Introduction à la Théorie des Graphes

--

Partie 6 : Recherche d'un flot maximum dans un réseau de transport

Dr. Guelzim ibrahim
Email: ib.guelzim@gmail.com

Sommaire

- Généralités
- Algorithme de Ford et Fulkerson
- Méthode de coupe

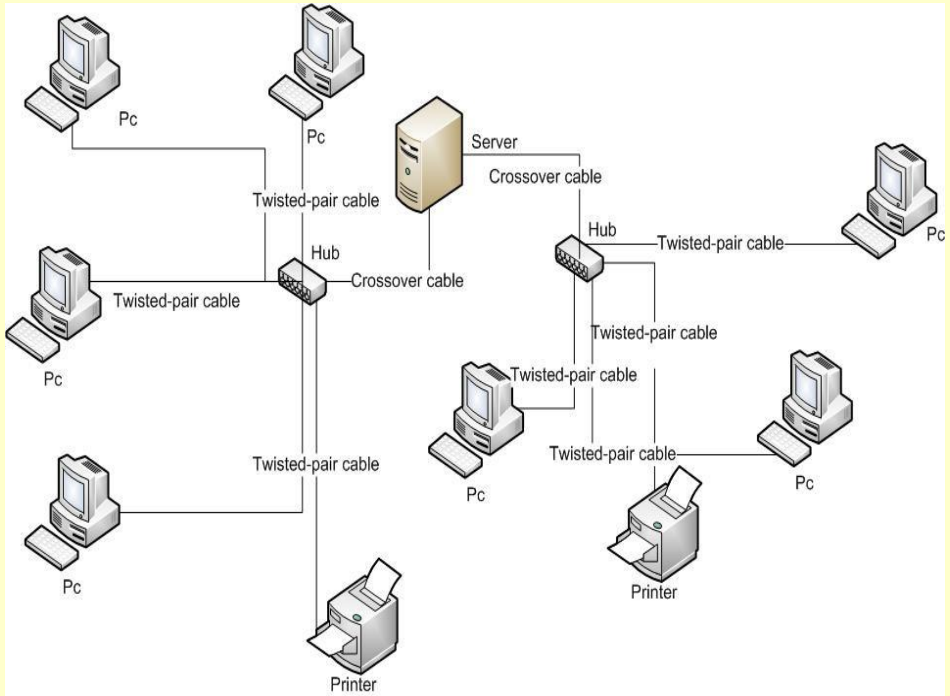
Introduction

- Un réseau de transport est un type de graphe orienté valué permettant par exemple de modéliser la circulation
  - Réseau routier

Introduction

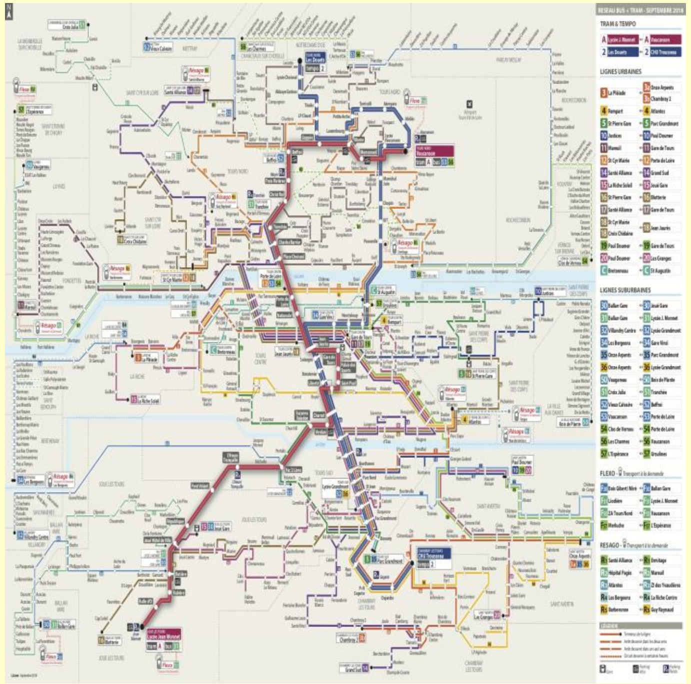
- Un réseau de transport est un type de graphe orienté valué permettant par exemple de modéliser la circulation
  - Réseau informatique:

    Transporter la quantité maximal de paquets dans un réseau Télécom d'une source (unique) vers une destination (puits).



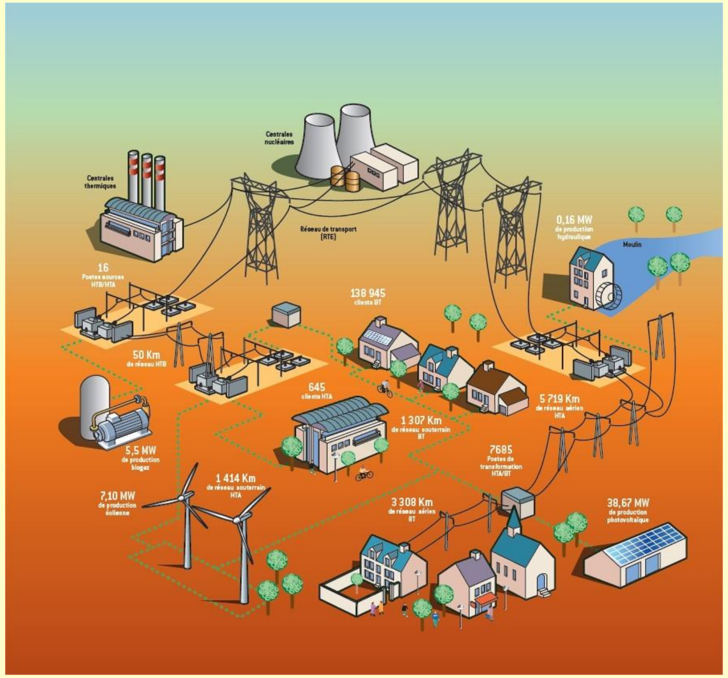
Introduction

- Un réseau de transport est un type de graphe orienté valué permettant par exemple de modéliser la circulation
  - Réseau de transports en commun



Introduction

- Un réseau de transport est un type de graphe orienté valué permettant par exemple de modéliser la circulation
  - Réseau électrique



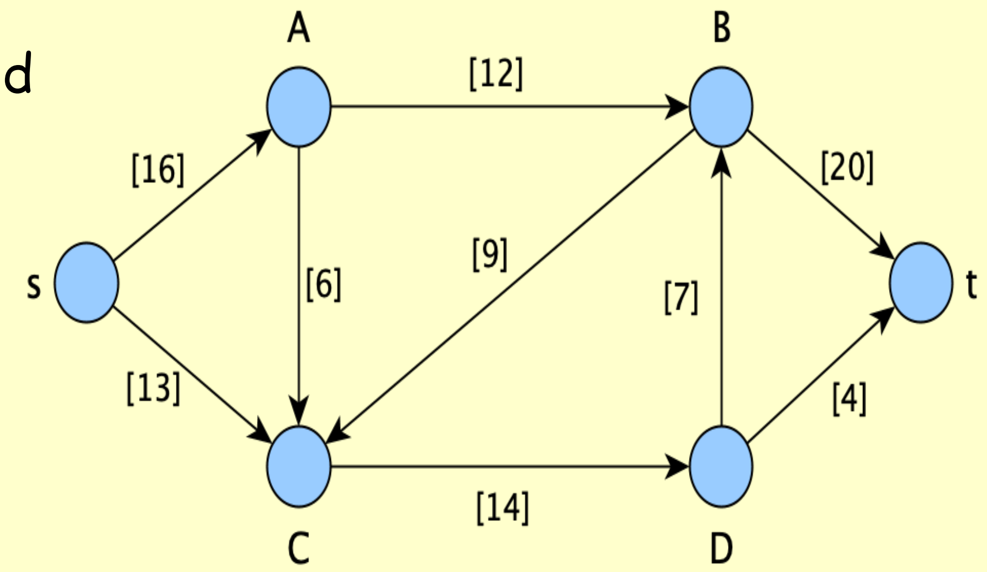
  - Nous pourrons avec cet outil étudier et optimiser le déplacement d'une certaine quantité d'éléments dans n'importe quel réseau prédéfini.

