Die Mandelbrot-Menge

Ulrich Görtz, ulrich.goertz@uni-due.de

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fraktale

Die Mandelbrot-Menge ist eines der bekanntesten *Fraktale*: Eine Fläche, deren Rand sich bei zunehmender Vergrößerung immer stärker verästelt und die eine hohe Selbstähnlichkeit aufweist, das heißt, dass man bei zunehmender Vergrößerung immer wieder Stellen findet, die der Gesamtmenge oder anderen Ausschnitten sehr ähnlich sehen.

Auch in der Natur treten fraktale Strukturen auf, etwa bei den Blättern von Farnen oder bei Blumenkohlköpfen. Ein weiteres Beispiel sind Küstenlinien eines Landes: Diese sind stark verästelt und je nachdem, wie genau man misst, macht sich diese Verästelung immer stärker im Messergebnis bemerkbar.

Eine Reise durch die komplexe Ebene

Sei c eine komplexe Zahl, das heißt ein Punkt in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Dazu können wir eine Folge von komplexen Zahlen betrachten, die so gebildet wird:

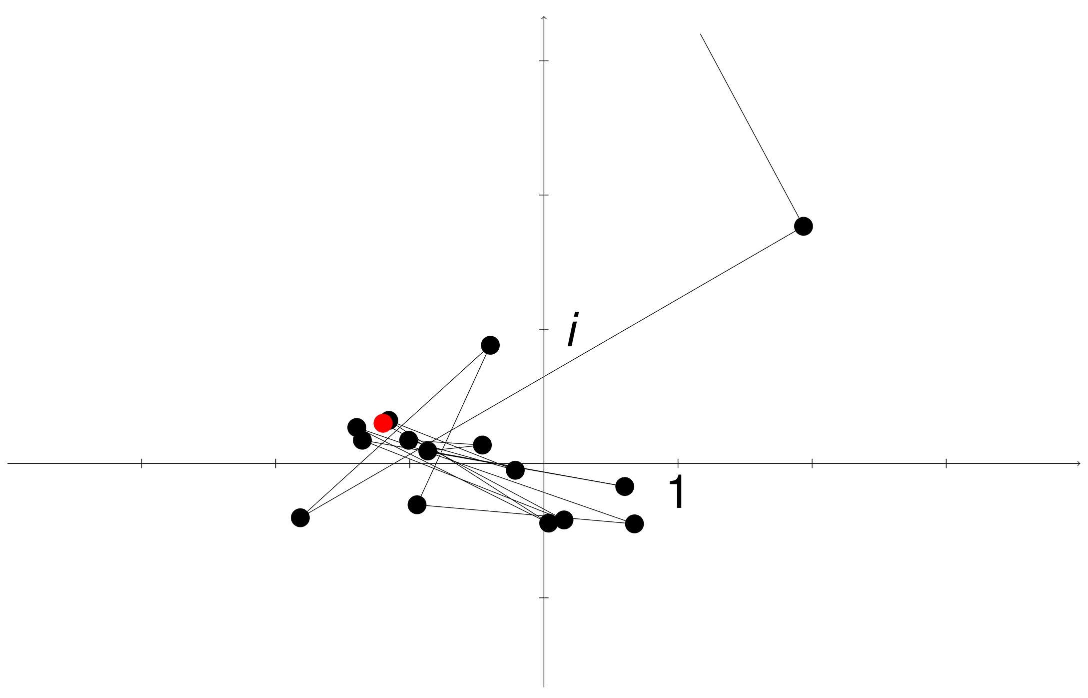
$$\begin{aligned} z_0 &:= 0 \\ z_1 &:= z_0^2 + c = c \\ z_2 &:= z_1^2 + c = c^2 + c \\ z_3 &:= z_2^2 + c = (c^2+c)^2 + c \\ &\vdots \\ z_n &:= z_{n-1}^2 + c \end{aligned}$$

Beispiele.

- Ist $c = 1$, so erhalten wir als die ersten Glieder der Folge: $0, 1, 2, 5, 26, \dots$.
- Ist $c = -1$, so erhalten wir als die ersten Glieder der Folge: $0, -1, 0, -1, 0, \dots$.
- Ist $c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, so erhalten wir

