线性规划

简明介绍

Thomas S. Ferguson

目录

线性规划

1. 引言。

线性规划问题可以定义为在线性约束条件下最大化或最小化线性函数的问题。 约束条件可以是等式或不等式。 这里有一个简单的例子。

找到数值 x_1 和 x_2 使得和 $x_1 + x_2$ 最大化，同时满足以下约束条件
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, 以及

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

在这个问题中有两个未知数和五个约束条件。 所有的约束条件都是不等式，它们在变量的某个线性函数中都涉及到一个不等式。 前两个约束条件， $x_1 \geq 0$ 和 $x_2 \geq 0$ ，是特殊的。这些被称为非负约束条件，并且经常出现在线性规划问题中。 其他约束条件则被称为主要约束条件。 要最大化（或最小化）的函数被称为目标函数。 在这里，目标函数是

$x_1 + x_2$。

由于只有两个变量，我们可以通过绘制满足所有约束条件的点集（称为约束集）的平面，并找到使目标函数值最大化的点。 每个不等式约束条件都由一半平面的点满足，而约束集则是所有半平面的交集。 在本例中，约束集是图1中阴影部分的五边形。

我们寻找点(x_1, x_2)，使得 $x_1 + x_2$的值最大，其中(x_1, x_2)在这个约束集合上变化。函数 $x_1 + x_2$在斜率为 $-_1$的直线上是常数，例如直线 $x_1 + x_2 = 1$，当我们将这条直线从原点向上和向右移动时， $x_1 + x_2$的值增加。 因此，我们寻找斜率为 $-_1$且离原点最远但仍然与约束集合相交的直线。这发生在直线 $x_1 + 2x_2 = 4$和$4x1 + 2x_2 = 12$的交点处，即$(x1, x_2) = (8/3, 2/3)$。 在那里，目标函数的值为$(8/3) + (2/3) = 10/3$。

通过绘制可行解集，可以解决练习1和2。

一般来说，很容易看出目标函数是线性的，它总是在约束集的角点上取得最大值（或最小值），前提是约束集是有界的。

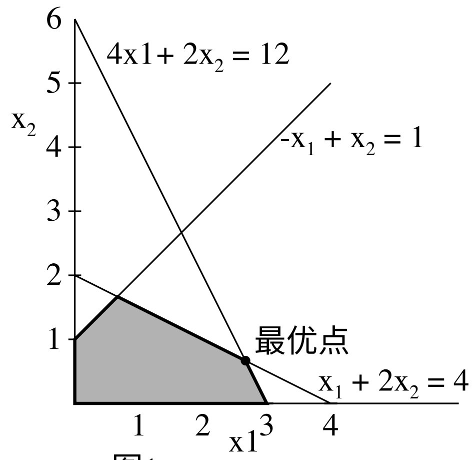

图1。

约束集是有界的。 偶尔，最大值可能出现在约束集的整个边缘或面上，但最大值也会出现在角点上。

并非所有线性规划问题都那么容易解决。 可能存在许多变量和许多约束。 有些变量可能受到非负约束，而其他变量则没有约束。 一些主要约束可能是等式，而其他约束则是不等式。 然而，有两类问题在这里被称为标准最大问题和标准最小问题，它们起着特殊的作用。 在这些问题中，所有变量都受到非负约束，而所有主要约束都是不等式。

给定一个 m-向量， $\boldsymbol{b}= (b_1, \ldots, b_m)^T$，一个 n-向量， $\boldsymbol{c}= (c_1, \ldots, c_n)^T$，和一个$m \times n$矩阵，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

由实数组成。

标准最大问题：找到一个
n-向量，$\mathrm{x} = (\mathrm{x}1, \ldots, \mathrm{x}n)$T，使其最大化

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

满足以下约束条件

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \qquad (\text{或 } \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b})$$

和

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (\text{或 } \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}).$$

标准最小化问题：找到一个 m-向量，$y = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, y_m)$，使其最小化

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m$$

在满足约束条件的情况下

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \cdots + y_m a_{m1} &\geq c_1 \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \cdots + y_m a_{m2} &\geq c_2 \\ &\vdots \\ y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \cdots + y_m a_{mn} &\geq c_n \end{aligned} \qquad (\text{或者 } \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^T)$$

和

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0 \qquad (\text{或者 } \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}).$$

请注意，主要约束条件在标准最大问题中写为 $\leq$，而在标准最小问题中写为 $\geq$。 入门示例是一个标准的最大问题。

我们现在介绍四个一般线性规划问题的示例。 这些问题都经过了广泛的研究。

示例**1**. 饮食问题。有 m种不同类型的食物， $F_1, \ldots, F_m$,它们提供不同数量的营养物质， $N_1, \ldots, N$ n，这些营养物质对健康至关重要。 设 c_j为营养物质 N_j的最低日需求量。 设 b_i为食物 F_i的单位价格。 设 $a\mathbf{i}_j$ 为食物 F_i中含有的营养物质 N_j的数量。问题是以最低成本提供所需的营养物质。

令 y_i 为每天购买的食物单位数量 F_i 。这种饮食每天的成本为

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m。 \qquad (1$$

)这种饮食中所含的营养物质 N_j 的数量为

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \cdots + a_{mj} y_m$$

对于 $j = 1, \ldots, n$。 除非满足所有最低日需求，否则我们不考虑这种饮食，即

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \cdots + a_{mj} y_m \geq c_j \qquad \text{对于 } j = 1, \ldots, n。 \qquad (2)$$

当然，我们不能购买负数的食物，所以我们自动有以下约束条件

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0. \qquad (3$$

)我们的问题是：最小化 (1) 在满足 (2) 和 (3) 的条件下。 这正是标准的最小化问题。

例子 **2**。 运输问题。有 $_I$ 个港口或生产工厂， $P_1, . . . , P\ I,$ 提供一种特定商品，还有 $_J$ 个市场，$M_1, . . . , M\ J,$ 需要运输这种商品。 港口 Pi 拥有一定数量的商品 $(_i= 1, 2, . . . , I)$，市场 Mj 需要接收一定数量的商品 $(_j= 1, . . . , J)$。 让 bij 为从港口 P_i到市场 M_j运输一单位商品的成本。 问题是以最小的运输成本满足市场需求。

设 y_{ij} 为从港口 P_i到市场 M_j运送的商品数量。 总运输成本为

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}b_{ij}。 \tag{4}$$

从港口 P_i发送的数量为 $\sum^{J}{}_{j=1} y_{ij}$ ，由于港口 P_i可用数量为 s_i，我们必须满足

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \le s_i \qquad \text{对于 } i= 1, . . . , I。 \tag{5}$$

发送到市场 M_j的数量为 $\sum^{I}{}_{i=1} y_{ij}$，由于市场M$_j$所需数量为 rj，我们必须满足

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} \ge r_j \qquad \text{对于 } j= 1, . . . , J。 \tag{6}$$

假设我们不能从港口 P_I发送负数数量到 M_j，我们有

$$y_{ij} \ge 0 \qquad \text{对于 } i= 1, . . . , I\text{和 } j= 1, . . . , J。 \tag{7}$$

我们的问题是：最小化（4），受限于（5），（6）和（7）。

让我们将这个问题转化为标准的最小化问题。变量的数量为 y变量是 IJ，所以 $m = IJ$。但是 n是什么？ 它是主要约束条件的总数。有 $n = I + J$ of 个约束条件，但其中一些约束条件是 $\ge$约束条件，而另一些约束条件是 $\le$ 约束条件。 在标准的最小化问题中，所有约束条件都是 $\ge$。 这可以通过将约束条件（5）乘以 -1 来获得：

$$\sum_{j=1}^{J}(-1)y_{ij} \ge -s_i \qquad \text{对于 } i= 1, . . . , I。 \tag{5'}$$

问题“最小化 (4) 在约束条件 (5′), (6) 和 (7) 下” 现在处于标准形式。 在练习3中，你被要求写出这个问题的矩阵 $\boldsymbol{A}$。

例子**3.** 活动分析问题。有 n个活动， A_1, ... ， $A\ n$，一个公司可以使用可用的 m个资源， R_1, ... ， $R\ m$（劳动小时，钢铁等）。让b_i是资源R_i的可用供应量。让a_{ij}是在运营活动A$_j$中使用的资源R_i的数量

以单位强度运营活动A_j的资源R_i的数量。 让c_j是以单位强度运营活动A_j对公司的净价值。 问题是选择各种活动的强度，以最大化公司的输出价值，同时受到给定资源的限制。

让x_j是活动A_j的运营强度。 这种活动分配的价值是

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{8}$$

在这种活动分配中使用的资源R_i的数量不能超过供应量b_i；即，

$$\sum_{j=1} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{对于 } i=1,\ldots,m. \tag{9}$$

假设我们不能以负强度进行活动，也就是说，

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{10}$$

我们的问题是：最大化（8），受限于（9）和（10）。 这正是标准的最大问题。

例子**4**。 最优分配问题。有 I 个人可用进行 J 个工作。 人 i在工作j 上工作1天的价值是 a_{ij}，对于 $i=1,\ldots,I$，和 $j=1,\ldots,J$。 问题是选择人员到工作的分配方式，以最大化总价值。

分配是选择数字的方式， x_{ij}，对于 $i=1,\ldots\ldots\ldots\ldots,I$，和 $j=1,\ldots,J$，其中x_{ij}表示人 i在工作 j上花费的时间比例。因此，

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{对于 } i=1,\ldots,I \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{对于 } j=1,\ldots,J \tag{12}$$

和

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{对于 } i=1,\ldots,I \text{和 } j=1,\ldots,J。 \tag{13}$$

方程（11）反映了一个人不能超过100%的工作时间，（12）表示一次只允许一个人在一个工作上，（13）表示没有人可以在任何工作上工作负时间。在满足（11），（12）和（13）的条件下，我们希望最大化总价值，

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_{ij} x_{ij}。 \tag{14}$$

这是一个标准的最大问题，其中 $m = I + J$和 $n = IJ$。

术语。

要最大化或最小化的函数称为目标函数。

对于标准最大问题的向量 $\boldsymbol{x}$或标准最小问题的向量 $\boldsymbol{y}$，如果满足相应的约束条件，则称为可行。

可行向量的集合被称为约束集。

如果约束集不为空，则线性规划问题被称为可行的；否则被称为不可行的。

如果目标函数在可行向量处可以取得任意大的正值（或任意小的负值），则可行最大（或最小）问题被称为无界的；否则被称为有界的。 因此，线性规划问题有三种可能性。 它可能是有界可行的，也可能是无界可行的，还可能是不可行的。

