ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Recherche Opérationnelle R.O. Partie 4: Théorie des graphes

Pr. Abdessamad Kamouss

Cycle Ingénieur
ENSAM Casablanca

Introduction

Théorie des graphes

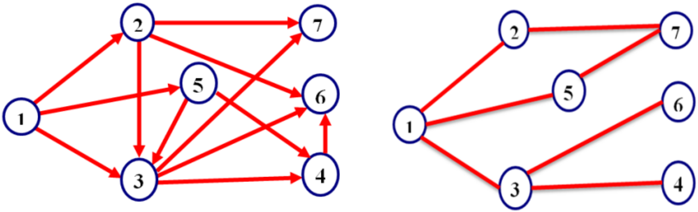
La théorie des graphes étudie des structures discrètes en forme de «réseaux» caractérisées par la donnée de deux ensembles d'objets :

- V : l'ensemble des sommets ou noeuds.
- E : l'ensemble des arêtes ou arcs.
  - **arêtes** symbolisant une relation symétrique,
  - **arcs** pour lesquels le sens est particulièrement important (on parle de l'orientation).

Introduction suite

Nous pouvons alors distinguer deux familles de graphes :

- les graphes dirigés (en anglais, directed graphs ou digraph) ;
- les graphes symétriques (en anglais, undirected graphs).



Utilisations des graphes

Projet de construction d'une maison

a) Faire les fondations + Sécher : 15 semaines ;

b) Monter les murs : 3 semaines ;

c) Poser le toit : 4 semaines ;

d) Monter la menuiserie : 4 semaines ;

e) Poser l'électricité : 2 semaines ;

f) Plâtrer + séchage plâtres : 5 semaines ;

g) Carreler, poser moquettes : 3 semaines ;

h) Tapisser et peindre : 2 semaines ;

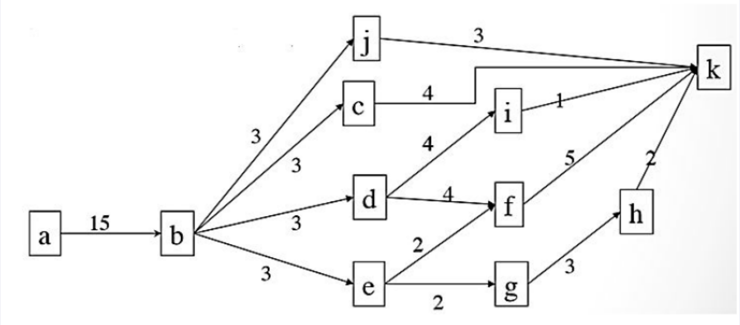
i) Crépir : 1 semaine ;

j) Aménager l'extérieur : 3 semaines ;

k) Fini.

Utilisations des graphes

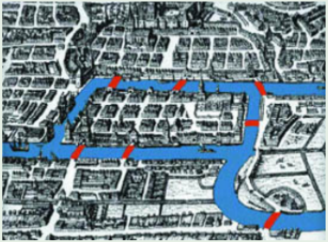
Le graphe représentant les étapes de construction de la maison



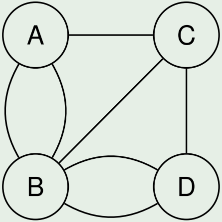
Utilisations des graphes

Les graphes sont des outils qui servent à modéliser de nombreux problèmes :

Exemple (Le problème d'Euler)



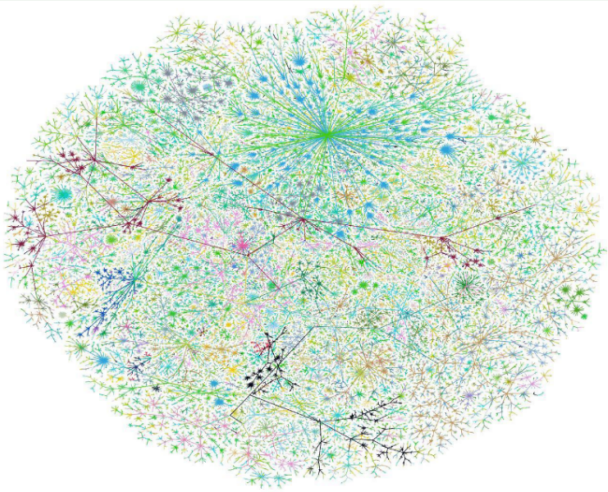
Les ponts de Königsberg



le multigraphe associé

Utilisations des graphes

Exemple (Graphe du Web)



