

麻省理工学院公开课程  
<http://ocw.mit.edu>

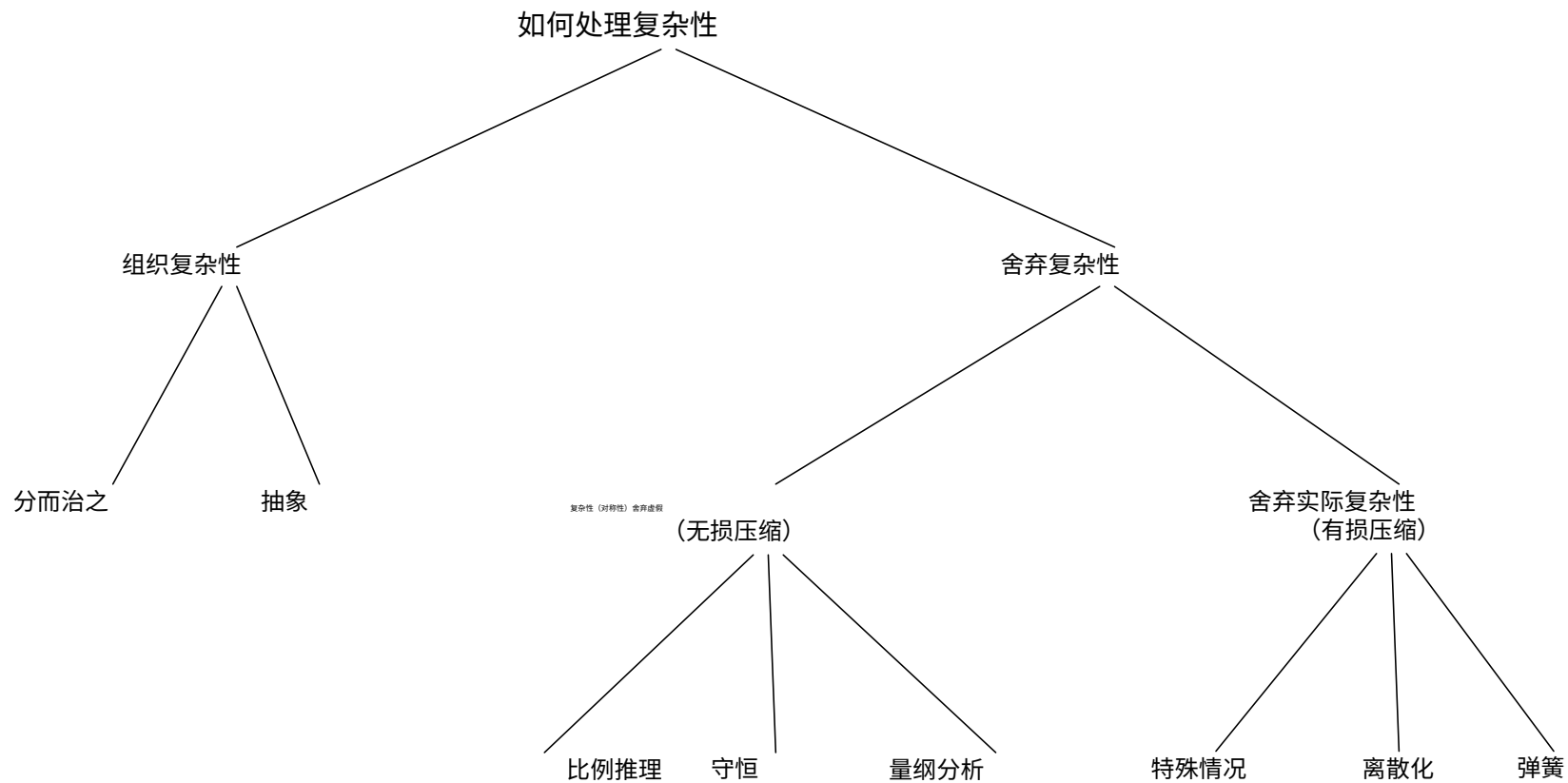
6.055J / 2.038J 科学和工程中的近似艺术  
2008年春季

有关引用这些材料或我们的使用条款的信息，请访问：<http://ocw.mit.edu/terms>。

# 信封背面的数字

符号	什么	数值单位
$\pi$	pi	3
$G$	牛顿常数	$7 \cdot 10^{-11}$ 千克 <sup>-1</sup> 米 <sup>3</sup> 秒 <sup>-1</sup>
$c$	光速	$3 \cdot 10^8$ 米/秒 <sup>-1</sup>
$k_B$	玻尔兹曼常数	$10^{-4}$ 电子伏特 <sup>-1</sup>
$e$	电子电荷	$1.6 \cdot 10^{-19}$ 库仑
$\sigma$	斯特凡-玻尔兹曼常数	$6 \cdot 10^{-8}$ 瓦特/米 <sup>-2</sup> 开尔文 <sup>-4</sup>
太阳质量	太阳质量	$2 \cdot 10^{30}$ 千克
地球半径	地球半径	$6 \cdot 10^6$ 米
$\theta_{\text{月球/太阳}}$	角直径	$10^{-2}$
$\rho_{\text{空气}}$	空气密度	1 千克米 <sup>-3</sup>
$\rho_{\text{岩石}}$	岩石密度	5 克厘米 <sup>-3</sup>
$\hbar$ 摄氏度		200 电子伏特纳米
$L_{\text{水蒸汽}}$	汽化热	2 MJ千克 <sup>-1</sup>
$\gamma_{\text{水}}$	水的表面张力	$10^{-1}$ 牛顿·米 <sup>-1</sup>
$a_0$	玻尔半径	0.5 Å
$a$	典型的原子间距	3 Å
$N_A$	阿伏伽德罗常数	$6 \cdot 10^{23}$
$\mathcal{E}_{\text{脂肪}}$	燃烧能量密度	9 千卡/克 <sup>-1</sup>
$E_{\text{键}}$	典型的键能	4 电子伏特
$\frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{\hbar c}$	细结构常数 $\alpha$	$10^{-2}$
$p_0$	大气压	$10^5$ 帕斯卡
$\nu_{\text{空气}}$	空气的运动粘度	$1.5 \cdot 10^{-5}$ 米 <sup>2</sup> 秒 <sup>-1</sup>
$\nu_{\text{水}}$	水的运动粘度	$10^{-6}$ 米 <sup>2</sup> 秒 <sup>-1</sup>
天		$10^5$ 秒
年		$\pi \cdot 10^7$ 秒
$F$	太阳常数	1.3 千瓦·米 <sup>-2</sup>
天文单位	距离太阳	$1.5 \cdot 10^{11}$ 米
$P_{\text{基底}}$	人体基础代谢率	100 瓦特
开尔文 空气	空气的热导率	$2 \cdot 10^{-2}$ 瓦特·米 <sup>-1</sup> 开尔文 <sup>-1</sup>
开尔文	...非金属固体/液体的	1 瓦特·米 <sup>-1</sup> 开尔文 <sup>-1</sup>
$K_{\text{金属}}$	...金属的性质	$10^2$ W m <sup>-1</sup> 开尔文 <sup>-1</sup>
$c_{\text{空气}}$ $p$	空气的比热容	1 J g <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$c_p$	...固体/液体的性质	25 摩尔焓 <sup>-1</sup> 开尔文 <sup>-1</sup>

# 处理复杂性：近似的艺术



# 目录

1. 预览	4
<b>第一部分 分而治之</b>	<b>6</b>
2. 各种子问题	7
3. 相似子问题	19
<b>第二部分 对称性和不变性</b>	<b>20</b>
4. 对称性	21
5. 比例推理	26
6. 盒模型和保护	40
7. 尺寸	48
<b>第三部分 丢弃信息</b>	<b>68</b>
8. 特殊情况	69
9. 离散化	91
10. 弹簧	97
<b>第四部分 后记</b>	<b>129</b>
11. 一路顺风!	130
参考文献	133
索引	135

# 第一章

## 预览

近似模型可能比精确模型更好！

这个反直觉的说法提出了一些问题。首先，近似模型到底有什么用？我们不应该追求精确吗？其次，是什么使一些模型比其他模型更有用？

关于第一个问题：近似答案是我们能理解的唯一答案，因为我们的思维只是世界的一小部分。因此，当我们表示或建模世界时，我们必须舍弃世界的某些方面，以便我们的思维能够包含这个模型。

关于第二个问题：制作有用的模型意味着舍弃不太重要的信息，以便我们的思维能够理解剩下的重要特征。

我写这本书是为了向你展示如何丢弃不重要的信息，从而得到最有用的近似答案。从多年思考和教授这门学科的经验中，我发现最有用的技巧可以分为三类：

### 1. 分而治之（管理复杂性）

- 异质层次结构
- 同质层次结构

### 2. 对称性和不变性（消除多余的复杂性）

- 比例推理
- 守恒/盒模型
- 无量纲组 舍弃（丢弃

复杂性）

- 特殊情况
- 弹簧模型
- 分数变化
- 离散化

这两种分而治之的技巧可以帮助你管理复杂性。这三种对称性技巧可以帮助你消除多余的复杂性。这前两组技巧是无损的。

压缩。这三种谎言技巧帮助你摆脱复杂性。这第三组进行有损压缩。

使用这些技术，我们将探索自然和人造世界。应用包括：

- 湍流阻力：或者说下落的咖啡过滤器告诉我们飞机的燃油效率。
- 木琴声学：或者说为什么钢琴调音时低音音符低于理想的等温频率，而高音音符高于理想的等温频率。
- 紧凑光盘的设计：或者说贝多芬的第九交响曲如何帮助你找到凹坑之间的间距。
- 振幅作为振动周期的函数：或者说300年前导航的困难程度。
- 湍流流动中涡旋的大小分布：或者说星星为什么会闪烁。
- 太阳光线被太阳弯曲：或者说黑洞的大小。
- 生物力学：动物跳跃高度与其体型的关系。

这些问题都没有简单的解析解。无论是人造的还是自然的，世界很少提供仅限于一个领域的问题，更不用说这些问题的方程有解析解了。为了部分理解世界，我们需要使用前面的技术，制作只保留问题重要特征的模型。

通过制作这样的模型，我们使理解 and 设计变得更加愉快。因此，这本书的隐藏目的虽然不太明显，但是是为了增强你对世界的好奇心。

# 第一 部分分而治 之

2. 各种子问题

7

3. 相似子问题

19

分而治之的推理方法——将大问题分解为小问题——在许多情境中都很有用。它的每个示例都有独特的特点，但有两个广泛的推理类别突出。在第一类中，你将大问题分解为不同或各种各样的子问题。一个例子是估计纽约或芝加哥（这个问题因费米而闻名，费米在芝加哥度过了他的职业生涯）的钢琴调音师数量。你可以将其分解为片段，例如钢琴的数量，每个钢琴调音的频率以及调音一个钢琴需要多长时间。

在第二类中，你将大问题分解为相似或相同的子问题。

一个例子是归并排序，它将待排序的列表分成两半，每一半都使用归并排序进行排序-递归的一个例子。

接下来的两章中，每个类别都包含了扩展示例。

# 第2章

## 各种各样的子问题

对于将问题分解为不同的子问题的第一个例子，我们估计了CD-ROM上的坑之间的间距。然后我们估计了美国每年进口的石油数量。

### 2.1 CD-ROM上的坑

问题：CD-ROM上的坑之间的间距是多少？这些坑（凹陷）是存储元素，每个坑存储一位信息。

最快的估计方法是翻转一张CD-ROM并欣赏其明亮的颜色。颜色的产生是因为坑的排列以显著的角度衍射可见光，而角度强烈依赖于波长（或颜色）。因此，坑的间距与光的波长相当，大约为 $1\text{ }\mu\text{m}$ 。

第二个估计可能来自于对CD播放器或CDROM驱动器中激光器的一些了解。它是一种近红外激光器，因此其波长 - 与坑的大小和间距相当 - 稍长于可见光波长。由于可见光波长范围从350到700纳米或从0.4到0.8微米，因此对坑间距的合理估计再次为1微米。

这两个估计一致，这增加了我们对每个估计的信心。这是为什么。因为这两种方法非常不同，所以一种方法的错误很可能与第二种方法的错误有很大的不同。因此，如果估计值一致，它们可能都是合理的。教训是尽可能使用多种不同的方法。第三种方法使用分而治之的推理。容量和面积共同确定了坑的间距，如果我们做出有用的近似，即坑是均匀

分布的。[这个近似是丢弃信息的一个例子，这是第3部分的扩展主题。]面积是  $A \sim (10\text{cm})^2$ 。

容量通常在盒子上标明：640MB，这大约是5个gigabits，因为每个字节是8个bits。包括纠错位之后，容量可能是6或7个gigabits。



坑间距  $d$  来自将这些  $N \sim 10$  个 gigabits 排列成一个规则的位格：

$$d \sim \sqrt{\frac{10 \text{cm}}{N}} \sim \frac{10 \text{cm}}{10^5} \sim 1 \mu\text{m}.$$

再次强调，估计值大约是  $1 \mu\text{m}$ 。我们得出的结果如果重复三次，就一定是正确的！

你不需要对容量数字深信不疑。相反，使用分而治之的推理方法，根据音频CD上编码音乐所需的信息量。

所需的信息量取决于播放时间、采样率和样本大小（位数）。

一个典型的CD可以容纳大约20首流行音乐歌曲，每首歌曲大约3分钟长，所以大约1小时。另一种（也许是虚假的）历史记载证实了这个估计：飞利浦公司发明CD格式和播放器的工程师们据称坚持要求这种格式能够容纳贝多芬的第九交响曲，大约74分钟。

采样率为44kHz。假设你记住了44，但是忘记了单位：是kHz还是MHz。你该如何选择？人类听觉范围延伸到大约20kHz。作为对比，60Hz的线电压杂音已经相当明显了。根据香农的采样定理，无损采样声音需要至少  $2 \times 20\text{kHz}$  的采样率。CD格式的发明者选择了稍微更高的采样率，这样可以制作出还算不错的抗混叠滤波器。[如果你想了解更多关于抗混叠滤波器的信息，请告诉我！]即使有抗混叠滤波器的限制，也不需要44MHz的采样率。事实上，采样率是44kHz。

每个样本需要32位：每个通道（立体声）需要16位每个样本。16位是在精确音量编码的乌托邦（ $\infty$ 位每个样本每个通道）和最小存储乌托邦（每个样本每个通道1位）之间的合理折衷。为什么要在16位而不是50位进行折衷？因为50位，虽然现在很容易表示为数字，但意味着具有  $2^{50}$  精度的荒谬模拟硬件。

因此容量大约是

$$N \sim 1 \text{小时} \times \frac{3600 \text{秒}}{1 \text{小时}} \times \frac{4.4 \times 10^4 \text{个样本}}{1 \text{秒}} \times \frac{2 \times 16 \text{位}}{1 \text{个样本}}.$$

首先做重要的部分：十的幂。3600贡献了三个； $4.4 \times 10^4$  贡献了四个； $2 \times 16$  贡献了一个；总共是八个。

尾数-即十的幂前面的部分-贡献了  $3.6 \times 4.4 \times 3.3$ 。如果记住世界上只有两个数字，这个乘法就简化了：

1和‘few’。唯一需要记住的规则是 ( $\text{few}^2 = 10$ )，所以‘few’很像3。然后  $3.6 \times 3.3$  大约是10，可能稍微高一点。然后  $3.6 \times 4.4 \times 3.3 \sim 50$ 。

因此，容量的估计大约是  $50 \times 10^8 \sim 5 \times 10^9$ ，这与实际情况非常吻合。

与CD-ROM盒子上的数字相符，因此，分而治之的容量估计使我们对凹坑间距的估计更加有信心。

## 2.2树的表示

分而治之估计的结构是层次的。层次结构的理想表示是一棵树。因此，为了说明这种表示，本节重新分析了使用树的坑距。

使用CD-ROM的面积和容量进行估计是最复杂的方法

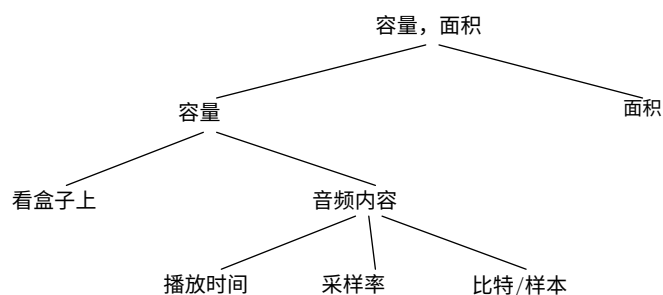
在第2.1节中找到坑距的方法，所以让我们将其表示为一棵树。树的根是'容量，面积'，这个标签提醒我们使用的方法。正如标签所示，进行估计需要找到容量和面积，所以树开始有两个分支。



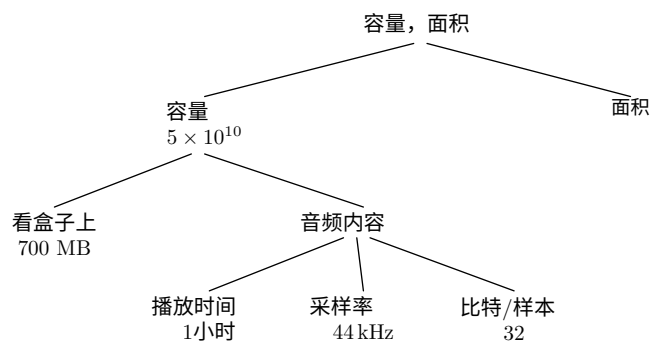
面积很容易估计，所以下一步是将容量细分为更容易的部分。

第一种方法是查看CD-ROM盒子，上面写着'容量700MB'。

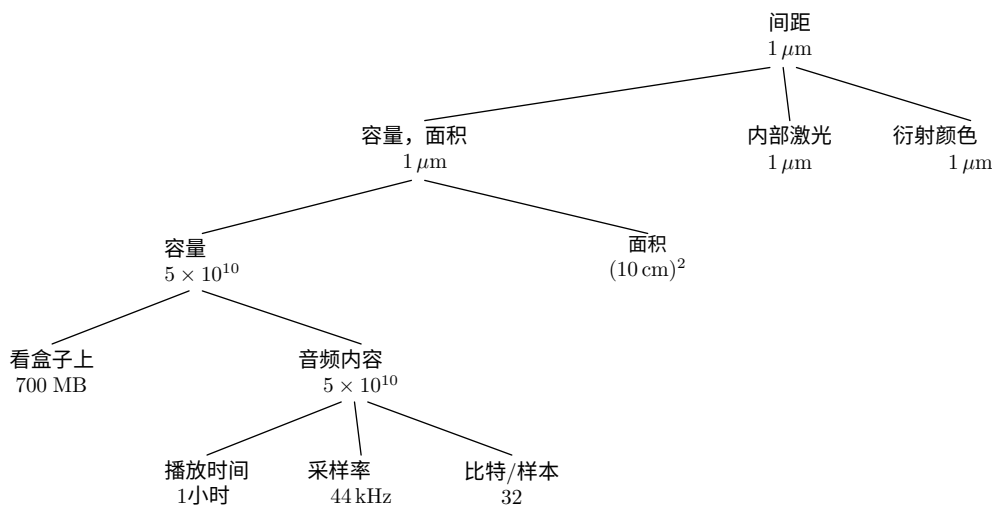
第二种方法是估计存储在音频CD上的音频信息所需的比特数，通过估计播放时间、采样率和每个样本的比特数，在这里，立体声的两个声道被包含在每个样本的比特数中。



现在在叶子节点上填入数字，并向树的根节点传播。音频持续大约一个小时，我们估计为20首流行音乐歌曲，每首歌曲持续3分钟，或者贝多芬的第九交响曲。采样率为44kHz。每个样本为32位，包括立体声的两倍。包括这些值的树如下所示：



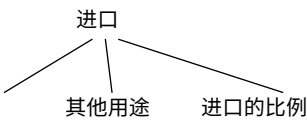
这棵树是整个分析的一个子树。该分析还包括另外两种方法：了解CD播放器内部的激光和观察由衍射引起的闪烁颜色。包括这些方法，并发现三种方法的一致性，使得1微米的估计更加可靠。用图示的方式来说，它使得树更加坚固：



一棵树非常适合表示分而治之的推理。这棵树将整个分析总结在一个图中。这种紧凑的表示方式使得更容易找到和修正数字或结构上的错误，或者看出估计的哪些部分最不可靠（可能需要更细分）。

2.3 石油进口

对于下一个分而治之推理的例子，我们将从一开始就制作一棵树。问题是估计美国每年进口多少桶石油。  
有辆汽车  
估计这个数字有很多方法 - 对于制定粗略估计的好消息



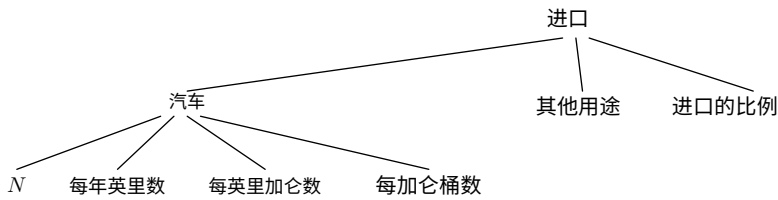
。在这里，我通过估计汽车使用的石油量来估计它，然后调整该数字以考虑两个因素：首先，汽车不是唯一的石油消费者；其次，进口只占石油消费量的一部分。起始树只有三个叶子。

最右边的两个叶子很难猜测值，但是分而治之并没有帮助。所以我必须猜测它们。

汽车是石油的主要消耗者，但还有其他交通用途（卡车、火车和飞机），还有供暖和制冷。考虑到这些其他用途的重要性，也许汽车占石油消耗的一半：留出空间给其他重要用途。所以我需要将汽车的结果翻倍以考虑其他用途。

进口占总消耗的很大一部分，否则我们在新闻报道中不会读到那么多关于其他国家石油产量和我们对进口石油依赖增长的内容。也许石油使用量的一半是进口石油。所以我需要将总使用量减半来找到进口量。

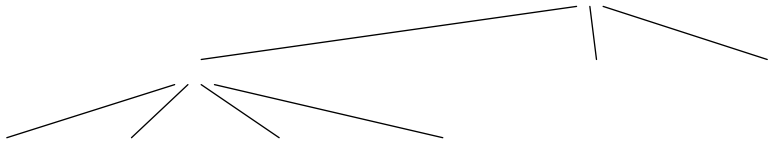
第三个叶子，汽车，太复杂了无法立即猜测一个数字。所以分而治之。一个细分是按照汽车数量、每辆汽车行驶的里程、每加仑行驶的英里数和每桶的加仑数来划分：



现在猜测未编号的叶子节点的值。美国有 $3 \times 10^8$ 人口，似乎连婴儿都拥有汽车。作为一个猜测，汽车的数量大约是  $N \sim 3 \times 10^8$ 。

每辆汽车的年行驶英里数可能是15,000。但是  $N$ 可能有点大，所以让我们将年行驶英里数估计降低到10,000，这样做的额外好处是更容易处理。

典型的油耗可能是每加仑25英里。然后是棘手的部分：一个桶有多大？一种估计方法是一个桶的成本约为100美元，一加仑汽油的成本约为2.50美元，所以一个桶大约是40加仑。带有数字的树如下：



所有叶子节点都有值，所以我可以向上传播到根节点。主要操作是乘法。对于节点'汽车'：

$$3 \times 10^8 \text{ 辆汽车} \times \frac{10000 \text{ 英里}}{1 \text{ 年}} \times \frac{1 \text{ 加仑}}{25 \text{ 英里}} \times \frac{1 \text{ 桶}}{40 \text{ 加仑}} \sim 3 \times 10^9 \text{ 桶/年} .$$

两个调整因素贡献了  $2 \times 0.5 = 1$ ，所以进口估计值为

$$3 \times 10^9 \text{ 桶/年} .$$

对于 2006年，真实值（来自美国能源部）为  $3.7 \times 10^9$ 桶/年！

这个结果，就像坑距一样，令人惊讶地准确。为什么呢？ 第2.5节解释了一个随机行走模型，它表明你分割得越多，越好。

但在讨论那个模型之前，再试一个例子。

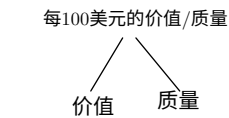
2.4 金子还是钞票？

闯入银行金库后，你应该拿100美元的钞票还是黄金？

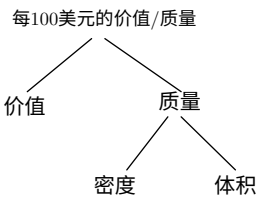
选择取决于你能多轻松和无损地保护赃物以及其他问题超出本书的范围。但我们可以研究一个问题：哪种选择让你带走最多的钱？ 重量或体积可能限制你能携带多少，对于这个问题来说，更重要的是影响你的选择。为了开始，让我们假设你受到重量（实际上是质量）的限制，那么问题就取决于两个子问题：每100美元纸币和黄金的质量价值。以树形结构表示：

黄金的质量价值可能是从报纸或晚间新闻的金融版块熟悉的数字。现在（2008年）大约是每盎司800美元（盎司是盎司的缩写）。作为对记忆的粗略检查 - 例如，价格应该是每盎司80美元还是每盎司8000美元？这里还有另一种方法。当黄金标准在1945年重新引入为美元标准时，黄金定价为每盎司35美元。通货膨胀自那时以来可能使美元贬值至少10倍，所以现在黄金应该约为每盎司350美元。半记得的数字每盎司800美元似乎合理。

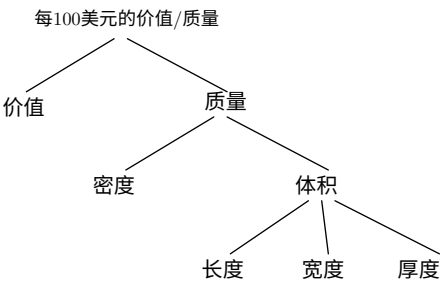
找到每张美元纸币的质量价值始于这棵树：



问题中指定的价值为100美元，但质量还需要工作。它分解成体积乘以密度，因此每单位质量的树的价值变为：

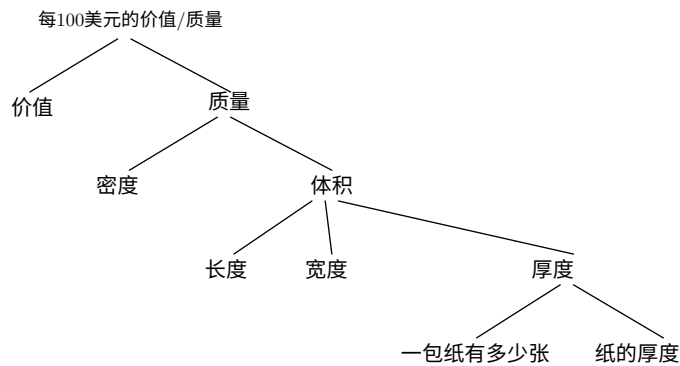


体积分解为长度乘以宽度乘以厚度，因此树生长：



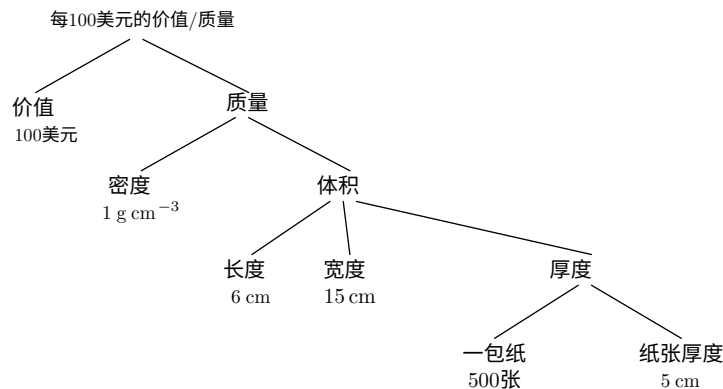
要找到一张纸币的长度和宽度，将尺子放在一张美元纸币旁边，或者猜测一张纸币的尺寸为2或3英寸乘以6英寸或6厘米 × 15厘米。为了对尺寸有所了解，先猜测，然后如果感到不安，用尺子检查你的答案。随着对尺寸的感觉的发展，你将不再经常需要尺子。

猜测一张纸币的厚度比猜测长度或宽度更难。然而，正如曾经的Tammany Hall的头目George Washington Plunkitt所说：“我看到了我的机会，然后抓住了它们。”假装一张美元纸币是由普通纸张制成的。要找到它的厚度，四处看看。在用来撰写本书的计算机旁边放着一台喷墨打印机；在打印机旁边放着一包打印纸。如果我们知道打印纸包的厚度和包含的张数，那么我们就知道一张纸的厚度。你可以称这种技术为乘法和征服。总的教训是，微小的值，远低于典型的人类经验，需要被放大以便估计。大的值，远高于典型的人类经验，需要被分解成较小的部分以便估计。通过放大纸张的厚度这最后一步，每单位质量的纸币的完整树变为：



一包纸（500张）大约有5厘米厚。唯一缺失的数值是一张纸的密度。要找到密度，使用你所知道的：钱是纸。纸是木材或织物，除了许多复杂的加工阶段，其分析远远超出了本书的范围。当一个过程，比如造纸，看起来很困难时，就忘记它，希望你还是没问题的。更重要的是要得到一个估计值；稍后再纠正极不准确的假设（如果有必要的话）。木材有多密集？木材几乎浮不起来，所以它的密度大约是水的密度，即  $\rho \sim 1 \text{ g cm}^{-3}$ 。所以一张100美元的钞票的密度大约是  $1 \text{ g cm}^{-3}$ 。

这是一棵包含所有叶值的树：



现在向上传播叶值。一张钞票的厚度大约是  $10^{-2} \text{ cm}$ ，所以一张钞票的体积大约是

$$V \sim 6 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 10^{-2} \text{ cm} \sim 1 \text{ cm}^3。$$

所以质量是

$$m \sim 1 \text{ cm}^3 \times 1 \text{ g cm}^{-3} \sim 1 \text{ g}。$$

多简单！因此，每克一张100美元的价值是100美元/克。为了在钞票和黄金之间做出选择，将该价值与黄金的每克价值进行比较。不幸的是，我们的黄金数字是按盎司计算的，而不是按克计算的。幸运的是，一盎司大约是27克，所以每盎司800美元大约是每克30美元。教训：带走100美元的钞票，但留下20美元的钞票。

## 2.5 随机漫步

在第2.1节和第2.3节中的估计是令人惊讶地准确。CD-ROM中真正的坑距变化范围从 $1\mu\text{m}$ 到 $3\mu\text{m}$ ，根据所谓的红皮书，菲利普斯和索尼给出了CD-ROM的规格；我们对 $1\mu\text{m}$ 的估计还不错。石油进口的真实值与我们的估计只有10%的差异。

同样重要的是，在进行分而治之的推理之后，估计更加准确。如果我不对问题进行细分，我对石油进口的95%概率区间的猜测值是从 $10^6\text{b/yr}$ 到

$10^{12}\text{b/yr}$ 。换句话说，如果有人声称该值为每年1000万桶，这似乎很低，但我不会押注太多。在进行分而治之的估计之后，如果真实答案比估计值大或小超过10倍，我会感到惊讶。

本节介绍了一个模型，用于解释如何通过分而治之的推理来使估计更准确。这个想法是，当我们猜测一个远离我们直观经验的值 - 例如，微米级的距离或者十亿桶 - 指数的误差将与指数成比例。例如，当一口气猜测一个像 $10^9$ 这样的数量时，我真正的意思是：‘它可能是，比如说，低估到 $10^6$ ，或者，比如说，高估到 $12$ 。’而当猜测一个像 $10^{30}$ （太阳的质量，以千克为单位）这样的数量时，我希望用一个范围 $10^{20}$ 到 $10^{40}$ 来保护自己。

10 因此，在这个模型中，任何一个数量 $10^\beta$ 实际上是简写为

$$10^\beta \rightarrow 10^{\beta-\beta/3} \dots 10^{\beta+\beta/3}.$$

现在进一步简化模型：用端点替换值的范围。所以，如果我们试图猜测一个真实值为

$10^\beta$ ，我们猜测  $10^{2\beta/3}$  或者  $10^{4\beta/3}$  的可能性是相等的。一个更现实的模型会将 $10^\beta$ 作为一个可能的选择，但最简单的模型易于模拟和推理（这个理由就是我懒）。

为了看到模型的后果，我将通过一个数值例子来比较细分和不细分的情况。假设我们想要猜测一个真实值为

$10^{12}$ 的量。不细分的情况下，我们可能会猜测 $10^8$ 或者 $10^{16}$ （加或减指数的三分之一），范围很大。

将估计值细分为16个相等的因子时，与该范围进行比较。

每个因子是  $10$ 在猜测每个因子时，模型表示我们会猜测 $10^{1/2}$ 或者

$10^1$ 用  $p = 0.5$ 教授。这里是一个选择16个这样的因子的例子，随机从中选择。 $10^{1/2}$  和  $10^1$  和它们相乘：

$$10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} = 10^{10.5}$$

这里还有三个随机生成的例子：

$$10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} = 10^{13.0}$$

$$10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} = 10^{11.5}$$

$$10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0.5} \cdot 10^1 \cdot 10^{0.5} = 10^{10.5}$$

这些估计值大多在真实答案 $10^{12}$ 的一个数量级内，而一次性估计可能会偏离四个数量级。发生的是

个别部分的错误不太可能指向同一个方向。有些部分会低估，有些部分会高估，而所有部分的乘积很可能接近真实值。

这个数值例子是我们对随机游走的第一次体验。它们的关键特点是期望的漫步要比直线行走小得多，而不断来回切换。它们要小多少是一个我们将在第8章中介绍特殊情况推理时回答的问题。

## 2.6 Unix哲学

通过将复杂性分解为可管理的部分来组织复杂性不仅限于数值估计；这是一种通用的设计原则。它渗透到Unix及其后代操作系统，如GNU/Linux和FreeBSD。本节讨论了一些示例。

### 2.6.1 构建块和管道

这里是Unix的一些构建块程序：

- `head`：从输入中打印前  $n$  行；例如，`head -15` 打印前15行。
- `tail`：从输入中打印最后  $n$  行；例如，`tail -15` 打印最后15行。

如何使用这些构建块打印文件的第23行？分而治之！一个解决方案是将问题分解为两个部分：打印前23行，然后从这些行中打印最后一行。第一个子问题可以通过 `head -23` 来解决。第二个子问题可以通过 `tail -1` 来解决。

为了组合解决方案，Unix提供了管道运算符。用竖线 `|` 表示，它将一个程序的输出连接到另一个命令的输入。在数值估计问题中，我们通过使用乘法将子问题的解决方案组合起来。管道运算符类似于乘法。数值估计中的乘法和编程中的管道都是组合运算符的示例，这些运算符对于分而治之的解决方案至关重要。

要打印第23行，请使用以下组合：

```
head -23 | tail -1
```

要告诉系统从哪里获取输入，有几种选择：

1. 按原样使用前面的组合。然后输入来自键盘，组合将读取23行输入，打印出这23行中的最后一行，然后退出。
2. 告诉 `head` 从文件中获取输入。一个示例文件是字典。在我的GNU/Linux笔记本电脑上，它是文件 `/usr/share/dict/words`，每行一个单词。要打印第23行（即第23个单词）：



```
head -23 /usr/share/dict/words | tail -1
```

3. 让 head 从键盘的想法中读取，但将键盘连接到一个文件。这种方法使用 < 语法：

```
head -23 < /usr/share/dict/words | tail -1
```

The < operator tells the shell (the Unix command interpreter) to connect /usr/share/dict/words to the input of head.

4. 像前面的方法一样，但使用 cat 程序。The cat program copies its input file(s) to the output. 因此，这个扩展的管道与前面的替代方法具有相同的效果：

```
cat /usr/share/dict/words | head -23 | tail -1
```

它比让 shell 自己重定向输入稍微低效，因为更长的管道需要运行一个额外的程序(cat)。

这个例子介绍了 Unix 的哲学：为了实现分而治之的推理，提供有用的小工具和组合它们的方法。下一节将这个哲学应用于唐纳德·科努斯特(Donald Knuth)创建的一个奇特的例子：在字典中找到“angry”之后的下一个单词，其中字典是以最后一个字母开头的，然后是倒数第二个字母，依此类推。

## 2.6.2 排序和搜索

那么，在字典中如何找到‘angry’之后的下一个单词，其中字典是按照最后一个字母，然后是倒数第二个字母等进行字母排序的？

将问题分为两个部分：

1. 创建一个反向字典，按照最后一个字母，然后是倒数第二个字母等进行字母排序。
2. 打印‘angry’之后的行。

第一个问题细分为：

1. 反转每行字典。
2. 对反向字典进行排序。
3. 反转每行。

Unix 提供了用于第二个子问题的排序功能。对于第一个和第三个问题，通过在 Unix 工具箱中进行搜索，使用 `man -k` 命令，得到以下结果：

```
$ man -k reverse
build-rdeps (1)      - 查找依赖于特定软件包的软件包以构建...

col (1)              - 从输入中过滤反向换行符
git-rev-list (1)     - 以逆时间顺序列出提交对象
rev (1)              - 反转文件或文件的行
tac (1)              - 连接并打印文件的反向
xxd (1)              - 制作十六进制转储或进行反向操作。
```

啊！ rev就是我们需要的程序。因此，第一个子问题通过这个流水线解决了：

```
rev < /usr/share/dict/words | sort | rev
```

第二个问题 - 找到'angry'后面的行 - 是一个由模式查找程序 grep完成的任务。在最简单的用法中，你告诉 grep一个模式，它会打印出与该模式匹配的每一行。

模式是正则表达式。它们的语法可能变得晦涩，但最重要的特点是简单的。例如，

```
grep '^angry$' < /usr/share/dict/words
```

打印出所有完全匹配 angry的行：^字符匹配行的开头，\$字符匹配行的结尾。

那个调用 grep除了作为拼写检查器之外没有用处，因为它只告诉我们愤怒在字典中。然而，通过 -A option，你可以告诉 grep在每个匹配行后打印多少行。所以

```
grep -A 1 '^angry$' < /usr/share/dict/words
```

将打印出'angry'和它后面的单词（在常规字典中）：

```
angry
angst
```

要仅打印 'angry'后面的单词，请在 grep命令后面跟上 tail：

```
grep -A 1 '^angry$' < /usr/share/dict/words | tail -1
```

现在将这两个解决方案结合起来解决寻宝问题：

```
rev </usr/share/dict/words | sort | rev | grep -A 1 '^angry$' | tail -1
```

这个管道失败并显示错误

```
rev: stdin: 无效或不完整的多字节或宽字符
```

反转程序报错，它无法理解字典中的一些字符。rev来自Unix的旧版本，仅支持ASCII字符，而字典是现代的，包含非ASCII字符，如重音字母。

为了解决这个意外的问题，在传递给 rev之前清理字典。清理程序再次是 grep，它只允许纯ASCII的行通过。这个命令

```
grep '^[a-z]*$' < /usr/share/dict/words
```

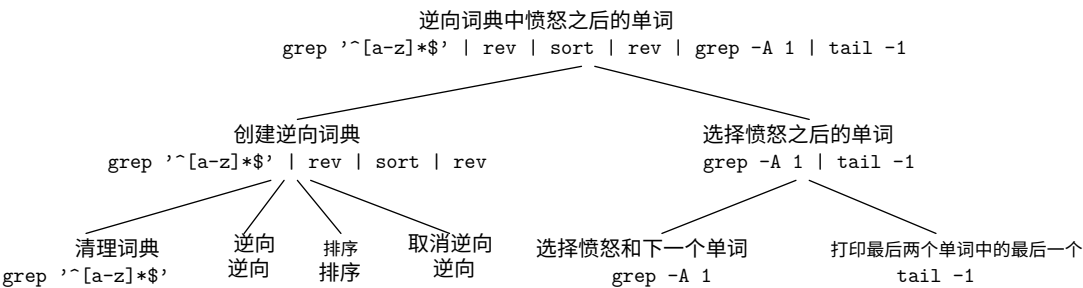
将打印一个只包含非重音、小写字母的字典。在正则表达式中，\* 运算符表示“匹配前面的正则表达式的0个或多个实例”。

完整的流程是

```
grep '^[a-z]*$' < /usr/share/dict/words \  
| rev | sort | rev \  
| grep -A 1 '^angry$' | tail -1
```

行尾的反斜杠告诉shell继续读取命令，即使行已经结束。

表示这个解决方案的树是



产生‘饥饿’。

2.6.3 进一步阅读

要了解更多关于Unix原理的知识，特别是设计如何促进分而治之的编程，请参阅[1,2,3]。

## 第3章

# 相似 子问题

# 第2部分

# 对称性和 不变性

4. 对称性	21
5. 比例推理	26
6. 盒模型和守恒	40
7. 尺寸	48

本书的第一部分讨论了如何组织，从而如何管理复杂性。第二部分和第三部分讨论了如何消除复杂性，本部分讨论了三种找到和消除非真实复杂性的方法。这三种方法是比例推理、守恒和量纲分析，是对称推理的例子。对称性本身也是一种强大的技术，即使不使用这三种方法。因此，下一章介绍了对称推理的一般例子，接下来的章节将进一步发展这种推理方法，包括比例推理、守恒和量纲分析。

# 第4章

## 对称性

对称性通常被认为是一个纯粹的几何概念，但它在各种问题中都很有用。每当你可以使用对称性时，使用它将简化解决方案。

下面的部分介绍了在微积分、几何学和热传导中的对称性。

### 4.1 微积分

对于什么值的  $x$  是  $3x - x^2$  的最大值？

通常的方法是求导：

$$\frac{d}{dx}(3x - x^2) = 3 - 2x = 0,$$

然后  $x_{\max} = 3/2$ .

