

数学 建模

入门与求 解



K. M. BLISS
K. R. FOWLER
B. J. GALLUZZO

出版商
工业与应用数学学会 (SIAM)
3600 Market Street, 6th Floor
Philadelphia, PA 19104-2688 USA
www.siam.org

资金提供者
穆迪基金会与穆迪
超级数学挑战赛、美国国家科学基金会
(NSF) 以及工业与应用
数学学会 (SIAM) 合作提供资金。

作者
Karen M. Bliss
数学与计算机科学系，
昆尼皮亚克大学，康涅狄格州汉登

Kathleen R. Fowler
数学与计算机科学系，
克拉克森大学，纽约波茨坦

Benjamin J. Galluzzo
数学系，
希平斯堡大学，希平斯堡，宾夕法尼亚州

设计与
共同核心标准的联系
PlusUs
www.plusus.org

生产
2014年第一版
印刷并装订于美国

未经出版商事先书面许可，本指南的任何部
分均不得以任何形式或任何方式复制或存储在在
线检索系统中或传输。版权所有。

目录

1. 介绍

②

2. 定义问题陈述

⑩

3. 做出假设

⑮

4. 定义变量

⑳

5. 构建解决方案

㉕

6. 分析和模型评估

㉓

7. 将所有内容整合在一起

㉔

附录与参考文献

㉕

我们周围的
世界充
满了重要的、
未解答的
问题。

1. 引言

我们周围的世界充满了重要的、未解答的问题。海平面上升会对美国沿海地区产生什么影响？

世界人口何时会超过100亿？上大学要花多少钱？

10年？谁将赢得下一届美国总统选举？我们还希望更好地理解其他现象。研究犯罪并识别入室盗窃模式[1, 10]是否可能？在雨中行走而不被淋湿的最佳方法是什么[7]？隐形斗篷技术有多可行？

[6]？我们能设计一个布朗尼烤盘，使边缘不烧焦，但中心熟透吗 [2]？研究人员和学生们都在寻找这些问题的可能答案。他们能找到答案吗？

也许。唯一可以确定的是，任何寻找解决方案的尝试都需要使用数学，很可能是通过创建、应用和改进数学模型来实现。

数学模型是系统的一种表示或场景，用于获得定性和/或定量地理解一些现实世界的问题并预测未来的行为。模型

在生物学、工程学、计算机科学、心理学、社会学和市场营销等各个学科中都有应用。因为模型是对现实的抽象，它们可以推动科学进步，为新的发现奠定基础，并帮助领导者做出明智的决策。

本指南适用于学生、教师 and 任何想学习建模的人。目标是解密数学模型构建的过程。

构建一个有用的数学模型并不一定需要高级数学知识或任何上述领域的专业知识。它需要愿意进行一些研究、头脑风暴，并尝试一些可能超出你舒适区的事情。它需要愿意进行一些研究、头脑风暴，并尝试一些可能超出你舒适区的事情。

1: 介绍

数学建模 与文字问题

建模问题与我们在数学课上遇到的类型的文字问题完全不同。
为了理解数学建模和文字问题之间的区别，请考虑以下关于回收的问题。

1. Yourtown的人口为20,000人，其中35%的市民回收他们的塑料水瓶。如果每个人每周使用9个水瓶，那么Yourtown每周回收多少个瓶子？

2. Yourtown回收了多少塑料？

第一个问题的解决方法很简单：

$$0.35 \times 20,000 \text{ 人} \times 9 \frac{\text{瓶子}}{\text{每人} \times \text{每周}} = 63,000 \frac{\text{瓶子}}{\text{每周}}$$

这种类型的问题可能会出现在数学教科书中，以加强我们将短语“35% of”翻译为数学计算“0.35倍”的概念。这是一个我们称之为文字问题的例子：问题明确地给出了你所需要的所有信息。你只需要确定适当的数学计算，就能得出唯一正确的答案。文字问题可以帮助学生理解为什么我们可能想要研究特定的数学概念，并加强重要的数学技能。

第二个问题非常不同。当你阅读这样的问题时，你可能会想，“我没有足够的信息来回答这个问题”，你是对的！这正是关键点：我们

通常在尝试时没有完整的信息

解决现实世界问题。事实上，这样的情况要求我们同时运用数学和创造力。
当我们遇到这样的情况时，我们必须

由于信息不完整，我们将这个问题称为开放性问题。事实证明，数学建模非常适合解决开放性问题。例如，这个问题可能是因为我们看到垃圾桶里满满的水和汽水瓶，然后想知道到底有多少瓶子被扔掉了，为什么它们没有被回收。建模使我们能够使用数学来分析情况并提出促进回收的解决方案。

在上面的文字问题示例中，假设每个镇上的人每周使用9个塑料水瓶，并且20,000人中有35%的人每次使用完水瓶后都会回收。这些假设合理吗？数字20,000可能是Yourtown的人口估计，但其他信息从哪里来的？每个人每周使用9个水瓶是可能的吗？35%的人每次都回收水瓶，这可能吗？

65%的人从不回收他们使用的水瓶，他们使用的水瓶中有多少被回收了呢？也许不是，但也许这是一个平均值，基于其他数据。第一个问题并没有要求我们确定情景是否真实；假设我们接受给定的信息为真，并进行适当的计算。

为了回答上面的第二个（建模）问题，你需要自己研究情况，并做出自己（合理的）假设和策略来回答这个问题。问题陈述没有提供关于你的城市具体细节。你需要确定你的城市的哪些因素影响了塑料回收量。合理地认为你的城市的人口是一个重要因素，但城市的其他

因素如何影响回收率呢？问题陈述没有提到你应该考虑哪些类型的塑料。很难量化所有被丢弃的塑料。如果你认为食品和饮料容器是主要的塑料废物来源，那么只考虑这些塑料是一个合理的假设吗？为了在这个问题上取得进展，你需要进行一些研究并做出一些假设。

看待同一个建模问题的人可能会有不同的观点，并且肯定会提出不同但有效的替代解决方案。

你的城镇去年发送到垃圾填埋场的塑料废物的体积”，那么就有一个准确的答案。

然而，你很难获得足够的信息来找到那个答案。基于此，你将开发一个最佳估计答案的模型，根据可用的信息。由于没有人知道问题的真正答案，你的模型至少和答案本身一样重要，以及你解释模型的能力。

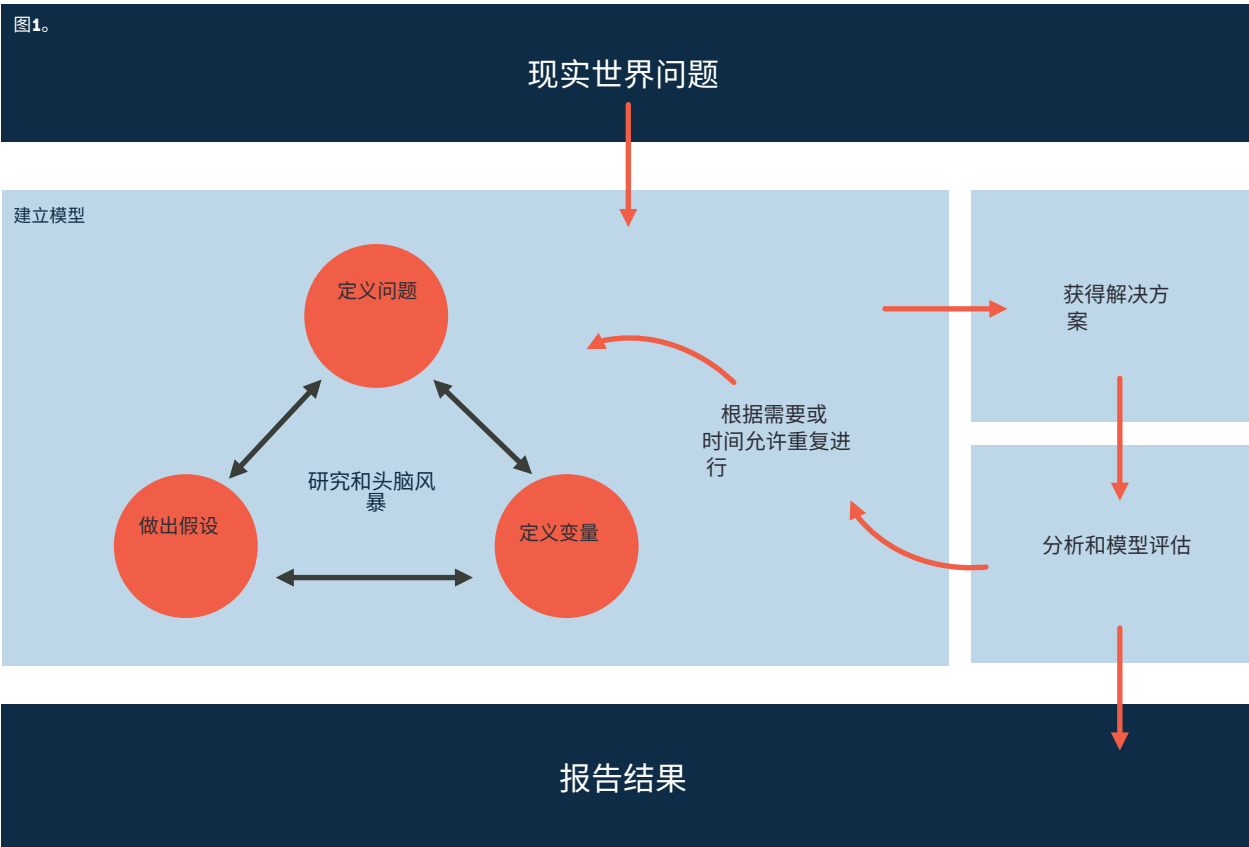
与应用题不同，当我们谈论建模问题时，我们经常使用“一个解决方案”（而不是“解决方案”）这个词组。这是因为看同一个建模问题的人可能有不同的观点来解决它，并且肯定会提出

不同的有效的替代解决方案。值得注意的是，应用题实际上可以被看作是以前的建模问题。也就是说，有人已经确定了一个简单的模型，并提供了所有相关的信息。这与建模问题非常不同，你必须决定什么是重要的，以及如何将其组合在一起。

数学建模问题允许你研究现实世界中的问题，利用你的发现来创造新的知识。你的创造力和对这个问题的思考在解决建模问题中都非常有价值。这是建模如此有趣和有意思的一部分！

如果在你的研究之后，你将原始问题简化为非常具体的问题，比如“确定

建模过程概述



本指南将帮助你理解数学建模的每个组成部分。重要的是要记住，这不一定是个顺序步骤的列表；数学建模是一个迭代的过程，关键步骤可能会被多次重新访问，如图1所示。

• 定义问题陈述

现实世界

问题可能是广泛而复杂的。将概念理念精炼为简明的问题陈述非常重要，这将准确指示模型的输出。

• 做出假设

在你的工作早期，可能会

感觉问题太复杂，无法取得任何进展。这就是为什么有必要做出假设来简化问题并聚焦的原因。在这个过程中，你减少了影响模型的因素数量，从而决定哪些因素最重要。

• 定义变量

主要因素是什么？

影响你试图理解的现象的主要因素是什么？你能将这些因素列为具有指定单位的可量化变量吗？你可能需要区分独立变量、依赖变量和模型参数。通过更好地理解这些概念，你将能够定义模型输入并创建数学关系，最终建立模型本身。

• 获取解决方案

你能从中学到什么

模型？它是否回答了你最初的问题？确定解决方案可能涉及铅笔-和纸计算，评估函数，运行模拟，或解方程，这取决于你开发的模型类型。使用软件或其他计算技术可能会有所帮助。

• 分析和模型评估最后，必须

退后一步，分析结果以评估模型的质量。模型的优点和缺点是什么？在某些情况下，模型是否无法工作？如果改变假设或更改模型参数值，模型的敏感性如何？是否可能进行改进（或至少指出）？

• 报告结果

你的模型可能令人敬畏，

但除非你能够解释如何使用或实施它，否则没有人会知道。你可能会被要求提供公正的结果或成为特定利益相关者的倡导者，所以要注意你的观点。在报告开始处的摘要中包含你的结果。

我们将逐一详细讨论这些组成部分，但我们再次指出，这不应被视为建模的清单。在构建模型的过程中，你可能会在这些组成部分之间来回移动。在进行建模过程时，请仔细记录笔记，很容易陷入建模过程中并忘记你所做的事情！

本指南中使用的主要示例

我们通过详细讨论三个建模问题来演示建模过程。我们直接在下面陈述这些问题，然后在本指南的其余部分进行探讨。



不浪费，不缺乏：将可回收物放在它们应该放置的地方

（选自Moody's Mega Math Challenge：2013年问题。附录B中包括来自蒙哥马利布莱尔高中（位于马里兰州银泉市）的1356团队（由David Stein指导，成员包括Alexander Bourzutschky、Alan Du、Tatyana Gubin、Lisha Ruan和Audrey Shi）提交的完整问题和解决方案。）

塑料被嵌入了各种现代产品中，从钢笔、手机和储物容器到汽车零件、人工肢体和医疗器械；不幸的是，这些进步也带来了长期的成本。塑料不容易生物降解。在北太平洋有一个估计面积大约相当于德克萨斯州的地方，塑料在那里聚集形成一个岛屿，并造成严重的环境影响。虽然这是一个国际性的问题，在美国，我们也担心塑料最终进入垃圾填埋场并可能在那里停留数百年。为了对问题的严重性有所了解，第一个塑料瓶于1975年问世，现在根据一些消息来源，每天大约有5000万个塑料水瓶进入美国的垃圾填埋场。

塑料不是唯一的问题。我们处理的许多废弃物都可以回收利用。开发一个数学模型，城市可以用来确定应采用哪种回收方法。您可以考虑，但不限于：

- 提供可以投放预分类可回收物的地点
- 提供单一流程路边回收
- 提供单一流程路边回收，并要求居民为每个垃圾容器支付费用

你的模型应该独立于当前城市的回收实践，并应包括有关感兴趣城市和回收方法的一些信息。通过将模型应用于以下每个城市来演示其工作原理：北达科他州法戈市；犹他州普莱斯市；堪萨斯州威奇托市。

爆发？流行病？大流行？ 恐慌？

我们都害怕生病。多年前，疾病的传播速度不会很快，因为旅行困难且昂贵。现在，每天有成千上万的人通过火车和飞机在全球范围内旅行工作和度假。曾经局限于世界某个小地区的疾病现在可以因为一个国际旅行的感染者而迅速传播。

国家卫生研究院和疾病控制中心
控制和预防部门对了解疾病爆发的程度感兴趣
在未来一年内，疾病爆发的严重程度有多大
在美国。

它会让我兴奋吗？

游乐园通常在夏季开放，当时的炎热和湿度几乎让人无法忍受。最受欢迎的游乐设施排队的队伍有时可能长达数小时，这让你不得不决定是否要花费有限的时间在排队等候最新、最受欢迎的过山车（队伍最长的那个）上，还是选择乘坐几个可能不那么刺激的过山车。

不幸的是，没有真正的评分标准来评价过山车，尽管存在一个包含许多过山车信息的广泛数据库（请参见 rcdb.com）。创新的过山车工程师肯定会设计一款令人兴奋的过山车，但是什么使过山车令人兴奋和有趣呢？创建一个根据你的定义的刺激因素对过山车进行排名的数学模型。

2. 定义问题陈述

建模问题通常是开放性的。有些数学建模问题明确定义，而其他问题则含糊不清。这意味着有机会进行创造性的问题解决和解释。在某些情况下，模型师需要定义模型的输出以及将量化哪些关键概念。

定义问题陈述需要一些研究和头脑风暴。目标是一个简明扼要的陈述，解释模型将预测什么。

为了看到数学建模问题可以以不同方式解释，考虑之前提出的过山车问题：根据它们的刺激程度对过山车进行排名。这里的“刺激”一词可以有几种解释。在定义和量化“刺激”方面有很多合理的可能性。

例如，一个学生对刺激的定义可能是最大高度和循环次数的组合，而另一个学生则重视游乐设施的长度和最大速度的组合。如果这些人对同一批过山车进行排名，他们的排名系统可能会产生不同的结果，而且都不会是“正确”的排名。建模者在决定如何定义“刺激”方面有创造性的空间，但必须确保无论她决定采用什么定义，都有一个包含可量化（即可测量）过山车方面的系统排名。也许你正在想，为什么上面的学生们在之前的模型中都没有得出“唯一”的正确排名，这是因为两个模型都没有考虑到

这些模型中有一些包含足够复杂的数学。假设我们可以利用数学和物理工具来帮助回答这个问题。

给定一个特定过山车的设计，我们可以计算出乘客可能经历的速度和重力加速度等等。即使有了这些信息，如何利用这些信息来对过山车进行排名并不明显。

考虑四个不同的过山车（A、B、C和D）。过山车A的最大速度比B大，但B的平均速度更高。哪个更刺激？这两个过山车与过山车C相比如何排名？过山车C的重力加速度是A或B的两倍，但只在整个过程中持续10秒钟。假设过山车D从未达到那个重力加速度，但在超过50秒的时间内只维持比A或B低0.5 g的重力加速度。哪个更刺激？建模者

必须选择一个“惊险”的定义。在传达结果时，建模者需要解释为什么做出了决策，并讨论模型的优点和缺点。

在之前的讨论中，我们提到了一些可用于定义“惊险”的可衡量方面，包括最大高度、峰值数量、最大速度或其中的某些组合。这样的列表从哪里获取？它们来自我们所称的头脑风暴过程。头脑风暴是问题解决过程的一部分，允许自由流动的即兴想法，不受评估和打断。

图2
探索“最佳”定义的思维导图示例



过山车的例子表明，在项目开始时进行头脑风暴是一个必不可少的过程，它有助于揭示数学模型可以采取的不同方向。头脑风暴会列出使过山车惊险的所有事物，然后深入挖掘这些属性是如何被衡量的。然而，在过程开始时，人们可能只想让想法自由流动，然后在确定可用资源后再修剪列表。这个过程与做出假设有关，我们将在下一节中详细讨论。

我们将详细介绍头脑风暴的过程，展示它在回收问题的背景下可能的工作方式。在这个问题中，我们想要确定哪种回收方法对一个城市来说是最好的。“最好”这个词需要明确定义，并且有多种方式可以做到这一点。让我们想象一下，我们是一个团队，一起讨论这个问题，我们想到了三种可能的方式来定义这个问题中的“最好”。

为了整理我们的思路，我们可以使用思维导图，如图2所示，给我们一个视觉化的初始头脑风暴的表示。思维导图是一种用于视觉化概述和组织思想的工具。通常，一个关键思想是思维导图的中心，相关的思想被添加进来，以创建一个显示思想流程的图表。在图2中，我们关注“最好”的定义，有三种可能的定义。

分支进一步探索。从这里开始，我们可以一次专注于三个分支之一。让我们先考虑成本最低的选择。

如果我们不了解不同类型的回收，可能需要进行一些研究，了解存在哪些回收项目。

如果您正在进行长期建模项目，并且有很多时间，您将希望进行广泛的搜索，了解有关问题的所有信息。您还需要了解是否有其他人考虑过对这种情况进行建模。如果您正在解决一个问题，并且时间相对较短，您需要小心不要把所有时间都花在互联网上研究问题上。相反，进行快速的初步互联网搜索，以获得广泛的视角（不要陷入细节中）。