有界可行最大（或最小）问题的值是目标函数在变量在约束集上取值时的最大（或最小）值。

使目标函数达到该值的可行向量被称为最优的。

所有线性规划问题都可以转化为标准形式。
线性规划问题被定义为在线性约束条件下最大化或最小化线性函数。 通过以下技术，所有这类问题都可以转化为标准最大问题的形式。

通过将目标函数乘以 -1，可以将最小问题转化为最大问题。 同样，形式为 $\sum^n{}_{j=1}$ $a_{ij}x_j \ \geq\ b_i$ 的约束条件可以转化为形式为 $\sum^n{}_{j=1}(-a_{ij})x_j \leq -b_i$的约束条件。 还有两个问题需要解决。

(1)某些约束条件可能是等式。通过将某些满足 $a_{ij} = 0$ 的x_j的解代入其他约束条件和目标函数中的 x_j，可以消除一个等式约束条件和一个变量。

这样可以从问题中移除一个约束条件和一个变量。

(2)某些变量可能没有非负限制。一个无限制的变量，
x_j，可以用两个非负变量的差来替代， $x_j = u_j - v_j$，其中$u_j \ \geq 0$ 且 $v_j \ \geq 0$ 。 这增加了一个变量和两个非负约束条件到问题中。

对于标准形式问题推导出的任何理论都适用于一般问题。 然而，从计算的角度来看，(2)中变量和约束条件的增加是不可取的，而且后面将会看到，可以避免这种情况。

练习题。

1. 考虑线性规划问题：找到 y_1 和 y_2 使得 y_1+y_2最小，满足约束条件，

$$\begin{aligned} y_1 \;+ 2y_2 &\geq 3 \\ 2y_1 + \;\; y_2 &\geq 5 \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

绘制约束集并求解。

2. 找到 x_1和 x_2使得 ax_1+x_2最大，满足数值示例中的约束条件。 找到作为 a的函数的值。

3. 将运输问题的矩阵 $\boldsymbol{A}$写成标准形式。

4. 将以下线性规划问题转化为标准形式。找到 x_1，x_2，x_3，x_4 以最大化 $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5$，满足以下约束条件,

$$\begin{array}{rrrrcr} 4x_1 & +\,3x_2 & +\,2x_3 & +\;\; x_4 & \leq & 10 \\ x_1 & & -\;\; x_3 & +\,2x_4 & = & 2 \\ x_1 & +\;\; x_2 & +\;\; x_3 & +\;\; x_4 & \geq & 1, \end{array}$$

和

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

2. 对偶性。

对于每个线性规划问题，都存在一个与之密切相关的对偶线性规划问题。 我们首先针对标准问题陈述这种对偶性。 如第1节所述， $\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{x}$是 n维向量， $\boldsymbol{b}$和 $\boldsymbol{y}$是 m维向量， $\boldsymbol{A}$是一个 $m \times n$矩阵。 我们假设 $m \geq 1$且 $n \geq 1$。

定义。 标准最大问题的对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{受限制条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{和 } \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

被定义为标准最小问题

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b} \\ \text{受限制条件} & \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}} \text{和 } \boldsymbol{y} \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

让我们重新考虑前一节的数值例子：找到 x_1和 x_2以最大化 $x_1 + x_2$ 受限制条件 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, 和

$$\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 \leq & 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq & 12 \\ -x_1 + x_2 \leq & 1. \end{array} \tag{3}$$

因此，这个标准最大问题的对偶问题是标准最小问题：
找到 y_1, y_2, 和 y_3以最小化 $4y_1 + 12y_2 + y_3$ 受限制条件 $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ ，且

$$\begin{array}{rl} y_1 + 4y_2 - y_3 \geq & 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq & 1。 \end{array} \tag{4}$$

如果标准最小问题（2）通过乘以 $\boldsymbol{A}$、 $\boldsymbol{b}$和 $\boldsymbol{c}$的 -1来转换为标准最大问题，则根据上述定义，其对偶是一个标准最小问题，当将其转换为标准最大问题（再次改变所有系数的符号）时，恰好变为（1）。 因此，标准最小问题（2）的对偶是标准最大问题（1）。 问题（1）和（2）被称为对偶问题。

一般的标准最大问题和对偶的标准最小问题可以同时展示：

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \leq b_1 \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \leq b_m \\ \hline & \geq c_1 & \geq c_2 & \cdots & \geq c_n & \end{array} \tag{5}$$

我们在这种符号表示法中的数值例子变成了

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline y_1 & 1 & 2 & \le 4 \\ y_2 & 4 & 2 & \le 12 \\ y_3 & -1 & 1 & \le 1 \\ \hline & \ge 1 & \ge 1 & \end{array} \tag{6}$$

标准问题及其对偶之间的关系见下面的定理
及其推论。

定理**1.** 如果标准最大问题（**1**）对于可行解 $\boldsymbol{x}$，其对偶（*2*）对于可行解 $\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}。\tag{7}$$

证明。

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}。$$

第一个不等式来自于 $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{c}^T \le \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}$。 第二个不等式来自于 $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$。
■

推论**1.** 如果标准问题及其对偶都可行，则两者都是有界可行的。

证明。 如果 $\boldsymbol{y}$是最小问题的可行解，则（7）表明 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$是 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$的上界。. 同样地，对于逆命题也成立。
■

推论**2**。 如果存在可行解 $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$使得标准最大问题（*1*）及其对偶问题（**2**）满足 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{*T}\boldsymbol{b}$，则它们都是各自问题的最优解。

证明。如果 $\boldsymbol{x}$是（1）的任意可行向量，则 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^{*T}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$。 这表明 $\boldsymbol{x}^*$是最优解。对于 $\boldsymbol{y}^*$也可以用对称的论证。 ■

下面的基本定理完善了标准问题与其对偶问题之间的关系。它表明如果其中一个问题有界可行，则推论2的假设总是成立的。 这个定理的证明并不像前面的定理和推论那么容易。 我们将推迟证明，直到我们通过单纯形法给出一个构造性的证明。 （单纯形法是解线性规划问题的一种算法方法。）我们稍后还将看到，这个定理包含了有限博弈理论中的极小极大定理。

对偶定理。如果一个标准线性规划问题有界可行，那么它的对偶问题也有界可行，它们的值相等，并且两个问题都存在最优向量。

线性规划有三种可能性。 它可能是有界可行的（f.b.），也可能是无界可行的（f.u.），或者是不可行的（i）。 对于一个问题及其对偶问题，因此有九种可能性。 推论1指出其中三种情况不可能发生：如果一个问题及其对偶问题都可行，那么两个问题都必须是有界可行的。 对偶定理的第一个结论指出另外两种可能性不可能发生。 如果一个问题是有界可行的，那么它的对偶问题不能是不可行的。 附图中的x表示不可能的情况。 剩下的四种可能性是可能发生的。

标准最大化问题

		f.b.	f.u.	i.
	f.b.		x	x
对偶	f.u.	x	x	
	i.	x		

(8)

作为对推论2使用的一个例子，考虑以下最大化问题。
找到 x_1，x_2，x_2，x_4以最大化$2x_1$+ $4x_2 + x_3 + x_4$，满足约束条件 $x_j \geq 0$
对于所有的 j，并且

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 3. \end{array} \tag{9}$$

对偶问题被发现为：找到 y_1，y_2，y_3以最小化$4y_1$+ $3y_2$+ $3y_3$，满足约束条件 y_i ≥0对于所有的 i，并且

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 2 \\ 3y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\ & & & & 4y_3 & \geq & 1 \\ y_1 & & & + & y_3 & \geq & 1. \end{array} \tag{10}$$

向量$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1/2$,0)满足最大化问题的约束条件，并且目标函数的值为$13/2$.
向量(y_1, y_2, y_3) =(11/10, 9/20, 1/4)满足最小化问题的约束条件，并且在那里的值为$13/2$.
因此，这两个向量分别是它们各自问题的最优解。

作为对偶定理的推论，我们有

均衡定理。 设 $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$分别为标准最大化问题 *(1)* 和其对偶问题 *(2)* 的可行向量。 那么，只有当 $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$都是最优解时，

$$y_i^* = 0 \qquad \text{对于所有 } i\text{满足 } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i \tag{11}$$

和

$$x_j^* = 0 \qquad \text{对于所有 } j\text{满足 } \textstyle\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} > c_j \tag{12}$$

证明。 如果：方程（11）意味着除非在 $\sum$中有等式，否则 y_i^*= 0 $\quad {}_j\, a_{ij} x_j^* \leq b_i$.
因此

$$\sum_{i=1}^m y_i^* b_i = \sum_{i=1}^m y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i^* a_{ij} x_j^*. \tag{13}$$

同样，方程（12）意味着

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i^* a_{ij} x_j^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*. \tag{14}$$

推论2现在意味着 $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$是最优的。

只有当：就像定理1证明的第一行一样，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i^* a_{ij} x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i. \tag{15}$$

根据对偶定理，如果 $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$是最优的，左边等于右边所以我们得到了全等。 第一项和第二项的相等可以写成

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij}\right) x_j^* = 0. \tag{16}$$

由于x^*和y^*都是可行解，因此这个求和式中的每一项都是非负的。 只有当每一项都为零时，这个求和才能为零。 因此，如果 $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y}_i^* a_{ij} > c_j$，那么 $\boldsymbol{x}_j^* = 0$。 对称的论证表明，如果 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^* < b_i$，那么 $y_i^* = 0$。 ∎

方程（11）和（12）有时被称为互补松弛条件。 它们要求在标准问题中，一个约束中的严格不等式（松弛）意味着对偶问题中的互补约束以等式形式满足。

作为使用平衡定理的一个例子，让我们求解引言中数值例子的对偶问题。 找到 y_1， y_2， y_3使得$4y_1 + 12y_2 + y_3$最小，满足以下条件：
$y_1 \geq 0$，$y_2 \geq 0$，$y_3 \geq 0$，并且

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 - y_3 &\geq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 1. \end{aligned} \tag{17}$$

我们已经解决了对偶问题，并发现 $x_1^* > 0$ 和 $x_2^* > 0$. 因此，根据(12) 我们知道最优解 $\boldsymbol{y}^*$在(17)中的两个不等式中都取等号（3个未知数的2个方程）。 如果我们检查最大化问题的前三个主要约束中的最优解 $\boldsymbol{x}^*$，我们发现第一个和第二个约束中取等号，但在第三个约束中是严格不等号。 根据条件 (11)，我们得出结论 $y_3{}^* = 0$. 解这两个方程，

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 &= 1 \\ 2y_1 + 2y_2 &= 1 \end{aligned}$$