Réseau de transport

- Définition
  - Soit $G = (V , E , C)$ un graphe orienté à valuations positives.
  - On dit que G est un réseau de transport s'il contient :
    - Un sommet **s** appelé **source** qui n'a pas de prédécesseur. (càd $\Gamma^{-1}(s) = \emptyset$)
    - Un sommet **t** appelé **puits** qui n'a pas de successeur. (càd $\Gamma(t) = \emptyset$)
    - Chaque sommet du graphe se trouve sur un chemin allant de **s** vers **t**.
    - Une fonction positive C appelée **capacité**. On nomme capacité de l'arc $a = (x , y)$ le nombre $C(a)$ ou $C(x , y)$.
    - Le graphe est supposé antisymétrique,
      - $G = (V , E)$ est antisymétrique si $[(x , y) \in E \Rightarrow (y , x) \notin E]$
        càd qu'il n'existe pas deux arcs opposés reliant deux mêmes sommets.

Réseau de transport

- On supposera dans la suite que les capacités des arcs sont finies et à valeurs entières,
- Si ce n'est pas le cas:
  - Approcher les valeurs réelles par des rationnels,
  - Réduire ces nombres au même dénominateur commun d
  - Choisir comme unité de référence 1/d.
- Considérons le graphe valué orienté suivant :
  - Ce graphe est bien un réseau de transpor, puisque :
    - Les sommets **s** et **t** sont respectivement une source et un puits,
    - Tout autre sommet du graphe se trouve sur un chemin reliant **s** à **t**, et
    - La propriété d'antisymétrie est bien vérifiée.

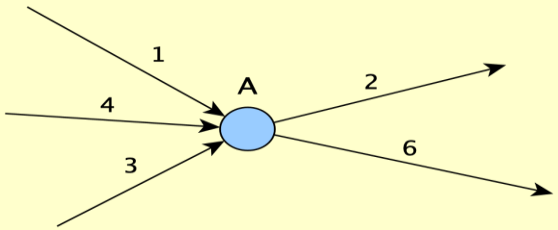


Flot

- Définition:
  - Soit $G = (V , E , C)$ un réseau de transport.
  - Un **flot** circulant dans le réseau G est une fonction **f** définie sur l'ensemble des arcs E représentant une **quantité transportée** sur cet arc et vérifiant la loi de conservation suivante (loi des nœuds de Kirchhoff) :

$$\forall x \neq s,t \qquad f_x = f(x) = \sum_{y \in V,\ (y,x) \in E} f(y , x) = \sum_{y \in V,\ (x,y) \in E} f(x , y)$$

- Exemple : sommet A



  - Si f est un flot sur un réseau de transport G, alors f(s) = f(t);
  - cette quantité s'appelle la **valeur du flot**.

Flot Compatible

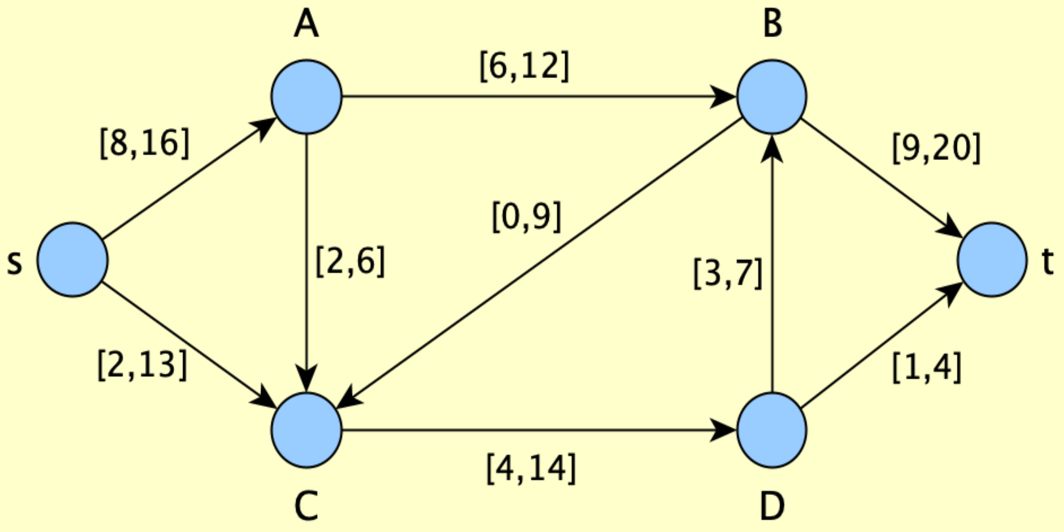
- Définition
  - Soit $G = (V , E , C)$ un réseau de transport dont, **C** est la capacité des arcs.
  - On dit qu'un flot f circulant dans G est **<u>compatible</u>** si sa valeur sur chacun des arcs est inférieure à la capacité de l'arc en question, càd:

$$\forall (x , y) \in E , \ f(x , y) \leq C(x , y)$$

- Interprétation : cette inégalité exprime le fait qu'il n'y aura pas de débordements.

Flot Compatible

- Un réseau de transport et un flot compatible y circulant :



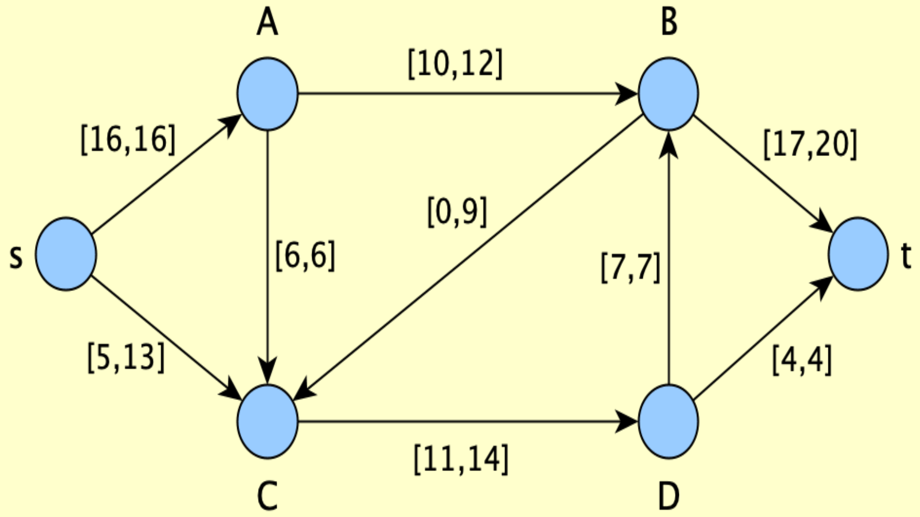
  - Il s'agit bien d'un flot car la loi de conservation est vérifiée pour tous les sommets différents de la source et du puits.
  - Ce flot est compatible. (la valeur du flot est ici égale à 10).

Flot Complet

- Définitions:
  - Pour un flot **f** dans un réseau de transport $G = (V , E , C)$, on dit qu'un arc **a** est **saturé** si $f(a) = C(a)$.
  - On dit qu'un flot f circulant dans G est **complet** s'il est compatible et si tout chemin allant de **s** à **t** contient au moins un arc saturé.

