Introduction à la Théorie des Graphes

Dr. Guelzim ibrahim
Email: ib.guelzim@gmail.com

Sommaire

- Connexité
  - Chemin, Circuit
  - Chaîne, Cycle
  - Graphe connexe
  - Composante connexe

Chemin - Circuit

- Définitions
  - Soit $G = (V , E)$ un graphe orienté.
  - Un chemin de G est une suite $(x_0, x_1, ..., x_n)$ de sommets de G , où deux sommets consécutifs quelconques sont reliés par un arc du premier vers le second.
  - Autrement dit :

$$\forall i, 0 \leq i \leq n - 1, (x_i , x_{i+1}) \in E$$

  - Les sommets x_0 et x_n sont respectivement l'**origine** et l'**extrémité** du chemin.

Chemin - Circuit

- Définitions
  - On appelle **longueur** du chemin le nombre d'arcs le constituant,

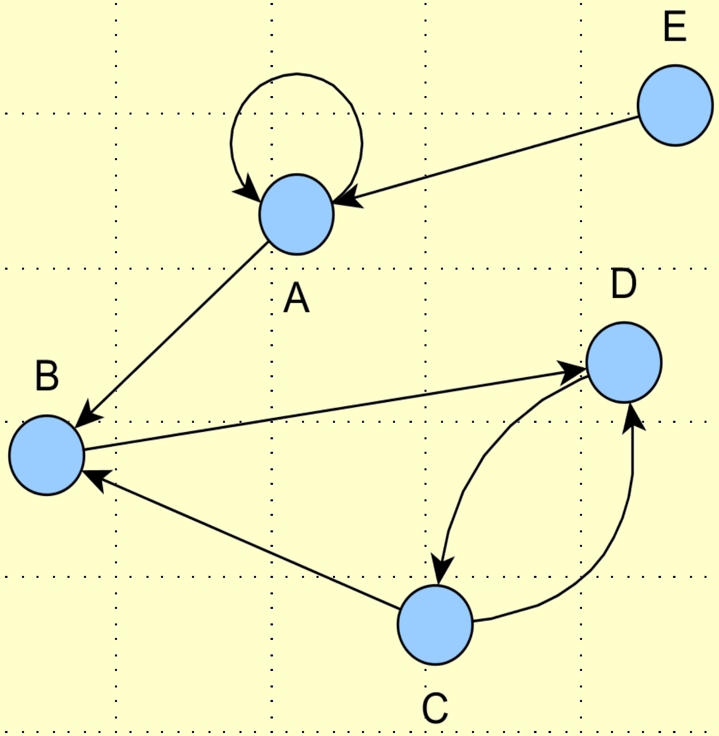
En l'occurrence, n dans la description précédente.

  - Un **circuit** est un chemin de longueur non nulle dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Rq : un circuit de longueur 1 est une boucle.

Chemin - Circuit

- Exemple:
  - Considérons le graphe orienté ci-contre:



  - Quelques chemins :
    - (A,B,D,C,B) , (E,A,A,B) , (D,C,D,C,B)
  - (A,B,C,D,B) et (D,C,B,A) ne sont pas des chemins
  - Quelques circuits :
    - (B,D,C,B) , (D,C,B,D,C,D)
  - (B,C,D,B) et (A,B,D,C,B,A) ne sont pas des circuits

Chaîne - Cycle

- Définition
  - Soit $G = (V , E)$ un graphe non orienté.
  - Une **chaîne** de G est une suite $(x_0, x_1, ..., x_n)$ de sommets de G, où deux sommets consécutifs quelconques sont adjacents.
  - Autrement dit :

$$\forall i, 0 \leq i \leq n - 1, (x_i , x_{i+1}) \in E$$

  - Les sommets x_0 et x_n sont respectivement l'**origine** et l'**extrémité** de la chaîne.

Chaîne - Cycle

- Définitions
  - On appelle **longueur** de la chaîne le nombre d'arêtes la constituant,

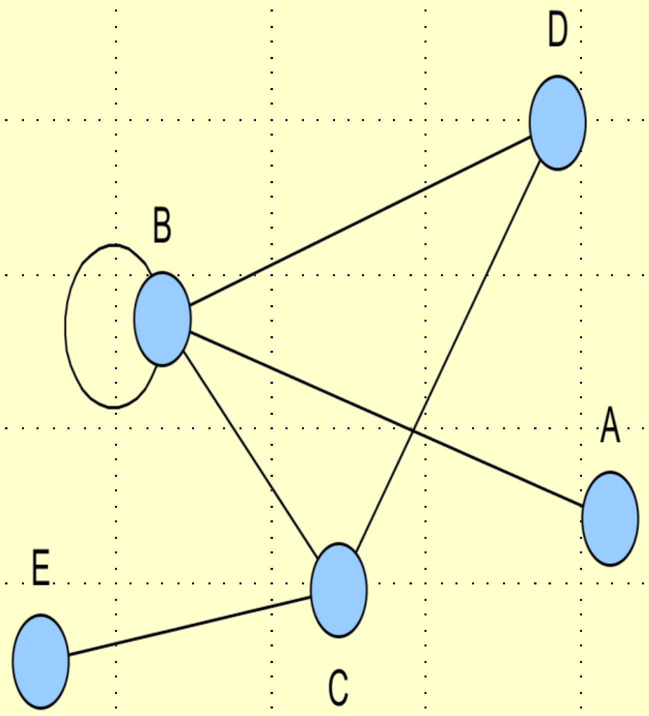
    En l'occurrence, n dans la description précédente.

  - Un **cycle** est une chaîne de longueur non nulle dont l'origine et l'extrémité coïncident.

    Rq : un cycle de longueur 1 est une boucle.

Chaîne - Cycle

- Exemple:
  - Considérons le graphe non orienté ci-contre:
  - Quelques chaînes :
    - (C,D,B,B,A) , (D,B,C,E) , (E,C,D,B,C,D,B,A)
  - (C,B,D,A) et (B,E) ne sont pas des chaînes
  - Quelques cycles :
    - (C,D,B,B,C), (D,B,A,B,C,E,C,D)
  - (D,B,A,D) et (B,C,E,B) ne sont pas des cycles



Chaîne - Cycle

- Ces définitions ne s'appliquent que dans le cas des graphes où il n'y a, au plus, qu'une arête entre deux sommets.

- Dans le cas de multi-graphes, il faudrait préciser quelle arête joint les sommets.

- Une chaîne serait alors une suite alternée de sommets et d'arêtes.

Parcours simple et élémentaire

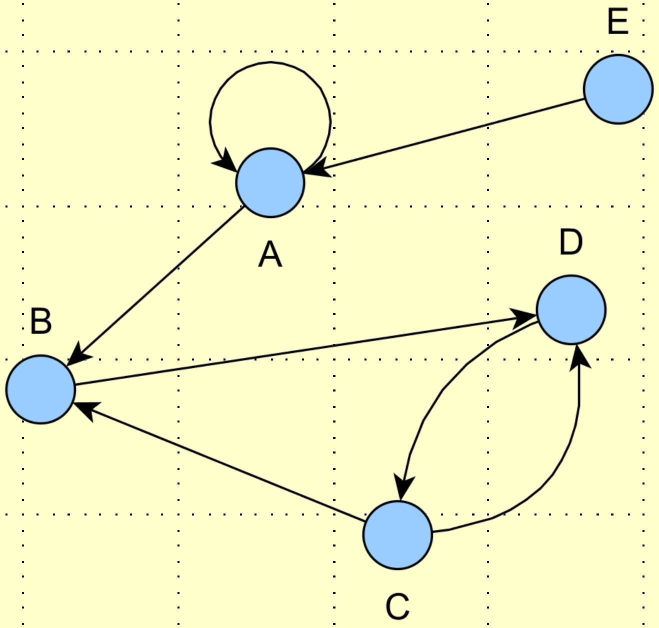
- Définitions:
  - Dans un graphe orienté (resp. non orienté), un chemin (resp. une chaîne) est dit **simple** s'il ne passe pas deux fois par le même arc (resp. arête).
  - Dans un graphe orienté (resp. non orienté), un chemin (resp. une chaîne) est dit **élémentaire** s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Parcours simple et élémentaire

- Remarques:
  - Les définitions ci-dessus s'appliquent aux cas particuliers des cycles et circuits.
  - Un circuit (ou cycle) est élémentaire même si son origine et extrémité sont confondues.
  - Il est clair qu'une chaîne ou un chemin élémentaire est nécessairement simple.

Parcours simple et élémentaire

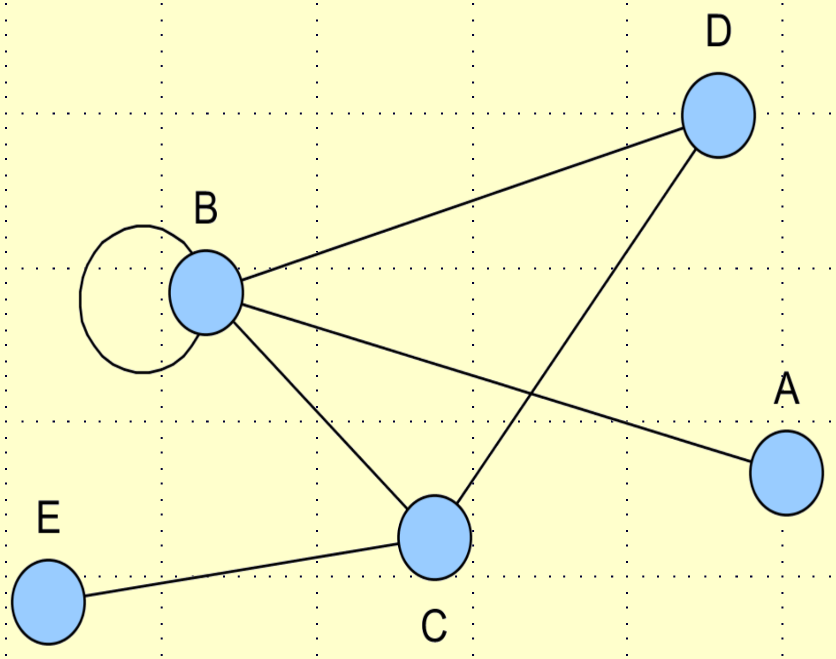
- Exemple 1:
  - Considérons le graphe orienté :



  - (E,A,B,D,C,B) est un chemin simple
  - (B,D,C,B) est un circuit simple
  - (E,A,B,D,C) est un chemin élémentaire
  - (D,C,D) est un circuit élémentaire

Parcours simple et élémentaire

- Exemple 2:
  - Soit le graphe non orienté ci-contre:



  - (E,C,D,B,C) est une chaîne simple
  - (C,D,B,B,C) est un cycle simple
  - (A,B,D,C,E) est une chaîne élémentaire
  - (B,D,C,B) est un cycle élémentaire
  - (C,D,B,B,C) n'ai pas un cycle élémentaire

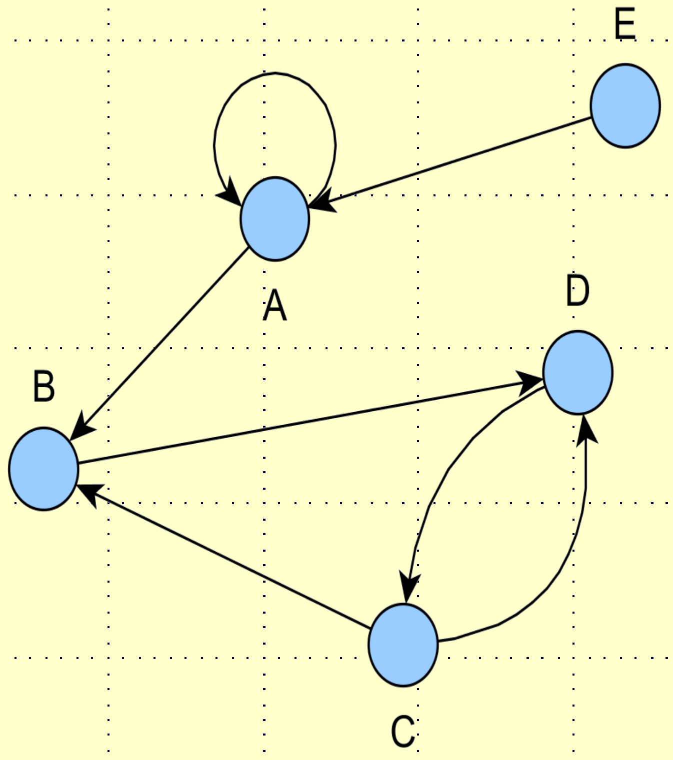
Liste d'adjacence

- Définition:
  - La **<u>liste d'adjacence</u>** d'un sommet d'un graphe orienté (resp non orienté) est la liste de ses successeurs (resp sommets adjacents).