我们得到 $(y_1^*, y_2^*) = (1/3, 1/6)$. 由于这个向量是可行的，均衡定理的“如果”部分意味着它是最优解。作为检查，我们可以计算出值，$4(1/3) + 12(1/6) = 10/3$，并且发现它与最大化问题的值相同。

总结一下，如果你对一个问题提出了一个解的猜想，你可以使用互补松弛条件来求解对偶问题的解，然后看看你的猜想是否正确。

对偶问题的解释。除了在寻找解决方案方面提供帮助之外，对偶问题在解释原始的原问题方面也具有优势。
在实际情况中，对偶问题可以通过原始问题进行分析。

以饮食问题为例，这是一个标准的最小化问题，形式为(2)。 它的对偶问题是标准的最大化问题(1)。 首先，让我们找到对偶变量的解释，$x_1, x_2, \ldots, x_n$. 在对偶约束条件中，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \tag{18}$$

变量 b_i 被衡量为每单位食物的价格， F_i，而 a_{ij} 被衡量为每单位食物 F_i的营养物质 N_j 的单位。 为了使约束的两边可比较，
x_j 必须以价格单位每单位 N_j来衡量。 （这被称为维度分析。）由于 c_j是每天所需的 N_j 数量，目标函数 $\sum_1^n c_jx_j$，表示每天所需营养物质的总价格。显然有人试图选择营养物质的价格向量 $\boldsymbol{x}$以最大化每天所需营养物质的总价值，同时满足约束条件 $\boldsymbol{x}$

$\geq \mathbf{0}$，并且食物 F_i中营养物质的总价值，即 $\sum^n{}_{j=1} a_{ij}x_j$，不超过实际成本 b_i。

我们可以想象一个企业家向我们提供不含食物的营养物质，比如维生素或矿物质片剂。 他以每单位营养物质 N_j的价格 x_j出售给我们。 如果他想与我们做生意，他会选择 x_j，使得他出售的营养物质混合物替代食物 F_i的价格不超过我们对食物 F_i的原始成本。 这是约束条件（18）。 如果对于所有的 i都成立，我们可以与他做生意。因此，他会选择 $\boldsymbol{x}$ 来最大化他的总收入 $\sum_1^n c_jx_j$，同时满足这些约束条件。 （实际上，我们与他交易不会节省金钱，因为对偶定理表明我们的最小值 $\sum^m$

${}_1\ y_ib_i$，等于他的最大值， $\sum_1^n c_jx_j$。最优价格， x_j，被称为营养物质 N_j的影子价格。虽然没有这样的企业家存在，但是影子价格反映了食物的市场价格和我们对营养物质的需求所塑造的实际价值。

练习题。

1. 找到以下标准最小问题的对偶问题。 找到 y_1， y_2和 y_3以使 $y_1+ 2y_2 + y_3$最小，受到约束条件 $y_i \geq 0$（对于所有的 i）和

$$\begin{array}{rcrcrcl}
y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\
-y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\
2y_1 & & & + & y_3 & \geq & 6 \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 2.
\end{array}$$

2. 考虑练习1的问题。 证明$(y_1，y_2，y_3) = (2/3，0，14/3)$ 对于这个问题是最优的，并且$(x$

${}_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1/3, 2/3, 0)$ 是对偶问题的最优解。

3. 考虑问题：最大化 $3x_1+2x_2+x_3$，约束条件为 $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_3 \geq 0$，以及

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 6 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8. \end{array}$$

(a) 给出对偶问题的最小化形式。

(b) 假设你怀疑向量 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 6, 0)$ 是最大化问题的最优解。 使用均衡定理解决对偶问题，然后证明你的怀疑是正确的。

4. (a) 陈述运输问题的对偶问题。

(b) 解释运输问题的对偶问题。

3. 旋转操作。

考虑以下方程组。

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3y_1 & + & 2y_2 & & & = & s_1 \\ y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 & = & s_2 \\ 5y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & s_3 \end{array} \tag{1}$$

这表示 依赖 变量， s_1，s_2 和 s_3 以自变量的形式，
假设我们希望以y_1， s_1和 y_3的形式获得 y_2， s_2和 s_3。我们解第一个方程得到 y_2，

$$y_2 = \tfrac{1}{2}s_1 - \tfrac{3}{2}y_1,$$

并将 y_2的值代入其他方程。

$$\begin{array}{rcl} y_1 - 3(\frac{1}{2}s_1 - \frac{3}{2}y_1) + 3y_3 & = & s_2 \\ 5y_1 + (\frac{1}{2}s_1 - \frac{3}{2}y_1) + y_3 & = & s_3\text{。} \end{array}$$

这三个简化后的方程变为

$$\begin{array}{rcrcrcl} -\frac{3}{2}y_1 & + & \frac{1}{2}s_1 & & & = & y_2 \\ \frac{11}{2}y_1 & - & \frac{3}{2}s_1 & + & 3y_3 & = & s_2 \\ \frac{7}{2}y_1 & + & \frac{1}{2}s_1 & + & y_3 & = & s_3\text{。} \end{array} \tag{2}$$

这个例子是以下问题类的典型代表。 我们有一个由
n个线性函数组成的方程组，其中有 m个未知数，以矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{s}^{\mathsf{T}} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\boldsymbol{s}^{\mathsf{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$，并且

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

因此，方程式（3）表示了该系统

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1a_{11} & + & \cdots & + & y_ia_{i1} & + \cdots + & y_ma_{m1} & = & s_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ y_1a_{1j} & + & \cdots & + & y_ia_{ij} & + \cdots + & y_ma_{mj} & = & s_j \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ y_1a_{1n} & + & \cdots & + & y_ia_{in} & + \cdots + & y_ma_{mn} & = & s_n. \end{array} \tag{4}$$

在这个形式中， $s_1, \ldots$， s_n 是因变量，而 $y_1, \ldots$， y_m 是自变量。

假设我们想要交换一个因变量和一个自变量。 例如，我们可能希望有 $s_1, \ldots$， s_{j-1}, $y_i, s_{j+1}, \ldots$， s_n用 $y_1, \ldots$， $y_{i-1}, s_j, y_{i+1}, \ldots$， y_m，其中 y_i 和 $s\ j$ 交换。 只有当 $a_{ij}=$ 0 时才能进行此操作。 如果 $a_{ij}= 0$ ，我们可以取第$_j$个方程并解出 y_i，得到

$$y_i = \frac{1}{a_{ij}}(-y_1 a_{1j} - \cdots - y_{i-1} a_{(i-1)j} + s_j - y_{i+1} a_{(i+1)j} - \cdots - y_m a_{mj}). \tag{5}$$

然后我们可以将这个表达式代入其他方程中。 例如，第
k个方程变为

$$y_1 \left(a_{1k} - \frac{a_{ik} a_{1j}}{a_{ij}} \right) + \cdots + s_j \left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}} \right) + \cdots + y_m \left(a_{mk} - \frac{a_{ik} a_{mj}}{a_{ij}} \right) = s_k. \tag{6}$$

我们得到了一个形式为的方程组

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 \hat{a}_{11} & + & \cdots & + & s_j \hat{a}_{i1} & + & \cdots & + & y_m \hat{a}_{m1} & = & s_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ y_1 \hat{a}_{1j} & + & \cdots & + & s_j \hat{a}_{ij} & + & \cdots & + & y_m \hat{a}_{mj} & = & y_i \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ y_1 \hat{a}_{1n} & + & \cdots & + & s_j \hat{a}_{in} & + & \cdots & + & y_m \hat{a}_{mn} & = & s_n. \end{array} \tag{7}$$

$\hat{a}_{ij}$和 a_{ij}之间的关系可以从（5）和（6）中找到。

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ij} &= \frac{1}{a_{ij}} \\ \hat{a}_{hj} &= -\frac{a_{hj}}{a_{ij}} \quad \text{对于 } h = i \\ \hat{a}_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \quad \text{对于 } k = j \\ \hat{a}_{hk} &= a_{hk} - \frac{a_{ik} a_{hj}}{a_{ij}} \quad \text{对于 } k = j\text{和 } h = i. \end{aligned}$$

让我们机械化这个过程。 我们将原始的 $m \times n$矩阵 $\boldsymbol{A}$在一个显示中写出，
y_1 到
ym 在左侧，s1 到sn 在顶部。这个显示被认为代表了原始的方程组（3）。 为了表示我们将要交换对于y_i和s_j，我们圈出条目a_{ij}，并称之为枢轴。 我们画一个箭头指向新的显示，其中y_i和s_j互换位置，并且新的条目为ˆ a_{ij}。 新的显示当然代表了方程组（7），这与方程组（4）等价。

$$\begin{array}{c|ccccc} & s_1 & \cdots & s_j & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} & s_1 & \cdots & y_i & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1j} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_j & \hat{a}_{i1} & \cdots & \hat{a}_{ij} & \cdots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mj} & \cdots & \hat{a}_{mn} \end{array}$$

在介绍性的例子中，这变成了

	s_1	s_2	s_3
y_1	3	1	5
y_2	2	-3	1
y_3	0	3	1

$\longrightarrow$

	y_2	s_2	s_3
y_1	$-3/2$	$11/2$	$7/2$
s_1	$1/2$	$-3/2$	$1/2$
y_3	0	3	1

（注意，左边出现的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是它们在方程（1）中出现的数字的转置。）我们说我们已经围绕着圈起来的条目进行了枢轴操作，从第一个矩阵到第二个矩阵。

枢轴规则可以用符号表示如下：

$$\begin{array}{|cc|}\hline p & r \\ c & q \\ \hline\end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|cc|}\hline 1/p & r/p \\ -c/p & q-(rc/p) \\ \hline\end{array}$$

这表示：枢轴量进入其倒数。与枢轴在同一行的条目被枢轴除以。 与枢轴在同一列的条目被枢轴除以并改变符号。 其余的条目的值减少了它们自身和枢轴在同一行和列的对应条目的乘积除以枢轴的结果。

我们再次对入门示例进行两次枢轴操作。

	y_2	s_2	s_3
y_1	$-3/2$	$11/2$	$7/2$
s_1	$1/2$	$-3/2$	$1/2$
y_3	0	3	1

$\longrightarrow$

	y_2	s_2	y_3
y_1	$-3/2$	-5	$-7/2$
s_1	$1/2$	-3	$-1/2$
s_3	0	3	1

$\longrightarrow$

	y_2	y_1	y_3
s_2	.3	$-.2$	.7
s_1	1.4	$-.6$	1.6
s_3	$-.9$	.6	-1.1

最后的显示以 s_1，s_2 和 s_3来表示 y_1，y_2 和 y_3。 重新排列行和列，我们可以找到 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 。

	y_1	y_2	y_3
s_1	$-.6$	1.4	1.6
s_2	$-.2$	.3	.7
s_3	.6	$-.9$	-1.1

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -.6 & 1.4 & 1.6 \\ -.2 & .3 & .7 \\ .6 & -.9 & -1.1 \end{pmatrix}$$

算术可以通过检查 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$来进行检查。

练习。解方程组 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{s}^T$,

	s_1	s_2	s_3	s_4
y_1	1	1	0	2
y_2	0	2	-1	1
y_3	-1	1	0	3
y_4	1	-2	2	1

对于 y_1，y_2，y_3和 y_4，按顺序进行主元素选取，

(1) 首行，首列（圈出）
(2) 第二行，第三列（主元素为 -1）
(3) 第四行，第二列（主元素为1）
(4) 第三行，第四列（主元素为3）.