Flot Complet

- Exemple : Réseau de transport et un flot complet y circulant :



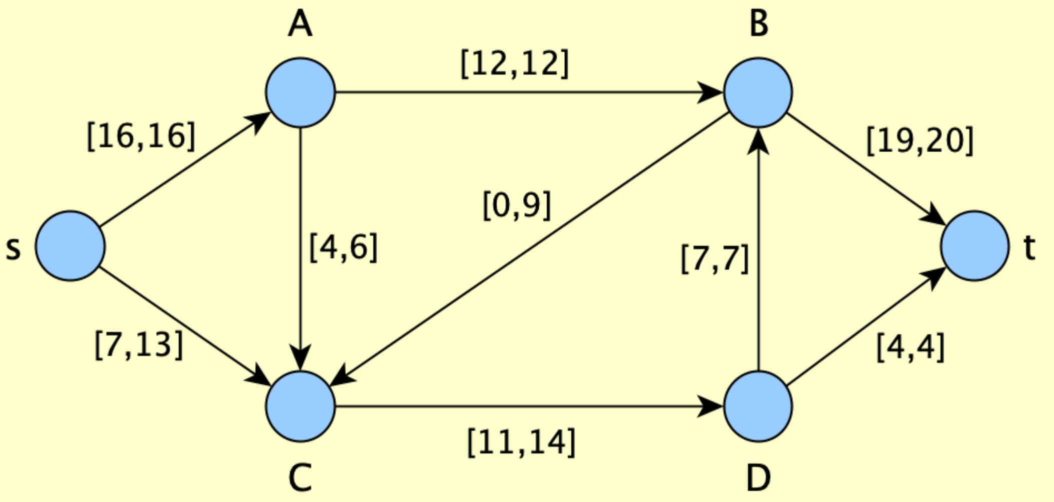
- Ce flot est complet, car chaque chemin de s vers t , contient au moins un arc saturé,
- Exemple (s, C, D, t), contient un arc saturé (D,t).

Flot Maximal

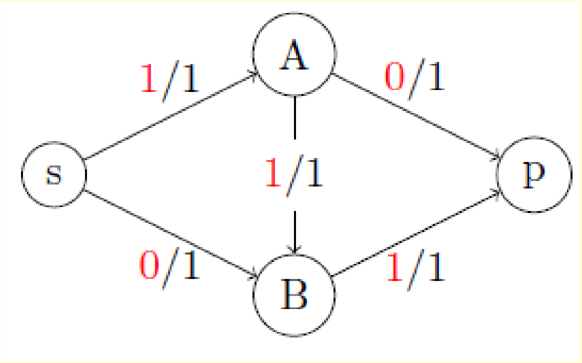
- Définition
  - Soit $G = (V , E , C)$ un réseau de transport.
  - On dit qu'un flot f circulant dans G est **maximal** s'il est compatible et s'il possède la plus forte valeur du flot parmi tous les flots compatibles.

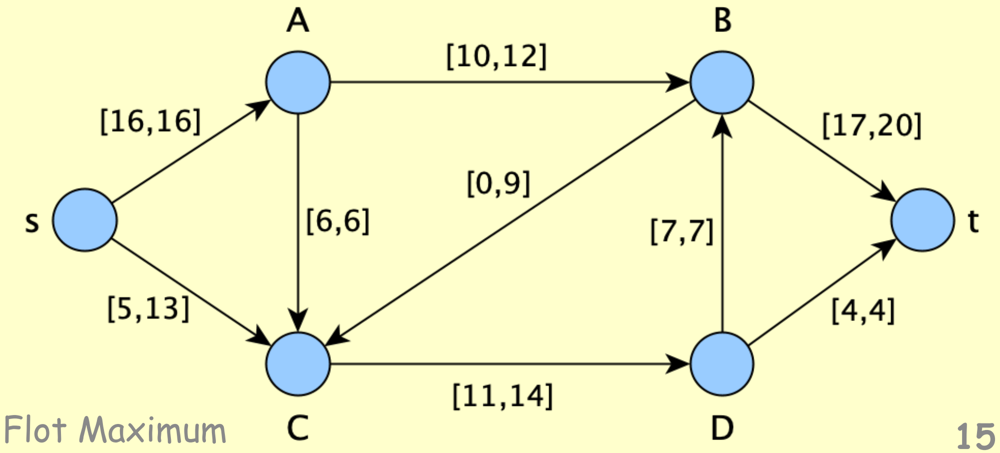
Flot Maximal

- Exemple : Réseau de transport et un flot maximal y circulant :



- Remarques :
  - Tout flot maximal est complet,
  - Mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai:
    - Pour le 1er exemple (complet NON Maximal):
      - f(s,B) = 1 , f(A,B) = 0 , f(A,P) = 1
    - Pour le 2ème exemple (complet NON Maximal):
      - f(s,C) = 7 , f(A,C) = 4 , f(A,B) = 12 , f(B,t) = 19





Objectif

- Pour un réseau de transport donné comment déterminer un flot de valeur maximale ainsi que les flots le long de chaque arc?
- 1^er Essai : Recherche d'un flot complet
  - Considérons le graphe partiel engendré par les arcs non saturés.
  - Si le flot n'est pas complet, il existe nécessairement un chemin **μ** allant de l'entrée à la sortie, ne contenant pas d'arc saturé.
  - Définir un nouveau flot pour le réseau en améliorant d'une valeur **ε** le flot de chacun des arcs constituant le chemin **μ**.
  - la valeur du flot est alors également augmentée de ε.

Objectif

- 1^{er} Essai : Recherche d'un flot complet
    - On peut donc progressivement augmenter la valeur d'un flot incomplet jusqu'à ce qu'il soit complet.
    - En tenant compte des différences entre les capacités et la valeur du flot sur les arcs de μ, on peut connaître d'avance l'augmentation possible du flot.
    - Cependant, le flot complet ainsi obtenu n'est pas, nécessairement maximal.

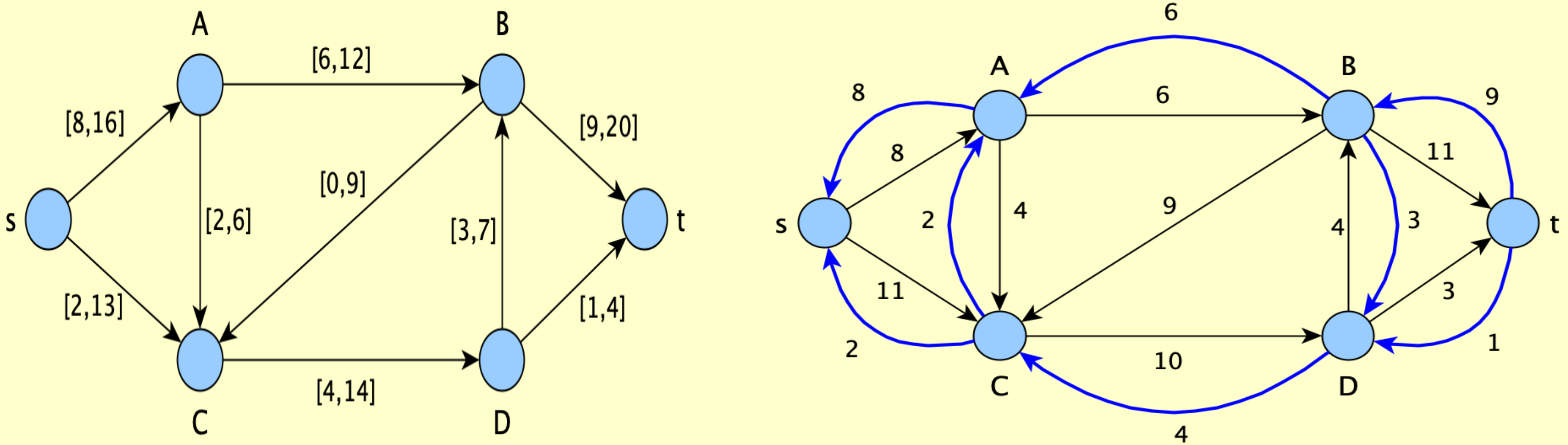
→ Nécessité d'**<u>amélioration du flot</u>**