- On peut représenter un graphe par les listes d'adjacences de ses sommets.

Liste d'adjacence

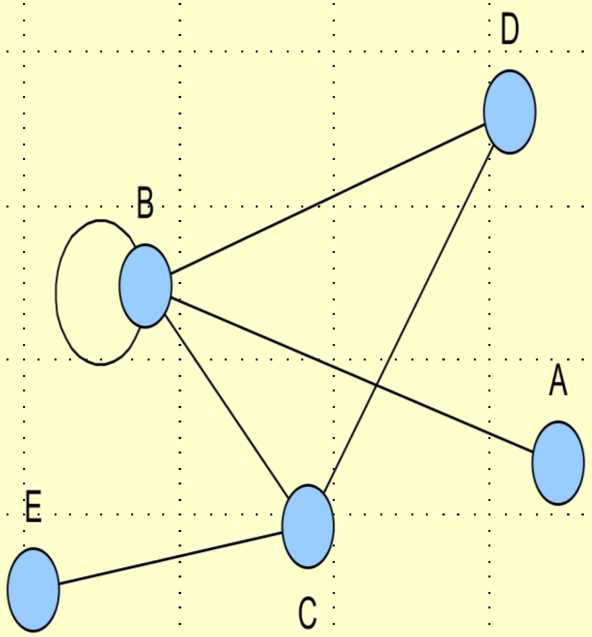
- Exemple 1:
  - Soit le graphe orienté ci-contre



  - sa représentation par listes d'adjacences :
    - A : [A,B]
    - B : [D]
    - C : [B, D]
    - D : [C]
    - E : [A]

Liste d'adjacence

- Exemple 2:
  - Soit le graphe non orienté ci-contre



  - sa représentation par listes d'adjacences :
    - A :   [B]
    - B :   [A, B, C, D]
    - C :   [B, D, E]
    - D :   [B, C]
    - E :   [C]

Liste d'adjacence

- La description de la liste d'adjacence est équivalente à la donnée du graphe, et comporte autant de listes qu'il y a de sommets dans le graphe.

- Une telle représentation est très **utile** dans le cas de graphes ne comportant que **peu d'arêtes ou arcs**.

Matrice d'adjacence (matrice associée)

- Définition:
  - Soit G un graphe (orienté ou non) d'ordre n dont on a numéroté les n sommets.
  - La **matrice d'adjacence** de G, est la matrice <u>carrée</u> A d'ordre n, telle que:
    - $A_{i,j} = 1$ si (i , j) est un arc (arête) de G
    - $A_{i,j} = 0$ sinon

Matrice d'adjacence (matrice associée)

- Pour un graphe orienté :
  - Les lignes de la matrice désignent l'origine d'un arc s'il existe
  - Les colonnes de la matrice désignent l'extrémité (finale) d'un arc s'il existe
- Cette représentation est plus adaptée aux graphes ayant beaucoup d'arcs (arêtes),
- sinon la matrice d'adjacence est creuse, (contient beaucoup de zéros).

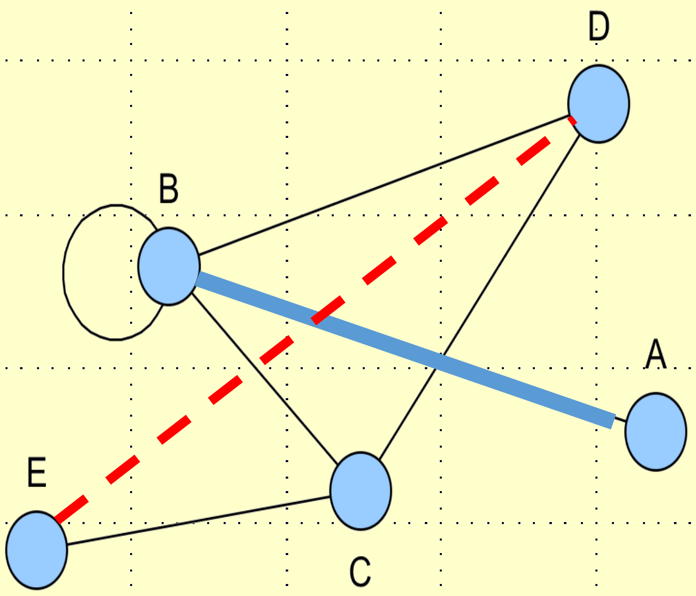
→ Usage inutile de mémoire.

Matrice d'adjacence

- Exemple 1: soit le graphe **non** orienté

  - Sa matrice d'adjacence M_A est :

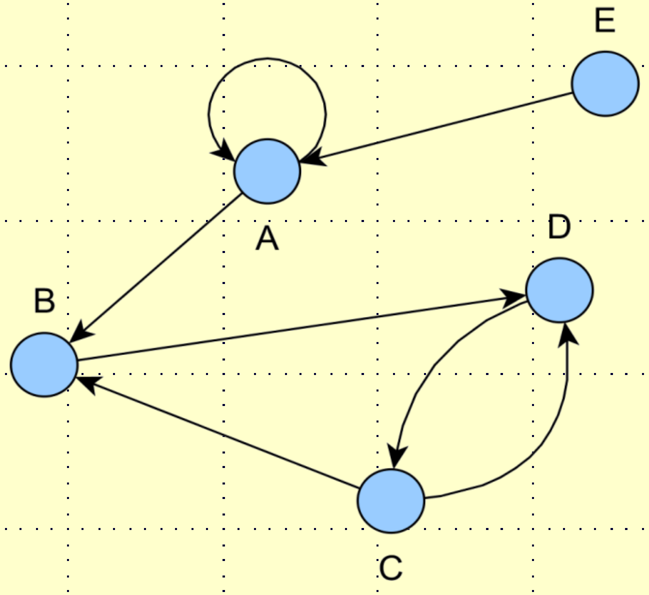
$$M_A = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$



  - Lecture de la matrice M_A :
    - Ligne A et colonne B : 1 → il y a une arête entre A et B
    - Ligne D et colonne E : 0 → il n'y a pas une arête entre E et D
    - Matrice symétrique

Matrice d'adjacence

- Exemple 2: soit le graphe orienté



  - Sa matrice d'adjacence M_A est :

$$M_A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

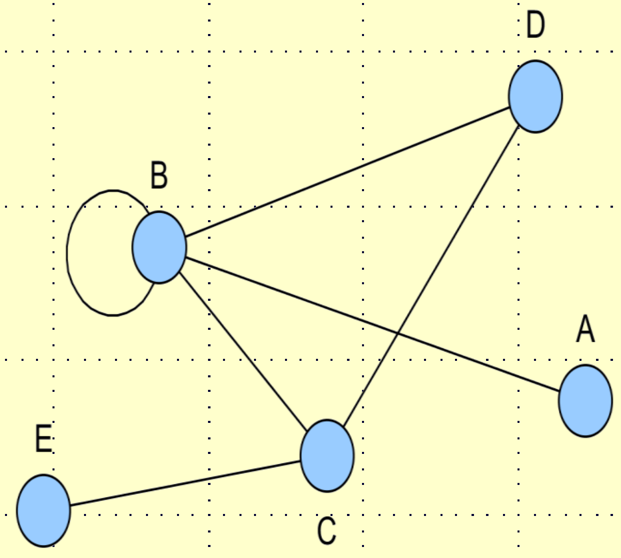
  - Lecture de la matrice M_A :
    - Ligne B et colonne D : 1 → il y a un arc de B vers D
    - Ligne D et colonne B : 0 → il n'y a pas un arc de D vers B

Matrice d'adjacence (matrice associée)

- Cas de multigraphes,
  - la matrice d'adjacence est définie de la même façon,
  - En remplaçant la valeur 1 par :
    - le nombre d'arcs entre le $i^{ème}$ sommet et le $j^{ème}$ sommet (cas orienté), ou
    - le nombre d'arêtes entre le $i^{ème}$ et le $j^{ème}$ sommet (cas non orienté).

Matrice d'adjacence d'ordre multiple : Interprétation

- Soit le graphe non orienté suivant:
- Soit M_A sa matrice d'adjacence:



$$M_A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Calculons le produit matriciel $M_A{}^2$

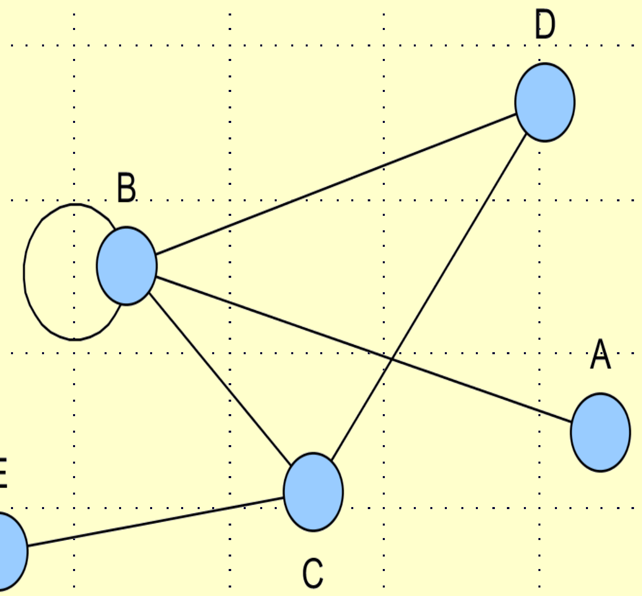
$$M_A{}^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- $M_A{}^2(4,2) = M_A{}^2(D,B) = 2$
- 2 façons d'aller de D vers B via une chaîne de longueur 2
- (D, B, B) , (D, C, B)

- $M_A{}^2(2,2) = M_A{}^2(B,B) = 4$
- 4 façons d'aller de B vers B via une chaîne de longueur 2
- (B, B, B) , (B, A, B) , (B, C, B) , (B, D, B)

Matrice d'adjacence d'ordre multiple : Interprétation

- Soit le graphe non orienté suivant:



- Soit M_A sa matrice d'adjacence:

$$M_A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Calculons le produit matriciel $M_A{}^3$