重新排列行和列以找到 $\boldsymbol{A}^{-1}$，并检查与 $\boldsymbol{A}$的乘积是否为单位矩阵。

4. 单纯形法

单纯形表。考虑标准最小化问题：找到 $\boldsymbol{y}$以使 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$最小，满足 $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^T$ 。从概念上讲，将最后一组不等式转化为等式是有用的。 出于这个原因，我们添加松弛变量，$\boldsymbol{s}^T= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^T \geq \mathbf{0}$。 问题可以重新表述为：找到 $\boldsymbol{y}$和 $\boldsymbol{s}$以使 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$最小，满足 $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$， $\boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$和 $\boldsymbol{s}^T= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^T$。

我们将这个问题写成一个表格，以表示线性方程 $\boldsymbol{s}^T= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^T$。

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \\
\hline
y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
1 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0
\end{array}
$$

单纯形表

最后一列代表与 $\boldsymbol{y}$的内积我们试图最小化的向量。

如果 $-\boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$且 $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$，那么问题有一个明显的解；即，最小值发生在 $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$和 $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{c}$，最小值为 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}= 0$。 这是可行的，因为 $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$， $\boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{s}^T= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$，但 $\sum y_ib_i$不能比0更小，因为 $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$。

假设我们不能轻易解决这个问题，因为最后一列或最后一行至少有一个负数项（不包括角落）。让我们围绕这个进行枢轴操作
a_{11}（假设 $a_{11}= 0$），在我们的枢轴操作中包括最后一列和最后一行。我们得到这个表格
：

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & y_1 & s_2 & \cdots & s_n & \\
\hline
s_1 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\
y_2 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
y_m & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \cdots & \hat{a}_{mn} & \hat{b}_m \\
\hline
1 & -\hat{c}_1 & -\hat{c}_2 & \cdots & -\hat{c}_n & \hat{v}
\end{array}
$$

让 $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots \ldots \ldots \ldots ., r_n) = (y_1, s_2, \ldots, s_n)$ 表示顶部的变量，让 $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ., t_m) = (s_1, y_2, \ldots, y_m)$ 表示左边的变量。 方程组 $\boldsymbol{s}^T= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^T$等价于新的表格表示的方程组 $\boldsymbol{r}^T = \boldsymbol{t}^T\hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{c}}$。
此外，目标函数 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$可以写成（用 s_1的值替换 y_1的表达式）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} y_ib_i &= \frac{b_1}{a_{11}}s_1 + (b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}})y_2 + \cdots + (b_m - \frac{a_{m1}b_1}{a_{11}})y_2 + \frac{c_1b_1}{a_{11}} \\
&= \boldsymbol{t}^T\hat{\boldsymbol{b}} + \hat{v}
\end{aligned}
$$

这在新的表格中由最后一列表示。

我们将问题转化为以下形式：找到向量 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{s}$，使得 $\boldsymbol{t}^T\hat{\boldsymbol{b}}$最小，满足 $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$， $\boldsymbol{s} \geq 0$ 和 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}^T\hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{c}}$（其中 $\boldsymbol{t}^T$表示向量，
$(s_1, y_2, \ldots, y_m)$, 而 $\boldsymbol{r}^T$ 表示 $(y_1, s_2, \ldots, s_n)$). 这只是原问题的重新陈述.

再次，如果 $-\hat{\boldsymbol{c}} \geq \mathbf{0}$和 $\hat{\boldsymbol{b}} \geq \mathbf{0}$, 我们有明显的解: $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$和 $\boldsymbol{r} = -\hat{\boldsymbol{c}}$，其值为 $\hat{v}$.

很容易看出这个过程可以继续下去. 这给我们提供了一种方法，虽然不太系统，但可以找到解决方案.

疯狂的枢轴法. 疯狂地进行枢轴操作，直到突然发现最后一列和最后一行（不包括角落）中的所有条目都是非负的。然后，将左侧的变量设为零，将顶部的变量设为最后一行的相应条目，即可得到解决方案. 值是右下角.

同样的"方法"可以用来解决对偶问题：最大化 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$，使得约束条件为 $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$。这次，我们添加松弛变量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。问题变为：找到 $\boldsymbol{x}$和 $\boldsymbol{u}$使得最大化 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$，满足约束条件 $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$， $\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$，以及 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。
如果我们将约束条件写为 $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$，我们可以使用相同的表格来解决这个问题。

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & -1 \\
\hline
-u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
-u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-u_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0
\end{array}
$$

我们注意到，如果 $-\boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$且 $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$，那么解就显而易见： $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$，并且值为零（因为问题等价于最小化 $-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$）。

假设我们想要进行枢轴交换 u_1 和 x_1 并且假设 $a_{11} = 0$. 这些方程

$$
\begin{aligned}
-u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 \\
-u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 \text{ 等等。}
\end{aligned}
$$

变成

$$
\begin{aligned}
-x_1 &= \frac{1}{a_{11}}u_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n - \frac{b_1}{a_{11}} \\
-u_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{11}}u_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \cdots \text{ 等等。}
\end{aligned}
$$

换句话说，相同的枢轴规则适用！

$$
\boxed{\begin{array}{cc} p & r \\ c & q \end{array}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{cc} 1/p & r/p \\ -c/p & q-(rc/p) \end{array}}
$$

如果你一直进行枢轴操作，直到最后一行和最后一列（不包括角落）都是非负的，你可以同时找到对偶问题和原始问题的解。

总结一下，你可以将单纯形表格写成

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	-1
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

如果我们进行枢轴操作，直到最后一行和最后一列（不包括角落）的所有条目都是非负的，那么程序及其对偶的值就在右下角找到。
通过让左边的 y_i为零，顶部的 y_i等于最后一行的相应条目，可以得到最小问题的解。通过让顶部的 x_j为零，左边的 x_j等于最后一列的相应条目，可以得到最大问题的解。

例子**1**。考虑问题：最大化$5x_1+ 2x_2 + x_3$ 满足所有 $x_j \geq 0$和

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 6 \\ x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \quad &\leq 7. \end{aligned}$$

对偶问题是：最小化$6y_1+ 4y_2+ 7y_3$ 满足所有 $y_i \geq 0$和

$$\begin{aligned} y_1 \quad + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &\geq 2 \\ -y_1 + y_2 \quad &\geq 1. \end{aligned}$$

单纯形表是

	x_1	x_2	x_3	
y_1	1	3	-1	6
y_2	0	1	1	4
y_3	3	1	0	7
	-5	-2	-1	0 .

如果我们围绕着圈起来的点进行一次枢轴操作，将 y_2 与 x_3交换，将 y_3 与 x_1交换，我们就得到了

	y_3	x_2	y_2	
y_1				23/3
x_3				4
x_1				7/3
	5/3	2/3	1	47/3 .

从这里我们可以读出两个问题的解。 两个问题的值是
$47/3$. 最大化问题的最优向量是 $x_1 = 7/3$ ， $x_2 = 0$ 和 $x_3 = 4$.
最小化问题的最优向量是 $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ 和 $y_3 = 5/3$.

单纯形法就是枢轴疯狂法，它还有一个关键的添加成分，告诉你选择哪些点作为枢轴以系统地接近解。

假设经过一段时间的枢轴操作后，得到了下面的表

	$\boldsymbol{r}$	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{b}$
	$-\boldsymbol{c}$	v

其中 $\boldsymbol{b} \geq 0$. 然后，通过令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$和 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{b}$，我们立即得到了最大问题的可行点（实际上是约束集的极端点），该点处程序的值为 v。

类似地，如果有 $-\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$，那么通过设置 $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{c}$和 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$，我们将得到最小问题的可行点。

单纯形法的枢轴规则。我们首先考虑已经找到最大问题的可行点的情况。

情况**1**： $\boldsymbol{b} \geq 0$。 选择任意一列，最后一个元素为负数，比如列 j_0，其值为 $-c_{j_0} < 0$.
在那些满足条件 $a_{i,j_0} > 0$的 i中，选择使得比值 $b_i/a_{i,j_0}$ 最小的i0。
（如果有多个最小值，选择任意一个 i_0。）围绕 a_{i_0,j_0}进行枢轴操作。

这里有一些例子。 在表格中，可能的枢纽被圈出来。

	r_1	r_2	r_3	r_4	
t_1	1	-1	3	1	6
t_2	0	1	2	4	4
t_3	3	0	3	1	7
	-5	-1	-4	2	0.

	r_1	r_2	r_3	
t_1	5	2	1	1
t_2	1	0	-1	0
t_3	3	-1	4	2
	-1	-2	-3	0 .

如果你无法应用情况1的枢纽规则会发生什么？ 首先，可能发生的是 $-c_j \geq 0$对于所有的 j。 那么你就完成了——你找到了解决方案。 唯一可能出错的另一件事是，在找到一些 $-c_{j_0} < 0$之后，你找到了一个 $a_{i,j_0} \leq 0$ 对于所有的 i。 如果是这样，那么最大问题是无界可行的。 为了证明这一点，考虑任何向量， $\boldsymbol{r}$，使得 $r_{j_0} > 0$，并且 $r_j = 0$对于 $j = j_0$。 然后 $\boldsymbol{r}$对于最大问题是可行的，因为

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} (-a_{i,j}) r_j + b_i = -a_{i,j_0} r_{j_0} + b_i \geq 0$$

对于所有 i，这个可行向量的值为 $\sum c_j r_j = c_{j_0} r_{j_0}$，通过使 r_{j_0}变得足够大，可以使其变得尽可能大。 足够大。

这样的枢轴规则很好用，因为：
1. 在进行枢轴操作后， $\boldsymbol{b}$列仍然非负，因此对于最大化问题仍然有一个可行点。

2. 新表格的值永远不会小于旧表格的值（通常大于旧表格的值）。

证明*1*。让新表格上的变量带帽子表示。我们要证明
$\hat{b}$对于所有i，有 $i \geq 0$。对于 $i = i_0$，我们有 $\hat{}_0 = b_{i_0}/a_{i^0,j_0}$ 仍然非负，因为 $a_i \quad {}_{0,j_0} > 0$. 对于 $i = i_0$，我们有

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{a_{i,j_0} b_{i_0}}{a_{i_0,j_0}}.$$

如果 $a_{i,j_0} \leq 0$，那么$\hat{b}_i \geq b_i \geq 0$，因为 $a b_{i_0} / a_{i^0,j_0} \leq 0$。如果 $a_{i_0 j} > 0$，那么根据枢轴规则，$b_i/a_{i,j_0} \geq b_{i_0}/a_i \quad {}_{0,j_0}$，这样$\hat{b}_i \geq b_i - b_i = 0$。

*2*的证明。 $\hat{v} = v - (-c_{j_0})(b_{i_0}/a_{i_0,j_0}) \geq v$，因为 $-c_{j_0} < 0$，$a_{i_0,j_0} > 0$，和 $b_{i_0} \geq 0$.