假设回收方法列表包括投放中心、路边单一流、路边（预分类）和按需付费。接下来，我们需要考虑成本。让我们专注于其中一种分支，比如路边单一流回收物品的取件。然后我们问自己：“什么因素影响了这种方法的成本？”然后我们问：“对于这些成本中的每一项，它们与城市的属性有什么关联？”

2: 定义问题陈述

图3
在假设“最佳”意味着最低成本的情况下，可能的思维导图

在最低成本方法下的可能最终思维导图如图3所示。

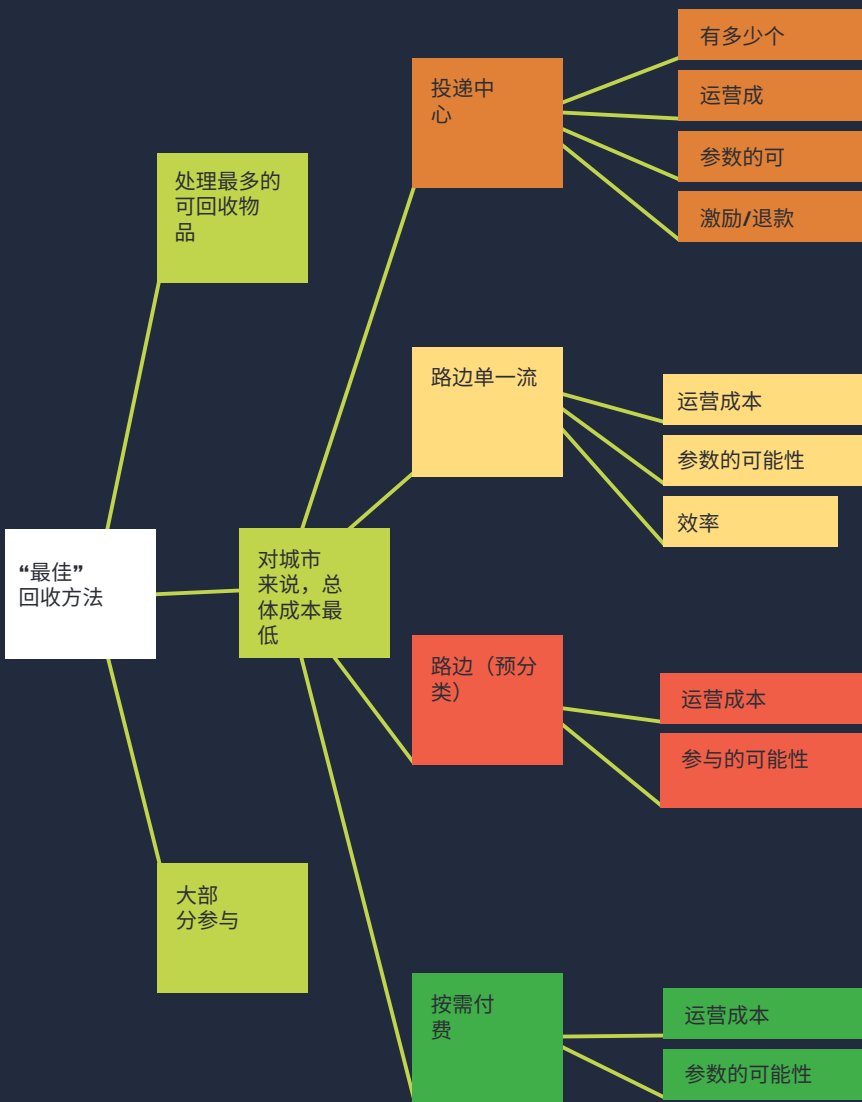
虽然我们不会在这里详细介绍，但你可以想象我们可以按照类似的方式进行每个“最佳”定义的处理。然后我们会选择其中一个可能性，根据这个选择来定义问题陈述，并从那里开始发展模型。

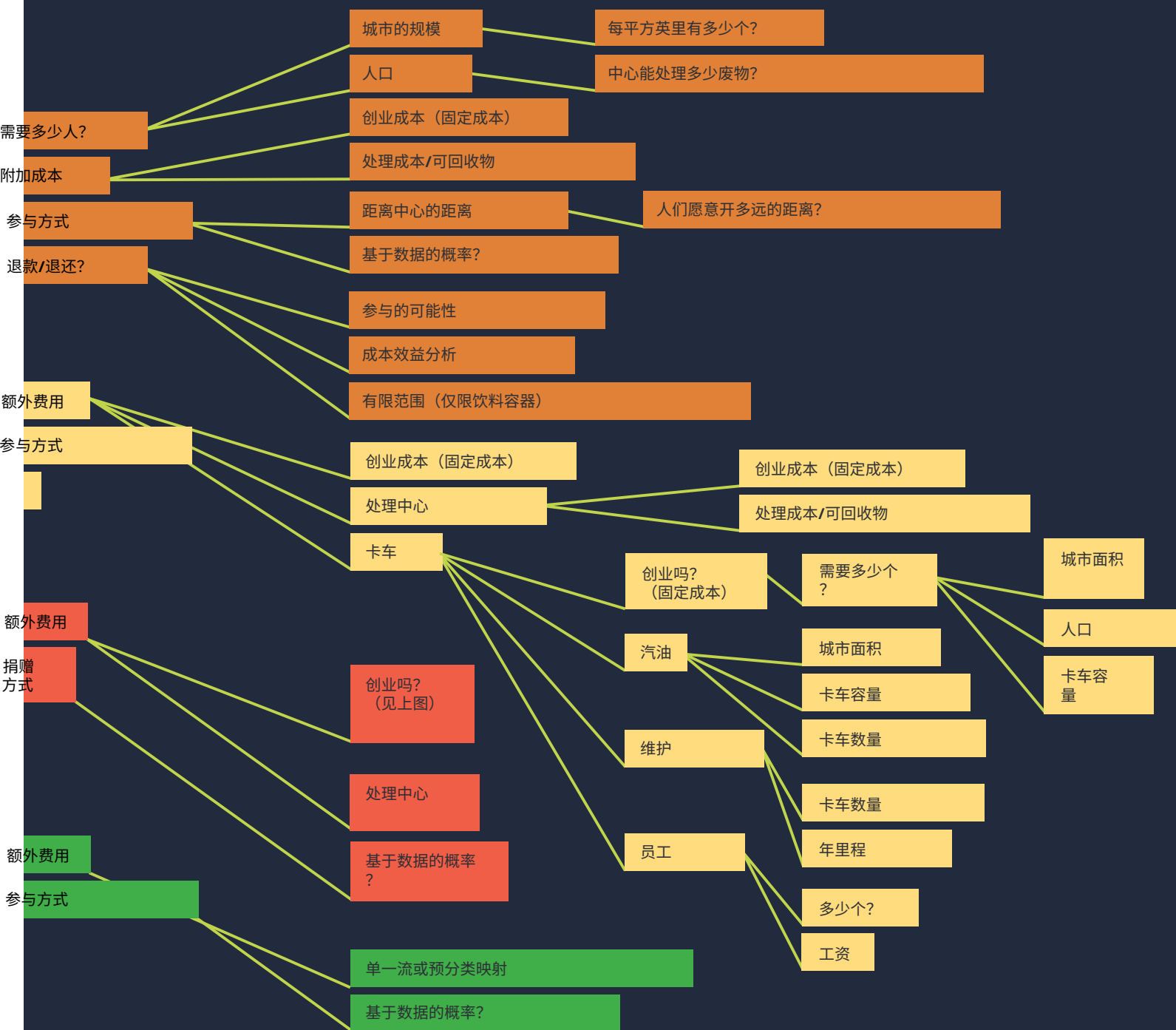
在头脑风暴过程中，从不同的角度探索问题，就好像你可以获得所有你所需的数据一样。在下一节中，我们将讨论如果找不到所需的所有数据，你可以做些什么。不要因为你认为自己无法找到足够的数据而对任何想法不予考虑。

头脑风暴的最重要的一点是让思想自由流动，尤其是在团队中进行。在这个初始阶段最好保持积极并保持开放的心态。建模过程的这一部分是关于创造力的，所以重要的是不批评任何人的想法或建议。

一开始看起来荒谬的方法在经过更多思考后可能会变得创新，所以记下一切！此外，即使你的想法不完美，它可能会激发其他人提出更好的建议。

在探索问题并考虑了几种可能的方法之后，你可以退后一步，看看可能的建模方式。你的直觉将帮助你分析头脑风暴的结果并确定一个合理的问题陈述。





2: 定义问题陈述

总结一下

- ① 通常数学建模问题的描述方式允许多种方法，因此你应该对问题进行简明扼要的重新陈述。
- ② 关注那些可以有不同解释方式的主观词汇。同时，识别那些不容易量化的词汇。例如最好的、令人激动的、高效的、强大的和最优的。
- ③ 通过进行研究和头脑风暴的组合来探索问题，记住你的时间限制。
- ④ 保持开放的心态和积极的态度；稍后可以剪除那些不现实的想法。
- ⑤ 头脑风暴应该像你可以获取所需数据一样进行。
- ⑥ 可视化图表，如思维导图，可以成为构建模型结构的强大工具。考虑使用网站**FREEMIND** (http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page) **[5]**。
- ⑦ 最终，你应该有一个简明扼要的陈述，解释模型将要测量或预测的内容。

活动

为传播疾病问题创建一个思维导图。

3. 假设制定

在向他人展示任何科学工作时，你需要详细解释结果是如何得出的，以便他们能够重复。例如，如果你正在解释一个化学实验，你需要列出使用了哪些化学品、以及使用了多少量和什么顺序。其他化学家只有在使用相同的化学品和程序时才会期望类似的结果。

数学模型的假设清单与进行化学实验的实验步骤一样重要。假设告诉读者模型在什么条件下是有效的。对于一个新手来说，假设制定可能是建模过程中最令人生畏的部分之一，但实际上并非如此！假设是必要的，它们可以帮助你解决一个看似不可能的问题。

许多假设将自然地**从头脑风暴的过程中产生。

对于回收问题，我们的一些假设直接来源于我们在头脑风暴会议中提出的问题，如下页所示。

让我们进一步检查关于有多少人会使用投放中心的假设（称为“参与可能性”）。两个极端的假设是，附近100%的人会使用回收中心，或者没有人会使用。这两种假设都不合理，那么什么样的假设更合理呢？在附录B中出现的这个问题的解决方案的学生们决定

他们决定进行一些调查，看看是否有关于投放中心参与率的成功研究。他们找到了在俄亥俄州进行的一项研究，估计大约有15%的家庭参与了投放中心的回收，并假设这个比例在美国的每个城市都适用。

有人可能会问，如果有投放中心可用，是否可以安全地假设在美国的15%的家庭会参与投放中心的回收。亚利桑那州的居民会像俄亥俄州的居民一样行事吗？当然，有些城市的参与率会远高于15%，而其他城市的参与率则会明显较低。事实上，任何一个城市实际上有15%的参与率的机会有多大？从某种意义上说，给每个城市分配一个参与率是一个荒谬的假设。

针对这种思路，记住两件事。首先，记住为了建立模型必须做出假设。对于每个城市的每个市民进行调查以确定谁会把可回收物带到投放中心是不切实际的。如果我们在建模过程的每个关键点都依赖于具有那种程度的不确定性的数据，我们将永远无法完成任何工作。在找不到数据时，做出合理的假设是实际且重要的。

3：做出假设

头脑风暴问题
头脑风暴问题

假设

“最佳”回收方法是什么意思？

最佳回收方法将被解释为对城市成本最低的方法。

我们应该考虑哪些回收方法？

我们只考虑四种回收方案：

投放中心、单一回收箱、预分类回收箱和按需付费回收。

什么因素影响投放中心方法的成本？

投放中心的成本仅取决于投放中心的数量，通过每个中心的可回收物数量以及每个中心的运营成本。

城市属性的依赖是什么？

所需的投放中心数量取决于城市的面积，城市的人口以及参与的可能性。

其次，您正在开发一个旨在帮助理解某些复杂行为或协助做出复杂决策的模型。它不太可能预测情况的确切结果，只能帮助提供洞察和预测可能的结果。当您提供一系列假设时，您已经尽到了向可能使用您的模型的人提供信息的责任。他们可以决定他们是否认为您的假设适合于他们感兴趣的行为模型。在分析和模型评估部分，我们将详细讨论一些方法，以便您可以检查您的假设对结果的影响。

有可能你会不断搜索，却找不到需要的数据来对模型中的参数进行“有根据”的猜测。没关系；在你的写作中简单地注明未来的工作可能需要在哪个领域进行进一步的调查。如果团队1356没有找到任何关于回收率的估计，他们可能会假设在没有其他数据的情况下回收率为50%（因为这是两个极端情况的平均值）。这比任何一个极端情况（所有居民都回收或没有居民回收）都要好。他们也可能确定25%似乎是合理的（基于他们自己的经验或直觉），并继续使用那个数字。只要将它们作为假设包含在内，所有这些都是合适的。

假设的选择也可能受到可用的数学工具的限制。国家卫生研究院和疾病控制与预防中心都使用数学建模来帮助他们了解传染病的传播。虽然他们的模型可能非常复杂，但实际上它们是建立在我们将在这里讨论的一些简单原则的基础上的，这些原则从相对较少的假设中演变而来。让我们通过考虑多个数学层次的模型来专注于随时间变化的患病人数的确定。

对于疾病传播的简单模型之一可以假设疾病以恒定速率传播。例如，我们可以假设每个患有疾病的人每天将疾病传播给3个人，或者每个人每5天将疾病传播给1个人。在我们继续之前，我们将将其称为恒定速率疾病模型。

传播率驱动疾病的传播，而假设它在整个疾病期间保持恒定似乎是不太可能的。如果我们了解微积分和微分方程，我们可以得到另一个考虑传播率变化的模型。

3: 做出假设

为了决定传播率如何随时间变化，思考疾病传播背后的机制可能会有所帮助：感染者与易感人群以某种方式接触。

因此，可以认为传播速率取决于感染人数和易感人数。我们可以假设传播速率与感染人数和易感人数的乘积成正比。我们将称之为变速疾病模型。我们将在后面的章节中重新讨论这两种疾病模型。

在建模过程的开始阶段做出一些假设。
在建模过程中逐步做出其他假设。建模过程是迭代的；

可以合理地做出假设，确定其对模型的影响，并进行调整以改善结果。你可以在后面的分析和模型评估部分看到一个例子。在建模过程中，仔细列出所有的假设；一个好的建模论文应包含假设清单。

如何知道哪个是“最好”的假设？

对于这个问题没有简单的答案；但一定要承认你所做的假设，并讨论它们的限制。

此外，要跟踪使用的所有资源，以便可以创建参考文献。

在所有这些选项中，如何知道哪个是最好的假设？对于这个问题没有简单的答案；最重要的是承认你所做的假设，并在适当的时候讨论可能出现的限制。

总结一下

- ① 假设通常是在头脑风暴和定义问题陈述的过程中自然产生的。
- ② 你应该进行一些初步的研究，并可能找到数据来帮助你做出假设。在没有相关数据的情况下，做出合理的假设，并在写作中证明这个假设。
- ③ 不同的假设可能导致不同但同样有效的数学模型，这取决于不同的数学水平。
- ④ 并非所有的假设都是在初始的头脑风暴中提出的。有些假设是在建模过程中逐步产生的。记下你所做的假设，并在模型的写作中包含一个假设清单。

活动

在前一节关于过山车模型的头脑风暴基础上继续建设。当然，我们没有揭示过山车被认为是令人兴奋的所有方式。根据你对问题的理解，用自己的话来定义问题陈述。

最后，进一步推进你的工作，并列出了你可以建立模型的假设。

4. 定义变量

在明确定义问题陈述并做出一组初始假设（这个列表可能会变得更长）之后，你就可以开始定义模型的细节了。现在是暂停一下问一下，你可以测量什么是重要的。将这些概念作为变量进行识别，带有单位和一定范围的概念，是构建模型的关键。

模型的目的是预测或量化感兴趣的事物。我们将这些预测称为输出。

作为模型的输出。我们还使用另一个术语来表示输出，即依赖变量。我们还将有独立变量，或者模型的输入。模型中的某些数量可能被保持恒定，这种情况下它们被称为模型参数。让我们看一些简单的例子，这将帮助你区分这些概念。我们还将看到它们如何依赖于你的观点和问题陈述。

另一个术语是输出。

模型的输入。

模型的目的是预测或量化感兴趣的事物。我们将这些称为模型的输出。

例子1： 粉刷一座房子

假设我们计划给一座房子涂漆。我们需要知道房子的尺寸，以便我们可以找到表面积， SA （平方英尺）。我们还需要知道油漆的效率， E （平方英尺/加仑），它告诉我们一加仑油漆可以覆盖多少平方英尺。请记住，效率因品牌而异。我们设 V （加仑）为我们需要的油漆体积。在这里，了解效率的单位可以帮助揭示变量之间的关系：

$$E = \frac{\text{表面积}}{\text{体积}} = \frac{SA}{V}$$

注意我们可以重新书写这个关系，并使用以下三个等价关系之一：

- ① $E = SA / V$
- ② $SA = E \cdot V$
- ③ $V = SA / E$

某物是一个依赖变量还是独立变量或参数，往往取决于建模者和问题陈述的角度。想象一下，你拥有一家油漆公司，并且总是使用CoversItAll品牌的油漆。当客户雇佣你时，你会测量房子的尺寸，然后想知道完成工作需要多少油漆。在这种情况下，CoversItAll油漆的效率是恒定的，因此它是一个模型参数。你将使用方程（3），将房屋的表面积作为输入，需要的油漆体积作为输出。

因变量，而 E 是一个常数模型参数。

假设你是一位房主，想要从五种油漆品牌中选择一种来最小化涂刷房屋所需的数量。在这种情况下，你的房屋表面积是一个常数，因此被视为模型参数。如果我们知道五种油漆品牌的效率，我们将再次使用方程（3），但这次以 E 作为输入变量，以体积作为输出。因此，在这种情况下， E 是自变量， V 是因变量。

确定某个变量是因变量、自变量还是参数，通常取决于建模者和问题陈述的角度。

因此， SA 是独立变量， V 是

例子 2: 恒定速率疾病模型

举个例子，回顾一下前一节讨论的恒定速率疾病模型，我们想要确定任意给定时间点的感染人数。根据这个问题陈述，让 t 表示时间（以天为单位）。这将是输入（自变量）。让 $I(t)$ 表示时间 t 时感染个体的数量，它是模型的输出（因变量）。在这个恒定速率疾病模型中，我们假设每个患病的人在给定的固定时间段内会将疾病传播给一定数量的人。我们定义参数 τ 为每个感染者将疾病传播给其他人的时间段（因此 r 也是一个参数）。

此外，我们可以定义一个参数 I_0 作为感染者的初始人数。换句话说， $I(0) = I_0$ 。例如，如果我们有 $I_0 = 10$ ， $\tau = 2$ 天，和 $r = 3$ ，那么我们考虑的是一个以 10 个感染者开始的人群，每 2 天每个感染者将疾病传给 3 个未感染者。

这些简单的例子表明，问题陈述将指导依赖变量（即，模型输出）的选择。依赖变量和参数通常由您的假设和信息的可用性决定。关键思想是独立变量引起依赖变量的变化。让我们看一个更复杂的模型，展示了如何需要子模型来为总体模型提供输入。