Recherche Flot Maximal : Graphe d'écart

- Définition
  - Soient $G = (V , E , C)$ un réseau de transport tq C est la capacité des arcs et soit f un flot compatible circulant dans G.
  - Le **<u>graphe d'écart</u>** de ce flot f dans G est le graphe $G'(f) = (V , E' , C')$ tq :
    - si $(x , y) = a \in E$, et $f(a) < C(a)$ alors $a \in E'$ et $C'(a) = C(a) - f(a)$
    - si $(x , y) = a \in E$, et $f(a) > 0$ alors $a^{-1} = (y , x) \in E'$ et $C'(a^{-1}) = f(a)$
    - C' appelée **<u>capacité résiduelle</u>**

Recherche Flot Maximal : Graphe d'écart

- Exemple. un réseau de transport avec un flot y circulant et son graphe d'écart:



- Considérons par exemple l'arc (C,D). Il y aura également dans le graphe d'écart un arc (C,D) mais de valuation égale à la capacité restante, càd la capacité initiale moins la valeur du flot, i.e. 14-4=10.
- De plus, étant donné qu'il circule dans (C,D) un flot d'une valeur de 4, il y aura dans le graphe d'écart un arc (D,C) de valuation égale à 4.
- Même chose pour tous les autres arcs.

Algorithme de Ford et Fulkerson

- Permet de déterminer un **flot maximal** dans un réseau de transport.
- Le pseudo code de cet algorithme est le suivant :
  1. Partir d'un flot compatible, par exemple le flot nul. Construire le graphe d'écart correspondant.
  2. Rechercher un chemin μ allant de la source vers le puits dans le graphe d'écart.
  3. Il y a alors deux possibilités :
     - S'il existe un tel chemin :
       - Augmenter le flot (circulant sur ce chemin dans le réseau) de ε = minimum des valuations des arcs du chemin dans le graphe d'écart.
       - Recommencer alors à l'étape 2.
     - Sinon, l'algorithme est terminé et le flot courant est maximal.

Algorithme de Ford et Fulkerson

- Soit $G = (V , E , C)$ un graphe réseau de transport tq
  - C représente les capacités,
  - **s** et **t** respectivement la source et le puits.
  - f un flot circulant sur ce réseau.
- Soit $G'(f) = (V , E' , C')$ le graphe d'écart associé au flot f circulant sur le réseau G.
- tq C' ses valuations, (capacités résiduelles).

Algorithme de Ford et Fulkerson

- **Initialisation:**

  $\forall\ (x , y) \in E,\ f\ (x , y) = 0$

- **Traitement:**

  Construire le graphe d'écart G '

  TantQue il existe un chemin allant de s à t dans G ' FAIRE

      Choisir un chemin **μ** allant de s à t dans G '

      $\varepsilon = \min \{ C' (x , y) \,/\, (x , y) \in \mu \}$

      Pour Tout arc $(x , y) \in \mu$ Faire

          Si $(x , y) \in E$ Alors

              $f(x , y) \leftarrow f(x , y) + \varepsilon$

          Sinon

              $f(x , y) \leftarrow f(x , y) - \varepsilon$

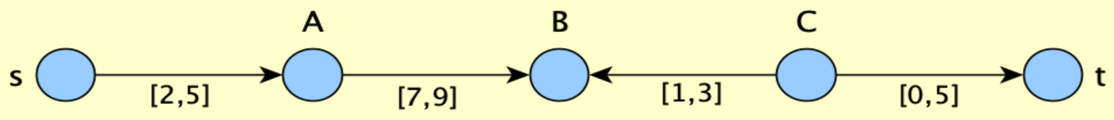
          Fin Si

      Fin Pour

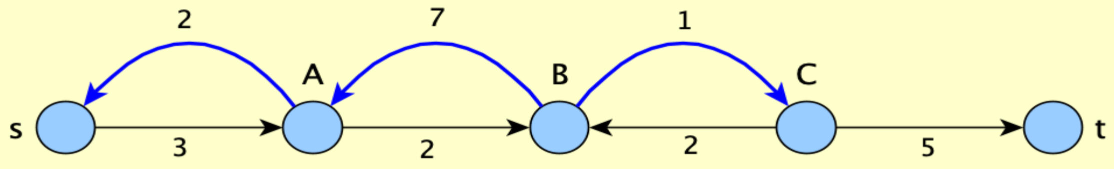
  FinTantQue

Algorithme de Ford et Fulkerson

- Exemple partiel
  - Imaginons qu'une partie d'un réseau de transport soit :



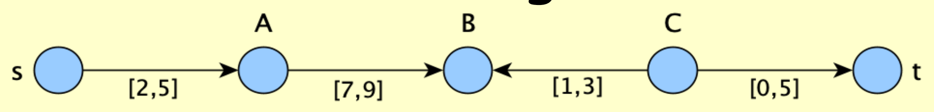
  - L'extrait du graphe d'écart correspondant est donc :



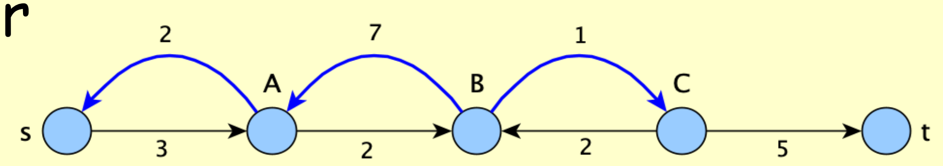
  - On peut donc considérer dans ce graphe d'écart le chemin (s,A,B,C,t) allant de la source vers le puits.

Algorithme de Ford et Fulkerson

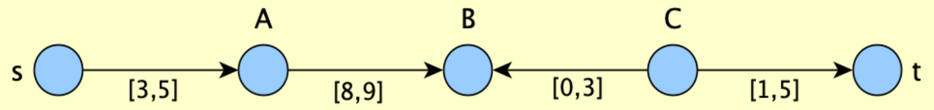
- Exemple partiel
  - Le minimum des valuations des arcs constituants ce chemin est égal à 1, on va donc modifier notre flot en conséquence.



  - Dans ce chemin les arcs (s,A), (A,B) et (C,t) appartiennent au réseau, on va donc augmenter la valeur du flot y circulant de 1.