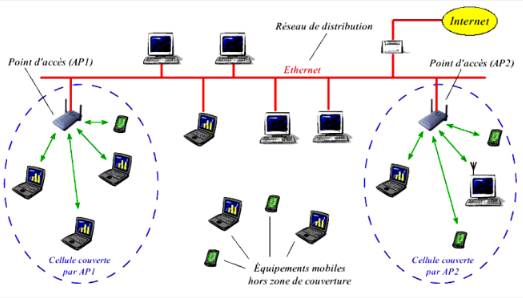
Utilisations des graphes

Exemple (Graphe d'un réseau routier)

Positionnement (GPS), mise en place de réseaux de transports en commun, surveillance du trafic routier, etc.

Utilisations des graphes

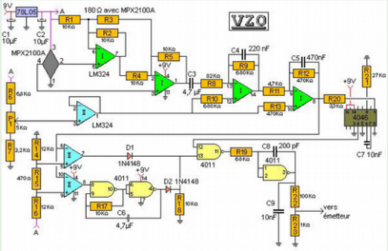
Exemple (Réseaux informatiques)

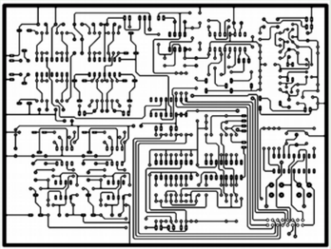


Assurer l'acheminement des données vers les machines destinataires en un temps minimum $\Rightarrow$ Utilisation de multiples chemins,
Limiter les vulnérabilités, etc.

Utilisations des graphes

Exemple (Schéma électronique)





Encombrement minimum, limiter les croisements.

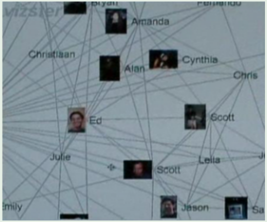
Utilisations des graphes

Exemple (Logistique)

Planification/ordonnancement, routage/tournées de véhicules, stockage/compatibilité, etc.

Utilisations des graphes

Exemple (Réseaux sociaux)



Myspace, facebook, LinkedIn, etc. : étudier leur formation, mettre en évidence des relations entre certains groupes d'individus, recherche de propriétés particulières, etc.

Graphe non-orienté

Définitions

- *Un graphe non-orienté (ou symétrique) est une relation binaire G sur un ensemble V, notée $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes qui est formé des $\{x, y\} \subset V$ qui sont en relation.*
- *L'**ordre** d'un graphe est son nombre de sommets.*
- *La **taille** d'un graphe est son nombre d'arêtes.*
- *Si $\{x, y\}$ est une arête, x et y sont voisins et sont appelés les extrémités de cet arête.*

Graphe dirigé

Définitions

- *Un graphe dirigé (ou orienté) est une relation binaire G sur un ensemble V, notée $G = (V,E)$ où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arcs qui est formé des couples $(x,y) \in V \times V$ qui sont en relation.*
- *L'**ordre** d'un graphe est son nombre de sommets.*
- *La **taille** d'un graphe est son nombre d'arcs.*
- *Pour l'arc (x,y), on dit que :*
  - *x et y sont adjacents.*
  - *x est son **origine** et y son **extrémité**.*
  - *y est un **successeur** (ou suivant) de x*
  - *x est un **prédécesseur** (ou précédent) de y.*

