

# Programmation Par Contraintes

## Présentation générale

David Savourey

CNRS, École Polytechnique

Séance 1

inspiré des cours de Philippe Baptiste et Ruslan Sadykov

# Sommaire

Exemples de problèmes combinatoires

Généralités sur la PPC

PPC : Définitions

Exemples de modélisations en CSP

Méthodes de résolution

# Organisation du cours

- ▶ 2 intervenants :
  - ▶ David Savourey : aspects théoriques
  - ▶ Éric Nespoulous : outils IBM, projet (séances 2 et 3)
- ▶ Un projet PPC en deux parties :
  - ▶ faire un moteur de résolution pour CSP binaires ;
  - ▶ utiliser les outils IBM ;
  - ▶ soutenances en séance 8.
- ▶ Un examen écrit en séance 7 ou 8
- ▶ Note finale : 1/2 Projet et 1/2 Exam

# Sommaire

Exemples de problèmes combinatoires

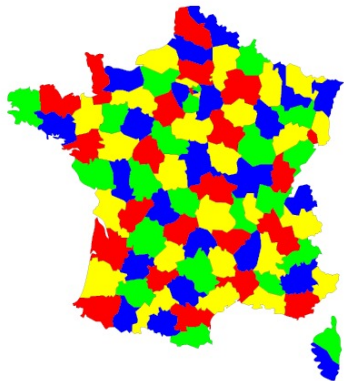
Généralités sur la PPC

PPC : Définitions

Exemples de modélisations en CSP

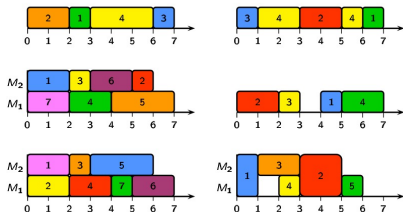
Méthodes de résolution

# Coloriage d'une carte



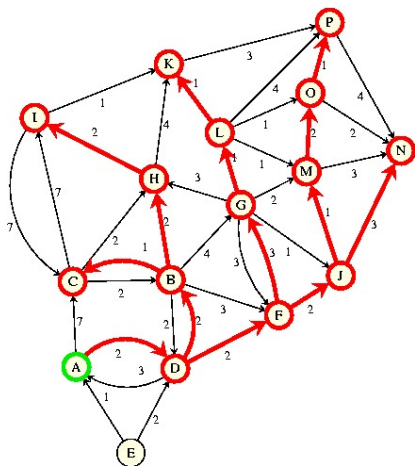
- ▶ graphe planaire
- ▶ 2 voisins doivent avoir des couleurs différentes
- ▶ trouver une solution avec 4 couleurs seulement
- ▶ allocation de fréquences

# Ordonnement



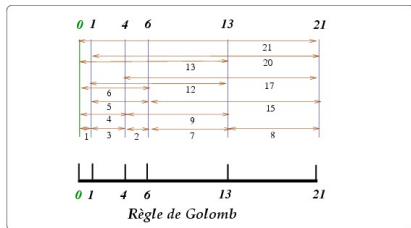
- ▶ beaucoup de problèmes de planification
- ▶ ex : peut-on terminer tel chantier avant telle date, en respectant toutes les contraintes?

# Plus court chemins



- ▶ dans un graphe pondéré
- ▶ trouver un plus court chemin entre 2 sommets
- ▶ GPS, etc.

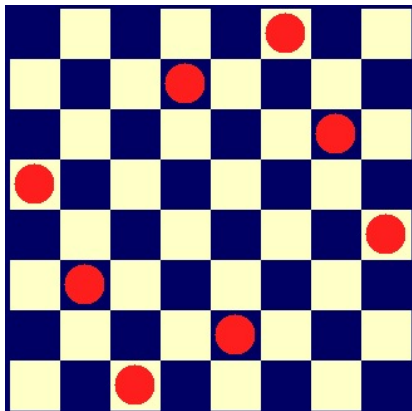
# Règle de Golomb



- ▶ fabriquer une règle avec  $n$  marques
- ▶ toutes les distances entre les marques doivent être différentes
- ▶ version optim : en minimisant la valeur de la plus grande marque.