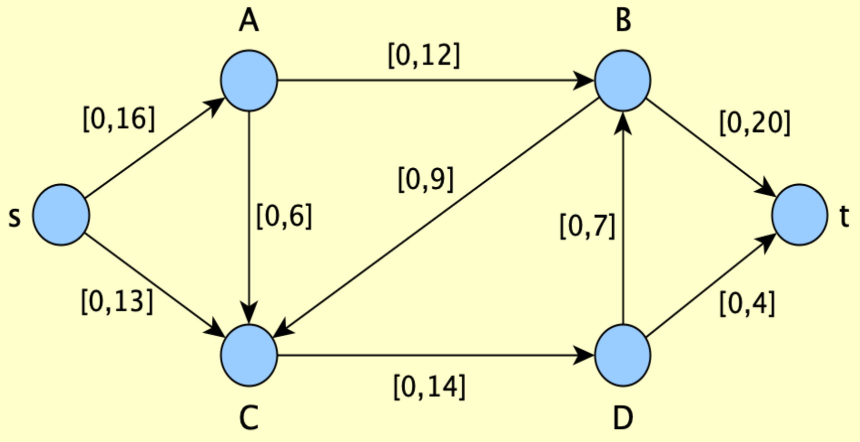


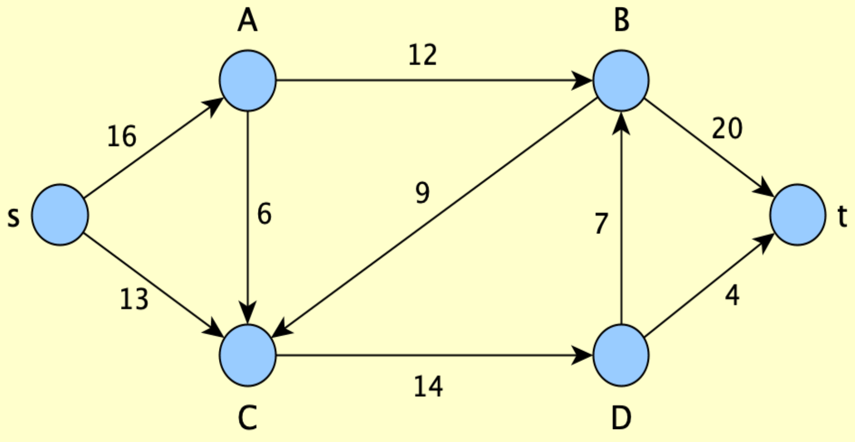
  - Par contre l'arc (B,C) n'appartenant pas au réseau, on va diminuer la valeur de son flot de 1.
  - Nous obtenons donc ce nouveau flot :



Algorithme de Ford et Fulkerson

- **Exemple complet.** Considérons le réseau de transport G suivant :

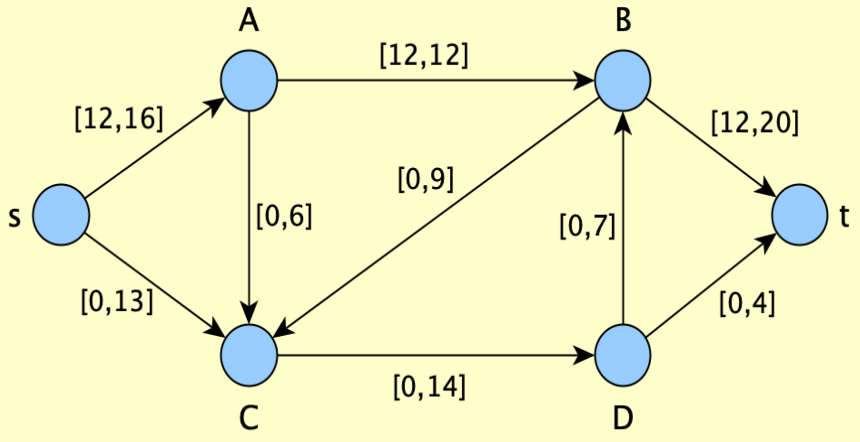


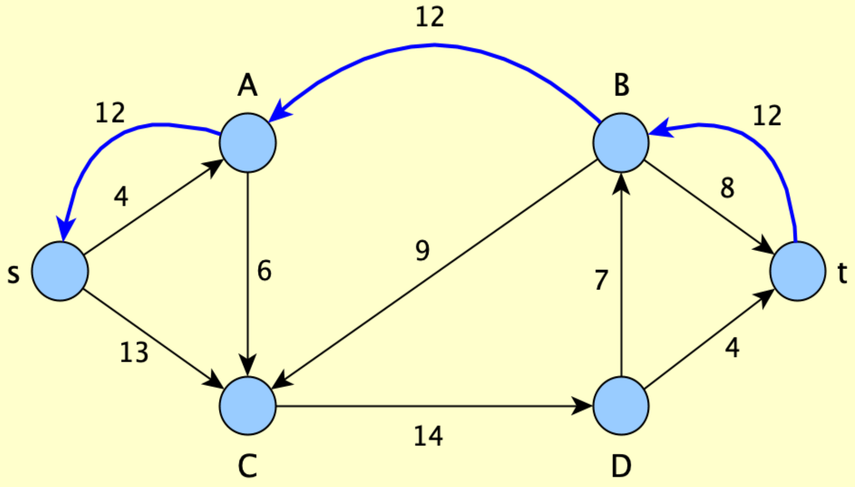


- Nous avons pour l'instant un flot nul, dont le graphe d'écart correspond (ci-haut à droite) :
- Dans ce graphe d'écart, considérons le chemin μ = (s,A,B,t) :
  - La valuation minimale de ses arcs ε = 12, on va donc augmenter le flot de cette valeur.
  - Tous les arcs de ce chemin appartiennent bien au réseau donc on y augmente le flot courant

Algorithme de Ford et Fulkerson

- Exemple complet

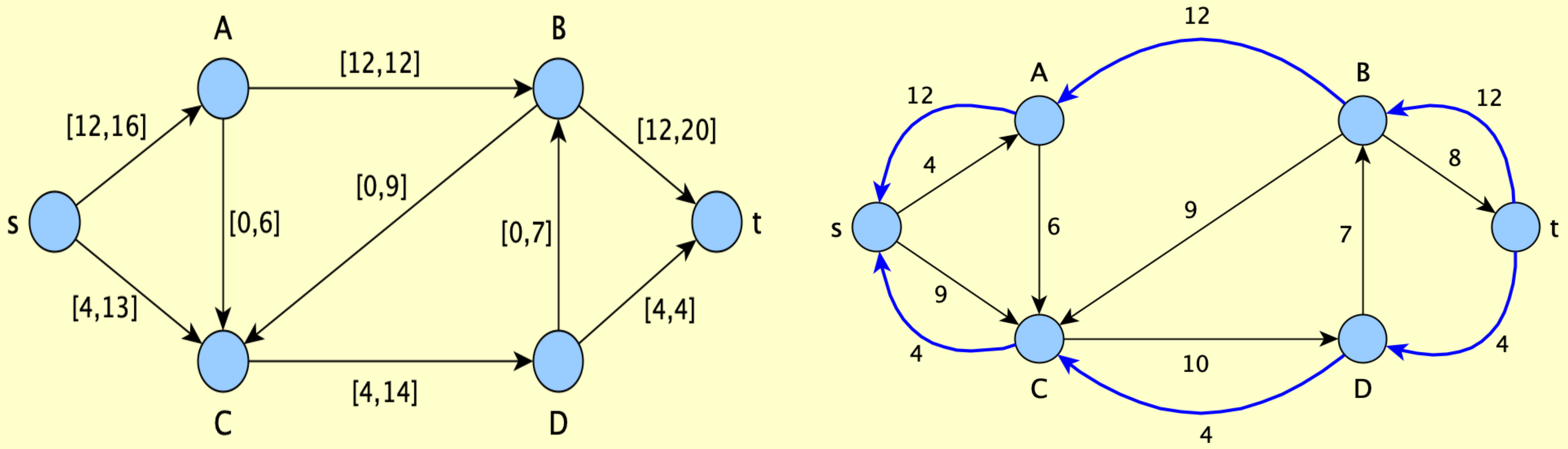




- Dans ce graphe d'écart, considérons maintenant le chemin μ = (s,C,D,t).
- La valuation minimale de ses arcs ε = 4, on va donc augmenter le flot de cette valeur.
- Tous les arcs de ce chemin appartiennent bien au réseau donc on y augmente le flot courant