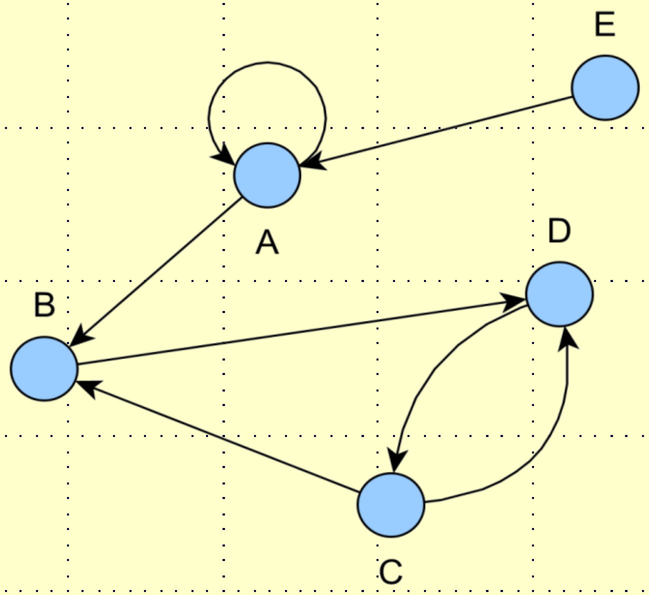
$$M_A{}^3 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- $M_A{}^3(3,4) = M_A{}^3(C,D) = 5$
- 5 façons d'aller de C vers D via une chaîne de longueur 3
- (C, E, C, D) , (C, B, C, D) , (C, D, C, D), (C, B, B, D) et (C, D, B, D)

- $M_A{}^3(4,1) = M_A{}^3(D,A) = 2$
- 2 façons d'aller de D vers A via une chaîne de longueur 3
- (D, B, B, A) , (D, C, B, A)

Matrice d'adjacence binaire d'ordre multiple : Interprétation

- Soit le graphe orienté suivant:
- Soit M_A sa matrice d'adjacence **binaire**:



$$M_A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Calculons le produit matriciel $M_A{}^2$

$$M_A{}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A{}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice d'adjacence d'ordre multiple : Interprétation

- Propriété
  - Soit $G = (V\ ,E\ )$ un graphe non orienté (resp. orienté) et A sa matrice d'adjacence.
  - Soit p un entier naturel non nul.
  - Alors, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de A^p est égal au **nombre de chaînes** (resp. **chemins**) de longueur p, ayant pour origine le $i^{ème}$ sommet et pour extrémité le $j^{ème}$.
- Ce résultat donne le nombre de chaînes ou chemins d'une longueur donnée mais pas leur description : trajets exactes, simples ou pas …

Connexité d'un graphe

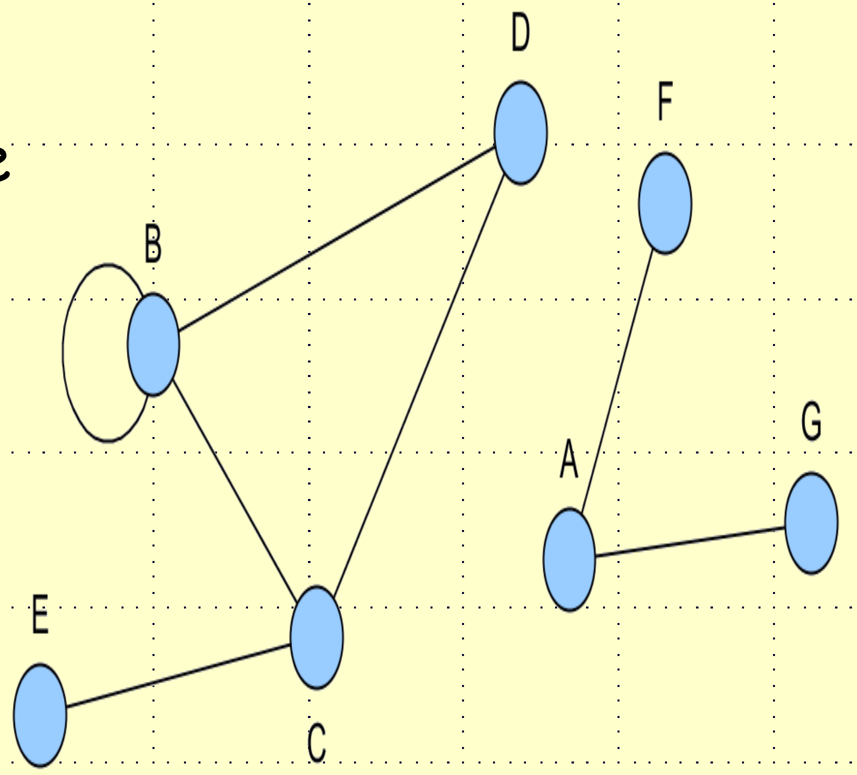
- Définition:
  - On définit la Relation binaire de Connexité sur l'ensemble des sommets V d'un graphe $G = (V , E)$ par :

$x \; R_C \; y \iff$ Soit $x = y$
Soit il existe une chaîne joignant x à y

  - La relation de connexité est une relation d'équivalence :
    - Réflexive, Symétrique et Transitive
  - On appelle **composantes connexes** du graphe G, les classes obtenues par le quotient de G / la relation R_C

Connexité d'un graphe

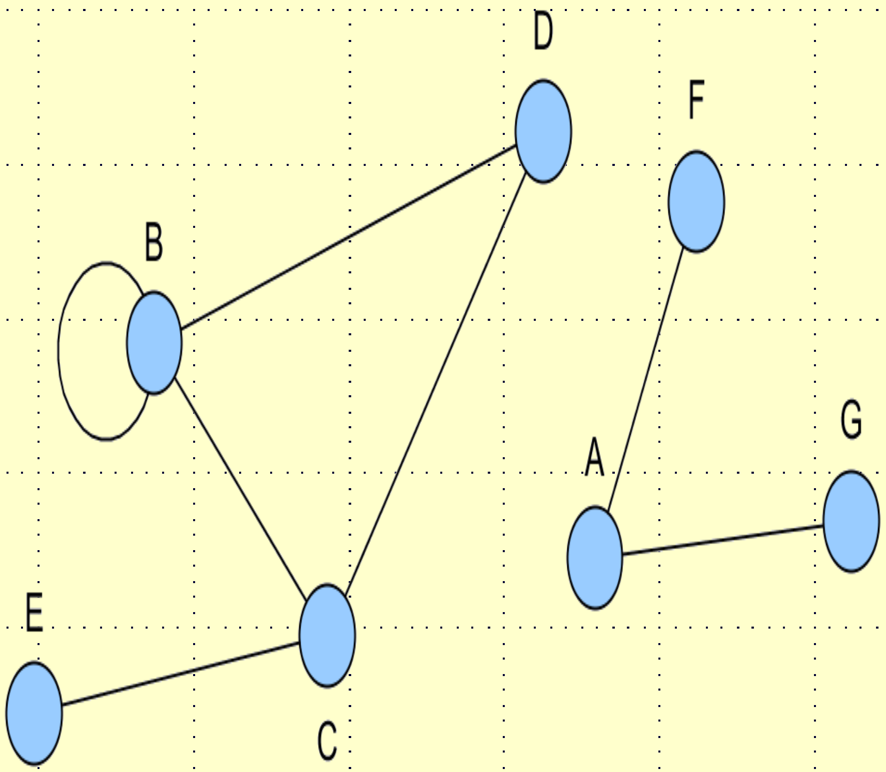
- Exemple : soit G le graphe non orienté ci-contre



  - A est relation avec :
    - A (réflexivité par définition)
    - G
    - F
  - Donc la classe de A nommé $C_A = \{A, F, G\}$

Connexité d'un graphe

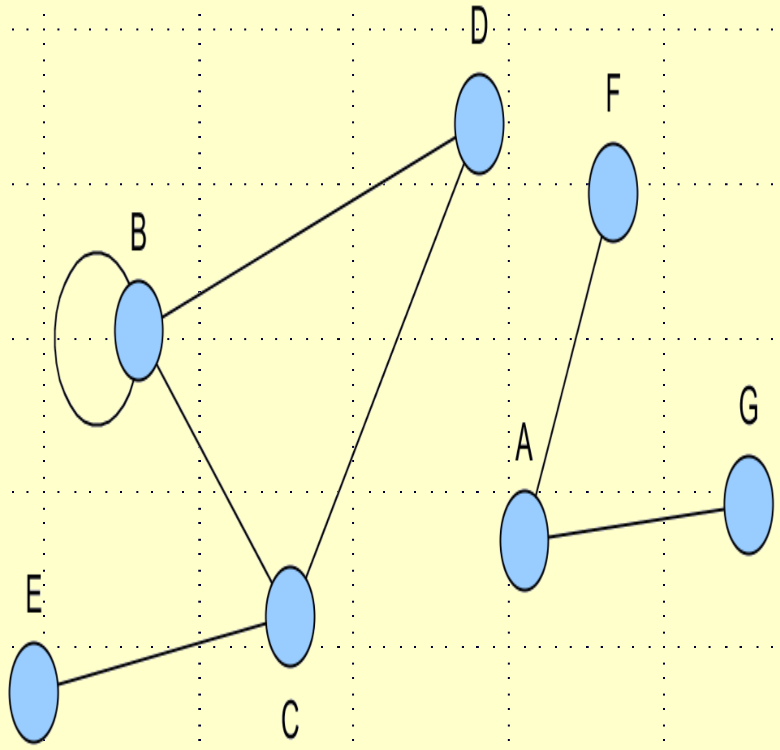
- Exemple : soit G le graphe non orienté ci-contre



  - De la même façon :
    - $C_F = \{F, A, G\} = \{A, F, G\} = C_A$
    - $C_G = \{G, A, F\} = \{A, F, G\} = C_A$
  - D'où si deux sommets X et Y sont en relation / R_C
  - $X \; R_C \; Y$ alors $C_X \equiv C_Y$
  - $\{A, F, G\}$ est une composante connexe de G

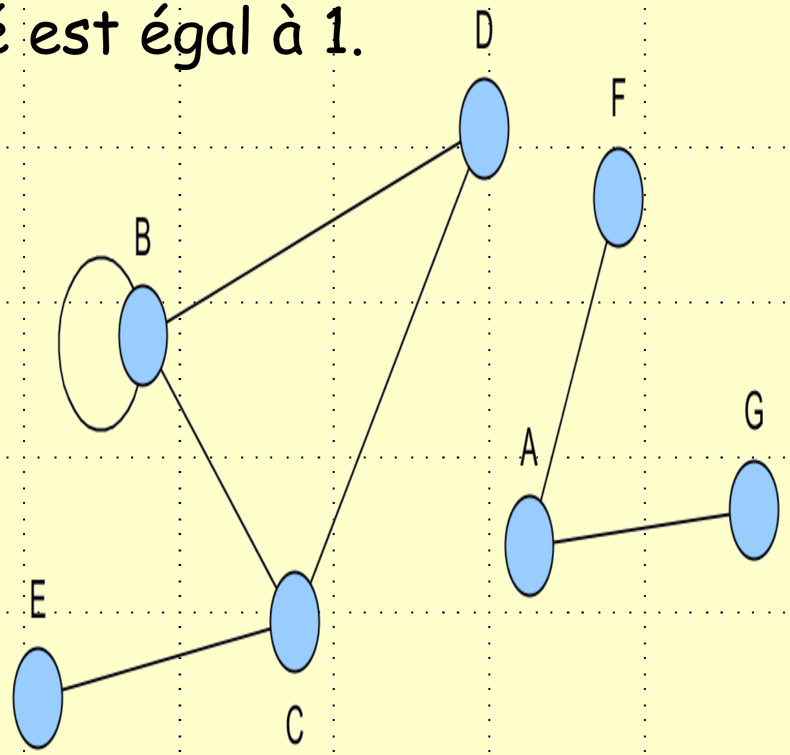
Connexité d'un graphe

- Exemple : soit G le graphe non orienté ci-contre
  - De la même façon :
    - $C_B = \{B,C,D,E\}$
    - $C_B = C_C = C_D = C_E$
    - $\{B,C,D,E\}$ est une composante connexe de G
  - Le graphe G contient 2 composantes connexes:
    - $\{A, F, G\}$
    - $\{B,C,D,E\}$



Connexité d'un graphe

- **<u>Définitions</u>**:
  - Le nombre de composantes connexes d'un graphe est appelé **<u>nombre de connexité</u>** du graphe.
  - Un graphe est **<u>connexe</u>** SSI son nombre de connexité est égal à 1.
- Le graphe G ci-contre :
  - n'est pas connexe, Exemple : pas de chaîne reliant les sommets A et B
  - Décomposable en 2 composantes connexes: {A, F, G} et {B,C,D,E}



Connexité d'un graphe

- Soit $G = (V , E)$ un graphe orienté ou non.
- On peut décomposer G en en sous-graphes partiels connexes.