Graphe - Dictionnaire

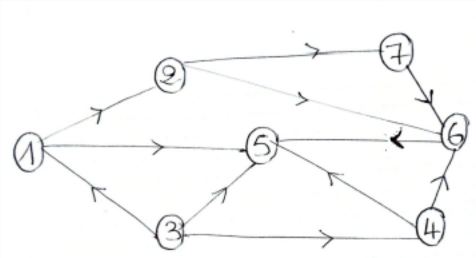
Dictionnaire dans un graphe orienté

- $S(x)$ désigne l'ensemble des suivants de x.
- $P(x)$ représente l'ensemble des précédents de x.
- Le tableau qui pour tout sommet x énumère les éléments de $S(x)$ est appelé dictionnaire des suivants.
- Le tableau qui pour tout sommet x énumère les éléments de $P(x)$ est appelé dictionnaire des précedents.

Graphe - Dictionnaire

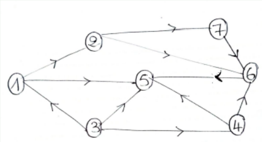
Exemple

Donner le dictionnaire des suivants, en déduire le dictionnaire des précédents du graphe :



Graphe - Dictionnaire

Les deux dictionnaires

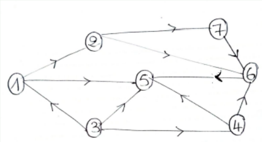


x	$S(x)$
1	$\{2,5\}$
2	$\{6,7\}$
3	$\{1,5,4\}$
4	$\{5,6\}$
5	$\emptyset$
6	$\{5\}$
7	$\{6\}$

x	$P(x)$
1	$\{3\}$
2	$\{1\}$
3	$\emptyset$
4	$\{3\}$
5	$\{1,3,4,6\}$
6	$\{2,4,7\}$
7	$\{2\}$

Graphe - Dictionnaire

Les deux dictionnaires

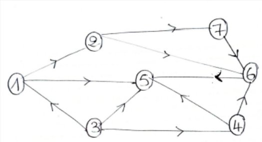


x	$S(x)$
①	$\{2,5\}$
②	$\{6,7\}$
③	$\{1,5,4\}$
④	$\{5,6\}$
⑤	$\emptyset$
⑥	$\{5\}$
⑦	$\{6\}$

x	$P(x)$
①	$\{3\}$
②	$\{1\}$
③	$\emptyset$
④	$\{3\}$
⑤	$\{1,3,4,6\}$
⑥	$\{2,4,7\}$
⑦	$\{2\}$

Graphe - Dictionnaire

Les deux dictionnaires



x	$S(x)$
1	$\{2,5\}$
2	$\{6,7\}$
3	$\{1,5,4\}$
4	$\{5,6\}$
5	$\emptyset$
6	$\{5\}$
7	$\{6\}$

x	$P(x)$
1	$\{3\}$
2	$\{1\}$
3	$\emptyset$
4	$\{3\}$
5	$\{1,3,4,6\}$
6	$\{2,4,7\}$
7	$\{2\}$

Graphe symétrique - Matrice d'adjacence

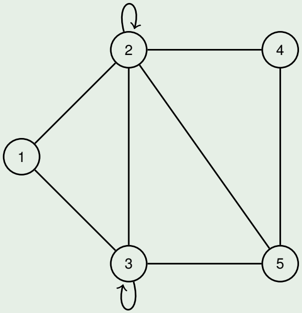
Matrice d'adjacence d'un graphe simple non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté d'ordre n.
La matrice d'adjacence $A = \left(a_{ij}\right)$ de G est la matrice carrée d'ordre n où chaque ligne et chaque colonne représentent un sommet et qui est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si elle existe une arête entre les sommets } i \text{ et } j. \\ 0 & \text{si elle n'existe aucune arête entre les sommets } i \text{ et } j. \end{cases}$$

Graphe - Matrice d'adjacence

Exemple (Graphe symétrique non valué)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe orienté - Matrice d'adjacence