关键思想是独立
变量引起依赖变量的
变化。

示例3: 确定回收成本

对于回收问题，我们寻求一个能够预测城市实施和运行回收计划成本的模型。因此，模型的输出应该是以美元计算的。模型的输入将是什么？我们可以利用头脑风暴会议的结果来帮助我们。让我们考虑一下确定投放中心成本的模型。根据图3中显示的头脑风暴，一个给定城市使用投放中心的成本可能取决于所需的中心数量、运营成本、人们参与的可能性以及退款或激励的可能性。

让我们考虑一下本指南中提供的解决方案的方法。这些学生根据维护中心的成本以及中心将创造的收入计算了投放中心的成本。后一事实直接取决于当地人口的参与率。因此，首先需要确定单户参与率的概率。确定单户参与率是一个子模型如何生成主模型输入的示例。

继续这个思路，学生们基于一个家庭参与的可能性来确定其与投放中心的距离。因此，必须了解房屋在整个城市的分布以及投放中心的位置。这个团队假设每个城市都是一个正方形，房屋都排列在网格上。为了确定投放中心在城市网格中的位置（这实际上将决定需要多少个投放中心），学生们计算了市民最大距离 d 。

每周愿意开车去一个投放中心。利用这个距离，在网格上放置投放中心以确保它们不重叠，同时覆盖整个城市。

因此，在这种方法中，注意到 d 是一个确定投放中心位置的输入，但是 d 本身需要首先确定（因为不清楚 d 的合理值是多少，也没有一个已知的值适用于美国的每个人）。因此，最终我们可以使用数学建模方法来确定 d ，基于一些假设。该团队决定 d 取决于到达投放中心的成本，而这将取决于汽油价格、典型汽车的油耗以及家庭愿意每月支付的回收费用。这些模型参数的值是通过查阅可用资源的文献找到的。

总结他们的方法，他们假设以下是模型参数来找到 d ：

- 人们愿意每月支付\$2.29进行回收，或每周支付\$0.53。
- 人们每两周会去中心。
- 每加仑汽油的平均价格为\$3.784。
- 乘用车的平均里程为23.8英里/加仑。

4: 定义变量

$$d = \left[\frac{(\$0.53/\text{周}) \cdot (23 \text{ 英里/加仑})}{\$3.784/\text{加仑}} \right] / 2 = 1.66 \text{ 英里/周.}$$

通过给定一个值为 d 的变量，学生们能够考虑到城市网格的大小，然后将城市划分为适当数量的回收站，以覆盖整个城市。接下来，团队希望提出一种预测参与可能性的方法，但这需要在开发前面的子模型之后才能完成。

请注意，他们建立的回收站成本模型的输入变量包括城市的面积、人口、家庭平均人数、市民愿意驾驶的最大距离以及所需的回收站数量。然而，需要进行更多的建模来确定这些输入变量的值，正如我们在输入变量 d 中所示。请注意，这些是从图2中的头脑风暴中暗示出来的具体细节，但在这个阶段，需要更多的细节（以及额外的头脑风暴和假设）。

总结一下

- 1 问题陈述应确定模型的输出。输出变量本身将是依赖变量。
- 2 初步头脑风暴的结果可以提供关于哪些变量应该是独立变量和哪些应该是固定模型参数的见解。
- 3 注意单位，因为它们可以揭示变量之间的关系。
- 4 您可能需要进行一些研究并做出额外的假设，以获得必要的模型参数值。
- 5 可能需要子模型或多个模型来生成一些模型输入。

活动

确定基于刺激程度对过山车进行排名的因变量和自变量。有哪些可能的模型参数？

5. 构建解决方案

现在你已经有了一个初始的数学模型，你需要使用该模型生成初步的问题答案。你采取的方法当然取决于你拥有的模型类型和数学背景。它可能仅涉及考虑某些参数的不同值，以查看输出如何变化，它可能涉及微积分或微分方程的技术，或者它可能涉及使用图表来了解数据的趋势。在本章中，我们将为您提供一些解决问题的策略。

当您首次接触任何数学问题时，通常会查找您个人的工具箱以使用数学技巧。有时，如果我们从错误的方法开始，更好的方法自然会出现。所以，重要的是要去解决它，看看会发生什么！以下问题可能会对您有所帮助。

- 我以前见过这种类型的问题吗？
- 如果是的，我是如何解决的？如果不是，这个问题有什么不同？
- 我是否只有一个未知数，还是这是一个有许多相互依赖的多变量问题？
- 模型是线性的还是非线性的？
- 我是同时解决一组方程，还是可以逐步解决？
- 我可以使用哪些软件或计算工具？
- 图表或其他可视化图表是否有助于提供洞察力？
- 我能否用一个简单的模型来近似复杂的模型？
- 我可以保持某些值不变，让其他值变化，以查看发生了什么？

5: 构建解决方案

当需要使用什么数学技术是很明确的时候（例如，因式分解，找到多项式或函数的零点，对函数进行积分，模拟模型随时间演化以了解输出如何变化等），肯定会有这样的时刻。其他时候，当不清楚如何继续时，分析简单的例子、特殊情况或相关问题可能会有帮助。即使是“猜测和检查”的方法有时也能提供一些深刻的见解。

可以使用图形计算器或诸如Excel、Mathematica或Maple等计算机软件来促进数学实验。

可以采用多种方法来构建解决方案。我们将展示每个以下示例的几种方法，这些示例按照数学水平递增的顺序出现。我们还展示了如何利用软件来帮助您找到解决方案。

示例1： 酸雨

让我们考虑通过构建不同的模型来解决一般问题，这些模型可能会导致不同的结果。假设我们想确定酸雨对你们镇的水资源产生了什么影响。我们已经从之前的部分知道，这个开放性的陈述需要被细化为一个简明的陈述。假设在一些头脑风暴和思维导图之后，我们制定了以下问题陈述：测量二氧化硫（SO₂）和四个不同位置的一氧化氮（NO）的浓度，并利用结果确定最佳的取水地点。

方法一。

排名根据每个位置的测量结果，将位置按照最安全、第二安全、第三安全和最不安全的顺序排名。这种方法允许定性分析，但至少包含一些定量分析，因为它要求我们评估SO₂的重要性。

与NO并定义术语安全。

方法二。

基于方程的解法我们可以评估SO和NO之间的重要性差异，并创建一个方程为每个位置分配一个得分。²该方法需要代数建模和运算，以及比例的概念。得分最高的位置获胜。这需要代数建模和运算，以及比例的概念。

方法三。

定性比较我们可以判断是否有任何一个地点过于污染。例如，如果一个地点同时具有最高水平的SO₂，如果不是这样，那么就不应该使用该网站。这将问题简化为在三个站点中选择，并且相同的思想可以应用于将它们减少到两个，然后到最后一个。

例子2： 恒定速率疾病模型

通常，在建模真实世界的现象时，我们对预测未来值感兴趣。也就是说，我们想要探索我们关心的某个值随时间的变化。我们将讨论几种方法，可以用来找到解决常速疾病模型的方法（在这种模型中，我们希望确定在给定时间段内，每个患病者将疾病传播给准确地 r 个人的人数）。对于这个例子，我们将 I_0

设为10， τ 设为2天， r 设为5。换句话说，我们面临的情况是，有10个人感染了一种疾病，他们和所有未来感染的人都会每2天传播给准确地5个易感人群。

方法一。

手动计算我们首先手动进行一些简单的计算，以确定是否出现模式。经过2天，我们有最初的10个患病者，但我们还有50个人，因为每个10个感染者都将疾病传播给了5个其他人。因此，当 $t=2$ 时， $I=60$ 。再过2天，我们有 $I=60+(5\times60)=360$ ，依此类推。我们可以通过将数字整理成表格的形式来组织，如表1所示。

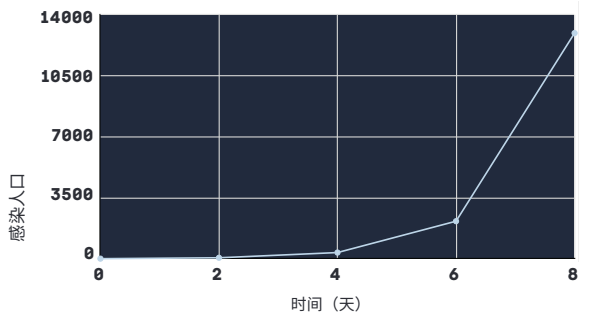
方法二。

通过技术计算直接的迭代计算，如此问题所需的计算，可以在电子表格软件如Microsoft Excel中轻松地进行“编程”。Excel是一个用于逐步离散化可视化的有用工具，它可以让您在表格中看到每个时间步骤中每个变量的值。如果您不知道如何使用Excel，您可以通过在互联网上搜索在Excel中执行迭代计算的资源或视频来找到相关信息。如果我们在Excel中进行了计算，我们还可以轻松地创建解决方案的图表，如图4所示。

表1.手动计算的恒定速率疾病模型

t , 以天为单位	I , 感染人口
0	10
2	60
4	360
6	2160
8	12960
10	77760
12	466560

图4.具有 $r=5$ ， $\tau=2$ 和 $I_0=10$ 的恒定速率疾病模型输出的图表



例子2: 常速疾病模型 (续)

方法三。

模式识别我们可能会注意到, 通过手工计算或使用技术, 如果我们知道某个时间步骤的感染人数, 那么我们可以通过乘以6来得到下一个时间步骤的感染人口。让我们看看为什么会发生这种情况。

在时间 $t = 0$ 时, 我们有10个感染者。在时间 $t = \tau = 2$ 天时, 我们有最初的10个感染者外加50个, 总共60个。

对于这组参数:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= 10 + 5 \cdot 10 \\ &= (1 + 5) 10 \\ &= 6 \cdot 10. \end{aligned}$$

对于一般的参数集:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= I_0 + \tau I_0 \\ &= (1 + r) \cdot I_0. \end{aligned}$$

继续下去, 在时间 $t = 2\tau = 4$ 天时, 我们有上一个时间步骤的60个, 再加上5倍的60个。

对于这组参数:

$$\begin{aligned} I(2\tau) &= 60 + 5 \cdot 60 \\ &= (1 + 5) 60 \\ &= 6 \cdot 60. \end{aligned}$$

对于一般的参数集:

$$\begin{aligned} I(2\tau) &= I(\tau) + r \cdot I(\tau) \\ &= (1 + r) \cdot I(\tau). \end{aligned}$$

对于 $I(3\tau)$, 公式是什么样的? (试试看!)

现在我们知道了为什么要乘以6, 但我们可能还能看到更深层次的公式出现。

实际上, 我们可以将 $I(\tau)$ 的表达式代入到 $I(2\tau)$ 的方程中, 如下所示。

对于这组参数:

$$\begin{aligned} I(2\tau) &= 6 \cdot 60 \\ &= 6 \cdot (6 \cdot 10) \\ &= 6^2 \cdot 10. \end{aligned}$$

对于一般的参数集:

$$\begin{aligned} I(2\tau) &= (1 + r) I(\tau) \\ &= (1 + r) \cdot (1 + r) I_0 \\ &= (1 + r)^2 I_0. \end{aligned}$$

你应该验证对于 $I(3\tau)$, 我们有以下方程。

对于这组参数:

$$I(3\tau) = 6^3 \cdot 10.$$

对于一般的参数集:

$$I(2\tau) = (1 + r)^3 I_0.$$

你可能会发现一个模式出现, 这将引导你找到在经过 n 天后感染人口的闭合形式解。

对于这组参数:

$$I(n\tau) = 6^n \cdot 10.$$

对于一般的参数集:

$$I(n\tau) = (1 + r)^n I_0.$$

这个结果, 一个指数模型, 与表1中的值和图4中的对应图一致。

每种方法的结果都是我们所假设的完全有效的模型, 但我们现在看到该模型在准确描述一些现实世界特征的能力上可能有限。在下一节中, 我们将讨论这些问题, 并将重新评估该模型作为模型评估的一部分。

例子3： 变速疾病模型

在变化率疾病模型中，我们还没有定义变量，所以现在让我们来定义变量，并建立要解决的微分方程。

我们定义总人口为 P ，每个人口成员必须属于两个类别中的一个：易感染者 S 或感染者 I 。因此， $P = S + I$ 。我们假设总人口保持不变，但 S 和 I 的值随时间变化，因此我们可以选择写成 $P = S(t) + I(t)$ 。

回想一下，在变化率疾病模型中，我们考虑的是一种疾病传播率与感染人数和易感人数的乘积成正比的人群。我们可以将传播率看作人们感染的速率，或者是人口 $I(t)$ 的变化率。熟悉微积分的读者可能会将其认为是导数。我们将这种随时间变化的变化率 $I(t)$ 表示为。然后，我们可以将“疾病传播率与感染人数和易感人数的乘积成正比”这个假设转化为方程。

$$\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = kI(t)S(t), \quad (4)$$

其中 k 是一个（正）比例常数。 k 的值越大，就越大。因此，一个较大的 k 值表示一种高度传染的疾病。

为了找到微分方程的解，如果我们只有一个独立变量会很有帮助。由于我们假设人口 P 是恒定的，所以我们可以利用关系式 $P = I(t) + S(t)$ 来写 S 为 $S(t) = P - I(t)$ 。

然后我们可以将方程（4）重写为以下形式：

$$\frac{dI}{dt} = kI(t)(P - I(t)). \quad (5)$$

方法一。

解析解如果你之前学过微分方程，你可能会认识到这个特定的微分方程可以用一种叫做变量分离的技术来解析求解。（参见任何标准微积分教材。）使用这个技术并假设初始条件为 $I(0) = I_0$ ，你可

以找到解析解为

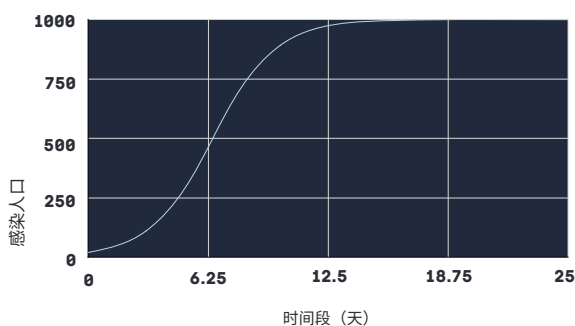
$$I(t) = \frac{PI_0}{I_0 + (P - I_0)e^{-Pkt}}. \quad (6)$$

或者，如果你有使用类似Maple这样的符号计算工具，你可以使用技术来生成这个解析解。

有了解析解，我们可以选择一些参数值来生成一个图表，以展示模型的行为。（见图5。）注意，这个模型在疾病传播的初始阶段表现出与常速疾病模型相同的指数增长，但当剩下的未感染人数较少时，增长速度会减慢。我们可以看到 I 随着时间的增加趋近于1000。在生成图表时，我们使用了总人口 $P = 1000$ （一个参数），因此我们的模型预测随着时间的推移，整个人口都会感染这种疾病。

图5.具有变化率的疾病模型输出的解析解

$k = 0.0006$, $P = 1000$, 和 $I_0 = 20$



例子3: 变化率疾病模型（续）

方法二。

近似解虽然我们可以找到上述微分方程的解析解，但是许多微分方程以及描述现实世界现象的其他方程和方程组不能直接求解。在这些情况下，常常使用“数值方法”来近似求解。

数值

方法在建模中是一个强大的工具，特别是如果你还没有接受过微积分和微分方程技术的正式培训。

以方程（5）为例。假设我们没有解析解（方程（6））可以在任何时间选择进行评估。一种数值方法是尝试计算指定后续时间的感染人口的近似值。我们知道初始人口， $I(0) = I_0$

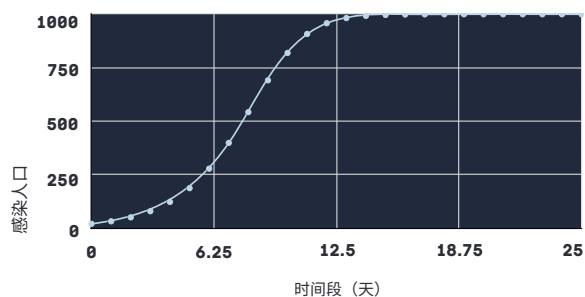
，我们有一个描述人口变化率的模型。直观上，我们应该能够预测以后某个时间点的感染人数，比如 $t = 1$ 。为了做到这一点，我们可以将感染人口在那个时间段内的变化表示为

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{I(1) - I(0)}{1 - 0}$$

并将我们所知道的内容填入方程（5）的右侧。然后我们可以解出 $I(1)$ 关于 I 的表达式。然而，我们应该小心。实际上，我们得到的是 $I(1)$ 的近似值，因为我们进行了近似，但我们 $\frac{dI}{dt}$ 的目标是确定感染人口的近似值，而这正是我们已经完成的。然后我们可以在同样的情况下使用我们得到的 $I(1)$ 的值。

通过数值方法来预测 $I(2)$ 等等。这种数值方法称为前向欧拉方法，在Excel中很容易实现。

图6。使用变化率疾病模型的数值解，其中 $k = 0.0006$ ， $P = 1000$ ， $I_0 = 20$ ，时间步长 $\Delta t = 1$ 天



我们在图6中展示了不同时间点上感染人口的近似值的图表，在附录A中可以看到我们获得这些结果的详细信息。

请注意，数值解的图表看起来很像我们在图5中看到的解析解的图表。虽然我们很高兴数值解能够很好地逼近解析解，但我们应该注意这些图形并不完全相同。每种数值方法都会引入一些误差，前向欧拉方法也不例外。误差的研究是一个复杂的问题，我们在这里不打算深入讨论。

建立解决方案的摘要

根据您在数学和软件方面的背景知识，可以通过各种方法来找到模型的解。通过排序解决是一种对于没有数学训练以产生代数公式的学生来说非常好的方法。然而，即使有方程，通常也有多种方法可以得出最终答案。诸如Excel之类的软件工具可以帮助获得解决方案。

如果你使用数值逼近技术，重要的是要意识到可能引入的误差。如果其他方法都无效，尝试猜测和检查。

总结一下

- 1 如何构建解决方案可能取决于可用的数学工具。
- 2 解决问题通常有多种方法，所以只要开始并观察结果。
- 3 如果你不知道如何立即解决手头的问题，请自问一系列问题来帮助你入门。
- 4 不同的解决方法可能导致不同性质的解。这是完全可以接受的。

活动

继续使用你的模型为过山车排名系统工作，根据你对“刺激”的定义。使用你的排名系统对至少**10**个过山车进行排名。

你可以在**RCDB.COM**找到所需的数据。

6. 分析和模型评估

我们将这一部分分为两个小节。第一小节，我的答案是否合理？提供一些快速检查方法，以确定你的解决方案是否合理。第二小节，模型评估，提供更深入的技术来分析模型。

通常我们如此兴奋地构建和解决数学模型，以至于忘记退后一步仔细检查结果。虽然这是可以理解的，因为达到那一点需要辛勤工作，但重要的是问自己，“我的答案是否合理？”有时，结果可能表明计算中的错误。其他时候，你可能会发现需要额外或替代的假设才能使解决方案变得现实。如果结果是合理的，