$\equiv$ Décomposer G en composante(s) connexe(s).

Connectivité, k-connexité

- Soit G un graphe non orienté connexe
- On s'intéresse au nombre de sommets à supprimer pour "**disconnecter**" G (i.e. fait qu'il ne soit plus connexe).
- **Sachant que** : lorsqu'on enlève un sommet, on supprime aussi tous les arcs dont ce sommet est extrémité.
- Le nombre minimum de sommets pour le faire sera noté **k**,
- Le nombre k est appelé la **connectivité** du graphe.

Connectivité, k-connexité

- Un graphe sera dit **k-connexe** si sa connectivité est supérieure ou égale à k

→ On ne peut le disconnecter en enlevant k-1 sommets

- On appelle '**ensemble d'articulation**', un ensemble de sommets dont la suppression disconnecte le graphe.

- La connectivité est donc le cardinal minimal d'un ensemble d'articulation.

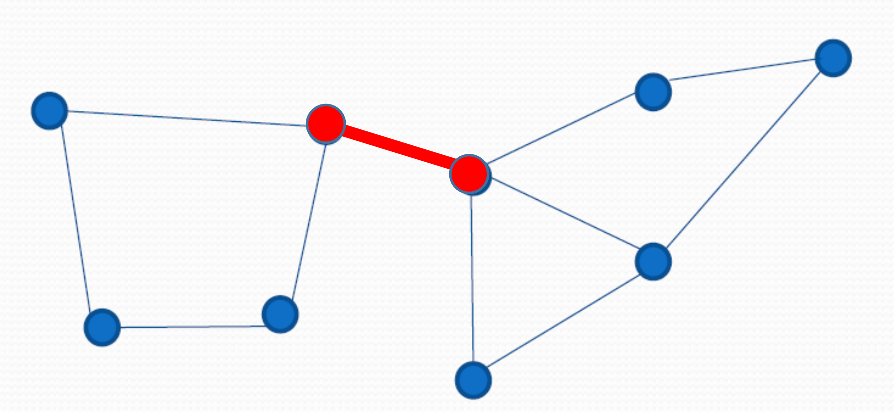
Connexité d'un graphe

- Un **point d'articulation** est un sommet dont la suppression disconnecte le graphe. (Exemple : chacun des sommets en rouge)

→ augmente le nombre de composantes connexes.

- Un **isthme** est une arête dont la suppression disconnecte le graphe (arête rouge)

→ augmente le nombre de composantes connexes.



Forte Connexité

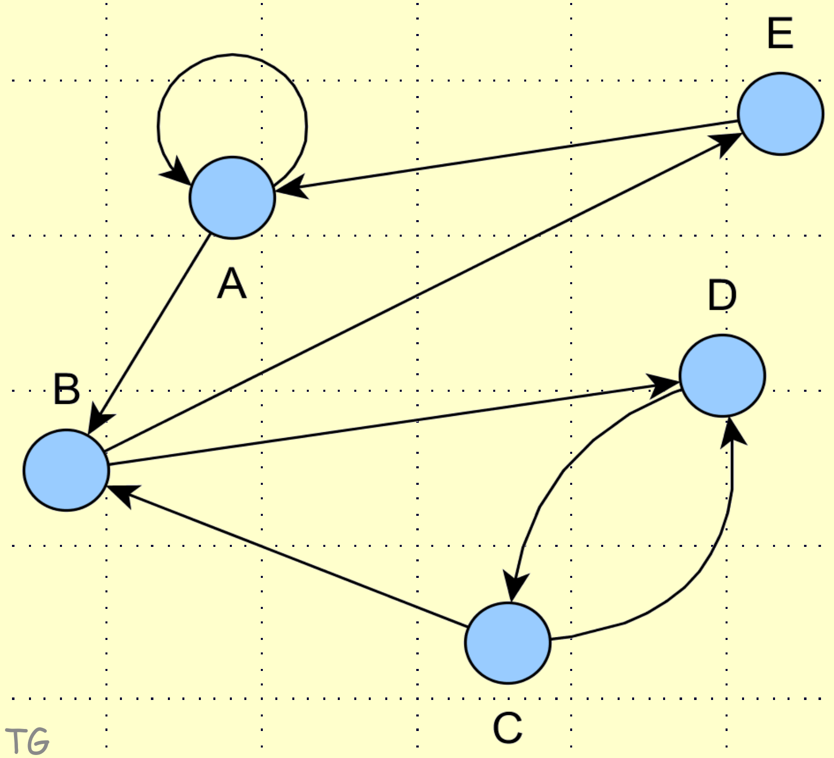
- On définit la relation binaire R_F sur l'ensemble des sommets V d'un <u>graphe orienté</u> G = (V, E) par :

$$x \, R_F \, y \iff \begin{array}{l} \text{Soit } x = y \\ \text{Soit il existe un chemin de } x \text{ vers } y \\ \text{et un chemin de } y \text{ vers } x \end{array}$$

- La relation R_F est définie comme une relation d'équivalence,
- une <u>**composante fortement connexe**</u> d'un graphe <u>orienté</u> G est un sous-graphe de G tel que pour tout couple (u, v) de nœuds dans ce sous-graphe, $u \, R_F \, v$
- les classes d'équivalence de R_F sont les <u>composantes fortement connexes</u> de G.
- R_F est nommée relation de Forte Connexité.

Forte Connexité

- Le nombre de composantes fortement connexes est appelé **<u>nombre de forte connexité</u>** du graphe.
- Un graphe est fortement connexe **<u>SSI</u>** son nombre de forte connexité = 1
- Exemple de Graphe Fortement connexe :



Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - Rappel :
    - Un graphe peut être définie par son application Γ liée aux successeurs
    - On définit alors le graphe G par G = (X , Γ)
    - Tq X ensemble des sommets.
    - L'ensemble des successeurs de x est noté $\Gamma^{+}(x)$
    - L'ensemble des prédécesseurs de x est noté : $\Gamma^{-}(x)$

Déterminer les composantes fortement connexes

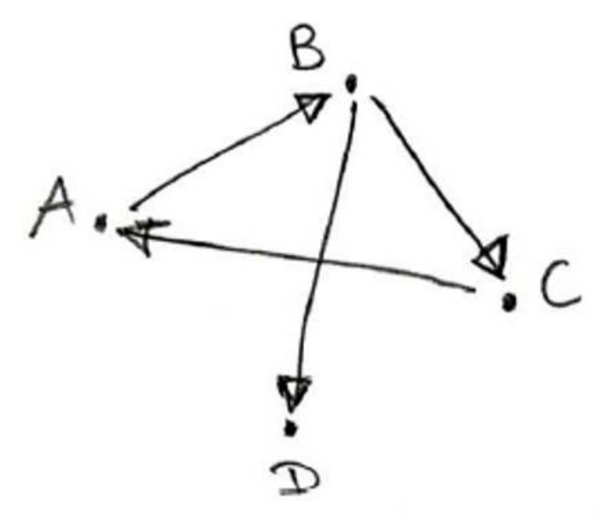
- Méthode de Demoucron
  - Soit le graphe $G = (X , \Gamma)$, et définissons :

$$t^{+}(x) = \Gamma^{+0}(x) \cup \Gamma^{+1}(x) \cup \dots \cup \Gamma^{+n-1}(x)$$

    - Telles que : $\Gamma^{+k}(x) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+k-1}(x))$ et $\Gamma^{+0}(x) = \{x\}$
  - $t^{+}(x)$ est l'ensemble des sommets de G qui sont l'extrémité finale d'un chemin, dont l'extrémité initiale est x.
  - Si un sommet $s \in t^{+}(x)$, alors $x \, R_F \, s$

Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - Exemple DM1: Soit le graphe orienté ci-contre : (n = 4)
    - $\Gamma^{+0}(A) = \{ A \}$
    - $\Gamma^{+1}(A) = \{ B \}$
    - $\Gamma^{+2}(A) = \Gamma^{+1}(B) = \{ C, D \}$
    - $\Gamma^{+3}(A) = \Gamma^{+1}(C, D) = \Gamma^{+1}(C) \cup \Gamma^{+1}(D) = \{ A \}$



  - D'où :
    - $t^{+}(A) = \Gamma^{+0}(A) \cup \Gamma^{+1}(A) \cup \Gamma^{+2}(A) \cup \Gamma^{+3}(A)$
    - $t^{+}(A) = \{ A, B, C, D \}$

Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - On peut retrouver $t^{+}(A)$ en la calculant sur la base de matrice d'adjacence M_A du graphe G :
    - $\Gamma^{+0}(A) = \{ A \}$
    - $\Gamma^{+1}(A) = \{ B \}$
    - $\Gamma^{+2}(A) = \Gamma^{+1}(B) = \{ C, D \}$
    - $\Gamma^{+3}(A) = \Gamma^{+1}(C, D) = \Gamma^{+1}(C) \cup \Gamma^{+1}(D) = \{ A \}$
  - D'où :
    - $t^{+}(A) = \Gamma^{+0}(A) \cup \Gamma^{+1}(A) \cup \Gamma^{+2}(A) \cup \Gamma^{+3}(A)$
    - $t^{+}(A) = \{ A, B, C, D \}$

	A	B	C	D
A		1		
B			1	1
C	1			
D				

Matrice d'adjacence M_A

Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - **<u>Graphe Transposé</u>**: Le graphe transposé G^T (graphe inverse), d'un graphe orienté $G = (V , E)$ est obtenu en :
    - conservant tous les nœuds de V et
    - inversant tous les arcs de E.
  - Ainsi :
    - $G^T = (V, E^T)$ tq $E^T = \{ (v , u) / (u , v) \in E \}$
    - Si M_A est la matrice d'adjacence de G, alors $M_A{}^T$ est la matrice d'adjacence de G^T.

Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - Rappel : L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet x est noté : $\Gamma^{-}(x)$
  - Soit le graphe $G = (X, \Gamma)$, et définissons :

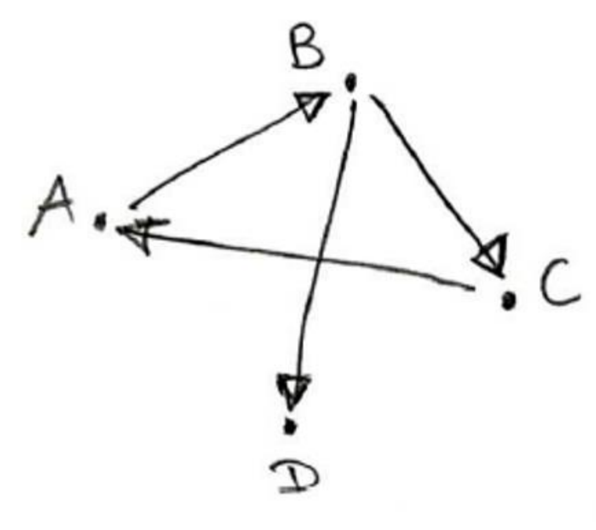
$$t^{-}(x) = \Gamma^{-0}(x) \cup \Gamma^{-1}(x) \cup \ldots \cup \Gamma^{-n-1}(x)$$

Telles que : $\Gamma^{-k}(x) = \Gamma^{-}(\Gamma^{-k-1}(x))$ et $\Gamma^{-0}(x) = \{x\}$

  - $t^{-}(x)$ est l'ensemble des sommets de G qui sont l'extrémité initiale d'un chemin, dont l'extrémité finale est x.
  - Si un sommet $s \in t^{-}(x)$, alors $s\ R_F\ x$
  - On peut retrouver les mêmes définitions via $G^T = (X, E^T) = (X, \Delta)$ / $\Delta(x) = \Gamma^{-}(x)$

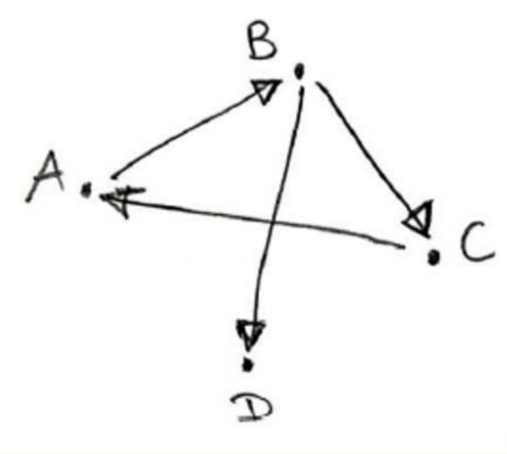
Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - Reprenons l'Exemple DM1:
    - $\Gamma^{-0}(A) = \{ A \}$
    - $\Gamma^{-1}(A) = \{ C \}$
    - $\Gamma^{-2}(A) = \Gamma^{-1}(C) = \{ B \}$
    - $\Gamma^{-3}(A) = \Gamma^{-1}(B) = \{ A \}$
  - D'où :
    - $t^{-}(A) = \Gamma^{-0}(A) \cup \Gamma^{-1}(A) \cup \Gamma^{-2}(A) \cup \Gamma^{-3}(A)$
    - $t^{-}(A) = \{ A, B, C \}$

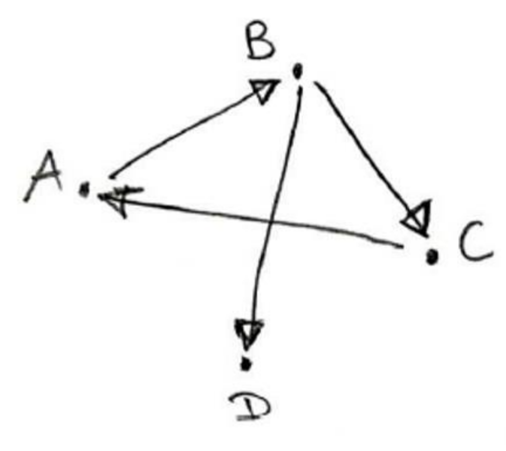


Déterminer les composantes fortement connexes

- Méthode de Demoucron
  - L'ensemble $t^{+}(x) \cap t^{-}(x)$ forme la classe d'équivalence / R_F à laquelle appartient le sommet x
  - Cette $\cap$ contient les sommets qui sont reliés à x et auxquels x est relié
  - C'est une composante fortement connexe de G
  - Exemple DM1 :
    - $t^{+}(x) \cap t^{-}(x) = \{ A, B, C, D \} \cap \{ A, B, C \}$
      $= \{ A, B, C \} = C_A$ (Classe de A / R_F)
    - Nous savons que $C_A = C_B = C_C$



Déterminer les composantes fortement connexes



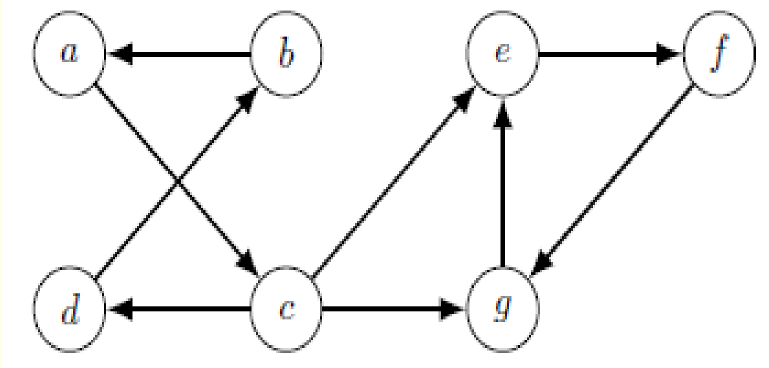
- Méthode de Demoucron
  - Reprenons l'exemple DM1:
    - Après application de la méthode de Demoucron
    - On peut vérifier facilement que le graphe contient 2 composantes fortement connexes :
      - { A, B , C } = C_A (Classe de A / R_F)
      - { D } = C_D
- La méthode de Demoucron permet d'obtenir les composantes fortement connexes d'un graphe.

Graphe Réduit

- Étant donné un graphe $G = (X, U)$, admettant q composantes fortement connexes : $C1, C2, \dots, Cq$.
- On appelle Graphe Réduit de G le graphe $G' = (X', U')$, obtenu de la manière suivante :
- $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_q\}$ tq les éléments de X' sont en bijection avec $\{C1, C2, \dots, Cq\}$ de G
- $U' = \{ (x'_i , x'_j) \ / \ \exists \ (x, y) \in U$, tq $x \in C_i$ et $y \in C_j \}$

Graphe Réduit

- Exemple : soit G le graphe orienté ci-contre:

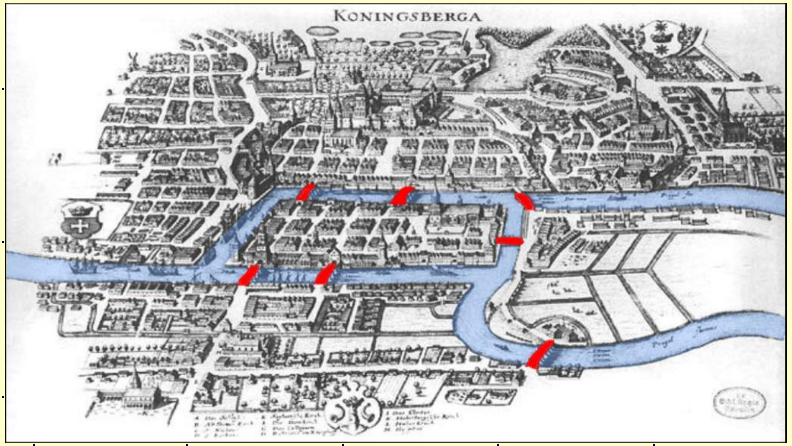


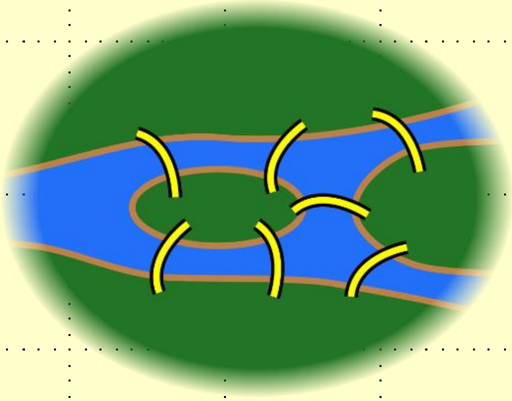
- Le graphe G a pour composantes connexes les sous-graphes
  - G1 / {a, b, c, d } Ξ C1
  - G2 / { e, f, g } Ξ C2

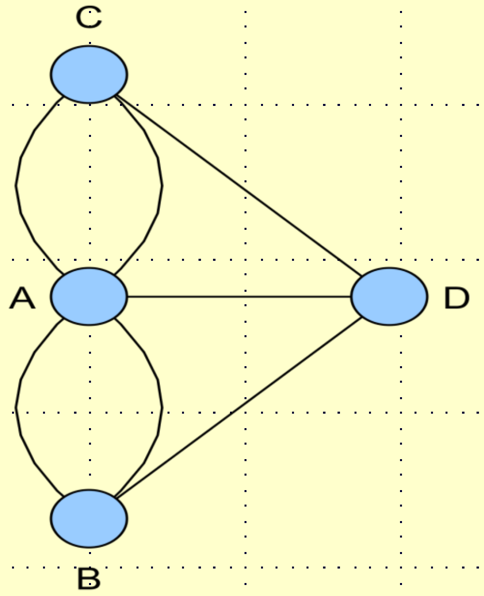
- G' est le graphe réduit : ({c1, c2} , (c1,c2))
  - Il existe un arc entre un sommet de G1 et un sommet de G2, (arc entre c1 et c2),
  - mais pas d'arc (c2 , c1), [sinon G serait fortement connexe]

Graphe Eulérien

- Les septs ponts de la ville de Konigsberg [Wk : En]







Graphe GE1

- Konigsberg : Ville Russe [Actuellle Kaliningrad] traversée par le fleuve 'Pregel'
- On suppose qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.
- Question : Existe il une promenade à travers la ville qui traverserait chacun de ces ponts une et une seule fois et de revenir au point de départ ?

Ξ Peut-on trouver une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe GE1 ?

Graphe Eulérien non orienté

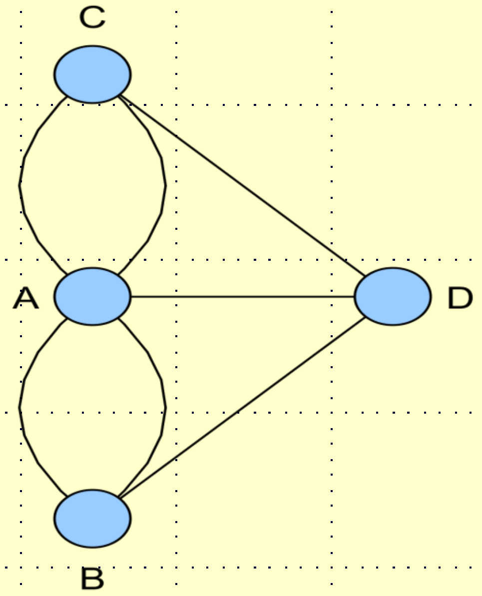
- Définitions:
  - Soit $G = (V , E)$ un graphe non orienté.
  - Une **<u>chaîne eulérienne</u>** de G est une chaîne simple passant par toutes les arêtes de G.
  - Càd une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de G.
  - Un **<u>cycle eulérien</u>** est une chaîne eulérienne et qui retourne au sommet du départ.
  - Un **<u>graphe eulérien</u>** est un graphe possédant un cycle eulérien.

Graphe Eulérien non orienté

- Rappel :
  - Soit G = (V,E) un graphe non orienté et $x \in V$ l'un de ses sommets.
  - On appel degré de x noté d (x) le nombre d'arêtes ayant x pour extrémité,
  - une boucle étant comptée **2** fois.
- **Théorème d'Euler** :

  Soit G = (V , E) un graphe non orienté **connexe**.
  - Le graphe G admet une chaîne eulérienne **SSI** tous ses sommets ont un degré pair sauf deux.
  - Le graphe G admet un cycle eulérien **SSI** tous ses sommets ont un degré pair.
    - Rq : Ces deux sommets seront les extrémités de ladite chaîne.

