



最优化理论

Optimization Theory

肖艳阳

xiaoyanyang@ncu.edu.cn

期末大作业1： 线性规划

- 给定一个定义在 n 维空间中的凸函数 $f(\mathbf{x})$ ，在空间中任取 m 个点 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^m$ ，另记

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{2} \nabla f(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, m$$

再为每个点定义一个权重 $w_i, i = 1, \dots, m$ ，对任意一个 w_i 需满足下列 $m - 1$ 个约束：

$$\forall j \neq i, \|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_i\| - w_i \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_j\| - w_j, j = 1, \dots, m$$

期末大作业1： 线性规划

- 已知 $f(\mathbf{x}), \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^m, \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^m$, 求解 m 维的线性规划问题

$$\min \sum_{i=1}^m w_i$$

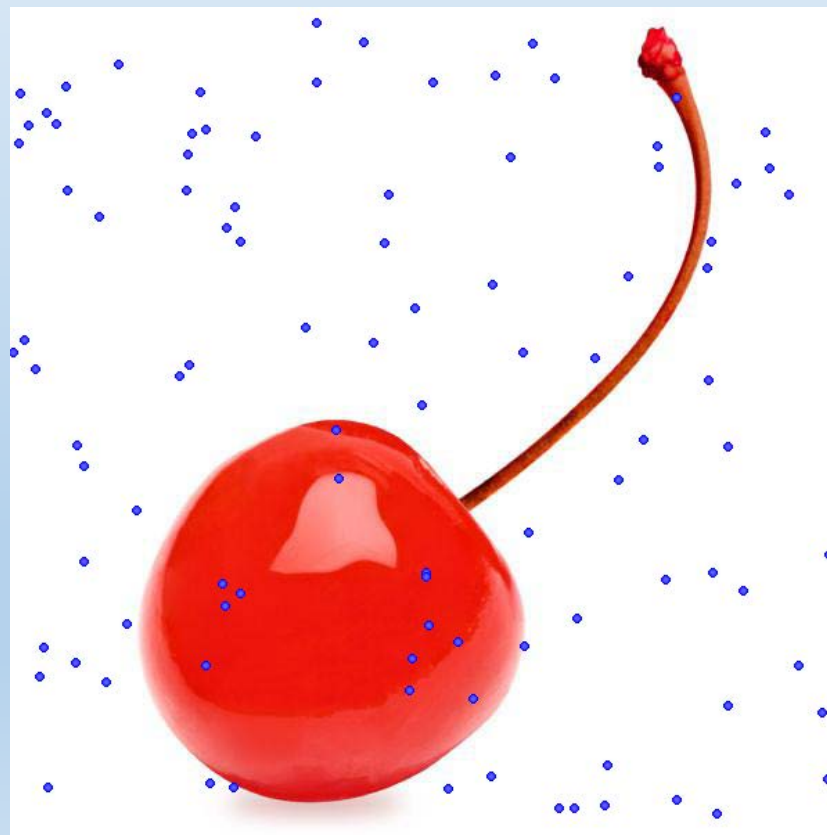
$$s. t. \forall i, j = 1, \dots, m, \forall j \neq i, \|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_i\| - w_i \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_j\| - w_j$$