尽管求导是一种通用的方法，但它的普遍性是有代价的：它的结果往往很难解释。你只需要进行运算，然后看最后出现的公式，就这样。所以，如果你能找到一个简化，你很可能不会对为什么答案出现这样的方式有更多的洞察。

对于这个问题，对称性简化了它，没有剩下什么要做的。要看到如何，首先将方程因式分解为  $x(3 - x)$ 。让  $x_{\max}$  是它的最大值的位置。因子  $x$  和  $3 - x$  可以使用替换  $x' = 3 - x$  进行交换。用  $x'$  表示，问题变为最大化  $(3 - x')x'$ 。这个公式与原始公式  $x(3 - x)$  具有相同的结构。因此，对称操作保持了这个结构。由于最大值的  $x$  或  $x'$  位置仅取决于结构，位置在  $x$  或  $x'$  坐标系统中具有相同的数值。因此，它被认为是对这个替换操作不变的。因此，在这个问题中， $x' \rightarrow 3 - x$  的替换是一个对称性。

由于对称性，由  $x' = 3 - x$  得到， $x_{\max} = x'_{\max} = x_{\max}$ ，唯一的解是  $x_{\max} = x'_{\max} = 3/2$ .

类似的，也许更简洁的论证是，最大值位于两个根  $x = 0$  和  $x = 3$  的中间，因此最大值是  $x_{\max} = 3/2$ 。这个论证隐含了对称性，这是说最大值位于根的中间的理由。

下一个微积分例子来自电气和机械工程，是为了最大化二阶系统的响应，例如阻尼弹簧-质量系统或 LRC 电路。响应取决于驱动输入的频率和振幅，并且以输出振幅与输入振幅的比值来衡量。这个比值是增益  $A$ ，而牛顿第二定律的几个应用产生了

$$A(\omega) = \frac{j\omega}{1 + j\omega/Q - \omega^2},$$

是系统的品质因数（阻尼的倒数）， $j$  是  $-1$ ， $\omega$  是以自然频率的单位测量的。<sup>其中  $Q$</sup>

问题是找到峰值响应，即最大化增益的频率  $\omega_{\max}$  以及该频率下的增益。增益的幅度是

$$|A(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2/Q^2}}$$

由于有平方和平方根，通过求导的蛮力方法会产生混乱的方程。所以，使用对称性。对称操作是什么？它将是坐标系的翻转，但围绕哪个点？值  $\omega = 1$  是特殊的，因为这个选择消除了分母项  $(1 - \omega^2)^2$ ，这有助于最小化分母并最大化增益。另一方面，稍微减小  $\omega$  可能会增加增益，因为它在增加  $(1 - \omega^2)^2$  的代价下，减小了分母中的  $\omega^2/Q^2$  项。另一方面，稍微增加  $\omega$  可能会产生更高的增益，因为它增加了增益的分子。

总结一下： $\omega = 1$  是特殊的，但是略高或略低于  $\omega = 1$  可能是最优的。由于  $\omega = 1$  是特殊的，将其作为对称操作保留的点。

对于对称操作，交换  $\omega < 1$  和  $\omega > 1$  的范围。频率主要以彼此之间的比率为主要考虑因素 - 例如在音乐中 - 因此通过定义进行交换

通过倒数的定义，问题变为最大化  $A(\omega')$  的幅度，其中

$$A(\omega') = \frac{j/\omega'}{1 + j/\omega'Q - 1/\omega'^2}.$$

将分子和分母都乘以  $\omega'^2/\omega'^2$  的形式，得到：

$$A(\omega') = \frac{j\omega'}{\omega'^2 + j\omega'/Q - 1}.$$

它的幅度是

$$|A(\omega')| = \frac{\omega'}{\sqrt{(1 - \omega'^2)^2 + \omega'^2/Q^2}}.$$

这个公式与  $\omega$  本身的幅度具有相同的结构，这个信息足以解出  $\omega_{\max}$ 。由于同构结构， $\omega'_{\max} = \omega_{\max}$ 。但是根据构造， $\omega' = 1/\omega$ ，所以  $\omega'_{\max}$  也是  $1/\omega_{\max}$ 。唯一的解是  $\omega_{\max} = \pm 1$ 。由于负根无趣，相关解是  $\omega_{\max} = 1$ ，响应是

$$A(\omega_{\max}) = \frac{j}{1/Q} = jQ.$$

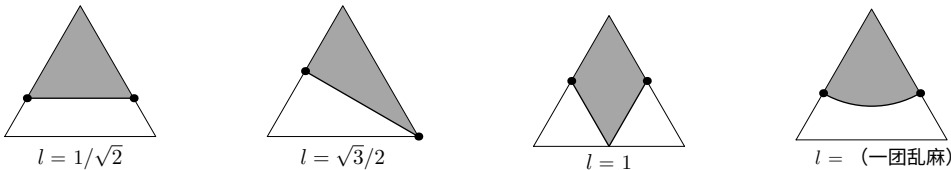
在最大响应中， $Q$ 的因素表明，轻度阻尼的系统，在所谓的共振频率下，如果你推它，可以达到很高的振幅。 $j$ 表示在这个共振频率下的响应滞后输入90度。换句话说，最大的推力发生在速度最大的时候，而不是位移最大的时候。

4.2 图形对称性

下面的图形问题说明了对几何问题应用对称性，这是传统的对称领域：

如何用最短的路径将一个等边三角形切成两半，路径不一定是直的？

这里有几个候选路径，它们是无多个可能性中的一部分。



让我们计算每条二等分路径的长度，长度以三角形边长为单位。第一个候选路径围绕一个面积是原三角形一半的等边三角形，所以较小的阴影三角形的边长缩小了一个因子

$\sqrt{2}$ 。因此，路径是其中一条边，长度为  $1/\sqrt{2}$ 。在第二个选择中，路径是原三角形的高度，这意味着它的长度是 $3/2$ ，所以它比第一个候选者更长。第三个候选者包围着由两个小等边三角形组成的菱形。每个小三角形的面积是原三角形边长为1的四分之一，所以每个小三角形的边长是 $1/2$ 。中分路径是两个小三角形的边，所以它的长度是1。这个候选者比其他两个候选者更长。第四个候选者是一个六分之一的圆。要找到它的长度，找到圆的半径  $r$ 。六分之一的圆的面积是三角形的一半，所以

$$\underbrace{\pi r^2}_{\text{一个圆}} = 6 \times \underbrace{\frac{1}{2} A_{\text{三角形}}}_{\text{一个三角形}} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

将这些部分相乘

$$\pi \text{半径}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

和



$$\text{半径} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

二分路径是一个六分之一的圆，所以它的长度是

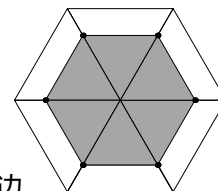
$$l = \frac{2\pi \text{半径}}{6} = \frac{2\pi}{6} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

最好的先前候选者（第一张图片）的长度为  $1/\sqrt{2} = 0.707\dots$ 。平方根的混乱是否会产生更短的路径？滚动鼓声…：

$$\text{长度} = 0.67338\dots,$$

小于  $1/\sqrt{2}$ 。所以圆弧是目前为止最好的二分路径。然而，它是所有可能路径中最好的吗？计算圆的弧长很麻烦，而且大多数其他路径甚至没有闭合形式的弧长。

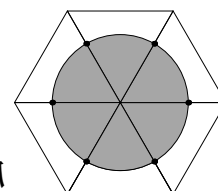
在这本书的这一部分中，不要在每条路径上进行复杂的计算，而是尝试使用对称性，这是这三种方法的数学原理。为了使用对称性，将三角形复制六次，形成一个六边形，从而也复制了候选路径。



这是复制第一个候选路径的结果，其中分割线直接横穿。原始三角形变成了大六边形，而封闭的半个三角形变成了一个面积是大六边形的一半的小六边形。

将这个图与复制圆弧分割的结果进行比较。

大六边形与上一次复制的相同，但现在被分割的区域复制成了一个圆。阴影六边形和这个圆，哪个路径的周长更短？等周定理说，在面积相同的所有形状中，圆的周长最小。由于圆和较小的六边形都包围着相同的面积-是一个三角形面积的三倍-圆的周长比六边形小，也比复制任何其他分割路径的结果小。所以圆弧是解决方案。



这个例子的教训是对称性可以消除复杂性。这个问题的复杂性来自三角形的边缘：每个边缘应该是双分形状的一部分吗？不同的路径使用不同数量的每个边缘，并且没有明显的方法来推断正确的数量。通过将三角形复制成六边形使图形对称后，边缘变得无关紧要。在对称图形中，问题简化为找到围绕六边形一半的最短路径。

## 4.3 热流

这是一个形状为正五边形的金属板，边缘保持在固定温度。正五边形中心的温度是多少？

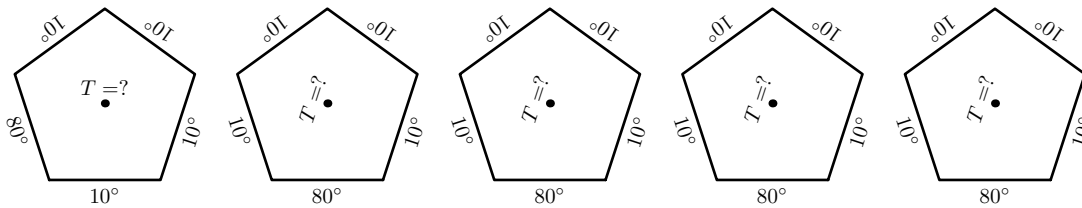
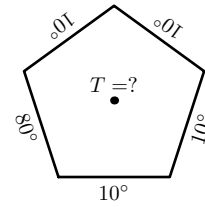
这个问题在解析上很难解决，因为热流由一个二阶偏微分方程描述，而这个方程有简单的解。

一个二阶偏微分方程描述了热流，这个方程有简单的解。

仅适用于一些简单边界。可惜，五边形不是其中之一  
的边界。然而，对称性使解决方案流动起来。

对称操作是旋转，因为五边形的方向是任意选择的。

自然界中的热传导方程并不关心我们如何指定坐标系。因此，这五个方向的板材的行为是相同的：



现在将这些板材（心理上）叠加在一起，将它们上下重叠的温度相加，得到新金属板的温度分布。对于新的板材，每个边缘的温度为

$$T_{\text{边缘}} = 80^\circ + 10^\circ + 10^\circ + 10^\circ + 10^\circ = 120^\circ。$$

因此，整个板材的温度为  $120^\circ$ 。

由于对称操作是围绕中心旋转（ $72^\circ$ ），当板材（心理上）叠加在一起时，中心重叠。此外，热传导与温度差成正比 - 即热传导是一个线性过程 - 因此组合板材内部的温度是五个相应内部温度的总和。由于叠加板材在整个过程中的温度都是  $120^\circ$ ，并且五个子板的中心重叠在一起，每个中心温度为  $T = 120^\circ / 5 = 24^\circ$ 。

## 4.4 期待

接下来的三章将使用对称性的这个方面 - 寻找和消除虚假的复杂性 - 来发展三种技术：比例推理、守恒和尺寸分析。

# 第五章

## 比例推理

对称性可以消除多余、无关的复杂性和比例推理，并将其实施在哲学中。如果一个物体没有受到力的作用（或者你稳定地行走），那么行走两倍的时间意味着行走两倍的距离。有两个变化的量会增加复杂性。然而，距离/时间的比值，也被称为速度，与时间无关。因此，它比距离或时间更简单。这个结论可能是比例推理的最简单的例子，其中比例的陈述是

$$\text{距离} \propto \text{时间}。$$

使用对称性减轻了复杂性。这里的对称操作是'改变物体移动的时间（或者你行走的时间）'。这个操作不应该改变分析的结论。因此，使用这个对称操作不会改变自身不变的量进行分析。其中一个这样的量是速度，这就是为什么速度是如此有用的量。

同样，在随机行走和扩散问题中，平方平均距离与旅行时间成比例：

$$\langle x^2 \rangle \propto t.$$

因此，有趣的数量是当  $t$  改变时不变的数量：

$$\text{有趣的数量} \equiv \frac{\langle x^2 \rangle}{t}.$$

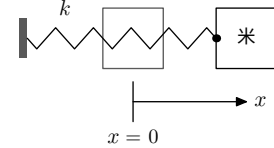
这个数量非常重要，它被赋予一个名字 - 扩散常数 - 并且在材料性质手册中被列出。

### 5.1 弹簧-质量系统的周期

作为比例推理的第一个例子，这里是解释物理学中一个著名结果的一种方法：弹簧-质量系统的周期与振幅无关。

所以想象一个质量  $m$  通过弹簧与墙连接，弹簧常数为

$k$ 。如果受到干扰，质量会振荡。系统的周期是质量通过平衡位置进行一次往返所需的时间。



将弹簧延伸一段距离  $x_0$ ；这个位移是振幅。为了看到它如何影响周期，做一个近似，这将是一个例子抛弃信息（第三部分的主题）。近似是假装摆动以恒定速度  $v$  移动。然后周期是

$$T \sim \frac{\text{距离}}{\text{速度 } v},$$

和质量在一个周期内行进的距离是  $4x_0$ 。忽略 4 的因素：

$$T \sim \frac{x_0}{v}$$

比例推理帮助我们通过能量论证估计  $v$ 。初始势能是  $PE \sim kx_0^2$  或

$$PE \propto x_0^2$$

最大动能，我们用作典型动能的代理，是初始势能，所以

$$KE_{\text{典型}} \propto x_0^2$$

也是。典型速度是  $KE_{\text{典型}}$  所以

$$v_{\text{典型}} \propto x_0$$

这个结果是个好消息，因为它意味着周期与 1 成正比：

$$T \propto \frac{x_0}{x_0} = 1$$

换句话说，周期与振幅无关。

## 5.2 山高

下一个比例推理的例子解释了为什么山不能太高。假设所有的山都是立方体形状，由相同的材料制成。这个假设忽略了实际的复杂性，这是第三部分的主题。然而，这是一个有用的近似。

为了看看如果山变得太大会发生什么，估计一下山底的压力。压力是力除以面积，所以估计一下力和面积。

面积是更容易估计的。根据所有山都是立方体且由相同种类的岩石制成的近似，唯一区分一座山和另一座山的参数是它的边长  $l$ 。底部的面积就是  $l^2$ 。

下一个估算力量。它与质量成正比：

$$F \propto m。$$

换句话说， $F/m$ 与质量无关，这种独立性是为什么比例性  $F \propto m$  是有用的。质量与  $l^3$  成正比：

$$m \propto \text{体积} \sim l^3。$$

换句话说， $m/l^3$ 与  $l$  无关；这种独立性是为什么比例性  $m \propto l^3$  是有用的。因此

$$F \propto l^3。$$

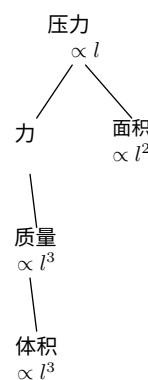
力和面积的结果表明压力与  $l$  成正比：

$$p \sim \frac{F}{A} \propto \frac{l^3}{l^2} = l。$$

对于足够大的山，压力大于岩石能承受的最大压力  $\propto l^3$ 。然后岩石像液体一样流动，山不能长高。

这个估计只显示了最大高度，但没有计算最大高度。为了做到这一点，下一步需要估计岩石的强度。稍后在本书中，当我们估计材料的强度时，我会重新访问这个例子。

这个估计可能看起来可疑，因为假设山是立方体的。谁见过一个立方体的山呢？尝试一个合理的替代方案，认为山是金字塔形的，底边长为  $l$ ，高度为  $l$ ，具有  $45^\circ$  的斜率。然后体积是  $l^3/3$ ，而不是  $l^3$ ，但是三分之一的因素不会影响力与长度之间的比例关系。由于三分之一的因素，金字塔形山的最大高度将比立方体山的最大高度更高。然而，山的大小（和高度）仍然有一个最大值。一般来说，关于最大高度的论证只需要所有的山都是相似的 - 是彼此的比例缩放版本 - 并不依赖于山的形状。



## 5.3 动物跳跃高度

接下来，我们使用比例推理来理解动物跳跃的高度，作为它们体型的函数。袋鼠比跳蚤跳得更高吗？我们研究的是从静止状态（或者对于不站立的动物来说是从休息状态）开始的跳跃；奔跑跳跃则涉及不同的物理原理。这个问题看起来不够明确。跳跃的高度取决于动物的肌肉量、肌肉的效率、动物的形状以及其他许多因素。第一小节介绍了一个简单的跳跃模型，第二小节对模型进行了改进，考虑了在粗略近似中被忽略的物理效应。

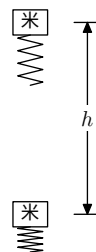
## 5.3.1 简单模型

我们只想确定跳跃高度如何随体重变化。即使这个问题看起来很困难；跳跃高度仍然取决于肌肉效率等因素。让我们看看我们能走多远，只是按部就班地进行，并使用未知量的符号。也许所有的未知量都会抵消。

我们想要一个形式为  $h \sim m^\beta$  的方程，其中  $m$  是动物的质量， $\beta$  是所谓的缩放指数， $h$  是高度。

跳跃需要能量，这必须由肌肉提供。这是第一个、最简单的模型，它将所需能量与动物肌肉提供的能量相等。

所需能量是较容易估计的：一个质量为  $m$  的动物跳到一个高度  $h$  需要能量  $E_{\text{跳跃}} \propto m h$ 。因为所有动物都感受到相同的重力，所以这个关系中不包含重力加速度  $g$ 。你可以将它包含在方程中，但它只会像未使用的行李一样在方程中传递。



可用能量是较难估计的。为了找到它，分而治之。它是肌肉质量和单位质量能量（能量密度）的乘积，存储在肌肉中。

为了近似计算肌肉质量，假设动物体重的固定比例是肌肉，即这个比例对所有动物都是相同的。如果  $\alpha$  是比例，那么

$$m_{\text{肌肉}} \sim \alpha m$$

或者，作为比例关系，

$$m_{\text{肌肉}} \propto m,$$

这最后一步使用了所有动物具有相同  $\alpha$  的假设。

对于每单位质量的能量，再次假设所有肌肉组织是相同的：它们储存相同的每单位质量能量。如果每单位质量的能量是  $\mathcal{E}$ ，那么可用能量是

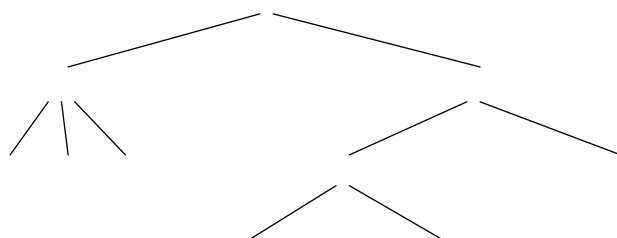
$$E_{\text{可用}} \sim \mathcal{E} m_{\text{肌肉}}$$

或者，作为比例关系，

$$E_{\text{可用}} \propto m_{\text{肌肉}},$$

这最后一步使用了所有肌肉具有相同能量密度  $\mathcal{E}$  的假设。

这里是总结这个模型的树形图：



现在向根节点传播完成。可用能量是

$$E_{\text{可用}} \propto \text{质量}$$

因此，一个质量是另一个动物的三倍的动物大致可以储存三倍的能量在它的肌肉中，根据这个简单的模型。

现在比较可用能量和所需能量来找到跳跃高度作为质量的函数。可用能量是

$$E_{\text{可用}} \propto \text{质量}$$

而所需能量是

$$E_{\text{所需}} \propto \text{质量} \cdot h.$$

将这些能量等式化，这是能量守恒的应用。然后  $mh \propto \text{质量}$  或

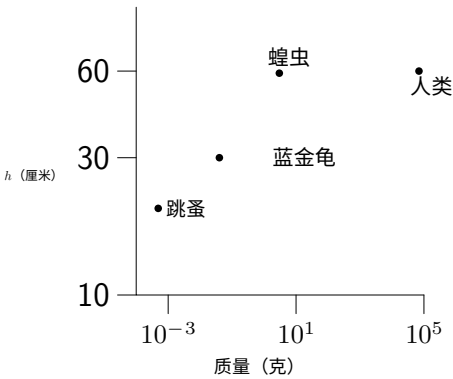
$$h \propto \text{质量}^0.$$

换句话说，所有动物跳到相同的高度。

结果，所有动物跳到相同的高度，似乎令人惊讶。我们的直觉告诉我们，人类应该能够比蝗虫跳得更高。图表显示了跳跃高度

对于各种大小和形状的动物[来源：缩放：为什么动物的大小如此重要[4，第178页]。这是数据：

动物	质量 (克)	身高 (厘米)
跳蚤	$5 \cdot 10^{-4}$	20
蓝金龟	$4 \cdot 10^{-2}$	30
蝗虫	3	59
人类	$7 \cdot 10^4$	60



与质量变化相比，高度几乎没有变化，所以我们的结果大致正确！质量变化超过了八个数量级（ $10^8$ 的因子），但是跳跃高度只有3倍的变化。常数  $h$  ( $h \propto 1$ ) 的预测缩放非常准确。

5.3.2 功率限制

功率产生也可能限制跳跃高度。在前面的分析中，能量是限制因素：跳跃高度取决于动物肌肉中能够储存的能量。然而，即使动物能够储存足够的能量达到那个高度，肌肉可能无法快速释放能量。本节介绍

对于由于有限发电能力而限制的极限的简单模型。

再次我们想要找出功率  $P$  如何随着尺寸  $l$  的变化而变化。功率是单位时间内的能量，所以跳跃到高度  $h$  所需的功率是

$$P \sim \frac{\text{跳跃到高度 } h \text{ 所需的能量}}{\text{能量传递的时间}}$$

所需的能量是  $E \sim mgh$ 。质量  $m$  与尺寸  $l$  的立方成正比。重力加速度与尺寸  $l$  无关。而且，在能量受限模型中，高度  $h$  与尺寸  $l$  无关。因此， $E \propto l$  的立方。

交付时间是动物与地面接触的时间，因为只有在接触时地面才能对动物施加力。所以，动物蹲下，向上伸展，最后离开地面。接触时间是动物向上伸展的时间。时间是长度除以速度，所以伸展距离

$$\text{运 输} \sim \frac{\text{扩展距离}}{\text{扩展速度}}$$

扩展距离大致等于动物的大小  $l$ 。扩展速度大致等于起飞速度。在能量限制模型中，所有动物的起飞速度都是相同的：

$$v_{\text{起飞}} \propto h^{1/2} \propto l^0.$$

所以

$$\text{运 输} \propto l.$$

所需功率  $P \propto l^3/l = l^2$ 。

这个比例是针对功率本身的，但更有趣的是针对单位质量的功率：即

$$\frac{P}{m} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}.$$

啊，较小的动物需要更高的单位功率！

功率限制的一个模型是，所有肌肉可以产生相同的最大功率密度（具有相同的最大单位功率）。因此，足够小的动物无法跳到其能量限制的高度。动物可以在肌肉中储存足够的能量，但无法快速释放。

更准确地说，除非它找到释放能量的替代方法，否则它无法做到这一点。

在前面的图表和数据集中，位于较小端的啮甲虫使用以下解决方案。它通过弯曲外壳来储存能量，并像棘轮一样保持弯曲（保持结构静止确实需要能量）。这种储存可以缓慢进行，以避免特定功率限制，但当甲虫释放外壳并且外壳迅速回到静止位置时，能量会迅速释放，使甲虫能够上升到其能量限制的高度。

但是这个高度小于蝗虫和人类的高度。事实上，与恒定高度结果相比，最大偏差发生在低质量端，即跳蚤和啮甲虫。为了解释这种差异，模型需要考虑另一个物理效应：阻力。

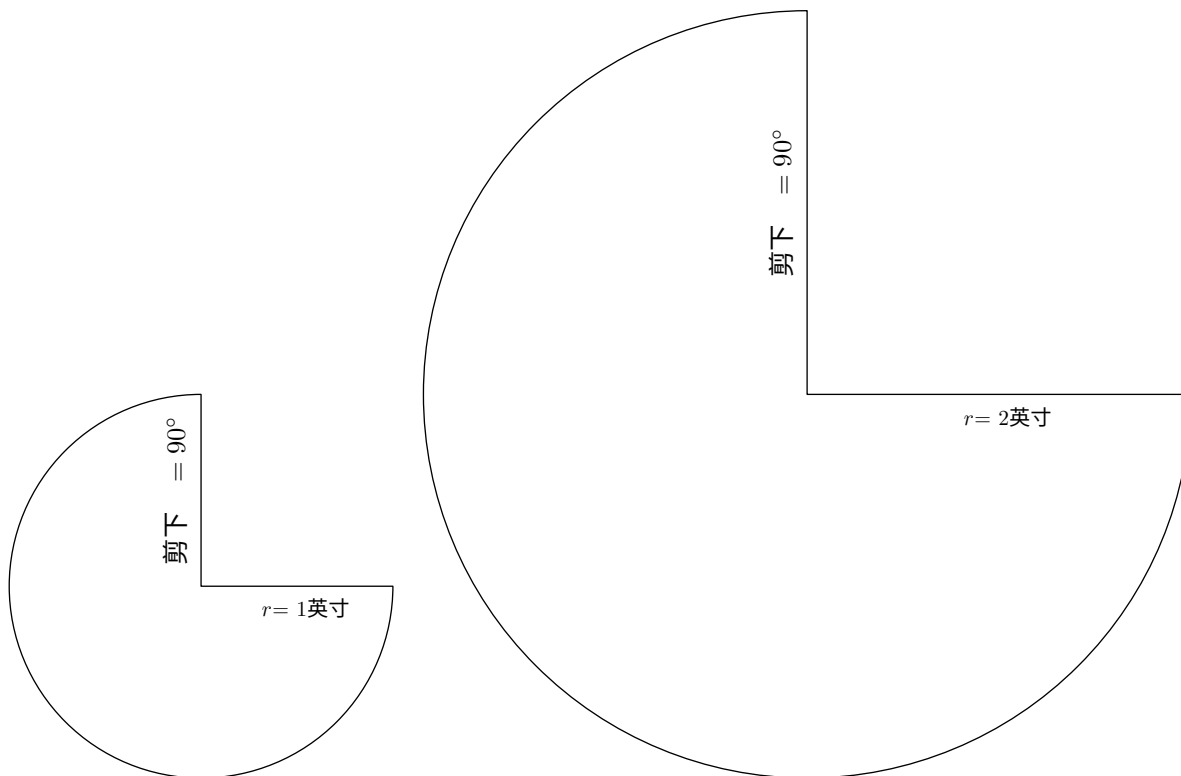


## 5.4 阻力

本节内容包含了对阻力的比例推理分析 - 使用家庭实验 - 然后将结果应用于跳蚤。

### 5.4.1 使用下落锥进行家庭实验

这是一个用于理解阻力的家庭实验。复印本页并剪下这些模板，然后将边缘粘在一起制作成锥形：



如果你同时放下小锥和大锥，哪个会下落得更快？特别是，它们的下落时间的比值是多少  $t_{\text{big}}/t_{\text{small}}$ ？大锥具有较大的表面积，所以感受到的阻力比小锥多。另一方面，大锥具有较高的驱动力（它的重量）比小锥更大。要决定额外的重量还是额外的阻力谁胜出，需要找出阻力如何取决于情况的参数。

然而，计算阻力是一个非常复杂的计算。完整的计算需要解决纳维尔-斯托克斯方程：

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

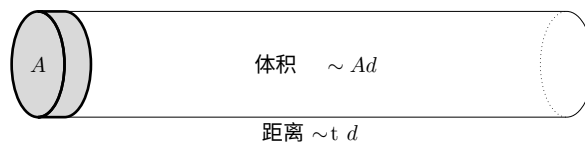
而且困难并不仅限于这组二阶耦合的非线性偏微分方程。完整的情况描述包括第四个方程，连续性方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

人们施加边界条件，其中包括物体的运动和不允许流体进入物体的要求，并求解压力  $p$  和物体表面的速度梯度。积分压力力和剪切力得到阻力。

简而言之，解析求解这些方程是困难的。我可以花费数百页来描述解决它们的数学方法。即使如此，解只在少数情况下已知，例如球体或圆柱体在粘性流体中缓慢移动或球体在零粘性流体中以任何速度移动。但是，无粘流体-费曼所称的“干水”-对现实生活特别无关，因为粘度是阻力的原因，所以无粘解预测为零阻力！比例推理，辅以谨慎的谎言，是一种简单而快速的替代方法。

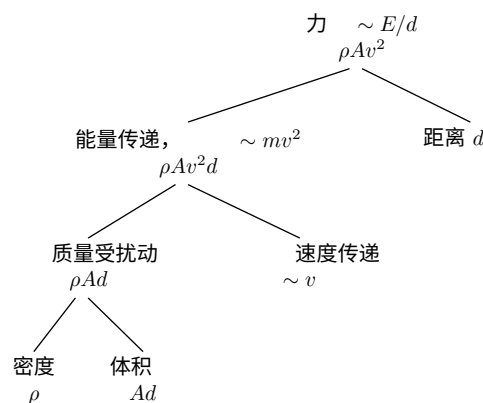
比例推理分析想象一个横截面积为  $A$  的物体以速度  $v$  通过流体移动一段距离  $d$ ：



阻力是每单位距离消耗的能量。能量通过给流体提供动能而被消耗，粘性最终从流体中去除。动能是质量乘以速度的平方。扰动的质量是  $\rho Ad$ ，其中  $\rho$  是流体密度（这里是空气密度）。给流体施加的速度大致上是扰动的速度，即  $v$ 。因此，给流体施加的动能是  $\rho Av^2 d$ ，从而产生阻力

$$F \sim \rho A v^2.$$

分析具有分而治之的树结构：



根据阻力公式  $F_{\text{drag}} \sim \rho v^2 A$ ，可以预测锥体实验的结果。锥体很快达到终端速度-这是本书中第3部分讨论的结果-因此，在计算下落时间时，相关的量是终端速度。根据阻力公式，终端速度为

$$v \sim \sqrt{\frac{F_{\text{drag}}}{\rho A}}.$$

由于空气密度  $\rho$  对于大锥体和小锥体是相同的，关系简化为

$$v \propto \sqrt{\frac{F_{\text{drag}}}{A}}.$$

横截面积可以用尺子很容易测量，而小锥体和大锥体终端速度的比值更容易确定。实验设置使得测量阻力很容易：由于锥体以各自的终端速度下落，阻力等于重力。因此，

$$v \propto \sqrt{\frac{\text{瓦特}}{\text{—个—}}}.$$

每个锥体的重量与其横截面积成比例，因为它们在几何上相似且由同一张纸制成。由于  $W \propto A$ ，终端速度变为

$$v \propto \sqrt{\frac{A}{A}} = A^0.$$

换句话说，终端速度与  $A$  无关，因此小锥体和大锥体应该以相同的速度下落。为了测试这个预测，我站在一张方便的桌子上，放下了这两个锥体。下落持续了大约两秒钟，它们在 0.1 秒内着陆！

### 5.4.2 龙跳蚤跳跃的影响

阻力力

$$F \sim \rho A v^2$$

对小动物的跳跃影响比对人的跳跃影响更大。比较跳跃所需的能量和被阻力消耗的能量可以解释这个问题。

动物跳到高度  $h$  所需的能量是  $mgh$ ，如果我们使用跳跃时的重力势能；或者是  $\sim mv^2$ ，如果我们使用起跳时的动能。

阻力消耗的能量是

$$E_{\text{阻力}} \sim \underbrace{\rho v^2 A}_{F_{\text{drag}}} \times h.$$

这些能量的比值衡量了阻力的重要性。这个比值是

$$\frac{E_{\text{阻力}}}{\text{所需的能量 } E} \sim \frac{\rho v^2 A h}{mv^2} = \frac{\rho A h}{\text{米}}.$$

由于  $A$  是动物的横截面积， $Ah$  是它在跳跃中扫过的空气体积， $\rho Ah$  是跳跃中扫过的空气的质量。因此，阻力的相对重要性可以解释为被排开的空气质量与动物质量的比值。

为了找出这个比值如何依赖于动物的大小，将其重新表达为动物的边长  $l$ 。根据边长， $A \sim l^2$ ， $m \propto l^3$ 。那么跳跃高度  $h$  呢？最简单的分析预测所有动物的跳跃高度相同，因此  $h \propto l^0$ 。因此，分子  $\rho Ah \propto l^1$ ，分母  $m \propto l^3$ ，且

$$\frac{E_{\text{阻力}}}{\text{所需的能量 } E} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}.$$

所以，小动物有一个较大的比例，这意味着阻力对小动物的跳跃影响比对大动物的跳跃影响更大。比例的缺失常数意味着我们无法确定动物变得多小才能被视为“小”以适用于阻力的目的。

因此，弧线的计算无法告诉我们跳蚤是否被视为小动物之一。

然而，跳跃数据可以替代缺失的比例常数。比例是

$$\frac{E_{\text{阻力}}}{\text{所需的能量 } E} \sim \frac{\rho Ah}{m} \sim \frac{\rho l^2 h}{\rho_{\text{动物}} l^3}.$$

简化后为

$$\frac{E_{\text{阻力}}}{\text{所需的能量 } E} \sim \frac{\rho}{\rho_{\text{动物}}} \frac{h}{l}.$$

作为一个快速检查，验证尺寸是否匹配。左边是能量的比例，因此无量纲。右边是两个无量纲比例的乘积，因此也是无量纲的。尺寸匹配。

现在放入数字。空气密度为  $\rho \sim 1 \text{ kg m}^{-3}$ 。动物的密度大致等于水的密度，因此  $\rho_{\text{动物}} \sim 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 。典型的跳跃高度-这是数据替代比例常数的地方-为60cm或大约1m。跳蚤的长度约为1mm或  $l \sim 10^{-3} \text{ m}$ 。因此

$$\frac{E_{\text{阻力}}}{\text{所需的能量 } E} \sim \frac{1 \text{ 千克米}^{-3}}{10^3 \text{ 千克米}^{-3}} \frac{1 \text{ 米}}{10^{-3} \text{ 米}} \sim 1.$$

比值为1意味着如果一只跳蚤要跳到60厘米，克服阻力所需的能量大约与在真空中跳跃所需的能量相同。

阻力为什么会导跳蚤跳得不像大型动物跳得那么高提供了一个合理的解释。

### 5.4.3 骑车

本节将以骑车为例，讨论阻力对人类和跳蚤性能的影响。这些结果将用于游泳的分析，即下一节的例子。

世界纪录骑车速度是多少？在查阅之前，使用坐椅比例推理来预测。第一个任务是定义世界纪录的类型。假设骑车是在平地上使用普通自行车进行的，尽管使用特殊自行车或下坡可以达到更快的速度。

为了估计速度，制作一个能量流向的模型。它会转化为滚动阻力，链条和齿轮的摩擦力，以及阻力。在低速下，滚动阻力和链条摩擦可能很重要。但是阻力的重要性随着速度的增加迅速上升，因此在足够高的速度下，阻力成为能量的主要消耗者。

为了简单起见，假设阻力是唯一的能量消耗者。最大速度发生在骑手提供的功率等于阻力消耗的功率时。因此，这个问题可以分为两个估计：阻力消耗的功率和运动员能够提供的功率。

阻力功率  $P_{\text{drag}}$  与阻力力相关：

$$P_{\text{drag}} = F_{\text{drag}}v \sim \rho v^3 A.$$

它确实随着速度的增加迅速上升，支持了最初的假设，即阻力是世界纪录速度下的重要因素。

设置  $P_{\text{阻力}} = P_{\text{运动输出}}$

$$v_{\text{最大}} \sim \left( \frac{P_{\text{运动员}}}{\rho A} \right)^{1/3}$$

为了估计一个运动员能提供多少功率，我跑上了一段通往麻省理工学院无限走廊的楼梯。无限走廊是一座老建筑，有着宽敞的高天花板，所以垂直爬升大约是  $h \sim 4\text{m}$ （一个典型的房子每层楼高3m）。

我尽可能快地跳上楼梯，爬升需要  $t \sim 5\text{s}$ 。我的质量是60kg，所以我的功率输出是

$$\begin{aligned} P_{\text{作者}} &\sim \frac{\text{潜在的能量供应}}{\text{交付它所需的时间}} \\ &= \frac{mgh}{t} \sim \frac{60 \text{ kg} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times 4 \text{ m}}{5 \text{ s}} \sim 500\text{W}. \end{aligned}$$

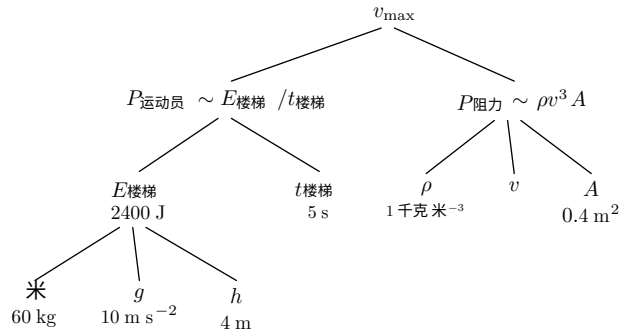
运动员的功率应该高于这个峰值功率，因为大多数作者不是奥运会运动员。

幸运的是，我想预测耐力记录。一位奥运运动员的长期功率

可能与我的峰值功率相当。所以我使用  $P_{\text{运动员}} = 500\text{W}$ 。

剩下的项目是骑行者的横截面积  $A$ 。将面积分为宽度和高度。宽度是身体宽度，可能是0.4 m。一名竞赛自行车手蜷缩着，所以高度可能是1m而不是完整的2m。所以  $A \sim 0.4 \text{ m}^2$ 。

这是代表这个分析的树：



现在将估计值结合起来找到最大速度。代入数字得到

$$v_{\text{最大}} \sim \left( \frac{P_{\text{运动员}}}{\rho A} \right)^{1/3} \sim \left( \frac{500 \text{ 瓦}}{1 \text{ 千克米}^{-3} \times 0.4 \text{ 平方米}} \right)^{1/3}.$$

立方根可能暗示使用计算器。然而，调整数字足够简化算术，足以在脑中计算。如果只有功率为400瓦特，或者如果面积为0.5平方米！因此，用Jean-Luc Picard船长的话来说，‘make it so’。立方根变得容易：

$$v_{\text{max}} \sim \left( \frac{400 \text{ 瓦特}}{1 \text{ 千克米}^{-3} \times 0.4 \text{ 平方米}} \right)^{1/3} \sim (1000 \text{ 米}^3 \text{ 秒}^{-3})^{1/3} = 10 \text{ 米/秒}^{-1}.$$

所以如果这个分析在物理上是正确的话，世界纪录应该是大约10米/秒<sup>-1</sup>或22英里/小时。

世界一小时记录 - 参赛者在一小时内尽可能远地骑行 - 是49.7公里或30.9英里。基于阻力的估计是合理的！

#### 5.4.4 游泳

上一节对骑行的分析有助于预测游泳的世界纪录速度。

上一节表明

$$v_{\text{最大}} \sim \left( \frac{P_{\text{运动员}}}{\rho A} \right)^{1/3}.$$

为了评估游泳的最大速度，可以直接将新的  $\rho$  和  $A$  放入那个公式中。然而，这种方法复制了乘法、除法和立方根运算的工作。

相反，通过观察最大速度如何依赖于情况的参数，可以将骑行的数值结果进行缩放。换句话说，我将使用公式计算出比率  $v_{\text{swimmer}} / v_{\text{cyclist}}$ ，然后使用该比率和  $v_{\text{cyclist}}$  来计算  $v_{\text{swimmer}}$ 。