如果需要，还需要进一步分析以评估模型的质量。请记住，开放性问题可能有多个解决方案，并且结果取决于所做的假设和所使用的数学的复杂程度。诚实的评估是必要的，以解释模型适用的情况和不适用的情况。在本节中，我们将讨论如何分析结果以及如何评估模型的质量。

我的答案是否合理？

在建模过程中，你可能会对输出有一些直觉。在这里，我们提供一些指导，以通过分析模型的输出来回答“我的答案是否合理？”的问题。

• 答案的符号是否正确？

例如，如果你的疾病模型被假设为在某个特定时间计算感染人数，那么答案为-1000显然是没有意义的。仔细检查你的计算，特别是如果你使用软件的话。例如，在Excel中，当定义一个公式时很容易选择错误的单元格。你的模型可能是正确的，但是它的实施可能有问题。

• 答案的大小是否合理？

如果你试图估计一辆汽车的速度，例如，那么如果你的模型预测每小时1000英里的值，那就没有意义了。有时候，当一个数字的数量级错误时，可能在过程中的某个地方使用了错误的单位。

• 模型的行为是否符合预期？

如果输出通过图表或绘图来可视化模型的输出，仔细观察截距、最大值或最小值，或者长期行为。你是否期望有一个水平渐近线，但你的图表却无限增长？如果你有一组数据，并且认为两个变量之间存在关系，请绘制数据。斜率的数学错误会立即显现出来。可能是因为你忽略了一些假设，单位错误，参数不现实，或者软件使用不正确。

• 你能验证这个模型吗？

有时候是可能的使用现有数据验证你的模型。例如，如果你在世界上最高的过山车之一——Cedar Point的顶峰惊魂过山车上使用了你的过山车排名模型，并且它以每小时120英里的速度行驶，但输出结果却只是平庸，那么很可能你的模型没有达到你的预期。

模型 评估

现在，您已经验证了您的模型是正确的，是时候退后一步，考虑您的模型的有效性了。这包括识别您的模型的优点和缺点，并在更深层次上理解模型的行为。进行敏感性分析，分析输入和参数的变化如何影响输出，可以有助于理解模型的行为。

识别优势和劣势

一旦你确信输出结果是正确的，并且模型达到了你的预期，评估模型的质量。这个评估需要包含在关于你的模型的写作中，以帮助人们理解你的模型适用的条件，这与在建模过程中做出的假设密切相关。你需要提供一个诚实、准确的评估你的模型能力。

这也是突出模型优势的机会。例如，即使一个模型是使用简单的物理原理建立的，它可能只需要很少的专业知识就能提供有意义的见解。

这可以是一个比较复杂的模型的巨大优势，它要求用户编程和运行

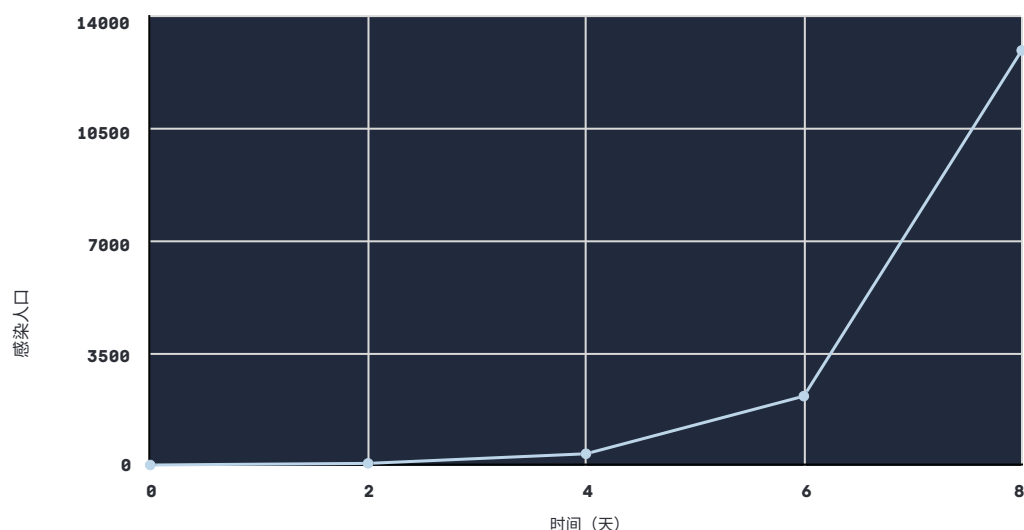
软件可以帮助用户研究其他模型参数，以适应自己的需求，或者整理复杂的输出以得出结论。如果可能使用您的模型的人能够理解并对其有信心，这也是一个优势。让我们通过查看恒定速率疾病模型来研究这个过程。回想一下我们的假设，每个感染者每 τ 天传播疾病给 r 个人。从此，我们找到了以下指数函数来描述感染人口在 $n\tau$ 天后的情况

$$I(n\tau) = (1 + r)^n I_0.$$

图7展示了模型输出的图形 I 。感染者， $\tau = 2$ 天，和 $r = 5$ 。

$I_0 = 20$

图7.具有恒定速率的疾病模型输出的图表，其中 $r=5$ ， $\tau=2$ ，和 $I_0=20$



这个模型有一些宝贵的优点：

- 这个模型很容易向他人描述，这意味着他们可能对其输出有更高的信心。允许完全理解模型的所有部分，在尝试理解在不同输入值下给出的输出的重要性时非常有价值。

- 我们找到了一个解析解。如果我们有 I_0 ， τ 和 r 的值，函数 $I(n\tau) = (1 + r)nI_0$ 可以用来解决任何时间点的感染者数量。

- 我们的模型与我们的假设一致。我们的主要假设是疾病以恒定的速率传播。我们的模型准确描述了这种行为，因此我们已经开发出了一个有意义的解决方案。

这个模型还有一些显著的弱点：

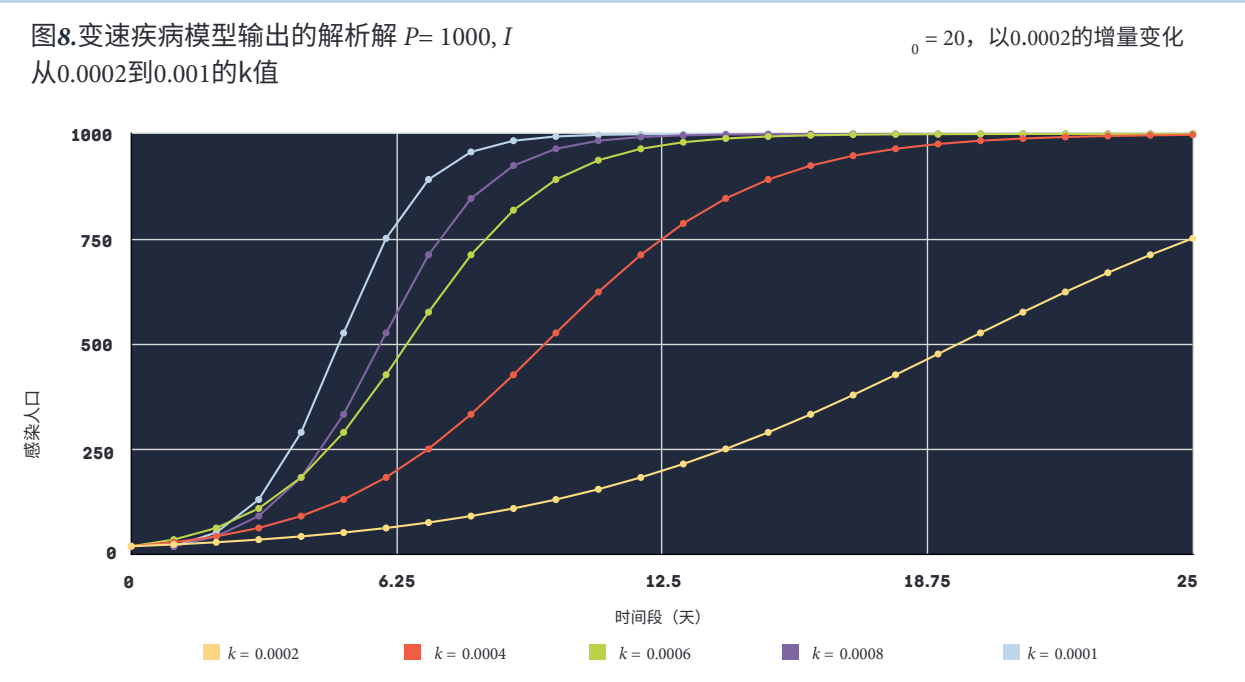
- 我们的模型非常简单。除了是一个优点，它也是一个缺点。我们可能会担心恒定的传播速率假设，特别是因为它与我们对疾病传播的直觉不一致。

- 这个模型不适用于所有类型的疾病。我们的模型只有两个个体类别：易感者和感染者。在现实生活中，某些疾病感染后，人会康复，然后对该特定疾病获得免疫力。这个模型无法准确描述这种情况。

- 这个模型预测疾病会传播给每个人。换句话说，在这组假设下，疾病将在人群中传播，直到每个人都感染了这种疾病。这（希望）不是一个合理的情景。

在这种情况下，我们有一个基于严谨的数学的模型，它为我们提供了对疾病传播的深入洞察，但如果将其作为最终答案，也会导致一些可疑的现实世界结果。总的来说，了解模型的能力可以带来更好的整体解决方案。在这种意识下，你知道何时使用你的模型是合适的，你也有一个起点，可以构建未来（更具体和/或更现实）的模型。识别模型的弱点并不会减少你所做的努力；模型师承认模型的弱点总是更好的选择。如果读者发现了模型师忽视的弱点，那么读者对模型和模型师的评估就会受到影响。

敏感性分析



在进行模型评估时，考虑模型对假设和参数变化的敏感性也非常重要。如果一个参数的微小变化导致输出发生显著变化，则认为模型对该参数敏感。

有几种方法可以进行敏感性分析。一种简单的方法是在保持所有其他参数不变的情况下，考虑某个参数的一系列值，计算输出，然后确定对输出的影响。例如，让我们来看看在变速疾病模型中改变传播率对输出的影响，其中 $P=1000, I_0=20$ 。

从图8可以看出，逐渐改变传播率如何影响我们模型的输出。特别是，我们注意到当 $0.0002 \leq k < 0.001$ 时，疾病在15天后已经感染了大部分（如果不是全部）人口，但当 $k=0.0004$ 时，疾病需要超过20天才能感染大部分人口。当 $k=0.0002$ 时，15天后仍有相当比例的人口尚未感染。

这是什么意思？嗯，这取决于你解决的问题。在这个例子中，我们学到了改变 k 可以增加（或减少）疾病在整个人群中的传播。如果一个人群感染了这种疾病，那么这个模型可以证明可能抑制疾病传播速率的药物可以创造出发展有效治疗所需的时间。

在我们的敏感性分析中， k 的变化相当小（0.0002）。你如何知道你的变化应该有多大（或多小）？在某些情况下，你可能有真实世界的数据来帮助你做出决策。如果那不可行，就用常识作为你的指导，并尝试不同的数字来培养直觉。例如，在变量传染病模型中，我们还可以保持 k 不变，并研究对初始感染人口 I_0 的变化是否会产生影响。

在这种情况下，我们肯定会变化我 I_0 以大于0.0002的增量

模型改进

如果时间允许，评估和敏感性分析可以改进模型。正如前面指出的，建模是一个迭代的过程，可以进行改进以开发更加真实的场景。如果建模是在有时间限制的情况下进行的，比如竞赛或作业任务，那么可能无法进行改进（尽管通常可以指出可以改进模型的类型）。然而，对于长期项目来说，模型评估确实是在重新开始建模循环之前的一个中间步骤。讨论可能对模型进行的修改，即使你不能进行修改，也表明你能够超越第一种方法进行思考。我们演示了如何使用变速疾病模型进行这种操作。

在我们之前的疾病模型中，人口被分为两类：感染和未感染。然而，如果我们考虑像流感这样的事情，我们知道人们能够在短时间内传播流感，但最终他们会产生免疫力，不再传播疾病。我们的初始疾病模型肯定无法捕捉到这种动态。在考虑到我们的新因素后，我们希望感染者在经历疾病后能够从感染人群中移出。

流感已经结束。把他们放回易感人群中是没有意义的，因为我们知道他们已经获得了免疫力。所以我们需要创建另一个类， R ，代表那些已经从疾病中康复的人。

我们首先定义以下内容：

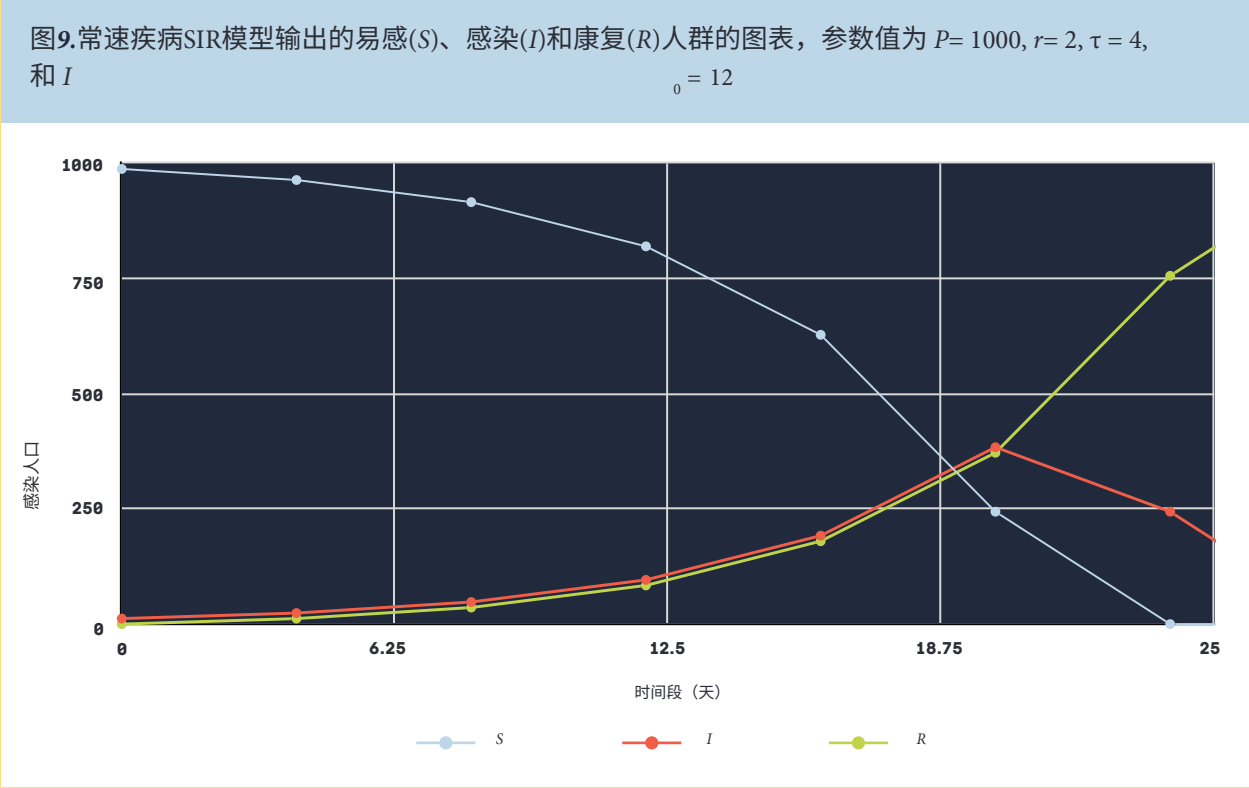
P = 总人口数， S = 人口中易感人群的数量，

I = 人口中感染并传播疾病的人数， R = 人口中已经“康复”的人数（即不易感并且不再传播疾病）。

注意，对于任何时间， $P = S + I + R$ 。

我们假设每个感染者恢复所需的时间相同。也就是说，我们的模型不考虑一个人恢复需要3天，而另一个人需要5天的可能性（尽管我们的模型的后续改进可能会包括恢复间隔的随机分布）。

6：分析和模型评估



让我们继续看一个具体的例子。
假设在时间 $t= 0$ ，总人口为1000的情况下，有12人感染了一种新病。我们假设每个感染者在4天后恢复，并且在这4天内每个感染者传播疾病给其他2个人。因此，我们将 τ 设为4天。

在时间 $t = 0$ ，我们有 $I_0 = 12, S_0 = 988$ ，和 $R_0 = 0$ 。在经过4天的时间段后，即当 $t= \tau$ 时，所有12个感染者都转为康复状态。
与此同时，他们感染了24个易感者。
因此我们有

$$\begin{aligned} I(\tau) &= 2 \cdot I_0 = 2 \cdot 12 = 24, \\ S(\tau) &= 988 - I(\tau) = 988 - 24 = 964, \text{ 以及} \\ R(\tau) &= R_0 + I_0 = 0 + 12. \end{aligned}$$

我们可以按照表2和图9继续进行。
我们改进的模型现在更符合我们对疾病的直觉，它开始缓慢，达到高峰，然后随着剩余感染人口的康复而消失。

这个模型并不完美，但它确实为我们提供了对受影响人群的动态互动的洞察。这个模型并不完美，但它确实为我们提供了对受影响人群的动态互动的洞察。

表2.感染、易感和康复人群随时间的变化，参数值为 $P= 1000, r= 2, \tau = 4,$ 和 $I_0 = 12$

t	$S(t)$	$I(t)$	$R(t)$	$P(t)$
0	988	12	0	1000
τ	964	24	12	1000
2τ	916	48	36	1000
3τ	820	96	84	1000
4τ	628	192	180	1000
5τ	244	384	372	1000
6τ	0	244	756	1000

总结一下

- ① 一定要留出时间来分析你的结果，因为这确实是整个建模过程中的关键部分。
- ② 始终检查你从模型中得到的输出，并问自己是否合理。如果你的答案不合理，请验证你在实施模型时是否犯了错误。
- ③ 如果你的解决方案与你的假设一致，但与你试图描述的现实现象不一致，你可能需要通过调整假设来完善你的模型。
- ④ 列出你的模型的优点和缺点。
- ⑤ 尝试确定你的模型对参数和假设的敏感性。
- ⑥ 如果有更多时间，包括具体的改进措施。

活动

阅读回收问题的解决方案。

那个模型的优点和局限性是什么？回收模型中可以检查敏感性的参数是什么？

如何分析回收模型的敏感性？写几段评估这个模型的文字。

7. 把所有东西放在一起

现在已经创建、解决和评估了一个模型，是时候把所有东西写成一篇完整的解决方案论文了。这一步和达到这一点所需的努力一样重要。记住，你是这个问题的专家，现在你的角色是向不熟悉你的解决方法的人详细解释你所做的事情。为此，从最初的头脑风暴过程到最终分析，记好所有你所做的假设是至关重要的。好的写作也需要时间，所以一定要留出一段时间，远离数学建模，专注于高质量的写作。在本节中，我们将讨论如何组织你的报告以及成功技术写作的一些关键点。