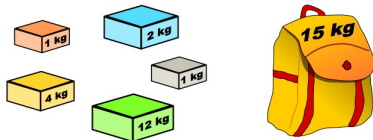


# Les n Reines



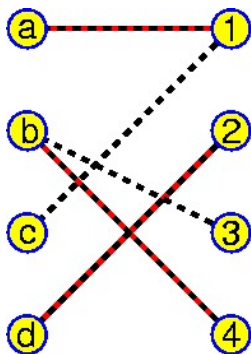
- ▶ sur une grille de  $n \times n$  cases
- ▶ placer  $n$  reines
- ▶ aucune reine ne doit pouvoir manger une autre reine

# Problème du sac à dos



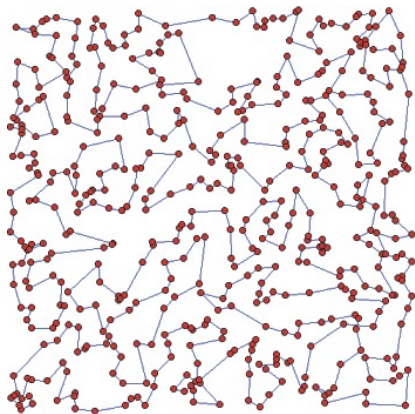
- ▶ on dispose d'aliments différents
- ▶ chaque aliment occupe un certain volume
- ▶ chaque aliment a une certaine valeur énergétique
- ▶ remplir le sac à dos en maximisant l'énergie contenue

# Problème d'affectation



- ▶ brique de base de beaucoup de problèmes
- ▶ trouver un couplage d'intérêt maximal dans un graphe pondéré

# Voyageur de Commerce



- ▶ on connaît les distances entre les villes de France
- ▶ trouver un trajet qui Passe par Paris, Rennes, Lille, Lyon, Marseille et Bordeaux et qui soit le plus court possible

# Sommaire

Exemples de problèmes combinatoires

Généralités sur la PPC

PPC : Définitions

Exemples de modélisations en CSP

Méthodes de résolution

# Décision et Optimisation

- ▶ Problème de décision : la réponse est “oui” ou “non”
- ▶ Problème d'optimisation : minimiser ou maximiser une certaine fonction objectif
- ▶ PPC en général faite pour la décision

# Les questions de la PPC

- ▶ trouver une solution (décision)
- ▶ trouver toutes les solutions
- ▶ trouver une solution optimale (optimisation)

# Résoudre l'optimisation avec la décision

- ▶ ex: trouver un plus court chemin
- ▶ on résout successivement plusieurs problèmes de décision (un chemin de moins de 60? de 58? de 40? de 52? de 55? etc.)
- ▶ en général par dichotomie



# Les principale méthodes génériques pour résoudre les problèmes combinatoires

- ▶ Programmation mathématique :
  - ▶ linéaire
  - ▶ linéaire en nombres entiers
  - ▶ quadratique
  - ▶ etc.
- ▶ Méta-heuristiques :
  - ▶ recherche locale
  - ▶ algos génétiques
  - ▶ méthodes tabous
  - ▶ recuit simulé
  - ▶ etc.
- ▶ Programmation Par Contraintes

# Spécificités de la PPC

- ▶ on travaille sur un problème de décision
- ▶ on peut exprimer beaucoup plus de choses que les autres méthodes
- ▶ on se sert des contraintes pour accélérer la résolution