速度  $v_{\text{max}}$  是

$$v_{\text{最大}} \sim \left( \frac{P_{\text{运动员}}}{\rho A} \right)^{1/3}.$$

因此，游泳和骑行速度的比率是

$$\frac{v_{\text{swimmer}}}{v_{\text{cyclist}}} \sim \left( \frac{P_{\text{swimmer}}}{P_{\text{骑行者}}} \right)^{1/3} \times \left( \frac{\rho_{\text{swimmer}}}{\rho_{\text{骑行者}}} \right)^{-1/3} \times \left( \frac{A_{\text{swimmer}}}{A_{\text{骑行者}}} \right)^{-1/3}.$$

逐个估计每个因素。第一个因素解释了游泳者和骑行者的相对运动能力。让我们假设他们产生相等的功率；那么第一个因素就是单位。第二个因素解释了每个运动员所处介质的不同密度。粗略地说，水的密度是空气的1000倍。因此，第二个因素对速度比例贡献了0.1的因素。如果只考虑前两个因素，那么游泳世界纪录大约为 $1\text{ms}^{-1}$ 。

让我们与现实进行比较。2001年7月，格兰特·哈克特创造了1500米自由泳（在50米泳池中）的实际世界纪录为14m34.56s。这个速度为 $1.713\text{ms}^{-1}$ ，明显高于 $1\text{ms}^{-1}$ 的预测。

第三个因素通过考虑骑行者和

游泳者的相对轮廓来拯救 游泳者和骑行者可能有相同的宽度，但游泳者的高度（在水中的深度）可能是蹲着骑行者的六分之一 因此，第三个因素对预测速度贡献了 $6^{1/3}$ ，使其为 $1.8\text{米/秒}^{-1}$ 。

这个预测接近实际记录，比人们预期的物理近似、数值和算术更接近现实。然而，准确性是估计形式的结果，最大速度与运动员的功率的立方根和横截面积的倒数的立方根成比例。功率或面积的误差会被立方根压缩。例如，500W的估计可能在任一方向上误差达到2倍。结果的误差在最大速度上是 $2^{1/3}$ 或1.25，仅有25%的误差。游泳者的横截面积可能也会有2倍的误差，而这个错误只会对最大速度造成25%的误差。[幸运的是，这两个错误可能会相互抵消！]

### 5.4.5 飞行

在下一个例子中，我将缩放阻力公式以估计巨型喷气式飞机的燃油效率。与估计实际燃油消耗不同，这将产生一个庞大且无意义的数字，更有教育意义的是估计飞机和汽车的相对燃油效率。

假设喷气燃料主要用于对抗阻力。这个假设并不完全正确，所以最后我会讨论分析中的其他问题。下一步是假设飞机的阻力力是与汽车相同的公式给出的：

$$F_{\text{drag}} \sim \rho v^2 A.$$

然后，旅行距离消耗的能量比例是

$$\frac{E_{\text{飞机}}}{E_{\text{汽车}}} \sim \frac{\rho_{\text{上升-高}}}{\rho_{\text{低}}} \times \left( \frac{v_{\text{飞机}}}{v_{\text{汽车}}} \right)^2 \times \frac{A_{\text{飞机}}}{A_{\text{汽车}}} \times \frac{d}{d}.$$

逐个估计每个因素。第一个因素解释了飞机巡航高度下的较低空气密度。在10公里高度，密度大约是海平面密度的三分之一，因此第一个因素贡献了1/3。第二个因素解释了飞机的更快速度。

也许  $v_{\text{飞机}} \sim 600\text{mph}$  和  $v_{\text{汽车}} \sim 60\text{mph}$ ，所以第二个因素贡献了 100 倍。

第三个因素解释了飞机的更大横截面积。作为一个合理的估计

$$\text{一个飞机} \sim 6\text{ m} \times 6\text{ m} = 36\text{ m}^2,$$

而

$$\text{一个汽车} \sim 2\text{ m} \times 1.5\text{ m} = 3\text{ m}^2,$$

所以第三个因素贡献了12倍。第四个因素贡献了单位值，因为我们正在分析飞机和汽车进行相同的旅行（比如从纽约到洛杉矶）。

四个因素的结果是

$$\frac{E_{\text{飞机}}}{E_{\text{汽车}}} \sim \frac{1}{3} \times 100 \times 12 \sim 400.$$

飞机看起来非常低效。但我忽略了人数。一架巨型喷气式飞机可以搭载400人；一个典型的汽车，至少在加利福尼亚，只能搭载一个人。所以飞机和汽车的结果是相等的！

这个分析忽略了许多影响。首先，喷气燃料不仅用于产生升力，还用于抵抗阻力。然而，正如后续的分析将显示的那样，产生升力所消耗的能量与抵抗阻力所消耗的能量相当。其次，飞机比汽车更加流线型。因此，阻力  $F_{\text{drag}} \sim \rho v^2 A$  中的缺失常数对于飞机而言要小于汽车。我们对阻力的粗略分析没有包括这个影响。幸运的是，这个错误补偿了，或者说过度补偿了，忽略升力的错误。

## 5.5 算法分析

比例推理是算法分析的整个学科的基础，是计算机科学的核心部分。一个算法运行得有多快？它需要多少空间？比例推理分析帮助你决定使用哪些算法。本节讨论了如何平方非常大的数字的问题，以此来说明这些决策。

平方数是乘法的一种特殊情况，但对于平方来说，代数更简单，因为只有一个数字作为输入，意味着分析中的变量更少。

这是标准学校乘法算法的分治版本。

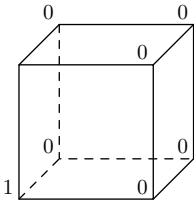


# 第6章

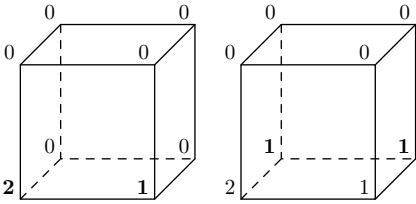
## 盒模型和守恒

### 6.1 立方体纸牌游戏

这是一个展示本章主题的纸牌游戏。以下的立方体以边缘配置开始，目标是同时使所有顶点都是 0 的三的倍数。移动的形式都是相同的：选择任意一条边，将其两个顶点增加一。例如，如果我选择前面的底边，然后选择后面的底边，配置



变成了这个系列中的第一个，然后是第二个：

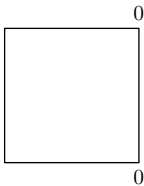


可惜，这两个配置都没有赢得游戏。

我能赢得魔方游戏吗？如果我能赢，有什么一系列的移动可以使所有顶点都是3的倍数？如果不能赢，如何证明这个负结果？

暴力破解-尝试很多可能性-看起来很压力山大。每一步都需要选择12个边之一，所以有 $12^{10}$  10步移动的序列。这个数字是一个过高估计，因为移动的顺序不会影响最终状态。如果可能的话，我可以通过计算出有多少种可能性以及如何列出并检查它们来推进这个推理过程，如果数字不太大的话。但这种方法是特定于这个问题的，不太可能推广到其他问题。

与其采用那种特定的方法，不如做出一般性的观察，即这个问题是困难的。原因是每一步都有很多选择。如果魔方是一个正方形，那么问题会更简单。这个正方形能否变成一个四个顶点都是3的倍数的正方形？这个问题不是原始问题，但解决它可能会教会我足够的知识来解决魔方。这个希望激励着



以下建议：当事情变得困难时，坚强的人会降低他们的标准。

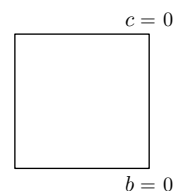
方形比立方体更容易分析，但标准可以进一步降低  $b=0$ 。通过分析一维模拟，即一条线。只有一个边意味着只有一个移动：增加顶部和底部顶点。顶点从一个差异开始，然后继续保持这个差异。所以它们不能同时是3的倍数。用符号表示： $a - b = 1$ 。如果所有顶点都是3的倍数，那么  $a - b$  也将是3的倍数。由于  $a - b = 1$ ，所以也可以说

$$a - b \equiv 1 \pmod{3},$$

数学符号  $x \equiv y \pmod{3}$  表示当除以3时， $x$  和  $y$  具有相同的余数（相同的模数）。在这个一维版本的游戏里，数量  $a - b$  是一个不变量：在唯一的移动增加每个边上的顶点之后保持不变。

也许在游戏的二维版本中存在类似的不变量。

这是一个带有变量的正方形，用于跟踪每个顶点的数字。一维不变量  $a - b$  有时也是正方形的不变量。如果我的移动使用底边，则  $a$  和  $b$  增加1，因此  $a - b$  不变。如果我的移动使用顶边，则  $a$  和  $b$  分别不变，因此  $a - b$  再次不变为  $a = 1$



不变。然而，如果我的移动使用左边或右边，则  $a$  或  $b$  会发生变化，而另一个变量没有相应的变化。差值  $d - c$  在某些移动中发生变化，具有类似的行为。幸运的是，即使  $a - b$  和  $d - c$  发生变化，它们以相同的方式变化。使用左边的移动增加  $a - b$  和  $d - c$ ；使用右边的移动减少  $a - b$  和  $d - c$ 。因此， $(a - b) - (d - c)$  是不变的！因此对于正方形来说，

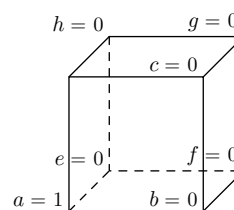
$$a - b + c - d \equiv 1 \pmod{3},$$

所以不可能使所有顶点都是3的倍数。

原始的三维纸牌游戏也很可能是不可能的。

获胜。正确的不变量表明这是不可能的。数量  $a - b + c - d = 0$  推广了正方形的不变量，并且被所有12个移动保持不变。所以

$$a - b + c - d + f - g + h - e \equiv 1 \pmod{3},$$



这表明所有顶点不能同时成为3的倍数。

不变量是解决问题的有力工具，它们保持不变。

物理问题也是纸牌游戏，在物理学中，不变量（守恒量）是至关重要的。这是一个例子：在一个无摩擦的世界中，设计一个过山车轨道，使得一个无动力的过山车，从静止开始，上升到高于起始高度。也许巧妙地结合循环和曲线可以实现这一目标。

物理游戏的规则是过山车的位置由牛顿第二定律确定  $F = ma$ ，过山车上的力是它的重力和

与轨道的接触力。在选择轨道的形状时，你会影响过山车的接触力，从而影响它的加速度、速度和位置。有无限多种可能的轨道，我们不想分析每一种轨道来找到力和加速度。一个不变量，能量，简化了分析。无论轨道有什么花招，动能加势能

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

是恒定的。过山车起始时  $v = 0$ ，高度为  $h_{\text{start}}$ ；如果不违反能量的恒定性，它永远不能上升到那个高度以上。这个不变量-守恒量-一步解决了问题，避免了对无限可能路径的无尽分析。

本节的道德是：当有变化时，寻找不变的东西。

## 6.2 飞行

鸟和飞机能飞多远？飞行理论很复杂，涉及涡旋、伯努利原理、流线等等。本节提供了一种替代方法：利用能量守恒估计产生升力所需的能量，然后最小化升力和阻力对能量的贡献，找到最小能量的旅行方式。

### 6.2.1 升力

不要陷入涡旋的泥沼中，研究不变的东西。在这种情况下，飞机的垂直动量分量在巡航时保持不变。

由于动量守恒，飞机必须将空气向下偏转。如果不这样做，重力会将飞机拉向地面。通过向下偏转空气（产生升力），飞机获得了一个补偿的向上反冲。找到必要的反冲力量，就能找到产生它所需的能量。

想象一段距离为  $s$  的旅程。我用三个步骤计算产生升力所需的能量：

1. 有多少空气向下偏转？
2. 为了给飞机提供所需的反冲，质量必须以多快的速度向下偏转？
3. 向空气传递了多少动能？

飞机以速度  $v$  向前移动，并在翼展为  $L^2$  的区域上偏转空气。为什么这个区域是  $L^2$ ，而不是横截面积，这是一个微妙的问题。原因是翼面扰动的流动距离与其翼展（最长长度）相当。因此，当飞机行驶一段距离  $s$  时，它会偏转一定质量的空气。

$$m_{\text{air}} \sim \rho L^2 s.$$

向该质量传递的向下速度必须带走足够的动量来抵消重力带给飞机的向下动量。行驶距离  $s$  需要时间  $s/v$ ，在这段时间内，重力给飞机带来了向下的动量  $Mgs/v$ 。因此

$$m_{\text{空气}v_{\text{向下}}} \sim \frac{Mgs}{v}$$

所以

$$v_{\text{向下}} \sim \frac{Mgs}{vm_{\text{空气}}} \sim \frac{Mgs}{\rho v L^2 s} = \frac{Mg}{\rho v L^2}.$$

距离  $s$  消除了，这是一个好兆头：空气的向下速度不应该依赖于任意选择的距离！

将这么多空气向下送去所需的动能是  $m_{\text{空气}v_{\text{向下}}}$  这个能量分解为  $(m_{\text{空气}v_{\text{向下}}})v_{\text{向下}}$ ，所以

$$E_{\text{提升}} \sim \underbrace{m_{\text{空气}v_{\text{向下}}}}_{Mgs/v} v_{\text{向下}} \sim \frac{Mgs}{v} \underbrace{\frac{Mg}{\rho v L^2}}_{v_{\text{向下}}} = \frac{(Mg)^2}{\rho v^2 L^2} s.$$

检查维度：分子是一个平方力，因为  $Mg$  是一个力，分母是一个力，所以表达式是一个力乘以距离  $s$ 。所以结果是一个能量。

有趣的是，产生升力所需的能量随着速度的增加而减少。这里有一个缩放的论证，使得这个结果看起来合理。想象一下将飞机的速度加倍。快速的飞机只需要原始飞机时间的一半来完成旅程。重力只有一半的时间来拉低飞机，所以飞机只需要一半的反冲力来保持飞行。由于同样的空气质量向下偏转，但总反冲力（动量）减少了一半，因此快速飞机的向下速度比慢速飞机低了2倍。这个2倍的速度降低使能量减少了4倍，符合  $E_{\text{升力}}$  中的  $v^{-2}$ 。

### 6.2.2 包括阻力的优化

飞行所需的能量包括产生升力和抵抗阻力的能量。我将添加升力和阻力的能量，并选择使两者之和最小化的速度。

抵抗阻力的能量是阻力力乘以距离。阻力力通常被写作

$$F_{\text{阻力}} \sim \rho v^2 A,$$

其中  $A$  是横截面积。缺失的无量纲常数是  $c_d/2$ :

$$F_{\text{阻力}} = \frac{1}{2} c_d \rho v^2 A,$$

其中  $c_d$  是阻力系数。

然而，为了简化比较提升和阻力所需的能量，我将阻力力写作

$$F_{\text{阻力}} = C\rho v^2 L^2,$$

其中  $C$  是修改后的阻力系数，阻力相对于平方翼展而不是横截面积来测量。对于大多数飞行物体，平方翼展远大于横截面积，所以  $C$  比  $c_d$  要小得多。根据  $F_{\text{阻力}}$  的这个公式，阻力能量为

$$E_{\text{阻力}} = C\rho v^2 L^2 s,$$

而飞行的总能量是

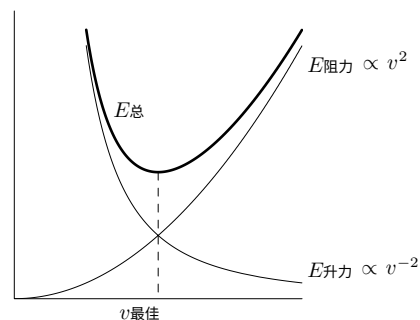
$$E \sim \underbrace{\frac{(Mg)^2}{\rho v^2 L^2} s}_{E_{\text{升力}}} + \underbrace{C\rho v^2 L^2 s}_{E_{\text{阻力}}}.$$

速度与总能量的草图显示出有趣的

特征。在低速下，升力是主要的能量消耗者，因为由于其  $v^{-2}$  的依赖性，高速下阻力是主要的能量消耗者。在这些极端之间，存在一个最佳速度  $v_{\text{optimum}}$ ：对于固定的行程距离  $E$  能量消耗最小的速度。比最佳速度更快或更慢意味着消耗更多的能量。这种额外的能量消耗并不总是可以避免的。

消耗更多的能量。这种额外的消耗并不总是可以避免的。一架飞机的巡航速度设计为其

最小能量速度。因此，在起飞和降落时，当飞机的速度远低于最小能量速度时，飞机需要大量动力来保持飞行，这也是飞机在起飞和降落时噪音很大的原因之一（另一个原因可能是引擎噪音反射到地面并反弹回飞机）。



约束条件或假设是飞机以最小能量速度行驶，简化了总能量的表达式。在最小能量速度下，阻力和升力的能量相等。所以

$$\frac{(Mg)^2}{\rho v^2 L^2} s \sim C\rho v^2 L^2 s,$$

或

$$Mg \sim C^{1/2} \rho v^2 L^2.$$

这个约束简化了总能量。不要简化总和，只简化阻力，因为在最小能量速度下，阻力和升力大致相等，只忽略了一个因素2。所以

$$E \sim E_{\text{drag}} \sim C\rho v^2 L^2 s \sim C^{1/2} Mgs.$$

这个结果在合理的方式上取决于  $M$ ,  $g$ ,  $C$ , 和  $s$ . 首先, 升力克服了重力, 而重力产生了飞机的重量  $Mg$ . 所以  $Mg$  应该出现在能量中, 当  $Mg$  增加时, 能量应该增加, 而且确实增加了。其次, 流线型的飞机应该比方正的、笨重的飞机使用更少的能量, 所以能量应该随着改进的阻力系数  $C$  的增加而增加, 而且确实增加了。第三, 由于飞行速度恒定, 能量应该与行驶距离  $s$  成比例, 而且确实成比例。

### 6.2.3 最大射程如何取决于大小

在计算特定飞机或鸟类的射程之前, 评估尺寸的缩放: 射程如何取决于飞机的大小? 至于山高度分析 (第5.2节), 假设所有飞机在几何上相似 (具有相同的形状), 因此只有大小不同。

由于飞行一段距离所需的能量  $E \sim C^{1/2} Mgs$ , 一个油箱的燃料可以提供一定的航程

$$\text{距离} \sim \frac{\text{燃料 } E}{C^{1/2} Mg}.$$

设  $\beta$  为燃料比例: 飞机质量中燃料所占的比例。那么  $M\beta$  为燃料质量,  $M\beta\epsilon$  为燃料中所含的能量, 其中  $\epsilon$  为燃料的能量密度 (单位质量的能量)。根据这个符号表示,  $E_{\text{油箱}} \sim M\beta\epsilon$  和  $M\beta\epsilon$

$$\text{距离} \sim \frac{\text{燃料 } \epsilon}{C^{1/2} Mg} = \frac{\text{燃料 } \epsilon}{C^{1/2} g}.$$

由于所有飞机, 至少在这个分析中, 具有相同的形状, 它们的修正阻力系数  $C$  也是相同的。而且所有飞机面对的重力场强度也是相同的  $g$ 。因此, 分母对于所有飞机来说是相同的。分子包含  $\beta$  和  $\epsilon$ 。这两个参数对于所有飞机来说也是相同的。因此, 分子对于所有飞机来说也是相同的。因此

$$s \propto 1.$$

所有的飞机都可以飞相同的距离!

更令人惊讶的是将这种推理应用于候鸟迁徙。这里是范围的比率:

$$\frac{s_{\text{飞机}}}{s_{\text{鸟}}} \sim \frac{\beta_{\text{飞机}}}{\beta_{\text{鸟}}} \frac{\epsilon_{\text{飞机}}}{\epsilon_{\text{鸟}}} \left( \frac{C_{\text{飞机}}}{C_{\text{鸟}}} \right)^{-1/2}.$$

依次考虑这些因素。首先, 燃料分数  $\beta_{\text{飞机}}$  可能是0.3或0.4。燃料分数  $\beta_{\text{鸟}}$  可能相似: 一个吃饱了的鸟在整个夏天都吃得很多, 可能有30%或40%的脂肪。所以  $\beta_{\text{飞机}}/\beta_{\text{鸟}} \sim 1$ 。其次, 喷气燃料的能量密度与脂肪的能量密度相似, 飞机引擎和动物新陈代谢的效率也相当高 (约为25%)。所以  $\epsilon_{\text{飞机}}/\epsilon_{\text{鸟}} \sim 1$ 。

最后, 鸟的形状与飞机相似-这不是一个很好的近似, 但它具有简单性的优点。所以  $C_{\text{鸟}}/C_{\text{飞机}} \sim 1$ 。

因此，飞机和饱食的候鸟应该有相同的最大航程！让我们来检查一下。已知的动物最长的非停歇飞行距离是11,570公里，由一只长尾鸟从阿拉斯加飞往新西兰（通过卫星追踪）。

最大航程为

a747-400是 13,450公里，仅比长尾鸟的航程稍长。

### 6.2.4 显式计算

为了得到一个明确的航程，不仅要知道航程如何随尺寸变化，还要估计燃料分数  $\beta$ ，能量密度  $\mathcal{E}$  和阻力系数  $C$ 。对于燃料分数，我猜测  $\beta \sim 0.4$ 。对于能量密度  $\mathcal{E}$ ，看一下黄油包装上的营养标签。黄油几乎全是脂肪，每份11克提供100卡路里（这些是‘大卡’）。所以它的能量密度是9千卡克<sup>-1</sup>。

在公制单位中，它是  $4 \times 10^7$  焦耳每千克<sup>-1</sup>。包括典型的引擎效率为四分之一

$$\mathcal{E} \sim 10^7 \text{ 焦耳每千克}^{-1}。$$

修改后的阻力系数需要从易得的数据进行转换。根据波音公司的说法，747飞机的阻力系数为  $C' \approx 0.022$ ，其中该系数是使用翼展面积进行测量的：

$$F_{\text{阻力}} = \frac{1}{2} C' A_{\text{wing}} \rho v^2。$$

遗憾的是，这个公式是阻力系数的第三个约定，取决于阻力是参考横截面积  $A$ 、翼展面积  $A_{\text{wing}}$  还是翼展的平方  $L^2$ 。

在这些定义之间很容易进行转换。只需将标准定义等同起来

$$F_{\text{阻力}} = \frac{1}{2} C' A_{\text{wing}} \rho v^2。$$

to our 定义

$$F_{\text{drag}} = C L^2 \rho v^2$$

to get

$$C = \frac{1}{2} \frac{A_{\text{wing}}}{L^2} C' = \frac{1}{2} \frac{l}{L} C',$$

since  $A_{\text{wing}} = Ll$  where  $l$  是翼宽。对于一架747， $l \sim 10$  m and  $L \sim 60$  m，所以  $C \sim 1/600$ 。

将这些值组合起来找到范围：

$$\text{距离} \sim \frac{\text{燃料}\mathcal{E}}{C^{1/2}g} \sim \frac{0.4 \times 10^7 \text{ J kg}^{-1}}{(1/600)^{1/2} \times 10 \text{ m s}^{-2}} \sim 10^7 \text{ m} = 10^4 \text{ km}.$$

一架 747-400 的最大航程是 13,450 km。鸟类已知的最长直飞距离是11,570 公里：一只通过卫星追踪的雌性红腹滨鹬在阿拉斯加和新西兰之间迁徙。对范围的近似分析是不合理准确的。

接下来，我估计最小能量速度并将其与747的巡航速度进行比较。

当速度给定时，阻力和升力能量的总和是最小的

$$Mg \sim C^{1/2} \rho v^2 L^2。$$

速度是

$$v \sim \left( \frac{Mg}{C^{1/2} \rho L^2} \right)^{1/2}。$$

一架满载的747飞机的质量大约为 $4 \cdot 10^5$ 千克。阻力系数再次为 $C \sim 1/600$ ，翼展为 $L \sim 60$ 米，高空的空气密度为 $\rho \sim 0.5$ 千克/立方米。所以

$$v \sim \left( \frac{4 \cdot 10^5 \text{ 千克} \times 10 \text{ 米/秒}^{-2}}{(1/600)^{1/2} \times 0.5 \text{ 千克 米}^{-3} \times 3.6 \cdot 10^3 \text{ 米}^2} \right)^{1/2}。$$

心算。分母中的  $1/600$  变成了分子中的 25。

再加上  $4 \cdot 10^5$ ，变成了  $10^7$ 。加上  $g$  中的 10，分子变成了  $10^8$ ，分母大约是  $2 \cdot 10^3$ ，所以

$$v \sim \left( \frac{1}{2} \cdot 10^5 \right)^{1/2} \text{ m s}^{-1} = 5^{1/2} \times 100 \text{ m s}^{-1} \sim 220 \text{ m s}^{-1}。$$

这个速度大约是500英里/小时，与747的最大速度608英里/小时相当接近。



# 第7章

## 尺寸

消除虚假复杂性的下一种方法是尺寸分析或无量纲组。

下面的数学问题展示了无量纲组是如何像比例推理和守恒定律一样，是一种对称推理的形式。问题是将多项式 $(a + b + c)^3$ 展开成它的多个项。学校代数方法是将 $a + b + c$ 乘以 $a + b + c$ ，然后将结果乘以 $a + b + c$ 。

学校代数方法很混乱容易出错，但对称性来拯救了它。

因子 $a + b + c$ 如果 $a$ 和 $b$ 交换位置，如果 $a$ 和 $c$ 交换位置，或者如果 $b$ 和 $c$ 交换位置，都不会改变。事实上，任何对 $a, b$ 和 $c$ 的排列都不会改变 $a + b + c$ 和 $(a + b + c)^3$ 。

因此，这个乘积可以 - 并且应该 - 使用 $a, b$ 和 $c$ 的不变组合来构建：这些组合通过对 $a, b$ 和 $c$ 进行排列不变。

该产品包含 $a^3$ ，但是 $a^3$ 本身不具有置换不变性。不变版本的 $a^3$ 是 $a^3 + b^3 + c^3$ ，这是产品的一个组成部分。该产品还包含类似 $a^2b$ 的项，同样不具有不变性。类似的不变和来自于添加所有可能的排列的 $a^2b$ 的总和：

$$(a^2b + ab^2) + (a^2c + ac^2) + (b^2c + bc^2)。$$

第三种类型的项是 $abc$ 。

因此，该产品的形式为

$$(a + b + c)^3 = A(a^3 + b^3 + c^3) + B(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + C(abc),$$

其中 $A, B$ 和 $C$ 是暂时未知的常数。

这里有一种计算常数的方法。将 $a = 1, b = c = 0$ 。然后方程简化为

$$1^3 = A \cdot 1^3,$$

所以 $A = 1$ 。为了得到另一个关系，将 $a = b = c = 1$ 。然后，使用 $A = 1$ ，方程简化为

$$27 = 3 + 6B + C。$$

要找到  $C$ ，注意到有六种方法得到一个  $abc$  因子。所以  $C = 6$ ，然后  $B = 3$ 。

因此

$$(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc。$$

这个对称解决方案有几个优点。首先，它比通过蛮力乘法更不容易出错。其次，它以有意义的、低熵形式给出答案。

解决方案中的块 - 项  $a^3 + b^3 + c^3$  和  $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$  和  $abc$  - 每个都遵循对称性，如果你对  $a, b$  和  $c$  进行排列，没有重要的变化。

与其使用蛮力方法然后费力将解决方案转化为有意义的形式，不如使用对称性推理：只要可能，就使用符合问题对称性的量进行计算。一个有意义的形式，使用对称推理：只要可能，就使用符合问题对称性的量。

这个章节展示了这个理念如何自然地导致无量纲组，即量纲分析的基本思想。

## 7.1 跨国公司的力量

第一个例子展示了当人们不注意尺寸时会发生什么。

全球化的批评者经常提出这个论点：

在尼日利亚这个相对经济强大的国家，国内生产总值 [GDP] 是990亿美元。埃克森的净资产为1190亿美元。‘当跨国公司拥有如果一个公司的净资产高于其所在国家的国内生产总值，我们在谈论什么样的权力关系呢？’劳拉·莫罗西尼问道。[来源：‘跨国公司的豁免权’，ATTAC，2002年9月11日，[网址：尼日利亚争论]，2006年9月11日检索]

在继续阅读之前，试着找出埃克森和尼日利亚之间比较中最严重的错误。这是一个竞争激烈的领域，但有一个错误非常明显。

埃克森和尼日利亚之间的比较存在许多问题。首先，这种比较夸大了埃克森的实力，因为它使用的是其全球资产（净值），而不是仅限于尼日利亚的资产。另一方面，埃克森在与尼日利亚谈判时可以利用其完整的国际实力，因此全球资产可能是一个公平的比较基础。

一个严肃且不容辩论的问题是与国内生产总值（GDP）或国内生产总值的比较。要看到问题，看看GDP通常是如何衡量的：以每年的美元计算。尼日利亚的990亿美元的GDP是每年990亿美元的简写。

一年是一个天文时间，它在经济测量中的使用是任意的。经济流动是一种社会现象，不应该关心地球绕太阳运行所需的时间。假设十年是衡量GDP的选择单位。那么尼日利亚的GDP将大约是每十年1万亿美元（假设每年990亿美元的价值保持稳定），并将报告为1万亿美元。现在，尼日利亚高耸在微不足道的埃克森面前，其资产仅为这个数字的十分之一。

要得出相反的结论，只需以每周美元的单位来衡量GDP：尼日利亚的GDP变为每周20亿美元。现在，微不足道的尼日利亚在埃克森的威力面前无助。只需改变单位就可以得出关于相对力量的任何结论。这种任意性表明比较是虚假的。

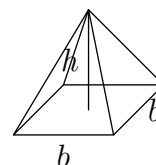
比较中的缺陷是本章的主题。资产或净值是一定金额的金钱 - 金钱是其维度 - 通常以美元为单位衡量。GDP被定义为一年内销售的总商品和服务。它是一种速率，具有金钱每单位时间的维度；其典型单位是每年美元。将资产与GDP进行比较意味着将金钱与金钱每单位时间进行比较。因为这两个量的维度不相同，所以比较是无意义的！同样错误的比较是将长度每单位时间（速度）与长度进行比较。听听它听起来多么荒谬：“我每秒钟走1.5米，比纽约的帝国大厦300米高要小得多。”为了得出相反的结论，将时间以小时计算：“我每小时走5000米，比只有300米高的帝国大厦要大得多。”到处都是无意义的！这个例子说明了几个观点：

- 尺寸与单位。尺寸是通用的，例如每单位时间的货币或每单位长度的时间。单位是尺寸在测量系统中的具体化。  
最完整的测量系统是国际单位制（SI），其中质量的单位是千克，时间的单位是秒，长度的单位是米。其他单位的例子包括每年的美元或每年的千米。
- 有效比较的必要条件。在有效的比较中，比较对象的尺寸必须相同。不要拿苹果和橙子比较（除非是在品味问题上，比如‘我更喜欢苹果而不是橙子。’）
- 垃圾到处都是。世界上到处都是垃圾，所以要睁开眼睛！
- 糟糕的论证，好的结论。我同意文章的结论，即大型石油公司对贫穷国家施加了巨大的影响力。然而，作为一名物理学家，我对推理感到尴尬。这个例子教会了我一个有关定理和证明的宝贵教训：评判证明而不仅仅是定理。即使你不同意结论，也要记住一个普遍的教训：正确的结论并不能证明一个可疑的论证。

## 7.2 金字塔体积

上一个例子展示了经济学中的尺寸值。下一个例子展示了尺寸在数学中的用途。这个正方形底面的金字塔的体积是多少？这里有几个选择：

1.  $\frac{1}{3}bh$
2.  $b^3 + h^2$



3.  $b^4/h$

4.  $bh^2$

让我们逐个选择。第一个选择， $bh/3$ ，具有面积而不是体积的尺寸。所以它不可能是正确的。第二个选择， $b^3 + h^2$ ，以  $b^3$  项的体积开始，但随着  $h^2$  的出现而崩溃， $h^2$  具有面积的尺寸。由于它将面积加到体积中-尺寸混合的错误-它不可能是正确的。第三个选择， $b^4/h$ ，具有体积的尺寸，所以它可能是正确的。它甚至随着  $b$  的增加而增加，这是一个好的迹象。然而，体积应该随着  $h$  的增加而增加-比例推理的论证-而这个选择表明体积随着  $h$  的增加而减小！所以它不可能是正确的。

最终选择，真实高度<sup>2</sup>，具有正确的尺寸并随着  $h$  或  $b$  的增加而增加。它是否以正确的数量增加？想象从顶部钻入金字塔并将其分成薄的核心或体积元素。如果金字塔的高度加倍，那么每个垂直体积元素的体积也加倍；因此金字塔的体积应该加倍。

用符号表示， $V \propto h$ 。但是当  $h$  加倍时  $bh^2$  增加四倍，所以这个选择是错误的。

要求  $V \propto h$  以及  $V$  具有长度立方的尺寸，意味着  $V$  中缺失的项是一个面积。从  $b$  中制造面积的唯一方法是使  $b^2$  乘以一个无量纲常数。所以

$$V \sim hb^2。$$

缺失的无量纲常数隐藏在波浪符  $\sim$  中。或者，比值  $V/hb^2$  是无量纲的。

这种推导体积的方法几乎不需要记住任何任意数据。它需要以下这些成分：

1. 使用垂直体积元素来发现  $V \propto h$ 。
2. 使用尺寸以及  $V \propto h$  来展示  $V \sim hb^2$ 。
3. 记住正确的无量纲常数。

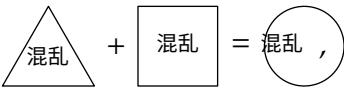
前两个步骤是逻辑的，不需要任意数据。相反，它们使用你在其他地方使用的推理方法（因此没有额外的成本来记住它们）。第三步需要看似任意的数据。然而，在第8章中，我将展示如何优雅地确定常数，甚至不需要积分。然后体积不需要记忆。任意数据根据定义是不可能压缩的。尺寸，以及更一般地处理复杂性的技术，是数据压缩或熵减的形式[5]。学习的一种方式就是数据压缩。因此，尺寸和我们的其他技术增强了学习。

有句古话说：说真话，记得少。这里有一个类似的道德观：使用尺寸（和比例推理）；记得少！

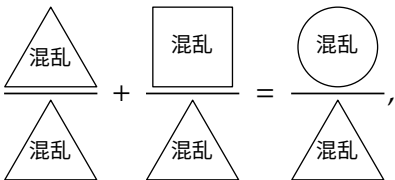
7.3 无量纲组

无量纲比是有用的。例如，在油的例子中，两个量的比值具有尺寸；在这种情况下，比值的尺寸是时间（或时间的倒数）。  
如果文章的作者使用了一个无量纲比，他们可能会进行一个有效的比较。

本节解释了为什么无量纲比是你需要考虑的唯一量；换句话说，没有必要考虑具有尺寸的量。  
为了看清楚，举个具体的例子：计算产生升力的能量  $E$  作为距离  $s$ 、飞机速度  $v$ 、空气密度  $\rho$ 、翼展  $L$ 、飞机质量  $m$  和重力强度  $g$  的函数。关于这些变量的任何真实陈述看起来像



其中各种混乱意味着可怕的组合  $E, s, v, \rho, L$ , 和  $m$ .  
尽管这个真实陈述很可怕，但它允许以下重写：将每个项除以第一个（三角形）。然后



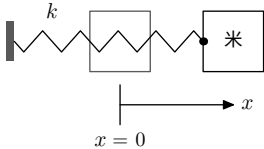
第一个比率是1，没有维度。不知道各个混乱的情况，我们不知道第二个比率；但它没有维度，因为它被添加到第一个比率中。同样，位于右侧的第三个比率也没有维度。

因此，重写后的表达式是无量纲的。重写中的任何部分都不依赖于真实陈述的特定形式，除了每个项具有相同的维度。

因此，任何真实陈述都可以以无量纲形式重写。

无量纲形式由无量纲比率构成，所以你只需要无量纲比率，就可以用它们进行思考。这里有一个熟悉的例子来展示这种变化如何简化你的思考。这个例子使用熟悉的物理学，这样你可以专注于无量纲比率的新思想。

问题是找到一个振动弹簧-质量系统的周期，给定一个初始位移  $x_0$ ，然后允许自由振动。第5.1节给出了这个系统的比例推理分析。确定周期  $T$  的相关变量是质量  $m$ ，弹簧常数  $k$  和振幅  $x_0$ 。  
这三个变量完全描述了系统，所以关于周期的任何真实陈述只需要这些变量。



由于任何真实陈述都可以写成无量纲形式，  
下一步是找到可以由 $T$ ， $m$ ， $k$ 和  $x_0$ 构造的所有无量纲形式。  
构造自  $T$ ，  $m$ ，  $k$ 和  $x_0$ 的无量纲形式的表格是有帮助的。唯一棘手的条目是弹簧的维度。  
。由于弹簧的力是  $F = kx$ ，其中  $x$  是位移，弹簧常数的维度是力的维度除以  $x$ 的维度。它是

变量	维度	什么
$T$	$T$	周期
米	$M$	质量
$k$	$MT^{-2}$	弹簧常数
$x_0$	$L$	振幅

方便起见，我们需要一个关于“维度”的符号表示，在这个符号中， $[F]$

$$[k] = \frac{[F]}{[x]},$$

其中  $[quantity]$ 表示量的维度。由于  $[F] = MLT^{-2}$ 和  $[x] = L$ ，

$$[k] = MT^{-2},$$

这是表中的条目。

这些量可以组合成许多 - 无限多个 - 无量纲组合或群：

$$\frac{kT^2}{m}, \frac{m}{kT^2}, \left(\frac{kT^2}{m}\right)^{25}, \pi \frac{\text{米}}{kT^2}, \dots$$

这些群是冗余的。你可以从一个群构造它们。用花哨的术语来说，所有无量纲群都由一个独立的无量纲群形成。选择哪个组合作为这个群取决于你，但你只需要一个群。我喜欢 $kT^2/m$ 。

因此，关于周期的任何真实陈述都可以用  $kT^2/m$ 来表示。这个要求限制了可能的陈述为 $kT^2$

$$\frac{\text{米}}{\text{米}} = C,$$

其中  $C$ 是一个无量纲常数。这个形式有两个重要的结果：

- 1. 振幅  $x_0$ 不影响周期。这种独立性也被称为简谐运动。在第5.1节的分析中，给出了一个关于为什么周期应该独立于振幅的近似论证。所以这个近似论证实际上是一个精确的论证。
- 2. 常数  $C$ 与  $k$ 和  $m$ 无关。因此，我可以测量一个弹簧-质量系统的常数，并且对于所有的弹簧-质量系统都知道它，无论质量或弹簧常数如何。  
这个常数是一个普适常数。

要求尺寸有效简化了弹簧-质量系统的分析。如果不使用尺寸，问题将是找到（或测量）将  $m$ ， $k$ 和  $x_0$ 连接到周期的三变量函数  $f$ ：

$$T = f(m,k,x_0).$$

而使用尺寸揭示了问题更简单：找到函数  $h$  such that

$$\frac{kT^2}{\text{米}} = h().$$

这里  $h()$  表示没有变量的函数。为什么没有变量？因为右边包含了  $kT^2/m$  可能依赖的所有其他量。然而，尺寸分析说变量只通过  $kT^2/m$  的组合出现，而这已经在左边了。因此，没有变量需要放在右边；因此  $h$  是一个没有变量的函数。零变量的唯一函数是一个常数，所以  $kT^2/m = C$ 。这个模式展示了统计学家和物理学家哈罗德·杰弗里斯的一句名言[6, p.82]：

一个变量的好函数表可能需要一页；两个变量的函数表可能需要一个卷；三个变量的函数表可能需要一个书架；而一个有四个变量的函数库。

使用尺寸；避免像一个图书馆那么大的表格！

## 7.4 氢原子

氢是最简单的原子，研究氢是理解原子理论的最简单方法。费曼在他的著名物理学讲座中解释了原子理论的重要性[7, p. 1-2]：

如果在某种灾难中，所有的科学知识都被摧毁，只有一个句子传给下一代生物，哪个陈述会包含最多信息但字数最少？我相信这是原子假设（或原子事实，或者你想叫它什么都可以）：所有的事物都是由原子组成的-小颗粒在永久运动中移动，当它们相距一点时相互吸引，但当它们被挤压在一起时相互排斥。在那一个句子中，你会看到，有关世界的大量信息...