这一步与到达这一点所需的努力一样重要。请记住，你是关于问题的专家。

结构

技术报告通常以摘要页开始，也称为**执行摘要或摘要**，长度为一页或更短。这不是一个引言；实际上，它是一个总结问题解决方法和结果的简要描述的地方。

把结论放在开头可能看起来很奇怪，但这种“底线优先”的方法对于阅读报告的人来说很方便。

摘要或总结页应重新阐述问题，简要描述所选择的解决方法，并提供最终结果和结论。你应该用完整的句子描述你的结果，而不使用变量。

摘要让读者知道可以在报告中期望什么，但不会用陌生的数学符号压倒他或她。想象一下，读者将根据这个摘要来决定是否继续阅读你的论文。以回收问题的解决方案为例。

在摘要之后，论文应包括一个正式的引言，其中包括对**基本**的现实世界应用的重新阐述，就好像读者没有任何先前的知识一样。这一部分通常还包含一些动机或相关背景信息，但不应包含冗长的历史课程。这一部分应该突出你所开发的一般建模问题和简明的**问题陈述**。

本节必须提供一个段落，描述你如何解决这个问题。例如，如果我们考虑根据过山车的刺激程度对其进行排名，那么提前定义“刺激”会有所帮助。例如，“我们的模型基于高加速度、倒转和高度的过山车是刺激的观念。”请注意，这个陈述并没有准确解释这些特征如何被量化或者在数学排名系统中如何实施。

这并不是给读者提供过山车的详细信息，但它确实给读者一个关于后文内容的想法。这可能看起来与直觉相反，但引言和摘要通常是最后写的。这是因为在所有其他内容都写完之后，作者对手稿有了一个完整的了解，然后可以最好地根据这些部分进行调整。

解决方案论文的正文可能会有几页，并分为关于假设、变量、模型、解决过程、分析和总体结论的部分。让读者了解你为了解决问题而做出的总体假设。某些具体的假设可能需要在后文的主要内容中再次包含，以便在发展某些想法时进行澄清。

然而，这里最重要的信息是所有假设都要在你的写作中的某个地方包含和列出。你应该确保证明为什么这些假设是合理的，并根据需要包含引用。任何形式的抄袭都是不可接受的。

当你开始描述你的模型和解决方法时，请清楚地说明你将使用的变量和相应的单位。如果变量之间存在关系，请解释它们的来源，并在必要时引用任何必要的假设。

数学方程和公式应居中，每个都应单独占据一行。我们在下一节中提供了一些更具体的细节。

最后，论文必须有一个**结论部分**，总结模型的重要特征。这一部分必须包括对结果的分析，如前一节所述，这是至关重要的。对模型的优点和缺点进行诚实的评估是重要的。特别是，你可以评论模型如何进行验证以及模型对假设的敏感性。我们通过提供一些关于技术写作的技巧来继续。

技术写作的注意事项和不要做的事情

1. 不要写书评。

你的解决方案的叙述不能像一个关于你如何得到模型的故事。例如，考虑以下关于回收模型假设的两个摘录。

例子1:

俄亥俄州的一项关于投放式回收参与率的研究发现，15.5%没有垃圾桶回收服务的市民使用投放式回收[8]。我们假设这些数据代表了美国的情况。

例子2:

我们陷入困境，因为我们不知道美国有多少人回收。我们在谷歌上搜索并找到了一篇文章，该文章称俄亥俄州参与投放式回收的人数为15.5%，这些人没有获得路边回收服务，所以我们在我们的模型中使用了这个数字。

第二个例子的写法使得这个假设听起来无效或者只是因为找不到其他信息才选择了这个假设。然而，第一个例子听起来好像做了一些研究，并且找到了一个有用和合法的来源，提供了一个适用的统计数据。

2. 在使用数学更合适的情况下，不要使用文字。

以下哪个更有效？

例子1:

对于理想气体，我们有

$$P = \frac{nRT}{V},$$

其中 P 是气体的绝对压力， V 是气体的体积， n 是气体的物质质量（以摩尔为单位）， T 是气体的绝对温度， R 是理想气体常数。

例子2:

对于理想气体，绝对压力与气体的摩尔数和绝对温度的乘积成正比，与气体的体积成反比，比例常数为 R ，即理想气体常数。

在这种情况下，数学更容易理解，你可以想象计算越复杂，用文字描述就越困难。

3. 在解释数学时，请使用正确的句子结构。

传达数学需要适当的标点符号，例如如果计算结束了句子，则在计算结束处加上句号，如下面的示例1。在适当的情况下使用逗号。

例子1:

如果 s 是正方形盒子的边长，则一侧的面积为

$$A = s^2,$$

并且体积由以下给出

$$V = s^3.$$

例子2:

如果 s 是正方形盒子的边长，我们可以计算出面积和体积。

$$A = s^2$$

$$V = s^3$$

4. 请不要在句子中用数学符号代替单词，就像下面两个例子中的第二个例子一样。

例子1:

在这个问题中， L 是矩形的边长。

例子2:

对于这个问题 $L =$ 矩形的边长。

5. 请注意有效数字。

例如，你的计算器可能显示一个值为27.3416927482，但是你可能不需要报告所有这些数字，除非你想要展示后面小数位的精确度。

6. 当数字的数量级变化时，使用科学计数法，

这意味着指数才是理解数值重要性的关键。例如，太阳的直径是 $1.391e^6\text{km}$ ，而棒球的直径是 $2.290e^{-4}\text{km}$ 。

7: 将所有内容整合起来

7. 给图表加标签

并使用足够大的字体，以便坐标轴清晰可读。

8. 不要忘记根据需要包括单位。

9. 仔细检查拼写和语法错误，

特别是拼写检查可能会忽略的错误。例如，很容易混淆他们的、那里的和他们是。

10. 在应该给予荣誉的地方给予荣誉。

这意味着包括引用和逐步建立你的参考文献。

技术写作需要练习，但最终的结果应该是令人非常自豪的。在审查你的最终论文时，你可以退后一步，看看你在整个建模过程中取得的成就。最终，你的模型可以为新知识的创造和对我们生活的世界提供更深入的洞察。记住，建模也需要练习，所以下次你解决一个开放性问题时，你已经拥有一套新的工具，使整个经验更加顺利。

总结一下

- 1 在整个建模过程中记下笔记，这样你就不会遗漏任何重要的东西，尤其是沿途做出的假设。
- 2 给自己足够的时间来专注于写作过程和校对报告。
- 3 请记住，这是一份技术文件，而不是关于你建模经验的故事。
- 4 遵循技术写作的准则。
- 5 关于技术写作的一些额外参考资料可以在[3]找到。
- 6 为自己的成就感到自豪。

附录 和参考文献

A. 前向欧拉方法

让我们探索一下前向欧拉方法在变速疾病模型的背景下是如何工作的。

作为提醒，我们的模型是用微分方程描述的。

$$\frac{dI}{dt} = kI(t)(P - I(t)),$$

其中 I 是感染者的数量， P 是总人口， k 是一个正常数。我们将使用与绘制解析解时相同的参数值： $k = 0.0006$ ， $P = 1000$ ，和 $I_0 = 20$ 。

我们将在这个例子中使用的方法称为前向欧拉方法，它利用了导数与切线斜率相等的事实。

我们将在这个例子中演示这种方法，但不想给读者带来太多细节。我们将指向[9, 4]以深入了解这个非常强大的近似方法。

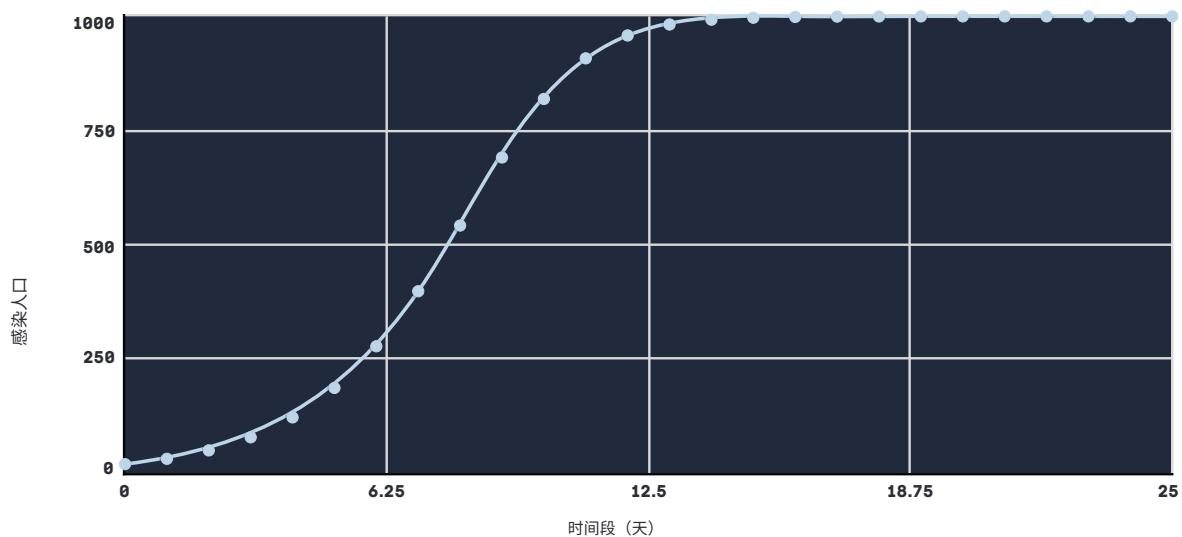
我们从初始人口开始， $I_0 = 20$ 。也就是说，当 $t = 0$ 天时， $I = 20$ 。换句话说，我们知道解的图上有一个点 $(0, 20)$ 。我们还知道在该点解曲线的斜率，因为我们有一个方程：

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} &= k I(0) (P - I(0)) \\ &= k I_0 (P - I_0) \\ &= (0.0006) \cdot 20 \cdot (1000 - 20) \\ &= 11.76. \end{aligned}$$

现在我们可以写出通过点 $(0, 20)$ 且斜率为 11.76 的直线方程如下。回想一下，自变量是 t ，因变量是 I 。

$$\begin{aligned} I - 20 &= 11.76(t - 0), \\ I &= 11.76(t - 0) + 20. \end{aligned}$$

图10。变速疾病模型输出的数值解，其中 $k=0.0006$ ， $P=1000$ ， $I_0=20$ ，时间步长 $\Delta t=1$ 天



因此，我们得到了一条斜率为11.76且 y -截距（或在这种情况下为 I -截距）为20的直线。

我们可以将这个线性函数作为真实解的近似。我们假设微分方程的解在附近点上与这条直线近似相同。也许我们会假设在时间 $t=1$ 时，这是一个足够好的近似。我们可以找到 $t=1$ 时感染者的数量。

$$I(1) = 11.76(1 - 0) + 20 = 31.76.$$

（注意：虽然不可能有一个分数的感染个体（或者更具体地说，0.76个感染个体），但这并不妨碍我们继续使用这种方法来近似解决方案。我们建议在评估模型时注意到发生了一些不现实的事情，并鼓励您稍后重新审查它。）因此，我们有一条从 $(0, 20)$ 到 $(1, 31.76)$ 的线段。现在，您可以想象我们重新开始这个过程。换句话说，我们

假设点 $(1, 31.76)$ 在解曲线上，并且我们可以使用导数给出该点的斜率：

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=1} &= k I(1) (P - I(1)) \\ &= (0.0006) \cdot 31.76 \cdot (1000 - 31.76) \\ &= 18.45. \end{aligned}$$

与之前一样，我们可以找到通过点 $(1, 31.76)$ 且斜率为18.45的直线的方程。

$$\begin{aligned} I - 31.76 &= 18.45(t - 1) \\ I &= 18.45(t - 1) + 31.76. \end{aligned}$$

我们将假设这足够好地近似了 $t=2$ 的解。因此，我们估计在时间 $t=2$ 时的人口为

$$I(2) = 18.45(2 - 1) + 31.76 = 50.21.$$

再次，我们已经确定了一种需要多次迭代计算的解决方法，可以使用诸如Excel之类的技术轻松执行。与之前一样，现在我们在Excel中有

了一个数值解的表格，我们可以生成一个数值解的图形。

（见图10。）

B. 来自团队1356的2013年M³挑战问题和解决方案论文

不浪费，不缺乏：将可回收物放在正确的位置

塑料嵌入了各种现代产品中，从钢笔、手机和储物容器到汽车零件、人工肢体和医疗器械；不幸的是，这些进步都伴随着长期的成本。塑料不容易生物降解。在北太平洋有一个估计面积大约相当于德克萨斯州的地方，塑料在那里聚集形成一个岛屿，并造成严重的环境影响。虽然这是一个国际性的问题，但在美国，我们也担心塑料最终进入填埋场并可能在那里停留数百年。为了对问题的严重性有所了解，第一个塑料瓶于1975年问世，现在根据一些消息来源，每天大约有5000万个塑料水瓶最终进入美国的填埋场。

美国环境保护局（EPA）要求你的团队使用数学建模来调查这个问题。

问题有多大？为美国的垃圾填埋场中的塑料数量创建一个模型。预测塑料废物的产生速率，并预测从今天起10年内垃圾填埋场中的塑料废物数量。

在地方层面上做出正确的选择。塑料不是唯一的问题。我们处理掉的许多材料都可以回收利用。开发一个城市可以使用的数学模型，以确定应采用哪种回收方法。你可以考虑以下因素，但不限于：

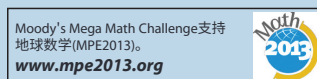
- 提供可以投放预分类可回收物的地点
- 提供单一回收流程的路边回收
- 提供单一回收流程的路边回收，并要求居民为每个垃圾容器付费

你的模型应独立于城市当前的回收实践，并应包括有关感兴趣城市的一些信息和有关回收方法的一些信息。通过将模型应用于以下每个城市来演示模型的工作原理：北达科他州法戈市；犹他州普莱斯市；堪萨斯州威奇托市。

这如何扩展到国家层面？现在你已经将你的模型应用于不同规模和地理位置的城市，考虑一下你的模型如何能够向EPA提供关于回收指南和/或标准在美国所有州和乡镇的可行性的信息。你的模型支持哪些建议？引用用于支持你的结论的任何数据。

以报告的形式提交你的研究结果给EPA。以下参考资料

可能会帮助你入门：<http://www.epa.gov/epawas/nonhaz/municipal/index.htm>http://5gyres.org/what_is_the_issue/the_problem/



siam 组织资助
工业与应用数学学会

由SIAM



THE MOODY'S FOUNDATION

塑料废物生产和回收方法的分析

执行摘要

仅在2010年,美国就产生了大约2.5亿吨垃圾[1]。其中很大一部分垃圾是塑料制品,它们在垃圾填埋场积累,并通过暴雨排水系统和流域流入海洋[2],在这个过程中分解成小块并吸收污染物。减少废物的一种主要方法是回收利用,通过将玻璃、纸张和塑料等材料重新加工制造成新产品。有许多不同的回收材料收集方法,包括投放中心,市民将可回收材料运输到该中心;单一流程路边收集,城市收集每个家庭的可回收材料;以及双流路边收集,城市收集每个家庭预先分类的可回收材料。为了鼓励或补贴回收计划,一些城市可能会实施按量付费(PAYT)计划,市民根据所丢弃垃圾的数量支付费用。

环保局委托我们分析塑料废物的生产和丢弃率随时间的变化。我们还被要求创建一个可能的回收收集方法模型,以确定哪种方法适用于哪个城市。使用线性回归模型,我们估计到2023年将有35.1百万吨塑料废物被丢弃。我们还对使用投放中心、单一流通道收集和双流通道收集进行了建模,以计算收集的可回收物总量以及每种回收方法对城市的成本。

对于使用投放中心进行收集,我们开发了一个模拟程序,随机模拟了当投放中心在城市各处设立时,有多少家庭会进行回收。该模拟考虑了区域、人口、平均家庭、市民愿意旅行的最大距离和投放中心的数量。利用这些数据,我们计算了回收量,并通过从销售回收产品所产生的收入中减去材料回收设施的运营成本来计算对城市的净成本。

对于路边收集,我们根据人口密度计算了所需的卡车数量来服务一个给定的城市。基于劳动力、维护和燃料,我们计算了路边收集计划的成本。再次,根据收集材料的计算量,我们确定了这些产品所产生的净收入。

我们确定,通过使用投放中心的方法,法戈和威奇塔将产生利润,而普莱斯将产生部分由按量付费覆盖的成本。通过使用路边收集方法,法戈和普莱斯将产生部分由按量付费覆盖的成本,而威奇塔将通过单流或双流收集方式产生利润。因此,根据每个城市的人口和面积,可以在美国各地的城市中实施投放中心或路边收集方法。

我们得出结论,小城市往往会从回收计划中产生净成本,而像威奇塔这样的大城市可能会从使用双流路边收集计划中获利。

为了评估全国范围内回收利用计划的使用情况,我们编写了一个计算机模拟程序,生成了美国所有县的图像,在美国地图上用蓝点表示至少有一个我们提出的三个回收利用计划获得净利润的县。总体而言,我们建议环境保护署将回收利用计划指南扩展到全国范围。

一、引言

1. 背景

每年,美国消耗数十亿个袋子和瓶子。然而,美国生产的塑料中只有5%得到回收[2]。未回收利用的塑料因含有聚碳酸酯、聚苯乙烯、PETE、LDPE、HDPE和聚丙烯等危险化学物质而构成日益严重的危害,这些化学物质会随着时间的推移在海洋和垃圾填埋场中积累。

因此,评估我们的塑料废物产生问题的规模是很重要的。

我们最主要的减少塑料等废物的方法是通过回收利用,可以回收利用有用的材料,包括玻璃、塑料、纸张和金属,以便用于创造新产品[3]。存在几种回收收集的方法;一般来说,城市可以使用投放中心或路边收集。通过投放中心,居民需要自行运输可回收垃圾,而路边收集则由城市承担这一负担。如果一个城市实施路边收集,可以选择使用单一流、双流或预分选的方法;在单一流中,所有可回收物品都作为一个单位收集,而在双流中,可回收物品被分为纸张和玻璃、罐头和塑料[4]。

预分选收集方法进一步分离了可回收物品的材料类型[5]。每种收集方法都有优点和缺点,在选择要实施的回收计划类型时,城市必须考虑诸多因素,包括个人家庭收集的实用性以及使用每种计划收集的可回收物品的数量[6]。一些社区可能会使用按重量计费的“按量付费”(PAYT)计划,鼓励居民回收垃圾,以避免根据垃圾重量收取费用[7]。我们在这个分析中评估了在实施回收计划的城市中,使用投放中心还是路边收集更高效,以及使用PAYT计划为城市产生额外收入的影响。

2. 问题的重新陈述

在这个分析中,我们受到EPA的要求,创建一个模型来预测塑料生产率随时间的变化,以及2023年垃圾填埋场中的塑料废物量。我们还被要求研究各种回收方法,不仅限于塑料的回收,并使用Fargo, North Dakota; Price, Utah; 和 Wichita, Kansas这三个城市作为样本点,分析一个城市应该开发哪种回收方法。最后,EPA要求我们根据我们设计的模型提供在国家层面上发展回收方法的建议。

3. 全球假设

- 在我们的分析中,我们将做出以下假设: 1 一个城市的人口大致均匀分布。
 - 。人口主要在大范围内变化: 在一个小城市的微观世界中,人口密度不会有太大变化。
- 2 一个城市的形状大致是正方形。大多数城市的形状都是这样的,包括这三个城市。我们提供的样本城市
- 3 一个城市的道路是按照网格规划布置的。网格规划的流行程度非常广泛,可以追溯到古罗马时代,大多数城市都是按照这种方式组织的,就像我们的三个样本城市一样。[8, 9, 10]。