# Sommaire

Exemples de problèmes combinatoires

Généralités sur la PPC

**PPC : Définitions**

Exemples de modélisations en CSP

Méthodes de résolution

# Problème de Satisfaction de Contraintes

- ▶ En PPC, on cherche à résoudre un CSP. Ce dernier est donné par le triplet  $\langle X, D, C \rangle$  où :
  - ▶  $X$  est un ensemble de variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ;
  - ▶  $D$  est un ensemble de domaines  $D_1, D_2, \dots, D_n$  ;
  - ▶  $C$  est un ensemble de contraintes  $C_1, C_2, \dots, C_m$ .
- ▶ Le domaine  $D_i$  est l'ensemble des valeurs possibles pour la variable  $x_i$ .
- ▶ Chaque contrainte  $C_j$  se définit par :
  - ▶ son arité : le nombre de variable sur lesquelles elle porte ;
  - ▶ la liste de ces variables ;
  - ▶ l'ensemble des tuples qui la satisfont.

# Un exemple de CSP

- ▶ variables :  $A, B, C, D$
- ▶ domaines :
  - ▶  $D_A = \{1, 4, 5, 8\}$
  - ▶  $D_B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$
  - ▶  $D_C = \{4, 8, 9\}$
  - ▶  $D_D = \{1, 4, 5, 7, 9\}$
- ▶ contraintes :
  - ▶  $C_1(A, C) : \{(1, 7), (1, 9), (5, 9), (5, 9)\}$
  - ▶  $C_2(A, D) : \{(1, 1), (1, 5), (5, 5), (5, 9), (8, 9)\}$
  - ▶  $C_3(C, D) : \{(4, 1), (8, 1), (9, 7)\}$
  - ▶  $C_4(B, D) : \{(2, 7), (2, 9), (5, 8), (7, 9), (9, 9)\}$
- ▶ Ce CSP est binaire : toutes les contraintes portent sur exactement 2 variables.

# Contrainte en intention, contrainte en extension

- ▶ Il est toujours possible de coder les contraintes “en extension”, c’est-à-dire par un ensemble de tuples.
- ▶ Les solveurs de PPC utilisent par défaut un codage en extension.
- ▶ Définir une contrainte en intention veut dire utiliser des opérateurs dont la sémantique est connue.
- ▶ Par exemple, si  $D_x = [1, 5]$  et  $D_y = [2, 4]$ , alors la contrainte en intention “ $x \neq y$ ” est équivalente à  $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$ .

# Instantiations, solutions

- ▶ Une instantiation est une affectation complète de valeurs aux variables. Par exemple, pour le CSP précédent,  $\{\langle A, 1 \rangle, \langle B, 7 \rangle, \langle C, 4 \rangle, \langle D, 9 \rangle\}$ .
- ▶ Une instantiation est une solution valide si les valeurs données aux variables sont telles que toutes les contraintes sont vérifiées.