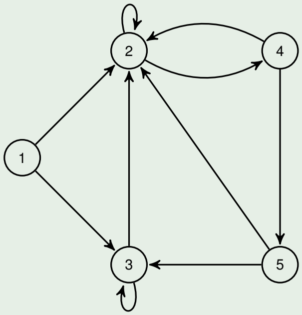
Matrice d'adjacence d'un graphe simple dirigé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple dirigé d'ordre n.
La matrice d'adjacence $A = \left(a_{ij}\right)$ de G est la matrice carrée d'ordre n où chaque ligne et chaque colonne représentent un sommet et qui est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si elle existe un arc d'origine } i \text{ et d'extrémité } j. \\ 0 & \text{si elle n'existe aucun arc de } i \text{ vers } j. \end{cases}$$

Graphe orienté - Matrice d'adjacence

Exemple (Graphe orienté non valué)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe orienté - Matrice d'adjacence

Exercice

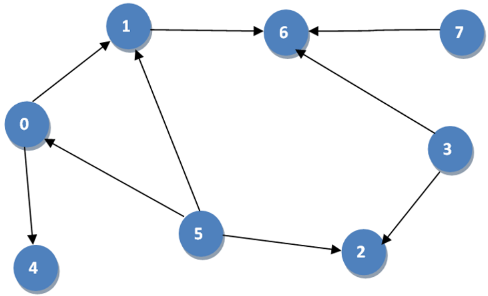
On considère la matrice d' adjacence du graphe orienté suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner la représentation sagittale de ce graphe.

Graphe orienté - Matrice d’adjacence

Exercice - Correction



$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Graphe valué - Matrice d'adjacence

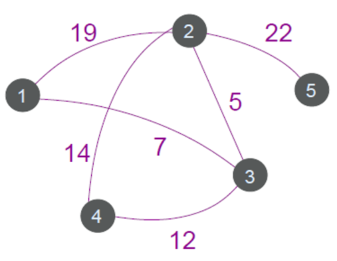
Matrice d'adjacence d'un graphe simple valué non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple valué non orienté d'ordre n.
La matrice d'adjacence $A = \left(a_{ij}\right)$ de G est une matrice carrée d'ordre n où chaque ligne et chaque colonne représentent un sommet et qui est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} p & \text{si elle existe une arête entre les sommets } i \text{ et } j. \\ 0 & \text{si } i = j \text{ et le sommet } i \text{ est sans boucle.} \\ +\infty & \text{si elle n'existe aucune arête entre les sommets } i \text{ et } j. \end{cases}$$

Graphe valué - Matrice d'adjacence

Exemple (Graphe symétrique valué)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 19 & 7 & \infty & \infty \\ 19 & 0 & 5 & 14 & 22 \\ 7 & 5 & 0 & 12 & \infty \\ \infty & 14 & 12 & 0 & \infty \\ \infty & 22 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe valué - Matrice d'adjacence

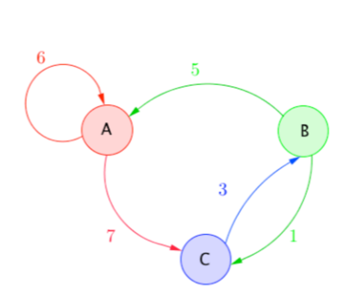
Matrice d'adjacence d'un graphe simple valué dirigé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple valué dirigé d'ordre n.
On peut le représenter par sa matrice des valuations $A = \left(a_{ij}\right)$, qui est une matrice carrée d'ordre n où chaque ligne et chaque colonne représentent un sommet et qui est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} p & \text{si elle existe un arc du sommets } i \text{ vers } j. \\ +\infty & \text{si elle n'existe aucun arc entre les sommets } i \text{ et } j. \end{cases}$$

Graphe valué - Matrice d'adjacence

Exemple (Graphe dirigé valué)



$$A = \begin{pmatrix} 6 & \infty & 7 \\ 5 & \infty & 1 \\ \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