Algorithme de Ford et Fulkerson

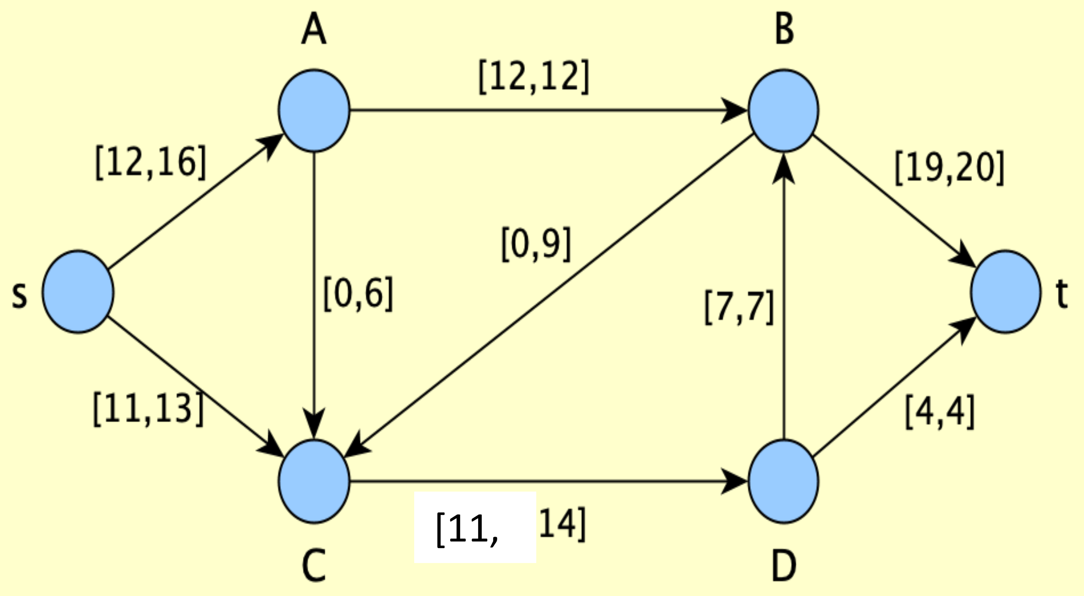
- Exemple complet. Màj du graphe d'écart :

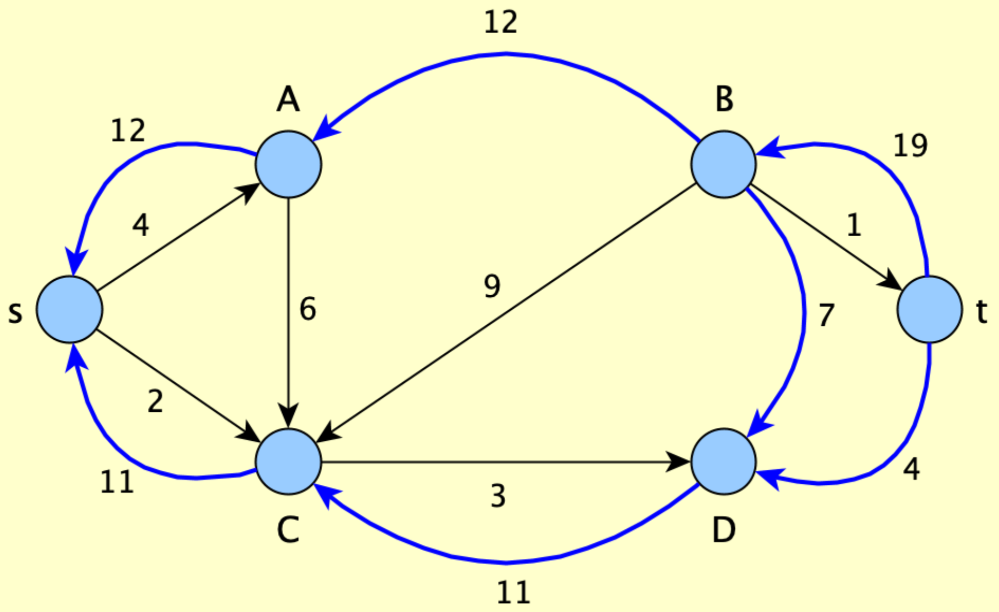


  - ○ μ = (s,C,D,B,t).
  - ○ La valuation minimale de ses arcs ε = 7

Algorithme de Ford et Fulkerson

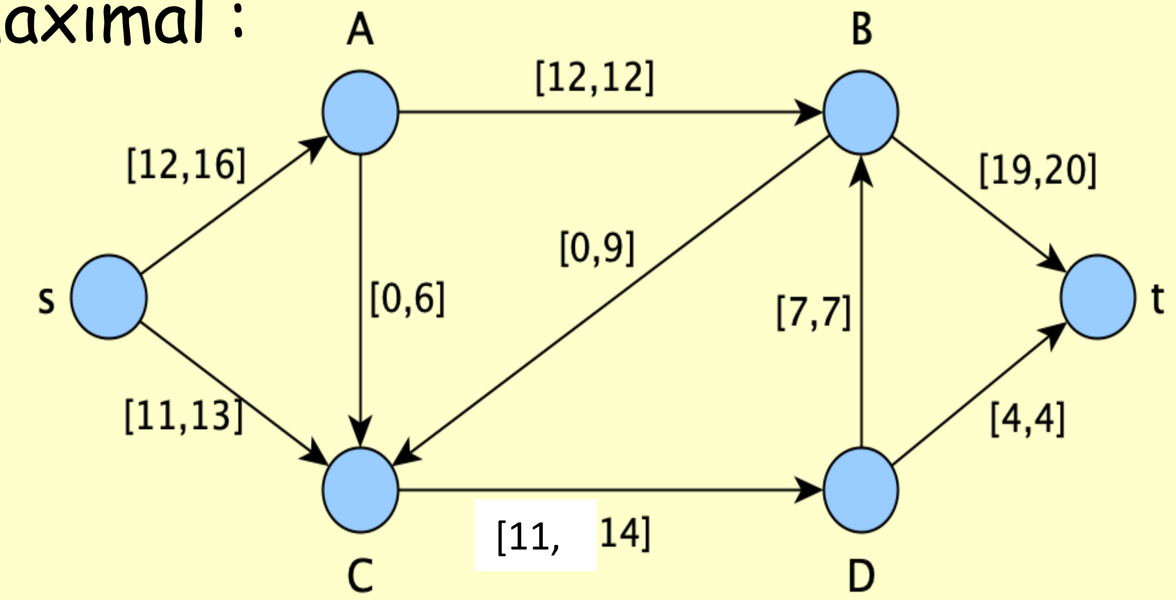
- Exemple complet. Màj du graphe d'écart :





Algorithme de Ford et Fulkerson

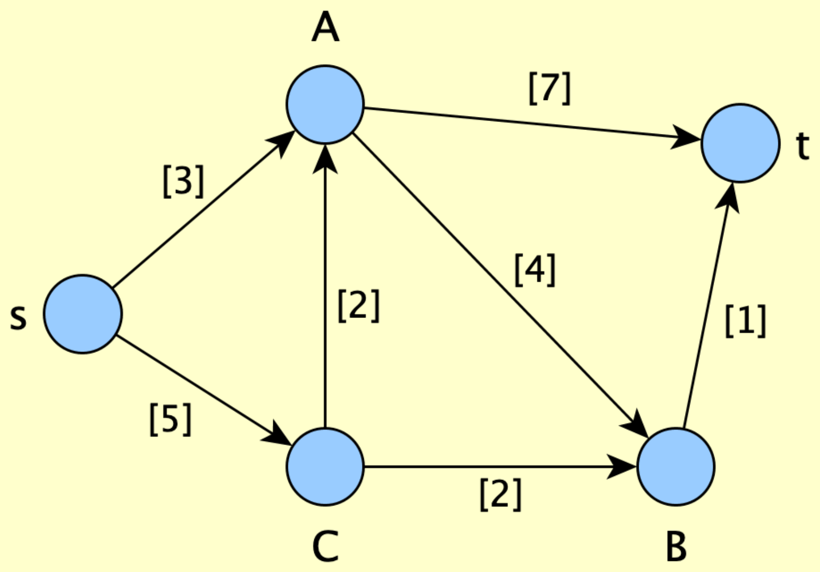
- Exemple complet.
  - Il n'y a plus de chemins allant de la source vers le puits dans le graphe d'écart, le flot courant est donc maximal :



  - La valeur du flot maximal est ainsi de 23.