这两个属性意味着，如果你按照单纯形法则进行枢轴操作，并且值不断增大，那么由于只有有限数量的表格，你最终将通过找到解决方案或发现问题无界可行来终止。 在2的证明中，注意 v 增加，除非枢轴在带有 b_i的行中

${}_0 = 0$. 因此，除非我们在最后一列中的零行中继续进行枢轴操作，否则单纯形法将最终终止。

例子**2**。最大化 $x_1 + x_2 + 2x_3$，满足所有 $x_i \geq 0$ 和

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\ -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1. \end{array}$$

我们根据单纯形法的规则进行枢轴运算，首先围绕第三行第二列进行枢轴运算。

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline y_1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y_2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ y_3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & y_3 & x_3 & \\ \hline y_1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ y_2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ x_2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & y_3 & y_2 & \\ \hline y_1 & & & & 4/3 \\ x_3 & & & & 2/3 \\ x_2 & & & & 1/3 \\ \hline & 2/3 & 1 & 1/3 & 5/3 \end{array}$$

该程序及其对偶的值为$5/3$。 最大化问题的最优向量为 $x_1 = 0$， $x_2 = 1/3$和 $x_3 = 2/3$。 最小化问题的最优向量为 $y_1 = 0$， $y_2 = 1/3$和 $y_3 = 1$。

情况2：一些 b_i为负数。 取第一个负数 b_i，假设 $b_k < 0$（其中 $b_1 \geqslant 0$，...，bk−1 ≥0）。找到第k行中的任何负数项，假设为ak,
（枢轴将在列$_j$0中）。比较b$_k$/ a $k,_j$。 ${}_0$ （枢轴将在列 j_0中）。比较 b_k /$a_{k,j}$。 （枢轴将在列$_j$0中）。比较b$_k$/a$_{k,j}$。$_0$ 和 $b_i/a_{i,j_0}$ 对于 $b_i \geq 0$ 和 $a_{i,j} \quad {}_0 > 0$，并选择 i_0 使得这个比率最小（i_0 可能等于 k）。 如果存在多个这样的 i_0，你可以选择任意一个。在$_i$上进行主元素转轴 ${}_{0,j_0}$.

以下是一些例子。 在表格中，根据Case 2的规则，可能的主元素转轴被圈出。

	r_1	r_2	r_3	r_4	
t_1	2	3	1	0	2
t_2	−1	−1	−2	2	−1
t_3	1	−1	0	−1	−2
	1	−1	0	2	0

	r_1	r_2	r_3	
t_1	1	−1	0	0
t_2	−1	−2	−3	−2
t_3	2	2	1	1
	1	0	−2	0

如果无法应用Case 2的规则怎么办？ 唯一可能出错的情况是对于 $b_k < 0$ ，我们发现对于所有 j ， $a_{kj} \geq 0$ 。 如果是这样的话，那么最大化问题是不可行的，因为第 k行的方程为

$$-t_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} r_j - b_k \text{。}$$

对于所有可行向量（$\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0}$），左边是负数或零，右边是正数。

在情况2中的目标是达到情况1，因为我们知道从那里该怎么做。 情况2的规则很可能是好的，因为：1. 非负 b_i 在做主元选取后仍然是非负的，而且

2. b_k没有变小（通常会变大）。

*1*的证明。假设 $b_i \geq 0$ ，所以 $i = k$。如果 $i = i_0$，则 $\hat{b}_{i_0} = b_{i_0}/a_{i_0,j_0} \geq 0$ 。如果 $i = i_0$，则

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{a_{i,j_0}}{a_{i_0,j_0}} b_{i_0}.$$

现在 $b_{i_0}/a_{i_0,j_0} \geq 0$。因此，如果 $a_{i,j_0} \leq 0$，则 $\hat{b}_i \geq b_i \geq 0$。如果 $a_{i,j_0} > 0$，则 $b_{i_0}/a_{i_0,j_0} \leq b_i/a_{i,j_0}$，使得 $\hat{b}_i \geq b_i - b_i = 0$ 。

2 的证明。如果 $k = i_0$，则 $\hat{b}_k = b_k/a_{k,j_0} > 0$ （ $b_k < 0$ 和 $a_{k,j_0} < 0$）。如果 $k = i_0$，则

$$\hat{b}_k = b_k - \frac{a_{k,j_0}}{a_{i_0,j_0}} b_{i_0} \geq b_k,$$

因为 $b_{i_0}/a_{i_0,j_0} \geq 0$ 和 $a_{k,j_0} < 0$.

这两个性质意味着，如果按照第2种情况的规则进行枢轴操作，并且 b_k 不断增大，最终会得到 $b_k \geq 0$ ，并且离所有 $b_i \geq 0$ 更近一步。 请注意，在第2个证明中，如果 $b_{i_0} > 0$ ，那么 $\hat{b}_k > b_k$。

例子 **3**。最小化 $3y_1 - 2y_2 + 5y_3$，满足所有 $y_i \geq 0$ 和

$$\begin{aligned} - y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\ y_1 \qquad + y_3 &\geq 1 \\ 2y_1 - 3y_2 + 7y_3 &\geq 5. \end{aligned}$$

我们根据单纯形法的第二种情况的规则进行枢轴运算，首先围绕第二行第一列进行枢轴运算。

	x_1	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
y_2	-1	0	-3	-2
y_3	2	1	7	5
	-1	-1	-5	0

$\longrightarrow$

	y_2	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
x_1	-1	0	3	2
y_3	2	1	1	1
	-1	-1	-2	2

请注意，在进行了一次枢轴运算后，我们现在处于第一种情况。 除了右下角和变量的标签之外，表格与第一种情况的示例完全相同。 继续进行枢轴运算，如示例中所做的那样

	y_2	y_3	x_1	
y_1				$4/3$
x_3				$2/3$
x_2				1
	$2/3$	1	$1/3$	$11/3$

两个问题的解都是 $11/3$ 。 最小问题的解是 $y_1= 0$ ，
$y_2= 2/3$ 和 $y_3= 1$ 。 最大问题的解是 $x_1= 0$ ， $x_2= 1/3$ 和
$x_3 = 2/3$.

对偶单纯形法。单纯形法已经从最大问题的角度陈述过了。 显然，也可以从最小问题的角度陈述。 特别是，如果对于最小问题已经找到了一个可行向量（即底行已经非负），那么用另一个可行向量改进这个向量比应用最大问题的第2种情况规则更有效。

我们陈述最小问题的单纯形法。

情况**1**： $-\boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$.取任意一行，最后一个条目为负数，比如 $b_{i_0} < 0$. 在那些 j 中，使得 $a_{i_0,j} < 0$, 选择使得比率 $-c_j/a_{i_0,j}$ 最接近零。在 a_{i_0,j_0}上进行主元交 .

情况**2**：一些 $-c_j$是负数。 取第一个负数 $-c_j$，假设 $-c_k < 0$（其中 $-c_1 \geq 0$，. . . , $-c_{k-1} \geq 0$）。在列 k中找到任何正数，假设为 $a_{i_0,k} > 0$。比较 $-c_k/a_{i_0,k}$ 和那些 $-c_j/a_{i_0,j}$ 满足 $a_{i_0,j} < 0$，并选择使得这个比值最接近零的 j_0（j_0可能是 k）。以 a_{i_0,j_0}为轴进行旋转 .

例子：

	x_1	x_2	x_3	
y_1	-2	-1	-2	-1
y_2	2	3	5	2
y_3	-3	4	-1	1
	1	2	3	0

$\longrightarrow$

	y_1	x_2	x_3	
x_1				$1/2$
y_2				1
y_3				$5/2$
	$1/2$	$3/2$	2	$-1/2$

如果将这个例子视为最大问题的情况2，我们可以围绕4或5进行旋转。 由于我们对于最小问题有一个可行的向量，我们应用上述的情况1，找到一个唯一的旋转点，并在一步中得到解决方案。

练习。对于下面的线性规划问题，陈述对偶问题，通过单纯形法（或对偶单纯形法）求解，并陈述两个问题的解。

1. 最大化 $x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4$ 受限于约束条件 $x_j \geq 0$，对于所有 j和

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 4 \\
2x_1 & & & + & x_3 & - & 4x_4 & \leq & 2 \\
-2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 1.
\end{array}
$$

2. 最小化 $3y_1 - y_2 + 2y_3$受限于约束条件 $y_i \geq 0$，对于所有 i和

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq & -1 \\
y_1 & & & + & 2y_3 & \geq & 2 \\
-7y_1 & + & 4y_2 & - & 6y_3 & \geq & 1.
\end{array}
$$

3. 最大化 $-x_1 - x_2 + 2x_3$受限于约束条件 $x_j \geq 0$，对于所有 j和

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
2\times_1 & - & \times_2 & - & 2\times_3 & \leq & 1 \\
-x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1.
\end{array}
$$

4. 最小化 $5\times_1 - 2\times_2 - \times_3$，受限于约束条件$\times_i \geq 0$，对于所有 i和

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-2y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & -1 \\
2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\
3y_1 & + & 2y_2 & - & \times_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

5. 最小化 $-2\times_2 + \times_3$，受限于约束条件$\times_i \geq 0$，对于所有 i和

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-y_1 & - & 2y_2 & & & \geq & -3 \\
4y_1 & + & y_2 & + & 7y_3 & \geq & -1 \\
2y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & \geq & -5.
\end{array}
$$

6. 最大化 $3\times_1 + 4\times_2 + 5\times_3$，受限于约束条件$\times_j \geq 0$，对于所有 j和

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
-3x_1 & & & + & x_3 & \leq & -1 \\
-2x_1 & - & x_2 & & & \leq & -1.
\end{array}
$$