Graphe - Chaîne

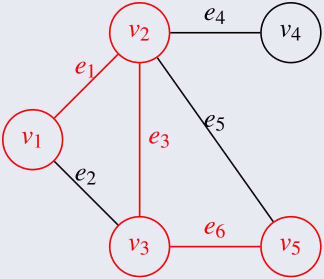
Chaîne dans un graphe symétrique

- Une chaîne dans un graphe G est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet et telle que chaque arête est encadré par ses extrêmités.
- On dit que la chaîne relie le premier sommet et le dernier sommet.
- La longueur d'une chaîne $\mathcal{C}$ est son nombre d'arêtes. On la note $l(\mathcal{C})$
- Distance entre deux sommets x et y est la longueur de la plus petite chaîne les reliant. On la note $d(x,y)$
- Diamètre d'un graphe G est la plus grande distance entre deux sommets. On le note $\delta(\mathcal{C})$.

Graphe - Chaîne

Exemple

Dans le graphe G suivant :



- *On considère la chaîne :* $\mathcal{C} = (v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_6, v_5)$. $l(\mathcal{C}) = 3$.
- *La distance entre* v_1 *et* v_5 *est* $d(v_1, v_5) = 2$.
- *Le diamètre de* G *est* $\delta(G) = 2$

Graphe - Chaîne

Les graphes de diamètre 0 sont les graphes stables (sans arête)

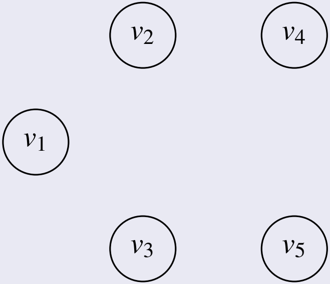
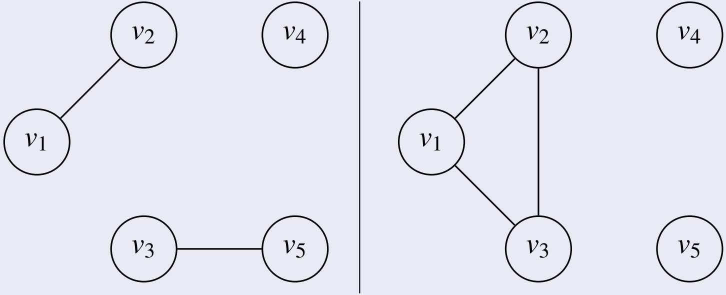


Figure – Graphe stable

Graphe - Chaîne

Graphes de diamètre 1



Graphe - Chaîne

Chaîne élémentaire et chaîne simple

- Une chaîne est dite élémentaire si chaque sommet apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite simple si chaque arête apparaît au plus une fois.
- Une chaîne dont les extrêmités sont les mêmes est appelée chaîne fermée.
- Une chaîne simple et fermée est appelée cycle.

Graphe - Chaîne

Dans un digraphe

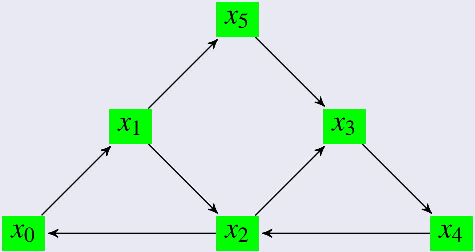
- Un chemin de x à y est une séquence d'arcs

$$(x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_i,x_{i+1}),\ldots,(x_{n-1},x_n)$$

  où $x = x_0$ et $y = x_n$. On le note aussi $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$. L'entier n est la longueur de ce chemin.
- Un circuit est un chemin $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ tel que $x_0 = x_n$.

Graphe - Chaîne

Exemple



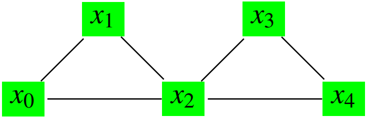
- $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ *est un chemin.*
- $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_0)$ *est un circuit.*

Graphe eulérien

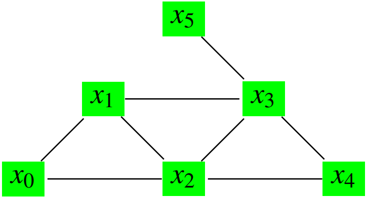
Graphe eulérien et graphe semi-eulérien

- Un graphe symétrique est dit **eulérien** s'il abrite un cycle (chaîne simple férmée) passant une et une seule fois par toutes les arêtes.
- Un graphe symétrique est dit **semi-eulérien** s'il abrite une chaîne simple passant une et une seule fois par toutes les arêtes.
- **Intuitivement :** Un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de le dessiner sans lever le crayon et sans passer deux fois par le même trait ! ! !