Algorithme de Ford et Fulkerson

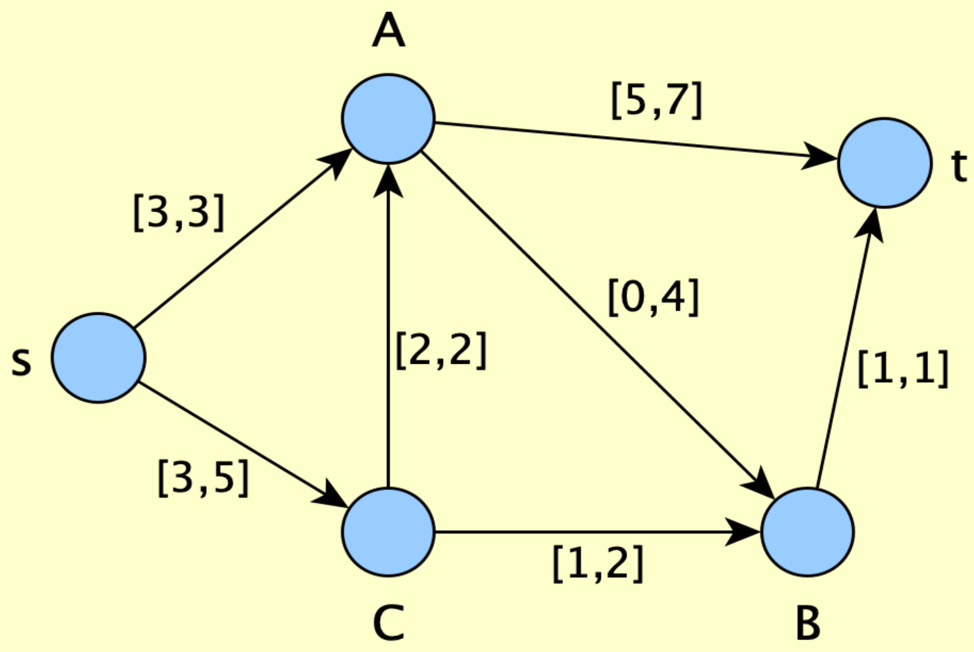
- Exercice. Considérons le réseau de transport suivant :



- Appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson à ce graphe.

Algorithme de Ford et Fulkerson

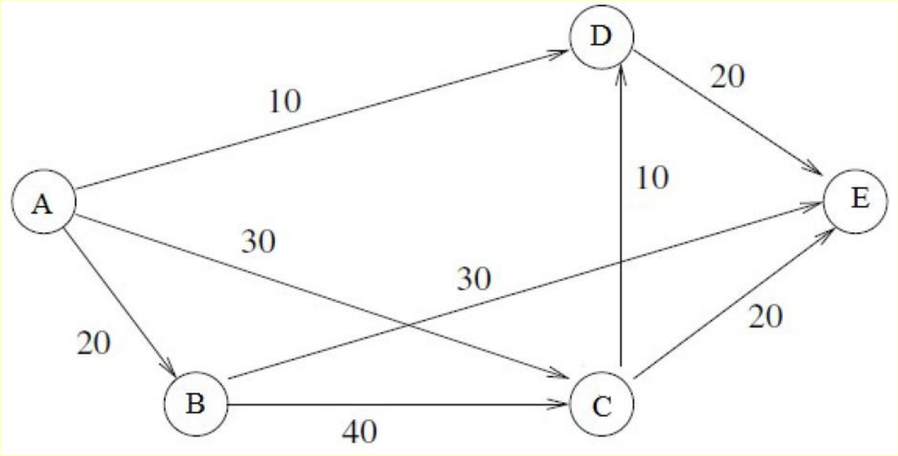
- Correction Exercice. Considérons le réseau de transport suivant :



Méthode des coupes

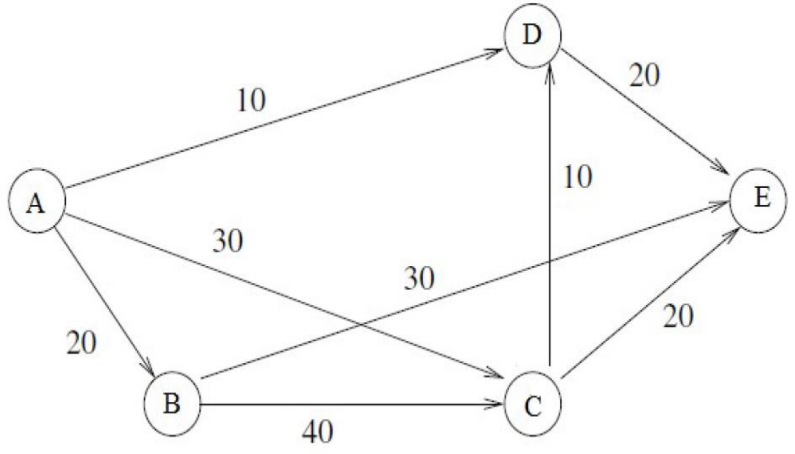
- Énumération des coupes:
  - Une coupe est une **partition** de l'ensemble des sommets du réseau X en 2 parties {S, T}, l'une contient la source et l'autre contient le puits.
  - La capacité C(S,T) d'une coupe est la somme des capacités des arcs de S à T: $C(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$
  - Une coupe définit un ensemble d'arcs qui, **s'ils sont supprimés du réseau, cela entraînera une interruption totale de la circulation entre les noeuds d'entrée (source) et de sortie (puits)**.
  - Parmi toutes les coupes possibles dans le réseau, la coupe de **plus petite capacité** donne le débit maximal dans le réseau.

Méthode des coupes



- Pour déterminer le flot maximal, il est nécessaire d'énumérer toutes les coupes, puis choisir la coupe de **<u>capacité minimale</u>**; (voir diapo suivant)
- Une tâche ordinairement difficile pour le réseau général.
  → Nécessité d'un algorithme efficace.

