maximales (en litres)*	*Prix de vente (en =UM/litre)*
Huile A	*3000*	*4*
Huile B	*3000*	*6*
Huile C	*2000*	*10*

L'entreprise paie 1000 UM pour une tonne d'olives. Chaque tonne d'olives fournit soit 300 litres d'huile A soit 200 litres d'huile B (les coûts de ces transformations ne sont pas modélisés). Chaque litre d'huile A peut être raffiné pour produire 6 dl d'huile B et 3 dl d'huile C. Le coût d'un tel raffinement est de 0.5 UM par litre.
De même, chaque litre d'huile B peut être raffiné pour obtenir 8 dl d'huile C. Le coût de ce raffinement et de 0.3 UM par litre.
Formuler un programme linéaire afin d'aider l'entreprise à déterminer un plan de production mensuel maximisant son profit en précisant clairement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.

Exercice 3 *Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4800 (unités monétaires) pour le lancement de son nouveau produit. Sa campagne publicitaire utilisera à la fois des spots télévisés et des pages dans la presse quotidienne. On pense que chaque minute de télévision va atteindre 100 000 nouveaux spectateurs et chaque page dans un journal va être lue par 80 000 nouveaux lecteurs. Une minute de télévision coûte 800 UM et une page dans un journal 600 UM. La direction de l'entreprise souhaite diffuser au moins trois minutes de spot et une page dans un journal. Son objectif est de maximiser le nombre total de cibles (spectateurs et lecteurs).*

1. *Modéliser ce problème en programme linéaire.*
2. *Représenter l'espace des solutions réalisables.*
3. *Quelle est la combinaison optimale si le budget est augmenté de 4800 à 6000 ?*
4. *Quelle est la décision optimale s'il n'y a pas de contrainte de temps de télévision ?*

Exercice 4 *Une société se consacre à l'excavation et la distribution de matériaux de carrière. Elle doit assurer, pour des travaux routiers, la fourniture de graviers en divers calibres. Un marché a été adjugé pour un prix global de facturation, portant sur les quantités suivantes :*

- *13500 tonnes de graviers de calibre 1*
- *11200 tonnes de graviers de calibre 2*
- *5000 tonnes de graviers de calibre 3.*

La société exploite deux carrières P_1 et P_2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne extraite comme suit : 19,40 UM par tonne pour P_1 et 20 UM par tonne pour P_2.
Après extraction, le pierre est concassée et les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre. Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes (le complément représente du sable considéré comme déchet sans valeur marchande) :

	Carrière 1	*Carrière 2*
graviers calibre 1	*0,36 t*	*0,45 t*
graviers calibre 2	*0,40 t*	*0,20 t*
graviers calibre 3	*0,16 t*	*0,10 t*

1. *Formuler le programme linéaire d'optimisation permettant de définir un programme d'extraction des carrières P_1 et P_2 afin de minimiser le coût des redevances à la société civile.*
2. *Résoudre par la méthode du simplexe.*
3. *Donner une représentation graphique.*

Exercice 5 *La compagnie GOOD Oil possède 5.000 barils de pétrole de type 1 et 10.000 barils de pétrole type 2. La société vend deux produits : l'essence et le fioul avec les spécifications suivantes :*

- *Les deux produits sont fabriqués en combinant le pétrole 1 et le pétrole 2.*
- *Les niveaux de qualité des pétroles 1 et 2 sont respectivement 10 et 5.*
- *L'essence doit avoir un niveau de qualité moyen d'au moins 8 et le fioul au moins 6.*
- *La demande pour chaque produit doit être créée par publicité.*
- *Chaque dollar dépensé en publicité pour l'essence crée une demande de 5 barils, et chaque dollar dépensé pour le fioul de chauffage crée une demande de 10 barils.*
- *L'essence est vendue pour 25$ le baril, le mazout pour 20$.*

Formuler un PL pour aider GOOD Oil à maximiser ses profits.
On admet qu'aucun pétrole de l'un ou l'autre type ne peut être acheté.

Exercice 6 *Dans une entreprise qui fabrique des pièces détachées à la demande un client désire commander des pièces A et B dans un délai d'un mois. Fournisseur et client se sont mis d'accord sur les prix suivants : 138 UM par série de 100 pièces A et 136 UM par série de 100 pièces B. La réalisation des pièces A et B nécessite un passage dans trois ateliers pour lesquels on dispose des renseignements suivants :*

	Nb d'unités d'oeuvre pour 100 pièces A	*Nb d'unités d'oeuvre pour 100 pièces B*	*Coût variable d'une unité d'oeuvre (UM)*
Atelier T	*2*	*1*	*10*
Atelier F	*1*	*4,5*	*12*
Atelier M	*4*	*3*	*14*

Au moment de la commande, l'entreprise ne dispose que d'un nombre limité d'heures dans chaque atelier correspondant respectivement à : 200 unités d'oeuvre pour l'atelier T, 540 unités d'oeuvre pour l'atelier F, 480 unités d'oeuvre pour l'atelier M. Ces nombres d'unités d'oeuvre sont insuffisants pour satisfaire le client dans le délai demandé. L'entreprise lui propose une livraison partielle.
Quelles quantités de pièces A et de pièces B l'entreprise a-t-elle intérêt à fabriquer au cours du mois si elle veut obtenir une marge maximum compte-tenu des moyens de production disponibles. On utilisera la méthode du simplexe dont on donnera par la suite une interprétation graphique.

Exercice 7 *Un agriculteur possède 45 hectares de terre. Chaque hectare peut être planté avec du blé ou du haricot. Chaque hectare de blé rapporte 2000 UM de profit ; et chaque hectare de haricot en rapporte 3000 UM. Travail et les besoins en engrais par hectare pour planter du blé et du haricot sont les suivants :*

	haricot	*blé*
Travail	*3 travailleurs*	*2 travailleurs*
Engrais	*2 t*	*4 t*

On suppose que 100 travailleurs et 120 tonnes d'engrais sont disponibles.

1. *Proposer une formulation PL du problème de maximisation du profit de l'agriculteur.*
2. *Développer le problème dual et écrire une interprétation de celui-ci.*

Exercice 8 *Une usine produit, sur deux chaînes, des appareils électroniques.*
En raison de différences importantes dans les procédés de fabrication, les temps nécessaires aux machines outils "fabrication" (FAB) et "finition-réglage" (FIR) pour traiter un appareil diffèrent sensiblement sur chaque chaîne, avec des prix de revient eux aussi sensiblement différents.
L'élaboration d'un appareil sur la chaîne 1 nécessite 3 heures de FAB et 1 heure de FIR, pour un prix de revient unitaire de 20 KUM, tandis que la chaîne 2 le produit pour 60 KUM avec 1 heure de FAB et 2 heures de FIR. La machine FAB est disponible 60 heures par mois, et la machine FIR 70 heures.

1. *La demande étant de 30 appareils par mois au moins, écrire le problème d'OL permettant de déterminer le plan de production (charges x_1 et x_2 des chaînes) de coût minimal.*
2. *Écrire et interpréter son dual.*
3. *Quel problème est plus adapté pour être résolu par l'algorithme du simplexe ? Trouver la solution optimale de ce problème (primal ou dual, à vous de décider) et reconstruire la solution du problème complémentaire.*