原子理论最早由德谟克利特提出。（早期的希腊科学和哲学在伯特兰·罗素的《西方哲学史》[8]中以机智、同情和洞察力进行了讨论。）德谟克利特对原子的性质了解不多。凭借现代对经典力学和量子力学以及量纲分析的认识，你可以说得更多。

### 7.4.1 尺寸分析

维度推理的下一个例子是氢原子，以回答两个问题。第一个问题是它有多大。这个尺寸确定了更复杂的原子和分子的尺寸。第二个问题是需要多少能量来解离氢。这个能量确定了更复杂物质的键能量的尺度，以及

这些能量决定了宏观量如材料的刚度、声速和脂肪和糖的能量含量。全部来自氢！

在科学和工程中近似的艺术的第一步是选择相关的变量。一个简单的氢模型是一个电子绕着一个质子运动。轨道力是由质子和电子之间的静电吸引提供的。力的大小是

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2},$$

其中  $r$  是质子和电子之间的距离。变量列表应包括足够的变量以生成力的表达式。它可以分别包括  $q, \epsilon_0$  和  $r$ 。但这种方法过于复杂：电荷  $q$  只有在产生力时才相关。因此，电荷只出现在组合量  $e^2/4\pi\epsilon_0$  中。类似的论证适用于  $\epsilon_0$ 。

因此，与其分别列出  $q$  和  $\epsilon_0$ ，只列出而不是列出  $r$ ，列出  $a_0$ ，常见的无-波尔半径（理想氢原子的半径）的符号。电子的加速度取决于静电力-可以由  $e^2/4\pi\epsilon_0$  和  $a_0$  构建的张量力取决于其质量  $m_e$ 。因此，列表还应包括  $m_e$ 。要找到在科学和工程中的近似方法

变量	维度	什么 $\omega$
$T^{-1}$	频率	$k$
$L^{-1}$	波数	$g$
$LT^{-2}$	重力	$h$
$L$	深度	$\rho$
$L^{-3}$	密度	$\gamma$
机器学习 磁带 $^{-2}$	表面张力	

$$力 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\text{半径}}.$$

然后

$$\left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] = [r^2] \times [F] = ML^3T^{-2}.$$

下一步是制作无量纲组。然而，这三个物品的任何组合都不是无量纲的。要理解原因，请看时间维度，因为它只出现在一个量中，即  $e^2/4\pi\epsilon_0$ 。因此，这个量不能出现在无量纲组中：如果它出现了，就没有办法去除时间维度。从剩下的两个量中， $a_0$  和  $m_e$ ，没有可能的无量纲组。

在我们制定的简单模型中，未能制定无量纲组意味着氢不存在。我忽略了重要的物理。有两种可能性要添加的物理。

一种可能性是添加相对论，封装在光速  $c$  中。所以我们会添加  $c$  到变量列表中。这个选择产生了一个无量纲组，因此产生了一个尺寸。一个尺寸。然而，这个尺寸不是氢的尺寸。事实证明，它是经典电子半径。幸运的是，为了理解为什么结果的尺寸不是氢的尺寸，你不需要知道经典电子半径是什么。将相对论添加到物理学中-或将  $c$  添加到列表中-允许辐射。因此，轨道加速的电子会辐射。由于辐射将能量从电子带走，它会螺旋进入质子，这意味着在这个世界中氢不存在，其他原子也不存在。



另一种可能性是添加量子力学，它是为了解决物质存在等基本问题而发展起来的。量子力学的物理学很复杂，但它对尺寸分析的影响很简单：它贡献了一个新的自然常数，其维度是角动量的维度。角动量是  $mvr$ ，所以

$$[\hbar] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}.$$

这个  $\hbar$  可能会拯救一天。现在有两个量包含时间维度。由于  $e^2/4\pi\epsilon_0$  具有  $\text{T}^{-2}$  和  $\hbar$  具有  $\text{T}^{-1}$ ，比值  $\hbar^2/(e^2/4\pi\epsilon_0)$  不包含时间维度。由于

$$\left[ \frac{\hbar^2}{e^2/4\pi\epsilon_0} \right] = \text{机器学习},$$

无量纲组是

$$\frac{\hbar^2}{a_0 m_e (e^2/4\pi\epsilon_0)}$$

事实证明，所有无量纲组都可以由这个组成。因此，就像在弹簧-质量示例中一样，唯一可能的真实陈述涉及到这个组的是

$$\frac{\hbar^2}{a_0 m_e (e^2/4\pi\epsilon_0)} = \text{无量纲常数}.$$

因此，氢的大小是

$$a_0 \sim \frac{\hbar^2}{m_e (e^2/4\pi\epsilon_0)}.$$

将常数值代入得到

$$a_0 \sim 0.5 \text{\AA} = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

事实证明，缺失的无量纲常数是1，因此尺寸分析给出了精确答案。

变量	维度	什么
$a_0$	<b>L</b>	<b>大小</b>
$e^2/4\pi\epsilon_0$	$\text{ML}^3\text{T}^{-2}$	
$m_e$	<b>M</b>	电子质量
$\hbar$	机器学习 $^2\text{T}^{-1}$	量子

## 7.4.2 原子尺寸和物质密度

氢的直径为  $1\text{\AA}$ 。一个有用的推论是，一个典型的原子间距为  $3\text{\AA}$ 。这个近似给出了物质的合理近似密度，正如本节所解释的那样。

让  $A$  是原子的原子质量；它是（大致上）核中质子和中子的数量。吨和中子在核中。虽然  $A$  被称为质量，但它是无量纲的。每个原子占据一个边长为  $a \sim 3\text{\AA}$  的立方体，并且具有质量  $Am$  质子。物质的密度是

$$\rho = \frac{\text{质量}}{\text{体积}} \sim \frac{\text{我是质子}}{(3\text{\AA})^3}.$$

如果你乘以这个数，你不需要记住或查找质子

以  $N_A$  为阿伏伽德罗数的形式，这个分数可以表示为  $N_A / N_A$ ：

$$\rho \sim \frac{\text{我是质子} N_A}{(3\text{\AA})^3 \times N_A}.$$

分子是  $A$  克，因为这是  $N_A$  的定义。分母是

$$3 \cdot 10^{-23} \text{厘米}^3 \times 6 \cdot 10^{23} = 18.$$

所以不是记住  $m$  质子，而是需要记住  $N_A$ 。然而， $N_A$  比  $m$  质子更为熟悉，因为  $N_A$  在化学和物理中出现。使用  $N_A$  还强调了微观和宏观值之间的联系。进行计算：

$$\rho \sim \frac{A}{18} \text{克厘米}^3.$$

该表将估计值与实际值进行了比较。大多数情况下

每天的元素原子质量在15到150之间，所以

密度估计解释了为什么大多数密度在1到

10 克 厘米<sup>-3</sup>。这也解释了为什么对于材料物理学，使用 cgs 单位

比国际单位制更方便。典型的cgs密度为

固体为 3gcm<sup>-3</sup>，3是一个适度的数字，易于重新

成员并与合作。然而，典型的SI固体密度为

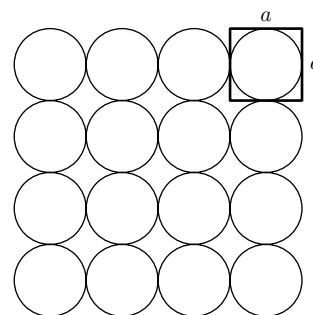
3000kgm<sup>-3</sup>。3000这样的数字很难处理。每次

使用时，您必须思考，“十的多少次方再次出现？”因此，该表格使用cgs单位制列出了密度

再次出现。”因此，该表格使用cgs单位制列出了密度

为g cm<sup>-3</sup>。我甚至在牌中加入了一个小丑！- 水不是一个元素！- 但密度

估计非常准确。



元素	$\rho$ 估计	$\rho$ 实际
Li	0.39	0.54
H <sub>2</sub> O	1.0	1.0
Si	1.56	2.4
Fe	3.11	7.9
Hg	11.2	13.5
Au	10.9	19.3
U	13.3	18.7

### 7.4.3物理解释

以前的方法，即量纲分析，主要是数学方法。作为第二种计算 $a_0$ 的方法，我们向您展示一种主要是物理学的方法。除了检查玻尔半径外，它还提供了对其的物理解释。玻尔半径是具有最低能量（基态）的轨道的半径。能量是动能和势能的总和。这种分割再次建议采用分而治之的方法：首先是动能，然后是势能。

动能的起源是什么？电子不以任何经典意义上的轨道运动。

如果它绕着核心旋转，作为一个加速电荷，会辐射能量并螺旋进入核心。

然而，根据量子力学，质子将电子限制在一个大小为  $r$  的区域内 - 对我们来说仍然是未知的 - 电子存在于所谓的稳定态。稳定态的性质是神秘的；没有人理解量子力学，没有人理解稳定态，除了数学上的理解。然而，在近似估计中，你可以忽略诸如稳定态的含义等细节。这里需要的信息是，电子是静止的，正如状态的名称所暗示的那样：它不会辐射。

问题是要找到电子被限制在的区域的大小。实际上，电子分布在整个宇宙中；然而，它的大部分存在于一个典型的半径范围内。我们估计并称之为  $a_0$  的典型半径。

暂时将这个半径未知  $r$ ，并研究动能如何依赖于  $r$ 。根据不确定性原理，限制给电子能量：

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar,$$

其中  $\Delta x$  是位置的不确定度， $\Delta p$  是动量的不确定度。在这个模型中， $\Delta x \sim r$ ，如图所示，所以  $\Delta p \sim \hbar/r$ 。电子的动能是

$$E_{\text{动能}} \sim \frac{(\Delta p)^2}{m_e} \sim \frac{\hbar^2}{m_e r^2}.$$

**这个能量是限制能量或者不确定能量。这个想法在书中反复出现。**

势能是经典表达式

$$E_{\text{势能}} \sim -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

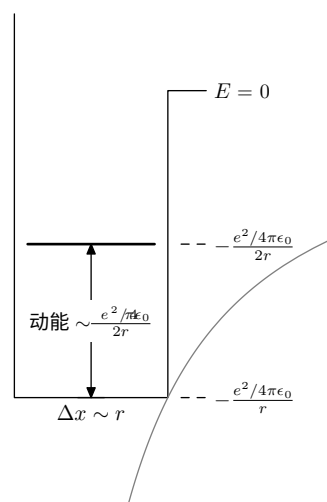
总能量是组合

$$E = E_{\text{势能}} + E_{\text{动能}} \sim -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{m_e r^2}.$$

这两种能量相互竞争。在小的  $r$  值时，动能胜出，因为  $1/r^2$ ；在大的  $r$  值时，势能胜出，因为它下降得更慢。在某个中间值的  $r$  处是否存在最小的组合能量？必须存在。在小的  $r$  值时，斜率  $dE/dr$  是负的。在大的  $r$  值时，它是正的。在一个中间的  $r$  值处，斜率在正和负之间交叉。能量在那里达到最小值。如果能量以无量纲形式书写，位置将很容易估计。在这个例子中，这样的重写并不是强制性的，但在复杂的例子中很有帮助，值得学习。

在构建包含无量纲组的时候，我们构建了另一个长度：

$$l = \frac{\hbar^2}{m_e(e^2/4\pi\epsilon_0)}.$$



要将任何长度缩放为无量纲单位，将其除以  $l$ 。因此，在总能量中，缩放半径

$$\bar{r} \equiv \frac{r}{l}$$

总能量中的另一个未知量是能量本身。为了使其无量纲，使用一个合理的能量尺度是  $e^2/4\pi\epsilon_0 l$ ，通过定义缩放能量为

$$\bar{E} \equiv \frac{E}{e^2/4\pi\epsilon_0 l}.$$

使用无量纲长度和能量，总能量

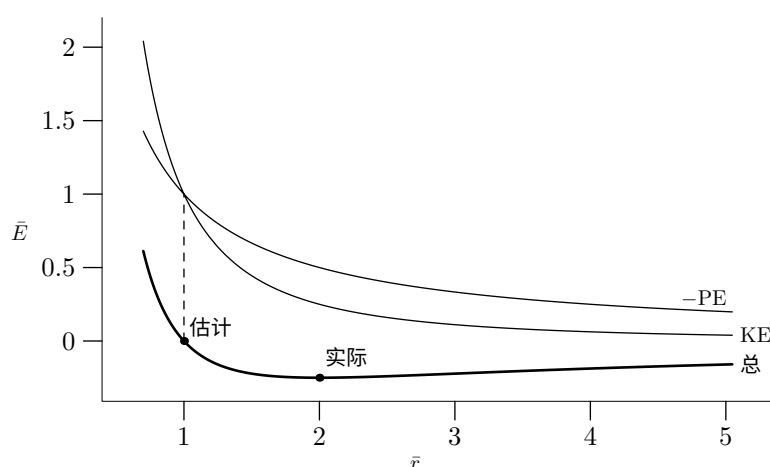
$$E = E_{\text{势能}} + E_{\text{动能}} \sim -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{m_e r^2}$$

变为

$$\bar{E} \sim -\frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}.$$

这些糟糕的常数被放入到缩放长度和能量的定义中。这个无量纲能量很容易思考和绘制。

简单的微积分：最小化缩放能量  $\bar{E}$  相对于缩放键长  $\bar{r}$ 。缩放能量是潜在能和动能的总和。这种能量的形状说明了费曼对原子假设的解释。在“稍微分开”的情况下 - 对于较大的  $\bar{r}$  - 曲线向上倾斜；为了降低能量，质子和电子更倾向于靠近，结果产生的力是吸引力。“被挤压在一起” - 对于较小的  $\bar{r}$  - 势能迅速增加，因此粒子之间的力是斥力。在  $\bar{r}$  的小和大区域之间，力为零。



微积分（求导）将最小能量  $r^-$  定位在  $\bar{r}_{\min} = 2$ 。另一种方法是廉价最小化：当两个项竞争时，当这些项大致相等时，最小值出现。这种最小化方法在第6.2.2节中很熟悉。将两个项  $r^{-1}$  和  $\bar{r}^{-2}$  相等，得到  $\bar{r}_{\min} \sim 1$ 。这个结果给出了一个缩放长度。在实际单位中，它

是

$$r_{\min} = l\bar{r}_{\min} = \frac{\hbar^2}{m_e(e^2/4\pi\epsilon_0)},$$

这是使用尺寸分析计算的玻尔半径。在估计动能和势能时的粗糙性抵消了通过廉价最小化引入的误差！

这是如何证明廉价最小化的方法。考虑一个合理的能量函数  $E$  的一般形式：

$$E(r) = \frac{A}{r^n} - \frac{B}{r^m}.$$

这个形式捕捉了组合能量的重要特征

$$E = E_{\text{势能}} + E_{\text{动能}} \sim -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{m_e r^2},$$

这两项代表了竞争的物理效应。从数学上讲，这个物理事实通过相反的符号来表示。

要找到最小值，解  $E'(r_{\min}) = 0$  或

$$-n \frac{A}{r_{\min}^{n+1}} + m \frac{B}{r_{\min}^{m+1}} = 0.$$

解为

$$\frac{A}{r_{\min}^n} = \frac{n}{m} \frac{B}{r_{\min}^m} \quad (\text{微积分}).$$

这种方法通过将两个项  $A/r^n$  和  $B/r^m$  相等来最小化组合能量：

$$\frac{A}{r_{\min}^n} = \frac{B}{r_{\min}^m}.$$

这个近似缺乏精确结果中的  $n/m$  因子。两个估计值的比率

对于  $r_{\min}$  是

$$\frac{\text{近似估计}}{\text{微积分估计}} \left( n \right)^{1/(m-n)} \sim \frac{1}{\text{米}},$$

除非  $n = m$ ，否则它小于1，此时没有最大值或最小值。因此，这种近似方法低估了极小值和极大值的位置。

为了判断该方法在实践中的效果，将其应用于一个典型的例子：非极性原子或分子之间的势能，例如氦、氙或甲烷之间的势能。这个势能可以很好地近似为所谓的Lennard-Jones势能，其中  $m = 6$ ， $n = 12$ ：  $A$

$$U(r) \sim \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}.$$

近似结果低估了  $r_{\min}$  的因素

$$\left( \frac{12}{6} \right)^{1/6} \sim 1.15.$$

在近似计算中，15%的误差通常相对于其他不准确性来说很小，因此这种近似最小化方法是一个宝贵的时间节省者。

现在回到原始问题：确定玻尔半径。近似最小化预测了正确的值。即使这种方法没有那么迷人，也没有必要进行正确的微积分最小化。微积分方法在其他推导的不准确性中太准确了。

工程师们理解不过度设计系统的概念。如果自行车最常在焊接处断裂，那么用昂贵的高强度航空材料替换焊接处之间的金属就没有多大意义。新材料可能会持续100年而不是50年，但这样的更换就是过度设计。要改进一辆自行车，努力改进或不使用焊接。

在估计玻尔半径时，动能估计使用了一种粗糙的不确定性原理形式， $\Delta p \Delta x \sim \hbar$ ，而真正的陈述是  $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$ 。估计还使用了近似  $E_{\text{动能}} \sim (\Delta p)^2/m$ 。这个近似中包含  $m$  而不是

分母中也假设  $\Delta p$  可以转化为能量，就好像它是真正的动量而不仅仅是根均方动量的粗略估计。势能和动能的估计使用了位置不确定性的粗略定义  $\Delta x$ ： $\Delta x \sim r_0$ 。在进行了这么多近似之后，使用微分计算的大象枪来最小化结果是没有意义的。近似方法与能量中的近似一样准确，甚至更准确。近似方法与能量中的近似一样准确，甚至更准确。

这种比较竞争项的方法是平衡的。我们通过假设动能和势能大致相等来平衡它们。结果是

$$a_0 \sim \frac{\hbar^2}{m_e(e^2/4\pi\epsilon_0)}.$$

自然可能不友好：势能和动能可能相差

10或100倍。但自然是友好的：这两种能量大致相等，除了一个接近1的常数。‘接近1’也被称为单位阶数。这种粗略的相等在许多例子中发生，通过假装两个能量（或具有相同单位的两个量）相等，你经常得到一个合理的答案。当这些量是势能和动能时，通常会得到额外的安全性：所谓的维里定理保护你免受大误差的影响（有关维里定理的更多信息，请参阅任何一本中级经典动力学教材）。

## 7.5 重力对光线的弯曲

岩石、鸟类和人类都感受到了重力的影响。那么为什么光不会呢？对这个问题的分析是爱因斯坦的广义相对论的一次胜利。通过求解所谓的广义相对论的测地线方程，我可以计算出重力是如何弯曲光线的：

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0.$$

要计算Christoffel符号  $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ ，需要解度规张量  $g_{\mu\nu}$ ，而解度规张量需要解曲率方程  $R_{\mu\nu} = 0$ 。

曲率方程是十个偏微分方程的简写。这些方程在数学上非常有趣，但是解起来却是一场噩梦。这些方程非常多 - 这是一个问题 - 更糟糕的是，它们不是线性的。所以标准的技巧，即猜测一种解的类型，并通过组合基本类型形成新的解，是行不通的。你可以花十年时间学习高级数学来精确解这些方程。或者你可以接受分析的伟大原则：当事情变得困难时，降低你的标准。如果我牺牲准确性，我可以用你（和我自己！）已经知道的数学和物理知识，在不到一千页的篇幅中解释光线弯曲。

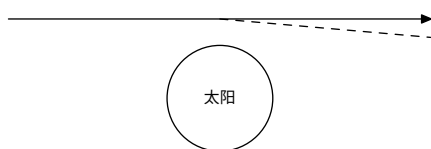
在科学和工程中，近似方法的简单方法是常规的三个步骤：

1. 找到相关参数。
2. 找到无量纲组。
3. 使用这些组来得出最一般的无量纲陈述。
4. 添加物理知识以缩小可能性。

以下各节分别进行每个步骤。

### 7.5.1 寻找参数

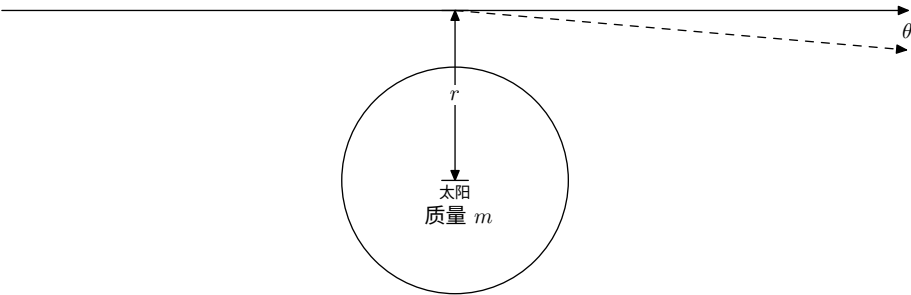
无量纲分析的第一步是确定弯曲角度可能依赖于哪些物理参数。一个没有标签的图表促使我思考标签，其中许多是问题的参数：



以下是包括各种参数的原因：

1. 列表必须包括要解决的数量。因此，角度  $\theta$  是列表中的第一项。
2. 太阳的质量  $m$  必须影响角度。黑洞极大地偏转光线，可能是因为它们巨大的质量。
3. 远离的太阳或黑洞不能强烈影响路径（在地球附近，光线似乎直线传播，尽管宇宙中到处都是黑洞）；因此，距离质心的距离  $r$  是一个相关参数。短语“距离质心的距离”是含糊的，因为光线与质心的距离是不同的。让  $r$  是最近接触的距离。
4. 尺寸分析需要知道重力产生了弯曲。参数列表中的参数不会产生任何力。所以包括牛顿的引力常数  $G$ 。

这是同一个图表，标有重要参数：



这是一个参数及其维度的表格：

参数	含义	维度
$\theta$	角度	—
$m$	太阳质量	M
$G$	牛顿常数	$L^3T^{-2}M^{-1}$
$r$	距离太阳中心的距离 L	

正如你可能猜到的，L、M和T分别代表长度、质量和时间的维度。

7.5.2 无量纲组

什么是无量纲组？参数  $\theta$  是一个角度，已经是无量纲的。其他变量， $G$ 、 $m$  和  $r$ ，不能形成第二个无量纲组。为了明白为什么，我们来看一下质量的维度。它只出现在  $G$  和  $m$  中，所以一个无量纲组将包含乘积  $Gm$ ，其中没有质量维度。但是  $Gm$  和  $r$  无法去除时间维度。因此，只有一个独立的无量纲组，其中  $\theta$  是最简单的选择。

如果不加入第二个无量纲组，我的分析似乎毫无意义。  
任何物理解都可以用无量纲形式来表示；这个想法是量纲分析的基础。只有一个无量纲组  $\theta$ ，我不得不得出结论  $\theta$  不依赖于任何变量：

$$\theta = \text{其他无量纲组的函数,}$$

但是没有其他无量纲组，所以

$$\theta = \text{常数} \quad .$$

这个结论太荒谬了！这个角度必须至少依赖于  $m$  和  $r$  中的一个。我的物理图像可能有些混乱，但并不至于混乱到两个变量都不相关。所以我需要再找一个无量纲组， $\theta$  可以依赖于它。因此，我回到第一步：寻找参数。

目前为止，列表缺少一个关键参数。  
我忽略了哪个物理因素？自由联想通常会提示出缺失的参数。  
与岩石不同，光很难偏转，否则人类就不会等到



在科学和工程中，研究物体的偏转至少可以追溯到18世纪，而研究岩石的路径可能可以追溯到亚里士多德时代甚至数百万年前。光的传播速度比岩石快得多，这可能解释了为什么光如此难以偏转：引力场只对它产生短暂的作用。但是我的参数都无法区分光和岩石。因此，我应该包括光的速度  $c$ 。它引入了一个事实，即我正在研究光，并且通过一个有用的区分参数——速度来实现。

这是最新的参数和尺寸表：

参数	含义	维度
$\theta$	角度	—
米	太阳质量	M
$G$	牛顿常数	$L^3T^{-2}M^{-1}$
$r$	距离太阳中心的距离 L	
$c$	光速	$LT^{-1}$

长度分散在参数中（它在  $G$ 、 $r$ 和  $c$ 中）。然而，质量只出现在 $G$ 和  $m$ 中，所以我已经知道我需要形成类似  $Gm$ 的组合来抵消质量。时间也只出现在两个参数中： $G$ 和  $c$ 。为了抵消时间，我需要形成  $Gm/c^2$ 。这个组合中有一个长度，所以一个无量纲的组合是  $Gm/rc^2$ 。

7.5.3 得出结论

两个无量纲组之间最一般的关系是

$$\theta = f\left(\frac{Gm}{rc^2}\right).$$

无量纲分析不能告诉我正确的函数  $f$ .

物理推理和对称性缩小了可能性。首先，强大的引力 - 来自大的  $G$ 或  $m$  - 应该增加角度。所以  $f$ 应该是一个递增的函数。现在尝试对称性：想象一个引力是斥力的世界，或者等效地，引力常数是负的。那么角度也应该是负的，所以  $f$ 应该是一个奇函数。这个对称性论证排除了像  $f(Gm/rc^2) \sim (Gm/rc^2)^2$ 这样的选择。

最简单的猜测是  $f$ 是恒等函数。然后弯曲角度是

$$\theta = \frac{Gm}{rc^2}.$$

很可能在  $f$ 中有一个无量纲常数：

$$\theta = 7 \frac{Gm}{rc^2}$$

或

$$\theta = 0.3 \frac{Gm}{rc^2}$$

也是可能的。这种自由意味着

$$\theta \sim \frac{Gm}{rc^2}.$$

#### 7.5.4 与精确计算的比较

不同的引力理论给出相同的结果

$$\theta \sim \frac{Gm}{rc^2};$$

唯一的变化是缺失无量纲常数的值。 以下是精确计算的数值:

$$\theta = \frac{Gm}{rc^2} \times \begin{cases} 1 & \text{(最简单的猜测)}; \\ 2 & \text{(牛顿引力)}; \\ 4 & \text{(爱因斯坦的理论)}. \end{cases}$$

以下是这些常数起源的简要解释。 最简单的猜测的1就是那样。 牛顿引力的2来自于积分角因子，如余弦和正弦，它们确定光子在向太阳移动和经过太阳时的位置。

最有趣的常数是广义相对论的4，它是牛顿值的两倍，因为光以光速运动。 额外的弯曲是爱因斯坦的特殊相对论将空间和时间放在同一水平上的结果。 然后，广义相对论以时空的曲率来阐述引力。 牛顿的理论是只考虑时间曲率的广义相对论的极限；广义相对论本身也计算空间曲率。 由于大多数物体的运动速度远远低于光速，意味着它们在时间上比在空间上移动得更远，它们主要感受到时间曲率。 牛顿分析对于这些物体是可以的。 由于光以光速运动，它看到相等数量的空间和时间曲率，因此它弯曲的程度是牛顿理论预测的两倍。

#### 7.5.5 数字!

在地球表面，强度是

$$\frac{Gm}{rc^2} \sim \frac{6.7 \cdot 10^{-11} \text{米}^3 \text{秒}^{-2} \text{千克}^{-1} \times 6.0 \cdot 10^{24} \text{千克}}{6.4 \cdot 10^6 \text{米} \times 3.0 \cdot 10^8 \text{米/秒}^{-1} \times 3.0 \cdot 10^8 \text{米/秒}^{-1}} \sim 10^{-9}.$$

这个微小的值是弯曲角度（以弧度表示）。因此，如果物理学家想要证明光线弯曲，他们最好看向地球之外！这个陈述基于另一个维度分析和物理推理的结果，我在此引用而不证明：

一个直径为  $d$  的望远镜可以分辨出大约  $\lambda/d$  这么小的角度，其中  $\lambda$  是光的波长。测量光线弯曲的一种方法是测量星星的位置变化。一个能够分辨出  $10^{-9}$  角度的透镜至少有一个直径为

$$d \sim \lambda/\theta \sim \frac{0.5 \cdot 10^{-6} \text{米}}{10^{-9}} \sim 500 \text{米}.$$

大型透镜会变形和破裂；最大的透镜之一是6米。因此，没有机会检测到 $10^{-9}$ 度的角度。

因此，物理学家寻找了另一种光线弯曲的来源。在太阳系中，最大的质量是太阳。在太阳表面，场强度为

$$\frac{Gm}{rc^2} \sim \frac{6.7 \cdot 10^{-11} \text{米}^3 \text{秒}^{-2} \text{千克}^{-1} \times 2.0 \cdot 10^{30} \text{千克}}{7.0 \cdot 10^8 \text{米} \times 3.0 \cdot 10^8 \text{米} \cdot \text{秒}^{-1} \times 3.0 \cdot 10^8 \text{米} \cdot \text{秒}^{-1}} \sim 2.1 \cdot 10^{-6} \approx 0.4''.$$

尽管这个角度很小，但是可以检测到：所需的镜头直径大约是

$$d \sim \lambda/\theta \sim \frac{0.5 \cdot 10^{-6} \text{米}}{2.1 \cdot 10^{-6}} \sim 20 \text{ cm}.$$

1919年的日食探险由剑桥大学的亚瑟·爱丁顿领导，试图精确测量这个效应。

多年来，爱因斯坦相信他的引力理论将预测出牛顿的值，结果是0.87角秒，对于刚好擦过太阳表面的光线。德国数学家索尔德纳在1803年得出了相同的结果。幸运的是，对于爱因斯坦的声誉来说，去测试他（和索尔德纳的）预测的日食探险都被雨水或云层遮挡了。当一次探险运气好，天气晴朗时（1919年的爱丁顿探险），爱因斯坦已经发明了一种新的引力理论，预测为1.75角秒。爱丁顿的探险的目标是在牛顿和广义相对论之间做出决策。测量是困难的，结果不够准确，无法决定哪个理论是正确的。但是1919年是第一次世界大战之后的一年，在那场战争中，德国和英国几乎互相消灭。一个由德国人发明的理论，由一个英国人（来自牛顿的大学）证实 - 在战争的创伤之后，这样的画面令人欣慰，所以世界新闻界和科学界看到了他们想要的东西：爱因斯坦得到了证实！对爱因斯坦预测的适当证实只有在射电天文学出现后才得到，射电天文学可以准确测量小的偏转。我给你留下这个谜题：如果望远镜的准确度为 $\lambda/d$ ，那么为什么射电望远镜比光学望远镜更准确，因为射电波的波长比光波长长？！

## 7.6 巴克汉姆皮特定理

在科学和工程中，近似方法的第二步是进行量纲分析，得到无量纲组。通过事先知道要寻找多少个组，这个任务就变得简单了。巴克汉姆皮特定理提供了这个数量。我通过一系列的例子推导出它。

这里是定理陈述的一个可能开头：无量纲组的数量是... 在光线弯曲的例子上一试。变量 $\theta$ ,  $G$ ,  $m$ ,  $r$ , 和  $c$  能产生多少个组？可能的组合包括 $\theta$ ,  $\theta^2$ ,  $Gm/rc^2$ ,  $\theta Gm/rc^2$ , 等等。可能性是无限的！现在将定理陈述应用于在将量子力学列入变量列表之前估计氢的大小。该列表包括 $a_0$ （大小）， $e^2/4\pi\epsilon_0$ ，和

$m_e$ 。该列表不产生无量纲组。因此，如果没有可能的组，那么组的数量将为零；如果可能有一个组，那么组的数量将为无穷大。

下面是一个改进的定理陈述，考虑到冗余：无量纲组的独立数量是... 为了完整地陈述，尝试一些例子：

- 1. 光的弯曲。五个量  $\theta, G, m, r,$  和  $c$  产生两个独立的组。  
方便的选择是  $\theta$  和  $Gm/rc^2$ ，但任何其他独立集合同样有效，即使不太直观。
- 2. 没有量子力学的氢的大小。三个量  $a_0$  (大小),  $e^2/4\pi\epsilon_0,$  和  $m_e$  产生零个组。
- 3. 用量子力学测量氢的大小。这四个量  $a_0$  (大小) ,  $e^2/4\pi\epsilon_0,$   $m_e$  和  $\hbar$  形成一个独立的组。

这些例子符合一个简单的模式：

no. 独立组的数量 = 数量的数量 - 3。

3有点令人不安，因为它是一个没有解释的魔数。这也是基本维度的数量：长度、质量和时间。所以也许这个陈述是

no. 独立组的数量 = 数量的数量 - 维度的数量。

用其他例子来测试这个陈述：

- 1. 弹簧-质量系统的周期。这些量是  $T$  (周期)、 $k$ 、 $m$  和  $x_0$  (振幅)。这四个量形成一个独立的无量纲组，可以是  $kT^2/m$ 。这个结果与提出的定理一致。
- 2. 弹簧-质量系统的周期 (不包括  $x_0$ )。由于振幅  $x_0$  不影响周期，这些量可以是  $T$  (周期)、 $k$  和  $m$ 。这三个量构成一个独立的无量纲组，也可以是  $kT^2/m$ 。这个结果也与所提出的定理一致，因为  $T$ 、 $k$  和  $m$  只包含两个维度 (质量和时间)。

该定理在我们试图推导牛顿第二定律时是安全的。力  $F$  取决于质量  $m$  和加速度  $a$ 。这三个量包含三个维度-质量、长度和时间。三减三等于零，所以所提出的定理预测了零个独立的无量纲组。而  $F = ma$  告诉我  $F/ma$  是一个无量纲组。

通过添加一个词可以解决这个问题。看一下  $F, m,$  和  $a$  的尺寸。所有的尺寸 -  $M$  或  $MLT^{-2}$  或  $LT^{-2}$ - 可以仅使用两个尺寸构建： $M$  和  $LT^{-2}$ 。关键思想是原始的三个尺寸不是独立的，而  $M$  和  $LT^{-2}$  是独立的。所以：

变量	维度	什么
$F$	$MLT^{-2}$	力
$m$	$M$	质量
$a$	$LT^{-2}$	加速度

不。独立组的数量 = 数量的数量-独立尺寸的数量。

这个陈述就是巴克汉姆π定理[9]。

# 第3部分

# 丢弃

# 信息

8.特殊情况	69
9.离散化	91
10. 弹簧	97

# 第8章

## 特殊情况

### 8.1 金字塔体积

我一直承诺要解释金字塔体积中的三分之一因素：

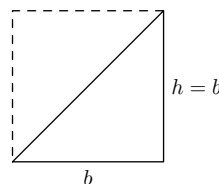
$$V = \frac{1}{3}hb^2。$$

虽然特例法大多数情况下不能解释一个无量纲常数，但是金字塔的体积提供了一个罕见的反例。

我首先在更少的维度中解释关键思想。因此，不是立即解释金字塔体积中的三分之一，这是一个困难的三维问题，而是首先在二维问题中找到相应的常数。

那个问题是底边为  $b$ ，高度为  $h$  的三角形的面积：面积为  $A \sim bh$ 。常数是多少？

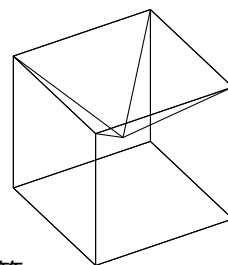
选择一个方便的三角形，可能是一个45度的直角三角形，其中  $h = b$ 。这两个三角形形成一个面积为  $b^2$  的正方形，所以当  $h = b$  时， $A = b^2/2$ 。因此， $A \sim bh$  中的常数是  $1/2$ ，无论  $b$  和  $h$  是什么，所以  $A = bh/2$ 。



现在在三维空间中使用相同的结构。当与自身组合多次时，什么基于正方形的金字塔会形成一个熟悉的形状？

在接下来的讨论中，只有纵横比  $h/b$  是重要的。所以选择一个方便的  $b$ ，然后选择一个使金字塔具有巧妙纵横比的  $h$ 。

目标形状由正方形金字塔底部所建议。另一个具有相同底面的固体是一个立方体。



也许几个金字塔可以组合成一个边长为  $b$  的立方体。为了简化即将进行的算术运算，我选择  $b = 2$ 。高度  $h$  应该是多少？为了决定，想象一下如何构建立方体。每个立方体有六个面，因此六个金字塔可以组成一个立方体，其中每个金字塔底部形成立方体的一个面，每个金字塔顶部朝内，相交于立方体的中心。为了使顶部相交于立方体的中心，高度必须是  $h = 1$ 。因此，具有  $b = 2$  和  $h = 1$  的六个金字塔构成了边长为2的立方体。

一个金字塔的体积是一个立方体体积的六分之一：

$$V = \frac{\text{立方体体积 } 8}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}。$$

金字塔的体积是  $V \sim hb^2$ ，缺失的常数必须使体积为  $4/3$ 。  
由于这些金字塔的  $hb^2 = 4$ ，缺失的常数是  $1/3$ 。大功告成：

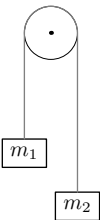
$$V = \frac{1}{3}hb^2 = \frac{4}{3}。$$

8.2 力学

8.2.1 阿特伍德机

下一个问题说明了尺寸分析和物理问题中的特殊情况。  
许多几何示例中的思想和方法都适用于这个问题，并且  
它介绍了更多的方法和推理方式。

这个问题是大一物理学的基本问题：两个质量， $m_1$ 和 $m_2$ ，通过滑轮相连，可以自由上下移动。质量的加速度是多少以及绳子的张力是多少？你可以用大一物理学的标准方法解决这个问题，这意味着你可以检查我们使用尺寸分析、有教养的猜测和对函数的感觉得出的解决方案。



第一个问题是找到加速度，比如说， $m_1$ . 由于 $m_1$ 和 $m_2$ 通过绳子连接， $m_2$ 的加速度，根据你的符号约定，要么等于  
 $m_1$ 要么等于  $-m_1$ . 让我们称加速度为  $a$ 并使用量纲分析来猜测它的形式. 第一步是决定哪些变量是相关的. 加速度取决于重力，所以  $g$ 应该在列表中. 质量影响加速度，所以  $m_1$ 和 $m_2$ 在列表中. 这就是全部. 你可能想知道张力发生了什么：难道它不影响加速度吗？它确实影响，但它本身是  $m_1, m_2$ 和  $g$ 的结果. 所以将张力添加到列表中不会增加信息；相反，它会量纲分析变得困难.