Graphe Eulérien non orienté



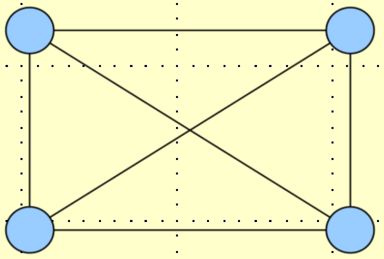
Graphe GE1

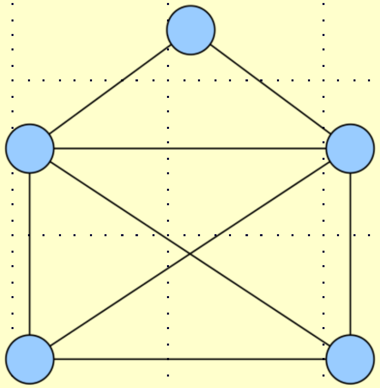
- Soit GE1 le graphe associé au problème des ponts de Königsberg :
- Les 4 sommets de GE1 ont des degrés impairs :
  - il n'existe pas de chaîne eulérienne,
  - il n'existe pas de cycle eulérien,

⇒ D'après le Th d'Euler, le problème des ponts de Königsberg n'a pas de solution.

Graphe Eulérien non orienté

- Exemple / Application:
  - Soient les deux graphes non orientés ci-contre :
  - Pb : peut-on dessiner une enveloppe fermée (resp. ouverte)
    sans lever le crayon et
    sans repasser sur une ligne déjà dessinée ?





≡ "Peut on trouver une chaîne eulérienne
dans ces deux graphes ? "

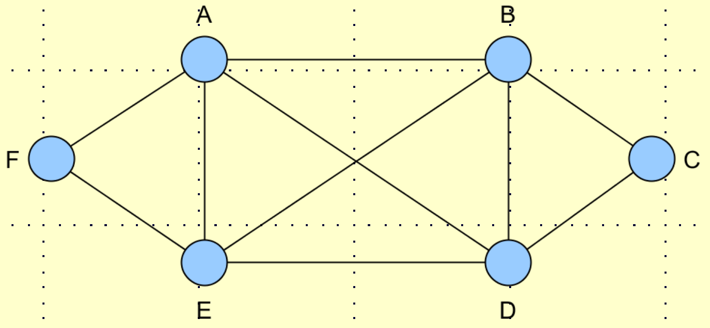
- Dans le 1er cas (Fermée) : **NON**, car tous les sommets ont un degré impair.
- Dans le 2nd cas : **OUI**, 2 sommets ont un degré impair,
  ⇒ il existe donc une chaîne eulérienne ayant ces deux sommets pour extrémités.

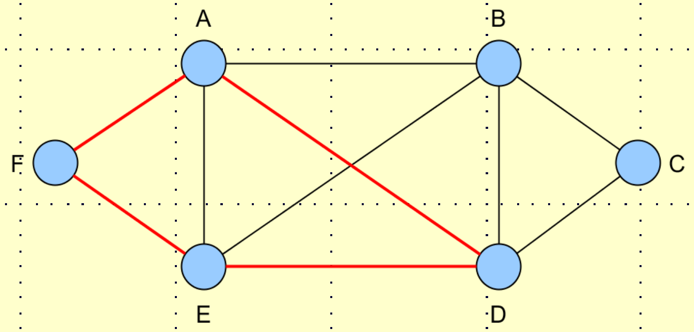
Graphe Eulérien non orienté

- Algorithme **ACE** de détermination d'un **cycle eulérien** dans un graphe non orienté **connexe** $G = (V, E)$:
  1. Choisir un sommet arbitrairement.
  2. Construire un cycle simple (quel qu'il soit) ayant pour origine et extrémité ce sommet (c'est toujours possible).
  3. Si ce cycle est eulérien, la recherche est terminée.
  4. Sinon, considérer le sous-graphe de G obtenu en supprimant les arêtes du cycle précédent.
  5. À partir d'un sommet commun au sous-graphe restant et au cycle, construire de nouveau un cycle simple.
  6. Insérer ce second cycle dans le premier.
  7. Recommencer à partir de l'étape 3.

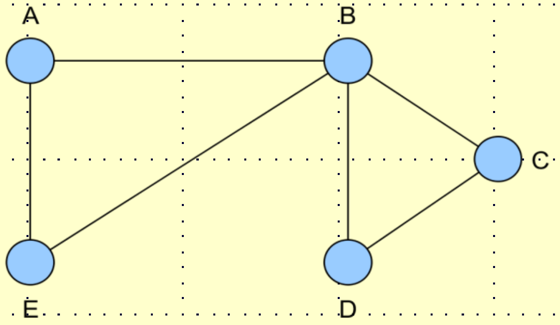
Graphe Eulérien non orienté

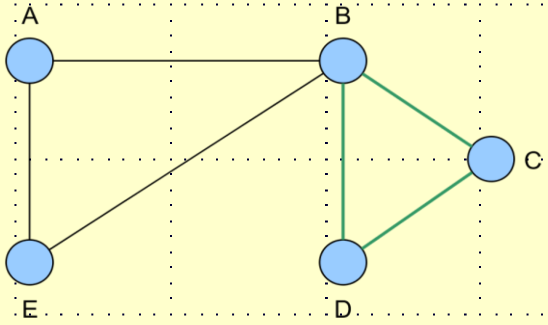
- L'algorithme AEC se termine toujours par l'obtention d'un cycle eulérien.
- Il n'y a pas unicité de celui-ci.
- Exemple:





(A, D, E, F, A)

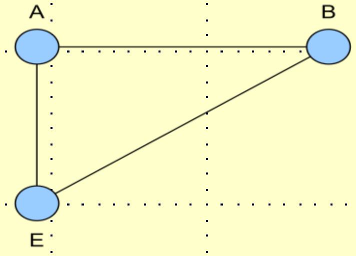


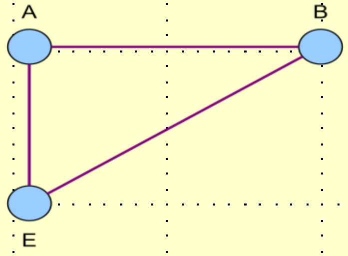


(D, C, B , D)

Graphe Eulérien non orienté

- Exemple: (suite)



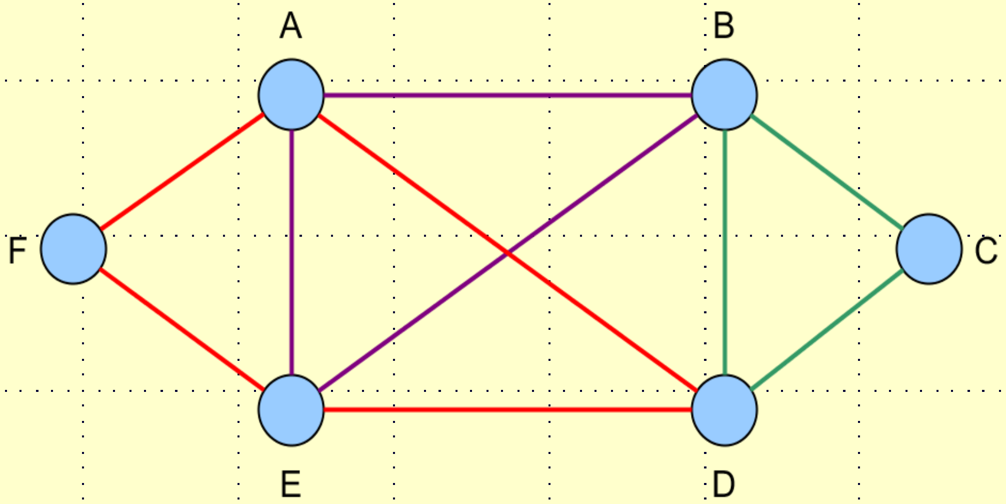


  - Il ne reste qu'à insérer les deux derniers cycles dans le premier, il vient:

(A, D, E, F, A)

(D, C, B , D)

(E, A, B, E)



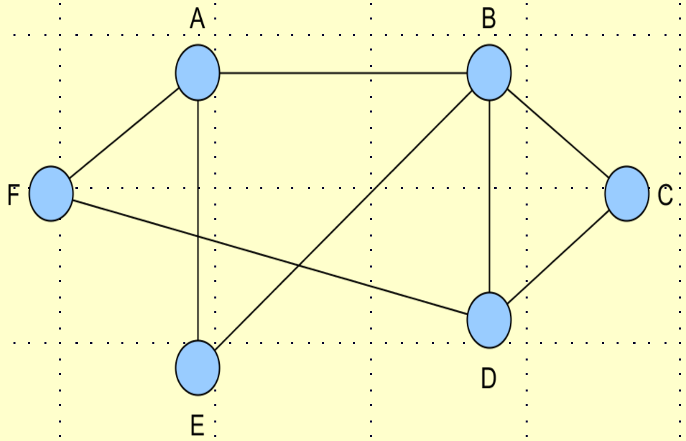
  - (A,D,C,B,D,E,A,B,E,F,A)

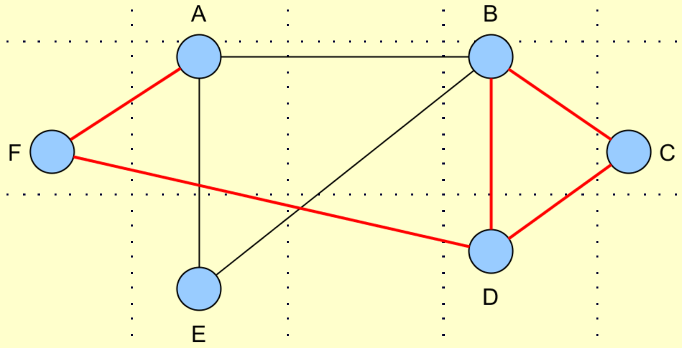
Graphe Eulérien non orienté

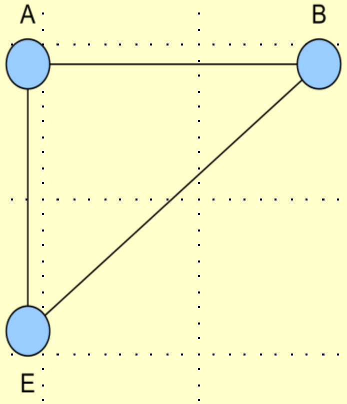
- Algorithme AHE de détermination d'une **cHaîne Eulérienne** dans un graphe non orienté **connexe** G = (V , E):
  1. Choisir arbitrairement l'un des deux sommets de degré impair.
  2. Construire une chaîne simple ayant pour origine ce sommet et pour extrémité l'autre sommet de degré impair.
  3. Si cette chaîne est eulérienne, la recherche est terminée.
  4. Sinon, considérer le sous-graphe de G obtenu en supprimant les arêtes de la chaîne précédente.
  5. À partir d'un sommet commun au sous-graphe restant et à la chaîne, construire un cycle simple.
  6. Insérer ce cycle dans la chaîne.
  7. Recommencer à partir de l'étape 3.