# Sommaire

Exemples de problèmes combinatoires

Généralités sur la PPC

PPC : Définitions

Exemples de modélisations en CSP

Méthodes de résolution

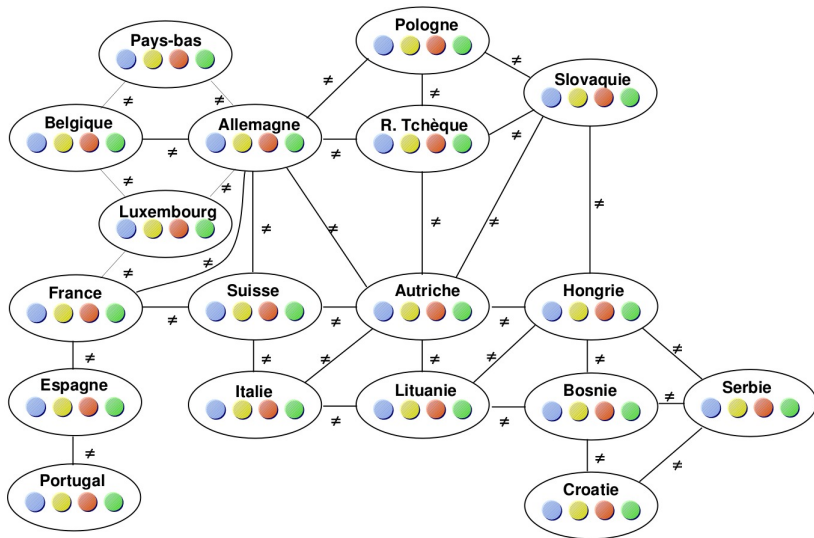


## 4-colorabilité d'une carte

- ▶ une variable par pays
- ▶ toutes les variables ont pour domaine  $\{R, B, J, V\}$ .
- ▶ si 2 pays  $x$  et  $y$  sont voisins, on met la contrainte  $x \neq y$ .



# 4-colorabilité d'une carte



# Carré magique

- ▶ sur un carré de  $n \times n$
- ▶ placer les nombres de 1 à  $n^2$
- ▶ toutes les rangées de sommes égales
- ▶ quel modèle ?

= 15			= 15
6	1	8	
7	5	3	
2	9	4	= 15
= 15			
= 15			
= 15			

# Sommaire

Exemples de problèmes combinatoires

Généralités sur la PPC

PPC : Définitions

Exemples de modélisations en CSP

Méthodes de résolution

# Generate & Test

---

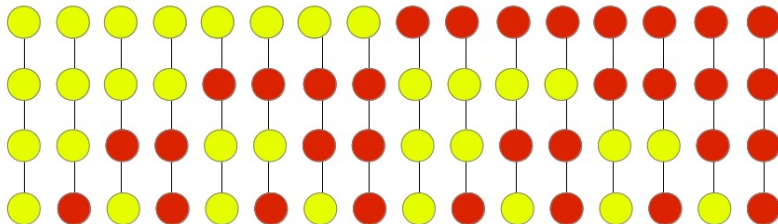
**pour chaque** *instantiation complète i* **faire**

**si** *i* **respecte toutes les contraintes** **alors**

        Retourner *VRAI* ;

Retourner *FAUX* ;

---



# Backtrack

---

**Données** : Une instantiation partielle  $i$

**si**  $i$  viole une contrainte **alors**

└ Retourner *FAUX* ;

**si**  $i$  est complète **alors**

└ Retourner *VRAI* ;

Choisir une variable  $x$  non instanciée ;

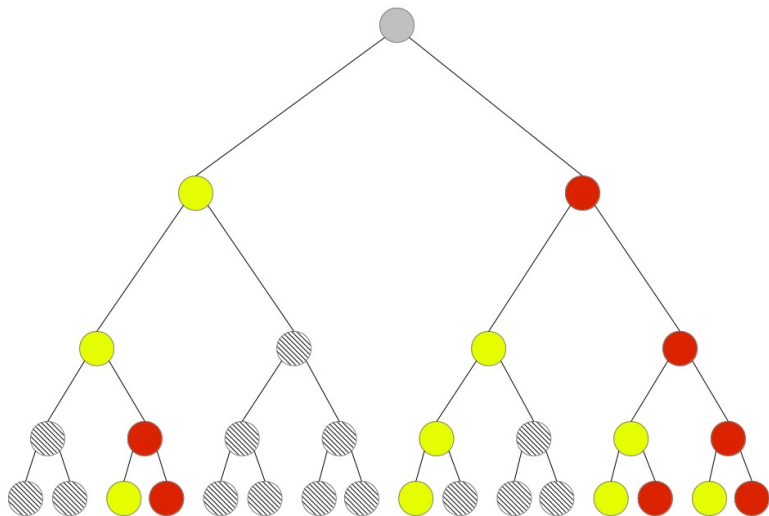
**pour chaque** valeur  $v$  dans  $D_x$  **faire**

└  $j \leftarrow i \cup \langle x, v \rangle$  ;  
  **si**  $\text{Backtrack}(j)$  **alors**  
  └ Retourner *VRAI* ;

Retourner *FAUX* ;

---

# Backtrack



# Points pratiques

- ▶ télécharger et installer opl studio
- ▶ venir avec un ordi