这些变量可以分为两对，每对中的变量具有相同的维度。因此有两个无量纲组  
这里有两个可以选择的： $G_1 = m_1/m_2$  和  $G_2 = a/g$ 。你可以制造使用这两个明显的组合来计算任何无量纲组，例如  
实验将使你相信。然后，按照通常的模式  
,

变量	维度	什么
$a$	$LT^{-2}$	加速度为 $m_1$
$g$	$LT^{-2}$	重力
$m_1$	M	块质量
$m_2$	M	块质量

$$\frac{a}{g} = f\left(\frac{m_1}{m_2}\right),$$

其中  $f$  是一个无量纲函数。  
暂停一下。你越多思考选择一个清晰的表示，你后面需要做的代数运算就越少。所以，不要使用  $m_1/m_2$ 作为无量纲组来找到  $f$ ，先选择一个更好的组合。比值  $m_1/m_2$ 不尊重问题的对称性，当你交换标签  $m_1$ 和 $m_2$ 时，只有加速度的符号发生变化。

而  $m_1/m_2$ 变成了它的倒数。所以函数  $f$ 将需要做很多工作来将非对称比率  $m_1/m_2$ 转化为对称加速度。

回到绘图板，修复  $G_1$  的问题。另一个选择是使用  $m_1 - m_2$ 。等等，差异不是无量纲的！我马上解决这个问题。现在观察一下  $m_1 - m_2$  的优点。它在质量交换下显示出合理的对称性：

$$G_1 \rightarrow -G_1。$$

为了使其无量纲，将其除以另一个质量。一个候选者是  $m_1$ ：

$$G_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}。$$

选择这个，就像除以  $m_2$  一样，放弃了所钟爱的对称性。但是除以  $m_1 + m_2$  解决了所有问题：

$$G_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}。$$

这个群体是无量纲的，并且它尊重问题的对称性。

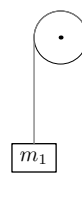
使用这个  $G_1$ ，解决方案变为

$$\frac{a}{g} = f\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)，$$

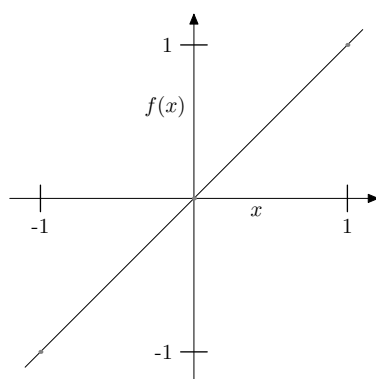
其中  $f$  是另一个无量纲函数。

猜测  $f(x)$ ，其中  $x = G_1$ ，尝试特殊情况。首先想象  $m_1$  变得很大。然而，一个具有质量的量本身不能很大。这里的很大是相对于  $m_2$  很大，于是  $x \approx 1$ 。在这个思想实验中， $m_1$  像没有  $m_2$  一样下降， $a = -g$ 。在这里，我们选择了一个正向加速度的符号约定。

如果  $m_2$  相对于  $m_1$  很大，也就是  $x = -1$ ，那么  $m_2$  像拉着  $m_1$  向上加速度为  $a = g$  的石头一样下降。第三个极限情况是  $m_1 = m_2$  或者  $x = 0$ ，此时质量处于平衡状态， $a = 0$ 。



这是我们的知识的一部分  $f$  的图：



最简单的猜想-一个受过教育的猜想-是  $f(x) = x$ 。然后我们得到了我们的结果：

$$\frac{a}{g} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}。$$

看看当使用对称的无量纲形式推导时，结果是多么简单  
特殊情况！



## 8.3 阻力

摆动运动不是一个足够糟糕的问题，以展示尺寸分析的全部好处。相反，尝试流体力学-这是一个以其数学和物理复杂性而臭名昭著的学科；Chandrasekhar的书籍[10, 11]或Lamb的经典教材[12]表明，数学并不适合胆小的人。

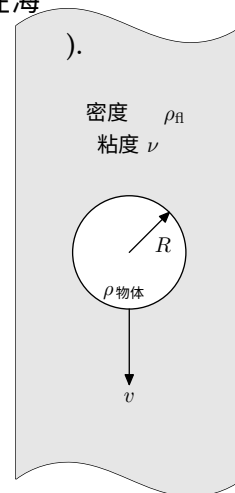
下面的例子说明了两种极端的流体流动：渗流和湍流。一个渗流流动的例子是在海水中传输电荷（第8.3.6节）。湍流流动的一个例子是云中凝结出来的雨滴从天空中落下来（第8.3.7节）。

要找到终端速度，解决不可压缩流体的偏微分方程组：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3 \text{ 个方程})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1 \text{ 个方程})$$

这里， $\mathbf{v}$ 是流体速度， $\rho$ 是流体密度， $\nu$ 是运动粘度，而 $p$ 是压力。第一个方程是三个方程的矢量简写，所以完整的系统是四个方程。



所有的方程都是偏微分方程，其中三个是非线性的。更糟糕的是，它们是耦合的：量出现在多个方程中。因此，我们必须解决一组耦合的、非线性的偏微分方程。这个解必须满足由大理石或雨滴施加的边界条件。随着物体的移动，边界条件会发生变化。因此，在你知道物体如何移动之前，你不知道边界条件。在你知道边界条件之前，你无法找到流体或物体的运动。边界条件和解之间的这种耦合增加了问题的难度。这要求你同时解决方程和边界条件。如果你最终到达那里，那么你会取极限  $t \rightarrow \infty$  找到终端速度。

放心！我只是写出了纳维尔-斯托克斯方程，只是为了吓唬你使用尺寸分析和特殊情况推理。近似方法比求解非线性偏微分方程更容易。

### 8.3.1 初级尺寸分析

要使用尺寸分析，按照通常的步骤进行：选择相关变量，从中形成无量纲组，并解出终端速度。在选择数量时，不要忘记包括你要解决的变量，这里是  $v$ 。要决定其他数量，将它们分为三类（分而治之）：

1. 流体的特性,
2. 物体的特性，以及
3. 使物体下落的特性。

最后一类是最容易思考的，所以先处理它。重力使物体下落，所以  $g$  在列表中。

考虑下对象的特性。它的速度，作为我们正在解决的数量，已经在列表上。它的质量  $m$  影响终端速度：羽毛下落比石头慢。它的半径  $r$  可能会影响终端速度。不要将  $r$  和  $m$  一起列出，重新组合它们并使用  $r$  和  $\rho_{\text{obj}}$ 。两个选择  $r$  和  $m$  或  $r$  和  $\rho_{\text{obj}}$  提供相同的信息，只要对象是均匀的：您可以通过计算  $\rho_{\text{obj}}$  从

$m$  和  $r$  来计算  $m$ ，并且可以通过计算  $\rho_{\text{obj}}$  和  $r$  来计算  $m$ 。

通过在推导中向前看，选择更可取的一对。流体的相关属性包括其密度  $\rho_{\text{fl}}$ 。如果列表还包括  $\rho_{\text{obj}}$ ，则结果可能包含令人满意的无量纲比例，例如  $\rho_{\text{obj}}/\rho_{\text{fl}}$ （一个无量纲组！）。比例  $\rho_{\text{obj}}/\rho_{\text{fl}}$  比如  $m/\rho_{\text{fl}}r^3$  这样的组合有一个更明显的物理解释，除了一个无量纲常数外，它更难以理解是对象和流体密度的比例。

因此选择  $\rho_{\text{obj}}$  和  $r$  来代替  $m$  和  $r$ 。

在缩放参数中，也更倾向于选择  $\rho_{\text{obj}}$  和  $r$ 。在缩放参数中，你可以想象改变，比如大小。大小，就像热量一样，是一个广延量：与物质的数量相关的量。

当你改变大小时，你希望尽可能少地改变其他变量，以免这些变化掩盖了改变大小的效果。因此，只要可能，用温度或密度等强度量来替代广延量。这对  $m$  和  $r$  包含了两个广延量，而更可取的对  $\rho_{\text{obj}}$  和  $r$  只包含一个广延量。

现在考虑流体的性质。它的密度  $\rho_{\text{fl}}$  影响终端速度。也许它的粘度也是相关的。粘度衡量了流体在流动中减小速度差异的倾向。你可以在多车道高速公路上观察到粘度的类似现象。如果一个车道比另一个车道快得多，驾驶员会从较慢的车道换到较快的车道，最终减慢较快的车道。驾驶员的局部决策减小了速度梯度。类似地，分子运动（在气体中）或碰撞（在流体中）将速度（实际上是动量）从快流动区域传输到慢流动区域。这种传输减小了区域之间的速度差异。更粘稠的流体可能产生比较稀薄的流体更多的阻力。因此，粘度属于相关变量的列表中。流体力学家定义了两种粘度：动力粘度  $\eta$  和运动粘度  $\nu$ 。[遗憾的是，我们不能使用悦耳的术语流体力学来表示一群物理学家在苦苦思索流体力学方程的情景；它无法区分辛勤工作的人和他们的工作。]这两种粘度通过  $\eta = \rho_{\text{fl}}\nu$  的关系相互关联。《在流动的流体中的生活》[13，第23-25页]详细讨论了这两种粘度。对于阻力分析，你只需要知道粘性力与粘度成正比。我们应该使用哪种粘度？动力粘度将  $\rho_{\text{fl}}$  隐藏在  $\nu\rho_{\text{fl}}$  的乘积中；因此， $\rho_{\text{obj}}$  和  $\eta$  的比率看起来比它实际上更无量纲，因为  $\rho_{\text{obj}}$  的伴侣  $\rho_{\text{fl}}$  被隐藏在  $\eta$  中。因此，运动粘度  $\nu$  通常提供更有洞察力的结果。总结讨论，表格按类别列出了变量。

下一步是找到无量纲组。巴克  
汉姆 $\pi$ 定理（第 7.6 节）说六个变量  
和三个独立的维度导致三个  
无量纲组。

在找到组之前，考虑一下  
三个组。三个？！三个无量纲组产  
生终端速度  $v$  的这个形式：

变量	维度	什么
$\nu$	$L^2T^{-1}$	运动粘度
$\rho_{\text{fl}}$	$L^{-3}$	流体密度
$r$	$L$	物体半径
$v$	$LT^{-1}$	终端速度
$\rho_{\text{物体}}$	$L^{-3}$	物体密度
$g$	$LT^{-2}$	重力

组中  $v$  = 函数（其他组1，其他组2）。

要推断出函数的属性需要物理知识。然而，研究一个两个变量的函数是繁琐的。一个变量的函数可以用曲线表示并且可以在纸上绘制。两个变量的函数可以用曲面表示。为了得到一个完整的图像，需要三维纸（你有吗？）；或者你可以在普通的二维纸上绘制许多切片。这种对终端速度的蛮力方法产生了太多的无量纲组，不具吸引力。

如果你只在复杂形式达到之后简化

具有  $v = f(\text{其他组 1}, \text{其他组 2})$  的组

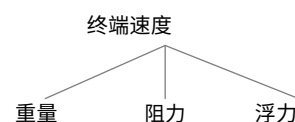
你携带着行李，最终会丢弃。当去加勒比度假时，为什么要带着你从未使用过但到处携带的滑雪板？相反，在分析的开始时，融入物理知识。这样你就可以简化剩余的推导。为了遵循这种轻装旅行的策略 - 只带你需要的东西 - 考虑终端速度的物理学，以便现在进行简化。

### 8.3.2 更简单的方法

短语“终端速度”中的形容词“终端”暗示了物理学  
决定速度的物理学。这里的“终端”是指无限时间之后的最终状态。  
它表明速度已经变为常数-

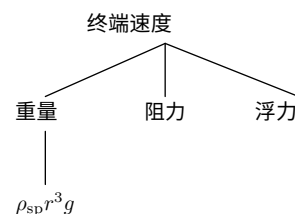
这种情况只有在大理石上没有净力作用时才会发生。

这种思路表明我们应该想象物体上的力：重力、浮力和阻力。终端速度是使阻力、重力和浮力合力为零的速度。分而治之的推理将终端速度问题分解为三个较简单的问题。



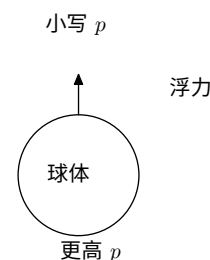
重力力量，也称为重量，是  $mg$ 。而不是  $m$   
我们使用  $(4\pi/3)\rho_{\text{obj}}r^3$  - 出于与  $\rho_{\text{obj}}$  而不是  
在变量表中使用  $m$ ，并快乐地忽略了  $4\pi/3$  的因素。通过  
这些选择，重量是

$$F_g \sim \rho_{\text{obj}} r^3 g。$$



图中显示了更新了这些信息的路线图。

剩下的部分是阻力和浮力。浮力更容易，所以先做它（最大懒惰原理）。这是一个向上的力，因为重力影响了流体中的压力。压力根据  $p = p_0 + \rho_{\text{fl}}gh$  增加，其中  $h$  是深度， $p_0$  是零深度处的压力（可以取任何水平面上的压力）。物体顶部和底部之间的压力差，它们之间相隔  $\sim r$  的距离，是  $\Delta p \sim \rho_{\text{fl}}gr$ 。压力是力除以面积，压力差作用在面积  $A \sim r^2$  上。因此，



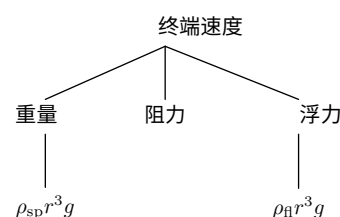
由压力差产生的浮力是

$$F_b \sim A\Delta p \sim \rho_{\text{fl}}r^3g.$$

作为对这个结果的检查，阿基米德原理说浮力是‘被流体排斥的重量’。这个重量是

$$\underbrace{\rho_{\text{fl}} \frac{4\pi}{3} \pi r^3}_{\text{质量}} g.$$

体积



除了  $4\pi/3$  的因子外，它与浮力相匹配，因此阿基米德原理证实了我们对  $F_b$  的估计。这个结果更新了路线图。主要未开发的分支是阻力，我们使用量纲分析来解决它。

### 8.3.3 阻力的量纲分析

重力和浮力可以不使用量纲分析来解决，但我们仍然需要使用量纲分析来找到阻力。将问题分解成部分的目的是相对于 8.3.1 节中的蛮力方法简化这个量纲分析。让我们看看在计算阻力时变量列表如何变化，而不是终端速度。阻力  $F_d$  必须加入列表：这不是一个有希望的开始，当我们试图消除变量时。更糟糕的是，终端速度  $v$  仍然在列表中，尽管我们不再计算它，因为阻力取决于物体的速度。

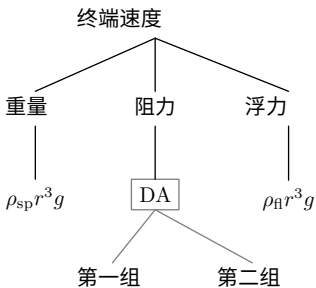
然而，一切并未失去。阻力对于球体内部的情况一无所知。将流体想象成一个实施流体力学定律的巨型计算机。从这台计算机的视角来看，参数  $v$  和  $r$  是唯一相关的球体运动属性。

表面下的东西不会影响流体流动：阻力只是表面现象。如果这台计算机有足够的处理能力，它可以在不知道球体的密度  $\rho_{\text{obj}}$  的情况下确定流动，这意味着密度从列表中消失了。进展！

现在考虑一下流体的特性。流体超级计算机仍然需要流体的密度和粘度来确定流体的各个部分如何移动对物体运动的响应。所以  $\rho_{fl}$  和  $\nu$  保持不变列表中的内容。重力呢？它使物体下落，所以它负责终端速度  $v$ 。然而，流体超级计算机并不关心物体是如何获得这个速度的；它只关心速度是多少。所以  $g$  从列表中消失了。更新后的表格显示了新的、更短的列表。

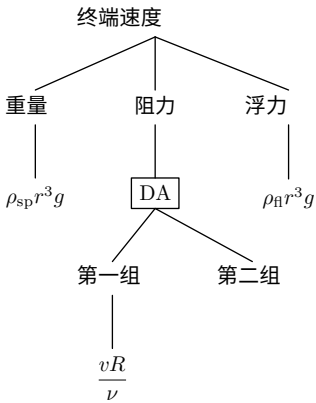
变量	维度	什么
$F_d$	$MLT^{-2}$	阻力
$\nu$	$L^2T^{-1}$	运动粘度
$\rho_{fl}$	$ML^{-3}$	流体密度
$r$	$L$	物体半径
$v$	$LT^{-1}$	终端速度

列表中的五个变量由三个基本维度组成。根据巴金汉姆定理（第7.6节），我们预计会有两个无量纲组。我们通过分而治之找到了一个组。列表中已经包含了一个速度（终端速度）。如果我们能够构造出另一个具有速度维度的量  $V$ ，那么  $v/V$  就是一个无量纲组。黏度  $\nu$  几乎是一个速度。它比速度多了一个长度的幂次。除以  $r$  可以消除的影响  
额外长度：  $V \equiv \nu/r$ 。然后是一个无量纲组



$$G_1 \equiv \frac{v}{V} = \frac{vr}{\nu}.$$

我们的知识，包括这个组，在图中显示。这个组非常重要，它有一个名字，雷诺数，简称  $Re$ 。它很重要，因为它是一个无量纲的测量流速的方式。速度，因为它包含尺寸，无法区分快慢流动。例如， $10\,000\text{ms}^{-1}$  对于一个行星来说是慢的，因为行星的速度通常是每秒几十公里，但对于行人来说是快的。当你听到一个量很小、很快、很大、很贵或几乎任何形容词时，你的第一反应应该是问‘与什么相比？’这样的比较暗示着将  $v$  除以另一个速度；然后我们得到一个无量纲的量，它与比例  $v$ 。这个除法的结果就是雷诺数。



低值的  $Re$  表示缓慢的、粘性的流动（冷蜂蜜从罐子中流出）。高值表示湍流流动（一架以600英里/小时飞行的喷气式飞机）。优秀的流体力学中的流体生活 [13] 讨论了在流体力学中出现的许多无量纲比例。

雷诺数在地图上显得孤单。为了给它找个伴，找到第二个无量纲组。阻力力在第一组中不存在，所以它必须存在于第二组中；否则我们无法求解阻力力。

我们不是通过一次幸运的猜测来构建无量纲组，而是通过步骤（分而治之的推理）来构建它。逐个维度地检查表中的变量。只有两个变量（ $F_d$  和  $\rho_{fl}$ ）包含质量，所以两者要么都出现，要么都不出现在这个组中。因为  $F_d$  必须出现， $\rho_{fl}$  也必须出现。每个变量都包含质量的一次方，所以该组包含比率  $F_d/\rho_{fl}$ 。一个简单的选择是

$$G_2 \propto \frac{F_d}{\rho_{fl}}$$

尺寸为  $F_d/\rho_{fl}$  的是  $L^4T^{-2}$ ，这是  $L^2T^{-1}$  的平方。幸运眷顾我们，因为  $L^2T^{-1}$  是  $v$  的尺寸。所以

$$\frac{F_d}{\rho_{fl}v^2}$$

是一个无量纲组。

这个选择虽然有效，但有一个缺陷：它包含  $v$ ，而  $v$  已经属于第一个组（雷诺数）。在问题中的所有变量中， $v$  最有可能根据物理论证被认为是无关的（就像在第8.3.7节中将发生的那样，当我们专门研究高速流动时）。如果  $v$  出现在两个组中，消除它需要将两个组合并成一个不包含  $v$  的组。然而，如果  $v$  只出现在一个组中，那么消除它就很简单：消除那个组。更简单的数学 - 消除一个组而不是混合两个组以获得一个组 - 需要更简单的物理推理。因此，如果可能的话，将  $v$  隔离在一个组中。

为了从提议的组  $F_d/\rho_{fl}v^2$  中去除  $v$ ，请注意乘积两个无量纲组的乘积也是无量纲的。第一组包含  $v^{-1}$ ，而提议的组包含  $v^{-2}$ ，所以比值

$$\frac{\text{提议的组}}{(\text{第一组})^2} = \frac{F_d}{\rho_{fl}r^2v^2}$$

不仅是无量纲的，而且不包含  $v$ 。因此，在尝试消除  $v$  时，分析将变得容易修改。通过这个修订后的第二组，我们的知识现在在这个图中显示：

与提议的组  $F_d/\rho_{fl}v^2$  不同，这个组具有合理的物理解释。想象一下球体行进了一段距离  $l$ ，并使用  $l$  将该组乘以单位：

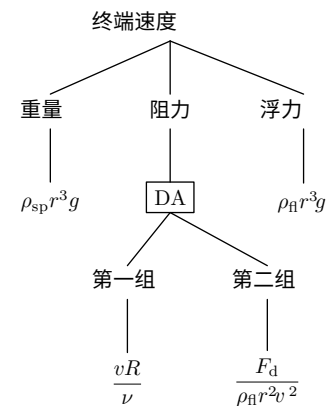
$$\underbrace{\frac{F_d}{\rho_{fl}r^2v^2}}_{\text{group 1}} \times \underbrace{\frac{l}{l}}_1 = \frac{F_d l}{\rho_{fl} l r^2 v^2}.$$

分子是克服阻力所做的工作在距离  $l$  上。分母也是一种能量。为了解释它，需要分析其组成部分（分而治之）。乘积  $l r^2$  是物体排除的流体体积，除了无量纲常数。因此， $\rho_{fl} l r^2$  除了一个常数，是物体排除的流体质量。物体以与  $v$  相当的速度移动流体，因此给流体带来了动能。

$$E_K \sim \rho_{fl} l r^2 v^2.$$

因此，比值和因此该组具有以下解释：克服阻力所做的工作

传递给流体的动能



在高度耗散的流动中，当能量直接被粘性燃烧时，分子比分母要大得多，因此这个比值（将被证明是测量阻力的）远大于1。在高度流线型的流动中（喷气机翼），对抗阻力所做的功很小，因为流体将大部分输入的动能返回给物体。因此，在这个比值中，分子相对于分母来说很小。

要解出  $F_d$ ，它包含在  $G_2$  中，使用形式  $G_2 = f(G_1)$ ，变为

$$\frac{F_d}{\rho_{\text{fl}} r^2 v^2} = f\left(\frac{vr}{\nu}\right).$$

阻力力则为

$$F_d = \rho_{\text{fl}} r^2 v^2 f\left(\frac{vr}{\nu}\right)$$

函数  $f$  是一个无量纲函数：它的参数是无量纲的，返回一个无量纲的数。它也是一个通用函数。相同的  $f$  适用于任何大小的球体，在任何粘度或密度的流体中！尽管  $f$  依赖于  $r$ 、 $\rho_{\text{fl}}$ 、 $\nu$  和  $v$ ，但它只通过一个组合，即雷诺数来依赖于它们。一个变量的函数比四个变量的函数更容易研究：

一个变量的好函数表可能需要一页；两个变量的函数表可能需要一个卷；三个变量的函数表可能需要一个书架；而一个有四个变量的函数库。

—哈罗德杰弗里斯[6, p. 82]

尺寸分析无法告诉我们  $f$  的形式。为了了解它的形式，我们专门研究两个特殊情况：

1. 粘性低速流动( $Re \ll 1$ )，即第8.3.4节的主题；以及
2. 湍流高速流动( $Re \gg 1$ )，即第8.3.7节的主题。

### 8.3.4 粘性极限

作为低速极限的一个例子，考虑一个在植物油或甘油中下落的大理石。

你可能会想知道大理石在油中下落的频率有多高，以及为什么我们要用这个例子。对于第一个问题的简短答案是“不经常”。然而，决定大理石在油中下落的物理规律也决定了雾滴在空气中的行为，例如细菌在水中的游动[14]，或者密立根油滴实验中的油滴行为。

大理石问题不仅说明了物理原理，而且我们可以通过家庭实验来检验我们的结果。

在缓慢、粘性流体中，阻力来自于-惊喜！-粘性力。这些力与粘度成正比，因为粘度是粘性力定义中的比例常数。因此

$$F_d \propto \nu.$$



粘度在阻力结果中只出现一次，重复如下：

$$F_d = \rho_{\text{fl}} r^2 v^2 f\left(\frac{vr}{\nu}\right)$$

为了将 $\nu$ 翻转到分子中，并使 $F_d \propto \nu$ ，函数 $f$ 必须具有以下形式： $f(x) \sim 1/x$ 。

使用这个 $f(x)$ 的结果是

$$F_d \sim \rho_{\text{fl}} r^2 v^2 \frac{\nu}{vr} = \rho_{\text{fl}} \nu v.$$

仅仅通过量纲分析是不足以计算出这个缺失的魔法无量纲常数的。流体力学家必须进行一次混乱而困难的计算。现在，她的负担很轻，因为我们已经解决了这个问题，除了这一个常数。英国数学家斯托克斯，第一个推导出它的值，发现

$$F_d = 6\pi\rho_{\text{fl}}\nu vr.$$

为了纪念斯托克斯，这个结果被称为斯托克斯阻力。

让我们对结果进行合理性检查。大型或快速的弹珠应该感受到很大的阻力，所以 $r$ 和 $v$ 应该在分子中。粘性流体应该产生很大的阻力，所以 $\nu$ 应该在分子中。提出的阻力通过了这些测试。密度的正确位置 - 在分子或分母中 - 很难判断。

通过研究纳维尔-斯托克斯方程，您可以做出有根据的判断。在这些方程中，当 $v$ 是“小的”（与什么相比较小？）时， $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ 项，其中包含两个 $v$ 的幂，与只包含一个 $v$ 的粘性项 $\nu \nabla^2 v$ 相比变得微小。第二阶项来自流体的惯性，因此这个项很小意味着渗出的弹珠不会受到惯性效应的影响。所以也许表示流体惯性的 $\rho_{\text{fl}}$ 不应该出现在斯托克斯阻力中。

另一方面，粘性力与动态粘度 $\eta = \rho_{\text{fl}}\nu$ 成正比，所以即使惯性不重要， $\rho_{\text{fl}}$ 也应该出现。斯托克斯阻力通过了这个测试。使用动态粘度而不是运动粘度，斯托克斯阻力是

$$F_d = 6\pi\eta vr,$$

通常是一个方便的形式，因为许多表格列出 $\eta$ 而不是 $\nu$ 。

这个 $6\pi$ 的因子来自于诚实的计算。在这里，它来自于求解纳维尔-斯托克斯方程。在本书中，我们希望教你如何不受苦，所以我们不解这样的方程。我们通常引用诚实计算的因子来向你展示近似的准确性（或粗糙程度）。这个因子通常接近于单位，尽管在这个例子中大约是20！用高级术语来说，它通常是“数量级为单位”。这样的

一个数字适合我们的神经硬件：它容易记住和使用。通过知道近似推导并记住这个数字，你可以重新构造出精确的结果而不需要解决困难的方程。

现在使用斯托克斯阻力来估计低雷诺数情况下的终端速度。



## 8.3.5 低雷诺数情况下的终端速度

在路线图中组装了所有的部分后，我们现在回到原始问题，即找到终端速度。由于大理石上没有净力作用（终端速度的定义），阻力力量

加上浮力等于重力：

$$\underbrace{v\rho_{\text{fl}}vr}_{F_d} + \underbrace{\rho_{\text{fl}}gr^3}_{F_b} \sim \underbrace{\rho_{\text{obj}}gr^3}_{F_g}.$$

重新排列后：

$$v\rho_{\text{fl}}vr \sim (\rho_{\text{obj}} - \rho_{\text{fl}})gr^3.$$

终端速度然后是

$$v \sim \frac{gr^2}{\nu} \left( \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fl}}} - 1 \right).$$

根据动态粘度  $\eta$ ，它是

$$v \sim \frac{gr^2}{\eta} (\rho_{\text{obj}} - \rho_{\text{fl}}).$$

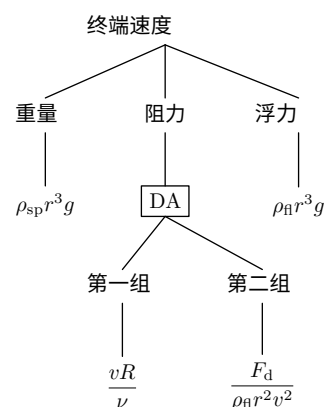
与具有运动粘度的版本中出现的无量纲因子  $\rho_{\text{obj}}/\rho_{\text{fl}} - 1$  不同，这个版本具有一个有量纲的  $\rho_{\text{obj}} - \rho_{\text{fl}}$  因子。虽然它不太美观，但通常更方便，因为表格通常列出动态粘度  $\eta$  而不是运动粘度  $\nu$ 。

通过检查正确的变量是否在分子上（一个形象化的说法是“在分子上方”）和分母上（在分母上方）来增加我们对这个表达式的信心。密度较大的大理石应该比密度较小的大理石下降得更快，所以  $\rho_{\text{obj}}$  应该在分子上方。重力加速度使大理石加速，所以  $g$  应该在分子上方。粘度减慢了大理石的速度，所以  $\nu$  应该在分母上方。终端速度通过了这些测试。因此，我们对我们的结果更有信心，尽管测试没有检查  $r$  的位置或任何指数：例如， $\nu$  是否应该出现为  $\nu^2$ ？谁知道，但如果粘度有影响，它主要出现为

作为平方根或第一次方。

要检查  $r$ ，想象一个大理石。它会受到很多阻力，下落得很慢，所以  $r$  应该出现在楼下。然而，大理石也很重，下落得很快，这表明  $r$  应该出现在楼上。哪种效应占上风并不明显，尽管在解决这些问题之后，你可以做出一个有根据的猜测：重量尺度作为  $r^3$ ，一个迅速上升的函数  $r$ ，而阻力可能与  $r$  的较低次幂成比例。重量通常在这样的情况下占上风，就像在这里一样，使  $r$  出现在楼上。所以终端速度也通过了  $r$  测试。

让我们看一下括号中的无量纲比例： $\rho_{\text{obj}}/\rho_{\text{fl}} - 1$ 。没有浮力， $-1$  消失了，终端速度将是



$$v \propto g \frac{\rho_{\text{物体}}}{\rho_{\text{fl}}}.$$

我们保留比例中的  $g$  的原因是：如果我们用有效重力  $g'$  替换  $g$ ，真正的解决方案将返回，其中

$$g' \equiv g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{fl}}}{\rho_{\text{物体}}} \right).$$

因此，将浮力效应纳入问题求解的一种方法是在没有浮力的情况下解决问题，但是考虑减小的  $g$ 。

在两种极限情况下检查这个替代： $\rho_{\text{fl}} = 0$  和  $\rho_{\text{fl}} = \rho_{\text{obj}}$ 。当  $\rho_{\text{obj}} = \rho_{\text{fl}}$  时，重力消失：密度接近水的人在游泳池中几乎不会浮起来。那么  $g'$  应该为零。当  $\rho_{\text{fl}} = 0$  时，浮力消失，重力保持其完整效应。所以  $g'$  应该等于  $g$ 。有效重力定义同时满足这两个测试。在这两个极限之间，有效  $g$  应该与  $\rho_{\text{fl}}$  线性变化，因为浮力和重力在对物体的影响上线性叠加。有效  $g$  也通过了这个测试。

另一个测试是想象  $\rho_{\text{fl}} > \rho_{\text{obj}}$ 。然后关系正确地预测出  $g'$  是负的：氦气球上升。这种替代使用浮力的方法通常很有用。例如，如果你忘记包括浮力（这在本章的第一稿中发生过），你可以通过用  $g'$  替换  $g$  来纠正结果。

如果我们继续考虑比例常数，从魔术数字  $6\pi$  开始在斯托克斯阻力中，并包括属于重量的  $4\pi/3$ ，我们发现

$$v \sim \frac{2}{9} \frac{\text{克}}{\nu} \left( \frac{\rho_{\text{物体}}}{\rho_{\text{fl}}} - 1 \right).$$

### 8.3.6 海水的电导率

作为斯托克斯阻力的应用和低雷诺数的罕见例子，让我们估计海水的电导率。

解决这个问题是没有希望的，除非将其分解成若干部分。

电导率  $\sigma$  是电阻率  $\rho$  的倒数。将这个问题分解成若干部分是没有希望的。电导率  $\sigma$  是电阻率  $\rho$  的倒数。（对于重载的约定表示歉意

密度符号具有另一种含义。电阻率，顾名思义

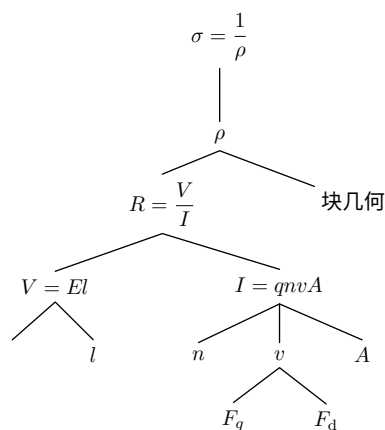
与电阻  $R$  有关。为什么同时存在  $\rho$  和  $R$ ？重新

电阻是衡量特定导线的有用指标，但不适用于一般导线

，因为它取决于导线的直径和横截面积  $E$

。它不是一个强度量。在研究电阻率和电阻之间的关系之前，让我们先完成

绘制解树，将  $\rho$  视为取决于  $R$  和几何形状。我们可以通过在海水块上加上电压  $V$  并测量电流  $I$  来找到  $R$ ；然后  $R = V/I$ 。要找到  $V$  或  $I$ ，我们需要一个物理模型。首先，为什么海水会导电？导电需要电荷的传输，这是由电场产生的。海水



主要是水和食盐 (NaCl)。从溶解盐产生的离子可以传输电荷。产生的电流是

$$I = qnvA,$$

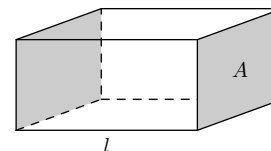
其中  $A$  是块的横截面积,  $q$  是离子电荷,  $n$  是离子浓度, 而  $v$  是它的终端速度。

为了理解并能够重新推导这个公式, 首先检查它的维度。电流是单位时间内的电荷。右边也是单位时间内的电荷吗? 是的:  $q$  负责电荷; 而  $vA$  具有  $L^3 T^{-1}$  的维度, 所以  $nvA$ , 它具有  $T^{-1}$  的维度, 负责时间。

作为第二次检查, 在一个时间  $\Delta t$  内观察块的横截面。在那段时间内有多少电荷流动? 电荷以速度  $v$  移动, 所以宽度为  $v\Delta t$  和面积为  $A$  的块穿过横截面。这个块的体积是  $vA\Delta t$ 。离子浓度是  $n$ , 所以块中包含  $nvA\Delta t$  个电荷。如果每个离子的电荷是  $q$ , 那么离子上的总电荷是  $Q = qnvA\Delta t$ 。这个电荷流动花费了时间  $\Delta t$ , 所以电流是  $I = Q/\Delta t = qnvA$ 。终端速度  $v$  取决于施加的力  $F_q$  和阻力  $F_d$ , 就像下落的大理石一样, 只是用电力代替了重力。这种细分的结果是前面的地图。

现在让我们找出未知节点的表达式。只剩下三个:  $\rho$ ,  $v$ , 和  $n$ . 图示了  $\rho$  和  $R$  之间的关系:

$$\rho = \frac{RA}{l}.$$



要找出  $v$ , 我们按照与大理石相同的步骤进行。施加的力是  $F_q = qE$ , 其中  $q$  是离子电荷,  $E$  是电场。电压  $V$  产生的电场是  $E = V/l$ , 其中  $l$  是块的长度, 所以

$$F_q = \frac{qV}{l},$$

一个只涉及已知量的表达式。阻力是斯托克斯阻力。将这个阻力与施加的力相等, 得到了以已知量表示的终端速度  $v$ :

$$v \sim \frac{qV}{6\pi\eta lr},$$

其中  $r$  是离子的半径。

只有数密度  $n$  保持未知。我们在得到一个符号结果后估计它为  $\sigma$ , 你可以通过爬上解决树来做到这一点。首先, 用终端速度找到电流:

$$I = qnvA \sim \frac{q^2 n A V}{6\pi\eta l r}.$$

使用电流来找到电阻:

$$R \sim \frac{V}{I} \sim \frac{6\pi\eta l r}{q^2 n A}.$$

电压  $V$  消失了，这是令人鼓舞的：在大多数电路中，电导率（和电阻）与电压无关。使用电阻来找到电阻率：

$$\rho = R \frac{A}{l} \sim \frac{6\pi\eta r}{q^2 n}.$$

随着我们上升树，表达式简化了：几何参数  $l$  和  $A$  也消失了，这也是令人鼓舞的：评估电阻率而不是电阻的目的是电阻率与几何形状无关。

使用电阻率来找到电导率：

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \sim \frac{q^2 n}{6\pi\eta r}.$$

这里  $q$  是电子的电荷  $e$  或者它的负数，取决于钠离子还是氯离子是电荷载体，所以

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \sim \frac{e^2 n}{6\pi\eta r}.$$

要找到  $\sigma$  仍然需要离子浓度  $n$ ，我们可以从海水中的盐浓度中找到。我用一个厨房实验估计了这个值：往一杯水中加入食盐，直到尝起来像海水一样咸。我刚刚试过了。在一杯水中，我发现一茶匙盐的味道非常咸，就像喝海水一样。一杯水可能有

体积为  $0.3 \ell$  或质量为  $300$  克。一平匙盐的体积约为  $5$  毫升  $\ell$ 。

对于那些生活在公制国家的人来说，一茶匙是一种过时的度量单位，用于英国和尤其是美国，它没有任何靠近的公制国家关注。

一茶匙大约是  $4$  厘米长， $2$  厘米宽， $1$  厘米厚，在最深的地方；让我们假设  $0.5$  厘米平均。因此它的体积是

$$\text{茶匙} \sim 4 \text{厘米} \times 2 \text{厘米} \times 0.5 \text{厘米} \sim 4 \text{厘米}^3.$$

盐的密度可能是水的两倍，所以一个平的茶匙的质量约为  $\sim 10$  克。在海水中，盐的质量分数在这个实验中大约是  $1/30$ 。真实值非常接近： $0.035$ 。一摩尔的盐，提供每个  $\text{NaCl}$  分子两个电荷，质量为  $60$  克，所以

$$\begin{aligned} \frac{n}{30} & \sim \frac{1}{\underbrace{\rho_{\text{水}}}_{\text{克厘米}^{-3}} \times \underbrace{\frac{1}{\text{分子}}}_{\text{厘米}^3}} \times \frac{2 \text{电荷} \cdot 10^{23} \text{分子摩尔}^{-1}}{60 \text{克摩尔}^{-1}} \\ & \sim 7 \cdot 10^{20} \text{电荷 cm}^{-3}. \end{aligned}$$

在  $n$  被评估后，电导率中唯一剩下的谜团

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \sim \frac{q^2 n}{6\pi\eta r}$$

是离子半径  $r$  和动力粘度  $\eta$ 。

先做简单的部分。动力粘度是

$$\eta = \rho_{\text{水}} \sim 10^3 \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-3} \times 10^{-6} \text{ 米}^2 \text{ 秒}^{-1} = 10^{-3} \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-1} \text{ 秒}^{-1}.$$

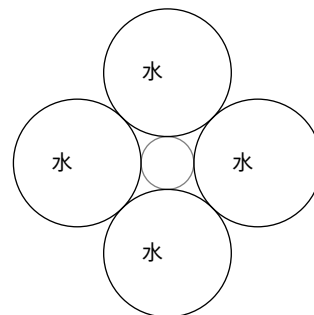
这里我转换为国际单位制 (mks) 单位。尽管大多数计算在高斯单位制 (也称为上帝的单位) 中比在国际单位制中更容易, 但唯一的例外是电磁学, 其中电导率中有  $e^2$ 。电磁学在高斯单位制中的概念更容易理解 - 例如, 不需要可怕的  $\mu_0$  或  $4\pi\epsilon_0$  - 而在国际单位制中则不然。

然而, 厘米克秒单位的电荷, 即静电单位, 是不常见的。因此, 对于数值计算, 请使用国际单位制。

所需的最终量是离子半径。正离子 (钠) 吸引水分子的氧端; 负离子 (氯) 吸引水分子的氢端。无论哪种方式, 离子都带电, 被一层或多层水分子包围。

当离子移动时, 它会带走一些这些包袱。因此, 与其使用裸离子半径, 你应该使用一个更大的半径来包括这个壳。

但是这个壳有多厚? 作为一个有教养的猜测, 假设这个壳包括一层水分子, 每个水分子的半径为  $1.5 \text{ \AA}$ 。因此, 对于离子加壳,  $r \sim 2 \text{ \AA}$ 。



根据这些数字, 电导率变为:

$$\sigma \sim \frac{\overbrace{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}^{e^2} \times \overbrace{7 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}}^n}{\underbrace{6 \times 3}_{6\pi} \times \underbrace{10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}}_{\eta} \times \underbrace{2 \cdot 10^{-10} \text{ m}}_r}.$$

你可以在脑海中进行计算: 取出大部分, 应用最大懒惰原则, 并通过首先计算十的幂 (以红色显示) 然后再考虑小因子来分而治之。然后, 通过分别计算顶部和底部的贡献来分而治之。顶部贡献了-12个十的幂: -38来自  $e^2$  和 +26来自  $n$ 。底部贡献了-13个十的幂: -3来自  $\eta$  和 -10来自  $r$ 。除法产生了一个十的幂。现在考虑剩下的小因子:

$$\frac{1.6^2 \times 7}{6 \times 3 \times 2}.$$

稍微高估答案, 假装顶部的  $1.6^2$  抵消了底部的3。稍微低估答案 - 也许可以弥补高估 - 假装顶部的7抵消了底部的6。在这些谎言之后, 只剩下  $1/2$ 。将其乘以唯一的幂通常会得到

$$\sigma \sim 5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

使用计算器进行算术运算得到  $4.977 \dots \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , 这与心算结果非常接近。

估计的电阻率为

$$\rho \sim \sigma^{-1} \sim 0.2 \Omega \text{ m} = 20 \Omega \text{ cm},$$

在这里，我们转换为常规但不完全是国际单位制的  $\Omega \text{ cm}$ 。在  $T = 15^\circ\text{C}$  的情况下，海水的典型实验值为  $23.3 \Omega \text{ cm}$ （来自[15，第 14-15]页），与估计值非常接近！

可能最重要的错误是离子加水组合的半径，这是进行电荷传输的。也许  $r$  应该大于  $2\text{\AA}$ ，特别是对于钠离子来说，它比氯离子小；因此，在其表面上具有更高的电场，并且比氯离子更强烈地吸引水分子。尽管存在这些不确定性，连续近似产生了比预期更准确的结果。在钠离子的长度尺度上，水看起来更像是一堆多孔的巨石，而不是连续体。然而，斯托克斯阻力起作用。它之所以起作用，是因为重要的长度尺度不是水分子的大小，而是它

们在碰撞之间的平均自由程。液体中的分子被紧密堆积到接触点，因此平均自由程比分子（甚至离子）的半径要短得多，尤其是与带有水壳的离子相比。

这个例子的道德，除了说明斯托克斯阻力，还是要有勇气。先近似，后问问题。也许这些近似是正确的，原因是你开始解决问题时没有怀疑的。如果你为每个近似都苦恼不已，你将永远无法开始计算，然后你将发现许多近似是可以的...如果你有勇气去做这些近似，那该多好。

### 8.3.7 湍流极限

现在我们计算另一种流动极端情况下的阻力：高速或湍流流动。例子将计算雨滴的终端速度。这些结果适用于大多数流动。例如，当一个孩子从椅子上站起来时，她周围的空气流动是高速流动，你可以通过计算雷诺数来验证。假设孩子的宽度为  $0.2 \text{ 米}$ ，她的上升速度为  $0.5 \text{ 米/秒}^{-1}$ 。那么

$$Re \sim \frac{vr}{\nu_{\text{空气}}} \sim \frac{0.5 \text{ 米/秒}^{-1} \times 0.2 \text{ 米}}{2 \cdot 10^{-5} \text{ 米}^2 \text{秒}^{-1}} \sim 5000.$$

这里空气的粘度更接近于

$$\nu_{\text{空气}} \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ 米}^2 \text{秒}^{-1},$$

而不是  $2 \cdot 10^{-5} \text{ 米}^2 \text{秒}^{-1}$ ，但是  $2 \cdot 10^{-5} \text{ 米}^2 \text{秒}^{-1}$  很容易与分子器中的  $0.2 \text{ 米}$  结合起来允许我们在脑海中进行计算。使用粘度的任一值，雷诺数都远大于1，所以流动是湍流的。更大的物体，如飞机、火车和汽车，即使它们比孩子行驶得更慢，也会产生湍流。简而言之，我们周围的大多数流体流动都是湍流流动。

为了开始分析，我们假设雨滴是一个球体。这是一个方便的谎言，允许我们重复使用第8.3.3节的一般结果，并专门应用于高速流动。

在高速（更准确地说，是在高雷诺数）下，流动是湍流的。粘度- 只影响缓慢的流动，但不直接影响湍流流动的剪切和旋转 - 变得无关紧要。让我们看看我们能够通过只知道湍流阻力几乎独立于粘度来理解多少。

湍流可能是经典物理学中的主要未解决问题。然而，你仍然可以使用尺度分析加上一点物理推理来理解很多关于阻力的事情；我们不需要对湍流有完全的理解。世界是混乱的：在分析或估计之前不要等待完全理解。

在低雷诺数的路线图中，粘度出现在仅在第一组中出现。因为湍流阻力是与粘度无关，粘度从结果中消失因此，该组也消失了。这个论证

更准确地说，从变量列表中删除  $\nu$  并重新搜索无量纲组。

变量和再次搜索无量纲组。剩下的四个变量，如表中所示，得到一个无量纲组，这是从旧路线图中的第二个组。

变量	维度	什么
$F_d$	$MLT^{-2}$	阻力力
$\rho_{fl}$	$ML^{-3}$	流体密度
$r$	L	物体半径
$v$	$LT^{-1}$	终端速度

所以雷诺数，也就是第一组，已经从分析中消失了。但是为什么高速下的阻力与雷诺数无关呢？换句话说，为什么我们可以从变量列表中去掉  $\nu$  而仍然得到正确的阻力形式呢？答案并不明显。将雷诺数解释为两个速度的比值

$v$  和  $V$  提供了部分答案。在这个问题中，一个自然的长度是  $r$ ；我们可以使用  $r$  将  $v$  和  $V$  转换为时间： $\tau$

$$\tau_v \equiv \frac{r}{v},$$

$$\tau_V \equiv \frac{r}{V} \sim \frac{r^2}{\nu}.$$

请注意  $Re \equiv \tau_V/\tau_v$ . 该数量  $\tau_v$  是流体环绕球体运动所需的时间（除了常数）。运动粘度是  $\nu/\rho$ ，但其最重要的解释是作为动量的扩散系数。因此，动量扩散到距离为  $x$  的时间是

$$\tau \sim \frac{x^2}{\nu}.$$

这个结果依赖于随机行走的数学；你可以通过检查它是否具有有效的维度来增加对它的信心，而不需要理解随机行走的理论。而且它确实有：每一边都是一个时间。

因此， $\tau_V$  是动量扩散到大小为  $r$  的物体（例如这个问题中的下落球体）周围所需的时间。如果  $\tau_V \ll \tau_v$  - 在这种情况下  $Re \ll 1$  - 那么动量在流体环绕球体之前就扩散了。动量扩散使速度均匀化，如果它有时间，在这个低雷诺数极限下它确实有时间。动量扩散

因此，它阻止了前端流动与后端流动的差异过大，从而抑制了任何湍流。在另一种极限情况下，当  $\tau_V \gg \tau_v$  或  $Re \gg 1$  时 - 动量扩散被流体流动超越，因此流体可以自由地撕裂成湍流混乱。一旦粘度足够低以允许湍流发生，其值不会影响阻力，这就是为什么我们可以在  $Re \gg 1$  时忽略它的原因。这里  $Re \gg 1$  意味着'足够大以产生湍流'，这大约发生在  $Re \sim 1000$  左右。一个更完整的故事，在第9.4节中作为边界层的一部分进行讨论，稍微修正了这个近似。

然而，对于我们在这里的目的来说，它足够接近。

这里的重要点是粘度从分析中消失

分析中也消失了第一组 一旦它消失了，剩下的无量纲组是

$$G_2 = \frac{F_d}{\rho_{fl} r^2 v^2}.$$

因为它是唯一的组，所以解决方案是

$$G_2 = \text{无量纲常数},$$

或者

$$F_d \sim \rho_{fl} r^2 v^2.$$

这个阻力是针对一个球体的 其他形状如何，它们比一个球体有更多的参数来描述？所以阻力力可以推广到更复杂的形状，我们使用物体的横截面积来表示。这里  $A = \pi r^2$ , 所以

$$F_d \sim \rho_{fl} A v^2.$$

这个传统选择有物理基础 当物体移动时，它所排斥的流体质量与其横截面积成比例:

$$m_{fl} = \rho_{fl} A h.$$

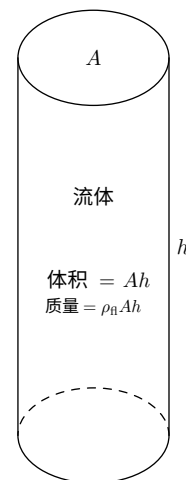
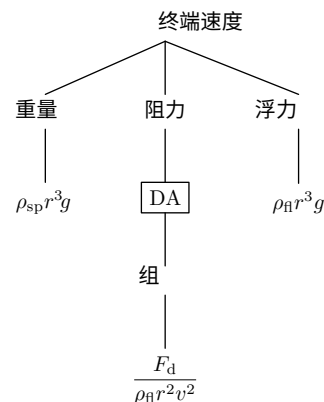
流体的速度与  $v$  相当，所以流体的动能是

$$E_K \sim \frac{1}{2} m_{fl} v^2 \sim \frac{1}{2} \rho_{fl} A h v^2.$$

如果所有这个动能都被阻力耗散，那么阻力力是  $E_K/h$  或者

$$F_d \sim \frac{1}{2} \rho_{fl} A v^2.$$

在这个形式中，比例常数的因子是阻力系数  $c_d$ .