4 一个家庭的回收立场是一致的。也就是说，一个回收的家庭总是回收，而一个不回收的家庭永远不会回收。回收是一种习惯，回收的家庭往往会持续回收。

II. 问题和模型的分析

1. 塑料废物产生

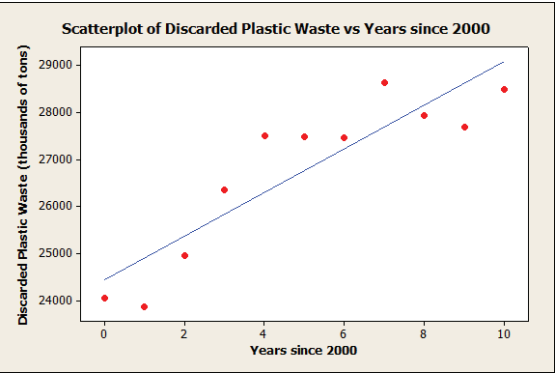
假设

1 我们使用过去十年收集的数据，因为第一个塑料瓶是在1975年引入的[11]，而回收只在最近变得重要。换句话说，2000年之前使用的数值无法充分考虑到现在已经普及的回收方法。

方法

我们通过对过去十年中每年废弃塑料垃圾数量进行线性和逻辑回归来创建我们的模型，这些数据以千吨为单位，由EPA提供[1]。

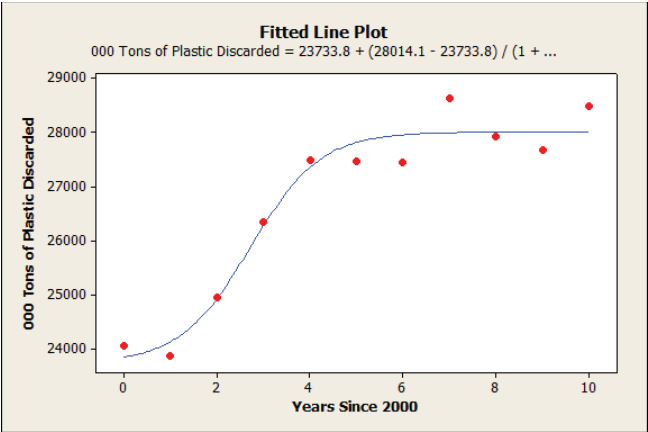
模型



废弃塑料垃圾（千吨） = $463.27 * (\text{自2000年以来的年数}) + 24443.6$
 $R^2 = .803; S = 801$

R^2 值为.803意味着80.3%的废弃塑料垃圾数量的变异性可以通过年份与塑料垃圾数量之间的线性关系来解释。残差的标准差为801。

根据这个模型，2023年未回收的塑料垃圾数量将为 $463.27 * 23 + 24443.6 = 35098.81$ 千吨，或者35.1百万吨。



废弃塑料垃圾（千吨） = $23733.8 + (28014.1 - 23733.8) / (1 + \exp((2000\text{年以来的年数} - 2.71325) / -0.752611))$
 $S = 422$

前面提到的 R^2 值只有在线性模型适用的假设下才有意义。由于数据中存在明显的弯曲，我们也使用了逻辑曲线进行拟合。统计软件使用逐步逼近法找到了这四个参数，并生成了上述模型。

该模型中残差的标准差仅为422，几乎是线性模型中的一半。不幸的是，该模型假设废弃塑料垃圾的数量将趋于稳定，这并不完全合理。然而，它给出了一个最佳情况的结果（例如，如果回收倡议完美执行）。根据该模型，2023年废弃垃圾的预测值为28014.1千吨（精确到小数点后4位），这是模型中的最大值。

总结一下，线性模型（似乎过度预测后期值）得出的值为35.1百万吨，而逻辑模型（趋于稳定）预测将在28.0百万吨水平。自2000年以来，美国人口一直呈线性增长[12]，因此线性模型给出了未来十年更合理的值。

2. 回收方法
假设

- 1 城市形状可以近似为正方形或菱形。美国的大多数城市都呈现出类似正方形的形状，包括北达科他州法戈、犹他州普莱斯和堪萨斯州威奇托。
- 2 城市的街道布局成网格状。许多大城市都采用网格系统布置街道，包括北达科他州法戈、犹他州普莱斯和堪萨斯州威奇托。
- 3 投放中心和路边收集之间没有重叠。
- 4 MSW流中可回收物的组成在整个规划周期内保持不变。

模型1: 投放中心
方法
假设

- 1 每个家庭都会集体决定是否回收，因为将所有可回收物品一起运送到投放中心对家庭来说很方便。
- 2 一个家庭决定回收的概率与家庭到最近的回收中心的距离成线性变化有关最近的投放中心的距离。
- 3 回收家庭回收所有可回收垃圾。

为了评估依赖投放中心的回收计划收集的可回收物数量，我们创建了一个计算机模拟，在这个模拟中，我们假设人口密度均匀，并且在城市周围均匀分布投放中心，尽可能多地放置而不重叠。为了确定每个家庭是否回收，生成一个从0到1的随机数，如果这个数小于家庭到最近的投放中心的距离与回收概率的乘积，我们假设这个概率与家庭到最近的投放中心的距离成线性变化，那么这个家庭就会回收。我们还确定了维护每个回收中心的成本和中心将产生的收入，并使用这些数据计算了投放中心计划对城市的总成本。在我们的模拟中，我们接受了城市的面积、人口、平均家庭人数、市民愿意旅行的最大距离和投放中心的数量作为输入。

出租车距离

因为假设街道是按照网格组织的，我们将距离计算为“出租车距离”，即只允许水平和垂直线的路径。换句话说，给定投放中心的坐标 p_x 和 p_y ，以及家庭的坐标 x 和 y ，它们之间的距离 d 可以计算为：

$$d = |y - p_y| + |x - p_x|$$

家庭到投放中心的最大距离

假设_____

- 1 回收家庭每两周去一次投放中心。

我们建议城市进行调查，以确定市民愿意为了回收而旅行的距离，尽管我们在模型中计算了这个距离。美国公民愿意每月支付2.29美元进行路边收集[13]。由于这是他们愿意支付的最大方便回收费用，我们可以假设它等同于他们愿意支付的驾驶成本到投放中心的最大金额。

一加仑汽油的平均价格为3.784美元[14]，2010年乘用车的平均里程为23.8英里每加仑[15]。旅行距离的费用是：

$$\text{费用} = (3.784 \text{ 美元/加仑}) * d / (23.8 \text{ 英里/加仑})$$

市民每周愿意旅行的距离是：

$$(2.29 \text{ 美元/月}) / (4.35 \text{ 周/月}) = 0.53 \text{ 美元/周} = (3.784 \text{ 美元/加仑}) * (d \text{ 英里/周}) / (23.8 \text{ 英里/加仑})$$

$$d \text{ 英里/周} = (0.53 \text{ 美元/周}) * (23.8 \text{ 英里/加仑}) / (3.784 \text{ 美元/加仑}) = 3.33 \text{ 英里/周}$$

由于市民必须开车去投放中心并返回，到投放中心的最大行驶距离为1.665英里/周。假设家庭每两周进行一次回收旅行，家庭考虑回收的投放中心距离的最大距离为1.665英里/周 * 2周 = 3.33英里。

俄亥俄州的废物回收参与研究支持我们的模型，发现一个全职城市废物回收中心的功能使用区域约为3.5英里[16]。

废物回收中心覆盖的回收家庭数量

假设

1 俄亥俄州的可用数据代表整个美国。

每个废物回收中心将接收来自3.33英里以内的家庭的可回收物。使用出租车距离，只允许水平和垂直移动，3.33英里内的区域被一个菱形（一个旋转45°的正方形）所限制。菱形的对角线是从中心到一个角的距离的两倍，即2 * 3.33英里 = 6.66英里。由于菱形是一个正方形，对角线长度 = 边长的平方根，所以边长为4.71英里。菱形的面积为边长² = 22.18平方英里。这是废物回收中心的覆盖区域，包含所有考虑使用废物回收中心的家庭。

投放中心覆盖区的家庭数量为：

$$\text{家庭数量} = 22.18 \text{ 平方英里} * (\text{人口} / \text{土地面积}) / (\text{平均家庭规模})$$

俄亥俄州的一项关于投放式回收参与率的研究发现，15.5%的没有垃圾分类回收服务的居民使用投放式回收 [16]。假设这些数据代表整个美国，每个投放中心覆盖的回收家庭数量为：

$$\text{回收家庭数量} = 22.18 \text{ 平方英里} * (\text{人口} / \text{土地面积}) / (\text{平均家庭规模}) * 0.155$$

在我们的模拟中，我们将15.5%作为家庭回收的中位数概率。离投放中心越近的家庭越有可能进行回收。在投放中心覆盖区内，距离更近的一半家庭的回收概率大于15.5%，而距离较远的一半家庭的回收概率小于15.5%。

从中心到边界的距离是整个覆盖区域面积的一半的正方形的对角线，即：

$$\text{中间距离} = \sqrt{22.18 \text{ 平方英里} / 2} * \sqrt{2} = 4.71 \text{ 英里}$$

我们假设家庭回收的概率与最近回收中心的距离成线性变化。在4.71英里的距离上，概率为15.5%。在边界距离6.66英里处，概率为0%。延伸通过这些点的线，在中心点，距离为0英里时，概率为52.9%。在我们的模拟中，每个投放中心覆盖的回收家庭数量与之前给出的公式计算的数量大致相同。

投放中心位置

在我们的模拟中，我们尽可能在每个城市放置尽可能多的投放中心，以确保覆盖区域不重叠，并且每个城市至少有一个投放中心。当投放中心的覆盖区域重叠时，成本效益降低。

年回收量

平均每个美国人每天产生4.5磅的垃圾[17]，其中约75%可以回收[18]。因此，平均每个美国人每天产生 $4.5 \text{ 磅} * 0.75 = 3.375 \text{ 磅}$ 的可回收垃圾。

年回收量（吨）=（回收家庭数量）*（平均家庭规模）* 3.375磅 * 365天/年 * 0.005磅/吨 *（投放中心数量）

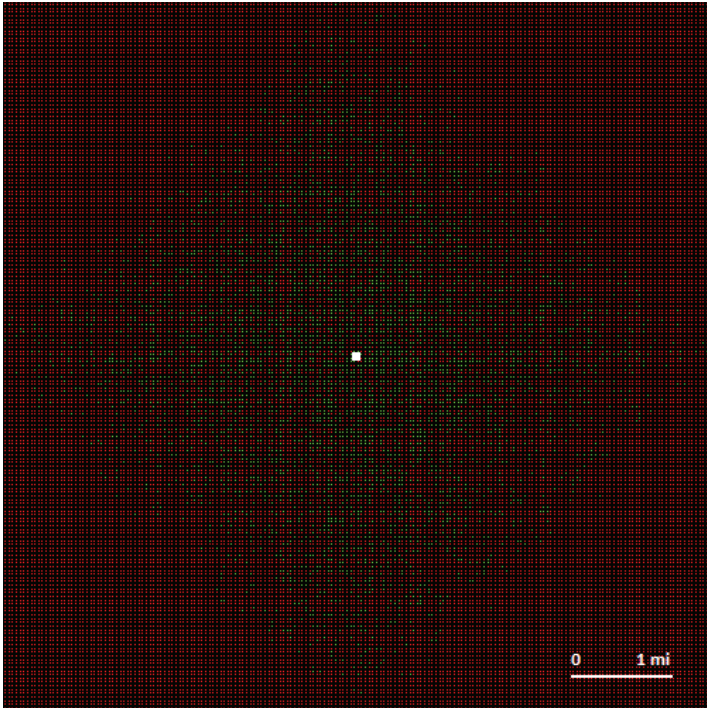
只要投放中心的覆盖范围没有重叠，并且投放中心的覆盖范围完全包含在城市内，就可以使用这个公式来计算年回收量，而不需要进行模拟。例如，由于投放中心的覆盖范围（22.18平方英里）远大于犹他州普莱斯市的面积（4.2平方英里），所以这个公式不能替代我们对普莱斯市的模拟。

通过我们的模拟，我们能够计算出法戈市、北达科他州；犹他州普莱斯市；以及堪萨斯州威奇托市每年回收的数量，并可视化每个城市参与回收的家庭。在下面的截图中，白色点代表投放中心；绿色点代表正在回收的家庭；红色点代表未参与回收的家庭。

法戈市，北达科他州

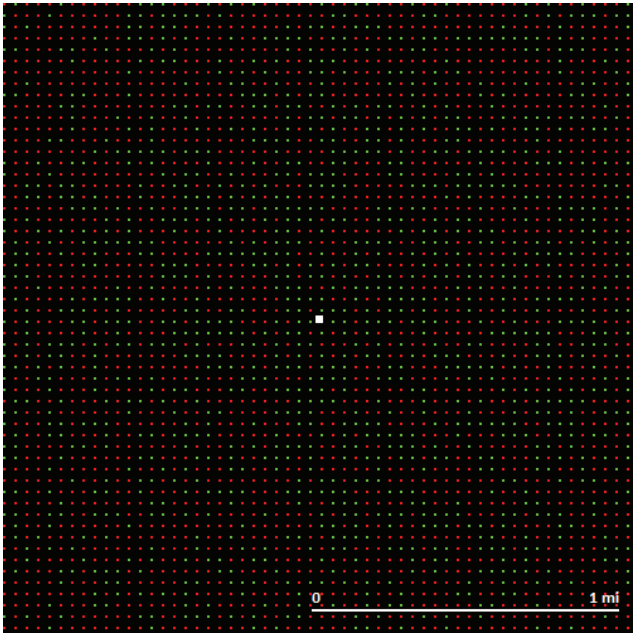
每年回收量（吨）= 5209.66

参与回收的人数= 8458



土地面积 = 48.82 平方英里
人口数量 = 105,549 人
平均家庭规模 = 2.15 人

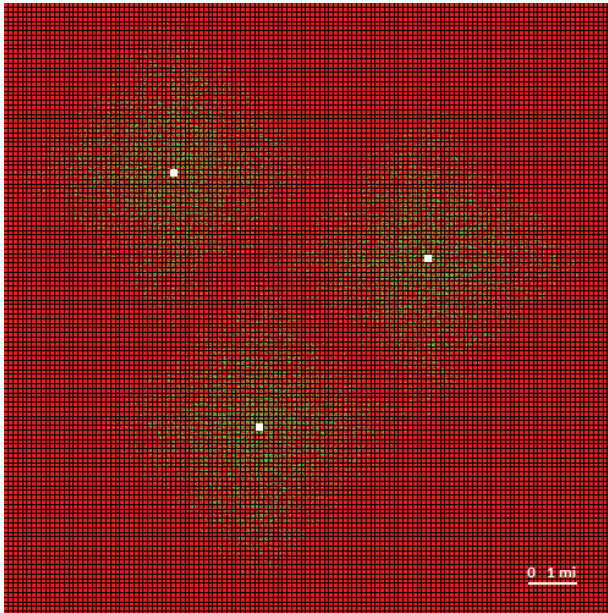
犹他州普莱斯市
每年回收量（吨） = 1876.88
参与回收的人数 = 3047



土地面积 = 4.2 平方英里
人口数量 = 8,402 人
平均家庭规模 = 2.60 人

威奇托，堪萨斯州

年回收量（吨）= 16929.56
回收人数 = 27486



土地面积 = 159.29 平方英里
人口 = 382,368 人
平均家庭规模 = 2.48 人

投放中心成本

设计工程公司R.W. Beck, Inc.的一份报告建议前装倾倒式垃圾箱是最具成本效益的投放中心类型。根据该计划，在每个投放中心设立前装倾倒式垃圾箱，并将可回收物分为两个流，混合容器和纸张。前装倾倒式垃圾箱站点的年成本约为\$5,575 [19]。因此，投放中心的总年成本为：

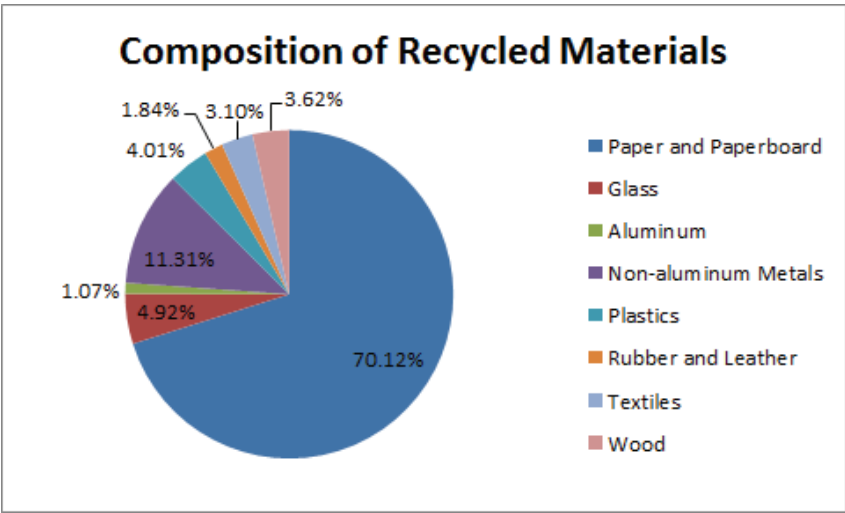
$$\text{投放中心的年成本} = \$5,575 * (\text{投放中心数量})$$

收入生成

为了计算每吨销售回收产品所产生的总收入，我们使用了以下公式，考虑了每种产品的每吨市场价格 [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27]：

$$\begin{aligned} \text{每吨收入} = & \text{纸张收入} + \text{玻璃收入} + \text{铁质金属收入} + \text{铝收入} + \\ & \text{塑料收入} + \text{纺织品收入} + \text{木材收入} = (.7012 * \$112.82) + (.0492 * \$13) + \end{aligned}$$

$$(.1131*\$217.75) + (.0107*\$310) + (.0401*\$370) + (.031*\$100) + (.0362*\$296) + (\$135*.0180) = \text{每吨回收材料的}\$128.78$$



[1]

根据在新罕布什尔州进行的有关回收收集和处理选项的研究[28]，城市可以根据年吨位选择小型、中型和大型材料回收设施（MRFs）。使用双流和使用单流的每吨成本取决于MRF的大小。对于投放中心，我们假设使用双流。

法戈市，北达科他州

我们计算出法戈市将收集5,209.66吨可回收物。这表明，一个年吨位为5,283的中型垃圾回收设施对该城市来说已经足够。中型双流垃圾回收设施每吨成本为124.62美元。由于每吨物资收入之前已经计算出为128.78美元，我们可以计算每吨净成本为：

$$\text{净成本} = 124.62\text{美元} - 128.78\text{美元} = -4.16\text{美元}$$

然后，可以计算出城市的总成本为：

$$\begin{aligned} \text{总成本} &= -4.16\text{美元/吨} * 5,209.66\text{吨} + 1\text{个投放容器的成本}5,575\text{美元} * 1\text{个容器} \\ &= -16,097.19\text{美元} \text{ (利润)} \end{aligned}$$