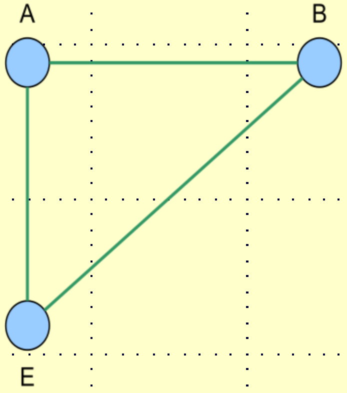
Graphe Eulérien non orienté

- Détermination d'une chaîne eulérienne :
  - Exemple :



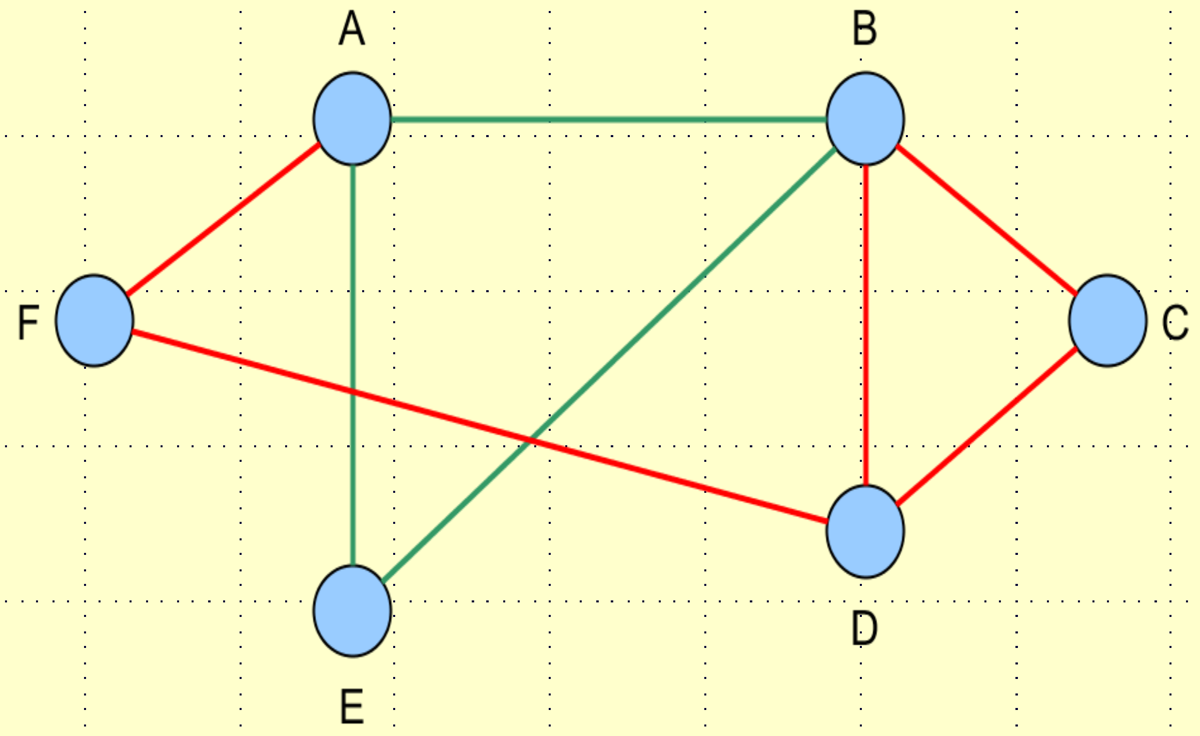






Graphe Eulérien non orienté

- Détermination d'une chaîne eulérienne :
  - Exemple :
    - Puis, insérer le cycle (B,E,A,B) dans la chaîne simple (D,C,B, D,F,A) soit (D,C,B,E,A,B,D,F,A) :



Graphe Eulérien Orienté

- Définitions:
  - Soit $G = (V , E)$ un graphe orienté.
  - Un **<u>chemin eulérien</u>** de G est un chemin simple passant par tous les arcs de G, i.e : chemin passant une et une seule fois par tous les arcs de G.
  - Un **<u>circuit eulérien</u>** est un chemin eulérien ayant les mêmes extrémités.
  - Un **<u>graphe eulérien</u>** est un graphe possédant un circuit eulérien.

Graphe Eulérien Orienté

- Théorème
  - Soit G = (V , E) un graphe orienté connexe.
  - Le graphe G admet un circuit eulérien SSI tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant.
  - Le graphe G admet un chemin eulérien qui n'est pas un circuit SSI tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant, sauf deux d'entre eux, 'x' et 'y' vérifiant :

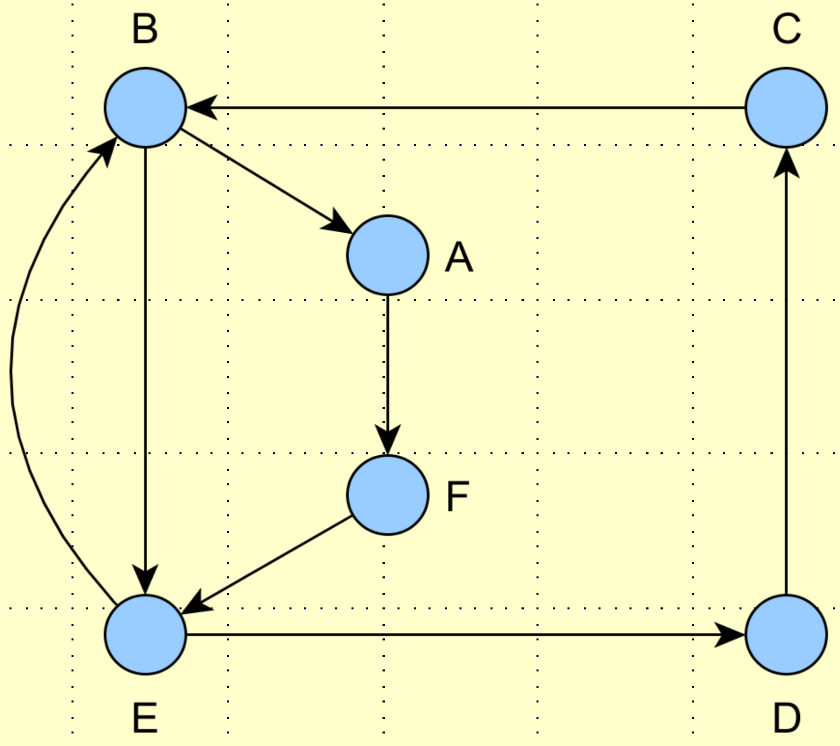
$$d+(x) = d-(x) + 1 \quad \text{et } d-(y) = d+(y) + 1$$

  - Ce chemin aura pour origine x et pour extrémité y .

Graphe Eulérien Orienté

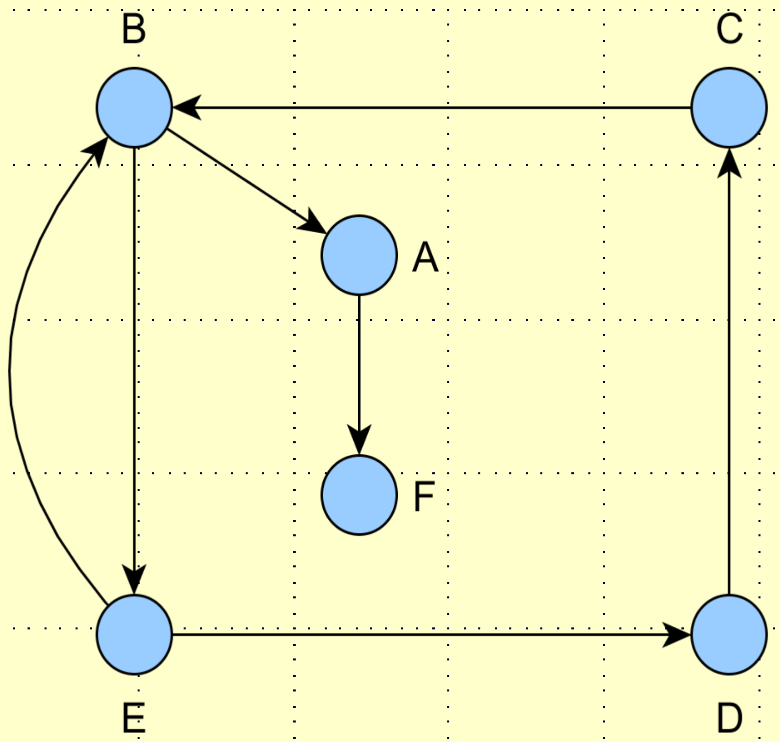
- Exemple 1:

  Considérons le graphe orienté ci-contre :



- Ce graphe est eulérien car il est :
  - connexe,
  - tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant.

Graphe Eulérien Orienté



- Exemple 2:

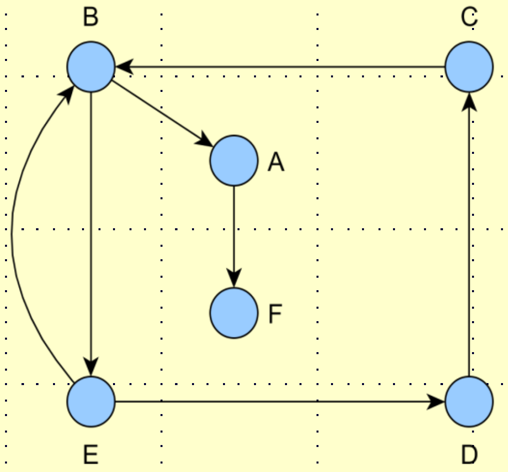
  Considérons le graphe orienté ci-contre :

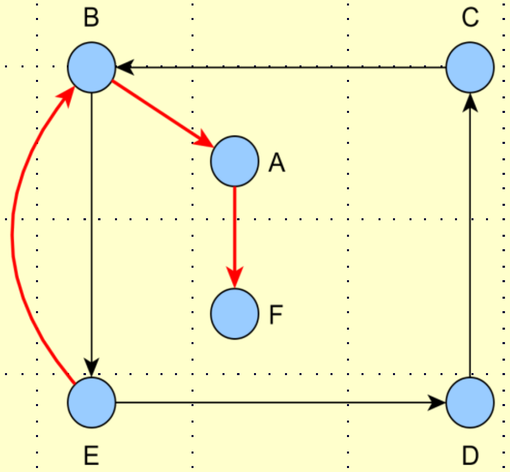
- Ce graphe n'est pas eulérien car il est :
  - connexe,
  - tous ses sommets ont un degré entrant égal à leur degré sortant **<u>sauf</u>** E et F.
  - E et F vérifient les conditions du théorème.

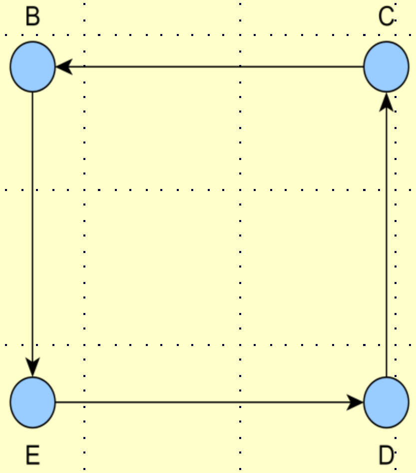
    → Il existe un chemin eulérien d'origine E et d'extrémité F.