5. 广义对偶性。

我们考虑线性规划问题的一般形式，允许一些约束为等式，一些变量为无限制（$-\infty < x_j < \infty$）。

一般最大化问题。寻找 x_j， $j = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$， **n**，以最大化 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{c}$，受限于

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \text{ 对于 } i = 1, \ldots, k$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ 对于 } i = k+1, \ldots, m$$

和

$$x_j \ge 0 \text{ 对于 } j = 1, \ldots, \ell$$
$$x_j \text{ 不受限制 对于 } j = \ell + 1, \ldots, n.$$

该问题的对偶问题是

一般最小化问题。找到 y_i，$i = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, m$, 以最小化 $\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$满足条件

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \ge c_j \text{ 对于 } j = 1, \ldots, \ell$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j \text{ 对于 } j = \ell+1, \ldots, n$$

和

$$y_i \ge 0 \text{ 对于 } i = 1, \ldots, k$$
$$y_i \text{对于 } i = k+1, \ldots, m \text{是无限制的。}$$

换句话说，一个程序中约束条件的严格等式对应于对偶中的一个无限制变量。

如果将一般的最大化问题转化为标准的最大化问题
通过

1. 用两个不等式约束替换每个等式约束， $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$，即
$\sum_j a_{ij}x_j \le b_i$ 和 $\sum_j(-a_{ij})x_j \le -b_i$，以及

2. 用两个非负变量的差替换每个无限制变量，
$x_j = x'_j - x''_j$ 其中 $x'_j \ge 0$ 和 $x''_j \ge 0$，

如果通过相同的技术将对偶的一般最小化问题转化为标准的最小化问题，通过标准问题的对偶性定义，很容易看出转化后的标准问题是对偶的。（练习1。）

因此，第2节中关于标准程序的对偶定理也适用于一般程序。 平衡定理似乎需要特别注意一般规划问题，因为一些yi和xj 可能为负数。

然而，它也是有效的。（练习2） 然而，它也是有效的。（练习2）

通过单纯形法解决一般问题。单纯形表和枢轴规则可以用来找到一般问题的解，只要引入以下修改。

1.考虑一般最小化问题。我们添加松弛变量，$\boldsymbol{s}^T = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^T$，但是约束条件现在要求 $s_1 \geq 0, \ldots, s_\ell \geq 0, s_{\ell+1} = 0, \ldots, s_n = 0$. 如果我们在单纯形表中进行枢轴操作，使得 $s_{\ell+1}$，例如，从顶部移到左侧，它将成为一个独立变量，并且可以根据需要设置为零。一旦 $s_{\ell+\mathbf{1}}$ 在左侧，无论最后一列中对应的$\hat{b}_i$是负数还是正数，都没有影响，因为这个$\hat{b}_i$是目标函数中 $s_{\ell+1}$的系数，而 $s_{\ell+1}$是零无论如何。换句话说，一旦 $s_{\ell+\mathbf{1}}$ 被枢轴到左侧，我们可以删除该行 - 我们永远不会在该行进行枢轴操作，并且忽略该行中最后一个系数的符号。这个分析适用于所有等式约束：枢轴 $s_{\ell+1}, \ldots, s_n$ 移到左侧并且删除。这相当于对每个等式约束求解一个变量，并将结果代入其他线性形式。

2.同样地，无约束变量 y_i，$i = k+1, \ldots,$ m，必须被枢轴移到顶部，表示它们是依赖变量。一旦它们在顶部，我们不关心相应的
$-\hat{c}_j$是否为正，因为无约束变量 y_i可以是正或负。换句话说，一旦 y_{k+1}被枢轴移到顶部，我们可以删除该列。（如果你想要解中 y_{k+1}的值，可以保留该列，但不要在该列中进行枢轴操作——忽略该列中最后一个系数的符号。）

在处理完所有等式约束和无约束变量之后，我们可以根据单纯形法的规则进行枢轴操作以找到解。

类似的论证适用于一般的最大化问题。无约束变量 x_i可以被枢轴移到左边并删除，与等式约束对应的松弛变量可以被枢轴移到顶部并删除。

3.如果上述处理等式约束的方法无法实现，会发生什么情况？在试图将其中一个 s_j f or$_j \geq \ell+1$向左旋转时，可能会发生这种情况，即其中一个 s_α无法在不同时将一些 s_j for$j < \alpha$旋转到顶部的情况下移动，因为列 α中的所有可能的旋转数都为零，除了那些标记为 s_j for $j \geq \ell+1$的行。如果是这样，列 α表示方程

$$s_\alpha = \sum_{j \geq \ell+1} y_j \hat{a}_{j,\alpha} - \hat{c}_\alpha.$$

这次有两种可能性。如果 $\hat{c}_\alpha = 0$，则最小化问题是不可行的，因为所有的$s\ j$ for$_j \geq \ell+1$必须为零。最小化问题的原始等式约束是不一致的。如果 $\hat{c}_\alpha = 0$，则在上述方程中自动获得等式，并且可以删除列 α。最小化问题的原始等式约束包含了冗余。

可以给出一个对偶论证，证明如果不可能将其中一个无限制变量，比如 y_β，移到顶部（而不移动一些无限制变量$_i$从顶部开始

回到左边），那么最大化问题是不可行的，除非可能对应的行中的最后一个条目，$\hat{b}_\beta$，为零。如果$\hat{b}_\beta$为零，我们可以删除该行，因为它是多余的。

4.总之，一般的单纯形法包括三个阶段。 在第一阶段，所有的等式约束和无约束变量都进行了枢轴操作（如果需要，还会被移除）。
在第二阶段，使用单纯形法的枢轴规则得到了问题或其对偶问题的可行解。在第三阶段，根据单纯形法的枢轴规则改进可行解，直到找到最优解。

例子**1.** 最大化 $5x_2 + x_3 + 4x_4$ 满足约束条件 $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，$x_4 \geq 0$，x_3 不受限制，以及

$$\begin{array}{rrrrl} -x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +5x_4 & \leq 5 \\ & 3x_2 & & +\ x_4 & = 2 \\ -x_1 & & +\ x_3 & +2x_4 & = 1. \end{array}$$

在表中，我们在必须进行枢轴操作的变量旁边放置指向上方的箭头，并在变量上方放置指向左方的箭头。

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & \overleftarrow{x}_3 & x_4 & \\ \hline y_1 & -1 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ \uparrow y_2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ \uparrow y_3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 0 & -5 & -1 & -4 & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & \uparrow y_3 & x_4 & \\ \hline y_1 & 1 & 5 & -2 & 1 & 3 \\ \uparrow y_2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ \overleftarrow{x}_3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & -1 & -5 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

删除第三行和第三列后，我们将 y_2作为枢轴操作移到顶部，这样我们就找到了最大问题的可行解。 然后我们删除 y_2并根据简单法则进行枢轴操作，适用于情况1。

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & \uparrow y_2 & \\ \hline y_1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ x_4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & x_2 & \uparrow y_2 & \\ \hline x_1 & 1 & 2 & & 1 \\ x_4 & 0 & 3 & & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}$$

经过一次转轴，我们已经到达了解。 程序的值为6，最大问题的解是 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$x_4 = 2$ 和（根据原问题的不等式约束） $x_3 = -2$。

用单纯形法解矩阵博弈。考虑一个$n \times m$矩阵 $\boldsymbol{A}$的矩阵博弈。 如果玩家I选择混合策略， $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, xn)$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$且 $x_i \geq 0$ 对于所有的 i，他平均至少赢得 λ，其中 $\lambda \leq \sum_{i=1}^n x\ ia_ij$ 对于$j = 1, \ldots, m$。 他想选择 $x_1, \ldots, x_n$ 以最大化他赢得的最小金额。 如果我们将 λ 添加到I选择的变量列表中，这就成为了一个线性规划问题。问题变为：选择 $x_1, \ldots, x_n$ 和 λ以最大化 λ，满足

$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$，$\lambda$ 不受限制，并且

$$\lambda - \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \leq 0 \qquad \text{对于 } j = 1, \ldots, m\text{，以及}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1。$$

这显然是一个一般的最小化问题。

玩家II选择 $y_1, ...$， y_m 满足 $y_i \ge 0$ 对于所有的 i和 $\sum_m y_i = 1$，并且至多失去 μ，其中 $\mu \ge \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j$ 对于所有的 i。因此，问题是：选择 $y_1. . .$， y_m和 μ使 μ最小化，满足 $y_1 \ge 0, . . .$， $y_m \ge 0$， μ不受限制，并且

$$\mu - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \ge 0 \qquad \text{对于 } i = 1, . . . , n, \text{ 和}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1.$$

这正是玩家I问题的对偶。 这些问题可以通过一般程序的单纯形法同时解决。

然而，请注意，如果 $\boldsymbol{A}$是游戏矩阵，则将其转置的负数放入单纯形表中：

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\leftarrow\lambda$	
y_1	$-a_{11}$	$-a_{21}$	$\cdots$	$-a_{n1}$	1	0
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
y_m	$-a_{1m}$	$-a_{2m}$	$\cdots$	$-a_{nm}$	1	0
$\uparrow\mu$	1	1	$\cdots$	1	0	1
	0	0	$\cdots$	0	-1	0

例**2**。解决矩阵游戏与矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

表格如下：

	x_1	x_2	x_3	$\leftarrow\lambda$	
y_1	-1	-2	1	1	0
y_2	-4	1	-1	1	0
y_3	0	-3	0	1	0
y_4	1	-1	-3	1	0
$\uparrow\mu$	1	1	1	0	1
	0	0	0	-1	0

我们希望交换 λ和 μ。 不幸的是，对于通过这种方法解决游戏，枢轴点为零。 因此，我们必须进行两次枢轴，一次将 μ移到顶部，一次将 λ移到左侧。 首先，我们交换 y_3 和 λ 并删除 λ行。然后，我们交换 x_3 和 μ并删除 μ列。

	x_1	x_2	x_3	y_3	
y_1	-1	1	1	-1	0
y_2	-4	4	-1	-1	0
y_4	1	2	-3	-1	0
$\uparrow\mu$	1	1	1	0	1
	0	-3	0	1	0

$$\longrightarrow$$

	x_1	x_2	y_3	
y_1	-2	0	-1	-1
y_2	-3	5	-1	1
y_4	4	5	-1	3
x_3	1	1	0	1
	0	-3	1	0

现在，我们使用单纯形法的枢轴规则，直到最终得到表格，假设

	y_4	y_2	y_1	
y_3				$3/7$
x_2				$16/35$
x_1				$2/7$
x_3				$9/35$
	$13/35$	$8/35$	$14/35$	$33/35$