犹他州普莱斯市

我们计算出普莱斯市将收集1,876.88吨可回收物。普莱斯市将使用低吨位垃圾回收设施，每吨净成本也为89.69美元。然后，城市的总成本为：

$$\begin{aligned} \text{总成本} &= \text{每吨}89.69\text{美元} * 1876.88\text{吨} + \text{每个卸货容器}5575\text{美元} * 1\text{个容器} \\ &= 173,912.37\text{美元} \end{aligned}$$

威奇托，堪萨斯州

我们计算出威奇托将收集16,929.56吨可回收物, 这表明威奇托将需要一个高吨位的迷你MRF, 年吨位约为7,500吨。对于高吨位的迷你MRF, 双流的每吨成本为95.40美元。由于材料收入每吨为128.78美元, 每吨的净成本为:

$$\text{净成本} = 95.40 \text{美元} - 128.78 \text{美元} = -33.38 \text{美元}$$

这代表每吨回收材料的利润为33.38美元。城市的总成本是:

$$\begin{aligned} \text{总成本} &= -\text{每吨} 33.38 \text{美元} * 16,929.56 \text{吨} + \text{每个卸货容器} 5575 \text{美元} * 1 \text{个} \\ \text{容器} &= -559,533.71 \text{美元} \text{ (利润)} \end{aligned}$$

按需付费

如果城市实施按需付费 (PAYT) 计划, 将从市民那里收取根据他们产生的垃圾体积而定的费用。我们可以使用公式[29]来计算这种计划所产生的收入:

$$\text{收入}_{PAYT} = \frac{(\text{垃圾重量} / \text{容器体积} * \text{容器价格} - \text{启动和维护费用每天}) * \text{人口}}$$

平均每个美国人产生4.5磅的垃圾并回收1.5磅[17]。根据对威斯康星州和爱荷华州的调查, PAYT计划每人每年的成本约为0.28美元[30]。我们还将容器体积* 容器价格简化为每磅容器价格, 因为容器是用来装特定重量的。因此, 对于回收的市民, PAYT所产生的收入可以计算如下:

$$\text{收入}_{PAYT, \text{回收}} = ((4.5 \text{磅} - 3.375 \text{磅}) * \text{每磅容器价格} - 0.28 \text{美元}/365) * \text{回收人口}$$

$$\text{收入}_{PAYT, \text{不回收}} = (4.5 \text{磅} * \text{容器价格}/\text{磅} - \$0.28/365) * \text{人口不回收}$$

$$\begin{aligned} \text{总收入}_{PAYT} &= \text{收入}_{PAYT, \text{回收}} + \text{收入}_{PAYT, \text{不回收}} = ((4.5 \text{磅} - 3.375 \text{磅}) * \\ &\text{容器价格}/\text{磅} - \$0.28/365) * \text{人口回收} + (4.5 \text{磅} * \text{容器价格}/\text{磅} - \\ &\$0.28/365) * \text{人口不回收} \end{aligned}$$

法戈市, 北达科他州

$$\begin{aligned} \text{总收入}_{PAYT} &= (1.125 \text{磅} * x - \$0.28/365) * 8,458 \text{人} \quad \text{回收} + (4.5 \text{磅} * x - \$0.28/365) * \\ &(105,549 - 8,458 \text{人} \quad \text{不回收}) \end{aligned}$$

犹他州普莱斯市

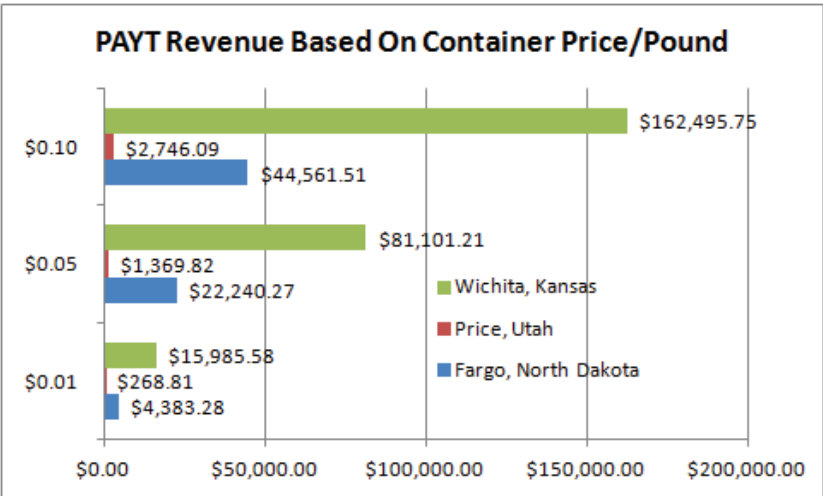
$$\begin{aligned} \text{总收入}_{PAYT} &= (1.125 \text{磅} * x - \$0.28/365) * 3047 \text{人} \quad \text{回收} + (4.5 \text{磅} * x - \$0.28/365) * \\ &(8,402 - 3,047 \text{人} \quad \text{不回收}) \end{aligned}$$

威奇托, 堪萨斯州

$$\begin{aligned} \text{总收入}_{PAYT} &= (1.125 \text{磅} * x - \$0.28/365) * 27,486 \text{人} \quad \text{回收} + (4.5 \text{磅} * x - \$0.28/365) * \\ &(382,368 - 27,486 \text{人} \quad \text{不回收}) \end{aligned}$$

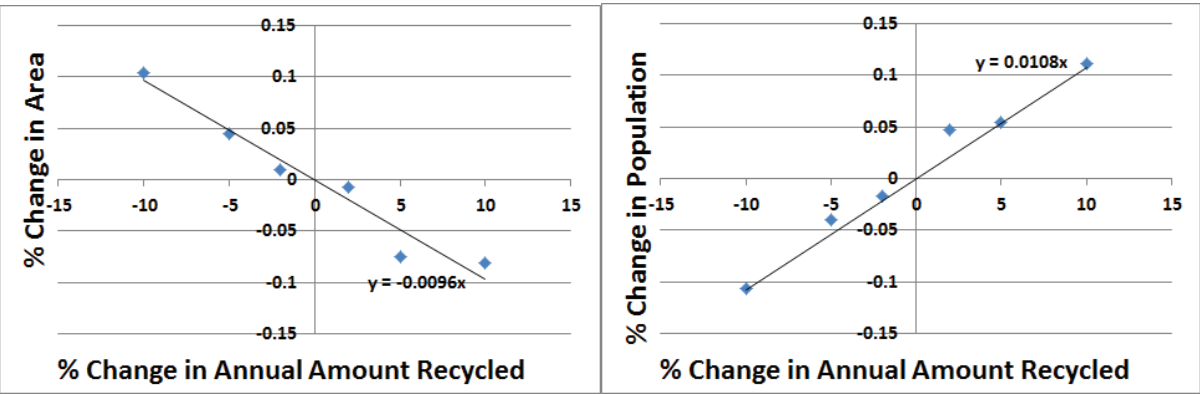
下表提供了PAYT计划产生的总收入，如果每磅容器价格为\$0.01、\$0.05或\$0.10。

Container Price/Pound	Fargo, North Dakota	Price, Utah	Wichita, Kansas
\$0.01	\$4,383.28	\$268.81	\$15,985.58
\$0.05	\$22,240.27	\$1,369.82	\$81,101.21
\$0.10	\$44,561.51	\$2,746.09	\$162,495.75



敏感性分析

我们对使用投放式回收计划的城市中年回收量的模拟进行了敏感性测试。我们将人口和面积分别改变+/- 2%、5%和10%，并检查年回收量的变化情况。为简单起见，我们只研究了我们的样本城市之一：北达科他州法戈市的变化情况。



年回收量对面积和人口的响应大致呈线性关系。由于模拟中用于确定每个家庭是否回收的随机性引入了不同运行之间的一些变化，所以响应不是完全线性的。由于斜率很小，初始参数的轻微误差不会显著改变模拟的输出。

模型2: 路边收集

假设

- 1 每个城市只有一个位于地理中心的回收处理厂，因为我们发现一个大规模的处理中心足以满足一个城市的回收需求。
- 2 回收收集每两周进行一次。

方法

我们将城市划分为区域，每个垃圾车负责一个区域。每辆卡车负责驶向其区域，收集所有可回收垃圾，并将其运送到中央处理中心，然后对可回收垃圾进行分类和处理。

收集的可回收垃圾和对城市的成本

我们将城市的成本分为三部分：汽油费用，卡车司机的工资和卡车维护费用。成本如下：

成本 = (柴油价格 (美元/加仑) * 距离) / (卡车每加仑行驶英里数) + (房屋数量) / (每小时房屋数) * (司机时薪) + 卡车维护费

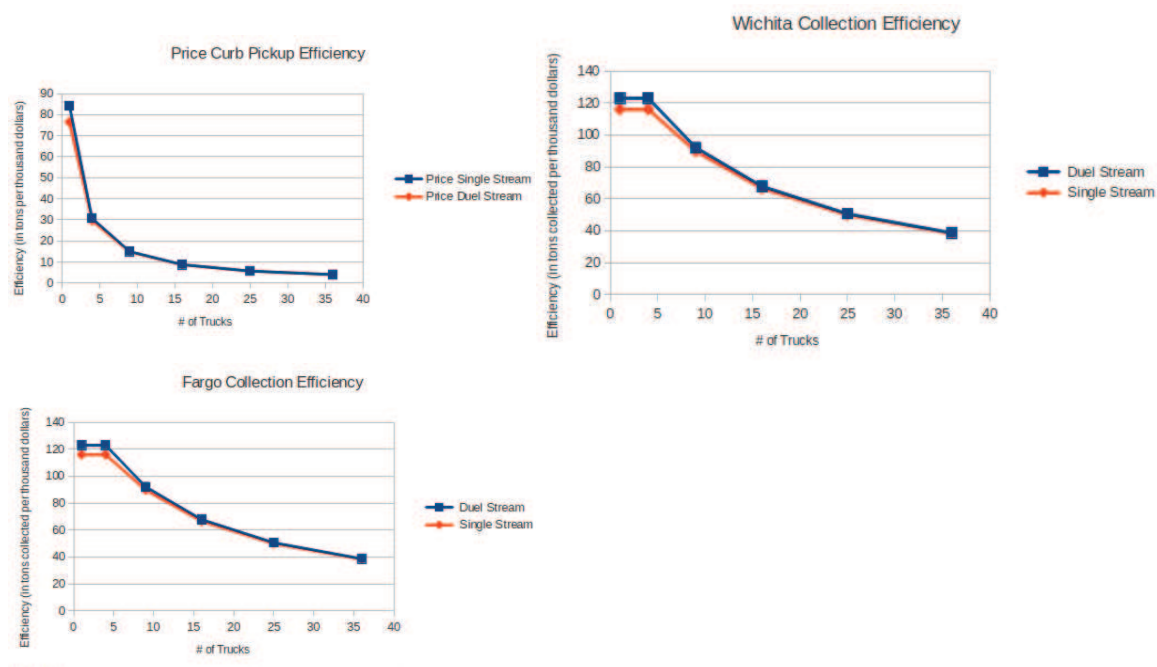
每小时访问的房屋数量取决于使用单流还是双流收集方法；对于单流，每小时访问171个家庭，而对于双流，每小时访问130个家庭[31]。卡车的里程为每加仑5英里，每加仑成本为4.02美元。卡车司机的平均工资为每小时16美元[19]。

因此，单流和双流收集成本的公式如下：

单流成本 = (4.02美元/加仑 * 距离) / (5英里/加仑) + (房屋数量) / (171个房屋/小时) * (16美元/小时)

双流成本 = (4.02美元/加仑 * 距离) / (5英里/加仑) + (房屋数量) / (130个房屋/小时) * (16美元/小时)

我们假设卡车司机每天只能工作7小时：（8小时工作日减去一小时的午餐和驾驶时间）。因此，卡车司机在两周循环中最多可以访问的家庭数量为（171 * 7 * 10 = 11970，单流）和（130 * 7 * 10 = 9100，双流）。当司机被分配的房屋数量超过他/她能够访问的数量时，我们只需使用这个上限。为了说明，下面的图表显示了每个城市的效率（每千美元可回收废物的吨数）与卡车数量之间的关系。



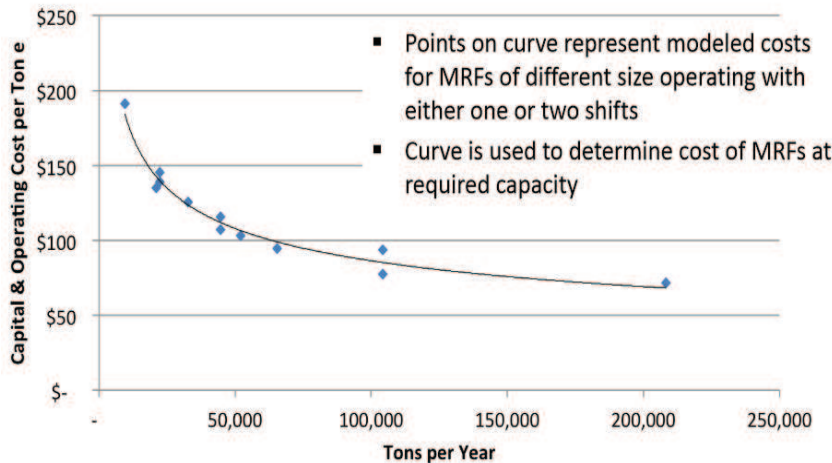
使用该模型，我们根据回收物的效率（以每1000美元回收的吨数）和回收物的总量，计算了每个城市进行双流或单流路边收集的最佳卡车数量。最佳卡车数量的结果如下所示：

城市	单一流	双流
法戈	5	6
价格	1	1
威奇托	13	17

通过使用我们的计算机模拟，可以确定收集卡车的最佳数量，以及年度成本和可回收垃圾的吨数。

城市	单一流		双流	
	垃圾吨数	收集成本	垃圾吨数	收集成本
法戈	25292.85	\$205,787.20	25933.39	\$319,383.30
价格	2064.37	\$24,526.54	2064.37	\$27,005.94
威奇托	93947.82	\$713,424.24	88719.32	\$798,496.11

为了计算路边收集产生或发生的收入和成本，我们需要确定大规模MRF的回收和分拣成本。为了计算MRF中每吨材料的净成本，我们使用了来自Resource Recycling Systems [31]的数据，以找到不同吨位容量的MRF的运营、资本和维护成本。下图[31]显示了处理和运营成本的图形表示：



法戈市，北达科他州

单一流：

使用我们的模型，我们计算出法戈每年将产生25,292.85吨可回收物，使用单一流路边收集。相同吨位容量的双流MRF的运营成本约为每吨130美元[31]。然而，由于需要更多的分拣工作，单一流MRF的处理成本较高，范围在每吨10-15美元之间（平均为12.5美元）[4]。使用从回收材料销售中计算出的收入，如在“投放中心”部分计算的128.78美元，净成本和总成本为：

$$\text{每吨净成本} = (\$130 + \$12.5) - \$128.78 = \text{每吨 } \$13.72$$

$$\text{总成本} = 25,292.85 \text{ 吨} * \text{每吨 } \$1.22 + \text{收集成本} = \$347,017.90 + \$205,787.20 = \$552,805.1$$

双流模式：

使用我们的模型，我们计算出法戈每年使用双流模式产生25,933.39吨可回收物。运营成本约为每吨\$130。因此，净成本和总成本为：

$$\text{每吨净成本} = \$130 - 128.78 = \text{每吨 } \$1.22$$

$$\text{总成本} = 25,933.39 \text{ 吨} * \text{每吨 } \$1.22 + \text{收集成本} = \$31,638.74 + \$319,383.30 = \$351,022.04$$

犹他州普莱斯市

单一流：

使用我们的模型，我们计算出普赖斯每年使用单流模式产生2,064.37吨可回收物。一个年处理量为2,649吨的迷你MRF足够。单流模式的运营成本约为每吨\$245.62。因此，净成本和总成本为：

$$\text{每吨净成本} = \$245.62 - 128.78 = \$116.84$$

$$\begin{aligned}\text{总成本} &= 2,064.37 \text{ 吨} * \text{每吨 } \$116.84 + \text{收集成本} = \$24,526.54 + \$241,201 \\ &= \$265,727.53\end{aligned}$$

双流模式：

使用我们的模型，我们计算出价格每年可以产生2,064.37吨可回收物使用双流程。一个迷你MRF再次足够。双流程的每吨运营成本约为\$218.47。因此，净成本和总成本为：

$$\text{每吨净成本} = \$218.47 - 128.78 = \$89.69$$

$$\begin{aligned}\text{总成本} &= 2,064.37 \text{ 吨} * \text{每吨 } \$89.69 + \text{收集成本} = \$24,526.54 + \$27,005.94 \\ &= \$212,159.29\end{aligned}$$

威奇托，堪萨斯州

单一流：

使用我们的模型，我们计算出威奇塔每年可以产生93,947.82吨可回收物使用单流程。因此，净成本和总成本为：

$$\text{每吨净成本} = (\$95 + \$12.5) - \$128.78 = -\$21.28$$

$$\begin{aligned}\text{总成本} &= 93,947.82 \text{ 吨} * -\$21.28 \text{ 每吨} + \text{收集成本} = -\$3,173,557 + \\ &\$713,424.24 = -\$1,285,785.61\end{aligned}$$

由于成本为负数，该城市获得了利润。

双流模式：

使用我们的模型，我们计算出威奇托每年将产生88,719.32吨的可回收物，采用双流程。因此，净成本和总成本为：

$$\text{每吨净成本} = \$95 - \$128.78 = -\$33.78$$

$$\begin{aligned}\text{总成本} &= 93,947.82 \text{ 吨} * -\$33.78 \text{ 每吨} + \text{收集成本} = -\$3,173,557.36 + \\ &\$798,496.11 = -\$2,375,061\end{aligned}$$

该城市再次获得了利润。

按需付费

我们可以应用在“投放中心”部分计算出的按需付费收入公式：

总收入 $PAYT = \text{收入}_{PAYT, \text{回收}} + \text{收入}_{PAYT, \text{不回收}} = ((4.5 \text{磅} - 3.375 \text{磅})$
* 每磅容器价格 - \$0.28/365) * 人口回收 (4.5磅 * 每磅容器价格 -
\$0.28/365) * 人口不回收

鉴于40%的人有可回收物品回收的机会[16]，我们计算了每个城市从按量付费计划中可以预期的总收入
路边回收。变量“x”用于表示每磅容器的价格，这是一直到城市设置。

法戈市，北达科他州

总收入 $PAYT = (1.125 \text{磅} * x - \$0.28/365) * (.40 * 105,549 \text{人回收}) + (4.5 \text{磅} * x -$
\$0.28/365) * (105,549 - .40 * 105,549 人不回收)