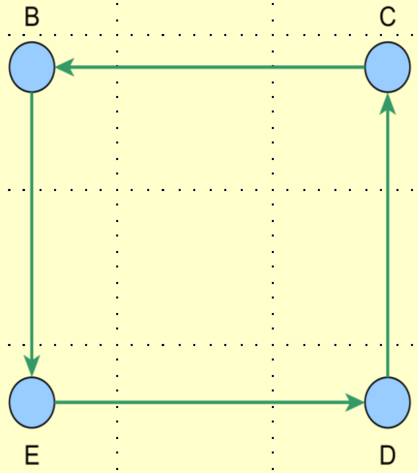
Graphe Eulérien Orienté

- chemin eulérien d'origine E et d'extrémité F



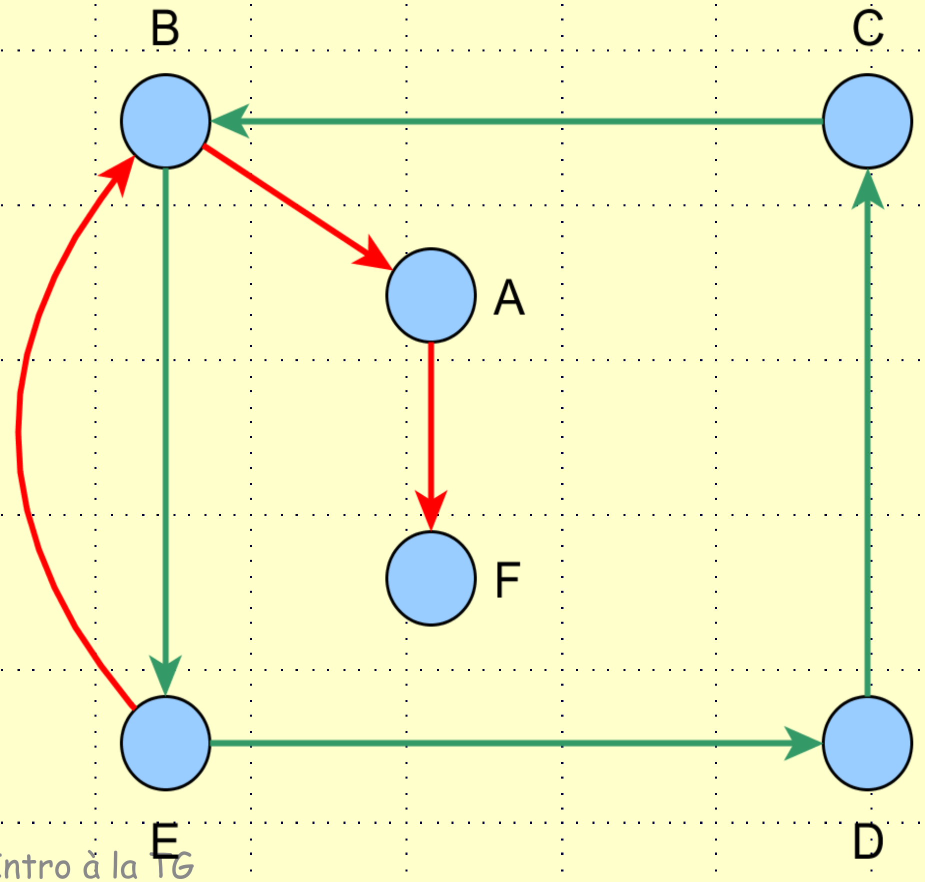






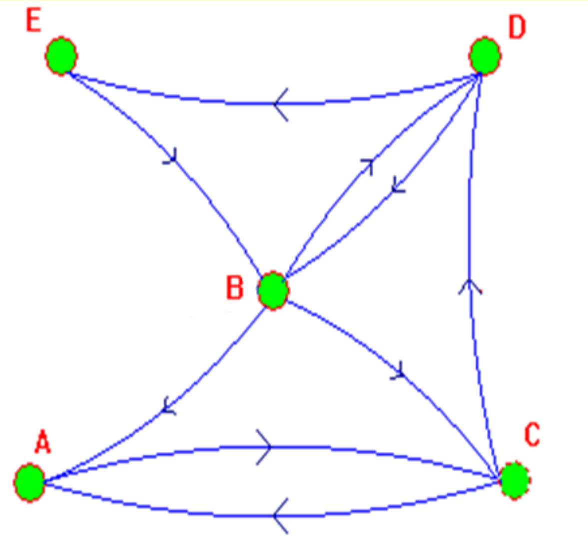
Graphe Eulérien Orienté

- chemin eulérien d'origine E et d'extrémité F
  - insérer le circuit dans le chemin, soit :
    - (E, B, E, D, C, B, A, F) ou
    - (E, D, C, B, E, B, A, F)

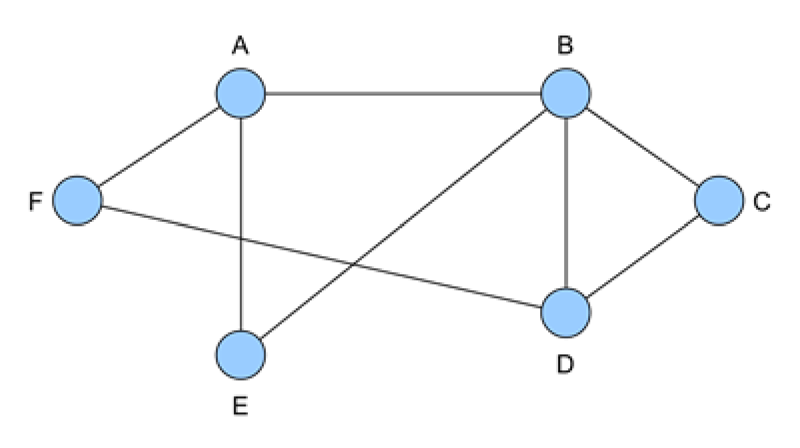


Graphe Hamiltonien

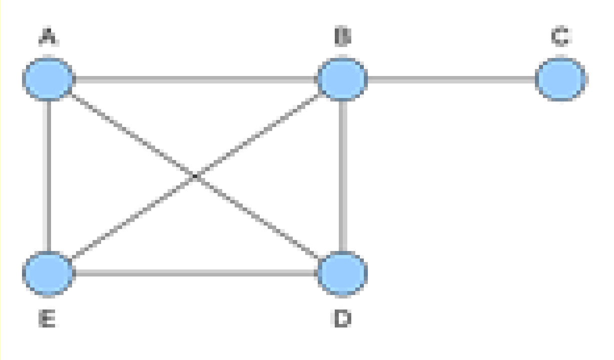
- Soient les graphes (orientés ou non) suivants :
  - Peut on trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe ?
  - Peut on trouver un cycle qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe ?



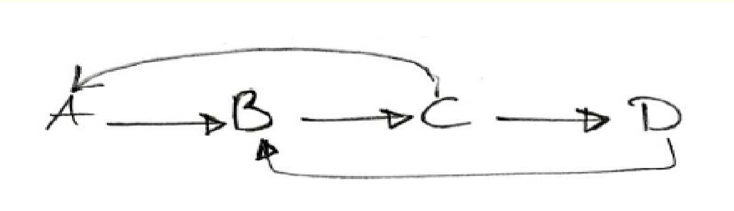
Graphe H1



Graphe H3



Graphe H4



Graphe H2

Graphe Hamiltonien

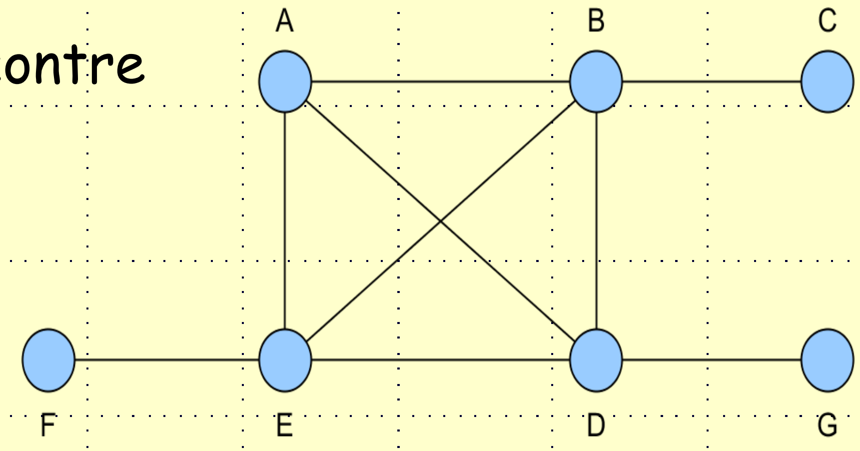
- Définitions : Soit $G = (V , E)$ un graphe orienté ou non
  - Un chemin ou une chaîne de G sont dits **hamiltoniens** s'ils passent **une et une seule fois** par tous les sommets de G.
  - Un circuit (resp cycle) hamiltonien est un chemin (resp chaîne) hamiltonien qui se referme sur lui-même.
  - Un graphe orienté hamiltonien est un graphe possédant un circuit hamiltonien
  - Un graphe non orienté hamiltonien est un graphe possédant un cycle hamiltonien

Graphe Hamiltonien

- Les graphes H1 et H3 sont hamiltoniens
  - H1 : (B, A, C, D, E, B) | (D, E, B, A, C, D) | (A, C, D, E, B, A) …
  - H3 : (A, E, B, C, D, F, A) | (B, C, D, F, A, E, B) | …
- Les graphes H2 et H4 ne sont pas hamiltoniens, **même si**:
  - H2 possède un chemin hamiltonien
  - H4 possède une chaîne hamiltonienne

Graphe Hamiltonien

- Propriété:
  - Soit G = (V , E) un graphe non orienté.
  - Si G possède un sommet de degré 1 il ne peut pas être hamiltonien
- Exemple: Considérons H5 le graphe non orienté ci-contre

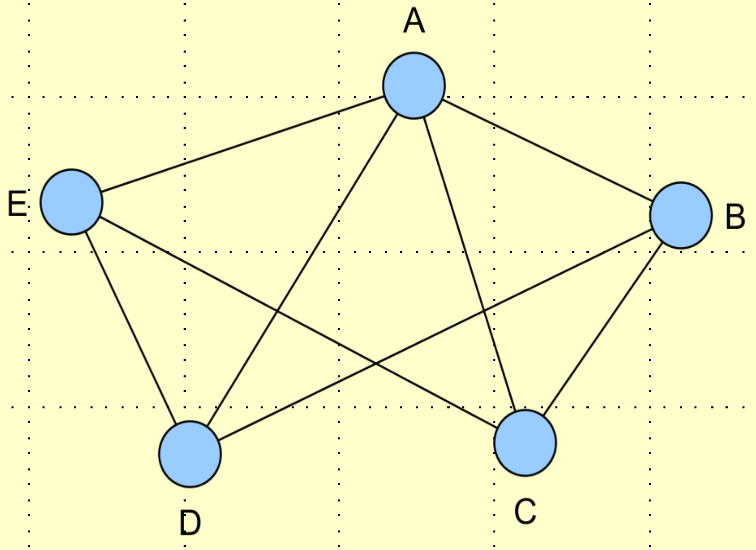


Graphe H5

  - H5 n'est pas hamiltonien car le sommet F est de degré 1

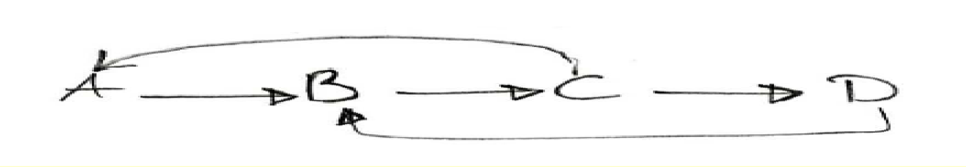
Graphe Hamiltonien

- Condition de **Dirac** :
  - Soit $G = (V , E)$ un graphe non orienté d'ordre n, avec $n \geq 3$.
  - Si pour tout sommet x de G on a $d(x) \geq n/2$ alors G est hamiltonien.
- Exemple : Considérons le graphe non orienté ci-contre
  - Ce graphe est d'ordre 5,
  - chacun de ses sommet a un degré au moins égal à 3,
  - Il est donc hamiltonien.
  - Un exemple de cycle hamiltonien : (A,B,C,E,D,A).



Graphe Hamiltonien

- Lemme : Soit G = (V , E) un graphe non orienté d'ordre n, avec $n \geq 3$.
  - Si le graphe G est complet alors il est hamiltonien.
  - Démonstration :
    - Le degré de chaque sommet est égal à $n - 1$ ($n \geq 3$)
    - donc la condition de Dirac est vérifiée.
- Remarques :
  - Si un graphe orienté est hamiltonien, il est alors fortement connexe (1 seule classe)
  - La réciproque n'est pas toujours vrai :



Graphe H2