因此，游戏的价值为33/35。 Player I的唯一最优策略是
(2/7,16/35,9/35)。 Player II的唯一最优策略是(14/35,8/35,0,13/35)。

练习题。

1. (a) 通过(1)将一般最大化问题转化为标准形式，即通过替换每个等式约束， $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ ，用两个不等式约束替换， $\sum_j a_{ij}x_j \le b_i$ 和 $\sum_j(-a_{ij})x_j \le -b_i$，以及(2)通过替换每个无约束变量 x_j 为 $x'_j - x''_j$，其中 x'_j 和 x''_j 被限制为非负数。

(b) 通过(1)将每个等式约束替换为 $\sum_i y_i a_{ij} = c_j$，将一般最小问题转化为标准形式。通过两个不等式约束，将 $\sum_i y_i a_{ij} \ge c_j$ 和 $\sum_i y_j(-a_{ij}) \ge -c_j$进行替换，同时将每个无限制的 y_i 替换为 $y'_i - y''_i$，其中 y'_i 和 y''_i 被限制为非负数。

(c) 证明标准程序(a)和(b)是对偶的。

2. 设 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{y}^*$ 分别为一般最大问题和其对偶问题的可行向量。 假设一般问题的对偶定理成立，证明当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$和$\boldsymbol{y}^*$是最优解时，它们是最优的。

$$\begin{aligned} &y_i^* = 0 \qquad \text{对于所有 } i\text{满足 } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_j \\ &\text{和} \\ &x_j^* = 0 \qquad \text{对于所有 } j\text{满足 } \textstyle\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} > c_j. \end{aligned} \tag{$*$}$$

3. (a) 给出示例1问题的对偶问题。

(b) 求解示例1问题的对偶问题。

4. 用矩阵求解游戏， $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$。首先将枢轴行与变量 λ和 y_1进行交换。 然后将枢轴列与 μ和 x_2进行交换，并继续。

6. 循环。

不幸的是，简单法则中所述的单纯形法则在枢轴行中的常数项 b_r为零时没有明显的改进。 事实上，按照单纯形法则选择的一系列枢轴可能会将您带回原始的表格。 因此，如果您使用这些枢轴，可能会永远循环。

例子 **1.**最大化 $3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4$，满足所有 $x_i \geq 0$ 和

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &\leq 0 \\ x_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

如果你选择枢轴点非常小心，你会发现按照单纯形法的规则，在六个枢轴点之后你会回到原始的表格。 练习 1 展示了如何选择枢轴点使这种情况发生。

一种避免循环的单纯形法的修改。 给定两个 n-维向量 $\mathbf{r}$和 $\mathbf{s}$，如果 $\mathbf{r} = \mathbf{s}$，我们说 $\mathbf{r}$ 在字典序上小于 $\mathbf{s}$，记作$\mathbf{r} \prec \mathbf{s}$，如果在第一个坐标上 $\mathbf{r}$和 $\mathbf{s}$不同，例如 $r_1 = s_1$，. . .，$r_{k-1} = s_{k-1}$,$r_k = s_k$，我们有 $r_k < s_k$。

例如，$(0, 3, 2, 3) \prec (1, 2, 2, -1) \prec (1, 3, -100, -2)$。

以下过程可用于避免循环。 在单纯形表中，将一个单位矩阵添加到右侧的 b-列，并在值变量 v的右侧添加一个 m-向量 $(c_{n+1}, \ldots, c_{n+m})$，初始值为 **0**。 这将产生一个修改后的单纯形表：

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n					
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	1	0	$\ldots$	0
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	0	1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	0	0	$\ldots$	1
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	v	c_{n+1}	c_{n+2}	$\ldots$	c_{n+m}

将表格的右侧视为向量， $\mathbf{b}_1 = (b_{1,1}, 0, ... , 0)$，. . .， $\mathbf{b}_m = (b_m, 0, 0, ... ,1)$, 并且 $\mathbf{v}= (v, c_{n+1}, . . . , c_{n+m})$, 并且使用之前的单纯形法则，但是将 b_i 替换为 $\mathbf{b}_i$并使用词典序排序。

修改的单纯形法则：我们假设所有的 $b_i \geq 0$ 。找到 $c_s < 0$ 。 在所有满足ars>0 的 r 中，选择使得 $\mathbf{b}_r/a_r$s 的词典序最小的 a_rs 进行主元操作。

我们注意到向量 $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$是线性无关的，也就是说，

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \text{ 意味着 } \alpha_i = 0 \text{ 对于 } i = 1, 2, ..., m。$$

我们将在各种元素 $a_{rs}= 0$ 上进行主元操作，重要的是要注意
这些向量在主元操作后仍然保持线性无关。 这是因为如果 $\mathbf{b}_1, \ldots \ldots \ldots, \mathbf{b}_m$ 是线性无关的，并且在主元操作后，新的 $\mathbf{b}$-向量变为

$$(*) \qquad \begin{aligned} \mathbf{b}'_r &= (1/a_{rs})\mathbf{b}_r \text{ 和，对于 } i = r, \\ \mathbf{b}'_i &= \mathbf{b}_i - (a_{is}/a_{rs})\mathbf{b}_r, \end{aligned}$$

则 $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{b}'_i = \mathbf{0}$ 意味着

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{b}'_i = \sum_{i=r} \alpha_i \mathbf{b}_i - \sum_{i=r} (\alpha_i a_{is}/a_{rs})\mathbf{b}_r + (\alpha_r/a_{rs})\mathbf{b}_r = \mathbf{0}$$

这意味着 $\alpha_i= 0$ 对于 $i= 1, \ldots \ldots, m$.

我们陈述了改进的单纯形法的基本性质，表明不会发生循环。 注意我们从所有 $\mathbf{b}_i \succ \mathbf{0}$开始，也就是说，每个 $\mathbf{b}_i$的第一个非零坐标是正的。

修改的单纯形法的性质：

(1) 如果所有的 $c_s \geq 0$，则已经找到了一个解。

(2) 如果对于 $c_s < 0$，所有的 $a_{rs} \leq 0$，那么问题是无界的。

(3) 在进行主元列选取后，新的 $\mathbf{b}'_i$保持字典序正，这可以从方程（*）中轻松验证。

(4) 在进行主元列选取后，新的 $\mathbf{v}'$字典序大于 $\mathbf{v}$，这可以从 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - (c_s/a_{rs})\mathbf{b}_r$中轻松看出。

因此，对于修改的单纯形法，值 $\mathbf{v}$总是在每次主元列选取后字典序递增。 由于单纯形表格只有有限个，而且每次主元列选取后值 $\mathbf{v}$都字典序递增，所以这个过程最终必定停止，要么得到一个最优解，要么得到一个无界解。

这最终为我们提供了对偶定理的证明！这个证明是具体的。
给定一个有界的可行线性规划问题，使用改进的单纯形法规则最终会停在一个表中，从中可以读出问题及其对偶的解。此外，问题及其对偶的值是相同的。

在实际问题中，从不使用改进的单纯形法规则。 这部分是因为在实际问题中循环很少发生，因此不觉得需要。 但是，还有一种非常简单的单纯形法修改方法，由Bland提出（“单纯形法的新有限旋转规则”，运筹学数学 **2**，1977年，第103-107页），可以避免循环，并且非常容易包含在线性规划算法中。 这被称为最小下标规则：如果有选择的主列或选择的主行，选择具有最低下标的 x变量的行（或列），或者如果没有 x变量，则选择具有最低下标的 y变量的行（或列）。

练习题。

1. (a) 为示例1设置单纯形表

(b) 按照以下方式进行枢轴操作

1. 交换 x_1 和 y_1.
2. 交换 x_2 和 y_2.
3. 交换 x_3和 x_1
4. 交换 x_4 和 x_2.
5. 交换 y_1 和 x_3.
6. 交换 y_2 和 x_4.

现在，注意你回到了起点。

2. 按照修改后的单纯形法则进行枢轴操作解决示例1的问题

3. 按照最小下标法则进行枢轴操作解决示例1的问题

7. 用线性方法解决的非线性目标函数的四个问题

1. 有约束的游戏。找到使得对于 $_j= 1, \ldots \ldots \ldots \ldots$, **n**最大化

$$\min_{1\leq i\leq p}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\right] \tag{1}$$

满足一般最大化问题中的约束条件

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j &\leq b_i \qquad \text{对于 } i= 1,\ldots,k\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j &= b_i \qquad \text{对于 } i = k+1,\ldots,n\end{aligned} \tag{2}$$

和

$$\begin{aligned}x_j &\geq 0 \qquad \text{对于 } j= 1,\ldots,\ell\\ (x_j\ \text{无限制} & \qquad \text{对于 } j = \ell+1,\ldots,n)\end{aligned} \tag{3}$$

这个问题可以看作是从玩家I的视角对矩阵游戏问题的一般化，并且可以通过类似的方式转化为一般线性规划问题，如下所示。 将 λ添加到无限制变量列表中，受限于约束条件

$$\lambda - \sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j \leq 0 \qquad \text{对于 } i= 1,\ldots,p \tag{4}$$

问题变为：最大化 λ，受限于约束条件(2)，(3)和(4)。

例**1**。 一般生产计划问题(见Zu**kho**v$_i$**t**sk$_i$y和Av**d**e**y**e**v**a，"线性和凸规划"，(**1**966) W **.** B. Sau$_n$**ders** p**g.** 93) 有 个活动， $A_1,\ldots,A\ \ n$, 一家公司可以利用可用的资源供应 m资源， $R_1,\ldots,R_m$。 设 b_i 为 R_i 的可用供应量，设 a_{ij} 为在单位强度下操作 A_j 时使用的 R_i 的数量。 每个活动可以生产一些或全部构成完整产品（比如一台机器）的p 个不同部件。 每个产品由 N_1parts #1,... ,$N\ \ p$parts #$_p$组成。 设 c_{ij}表示在单位强度下操作 A_j 时生产的部件 #$_i$的数量。 问题是选择活动强度，以最大化构建完整产品的数量。

设 x_j为 A_j的强度，其中 $j= 1,\ldots,n.$ 这样选择强度会产生 $\sum^n{}_{j=1} c_{ij}x_j$ 部分 #i所需的数量，这些部分将用于制造 $\sum^n{}_{j=1} c_{ij}x_j/N_i$个完整产品。 因此，可以使用这种强度选择来制造

$$\min_{1\leq i\leq p}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j/N_i\right] \tag{5}$$

个完整产品。 在这种强度选择中，使用的 R_i的数量不能超过 b_i，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad \text{其中 } i = 1, \ldots, m \tag{6}$$