犹他州普莱斯市

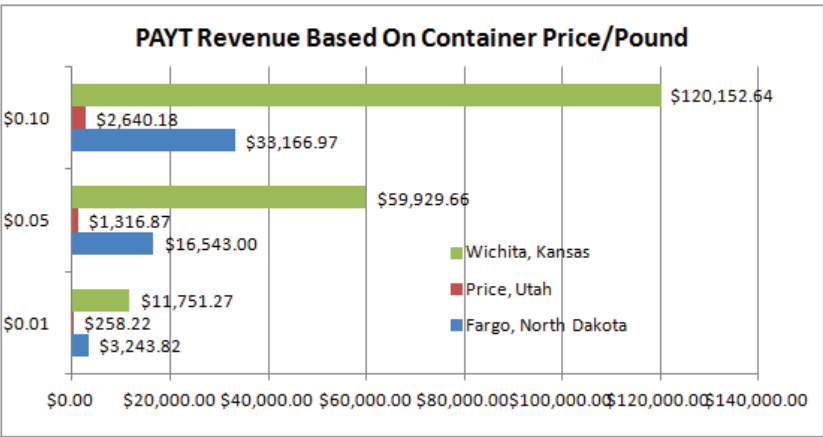
总收入 $PAYT = (1.125 \text{磅} * x - \$0.28/365) * (0.40 * 8,402 \text{人回收}) + (4.5 \text{磅} * x -$
\$0.28/365) * (8,402 - 0.40 * 8,402 人不回收)

威奇托，堪萨斯州

总收入 $PAYT = (1.125 \text{磅} * x - \$0.28/365) * (0.40 * 382,368 \text{人回收}) + (4.5 \text{磅} * x -$
\$0.28/365) * (382,368 - 0.40 * 382,368 人不回收)

下表提供了PAYT计划产生的总收入，如果每磅容器价格为\$0.01、\$0.05或\$0.10。

Container Price/Pound	Fargo, North Dakota	Price, Utah	Wichita, Kansas
\$0.01	\$3,243.82	\$258.22	\$11,751.27
\$0.05	\$16,543.00	\$1,316.87	\$59,929.66
\$0.10	\$33,166.97	\$2,640.18	\$120,152.64



3. 测试模型

为了测试我们模型的准确性，可以将当前有投放回收、单一流程路边回收或双流程路边回收计划的城市运行模型。
城市的人口、面积和其他所需属性将被输入到我们的模型中，然后

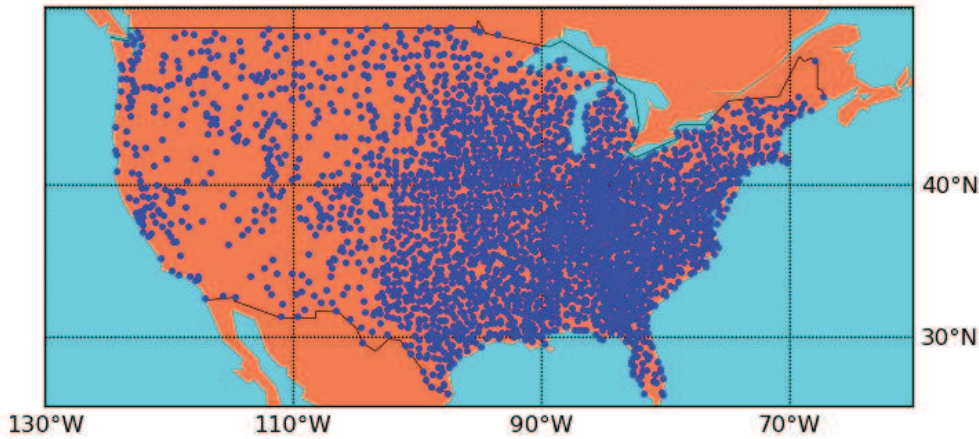
如果我们的模型结果与现实中的数值相似，那么我们模型的准确性将得到确认。

4. 推荐

在设计回收计划时，城市应该确定回收材料的市场。市场的特性决定了可回收物应该如何收集、处理和最终销售[32]。

为了将我们的模型扩展到全国范围，我们使用了2000年的美国人口普查数据，记录了人口密度。然后我们对每个县进行了测试。在全国范围内，环保署应该强烈鼓励几乎每个县或地区开展回收计划，特别是在人口密集、非农村地区。

下面的图示标出了所有县的中心，其中至少有一个我们提出的三个回收计划对社区有盈利，这是根据之前提出的模型。



总体而言，在美国，像犹他州普莱斯这样的小城市将从回收计划中蒙受损失。一个投放点计划无法充分利用，因为一个投放点的潜在覆盖区域大部分位于城市范围之外。在相对大型、人口密集的城市，如堪萨斯州威奇托，通常建议采用双流式路边收集，以获得最高利润。这是由于投放式回收的参与率较低；平均而言，只有15.5%的潜在覆盖户参与其中。按需付费计划的收入效益必须与其在市民中的不受欢迎程度的成本相平衡。

对于像犹他州普莱斯这样的小城市来说，推荐采用按需付费的倡议来实施回收计划，因为无论采取何种计划都会造成损失。在这些情况下，推荐采用按需付费的倡议来弥补城市的损失。

III. 结论

有效的回收计划对于城市解决垃圾填埋场的废物积累至关重要。根据我们的模型，我们得出结论：根据给定城市的人口和面积，投放中心、路边收集和按需付费的倡议都可以成为可行的回收计划。所有的模型都对输入值的微小变化具有抵抗力，并且可以应用于任何城市。

美国的人口增长对每年填埋场中废弃的塑料垃圾量的变化有显著影响。部分原因是由于近年来美国的人口增长呈线性增长, 我们确定线性模型最适合预测废弃的塑料垃圾量。我们的线性模型预测, 到2023年将有35.1百万吨塑料垃圾被废弃, 比2010年增长了13%。

通过使用投放计划, 北达科他州法戈市和堪萨斯州威奇托市都可以从回收材料的销售中获利。净利润使得不受欢迎的付费垃圾收集计划变得不必要。然而, 在犹他州普莱斯市, 由于城市规模非常小, 投放计划会造成亏损。因此, 我们建议普莱斯市采用付费垃圾收集计划, 以增加收入并抵消投放计划的成本。

使用任何路边收集计划, 无论是单流还是双流, 北达科他州法戈市和犹他州普莱斯市都会遭受损失。在这两个城市中, 我们建议采用投放计划: 在法戈市, 因为投放计划可以产生利润; 在普莱斯市, 投放计划造成的亏损比路边收集要少。然而, 在堪萨斯州威奇托市, 无论是单流还是双流的路边收集都可以产生利润, 使得这三种计划都可行。然而, 我们强烈推荐采用双流的路边收集, 以获得最高的利润。

从全国范围来看, 小城市通常在任何回收计划中都会遭受损失, 就像我们在犹他州普莱斯市的模型结果中所看到的那样。对于人口稠密的大城市, 通常建议采用双流的路边收集, 这样可以利用规模效益。付费垃圾收集计划的收入效益必须与其在市民中不受欢迎的成本相平衡, 尽管建议小城市采用该计划来抵消其亏损。回收对于任何城市都有环境效益, 但对于人口稠密的大城市尤为重要, 因为它具有经济和环境效益。

参考文献

- 1 "2010年事实和数据事实表 (PDF) -美国环境..." 2012年3月4日。2013年
<http://www.epa.gov/wastes/nonhaz/municipal/pubs/msw_2010_rev_factsheet.pdf>
- 2 2013年。<http://5gyres.org/what_is_the_issue/the_problem/>
- 3 "城市固体废物|废物|美国环境保护局。" 2004年3月3日。2013年
<<http://www.epa.gov/msw/>>
- 4 "双流"与"单流"回收计划| UMBC ..." 2012年3月3日。2013年
<<http://umbcinsights.wordpress.com/2012/08/28/dual-stream-vs-single-stream-recycling-programs/>>
- 5 "路边收集研究-尤里卡回收。" 2010年3月3日。2013年
<<http://www.eurekarecycling.org/page.cfm?ContentID=72>>
- 6 "组织社区回收计划。" 2012年3月3日。2013年
<<https://www.bae.ncsu.edu/topic/vermicomposting/pubs/ag473-11-community-recycle.html>>
- 7 "按使用量付费计划|保护工具|美国环保署。" 2003年。2013年3月3日
<<http://www.epa.gov/payt/>>
- 8 "搬到法戈, 北达科他州|法戈, 北达科他州搬家公司。" 2009年。2013年3月4日
<<http://www.upack.com/moving-companies/north-dakota/fargo/>>
- 9 "探索犹他州-在犹他州四处走动-导航犹他州的街道..." 2011年。2013年3月4日
<http://www.exploreutah.com/GettingAround/Navigating_Utahs_Streets.shtml>
- 10 威奇托旅游指南-维基旅行。" 2005年。2013年3月4日 <<http://wikitravel.org/en/Wichita>>

- 11 "塑料的简史-布鲁克林铁路." 2008年。2013年3月4日
<<http://www.brooklynrail.org/2005/05/express/a-brief-history-of-plastic>>
- 12 "国家人口普查估计 (2000-2010) -美国人口普查局." 2011年。2013年3月4日
<<http://www.census.gov/popest/data/intercensal/national/nat2010.html>>
- 13 "估计消费者供应意愿和支付意愿..." 2013年3月3日
<<http://le.uwpress.org/content/88/4/745.refs?related-urls=yes&legid=wple;88/4/745>>
- 14 "汽油和柴油燃料更新-能源信息...-EIA." 2011年。2013年3月3日
<<http://www.eia.gov/petroleum/gasdiesel/>>
- 15 "燃油经济性 | 国家公路交通安全管理局..." 2010年4月3日
<<http://www.nhtsa.gov/fuel-economy>>
- 16 "俄亥俄州环境保护局2004年废物回收研究." 2010年3月3日
<http://www.epa.ohio.gov/portals/34/document/general/swmd_drop_off_study_report.pdf>
- 17 "美国城市固体废物产生、回收和处理." 2009年3月3日 <<http://www.epa.gov/osw/nonhaz/municipal/pubs/msw2008rpt.pdf>>"回收统计数据 | GreenWaste Recovery."
2008年3月3日<<http://www.greenwaste.com/recycling-stats>>"企业门户信息 - 主页."
2006年4月4日<<http://www.portal.state.pa.us/>>
- 19
- 20 "废轮胎回收 - 田纳西州." 2008年4月4日
<<http://www.tn.gov/environment/swm/pdf/TFscrap tires.pdf>>
- 21 "再生木制品 - 索诺玛堆肥." 2007年4月4日
<http://www.sonomacompost.com/recycle_wood.shtml>
- 22 "胶合板厚度和重量: 砂光名义厚度1/4 3 ..." 2008年3月4日
2013年3月4日 <http://parr.com/PDFs/PG_plywoodthickness.pdf>
- 23 "在线回收和堆肥." 2013年3月4日 <<http://www.recycle.cc/freepapr.htm>>"玻璃." 20
10年3月4日 <<http://www.ndhealth.gov/wm/recycling/Glass.htm>>"每日废金属价
格- Maxi Waste Limited." 2007年3月4日2013年3月4日<<http://www.maxiware.co.uk/scrapdailyprices.php>>"铝: 可持续性如何? | Streamline." 2010年3月4
日2013年3月4日<<http://www.streamlinemr.com/articles/aluminum-how-sustainable-is-it>>"纺织品回收常见问题解答- Trans-Americas Trading Co." 2011年3月4
日2013年3月4日<<http://tranclo.com/recycling-faq.asp>>
- 27
- 28 "Sullivan County固体废物出版物-废物管理..." 2013年3月4日
2013年3月4日 <<http://waste.uvlsrc.org/index.php/solid-waste-publications-sullivan-county/>>
- 29 "Georgia Department of Community Affairs." 2007年3月4日
<<http://www.dca.state.ga.us/main/quickmenuListing.asp?mnuitem=PROG>>
- 30 Skumatz, LA. "测量源减少: 按使用量付费的可变费率..."
2000年 <<http://www.epa.gov/osw/conserve/tools/payt/pdf/sera.pdf>>
- 31 "通过MRF Hub和...扩大回收的范围-NC SWANA." 2013年3月4日
<<http://www.ncswana.org/files/2012%20Fall%20Presentations/Frey-NC%20SWANA%20MRF%20Optimization%20presentation%20100212.pdf>>
- 32 "组织社区回收计划." 2012年。2013年3月4日
<<https://www.bae.ncsu.edu/topic/vermicomposting/pubs/ag473-11-community-recycle.html>>

参考文献

- [1] S. Chaturapruek, J. Breslau, D. Yazdi, T. Kolokolnikov, and S. McCalla. 使用Lévy飞行进行犯罪建模。SIAM应用数学杂志, 73(4):1703–1720, 2013.
- [2] 数学及其应用联盟。
2013年MCM问题A: 终极布朗尼烤盘。
<http://www.comap.com/undergraduate/contests/mcm/contests/2013/problems/>.
- [3] A. Crannell. 数学写作指南课程。<http://www.math.wisc.edu/~miller/m221/annalisa.pdf>.
- [4] P. Dawkins. Paul的在线数学笔记: 欧拉方法。<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/EulersMethod.aspx>.
- [5] FreeMind. http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page.
- [6] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, 和 G. Uhlmann. 隐形装置, 电磁虫洞, 和变换光学。SIAM Review, 51:3–33, 2009.
- [7] D. Hailman 和 B. Torrents. 保持干燥: 在雨中奔跑。数学杂志, 8(24):266–277, 2009.
- [8] Ohio EPA 2004 丢弃回收研究。2010年。3 Mar. 2013 http://www.epa.ohio.gov/portals/34/document/general/swmd_drop_off_study_report.pdf.
- [9] M. Stubna, W. McCullough, 和 G. L. Gray. Euler's Method 教程。<http://www.esm.psu.edu/courses/emch12/IntDyn/course-docs/Euler-tutorial/>.
- [10] Y. van Gennip, B. Hunter, R. Ahn, P. Elliott, K. Luh, M. Halvorson, S. Reid, M. Valasik, J. Wo, G. Tita, A. Bertozzi, 和 P. Brantingham. 利用稀疏地理社交数据进行社区检测。SIAM Journal on Applied Mathematics, 73(1):67–83, 2013.

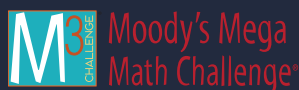
动机和致谢

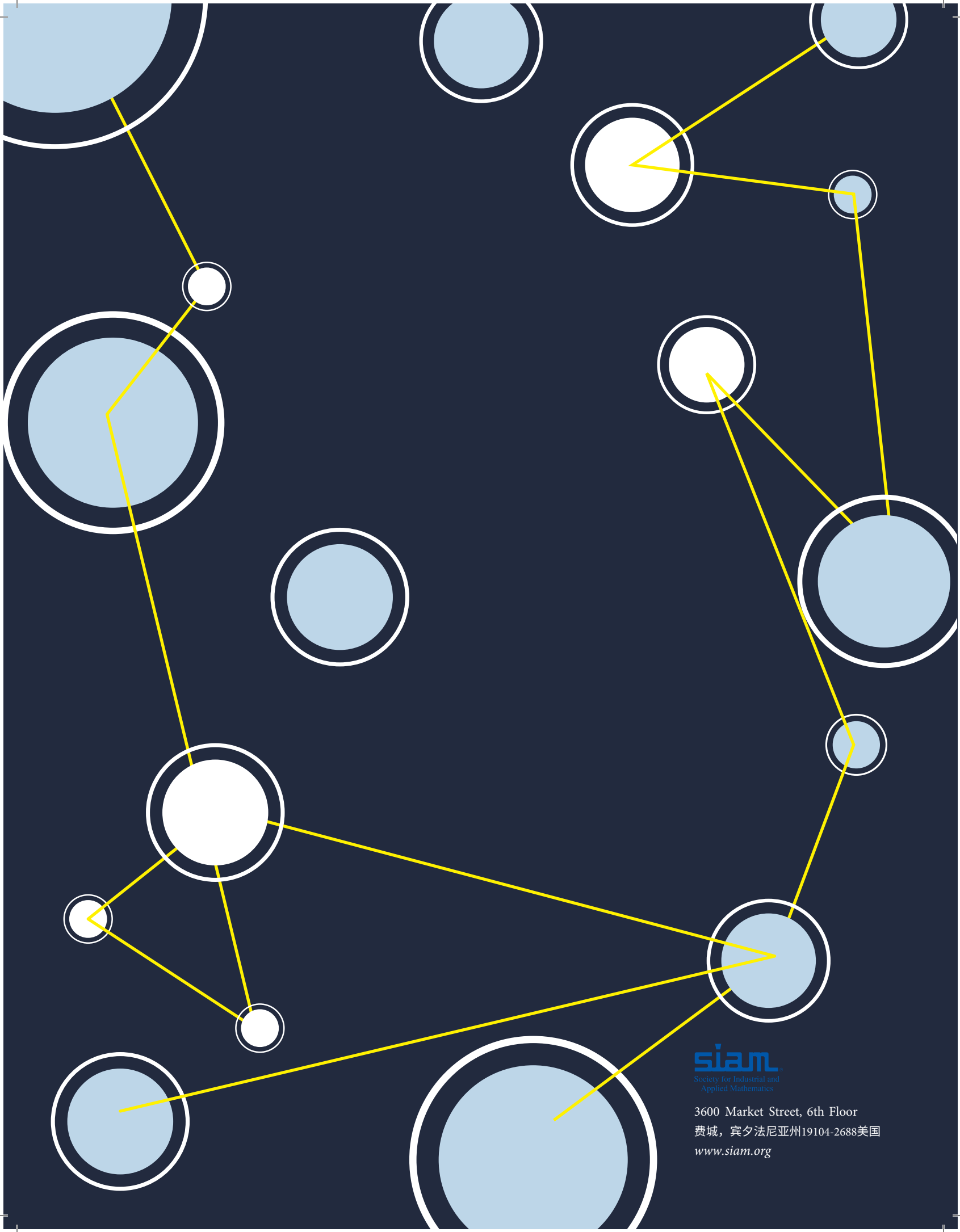
我们作为Moody's Mega Math Challenge的问题开发委员会的成员参与了这个项目，我们负责征求、编写、编辑和审查在这个数学建模奖学金竞赛中使用的潜在问题。从一开始就清楚的是，许多高中学生不熟悉如何进行建模，如何入门，以及如何找到解决方案。此外，我们还参加了国家科学基金会的研讨会，重点是激发数学教育的兴趣，激励学生学习和追求STEM领域的职业，并通过更好地理解 and 热情地对待这些学科来使他们在这些学科中保持下去，即使遇到困难。

几个人和组织的支持对于这本手册的完成至关重要：首先，弗朗西斯G.拉森森，穆迪基金会的总裁，该基金会自2006年开始资助穆迪超级数学挑战赛的举办。她对教育的承诺，特别是应用数学、经济学和金融学，对我们能够在这里进行内容创作起到了重要作用。彼得·特纳博士，克拉克森大学艺术与科学学院院长、美国工业与应用数学学会（SIAM）教育委员会主席，对挑战赛和SIAM对高中和本科学生群体的关注提供了支持，尤其是数学建模方面。彼得还与SIAM执行主任詹姆斯·C·克劳利博士一起，作为国家科学基金会（NSF）资助的“跨学科建模”研讨会的主要调查员，丰富了本手册的内容。最后，SIAM市场营销和外展总监米歇尔·蒙哥马利及其团队。米歇尔的团队组织了穆迪超级数学挑战赛，积极参与NSF研讨会，并通过多个项目和渠道寻求优化对年轻人的外展，以实现SIAM的一个重要目标：增加应用数学和计算科学项目和职业的人才储备。

#我们做到了
卡伦、凯蒂和本

本手册得以实现，得益于以下组织的热情和资金支持：





siam
Society for Industrial and
Applied Mathematics

3600 Market Street, 6th Floor
费城, 宾夕法尼亚州19104-2688美国
www.siam.org