就像它的近亲  $f$  一样，无量纲阻力力的阻力系数

是阻力力的一个无量纲度量。它取决于形状

物体-关于流线型的性质。表格列出了各种形状的  $c$  和  $d$  值（在高雷诺数）。由于阻力系数与函数成正比，

$f(Re)$  在一般解中也取决于雷诺数。然而，

根据高雷诺数下流动与粘度无关的推理，阻力系数也应该与雷诺数无关。使用阻力系数而不是  $f$ （这意味着使用横截面积而不是  $r^2$ ），湍流阻力变为

物体	$c_d$
球体	0.5
圆柱体	1.0
平板	2.0
汽车	0.4

$$F_d = \frac{1}{2} c_d \rho_{fl} v^2 A_o.$$

所以我们有了湍流阻力的表达式。重力和浮力与粘性极限中的相同。所以我们只需要重新分析粘性极限，但使用新的阻力。因为重力和浮力包含  $r^3$ ，所以我们在阻力中使用  $r^2$  而不是  $A_o$ 。根据这些结果，终端速度  $v$  由以下公式给出

$$\underbrace{\rho_{fl} r^2 v^2}_{F_d} \sim \underbrace{g(\rho_{obj} - \rho_{fl}) r^3}_{F_g - F_b},$$

所以

$$v \sim \sqrt{gr \left( \frac{\rho_{物体}}{\rho_{fl}} - 1 \right)}.$$

暂停一下，对这个结果进行合理性检查：上下楼梯的变量是否正确？我们逐个考虑每个变量。

- $\rho_{fl}$ ：在密度更大的流体中，终端速度较小（试着在游泳池中跑步），因此  $\rho_{fl}$  应该在分母中。
- $g$ ：想象一个人在一个比地球的引力更强的行星上坠落。重力部分决定了大气压力和密度。在保持大气密度恒定的同时增加重力可能在现实生活中是不可能的，但在思想实验中我们可以轻松做到。然后，阻力不依赖于  $g$ ，因此重力增加了终端速度而没有受到阻力的反对： $g$  应该在分子中。
- $\rho_{obj}$ ：想象一滴由（非常）重水制成的雨滴。相对于标准雨滴，重力增加而阻力保持不变，如使用流体是计算机的论证所示 [??sec:drag-force-DA](#)。所以  $\rho_{obj}$  应该在上面。
- $r$ ：确定半径所在的位置需要更微妙的论证。增加  $r$  会增加重力和阻力。重力随着  $r$  的立方增加

而阻力仅随  $r$  的平方增加。因此，对于较大的雨滴，它们更大的重量增加了  $v$ ，而更大的阻力减少了  $v$ 。因此， $r$  应该在上面。

- $\nu$ ：在高雷诺数下，粘度不会影响阻力，至少在我们的近似中不会。所以  $\nu$  不应该出现在任何地方。

终端速度通过了所有测试。

现在我们可以计算终端速度。最近一场雨在人行道上留下的溅点是雨滴的直径约为 0.3 厘米。由于雨水是水，其密度约为 1 克/立方厘米。空气的密度约为 1 千克/立方米，因此  $\rho_{\text{fl}} \ll \rho_{\text{obj}}$ ：浮力因此不是一个重要的影响因素，我们可以用  $\rho_{\text{obj}}/\rho_{\text{fl}}^{-1}$  来代替  $\rho_{\text{obj}}/\rho_{\text{fl}}$ 。通过这个简化和估算的数字，终端速度为：

$$v \sim \left( \underbrace{1000 \text{ 厘米/秒}}_g \times \underbrace{0.3 \text{ 厘米}}_r \times \underbrace{\frac{1 \text{ 克/立方厘米}}{10^{-3} \text{ 克/立方厘米}}}_{\frac{\rho_{\text{物体}}}{\rho_{\text{fl}}}}} \right)^{1/2} \text{ 约为 5 米/秒。}$$

或 10 英里/小时。

这个计算假设  $Re \gg 1$ 。检查这个假设！你不需要从头计算  $Re$ ，而是相对于之前的结果进行缩放。正如我们之前计算的那样，一个孩子（半径  $\sim 0.2$  米）从椅子上站起来（速度  $\sim 0.5$  米/秒<sup>-1</sup>）会产生一个  $Re \sim 5000$  的湍流流动。雨滴产生的流动速度快了 10 倍，但雨滴的大小大约小了 100 倍。对于孩子，缩放雷诺数为

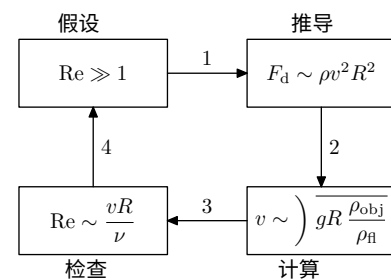
$$\text{雷诺数} \sim \underbrace{\sim \text{雷诺数 孩子}}_{5000} \times \underbrace{\left( \frac{\text{下落速度}}{v_{\text{孩子}}} \right)}_{10} \times \underbrace{\left( \frac{\text{下落半径}}{r_{\text{孩子}}} \right)}_{0.01} \sim 500.$$

这个雷诺数也比 1 大得多，所以雨滴产生的流动是湍流的，这证明了最初的假设。

现在我们已经找到了终端速度，让我们提取一下解的形式。我们遵循的顺序是假设，推导，计算，然后检查。这个顺序比推导然后计算的简单顺序更有成果。不知道流动是快还是慢，我们无法推导出一个闭合形式的表达式

$F_d$ ；这样的推导可能超出了目前对流体和湍流的理解。被这个数学上的珠穆朗玛峰所阻挡，我们将被困在推导的盒子里。我们永远不会确定

$F_d$ ，所以我们永远不会意识到雷诺数很大（假设的盒子）；然而，只有这个假设才能消除  $\nu$  并从而估计  $F_d$ 。



## 8.3.8 从两个极限中组合解决方案

你知道在两种极端情况下的阻力，粘性阻力和湍流阻力。  
结果在这里重复：

这个

$$F_d = \begin{cases} 6\pi\rho_{\text{fl}}\nu r & (\text{粘性}) \\ \frac{1}{2}c_d\rho_{\text{fl}}Av^2 & (\text{湍流}) \end{cases}.$$

让我们通过使粘性形式看起来像湍流形式来比较和组合它们。

与湍流形式相比，粘性形式缺少一个  $r$  的幂和一个

$v$  的幂，但多了一个  $\nu$  的幂。具有类似属性的变量组合是雷诺数  $rv/\nu$ 。因此，将粘性阻力乘以一个有用的单位形式：

$$F_d = \underbrace{\left(\frac{rv/\nu}{Re}\right)}_1 \times \underbrace{6\pi\rho_{\text{fl}}\nu r}_{F_d} = \frac{1}{Re} 6\pi\rho_{\text{fl}}v^2 r^2 \quad (\text{粘性}).$$

这个形式，除了  $6\pi$  和  $r^2$  之外，与湍流阻力幸运地相似  $A = \pi r^2$

所以

$$F_d = \frac{6}{Re} \rho_{\text{fl}} v^2 A \quad (\text{粘性}),$$

随着

$$c_d = \frac{12}{Re} \quad (\text{粘性}),$$

湍流阻力和这个重写的粘性阻力对于一个球体来说具有相同的形式:

$$F_d = \frac{1}{2}\rho_{\text{fl}}Av^2 \times \begin{cases} \frac{12}{Re} & (Re \ll 1), \\ 0.5 & (Re \gg 1). \end{cases}$$

在高雷诺数下，阻力系数保持不变  $c_d$

常数. 对于一个球体来说，这个常数是  $c_d \sim 1/2$ . 如果

低雷诺数近似对于  $c_d$  在有效

当雷诺数足够高时， $c_d$  会相交

$1/2$  接近  $Re \sim 24$ ，在这个点上，高雷诺数近似开始起作用。这个交叉点

是低速和高速流之间的过渡的一个合理估计。实验或大

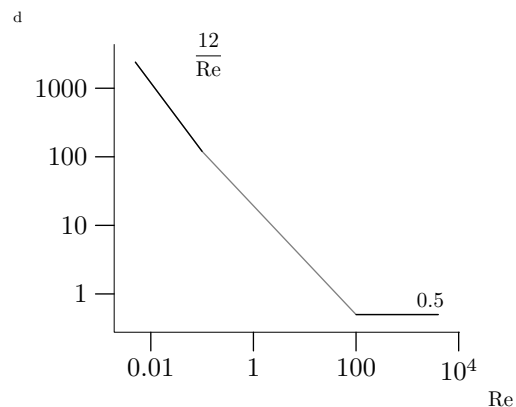
规模模拟

是获得更准确结果的唯一途径。实验数据将交叉点放在

$Re \sim 5$  附近，在这个点上

点  $c_d \sim 2$ . 为什么不能通过解析方法计算这个值

? 如果一个无量纲变量，比如雷诺数，接近于1，计算就变得困难。依赖于一个数量是巨大或微小的近似不再有效。当方程中的所有项大致相等时，不能去除任何项而不产生大误差。在这些情况下，要得到结果，你必须做诚实的工作：进行实验或数值求解纳维尔-斯托克斯方程。



# 第9章

## 离散化

### 9.1 尿布使用量

### 9.2 钟摆周期

### 9.3 随机漫步

随机漫步无处不在。你还记得纸牌游戏战争吗？它通常持续多长时间？一分子神经递质从囊泡释放出来。最终它与突触结合，你的腿会抽搐。到达那里需要多长时间？在一个冬天的日子里，你只穿着薄薄的一层衣服。为什么你感到寒冷？

这些物理情况是随机漫步的例子。在物理随机漫步中，例如气体分子的移动和碰撞，行走者移动的距离是可变的，可以朝任何方向移动。这个一般情况很复杂。幸运的是，随机漫步的基本特征不依赖于这些复杂的细节。

通过舍弃一般性来简化。一般性来自连续的自由度：方向是连续的，碰撞之间的距离是连续的。因此，离散化方向和距离：假设粒子在碰撞之间行进固定距离，并且只能沿坐标轴移动。此外，在进行更一般的二维和三维运动之前，分析一维运动的特殊情况。

在这个离散化的一维模型中，一个粒子从原点开始沿着一条线移动。在每个时刻，它以  $1/2$  的概率向左或向右移动。让  $n$  步后的位置为  $x_n$ ， $n$  步后的期望位置为  $\langle x_n \rangle$ 。因为随机行走是无偏的-因为在每个方向上移动的概率相等-期望位置保持不变：

$$\langle x_n \rangle = \langle x_{n-1} \rangle。$$

所以  $\langle x \rangle$ ，即所谓的位置的一阶矩，是一个不变量。然而，它不是一个有趣的不变量，因为它并没有告诉我们太多我们不已经直观地了解的东西。

鉴于第一阶矩不是有趣的，尝试下一个最复杂的矩：第二阶矩  $\langle x^2 \rangle$ 。在特殊情况下，这种分析最简单。假设在漫游一段时间后，粒子到达了7，即  $x = 7$ 。在下一个时刻，它将在  $x = 6$  或  $x = 8$ 。它的期望平方位置-不是它的平方期望位置！-已经变成

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} (6^2 + 8^2) = 50.$$

预期的平方位置增加了1。

让我们在第二个例子中检查这个模式。假设粒子在  $x = 10$  处，所以  $\langle x^2 \rangle = 100$ 。经过一个时间单位，新的预期平方位置是

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} (9^2 + 11^2) = 101.$$

再一次， $\langle x^2 \rangle$ 增加了1！根据这两个例子，结论是

$$\langle x_{n+1}^2 \rangle = \langle x_n^2 \rangle + 1.$$

换句话说，

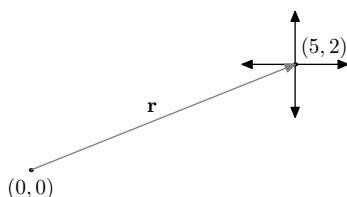
$$\langle x_n^2 \rangle = n.$$

由于每一步都需要固定的时间，在这种离散化分析中，结论是

$$\langle x_n^2 \rangle \propto t.$$

这个结果表明， $\langle x^2 \rangle$ 与一维随机行走的时间成正比。

并且它适用于任何维度。这里有一个二维的例子。假设粒子的位置是(5, 2)，所以  $\langle x^2 \rangle = 29$ 。经过一步之后，它有四个等可能的位置：



与其计算所有四个位置的新期望平方距离，不如懒惰一点，只看两个水平运动。两种可能性是(6, 2)和(4, 2)。期望的平方距离是

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} (40 + 20) = 30,$$

这比之前的  $\langle x^2 \rangle$ 值多一个。由于水平运动与垂直运动没有什么特别之处 - 对称性！ - 相同的结果适用于垂直运动。因此，对四个可能位置进行平均得到的期望平方距离为30。

对于二维情况，模式如下：

$$\langle x_{n+1}^2 \rangle = \langle x_n^2 \rangle + 1.$$

分析中没有步骤依赖于仅处于两个维度中。用花哨的话说，推导和结果对维度的改变是不变的。用简单的英语来说，这个结果也适用于三维。

### 9.3.1 随机行走和常规行走的区别

在标准行走中， $\langle x \rangle \propto \text{时间}$ 。注意 $x$ 的单一幂次。在常规行走中，有趣的量不是 $x$ 本身，因为它可以无限增长且不是不变的，而是比值 $x/t$ ，它对 $t$ 的变化是不变的。这个不变量也被称为速度。

在随机行走中，其中 $\langle x^2 \rangle \propto t$ ，有趣的量是 $\langle x^2 \rangle / t$ 。期望的平方位置对 $t$ 的变化不是不变的，但比值 $\langle x^2 \rangle / t$ 是一个不变量。这个不变量，除了一个无量纲常数，通常表示为扩散常数 $D$ 。它的维度是 $L^2 T^{-1}$ 。

随机行走和规则行走之间的区别在科学和工程中具有直观意义。例如，一个随机行走者，比如一个气体分子或者一个非常醉酒的人，来回移动，有时在一个方向上取得进展，有时又撤销了这个进展。因此，一个随机行走者应该比一个规则行走者花费更长的时间来走相同的距离。关系 $\langle x^2 \rangle / t \sim D$ 证实并加深了这种直觉。一个随机行走者行走一段距离 $l$ 所需的时间 $t \sim l^2 / D$ ，这与距离的线性增长相比呈二次增长。

### 9.3.2 扩散方程

随机行走的离散模型解释了扩散方程的来源。

想象一群粒子，每个粒子在一维空间中进行随机行走。浓度，或者数量，随时间如何变化？

将一维世界切割成宽度为 $\Delta x$ 的切片，并观察 $x, x - \Delta x$ 和 $x + \Delta x$ 处的切片。在每个时间步骤中，每个切片中的一半分子向左移动，一半向右移动。因此， $x$ 处的数量从 $N(x)$ 变为

$$\frac{1}{2}(N(x - \Delta x) + N(x + \Delta x)),$$

对于每一个变化

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{1}{2}(N(x - \Delta x) + N(x + \Delta x)) - N(x) \\ &= \frac{1}{2}(N(x - \Delta x) - 2N(x) + N(x + \Delta x)). \end{aligned}$$

这个最后的关系可以重写为

$$\Delta N \sim (N(x + \Delta x) - N(x)) - (N(x) - N(x - \Delta x)),$$

这在导数方面表示为

$$\Delta N \sim (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}.$$

这些切片之间的距离是这样分开的，以至于大多数分子在时间步长  $\tau$  内从一个切片到相邻的切片移动。如果  $\tau$  是碰撞之间的时间 - 平均自由时间 - 那么距离就是平均自由程  $\lambda$ 。因此

$$\frac{\Delta N}{\tau} \sim \frac{\lambda^2}{\tau} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2},$$

或者

$$\dot{N} \sim D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$

其中  $D \sim \lambda^2/\tau$  是扩散常数。

这个偏微分方程具有有趣的性质。第二个空间导数意味着线性空间浓度梯度保持不变：它的二阶导数为零，所以它的一阶导数必须为零。扩散只破坏曲率 - 粗略地说，就是二阶导数 - 而不是仅仅改变梯度。热通常通过随机行走扩散，可以通过声子（在液体或固体中）或分子随机行走（在气体中）来实现，所以如果你保持一根棒的一端温度为  $T_1$ ，另一端温度为  $T_2$ ，那么棒最终将在两个温度之间线性插值，只要热量从热端输入并从冷端抽出。

### 9.3.3 保持温暖

随机漫步的一个结果是如何在寒冷的日子里保持温暖。我们需要计算热通量：单位面积单位时间内的能量流动。我们从 flux 的定义开始，并进行物理推理。

物质的 flux 被定义为

$$\text{物质的 flux} = \frac{\text{物质}}{\text{面积} \times \text{时间}}.$$

flux 取决于物质的密度和物质的运动速度：

$$\text{物质的 flux} = \frac{\text{物质}}{\text{体积}} \times \text{速度}.$$

你可以检查两边的尺寸是相同的。

对于热通量，物质是热能。比热容  $c_p$  是单位质量的热能，

而  $\rho c_p T$  是单位体积的热能。速度是扩散的‘速度’。扩散

一个距离  $l$  需要时间  $t \sim l^2/D$ ，速度为  $l/t$  或  $D/l$ 。分母中的  $l$  表示，如预期的那样，扩散在长距离上是缓慢的。对于热扩散，扩散常数表示为  $\kappa$ ，称为热扩散率。因此，速度为  $l/\kappa$

。

将单位体积的热能与扩散速度结合起来：

$$\text{热通量} = \rho c_p T \times \frac{\kappa}{l} \sigma$$

乘积  $\rho c_p \kappa$  出现得如此频繁，以至于被赋予了一个名字：热导率  $K$ 。而比值  $T/l$  是温度梯度的离散版本  $\Delta T/\Delta x$ 。通过这些替换，热通量为

$$F = K \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

为了估计在寒冷天气中失去多少热量，我们需要估计  $K = \rho c_p \kappa$ 。将所有的要素整合到空气中：

$$\rho \sim 1 \text{ 千克/立方米},$$

$$c_p \sim 10^3 \text{ 焦耳/千克}^{-1} \text{ 开尔文}^{-1},$$

$$\kappa \sim 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ 平方米/开尔文}^{-1}$$

我们猜测  $\kappa = \nu$ ，因为它们都是扩散常数。然后

$$K = \rho c_p \kappa \sim 0.02 \text{ 瓦特/米}^{-1} \text{ 开尔文}^{-1}.$$

现在我们可以估计在寒冷天气中的散热。假设你的皮肤温度为  $30^\circ\text{C}$  而外面的空气温度为  $0^\circ\text{C}$ ，所以  $\Delta T = 30\text{K}$ 。一件薄T恤可能有2毫米的厚度，所以

$$F = K \frac{\Delta T}{\Delta x} \sim 0.02 \text{ 瓦特/米}^{-1} \text{ 开尔文}^{-1} \times \frac{30 \text{ 千}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ 米}} \sim 300 \text{ 瓦每平方米}^{-2}.$$

该死的，我想要一个功率而不是单位面积的功率。哦，通量就是单位面积的功率，所以一切都好。我只需要乘以我的表面积。我大约有2米高（大约！）和0.5米宽，所以我的前后各有1平方米的面积。然后

$$P \sim FA = 300 \text{ 瓦每平方米}^{-2} \times 2 \text{ 平方米}^2 = 600 \text{ 瓦}.$$

难怪感觉这么冷！只是坐着，你的身体就会产生100瓦（基础代谢率）。所以，随着600瓦的流失，你失去的热量远远超过你产生的热量。经过足够长的时间，你的核心体温会下降。你体内的化学反应会减慢，因为所有反应在较低温度下都会变慢，并且酶会失去其优化的形状。最终你会死亡。

一个解决办法是慢跑产生额外的热量。这个解决办法表明600W的估计是合理的。骑车强度很大，产生了数百瓦的废热，即使在寒冷的冬天穿着薄衣服，也足够活跃，可以保持温暖。

另一个简单的解决办法，就像父母对孩子们说的一样：穿上厚厚的衣服。如果你穿上一件2厘米厚的羊毛衣，我们来重新计算功率损耗。你可以从头开始重新计算，但是注意到厚度增加了10倍会更简单。由于  $F \propto 1/\Delta x$ ，热量和功率都减少了10倍。

所以，穿着羊毛衣时，

$$P \sim 60\text{W}.$$



这种热量损失小于基础代谢率，这表明你不会感到太冷。事实上，穿着厚厚的羊毛衣时，你最容易感到手和脸冷。这些部位暴露在空气中，只有一层薄薄的静止空气保护着。因为小的  $\Delta x$  意味着大的热量流，所以教训是：听父母的话，穿暖和点！

## 9.4 边界层

# 第10章

## 弹簧

一切都是弹簧！本章的主要例子是波动，它说明了弹簧、离散化和特殊情况-一种合适的、统一的结束本书的方式。

### 10.1 波动

海洋覆盖了地球的大部分，波浪漫游于大部分海洋。波浪也会穿过水坑和池塘。是什么使它们移动，以及什么决定了它们的速度？通过应用和扩展近似技术，我们分析波动。为了具体起见，本节主要涉及水波，但结果适用于任何流体。本节的主题是：弹簧无处不在，考虑极限情况。

#### 10.1.1 色散关系

研究波动的最有组织的方法是使用色散关系。色散关系说明了波动可以具有的频率和波长的值。与波长  $\lambda$  不同，色散关系通常连接频率  $\omega$  和波数  $k$ ，波数定义为  $2\pi/\lambda$ 。这种偏好基于数量级推理。波长是波在一个完整周期内行进的距离，该周期为  $2\pi$  弧度的振动。

尽管  $2\pi$  是无量纲的，但它不是理想的无量纲数，理想的无量纲数是单位。在  $1$  弧度的振荡中，波传播了一段距离

$$\lambda \equiv \frac{\lambda}{2\pi}.$$

选择棒符号，意思是‘除以  $2\pi$ ’，类比于  $h$  和  $\hbar$ 。一弧度形式如  $\hbar$  比  $2\pi$  弧度形式更有用。玻尔半径，在一个无量纲常数为单位的形式中，包含  $\hbar$  而不是  $h$ 。大多数波动结果使用  $\lambda$  而不是  $\lambda$  更简单。进一步的改进是使用它的倒数，波数  $k = 1/\lambda$ 。这个选择，具有逆长度的量纲，类似于角频率  $\omega$  的定义，其量纲是逆时间。连接  $\omega$  和  $k$  的关系可能比连接  $\omega$  和  $\lambda$  的关系更简单，尽管任何一个都比连接  $\omega$  和  $\lambda$  的关系更简单。

最简单的色散关系描述了真空中的电磁波。它们的频率和波数由色散关系相关。

$$\omega = ck,$$

它表明波的速度  $\omega/k = c$ ，与频率无关。色散关系包含了大量关于波的信息。例如，它们包含了波峰和波谷的传播速度：相速度。它们包含了波包传播的速度：群速度。它们包含了这些速度如何随频率变化：色散。它们还包含了能量损失的速率：衰减。

### 10.1.2 相速度和群速度

对于一条波，通常的问题是它的传播速度有多快。这个问题有两个答案，相速度和群速度，两者都取决于色散关系。

为了理解如何使用色散关系（本章的大部分内容都是关于如何计算它们），我们讨论了说明这两个速度的最简单的例子。

这些分析从旅行波的一般形式开始：这些分析从旅行波的一般形式开始：

$$f(x, t) = \cos(kx - \omega t),$$

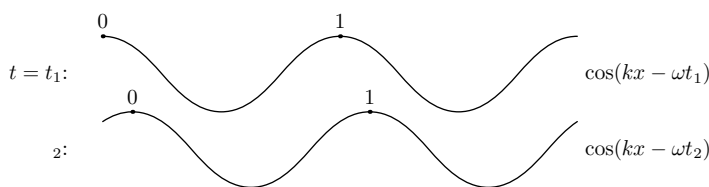
其中  $f$  是振幅。

相速度比群速度更容易理解

，所以，作为分而治之推理和最大懒惰的例子，首先研究它。相位，即  $t = t$

余弦函数的参数，是  $kx - \omega t$ 。当相位为零时，出现波峰。在

顶部的波中，当  $x = \omega t_1/k$  时，出现波峰。在底部的波中，当  $x = \omega t_2/k$  时，出现波峰。差异



$$\frac{\omega}{k}(t_2 - t_1)$$

是波峰在时间  $t_2 - t_1$  内移动的距离。因此，相速度，即波峰的速度，是

$$v_{\text{ph}} = \frac{\text{距离顶峰偏移}}{\text{所花费的时间}} = \frac{\omega}{k}.$$

要检查这个结果，请检查其维度： $\omega$  提供逆时间和  $1/k$  提供长度，所以  $\omega/k$  是速度。

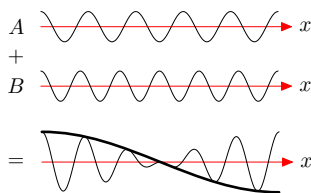
群速度更加棘手。‘群’这个词表明这个概念涉及多个波。因为2是大于1的最简单的整数，所以最简单的例子使用了两个波。这里的色散关系不是关于  $\omega$  和  $k$  的函数。

允许的列表  $(k, \omega)$  对。但这个形式只是一个官方离散近似，足够复杂以说明群速度，但足够简单以避免数学的森林。所以这里有两个几乎相同的波数和频率的波：

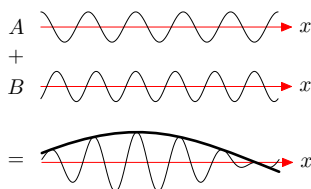
$$f_1 = \cos(kx - \omega t),$$

$$f_2 = \cos((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t),$$

其中  $\Delta k$  和  $\Delta\omega$  是波数和频率的微小变化。每个波都有相速度  $v_{\text{ph}} = \omega/k$ ，只要  $\Delta k$  和  $\Delta\omega$  很小。图中显示了它们的总和。



图的重点是几乎具有相同空间频率的两个余弦函数相加会产生一个包络（粗线）。包络本身看起来像一个余弦函数。等待一段时间后，每个波由于其相位中的  $\omega t$  或  $(\omega + \Delta\omega)t$  项而发生变化。因此，总和及其包络变成了这样：



信封移动，就像任何波的波峰和波谷一样。它是一种波，所以它有一个相位速度，这激发了以下定义：

群速度是信封的相位速度。

通过这个图示定义，你可以计算波  $f_1 + f_2$  的群速度。如图所示，添加两个余弦函数会产生一个缓慢变化的信封乘以一个快速振荡的内部函数。这个三角恒等式给出了详细信息：

$$\cos(A + B) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{B - A}{2}\right)}_{\text{信封}} \times \underbrace{\cos\left(\frac{A + B}{2}\right)}_{\text{内部}}.$$

如果  $A \approx B$ ，那么  $A - B \approx 0$ ，这使得信封变化缓慢。将恒等式应用于和：

$$f_1 + f_2 = \underbrace{\cos(kx - \omega t)}_A + \underbrace{\cos((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t)}_B.$$

然后信封里包含

$$\cos\left(\frac{B - A}{2}\right) = \cos\left(\frac{x\Delta k - t\Delta\omega}{2}\right).$$

这个信封代表了一个具有相位的波

$$\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t.$$

所以它是一个具有波数  $\Delta k/2$  和频率  $\Delta \omega/2$  的波。这个信封的相速度是  $f_1 + f_2$  的群速度：频率

$$v_g = \frac{\Delta \omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}.$$

在  $\Delta k \rightarrow 0$  和  $\Delta \omega \rightarrow 0$  的极限情况下，群速度是

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

它通常与相速度不同。在本章中多次出现的典型色散关系是  $\omega \propto k^n$ 。然后  $v_{ph} = \omega/k = k^{n-1}$  和  $v_g \propto nk^{n-1}$ 。所以它们的比值是

$$\frac{v_g}{v_{ph}} = n. \quad (\text{对于幂律关系})$$

只有当  $n = 1$  时，两个速度才相等。现在我们可以从色散关系中找到波速，然后回到找到色散关系的问题。

### 10.1.3 尺寸分析

色散关系通常是通过解波动方程得到的，而波动方程是一个不愉快的偏微分方程。对于水波，通过线性化流体力学方程并忽略粘性，可以得到一个波动方程。这个过程在数学上是复杂的，特别是在处理边界条件时。或者，你可以通过尺寸分析推导出色散关系，然后用物理论证来完善推导。这种方法通常无法评估无量纲常数，但研究波动的美妙之处在于，与大多数涉及弹簧和振动的问题一样，大多数这些常数都是单位的。

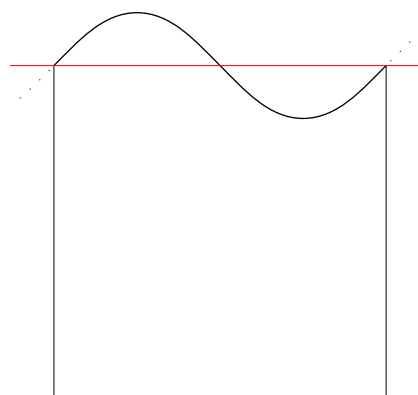
频率和波数如何联系？它们的维度分别为  $T^{-1}$  和  $L^{-1}$ ，不能在没有帮助的情况下形成无量纲组。所以要包括更多的变量。系统的哪些物理性质决定了波的行为？在开放海洋上的波动行为与浴缸中的波动行为不同，可能是因为水深的差异。浴缸或海洋的宽度可能会有影响，但这样问题就变成了二维波动。在第一次分析中，避免这种复杂性，只考虑沿容器宽度垂直移动的波动。然后宽度就不重要了。

要确定其他重要的变量，可以使用波动就像弹簧一样的原理，因为每个物理过程都包含一个弹簧。这个笼统的说法不能严格正确。然而，它作为一个广义的概括是有用的。为了更准确地了解这个假设何时有用，考虑弹簧运动的特点。首先，弹簧有一个平衡位置。如果一个系统有一个未受干扰的静止状态，考虑寻找一个弹簧。例如，对于海洋上的波动，未受干扰的状态是一个

平静的海洋。对于电磁波-弹簧不限于机械系统-静止状态是一个没有辐射的空虚真空。其次，弹簧振动。

在机械系统中，振动取决于惯性将质量带到平衡位置之外。等效地，它取决于动能转化为势能，反之亦然。水波在水面扰动中储存势能，在水的运动中储存动能。电磁波在电场和磁场中储存能量。磁场是由移动或旋转的电荷产生的，因此磁场是动能（运动能量）的储库。电场是由静止电荷产生的，并具有相关的电势，因此电场是势能的储库。通过这些识别，电磁场就像一组弹簧，每个辐射频率对应一个弹簧。这些例子是正面的例子。一个负面的例子-大理石在甘油中缓慢移动-说明弹簧并不总是存在。大理石移动得非常缓慢，以至于玉米糖浆的动能及其惯性微小且无关紧要。这个系统没有动能的储库，因为动能仅仅被耗散，所以它不包含弹簧。

波浪具有必要的水库来起到弹簧的作用。水的表面在其最低能量状态下是平的。偏差，也被称为波浪，受到恢复力的阻碍。扭曲表面就像拉伸橡皮布一样：表面张力抵抗扭曲。扭曲表面还需要提高平均水位，这是重力所抵抗的变化。



表面的平均高度不变，但水的平均深度会改变。在波峰下的较高柱子比波谷下的较低柱子含有更多的水。

因此，在求平均深度时，较高的柱子会稍微有更高的权重。因此，平均深度增加。这个结果与经验一致：制造波浪需要能量。

总恢复力包括重力和表面张力，因此，在变量列表中，包括表面张力 ( $\gamma$ ) 和重力 ( $g$ )。

在波动中，就像在弹簧中一样，恢复力与惯性相抗衡，这里用流体density来表示。恢复力中的重力部分与密度无关：重力对密度较大的物质的更强拉力恰好被它们更大的惯性所平衡。这个精确的抵消是等效原理的重新表述，爱因斯坦以此为基础建立了广义相对论[16,17]。在摆动运动中，由于同样的原因，摆球的质量在最终解中消失了。恢复力中的表面张力部分，然而，当密度改变时并不改变。表面张力本身，液体性质  $\gamma$ ，取决于密度，因为它取决于表面上原子的间距。这种依赖性影响  $\gamma$ 。然而，一旦你知道  $\gamma$ ，你可以计算表面张力力而不需要知道密度。由于  $\rho$  不影响表面张力力但影响惯性，它影响表面张力提供恢复力的波的性质。因此，在列表中包括  $\rho$ 。

为了简化分析，假设波不会损失能量。这个选择将粘度从变量集合中排除。为了进一步简化，排除声速。这个近似意味着忽略声波，只要流速相对于声速较慢即可。

声音。结果比率，

$$M \equiv \frac{\text{流速}}{\text{声速}},$$

变量	维度	什么
$\omega$	$T^{-1}$	频率
$k$	$L^{-1}$	波数
$g$	$LT^{-2}$	重力
$h$	$L$	深度
$\rho$	$M L^{-3}$	密度
$\gamma$	$M L^{-2}$	表面张力

是无量纲的，并且由于其重要性，被赋予了一个名字：马赫数。最后，假设波幅  $\xi$  相对于其波长和容器的深度来说很小。表格显示了变量列表。即使有所有这些限制，这些限制显著简化了分析，结果解释了世界上的许多现象。

这六个变量由三个基本维度构建，产生三个无量纲组。其中一个组很容易：波数  $k$  是一个倒数长度，深度  $h$  是一个长度，所以

$$\Pi_1 \equiv kh.$$

这个组是水的无量纲深度:  $\Pi_1 \ll 1$  表示浅水，  $\Pi_1 \gg 1$  表示深水。第二个无量纲组来自重力。重力，用  $g$  表示，除了长度因素外，与  $\omega^2$  具有相同的量纲。除以波数可以修正这个不足:

$$\Pi_2 = \frac{\omega^2}{gk}.$$

没有表面张力，  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  是唯一的无量纲组，而且两个组中都不包含密度。这个数学结果有物理基础。没有表面张力，波浪仅仅因为重力而传播。等效原理表明，重力独立于密度地影响运动。因此，密度不能出现在任何一个组中。

现在让表面张力重新进入无量纲组的游乐场。它必须属于第三个（也是最后一个）组  $\Pi_3$ 。即使知道  $\gamma$  属于  $\Pi_3$ ，仍然在选择其形式时有很大的自由度。通常的模式是找到组然后解释它，就像我们对  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  所做的那样。另一个选择是从物理解释开始，然后使用解释来构建组。在这里，你可以构建  $\Pi_3$  来衡量表面张力和重力力量的相对重要性。表面张力  $\gamma$  具有力量与长度的量纲，因此产生力量需要乘以一个长度。问题已经有两个长度：波长（通过  $k$  表示）和深度。你应该使用哪一个？波长可能总是影响表面张力力量，因为它决定了表面的曲率。然而，只有当深度与波长相当或小于波长时，深度才会影响表面张力力量，即使是这样，你可以同时使用两者。