Méthode des coupes

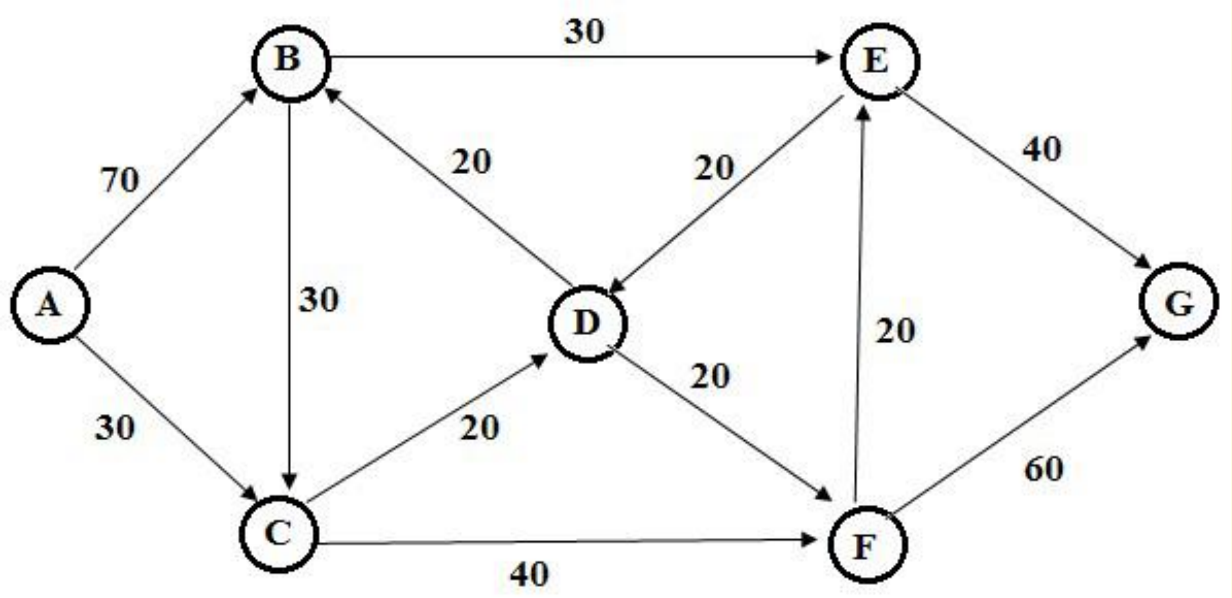


S	T	Arcs Associés	Capacité
A	**B,C,D,E**	**(AB)(AC)(AD)**	**20 + 30 + 10 = 60**
A,B	C,D,E	(AC)(AD)(BC)(BE)	30 + 10 + 40 + 30 = 110
A,C	**B,D,E**	**(AB)(AD)(CD)(CE)**	**20 + 10 + 10 + 20 = 60**
A,D	B,C,E	(AB)(AC)(DE)	20 + 30 + 20 = 70
A,B,C	D,E	(AD)(BE)(CD)(CE)	10 + 30 + 10 + 20 = 70
A,B,D	C,E	(AC)(BC)(BE)(DE)	30 + 40 + 30 + 20 = 120
A,C,D	**B,E**	**(AB)(CE)(DE)**	**20 + 20 + 20 = 60**
A,B,C,D	E	(BE)(CE)(DE)	30 + 20 + 20 = 70

→ Flot Optimal du réseau = Capacité minimal de toutes les coupes : **60**

TD 5 Ex 1

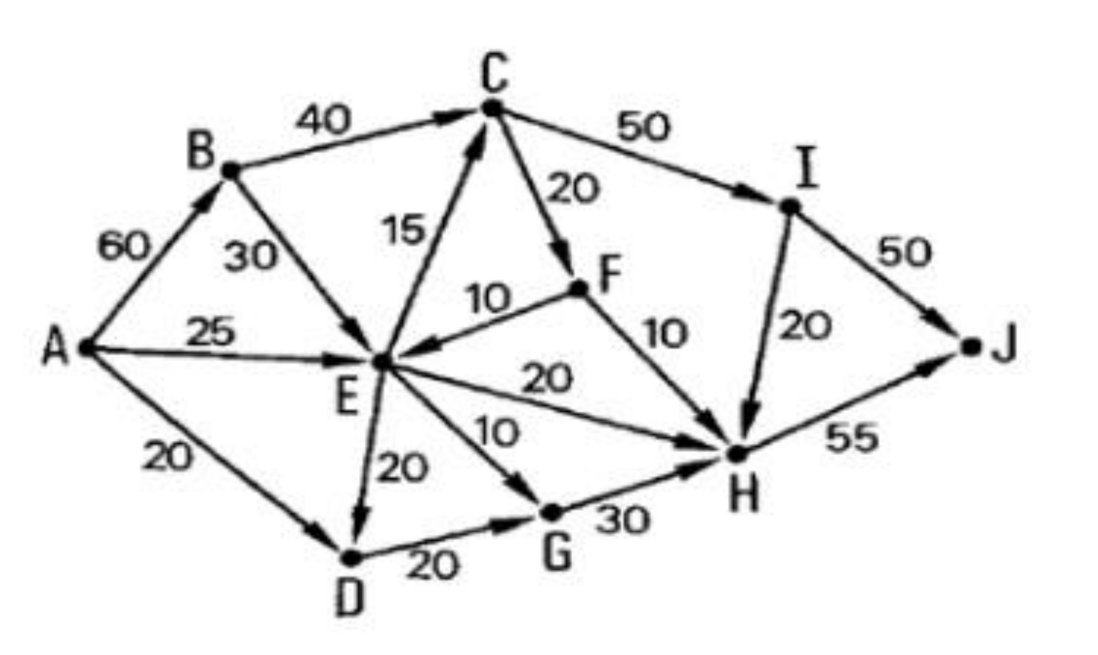
- Soit le réseau, valué par les capacités de ses arcs, donné par le croquis suivant :



- Déterminer un flot maximal sur ce réseau de transport.

TD 5 Ex 2

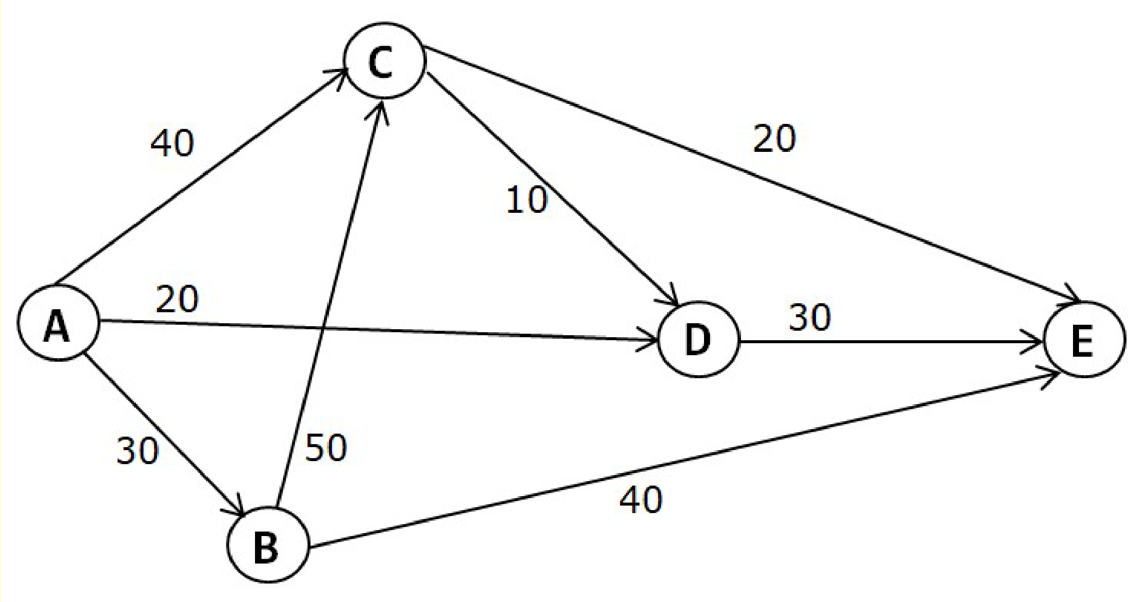
- Soit le réseau, valué par les capacités de ses arcs, donné par le croquis suivant :



- Déterminer un flot maximal sur ce réseau de transport.

TD 5 Ex 3

- Utiliser la méthode des coupes pour déterminer toutes les coupes possibles du réseau RF.



- En déduire le flot maximal du réseau RF