Graphe eulérien



Graphe eulérien



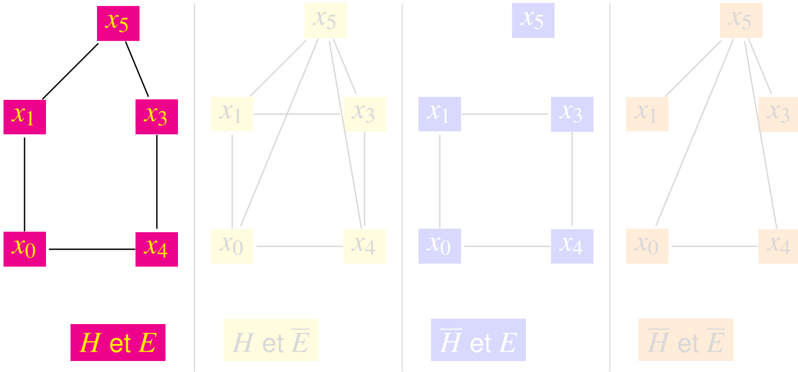
Graphe semi-eulérien

Graphe hamiltonien

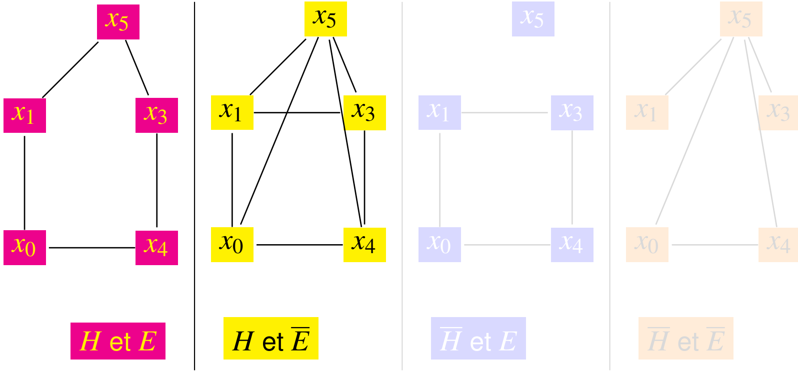
Graphe hamiltonien et graphe semi-hamiltonien

- Un graphe symétrique est dit **hamiltonien** s'il abrite un cycle (chaîne élémentaire fermée) passant une et une seule fois par tous les sommets.
- Un graphe symétrique est dit **semi-hamiltonien** s'il abrite une chaîne (chaîne élémentaire) passant une et une seule fois par tous les sommets.