将长度转化为力量的近似方法：例如， $F \sim \gamma h/k$ 。但是如果只使用一个分析方法，那么波长是更好的选择。所以， $F \sim \gamma/k$ 。重力力量，也被称为重量，是  $\rho g \times \text{体积}$ 。按照只使用  $k$  来产生长度的先例，重力力量是  $F_g \sim \rho g/k^3$ 。无量纲组是表面张力与重力力量的比率：

$$\Pi_3 \equiv \frac{F_\gamma}{F_g} = \frac{\gamma/k}{\rho g/k^3} = \frac{\gamma k^2}{\rho g}.$$

这个选择通过构建具有有用的物理解释，但是还有其他很多选择。你可以构建一个不使用重力的第三个组：例如， $\Pi_3 \equiv \gamma k^3/\rho \omega^2$ 。

选择这种方式， $\omega$  出现在两个组中： $\Pi_2$  和  $\Pi_3$ 。所以很难解决它。对于  $P_3$  的选择，除了在物理上有用之外，还将  $\omega$  隔离在一个组中：这是一个有用的选择，因为  $\omega$  是目标。

现在使用这些组来解决频率  $\omega$  作为波数  $k$  的函数。你也可以解决  $k$  作为  $\omega$  的函数，但是相位和群速度的公式更简单，当  $\omega$  作为  $k$  的函数时。只有组  $\Pi_2$  包含  $\omega$ ，所以一般的维度较小解是

$$\Pi_2 = f(\Pi_1, \Pi_3),$$

或者

$$\frac{\omega^2}{gk} = f\left(kh, \frac{\gamma k^2}{\rho g}\right).$$

然后

$$\omega^2 = gk \cdot f\left(kh, \frac{\gamma k^2}{\rho g}\right).$$

这个关系适用于浅水或深水中的波浪（小或大  $\Pi_1$ ）；适用于由重力或表面张力传播的波浪（小或大  $\Pi_3$ ）；以及介于两者之间的波浪。



图表显示了两个群体

$\Pi_1$  和  $\Pi_3$  如何划分波浪世界

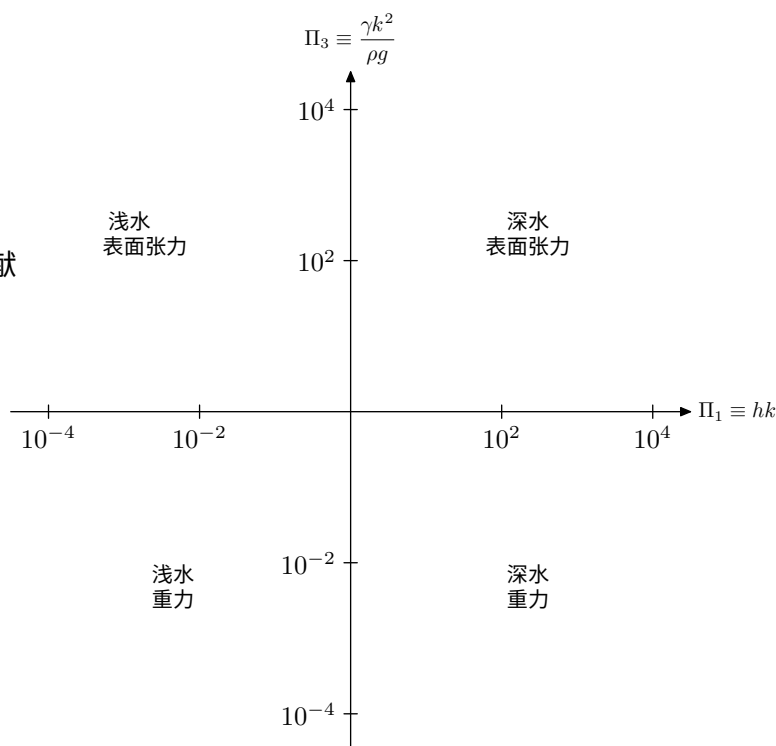
分为四个区域。我们逐个研究每个区域，并将分析结果结合起来，以了解

整个波浪世界。 $\Pi_1$ 群体测量水的深度

：波浪是在水坑还是在海洋中移动？

$\Pi_3$ 群体测量表面张力和重力的相对贡献

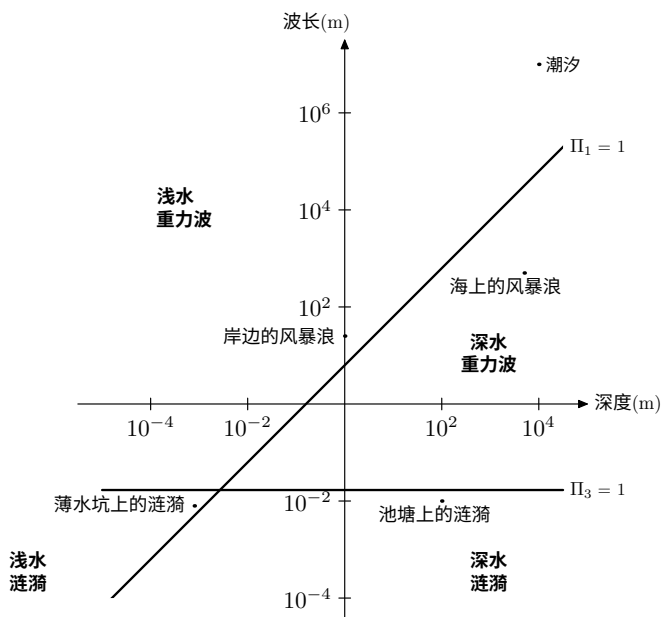
：波浪是涟漪还是重力波？



将深水和浅水（左侧和右侧）划分为两个区域是根据  $\Pi_1 = kh$  的无量纲深度解释得出的。将表面张力和重力主导的波浪（上半部分和下半部分）划分是更加微妙的，但是是  $\Pi_3$  的结果。

构建。作为检查，看一下  $\Pi_3$ 。大  $g$  或小  $k$  导致相同的结果：小  $\Pi_3$ 。因此，波长较长（较小的  $k$ ）的物理结果类似于重力较强的情况。因此，波长较长的波是重力波。世界的大部分（上半部分）因此被标记为表面张力。

下一个图示了波长和深度（而不是无量纲组）如何划分世界，并绘制了不同类型波浪的示例。



粗的分界线基于无量纲组  $\Pi_1 = kh$  和  $\Pi_3 = \gamma k^2 / \rho g$ .

每个区域包含一到两个相应类型的波。当  $g = 1000 \text{ cm s}^{-1}$

和  $\rho \sim 1 \text{ g cm}^{-3}$  时, 涟漪和重力波之间的边界波长略大于  $\lambda \sim 1 \text{ cm}$  (水平的,  $\Pi_3 = 1$  的分界线)。

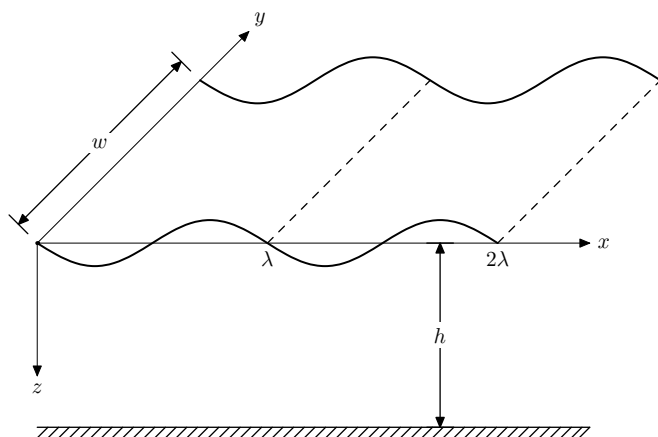
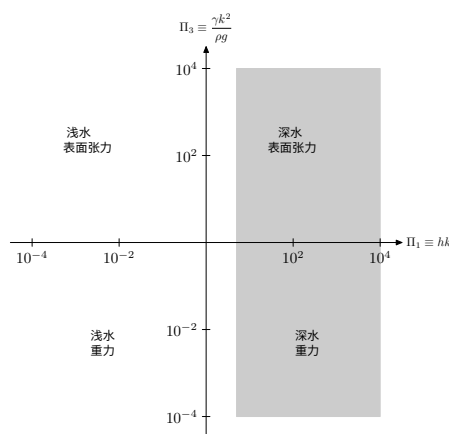
神奇的函数  $f$  对我们来说仍然是未知的。为了确定它的形式并理解其后果, 研究在极限情况下的  $f$ 。像拼图解谜一样, 首先研究世界的角落, 那里的物理现象最简单。然后将角落的解连接起来, 得到沿边缘有效的解, 那里的物理现象几乎和角落一样简单。最后, 向内爬行, 组装复杂而完整的解决方案。这个扩展示例说明了分而治之的推理方法, 并使用极限情况来选择将问题分解为的部分。

### 10.1.4 深水

首先研究深水, 在地图上阴影部分, 其中  $kh \gg 1$ 。

深水被定义为水深足够深, 波浪无法感受到海底。

波浪的感受器能延伸多深? 波浪的感受器延伸多深? 波浪中唯一的长度尺度是波长,  $\lambda = 2\pi/k$ 。因此, 感受器延伸到深度  $d \sim 1/k$  (忽略常数, 如  $2\pi$ )。这个有教养的猜测在拉普拉斯方程中有合理的解释, 该方程是波动方程的空间部分。假设波浪在  $x$  方向上是周期性的,  $z$  表示离水面的深度, 如图所示:



然后, 拉普拉斯方程变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

其中  $\phi$  是速度势。由于宽度 ( $y$  方向) 没有变化,  $\partial^2 \phi / \partial y^2$  项消失。

重要的不是  $\phi$  的具体含义。你可以在一本优秀的流体力学教材《物理学家的流体力学》[18] 中了解更多; 《Lamb 的流体力学》[19] 是一本经典之作。

但是很困难。对于这个论证，重要的是  $\phi$  测量了波的效应，并且  $\phi$  满足拉普拉斯方程。波在  $x$  方向上是周期性的，具有类似于  $\sin kx$  的形式。

$$\phi \sim Z(z)\sin kx.$$

函数  $Z(z)$  测量了波随深度的衰减程度。

在  $x$  处的二阶导数带出两个因子  $k$ ，以及一个负号：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 \phi.$$

为了使这个  $\phi$  满足拉普拉斯方程， $z$ -导数项必须贡献  $+k^2 \phi$ 。

因此，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = k^2 \phi,$$

物理上可能的解决方案 - 不会在海底爆炸性增长的解决方案 - 是  $Z(z) \sim e^{-kz}$ 。因此，相对于表面的波浪效应，海底的波浪效应是  $\sim e^{-kh}$ 。当  $kh \gg 1$  时，底部就像在月球上一样没有影响。无量纲因子  $kh$  - 它必须是无量纲的，以便单独出现在指数中 - 将水深与感应深度  $d \sim 1/k$  进行比较：

$$\frac{\text{水深}}{\text{探头深度}} \sim \frac{h}{1/k} = hk,$$

这是无量纲组  $\Pi_1$ 。

在深水中，底部被波浪遮挡，水深  $h$  does not 影响它们的传播，所以  $h$  disappears from the list of relevant variables. 当  $h$  消失时， $\Pi_1 = kh$  也会消失。但有一个例外。如果  $\Pi_1$  是唯一包含  $k$  的组，那么你不能轻率地丢弃  $\Pi_1$ ，只因为你不再关心  $h$ 。如果你这样做，你将丢弃  $k$  和  $h$ ，并且无法找到色散关系（连接

$\omega$  和  $k$ ）。幸运的是， $k$  出现在  $\Pi_3 = \gamma k^2 / \rho g$  以及  $\Pi_1$  中。因此，在深水中，可以安全地丢弃  $\Pi_1$ 。这种对于  $h$  无关性的论证是一个物理论证。在无量纲组和函数的语言中，它有一个数学等价物。因为  $h$  具有尺寸，所以“ $h$  很大”这个说法是没有意义的。问题是，“相对于什么长度很大？”以  $1/k$  作为比较的标准，无意义的“ $h$  很大”说法变成了“ $kh$  很大”。乘积  $kh$  是无量纲组  $\Pi_1$ 。

从数学上讲，你假设函数  $f(kh, \gamma k^2 / \rho g)$  在  $kh \rightarrow \infty$  时有极限。

如果没有  $\Pi_1$ ，一般的色散关系简化为

$$\omega^2 = gk f_{\text{深}} \left( \frac{\gamma k^2}{\rho g} \right).$$

这个关系描述了波浪世界的深水边缘。这个边缘有两个角，根据重力或表面张力提供的恢复力来标记。尽管

深波的形式  $f_{\text{深}}$  是未知的，但它比原始的  $f$  简单，是一个关于两个变量的函数。为了确定  $f_{\text{深}}$  的形式，继续分割和征服的过程：将深水波分为两个极限情况，重力波和涟漪。

### 10.1.5 深水中的重力波

在这两个极端中，重力波更为常见。

它们包括船只产生的尾迹和大多数波浪产生的波浪。

由风生成。专门研究波浪世界的角落水深且重力强。由于重力远大于表面张力，无量纲组  $\Pi_3 = \gamma k^2 / \rho g$  的极限为0。由于  $\Pi_3$  是几个因素的乘积，可以通过几种方式达到极限：

1. 通过移动到木星来增加  $g$ （在下面）。
2. 通过在水上倒洒肥皂来减少  $\gamma$ （在上面）。
3. 通过研究具有巨大波长的波浪来减少  $k$ （在上面）。

在这个极限下，一般的深水色散关系简化为

$$\omega^2 = f_{\text{deep}}(0) g k = C_1 g k,$$

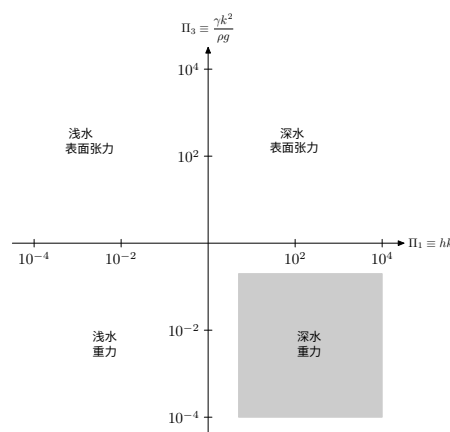
其中  $f_{\text{deep}}(0)$  是一个尚未知的常数， $C_1$ 。使用  $f_{\text{deep}}(x)$

假设  $f_{\text{deep}}(x)$

在  $x \rightarrow 0$  时有极限。不久之后将会讨论板块论证，

它将证明  $f_{\text{deep}}(x)$

确实有极限。为了取得进展，



假设它有极限。这个常数对于无量纲分析的懒方法来说仍然是未知的，因为这些方法牺牲了无量纲常数的计算来获得对物理的理解。通常假设这样的常数为1。在这种情况下，我们很幸运：一个诚实的计算得到  $C_1 = 1$  和

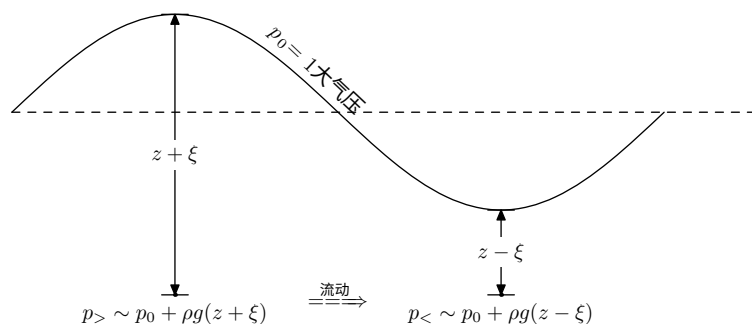
$$\omega^2 = 1 \times g k,$$

其中红色的  $1 \times$  表示它是从诚实的物理学中获得的。

这种来自尺寸分析的结果就像从帽子里跳出的兔子一样。离散关系是正确的，但你的直觉可能对这个神奇的推导感到不满，并问道，“但是为什么结果是真的？”一个解释波动驱动力或能量的物理模型解释了离散关系的起源。第一步是理解机制：重力是如何使水位上升和下降的？从Watergate调查人员那里得到启示，<sup>1</sup>我们跟随水流。顶部的水不会流入槽内。

相反，顶部的水，由于高度较高，在下面产生的压力高于槽内的水，如下图所示：

<sup>1</sup> 当记者伍德沃德和伯恩斯坦[20]调查尼克松政府的犯罪掩盖行为时，他们得到了神秘的“深喉咙”的帮助，他宝贵的建议是“跟踪资金。”

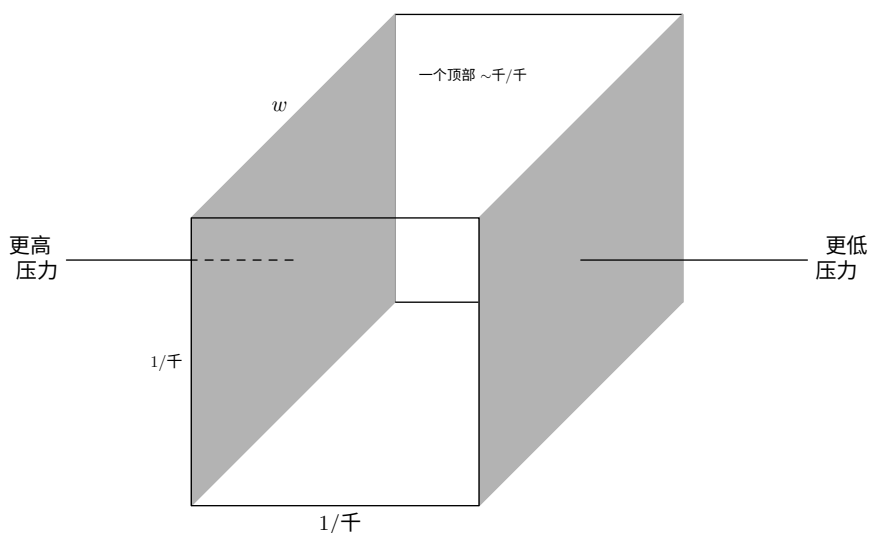


更高的压力迫使水流向波谷，使得那里的水位上升。就像一个摆动滑过平衡点一样，表面超过平衡水平产生一个新的波峰，循环重复。

下一步是通过估计尺寸、力量、速度和能量来量化模型。

在第9.1节中，我们通过将混乱的死亡率曲线替换为一个更易处理的形状：一个矩形进行了分析。离散化的方法在那里起作用，所以再试一次。“一个方法我用两次。”

—乔治·波利亚。由于压力梯度，表面下的水流动很快。更远处，它移动得更慢。深处根本不动。用一个阶跃函数替换这个平滑的衰减：假设水下到一定深度的水像一个块一样移动，而更深的水保持静止：



这个水块应该延伸多深？根据拉普拉斯方程的论证，压力变化随深度呈指数衰减，具有长度尺度 $1/\text{千}$ 。因此假设这个水块具有类似的长度尺度，它的深度为 $1/\text{千}$ 。你有什么选择？在一个无限深的海洋上，唯一的长度尺度是 $1/\text{千}$ 。这个水块应该有多长？它的长度应该大致等于波峰到波谷的距离，因为表面高度在那个距离上变化显著。这个距离是 $1/\text{千}$ 。实际上，它是 $\pi/\text{千}$ （一半的

一个周期），但忽略常数。所有常数在最后组合成一个巨大的常数，无法通过量纲分析确定，所以现在将其丢弃！板的宽度 $w$ 是任意的，并在任何分析的最后消除。

因此，水板的深度为 $1/k$ ，长度为 $1/k$ ，宽度为 $w$ 。通过估计压力梯度来估计作用在其上的力。在板的宽度（ $y$ 方向）上，水面是水平的，因此压力沿宽度是恒定的。进入深处（ $z$ 方向），由于重力-来自静水压力学的 $\rho gh$ 项-压力变化，但这种变化仅足以防止板下沉。我们只关心沿着波浪移动的方向上的压力差异。这个压力差异取决于波峰的高度 $\xi$ ，并且是 $\Delta p \sim \rho g \xi$ 。这个压力差异作用在一个面积为 $A \sim w/k$ 的横截面上，产生一个力

$$F \sim \underbrace{w/k}_{\text{面积}} \times \underbrace{\rho g \xi}_{\Delta p} = \rho g w \xi / k.$$

这块板子有质量

$$m = \rho \times \underbrace{w/k^2}_{\text{体积}},$$

所以力产生加速度

$$\text{一块板子} \sim \underbrace{\frac{\rho g w \xi}{k}}_{\text{力}} \bigg/ \underbrace{\frac{\rho w}{k^2}}_{\text{质量}} = g \xi k.$$

因子 $g$ 表示重力产生加速度。完全的重力加速度被无量纲因子 $\xi k$ 所减小，大致上是波浪的斜率。

板子的加速度决定了表面的加速度。如果板子移动了距离 $x$ ，它扫过了一个体积为水 $V \sim x A$ 的区域。这个水在槽下移动，将表面上推动了一个距离 $V/A_{\text{top}}$ 。因为 $A_{\text{top}} \sim A$ （两者都是 $\sim w/k$ ），所以表面移动的距离 $x$ 和板子移动的距离相同。因此，板子的加速度 $a_{\text{slab}}$ 等于表面的加速度 $a_{\text{of}}$ 。

$$a \sim a_{\text{slab}} \sim g \xi k.$$

在浅水中，板块和表面加速度的等价性在深度 $h$ 处被截断板块之前不成立，这个故事在第10.1.12节中讲述。板块论证旨在通过尺度分析来证明深水色散关系。该关系包含频率，

而加速度关系则不包含。因此，对其进行调整，直到 $\omega$ 出现。加速度关系包含 $a$ 和 $\xi$ ，而色散关系则不包含。加速度的另一种表达方式可能使加速度关系更像色散关系。幸运的是，表达式中将包含 $\omega^2$ ，从而产生期望的 $\omega^2$ ；作为奖励，它将包含 $\xi$ 以抵消加速度关系中的 $\xi$ 。

在简谐运动（弹簧！）中，加速度是 $a \sim \omega^2 \xi$ ，其中 $\xi$ 是振幅。在波动中，行为类似弹簧， $a$ 由相同的表达式给出。这是为什么。在

时间  $\tau \sim 1/\omega$ ，表面移动距离  $d \sim \xi$ ，所以  $a/\omega^2 \sim \xi$ ， $a \sim \omega^2 \xi$ 。通过这个替换，加速度关系变为

$$\underbrace{\omega^2 \xi}_a \sim g \xi k,$$

或者

$$\omega^2 = 1 \times gk,$$

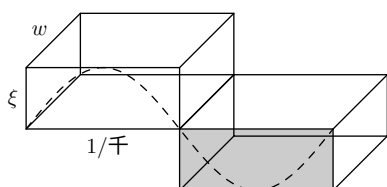
这是所期望的色散关系，具有正确的无量纲常数。

精确计算证实了通常的希望，即缺失的无量纲常数接近于单位，或者是单位。这一幸运表明选择如何测量长度的程序是合理的。推导依赖于两个选择：

1. 通过一个大小等于指数衰减长度尺度的阶跃函数来替换速度势的指数下降变化。
2. 将板的长度取为  $1/k$ ，而不是  $\pi/k$ 。这个选择只使用一个弧度作为特征长度，而不是使用半个周期或  $\pi$  弧度。由于1是一个比  $\pi$  更自然的无量纲数，选择1弧度而不是  $\pi$  或

$2\pi$  弧度通常会改善近似。

在数量级计算中，这两种近似通常是准确的。很少情况下，你会被  $(2\pi)^6$  的因子所困扰，并希望你使用了一个完整的周期而不仅仅是1弧度。



导出出现的色散关系分析了使用力对板的运动。它的另一个推导使用能量通过平衡动能和势能。制造一个波浪表面需要能量，如图所示。波峰在势能的零水平面上上升一个特征高度  $\xi$ 。向上移动的水体积为  $\xi w/k$ 。因此势能为

$$PE_{\text{重力}} \sim \underbrace{\rho \xi w/k}_{*} \times g \xi \sim \rho g w \xi^2 / k.$$

动能包含在板块的横向运动和被板块推动的水的向上运动中。板块和表面以相同的速度移动；它们也具有相同的加速度。因此，横向和向上运动贡献了类似的能量。如果忽略常数如2，您无需计算两种运动贡献的能量，可以进行更简单的计算，即横向运动。

表面在时间 $1/\omega$ 内移动距离 $\xi$ ，因此其速度为 $\omega\xi$ 。除了常数外，板块的速度与表面相同，因此板块的动能是

$$KE_{\text{深}} \sim \underbrace{\rho w/k^2}_{m_{\text{板}}} \times \underbrace{\omega^2 \xi^2}_{v^2} \sim \rho \omega^2 \xi^2 w/k^2.$$

这个能量平衡了潜在能量

$$\underbrace{\rho \omega^2 \xi^2 w/k^2}_{KE} \sim \underbrace{\rho g w \xi^2/k}_{PE}.$$

取消因子 $\rho w \xi^2$  (红色)对两种能量都是共同的，剩下

$$\omega^2 \sim gk.$$

能量方法与力方法一致，因为能量可以通过积分从力中得到。能量推导给出了无量纲组 $\Pi_2$ 的解释：

$$\Pi_2 \sim \frac{\text{板的动能}}{\text{重力势能}} \sim \frac{\omega^2}{gk}.$$

重力波色散关系 $\omega^2 = gk$ 等价于 $\Pi_2 \sim 1$ ，或者等价于动能和重力势能在波动中是可比较的。这个粗略的不等式不足为奇，因为波动就像弹簧一样。在弹簧运动中，动能和势能有相等的平均值，这是虚拟定理的结果。

色散关系通过尺寸分析、能量和

力推导出来。使用多种方法不仅增加了我们对结果的信心，也增加了对方法的信心。“我说了三次：我告诉你三次是真的。”

-刘易斯·卡罗尔，《猎猎者》。

我们对尺寸分析方法和波的板块模型的方法获得了信心。

如果我们研究非线性波，例如波高不再是无限小的情况，我们可以使用相同的技术以更大的信心使用板块模型。

对于色散关系的合理信心，现在是研究其后果的时候了：相位速度和群速度。波峰以相位速度移动： $v_{\text{ph}} = \omega/k$ 。对于深水重力波，这个速度变为

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

，或者使用色散关系将 $k$ 替换为 $\omega$ ， $g$

$$v_{\text{ph}} = \frac{g}{\omega}.$$

让我们检查楼上和楼下。谁知道 $\omega$ 属于哪里，但 $g$ 驱动波浪所以它应该并且确实存在楼上。



在一个无限的、单频率的波列中，波峰和波谷以相位速度移动。  
然而，一个有限的波列包含了多种频率，不同的频率  
以不同的速度移动，如下所示

$$v_{\text{ph}} = \frac{g}{\omega}.$$

深水是色散的。色散使得有限的波列以群速度传播，群速度由  $v_g = \partial\omega/\partial k$  给出，如 **Section 10.1.2** 中所解释。群速度是

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_{\text{ph}}.$$

因此，群速度是相位速度的一半，正如功率-法则色散关系所预测的那样。在波列中，波峰以相位速度移动，是群速度的两倍，收缩和扩展以适应较慢移动的包络。

一个日常的结果是船的尾迹跟随船。以速度移动的船  
产生速度为  $v_{\text{ph}} = v$  的重力波。这些波相结合产生向前传播的波列，其群速度只有  $v_{\text{ph}}/2 = v/2$ 。从船的角度来看，这些重力波是向后传播的。实际上，它们形成一个楔形，楔形的开口角取决于指数中的一半。

### 10.1.6 冲浪

让我们将色散关系应用于冲浪。根据《洛杉矶时报》报道的一个冬季风暴，大约每18秒就有一次浪涌到达洛杉矶海滩。生成这些波的风有多快？只要波峰移动速度比风速慢，风就会推动波峰。在

足够长的推动，浪峰几乎以风速移动。因此，波的相位速度是风速的一个准确近似。

相位速度是  $g/\omega$ 。用波周期  $T$  表示，这个速度是  $v_{\text{ph}} = gT/2\pi$ ，所以

$$v_{\text{wind}} \sim v_{\text{ph}} \sim \frac{\overbrace{10 \text{ m s}^{-2}}^g \times \overbrace{18 \text{ s}}^T}{2 \times 3} \sim 30 \text{ m s}^{-1}$$

以美国人更熟悉的单位来衡量，这个风速是60英里/小时，相当于强烈的风暴：在波福特风力等级中约为10（“全风暴”）。波长由以下公式给出

$$\lambda = v_{\text{ph}} T \sim 30 \text{ m s}^{-1} \times 18 \text{ s} \sim 500 \text{ m}.$$

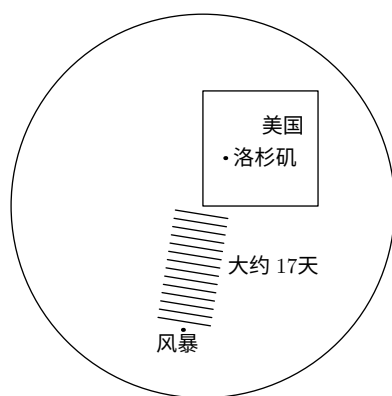
在开放海洋上，浪峰之间相隔半公里。靠近海岸时，它们会聚在一起，因为它们感受到了底部；这种聚集是浅水色散关系的结果，是第**10.1.13**节的主题。

在同一场风暴中，海浪在第二天以17秒的间隔到达：周期略有减少。在进行方程计算之前，首先要检查这种周期减少是否合理。这种预防措施是一个合理性检查。如果理论对于物理效应的判断错误

就像一个基本的符号一样重要-周期是应该减少还是增加-那么它忽视了重要的物理学。风暴产生不同波长和周期的波浪，不同波长在从远洋到洛杉矶的旅程中进行了排序。群速度和相速度与 $1/\omega$ 成正比，与周期成正比。因此，周期较长的波浪移动更快，18秒的波浪应该在17秒的波浪之前到达。它们确实到达了！间隔的减少使我们能够计算到风暴的距离。在它们漫长的旅程中，18秒的波浪比17秒的波浪提前了1天。它们的群速度比例为

$$\frac{\text{速度 (18秒波浪)}}{\text{速度 (17秒波浪)}} = \frac{18}{17} = 1 + \frac{1}{17}.$$

所以比赛大约持续了大约 17天大约  $1.5 \cdot 10^6$ 秒。波浪列车的移动速度为群速度， $v_g = v_{ph}/2$ 大约15 米/秒 $^{-1}$ ，所以风暴距离大约为  $d$ 大约  $tv_g$ 大约  $2 \cdot 10^4$ 千米，或者大约绕地球一半的距离，这是一个令人惊讶且无耗散的旅程。



### 10.1.7 快艇

我们对色散关系的下一个应用是快艇：一艘船能有多快行驶？我们在分析中排除了水上飞行艇（尽管有些快艇可以水上飞行）。较长的船通常比较短的船移动得更快，所以船的长度， $l$ ，可能决定了最高速度。水的密度可能会有影响。

然而，速度 $v$ 、密度 $\rho$ 和长度 $l$ 不能构成一个无量纲组。所以寻找另一个变量。粘度是无关紧要的，因为船行驶的雷诺数非常大。

即使是长度为5米的小船，以2米/秒的速度缓慢行驶

$$Re \sim \frac{500\text{厘米} \times 200\text{厘米/秒}}{10^{-3}\text{的负}^3\text{次方厘米的平方秒的负}^1\text{次方}} \sim 10^7.$$

在如此巨大的雷诺数下，流动是湍流的，并且几乎与粘度无关（第8.3.7节）。表面张力也是无关紧要的，因为船比波长（大约1厘米）要长得多。寻找新的变量并没有取得成功。也许重力是相关的。速度 $v$ 、密度 $\rho$ 、重力加速度 $g$ 和长度 $l$ 这四个变量，由三个维度构成，产生一个无量纲组： $v$ 的平方除以 $gl$ ，也称为弗洛德数：

$$Fr \equiv \frac{v^2}{gl}.$$

临界弗劳德数，决定了最大船速，是一个无量纲常数。通常情况下，我们假设该常数为单位。那么最大船速

为：

$$v \sim \sqrt{gl}.$$

一只兔子从我们的帽子里跳了出来。什么物理机制能够证明这个量纲-分析结果？跟随波浪，船在水中行驶。行驶的船产生波浪（尾迹），并且它在其中一条波浪上行驶。以弓形波为例：它是一个重力波，其速度  $v_{\text{ph}} \sim v_{\text{boat}}$  因为  $v^2 = \omega^2/k^2$ ，色散关系告诉我们

$$v_{\text{boat}}^2 \sim \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} = g\lambda,$$

所以波浪的波长大约为  $v^2/g$ 。另一个长度  
在这个问题中，船的长度是关键；所以弗劳德数有这样的解释：

$$\text{Fr} = \frac{v_{\text{船}}^2/g}{l} \sim \frac{\text{弯曲波的波长}}{\text{船的长度}}.$$

为什么  $\text{Fr} \sim 1$  是关键数值，在寻找最大船速时的假设？

当一个无量纲数接近于单位时，有趣且常常困难的物理现象发生。在这种情况下，物理现象如下。波高在距离  $\lambda^-$  的范围内发生显著变化；如果船的长度  $l$  与  $\lambda^-$  相当，那么船就会在自己的波浪上行驶并向上倾斜。

向上倾斜时，它对水体呈现出很大的横截面积，阻力变得巨大。

[双体船和水翼船在水面上滑行，所以这种阻力不会限制它们的速度。水翼船比渡轮更快地穿越英吉利海峡，尽管水翼船要短得多。] 所以最高速度由以下公式给出：

$$v_{\text{船}} \sim \sqrt{gl}.$$

对于一艘小型摩托艇，长度  $l \sim 5$  米，这个速度大约是  $7 \text{ 米/秒}^{-1}$ ，或者  $15 \text{ 英里/小时}$ 。船（例如警察船）的速度比名义最高速度要快，但是需要大量的动力来抵抗阻力，这就是为什么警察船有巨大的引擎。

弗洛德数在意想不到的地方起作用。它决定了动物的步态从行走变为小跑的速度，或者对于不小跑的动物来说，变为奔跑的速度。在第10.1.7节中，它决定了最大航速。弗洛德数是潜在能量与动能的比值，通过计算弗洛德数可以得到：

$$\text{Fr} = \frac{v^2}{gl} = \frac{\text{动能}}{\text{潜在能量}}.$$

在这个例子中，按照红色的方法进行计算，即乘以单位（unity）。在这个例子中，长度  $l$  是水平长度，所以  $gl$  不是重力能量，但它具有类似的结构，并且在其他例子中通常有一个简单的解释，即重力能量。

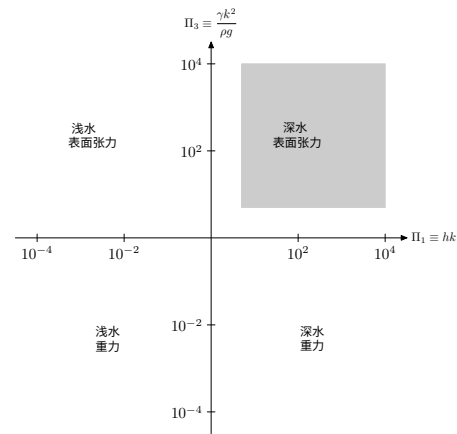
### 10.1.8 步行

在步行速度的弗洛德数中， $l$ 是腿长，而 $gl$ 是势能。对于腿长为 $l \sim 1$ 米的人来说，条件 $Fr \sim 1$ 意味着 $v \sim 3$ 米/秒<sup>-1</sup>或6英里/小时。这个速度是竞走选手的大致估计最高速度。男子竞走的世界纪录曾经由墨西哥的贝尔纳多·塞古拉保持。他在1小时17分钟25.6秒内走完20公里，速度为4.31米/秒<sup>-1</sup>。

这个例子结束了对深水重力波的研究，这是波浪世界的一个角落。

### 10.1.9 深水波纹

对于小波长（大 $k$ ），表面张力而不是重力提供恢复力。这个选择将我们带到图中的阴影角落。如果表面张力而不是重力提供恢复力，那么 $g$ 从最终的色散关系中消失。如何摆脱 $g$ 并找到新的色散关系？你可以按照重力波的相同模式进行（第10.1.5节）。在那种情况下，表面张力 $\gamma$ 是无关紧要的，所以我们舍弃了群体 $\Pi_3 \equiv \gamma k^2 / \rho g$ 。在这里，如果 $g$ 无关紧要，你可以尝试相同的技巧： $\Pi_3$ 包含 $g$ ，所以舍弃它。但这种论证中存在着杀婴行为，因为它也排除了决定恢复力的物理效应，即表面张力。为了重新



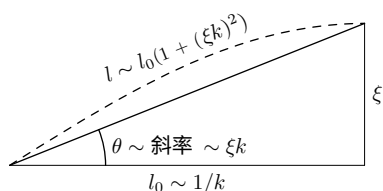
把孩子从洗澡水中取出来，你不能直接扔掉 $\gamma k^2 / \rho g$ 。相反，你必须选择无量纲函数 $f_{\text{deep}}$ 的形式，使得只有重力从色散关系中消失。

深水色散关系前面有一个 $g$ 的幂。函数 $f_{\text{deep}}$ 的参数中也有一个 $g$ 的幂，在分母中。如果 $f_{\text{deep}}$ 的形式为 $f_{\text{deep}}(x) \sim x$ ，那么 $g$ 会被消除。选择这种形式后，色散关系为

$$\omega^2 = 1 \times \frac{\gamma k^3}{\rho}.$$

再次，精确计算得到的无量纲常数（用红色表示）为1，这也是我们本来会假设的。让我们重新使用板块论证来推导这个关系。

在板块图像中，用表面张力能量代替重力，并再次平衡势能和动能。水的表面就像一张橡皮膜。波浪扰动了表面并拉伸了薄膜。这种拉伸会产生面积 $\Delta A$ ，因此需要能量 $\gamma \Delta A$ 。因此，为了估计能量，需要估计振幅为 $\xi$ 和波数为 $k$ 的波浪所创建的额外面积。额外面积取决于正弦波相对于直线的额外长度。正弦波中的典型斜率 $\xi \sin kx$ 为 $\xi k$ 。你可以将曲线近似为具有斜率 $\xi k$ 的直线，而不是进行积分来计算弧长：



相对于水平线，倾斜线的长度增加了  $1 + (\xi k)^2$  倍。

与之前一样，想象一小段波，其特征长度为  $1/k$  在  $x$  方向上，宽度为  $w$  在  $y$  方向上。额外的面积是

$$\Delta A \sim \underbrace{w/k}_{\text{水平面积的分数增加}} \times \underbrace{(\xi k)^2}_{\text{}} \sim w \xi^2 k.$$

这个额外表面中储存的势能是

$$\text{PE}_{\text{ripple}} \sim \gamma \Delta A \sim \gamma w \xi^2 k.$$

板块中的动能与重力波相同，即：

$$\text{KE} \sim \rho \omega^2 \xi^2 w / k^2.$$

平衡能量

$$\underbrace{\rho \omega^2 \xi^2 w / k^2}_{\text{KE}} \sim \underbrace{\gamma w \xi^2 k}_{\text{PE}},$$

得到

$$\omega^2 \sim \gamma k^3 / \rho.$$

这个色散关系与尺寸分析的结果一致。对于深水重力波，我们使用能量和力的论证重新推导了色散关系。对于涟漪，我们推导了能量论证，欢迎你推导相应的力论证。

能量计算完成了三个无量纲组的解释。

其中两个已经完成： $\Pi_1$  是无量纲深度， $\Pi_2$  是动能与重力势能的比值。我们构建了  $\Pi_3$  作为比较表面张力和重力效应的组。使用重力波和涟漪的势能，比较更加精确：

$$\begin{aligned} \Pi^3 &\sim \frac{\text{涟漪中的势能}}{\text{重力波中的势能}} \\ &\sim \frac{\gamma w \xi^2 k}{\rho g w \xi^2 / k} \\ &\sim \frac{\gamma k^2}{\rho g}. \end{aligned}$$

