

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»
(7313, 7314, 7315, 7316, осень 2024, лектор Напеденина Е.Ю.)

1. Методы математических доказательств. Примеры.
2. Множества. Операции над множествами.
3. Отображения: определения, виды отображений. Свойства отображений.
4. Бинарные отношения на множестве. Классификация отношений. Отношение эквивалентности. Теорема о разбиении множества на классы эквивалентности.
5. Размещения, перестановки и сочетания. Подсчет их числа.
6. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Число подмножеств конечного множества.
7. Инверсии в перестановках. Четные и нечетные перестановки. Теорема об изменении четности перестановки при одной транспозиции. Количество четных и нечетных перестановок.
8. Матрицы. Операции над матрицами.
9. Ассоциативность операции умножения матриц. Дистрибутивность операции умножения матриц относительно операции сложения.
10. Определитель матрицы. Свойство определителя, связанное с умножением строки матрицы на число. Определитель матрицы, в которой строка является суммой двух строк.
11. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками. Свойство определителя, связанное с прибавлением к одной строке матрицы другой строки, умноженной на число. Определитель матрицы, полученной из данной перестановкой двух строк.
12. Определитель матрицы, полученной транспонированием данной матрицы. Определитель диагональной матрицы.
13. Определитель произведения матриц.
14. Алгебраические дополнения элементов матрицы. Теорема о вычислении определителя матрицы, в которой все элементы некоторой строки, за исключением, быть может, одного, равны нулю. Определитель матрицы, имеющей блочную структуру.
15. Теорема о разложении определителя матрицы по строке (столбцу). Теорема о фальшивом разложении.
16. Обратная матрица. Критерий обратимости матрицы. Следствия.
17. Системы линейных уравнений. Основные понятия.
18. Элементарные преобразования матриц. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: прямой и обратный ход, запись решения.
19. Ступенчатый и специальный ступенчатый вид матрицы.
20. Свойства множества решений системы линейных уравнений.
21. Формулы Крамера.
22. Элементарные матрицы. Связь между элементарными преобразованиями и элементарными матрицами.
23. Нахождение обратной матрицы с использованием элементарных преобразований.

24. Арифметические пространства. Линейная зависимость векторов арифметического пространства. Критерий линейной зависимости векторов. Свойства линейной зависимости.
25. Базис и ранг системы векторов. Свойства базисов системы.
26. Матричные ранги. Критерии совместности и неопределённости системы линейных уравнений. Критерий Кронекера-Капелли.
27. Подпространства арифметических пространств и их базисы. Размерность подпространства.
28. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис и размерность. Фундаментальная система решений.
29. Основные практические задачи, связанные с линейной зависимостью систем векторов арифметического пространства. Алгоритмы решения. Ранг системы векторов. Теорема о ранге матрицы. Способы задания подпространства арифметического пространства.
30. Векторы. Основные определения. Сложение векторов и его свойства. Вычитание векторов.
31. Умножение вектора на число и его свойства.
32. Базис плоскости и пространства. Координаты вектора в базисе. Ортогональные и ортонормированные базисы.
33. Координаты линейной комбинации векторов. Критерии коллинеарности и компланарности векторов в пространстве.
34. Скалярное произведение векторов. Теоремы о координатах вектора в ортогональном и в ортонормированном базисах.
35. Свойства скалярного произведения векторов.
36. Правая и левая тройка векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Геометрический смысл векторного и смешанного произведения векторов. Следствие о свойствах смешанного произведения векторов.
37. Теорема о свойствах векторного произведения векторов.
38. Выражение координат векторного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Вычисление смешанного произведения трех векторов с использованием их координат в ортонормированном базисе.
39. Аффинная, прямоугольная и декартова система координат на плоскости и в пространстве.
40. Полярная система координат на плоскости. Связь декартовых и полярных координат.
41. Модуль вектора, заданного координатами в прямоугольной системе координат. Нахождение площади треугольника на плоскости и в пространстве по координатам его вершин.
42. Уравнение линии на плоскости. Уравнения прямой линии на плоскости (векторное, параметрическое, каноническое).
43. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках.
44. Угловой коэффициент прямой. Геометрический смысл углового коэффициента. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.
45. Общее уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до заданной прямой.