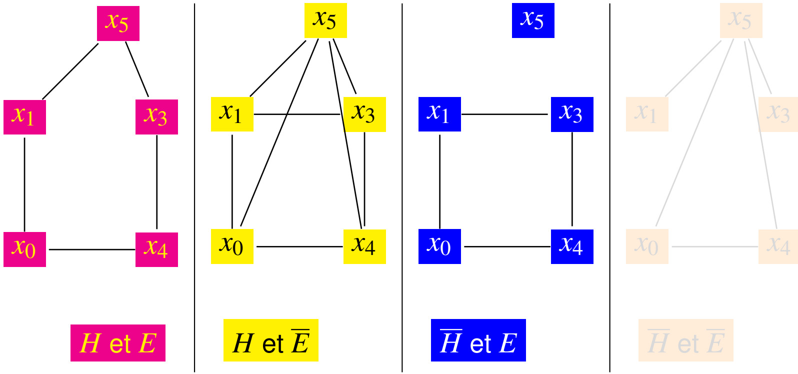
Graphe eulérien/hamiltonien - Exemples



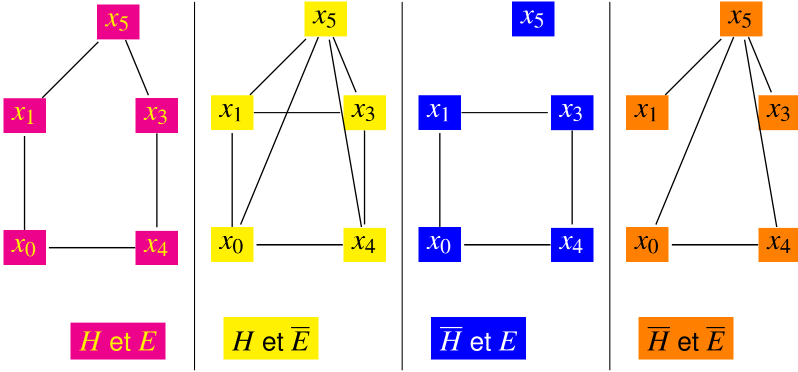
Graphe eulérien/hamiltonien - Exemples



Graphe eulérien/hamiltonien - Exemples



Graphe eulérien/hamiltonien - Exemples



Graphe eulérien

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe symétrique. Notons par $d(x)$ le degré de x, i.e., le nombre d'arêtes incidentes à x.

(i) *Si $d(x)$ est pair pour tout $x \in V$, alors G admet un cycle eulérien.*

(ii) *Si il existe deux sommets distincts x_1 et x_2 tels que $d(x_1)$ et $d(x_2)$ sont impairs et $d(x)$ est pair pour tout $x \in V \setminus \{x_1, x_2\}$, alors G abrite une chaîne eulérienne d'extrémités x_1 et x_2.*

(iii) *Dans tous les autres cas G n'abrite pas de chaîne eulérienne.*

Graphe eulérien

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe symétrique. Notons par $d(x)$ le degré de x, i.e., le nombre d'arêtes incidentes à x.

(i) *Si $d(x)$ est pair pour tout $x \in V$, alors G admet un cycle eulérien.*

(ii) *Si il existe deux sommets distincts x_1 et x_2 tels que $d(x_1)$ et $d(x_2)$ sont impairs et $d(x)$ est pair pour tout $x \in V \setminus \{x_1, x_2\}$, alors G abrite une chaîne eulérienne d'extrémités x_1 et x_2.*

(iii) *Dans tous les autres cas G n'abrite pas de chaîne eulérienne.*

Graphe eulérien

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe symétrique. Notons par $d(x)$ le degré de x, i.e., le nombre d'arêtes incidentes à x.

(i) *Si $d(x)$ est pair pour tout $x \in V$, alors G admet un cycle eulérien.*

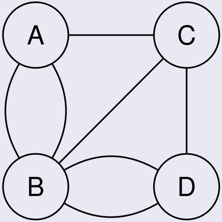
(ii) *Si il existe deux sommets distincts x_1 et x_2 tels que $d(x_1)$ et $d(x_2)$ sont impairs et $d(x)$ est pair pour tout $x \in V \setminus \{x_1, x_2\}$, alors G abrite une chaîne eulérienne d'extrémités x_1 et x_2.*

(iii) *Dans tous les autres cas G n'abrite pas de chaîne eulérienne.*

Graphe eulérien

Réponse négative au problème d'Euler

Euler souhaitait se promener dans sa ville natale en passant une et une seule fois par chaque pont. Donc le graphe doit être eulérien.



Mais, d'après la proposition précédentes, ce n'est pas possible puisque les degrés des sommets ne sont pas tous pairs ! !

Graphe hamiltonien

Théorème de Dirac

Un graphe simple à n sommets $(n \geq 3)$ dont chaque sommet est au moins de degré $\frac{n}{2}$ est hamiltonien.

Théorème de Ore

Un graphe simple à n sommets $(n \geq 3)$ tel que la somme des degrés de toute paire de sommets non adjacents vaut au moins n est hamiltonien.