或者， $\Pi_3$ 将  $\gamma k^2/\rho$  与  $g$  进行比较：

$$\Pi_3 \equiv \frac{\gamma k^2/\rho}{g}.$$

这种形式的 $\Pi_3$ 可能看起来像是对 $\gamma k^2/\rho g$ 的微小修订。然而，它暗示了对表面张力的解释：表面张力的作用类似于一个有效的重力场，其强度为

$$g_{\text{表面张力}} = \gamma k^2/\rho,$$

在气球中，橡胶的表面张力意味着内部的压力比外部高。同样，在波浪中，水的表皮意味着波峰下方有更高的压力，而波谷下方有更低的压力，就像一个充气球一样。这种压力差正好是一个具有强度为 $g_{\text{表面张力}}$ 的重力场所产生的。我们曾经用这种有效重力的技巧来解释下落的大理石的浮力（第8.3.4节），现在它被提升为一种方法（使用两次的技巧）。

所以用这个有效的  $g$  替换重力波势能中的  $g$ ，得到波纹势能：

$$\underbrace{\rho g w \xi^2 / k}_{PE(\text{重力波})} \xrightarrow{g \rightarrow \gamma k^2 / \rho} \underbrace{\gamma w \xi^2 k}_{PE(\text{波纹})}.$$

在箭头上方进行上述替换后，左边变成了右边。在重力波色散关系中进行相同的替换，得到波纹色散关系：

$$\omega^2 = gk \xrightarrow{g \rightarrow \gamma k^2 / \rho} \omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\rho}.$$

将表面张力解释为有效重力在我们结合重力波和波纹的解时非常有用，在第10.1.11节和第10.1.16节。表面张力和重力是对称的：我们可以反过来分析并将重力解释为有效表面张力。然而，重力是更为熟悉的力量，所以我们使用有效重力而不是有效表面张力。

通过色散关系，你可以获得相位和群速度。相位速度是

$$v_{\text{ph}} \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}},$$

群速度是

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} v_{\text{ph}}.$$

$3/2$ 的因素是色散关系的形式导致的： $\omega \propto k^{3/2}$ ；对于重力波， $\omega \propto k^{1/2}$ ，相应的因素是  $1/2$ 。与深水波不同，

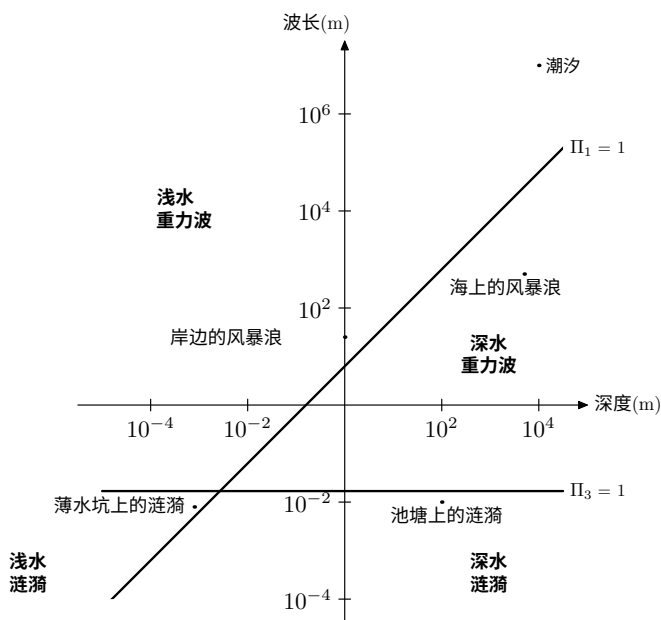
涟漪的波列移动速度比相位速度更快。所以，涟漪在船的前面，而重力波则落后。

### 10.1.10 典型的涟漪

让我们计算典型涟漪的速度，比如把石子扔进池塘中产生的涟漪。从观察来看，这些涟漪的波长  $\lambda \sim 1\text{cm}$ ，因此波数  $k = 2\pi/\lambda \sim 600\text{m}^{-1}$ 。水的表面张力（??）为  $\gamma \sim 0.07\text{Jm}^{-2}$ 。因此相位速度是

$$v_{\text{ph}} = \left( \frac{\overbrace{0.07\text{Jm}^{-2}}^{\gamma} \times \overbrace{600\text{m}^{-1}}^k}{\underbrace{10^3\text{千克米}^{-3}}_{\rho}} \right)^{1/2} \sim 21\text{cms}^{-1}.$$

根据相位和群速度之间的关系，群速度比相位速度大50%： $v_g \sim 30\text{cms}^{-1}$ 。这个波长为1厘米的波纹大致上是仍然被认为是涟漪的最长波长，如前面的图中所示，这里重复一下：



第三个无量纲群，区分了涟漪和重力波，其值为

$$\Pi_3 \equiv \frac{\gamma k^2}{\rho g} \sim \frac{\overbrace{0.07\text{Jm}^{-2}}^{\gamma} \times \overbrace{3.6 \cdot 10^5\text{m}^{-2}}^{k^2}}{\underbrace{10^3\text{千克米}^{-3}}_{\rho} \times \underbrace{10\text{米秒}^{-2}}_g} \sim 2.6.$$

稍微小一点的  $k$  值， $\Pi_3$  的值将滑入灰色区域  $\Pi_3 \approx 1$ 。如果  $k$  再小一点，这些波将成为重力波。其他波纹，具有较大的  $k$  值，具有较短的

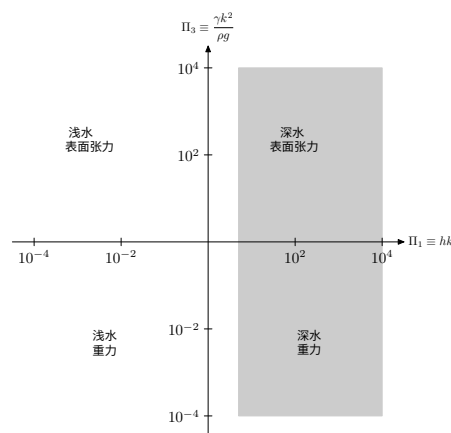
波长，因此移动速度更快：21厘米<sup>-1</sup>大致上是波纹的最小相速度。这个最小速度解释了为什么当我们在池塘里扔一块小石头时，我们主要看到的是  $\lambda \sim 1$  厘米的波纹。小石头激发了各种波长的波纹；较短的波长传播得更快，而1厘米的波纹则滞后，因此我们清楚地看到了滞后的波纹，没有其他波纹的混合。

### 10.1.11 在深水中结合波纹和重力波

当两个角落组装好了——重力波和波纹在深水中——你可以连接这两个角落形成深水边缘。为了方便起见，在这里重新陈述的色散关系是

$$\omega^2 = \begin{cases} gk, & \text{重力波;} \\ \gamma k^3/\rho, & \text{波纹。} \end{cases}$$

稍加勇气，你可以将这两个极端情况下的关系结合起来，得到适用于重力波、波纹和介于两者之间的波的色散关系。



这两种功能形式都来自同一个物理论证

平衡动能和势能的 区别在于势能的来源：重力或表面张力 在波浪的上半部分，表面张力支配重力；在下半部分，重力支配表面张力 也许在中间区域，势能的两个贡献简单地相加。如果是这样，组合色散关系就是两个极端的和：

$$\omega^2 = gk + \gamma k^3/\rho.$$

这个结果是精确的（这就是为什么我们使用了等号）。当你怀疑时，尝试最简单的解决方案。

通过使用表面张力产生的有效重力，可以增加对这个结果的信心。重力的两个来源 - 实际和有效 - 简单相加，得到

$$g_{\text{总}} = g + g_{\text{表面张力}} = g + \frac{\gamma k^2}{\rho}.$$

用  $g_{\text{总}}$  替换  $g$  在  $\omega^2 = gk$  可以再现深水色散关系：

$$\omega^2 = \left( g + \frac{\gamma k^2}{\rho} \right) k = gk + \gamma k^3/\rho.$$

这个色散关系告诉我们所有波长或波数的波速。相速度是

$$v_{\text{ph}} \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho} + \frac{g}{k}}.$$



让我们检查楼上和楼下。表面张力和重力驱动波浪，所以  $\gamma$  和  $g$  应该在楼上。惯性减慢了波浪，所以  $\rho$  应该在楼下。相速度通过了这些测试。

作为波数的函数，平方根中的两个项竞相增加速度。在高波数时，表面张力项获胜；在低波数时，重力项获胜。因此，存在一个中间的、最小速度的波数， $k_0$ ，我们可以通过平衡表面张力和重力贡献来估计：

$$\frac{\gamma k_0}{\rho} \sim \frac{g}{k_0}.$$

这个计算是一个数量级最小化的例子。最小速度波数是

$$k_0 \sim \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}.$$

有趣的是， $1/k_0$  是雨滴的最大尺寸。在这个波数  $\Pi_3 = 1$ ：这些波浪正好位于涟漪和重力波之间的边界上。它们的相速度是

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{2g}{k_0}} \sim \left( \frac{4\gamma g}{\rho} \right)^{1/4}.$$

在水中，临界波数是  $k_0 \sim 4 \text{ cm}^{-1}$ ，所以临界波长是  $\lambda_0 \sim 1.5 \text{ cm}$ ；速度是

$$v_0 \sim 23 \text{ cm s}^{-1}.$$

我们不诚实地推导出了速度。我们没有使用微积分的最大-最小方法，而是平衡了两个贡献。微积分推导证实了最小相速度。繁琐的微积分计算表明最小群速度是

$$v_g \approx 17.7 \text{ 厘米/秒}^{-1}.$$

[如果你尝试重现这个计算，请小心，因为最小群速度不是在  $k_0$  处的群速度。]

让我们诚实地进行最小化。如果使用良好的公式规范加上一个有用的图表，这个计算不会太乱，而且正确的方法在许多物理最大-最小问题中都很有用。我们通过找到相位速度的最小值来说明这些方法。那个方程包含常数 -  $\rho$ ， $\gamma$  和  $g$  - 这些常数在所有的微分中都会保持不变。为了简化运算，选择一个方便的单位集，在这个单位集中

$$\rho = \gamma = g = 1.$$

波的分析使用了三个基本维度：质量、长度和时间。选择三个常数等于单位消耗了所有的自由度。这相当于选择了一个规范的质量、长度和时间，并使所有的量都无量纲化。不要担心：常数将在最小化结束时恢复。

除了常数之外，相速度还包含一个平方根。作为公式整理的第一步，最小化而不是 $v^2$ 。在方便的单位制下，它是

$$v_{\text{ph}}^2 = k + \frac{1}{k}$$

这种最小化不需要微积分，甚至不需要精确计算。这两个项都是正数，所以你可以使用算术平均-几何平均不等式（亲切地称为AM-GM）来处理 $k$ 和 $1/k$ 。该不等式表明，对于正数 $a$ 和 $b$ ，

$$\underbrace{(a+b)/2}_{\text{算术平均}} \geq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{几何平均}}$$

当 $a=b$ 时，等式成立。

图中展示了这个不等式的几何证明。你被邀请自己相信这个图是一个证明。当 $a=k$ 和 $b=1/k$ 时，几何平均是1，所以算术平均是 $\geq 1$ 。因此

$$k + \frac{1}{k} \geq 2,$$

当 $k = 1/k$ 时，等式成立，即 $k = 1$ 。在这个波数下相速度为2。在这个单位制下，色散关系是

$$\omega = \sqrt{k^3 + k},$$

群速度是

$$v_g = \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{k^3 + k},$$

即

$$v_g = \frac{1}{2} \frac{3k^2 + 1}{\sqrt{k^3 + k}}.$$

在 $k = 1$ 时，群速度也是2：这些边界波的相速度和群速度相等。这个等式是合理的。在重力波区域，相速度大于群速度。在涟漪区域，相速度小于群速度。所以它们必须在中间区域相等。

要将 $k = 1$ 转换回常规单位，将其乘以 $\rho, \gamma$ 和 $g$ 的方便乘积（每个都等于1）。如何从 $\rho, \gamma$ 和 $g$ 中得到一个长度？结果的形式表明

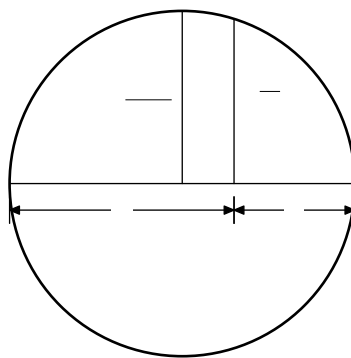
$$\sqrt{\rho g / \gamma} \text{ 的单位是 } L^{-1}. \text{ 所以 } k = 1$$

实际上意味着 $k = 1 \times \sqrt{\rho g / \gamma}$ ，这与数量级最小化相同。

这个精确计算表明缺失的无量纲常数为1。

最小群速度比最小相速度更复杂，因为它需要另一个导数。再次，去掉平方根并最小化 $v_g^2$ 。

导数是



$$\frac{\partial}{\partial k} \underbrace{\frac{9k^4 + 6k^2 + 1}{k^3 + k}}_{v_g^2} = \frac{(3k^2 + 1)(3k^4 + 6k^2 - 1)}{(k^3 + k)^2}.$$

将这个导数置零得到  $3k^4 + 6k^2 - 1 = 0$ ，这是一个关于  $k^2$  的二次方程，并且有正解。

$$k_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{4/3}} \sim 0.393.$$

在这个  $k$  时，群速度是

$$v_g(k_1) \approx 1.086.$$

在更常见的单位下，这个最小速度是

$$v_g \approx 1.086 \left( \frac{\gamma g}{\rho} \right)^{1/4}.$$

根据水的密度和表面张力，最小群速度为<sup>17</sup> 7厘米/秒，如先前所述。

在池塘中扔下一颗鹅卵石后，你会看到一个围绕着落点的静止圆圈。然后，这个圆圈以给定的最小群速度扩大。如果没有方便的池塘，可以在厨房的水槽中进行实验：将其装满水，然后放入一枚硬币或者弹珠。最小相速度的存在对于在水上行走的昆虫很有用。如果它们的移动速度慢于23厘米/秒，它们就不会产生波浪，从而降低了行走的能量消耗。

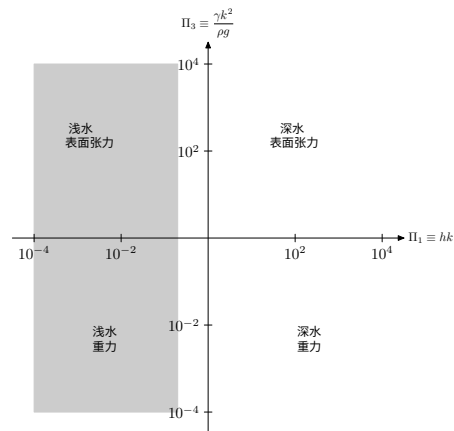
### 10.1.12 浅水

在浅水中，高度  $h$ ，在深水计算中缺失 -  
lations, returns to complicate the set of relevant variables. We  
现在我们在图中的阴影区域。这个额外的长度尺度给予了太多的自由。仅凭尺寸分析无法推导出魔术函数/色散关系中的浅水形式。板块论证可以完成任务，但是它需要对新的物理情况进行一些修改。

在深水中，板块的深度为  $1/k$ 。然而，在浅水中，板块的深度为  $1/k$ ，海洋底部在达到该深度之前就到达了。因此，浅水板块的深度为  $h$ 。它的长度

仍然是  $1/k$ ，宽度仍然是  $w$ 。由于深度的变化，关于水流如何流动的论点略有不同。在深水中，板块的深度等于长度，板块和表面移动的距离相同。在浅水中，板块变薄了  $hk$ ，表面移动得比板块慢，因为周围的水少了。

它以因子  $hk$  的速度移动得更慢。具有波高  $\xi$  和频率  $\omega$  的表面以速度  $\xi\omega$  移动，因此板块以速度  $v_{\text{slab}} \sim \xi\omega/hk$  移动（侧向）。



水中的动能主要存在于板块中，因为向上运动比板块运动慢得多。这种能量是

$$KE_{\text{shallow}} \sim \underbrace{\rho w h / k}_{\text{质量}} \times \underbrace{(\xi \omega / h k)^2}_{v^2} \sim \frac{\rho w \xi^2 \omega^2}{h k^3}.$$

这种能量平衡了潜在能量，我们对两种极限情况进行计算：涟漪和重力波。

### 10.1.13 浅水中的重力波

我们首先专注于重力波-

图中的阴影区域，水很浅，波长很长。

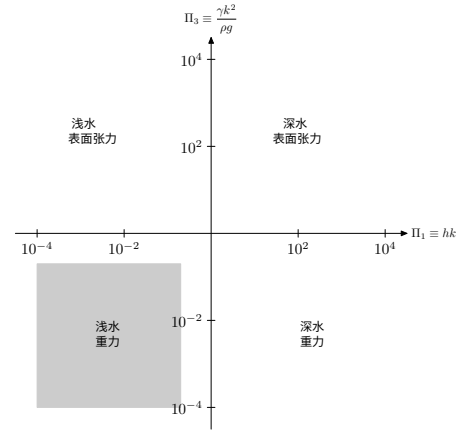
这些条件包括潮汐波、海底地震产生的波浪和接近海滩的波浪。对于重力波，势能是

$$PE \sim \rho g w \xi^2 / k.$$

这种能量来自表面的扭曲，在浅水中是相同的（只要波幅相对于深度和波长来说很小）。[主要力量（重力或表面张力）决定了势能。

。

潜在能量。正如我们在浅水波纹研究中所看到的，在第10.1.15节中，水深决定了动能。]将这种能量与动能平衡，得到：



$$\underbrace{\frac{\rho w \xi^2 \omega^2}{h k^3}}_{KE} \sim \underbrace{\rho g w \xi^2 / k}_{PE}$$

所以

$$\omega^2 = 1 \times g h k^2.$$

再一次，正确地计算的无量纲常数（红色）是单位。因此，在浅水中，重力波的函数  $f$  has the form

$$f_{\text{浅}} \left( k h, \frac{\gamma k^2}{\rho g} \right) = k h.$$

由于  $\omega \propto k^1$ ，群速度和相速度相等且与频率无关：

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g h},$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{g h}.$$

**浅水是非色散的：所有频率以相同的速度移动，因此由不同频率组成的脉冲可以传播而不会模糊。**

### 10.1.14 潮汐

海底地震展示了这种统一的危险。如果地震发生在智利海岸，海底下降，会产生一种浅水波。这种波传播

到日本时没有失真。波速度为  $v \sim 4000 \text{ m} \times 10 \text{ m s}^{-2} \sim 200 \text{ m s}^{-1}$ ：这种波可以在半天内穿越一片  $10^4 \text{ km}$  的海洋。当它接近海岸，深度减小，波速减慢，振幅增大，变成一种巨大的破坏性波浪击向陆地。

### 10.1.15 水面上的涟漪

水面上的涟漪 - 图中的阴影区域 -

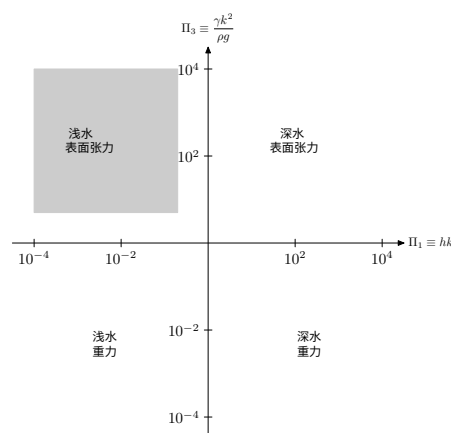
非常罕见。当雨滴落在一个浅雨水

水坑中，其深度小于1毫米。即使如此，只有最长波长的涟漪，其中  $\lambda \sim 1 \text{ 厘米}$ ，才能感受到水坑的底部（波浪成为浅水波的要求）。表面的势能由以下公式给出

$$PE_{\text{ripple}} \sim \gamma \Delta A \sim \gamma w \xi^2 k.$$

虽然该公式适用于深水，但水深

不影响势能，因此我们可以使用相同的公式来描述浅水。



主导力量 - 在这里是表面张力 - 决定了势能。平衡势能和动能得到：

$$\underbrace{\frac{\rho w \xi^2 \omega^2}{h k^3}}_{KE} \sim \underbrace{\frac{w}{k} \gamma (k \xi)^2}_{PE}$$

然后

$$\omega^2 \sim \frac{\gamma h k^4}{\rho}.$$

相速度是

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma h k^2}{\rho}},$$

而群速度是  $v_g = 2v_{\text{ph}}$ （色散关系的形式是  $\omega \propto k^2$ ）。对于  $h \sim 1 \text{ mm}$ ，这个速度是

$$v \sim \left( \frac{0.07 \text{ N m}^{-1} \times 10^{-3} \text{ m} \times 3.6 \cdot 10^5 \text{ m}^{-2}}{10^3 \text{ kg m}^{-3}} \right)^{1/2} \sim 16 \text{ cm s}^{-1}.$$

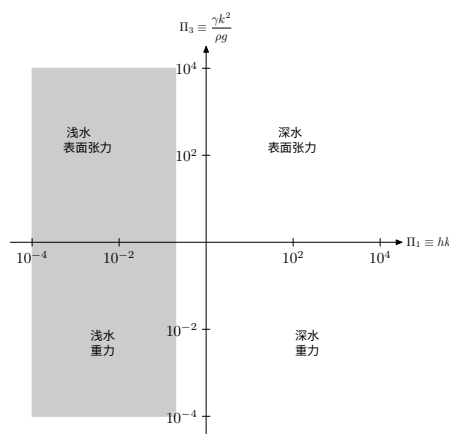
### 10.1.16 将浅水中的涟漪和重力波结合起来

这个结果完成了波的最后两个角落：浅水涟漪和重力波。通过研究一般的浅水波将这些角落连接起来。

图中阴影部分表示波的世界的这个区域。

你可以使用两种等效的方法将涟漪的色散关系与重力波的色散关系相结合。要么将两个极端情况的色散关系相加，要么使用重力波的有效重力场来计算色散关系。任何一种方法都可以产生

$$\omega^2 \sim k^2 \left( gh + \frac{\gamma h k^2}{\rho} \right).$$



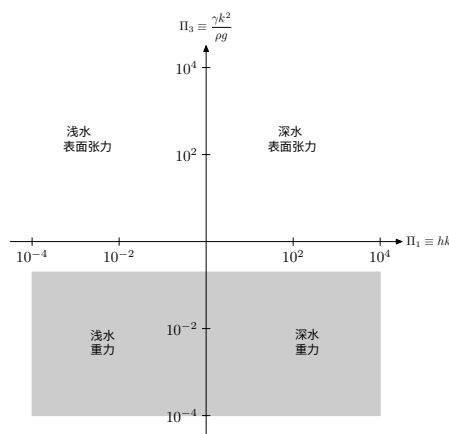
### 10.1.17 深水和浅水重力波的结合

现在来看一下图中阴影部分的重力波边缘。深水和浅水的色散关系是：

$$\omega^2 = gk \times \begin{cases} 1, & \text{深水;} \\ hk, & \text{浅水.} \end{cases}$$

要在这两个区域之间进行插值，需要一个函数  $f(hk)$ ，当  $hk \rightarrow \infty$  时渐近于1，当  $hk \rightarrow 0$  时渐近于  $hk$ 。

基于猜测函数形式的论证在物理学中有着光荣的历史。普朗克通过插值法推导出了黑体谱，该谱在当时已知的高频和低频极限之间进行插值。我们不是在推导



量子力学，但原理是相同的：在新的领域，无论是对你来说还是对大家来说，你都需要一点勇气。一个简单的插值函数是  $\tanh hk$ 。然后，真正的重力波传播关系是：

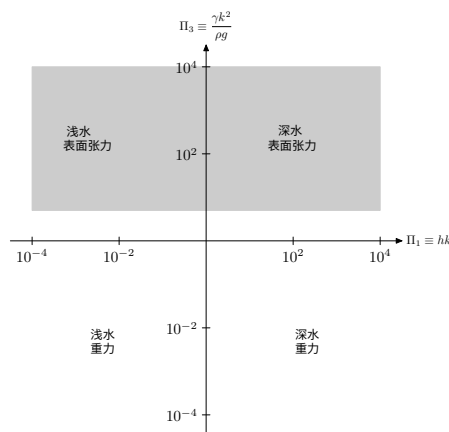
$$\omega^2 = gk \tanh hk.$$

这个有教养的猜测是合理的，因为当  $h \rightarrow \infty$  时， $\tanh hk$  呈指数下降，与基于拉普拉斯方程的论证一致。事实上，这个猜测是正确的。

### 10.1.18 深浅水波纹的结合

现在我们来研究最后一个边缘：浅水和深水中的波纹

，如图所示。在第10.1.17节中， $\tanh kh$ 在 $kh$ 从0到 $\infty$ 的过程中进行了插值（当水从浅到深时）。可能同样的技巧也适用于波纹，因为证明 $\tanh kh$ 的拉普拉斯方程论证不依赖于恢复力。



相关的传播关系：

$$\omega^2 = \begin{cases} \gamma k^3 / \rho, & \text{如果 } kh \gg 1; \\ \gamma h k^4 / \rho, & \text{如果 } kh \ll 1. \end{cases}$$

如果我们因子分解  $\gamma k^3 / \rho$ ，必要的转换变得清晰：

$$\omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\rho} \begin{cases} 1, & \text{如果 } kh \gg 1; \\ kh, & \text{如果 } kh \ll 1. \end{cases}$$

这个波纹结果看起来与重力波结果相似，因此进行相同的替换：

$$\begin{cases} 1, & \text{如果 } kh \gg 1 \\ kh, & \text{如果 } kh \ll 1 \end{cases} \text{ 变为 } \tanh kh.$$

然后你得到了一般的波纹色散关系：

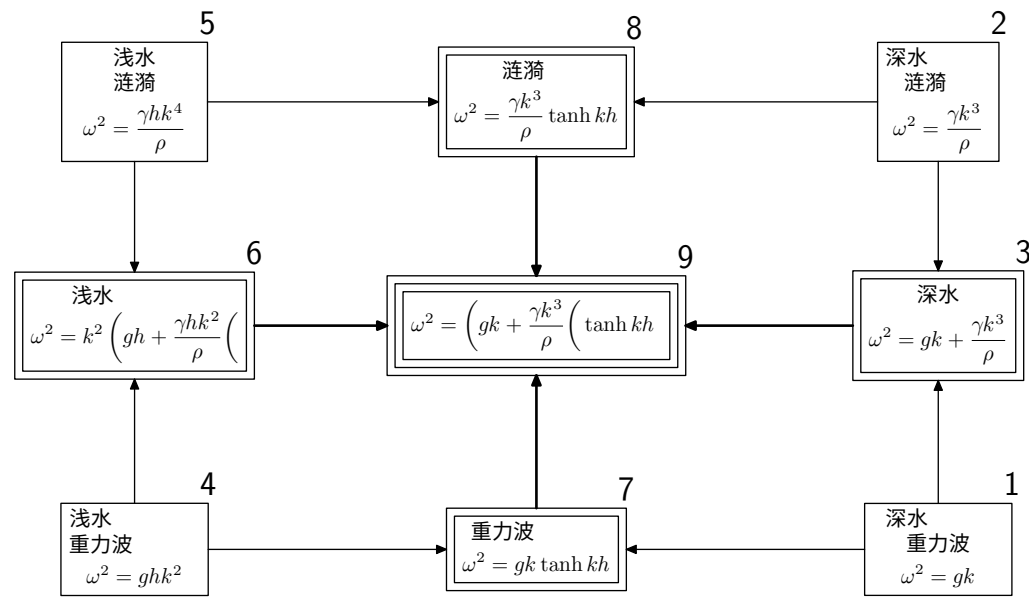
$$\omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\rho} \tanh kh.$$

这个色散关系没有太多实际意义，因为它比深水波纹色散关系更复杂，只涵盖了一个罕见的情况：池塘上的波纹。我们包含它是为了完整性，以访问世界的四个边缘，为了准备接下来的大规模组合。

### 10.1.19 合并所有分析

现在我们可以用  $g$  总替换  $g$ ，以找到真正的色散关系：

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3 / \rho) \tanh kh.$$



图中的每个方框代表一个特殊情况。方框旁边的数字标记了我们研究该极限的顺序。在最后一步（9）中，我们将所有分析合并到中心的超级方框中，其中包含了所有波的色散关系：重力波或涟漪，浅水或深水。箭头显示了我们如何将更小、更专业的角落方框组合成更一般的边缘方框（双线标记），以及将边缘区域组合成通用的中心方框（三线标记）。

总之，我们通过研究色散关系来研究水波。我们绘制了波的世界，探索了各个角落和边缘，并将这些部分组装起来，形成了对复杂、完整解决方案理解。整个拼图的解决方案如图所示。考虑极限情况并将它们拼接在一起使得分析可行且易于理解。

10.1.20 你学到了什么

- 1. 相位速度和群速度。相位速度表示单个波的波峰移动的速度。在一组波（多个波相加）中，群速度是包络的相位速度。
- 2. 离散化。复杂的函数关系，例如色散关系，在离散极限下更容易理解：例如，只允许两个  $(\omega, k)$  组合。这种离散化有助于解释群速度的含义。
- 3. 四个波动行为。波动行为有两个无量纲参数来描述：一个是无量纲深度，另一个是无量纲表面张力与重力能量的比值。
- 4. 寻找弹簧。当问题涉及动能和势能储备，并且能量在它们之间振荡时，要寻找弹簧。弹簧运动的一个关键特征是超调：系统必须超过零势能的平衡构型。

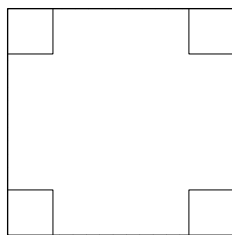


5. 大多数缺失的常数都是单位值。在波动和弹簧的分析中，缺失的无量纲常数通常是单位值。这个幸运的结果来自维里定理，它说对于一个  $F \propto r$  力（弹簧力），平均势能和动能是相等的。因此，在这种情况下，平衡这两种能量是精确的。
6. 最小速度。在深水中，速度低于某个值的物体不会产生波动。这个最小速度是重力和表面张力之间的合作结果。重力使长波长的波动快速移动。表面张力使短波长的波动快速移动。
7. 浅水重力波是非色散的。浅水中的重力波（包括海洋上的潮汐波！）以速度  $gh$  传播，与波长无关。
8. 弗洛德数。弗洛德数是动能与势能的一个比值，决定了快艇和行走的最大速度。

## 练习

算术平均数-几何平均数

用比圆更另一种方法证明算术平均数-几何平均数不等式。在没有微积分的情况下，使用算术平均数-几何平均数解决以下问题。你从一个单位正方形开始，从每个角剪下一个正方形，然后将剪下的部分向上折叠成一个半开放的盒子。为了最大化其体积，这些正方形应该有多大？



无微积分的最小值。

不可能

海洋上的潮汐波（典型深度  $\sim 4\text{km}$ ）如何被认为是浅水？

烤箱盘

在一个长方形玻璃烤盘中部分填满水并玩弄波浪。给烤盘一个轻微的拍击，观察波浪来回移动。波速随水深变化如何？你的数据是否与本章理论一致？

最小波速

拿一根牙签在水盘中移动。通过实验，找到不产生波浪的速度。它与本章理论的一致性如何？

开尔文楔

证明船尾涡的开口角度为  $2\sin^{-1}(1/3)$ 。

# 第四部分

## 后记

11.一路顺风！

130

# 第11章

## 一路顺风！

本书的主题是如何理解新的领域，无论这个领域是否为大家所熟知，但对你来说是新的；或者这个领域对每个人来说都是新的。在任何情况下，某些思维方式有助于理解和长期学习。这个后记通过使用在本书中出现两次的一个例子来说明这些方式-金字塔的体积。

### 11.1 记住什么都没有！

体积与高度成正比，这是由于钻心论的论证。所以  $V \propto h$ 。但是，对于体积的维度正确的表达式需要两个额外的长度。它们只能来自  $b^2$ 。所以

$$V \sim bh^2.$$

但是常数是什么？结果是  $1/3$ 。

### 11.2 连接到其他问题

分母中的3是新的需要记住的信息吗？不！那个信息片段也与其他问题相关。

首先，你可以通过使用特殊情况来推导出它，这是第8.1节的主题。其次，3也是空间的维度。这个事实不是巧合。考虑一个类似的问题，三角形的面积。它的面积是

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

面积与金字塔的体积具有类似的形式：一个常数乘以与底面和高度相关的因子。在二维中，常数是  $1/2$ 。所以  $1/3$  很可能与空间的维度有关。

那个分析使得3容易记住，从而得到整个体积的公式。

但是还有两个后续问题。第一个问题是：为什么空间的维度很重要？特例的论证解释了这一点，因为你需要为每个空间方向建立金字塔（在讲座中我们会详细讨论特例的论证！）

。

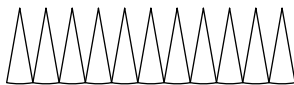
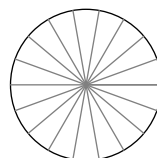
第二个后续问题是：3在其他问题中是否也出现，并且出现的原因相同？一个相关的地方是一个球体的体积

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

古希腊人证明了  $4/3$  中的3与金字塔体积中的3是相同的。

为了解释他们的图像，我将使用方法来找到一个圆的面积，然后用它来找到一个球体的体积。

将一个圆分成许多扇形。为了找到它的面积，在圆周上的某个地方切开，然后展开成这个形状：



每个饼块楔形几乎是一个三角形，所以它的面积是  $bh/2$ ，其中高度  $h$  大约是  $r$ 。所有底面的和是周长的  $2\pi r$ ，所以  $A = 2\pi r \times r/2 = \pi r^2$ 。

现在用一个球体做同样的过程：将其分成几乎是金字塔的小块，然后展开它。展开的球体的底面积是  $4\pi r^2$ ，这是球体的表面积。所以所有小金字塔的体积是

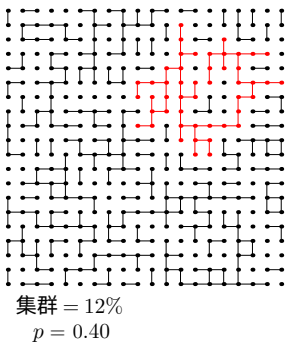
$$V = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{高度}}_r \times \underbrace{\text{底面积}}_{4\pi r^2} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

看！所以，如果你记得一个球体的体积 - 大多数人在学校时都被铭记在我们的脑海中 - 那么你就知道金字塔的体积在分母中有一个因子3。

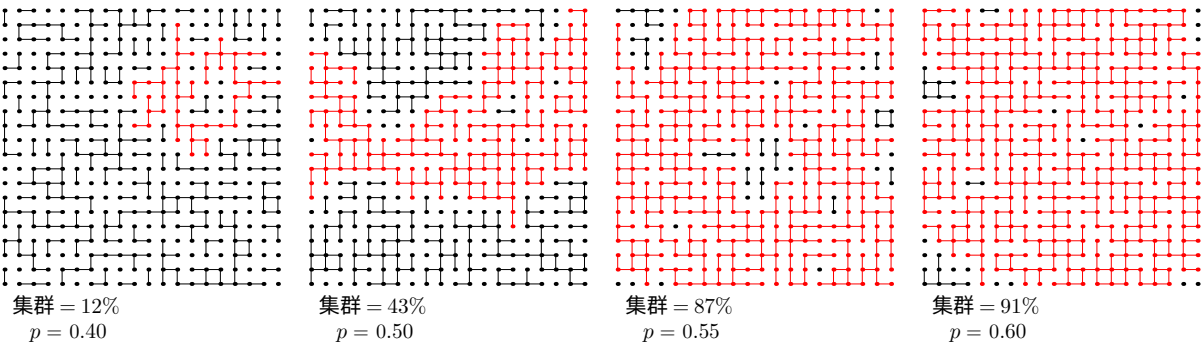
## 11.3 渗流模型

前面例子的道德是建立联系。这个过程的物理示例是渗流。想象一下油是如何在岩石中扩散的。岩石有孔隙，油从一个区域移动到另一个区域。然而，许多孔隙被矿物沉积物堵塞。油是如何在这种岩石中渗透的？

这个问题引发了对以下理想化模型的广泛数学研究。想象一个无限二维晶格。现在，在相邻的点之间（水平或垂直，而不是对角线）以概率 $p$ 建立连接。图示是一个渗流晶格的有限子区域示例，其中 $p=0.4$ 。最大的簇-连接在一起的最大点集-用红色标记，并包含13%的点。



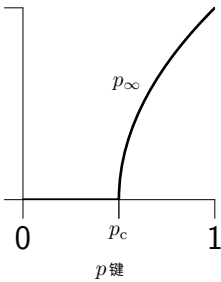
以下是当 $p$ 从0.40增加到0.50、0.55、0.60时发生的情况：



最大的集群占据了越来越多的格子。

对于一个无限的格子，一个类似的问题是：找到一个无限连接的子格子的概率是多少？在达到临界概率  $p_c$  之前，这个概率是零。临界概率取决于拓扑结构-

对于二维正方格子，拓扑学（什么样的格子和多少维）中的临界概率  $p_c = 1/2$ ，但其存在与拓扑学无关。当  $p_{\text{bond}} > p_c$  时，无限格子存在的概率变为非零 0，并最终达到1. 0。



学习的类比是每个点都是一个因素公式，而每个键连接两个事实。为了持久的学习，你希望这些事实通过它们的连接相互支持。假设你希望这些事实成为一个无限且自我支持的格点。然而，如果你的教科书或学习方式意味着你只是添加更多的点-只学习更多的事实-那么你会减少键的数量，因此你会减少无限群集的机会。如果这个类比比我想象的更准确，你甚至可能完全消除无限群集。

相反的方法是确保每个事实都与你已经知道的事实建立联系。在渗透模型中，你通过连接点之间的键来增加键的数量。一位著名的英国作家给出了与我关于学习的建议相同的生活建议：

只有连接！那是她整个布道的全部...不再生活在碎片中！  
[E.M. 弗斯特 ,霍华德的终结]

本书介绍的推理方法提供了一些建立这些联系的方法。  
祝你一路顺风，学习和发现新思想以及它们之间的联系！

# 参考文献

- [1] 迈克·甘卡兹。 *Linux和 Unix* 哲学。 DigitalPress，第 2 版，2002 年修订版。
- [2] Brian W. Kernighan 和 Rob Pike。 *Unix* 编程环境。 Prentice Hall，1984 年。
- [3] Eric S. Raymond。 *UNIX* 编程艺术。 Addison-Wesley，2003 年。
- [4] Knut Schmid-Nielsen。 缩放：为什么动物大小如此重要。 剑桥大学出版社，英国剑桥，1984 年。
- [5] R. David Middlebrook. 设计导向分析方法：低熵表达式。 在新的本科工程教育方法 IV，1992 年。  
[mit.edu/6.969/www/](http://mit.edu/6.969/www/). 查看
- [6] .
- [7] 理查德·费曼，罗伯特·B·莱顿和马修·桑兹。 费曼物理学讲义，第一卷。 Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1963a。
- [8] 伯特兰·罗素。 西方哲学史及其与政治和社会环境的联系。 *SimonandSchuster*，纽约，1945 年。
- [9] E.巴金汉姆。 关于物理相似系统。 物理评论，4(4):345–376，1914 年。
- [10] S.钱德拉塞卡尔。 星体结构研究导论。 芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1939 年。
- [11] S.钱德拉塞卡尔。 流体力学和磁流体稳定性。 牛津大学出版社，牛津，1961 年。
- [12] Horace Lamb. 流体力学 . 多佛，纽约，第六版，1932/1993 年。
- [13] Steven Vogel. 流体中的生命：流体的物理生物学. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西，1994 年。
- [14] E.M. Purcell. 低雷诺数下的生活。 美国物理学杂志，45:3–11，1977 年。
- [15] David R. Lide，编辑。 化学和物理数据的 CRC 手册：化学和物理数据的即时参考书. CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，第 82 版，1993 年。
- [16] Albert Einstein. 相对性原理. 多佛出版社，纽约，1952 年 [1923 年 ]。
- [17] Albert Einstein. 相对论：特殊与一般理论. Three Rivers Press，重印版，1995 年。
- [18] T. E. Faber. 物理学家的流体力学. 剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，1995 年。

[19] Horace Lamb. 流体力学 . 多佛出版社, 纽约, 第六版, 1945年。

[20] Carl Bernstein and Bob Woodward. 总统的全部人. 西蒙与舒斯特, 纽约, 1974年。

# 索引

## a

原子理论 2-54

衰减 3-98

## b

平衡 2-61

玻尔半径 2-55

## c

廉价最小化 2-59

约束能量 2-58

## d

色散 3-98

色散关系 3-97

色散性 3-112

阻力系数 3-87

## e

等效原理 3-101

## f

弗洛德数 3-113

## g

群速度 3-98

## i

密集量 3-73

等周定理 2-24

## 米

马赫数 3-102

## n

非色散 3-124

## o

数量级为一 2-61

## p

相速度 3-98

## r

雷诺数 3-76

## u

能量不确定性 2-58

不确定性原理 2-58

普遍常数 2-53