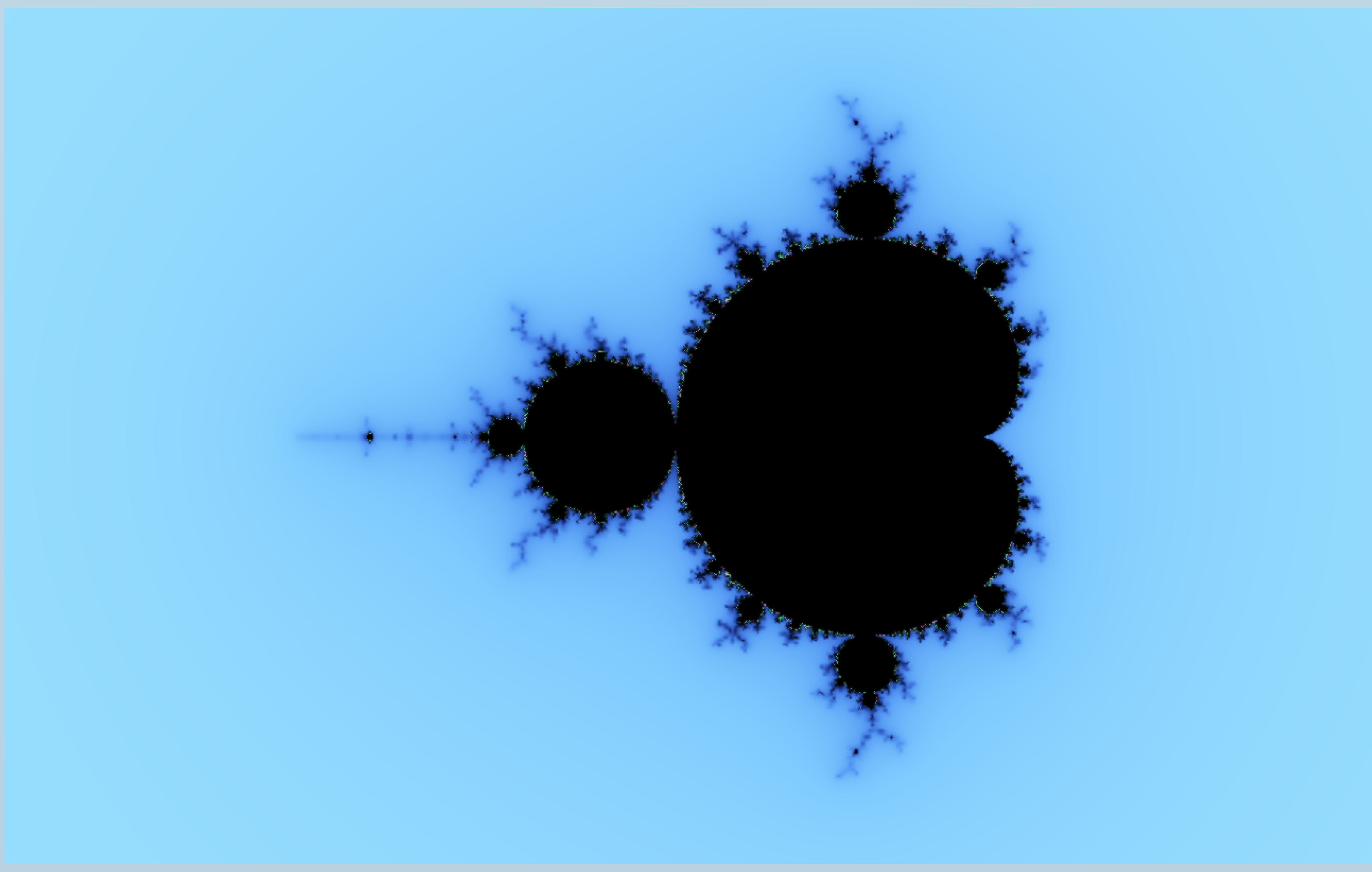
$$0, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, \quad \frac{1}{2}+i, \quad -\frac{1}{4}+\frac{3}{2}i, \quad -1.6875-0.25i, \quad \approx 3.285+1.343i, \dots.$$

Nun zeigt sich, dass —je nachdem, wie c gewählt wurde— sich die Punkte dieser Folge manchmal immer weiter vom Ursprung $(0,0)$ der Ebene wegbewegen (dies ist für $c = 1$ und $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ der Fall), aber manchmal einen relativ kleinen Kreis um den Ursprung nicht verlassen (wie für $c = -1$ — in diesem Fall springen die Werte der Folge zwischen den Werten 0 und -1 hin und her).



Hier sind die ersten Punkte in der Folge zu $c = -1.2 + 0.3i$ (der rote Punkt) dargestellt. Zuerst sieht es so aus, als bleibe die Folge innerhalb eines kleinen Kreises um den Ursprung, der letzte hier dargestellt Punkt (in der Nähe von $2 + 2i$) hat aber schon Abstand > 2 vom Ursprung. Die weiteren Folgenglieder entfernen sich dann sehr schnell weiter weg. (Die Streckenstücke zwischen den Punkten sind hier nur eingezeichnet, um die Reihenfolge der Punkte in der Folge anzudeuten.)

In der Mandelbrot-Menge ist für jeden Punkt c der komplexen Zahlenebene das Verhalten der zugehörigen Folge kodiert.



Die Mandelbrot-Menge

Die "Mandelbrot-Menge" $\mathcal{M}$ ist die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, für die die durch c definierte Folge $(z_i)_i$ (wie im linken Kasten) den Kreis um den Ursprung mit Radius 2 nicht verlässt. In den hier gezeigten Bildern sind die Punkte von $\mathcal{M}$ schwarz gefärbt.

Viele der Darstellungen von Ausschnitten der Mandelbrot-Menge leben besonders von den farbigen Strukturen. Die Färbung eines Punktes (außer schwarz) wird dadurch bestimmt, wie schnell die zugehörige Folge sich vom Ursprung wegbewegt. Welche Farben genau verwendet werden, lässt sich dann in den entsprechenden Programmen variieren.

Manchmal bezeichnet man diese Figur auch als das *Apfelmännchen*.

Benoît Mandelbrot

Benoît B. Mandelbrot (1924 – 2010) war ein französisch-US-amerikanischer Mathematiker. Er hat sich mit ganz verschiedenen mathematischen Problemen befasst, und ist mit seinen Untersuchungen zur "fraktalen Geometrie" auch weit über die Grenzen seines Faches berühmt geworden. Die hier beschriebene *Mandelbrot-Menge* wurde nach ihm benannt, nachdem er 1980 einen wichtigen Forschungsartikel dazu veröffentlicht hatte. Er prägte den Begriff "fraktal" und stellte auch in mehreren Büchern Beziehungen zu ähnlichen Phänomenen in der realen Welt her.

Quelle: Wikipedia; Foto: Wikipedia/Rama CC-BY-SA

Die erste graphische Darstellung der Mandelbrot-Menge wurde 1978 von R. Brooks und P. Matelski auf einem "Schreibmaschinendrucker" erstellt.

Ausschnitte aus der Mandelbrot-Menge