共 $m(m-1)$ 个约束条件

- 要求测试至少2个 $f(\mathbf{x})$, $10 \leq m \leq 1000$, 不要求 n 很高, 2/3即可

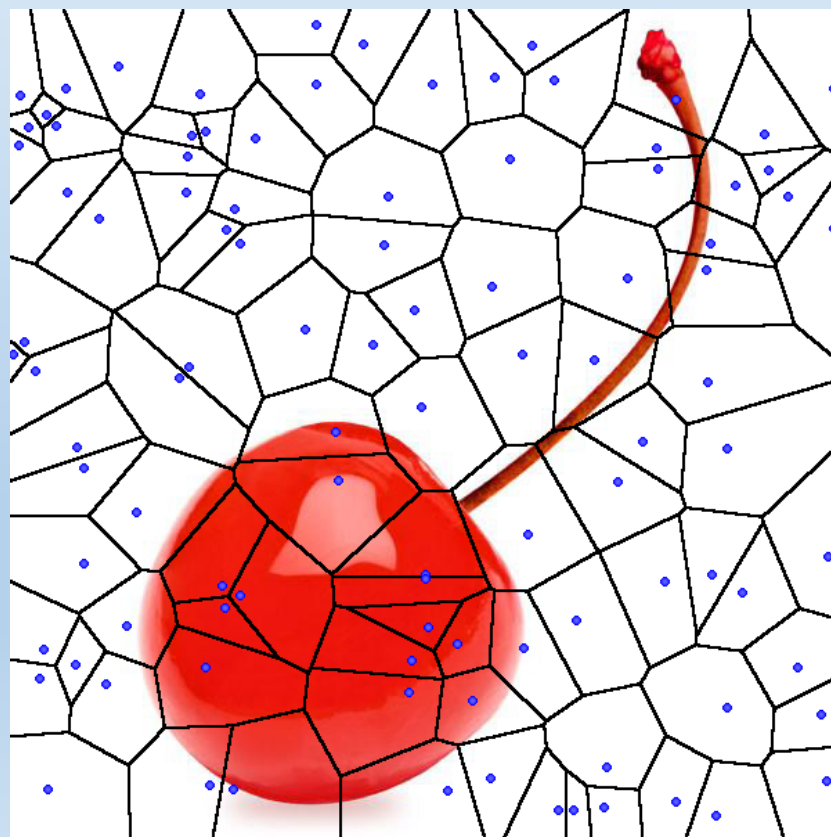
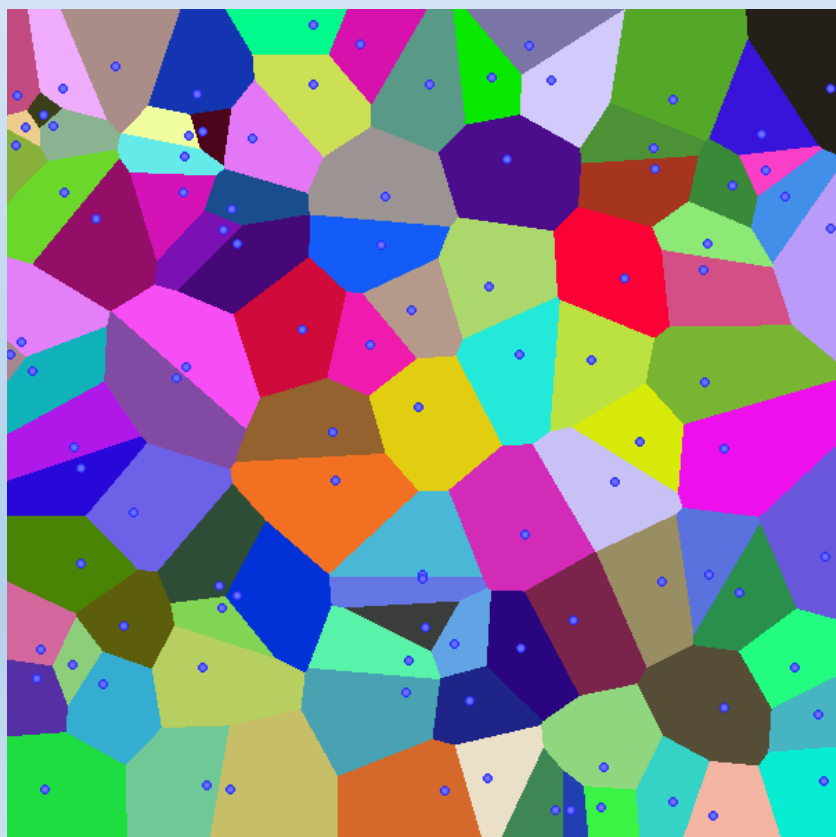
期末大作业2： 像素聚类

- 给定一幅宽高为 $w \times h$ 的图像 $f(\mathbf{x})$ ，在其上撒 m 个种子点 $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^m$



期末大作业2：像素聚类

- 将图像的每个像素分配给离各自最近的种子点，则这组种子点将图像分割成 m 个区域 $\Omega_i, i = 1, \dots, m$



期末大作业2： 像素聚类

- 在每个区域 Ω_i 上采用最小二乘法求得最佳的逼近多项式 $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$, 则每个区域上的逼近误差为

$$\int_{\Omega_i} (f(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$$

- 总误差

$$E(\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^m) = \sum_i^m \int_{\Omega_i} (f(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$$

期末大作业2： 像素聚类

- 将总误差作为目标函数求其最小值

$$\min E(\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^m) = \sum_i^m \int_{\Omega_i} (f(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$$

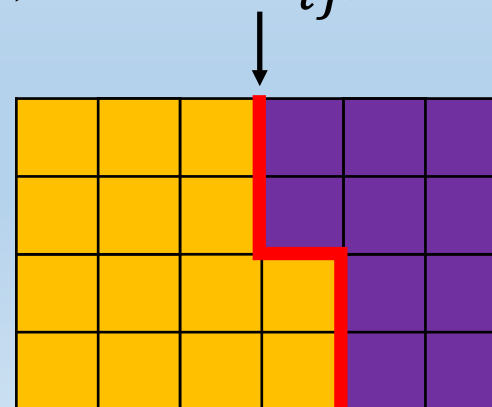
$$s. t. \forall i, \mathbf{p}_i \in [0, w] \times [0, h]$$

期末大作业2： 像素聚类

- 目标函数关于种子点 \mathbf{p}_i 的梯度

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_i} = \sum_{j \in N_i} \int_{\partial \Omega_{ij}} \left[(f(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}))^2 - (f(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{x}))^2 \right] \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} d\mathbf{x}$$

其中 N_i 是与 Ω_i 有公共边界的相邻区域的序号集合， $\partial \Omega_{ij}$ 是区域 Ω_i 与 Ω_j 的公共边界， $\|\cdot\|$ 是向量模长



期末大作业2： 像素聚类

- 要求采用至少2种优化算法求解该问题，即优化种子点位置以获取最优的像素聚类结果（此时的区域边界与图像特征比较吻合）

$$\min E(\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^m) = \sum_i^m \int_{\Omega_i} (f(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$$

$$s. t. \forall i, \mathbf{p}_i \in [0, w] \times [0, h]$$

- 要求每种算法测试至少2幅图像，即总共4个结果， m 自定

期末大作业

- 前面两个问题二选一完成
- 优化算法可以调用第三方库，也可以自己实现
- 提交电子报告至 xiaoyanyang@ncu.edu.cn，文件命名规范“学号-姓名-手机号-期末.pdf”
- 截止日期 2022.01.20

问题？