而且我们不能使用负强度

$$x_j \geq 0 \qquad \text{其中 } j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

我们需要在满足(6)和(7)的条件下最大化(5)。 当 $p = 1$时，这就变成了活动分析问题。

练习**1**。在一般的生产计划问题中，假设有3个活动，**1**个资源和3个部件。 设 $b_1 = \mathbf{12}$，$a_{11} = 2$， $a_{12} = 3$和 $a_{13} = 4$， $N_1 = 2$， $N_2 = \mathbf{1}$，以及 $N_3 = \mathbf{1}$，并且矩阵中的 c_{ij}如下所示。 (a) 设置相关线性规划的单纯形表。 (b) 求解。 (答案： $x_1 = x_2 = x_3 = 4/3$，值为8。)

$$\mathbf{C} = \begin{array}{r} \\ \text{部分 } \#1 \\ \text{部分 } \#2 \\ \text{部分 } \#3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. 最小化绝对值之和。找到 y_i使得 $i = 1, \ldots, m$, 最小化

$$\sum_{j=1}^{p} \left| \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \right| \tag{8}$$

受限于一般最小问题中的约束条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} &\geq c_j \qquad \text{对于 } j = 1, \ldots, \ell \\ \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} &= c_j \qquad \text{对于 } j = \ell + 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{9}$$

和

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0 \qquad \text{对于 } i = 1, \ldots, k \\ (y_i \text{ 无限制} &\qquad\quad \text{对于 } i = k + 1, \ldots, m.) \end{aligned} \tag{10}$$

为了将这个问题转化为线性规划问题，添加 p更多变量， $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$，其中 y_{m+j} 是 (8) 中第 j个项的上界，并尝试最小化 $\sum_{j=1}^{p} y_{m+j}$。约束条件

$$\left| \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \right| \leq y_{m+j} \qquad \text{对于 } j = 1, \ldots, p$$

等价于$2p$线性约束条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j &\leq y_{m+j} \qquad \text{对于 } j= 1, \ldots, p \\ -\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} + b_j &\leq y_{m+j} \qquad \text{对于 } j= 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{11}$$

问题变为最小化 $\sum_{j=1}^{p} y_{m+j}$ 满足约束条件 (9), (10) 和 (11)。
在这个问题中，约束条件 (11) 意味着 $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$是非负的，所以这些变量是否受非负限制并不重要。如果我们将它们保持不受限制，计算通常会更容易。

例子**2**。希望找到一个 m维向量， $\boldsymbol{y}$，其平均距离
到给定的超平面为 p

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} = b_j \qquad \text{对于 } j= 1, \ldots, p$$

是一个最小值。 要找到从点$(y_1{}^0, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m^0)$到平面的（垂直）距离 $\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} = b_j$，我们通过将两边除以 $d_j = (\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^2)^{1/2}$来归一化这个方程。
因此，我们正在寻找 $y_1, \ldots, y^m$来最小化

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \left| \sum_{i=1}^{m} y_i b'_{ij} - b'_j \right|.$$

根据问题的陈述，没有形式为(9)或(10)的约束条件。

练习**2.**考虑寻找 y_1 和 y_2的问题，使得 $|y_1 + y_2 -_1| + |2y\,1 - y_2 + 1| + |y_1 - y_2 - 2|$在满足约束条件 $y_1 \geq 0$ 和 $y_2 \geq 0$ 的情况下最小化。 (a) 建立相关线性规划的单纯形表。(b) 求解。(答案：$(y_1, y_2) = (0,_1)$，值$= 3$。)

3. 最小化绝对值的最大值。找到 $y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m$使其最小化

$$\max_{1 \leq j \leq p} \left| \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \right| \tag{12}$$

在满足通用约束条件 (9) 和 (10) 的情况下。 这个目标函数结合了问题1和问题2的目标函数的特点。 类似的方法组合将这个问题转化为线性规划问题。 将 μ 添加到无约束变量列表中，受到约束条件的限制。

$$\left| \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \right| \leq \mu \qquad \text{对于 } j= 1, \ldots, p$$

并尝试最小化 μ。 这些 p约束等价于以下2个p线性约束

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \le \mu \qquad & \text{对于 } j=1,\ldots,p \\ -\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} + b_j \le \mu \qquad & \text{对于 } j=1,\ldots,p \end{aligned} \tag{13}$$

问题变为：最小化 μ，满足(9)、(10)和(13)。

例子**3**。 切比雪夫逼近。给定一组 m未知数的 p线性仿射函数，

$$\psi_j(y_1,\ldots,y_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \qquad \text{对于 } j=1,\ldots,p\text{，} \tag{14}$$

找到一个点，$(y_1{}^0,\ldots,y_m^0)$，使得最大偏差(12)最小。 这样的一个点被称为系统(14)的切比雪夫点，并且在某种意义上是系统(14)无解时的替代概念。 另一个替代方案是最小化总偏差(8)的点。 如果函数(14)被归一化，使得对于所有 j， $\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^2=1$，则最大偏差(12)变为点 $\boldsymbol{y}$到平面的最大距离。

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} = b_j \qquad \text{对于 } j=1,\ldots,p.$$

如果没有这种归一化，可以将最大偏差看作是一个“加权”的最大距离。（参见Zukhovitskiy和Avdeyeva，第191页，或Stiefel的“关于Jordan消元，线性规划和Tchebycheff逼近的注释”Numerische *Mathe-matik* **2**（1960），1-17。

练习**3**。找到系统的Chebyshev点（未归一化）。

$$\begin{aligned} \psi_1(y_1,y_2) &= y_1 + y_2 - 1 \\ \psi_2(y_1,y_2) &= 2y_1 - y_2 + 1 \\ \psi_3(y_1,y_2) &= y_1 - y_2 - 2 \end{aligned}$$

通过(a)建立相关的线性规划问题，和(b)求解。(答案：$y_1=0, y_2=-1/2$, value $=3/2$)

4. 线性分式规划。(Charnes和Cooper，“线性分式函数规划”，*Naval Research Logistics Quarterly* **9** (1962), 181-186.) 寻找$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)^T$来最大化$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}+\beta$

$$\overline{} \tag{15}$$

满足通用约束条件(2)和(3)。 在这里，$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$是n维向量，α和β是实数。 为了避免技术困难，我们做出两个假设：约束集非空且有界，分母$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}+\beta$在整个约束集中严格为正。

请注意，无论将分子和分母乘以任何大于零的数t，目标函数仍保持不变。 这表明保持分母不变
$(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}+\beta)t=1$，并尝试最大化 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}t+\alpha t$。 通过变量的改变 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}t$，这变成了以下线性规划问题。找到 $\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_n)$ 和 t以最大化

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z}+\alpha t$$

满足约束条件

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{z}+\beta t=1 \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j \le b_i t \qquad \text{对于 } i=1,\dots,k \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j = b_i t \qquad \text{对于 } i=k+1,\dots,m \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} t &\ge 0 \\ z_j &\ge 0 \qquad \text{对于 } j=1,\dots,\ell \\ z_j &\ \text{不受限制} \qquad \text{对于 } j=\ell+1,\dots,n. \end{aligned}$$

在原始问题中，可行解 $\boldsymbol{x}$可以通过线性规划中的可行解$(\boldsymbol{z},t)$来实现，通过令 $t=(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}+\beta)^{-1}$和 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}t$. 相反地，线性规划中可行解$(\boldsymbol{z},t)$中的每个可行值，当$t>0$时，都可以通过原始问题中的可行解 $\boldsymbol{x}$来实现，通过令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}/t$. 然而，线性规划中的可行解$(\boldsymbol{z},t)$不能为零，因为如果$(\boldsymbol{z},0)$是可行解，则对于所有 $\delta>0$和任意可行解 $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{z}$将是原始问题的可行解，这将导致约束集为空或无界。 (如果需要，可以证明 t也不能为负数，因此可以将其作为不受限制的变量之一。) 因此，线性规划的解总是导致原始问题的解。

例子 **4.** 活动分析以最大化回报率。 有 n个活动 $A_1,\dots$，一个公司可以利用可用的资源$R_1,\dots,R\ m$来雇佣$_n$个活动。 让 b_i 表示可用的资源 R_i 的供应量，让 a_{ij} 表示在单位强度下运行 A_j 时使用的 R_i 的数量。 让 c_j 表示公司在单位强度下运行A_j 时的净回报，让 d_j 表示运行 A_j 时消耗的时间。

公司还需要进行一些不涉及 $R_1,\dots$，R_m 的其他活动，在消耗 β的时间下产生净回报 α。 问题是在约束条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b}$和 $\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}$下最大化回报率(15)。 我们注意到，如果 $\boldsymbol{b}\ge\boldsymbol{0}$，则约束集是非空的，如果对于所有的 i和 j， $a_{ij}>0$，则一般是有界的，并且如果 $\boldsymbol{d}\ge\boldsymbol{0}$且 $\beta>0$，则约束集上的 $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}+\beta$是正的。

练习**4.**有两个活动和两个资源。 R_1有2个单位可用，R_2有3个单位可用。 活动A_1以单位强度运行，需要1个单位的R_1和
3个单位的R_2，产生2个单位的回报，并使用1个时间单位。 活动A_2以单位强度运行，需要3个单位的R_1和2个单位的R_2，产生3个单位的回报，并使用2个时间单位。 启动整个过程需要1个时间单位，没有回报。 (a) 设置相关线性规划的单纯形表。 (b) 找到最大化回报率的强度。 (答案：$A1$的强度为5/7，$A2$的强度为3/7，最大回报率=19/18。)

8. 运输问题。

运输问题在第1节中进行了描述和讨论。 简而言之，问题是找到从港口 P_i到市场 M_j 运输的数量t_{ij}以最小化总运输成本，

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}b_{ij}, \tag{1}$$

受非负约束$\mathrm{t}_{ij} \geq 0$，对于所有的 i和 j，供应约束条件，

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \leq s_i \qquad \text{对于 } i= 1, \ldots, I \tag{2}$$

以及需求约束条件，

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} \geq r_j \qquad \text{对于 } j= 1, \ldots, J \tag{3}$$

其中t_i， r_j， b_{ij} 是给定的非负数。

对偶问题是找到最大化的数 $u_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, u_I$ 和 $v_1, \ldots, v_J$，

$$\sum_{j=1}^{J} r_j v_j - \sum_{i=1}^{I} s_i u_i \tag{4}$$

受约束条件 $v_j \geq 0$，$u_i \geq 0$ ，以及

$$v_j - u_i \leq b_{ij} \qquad \text{对于所有的 } i \text{和 } j。 \tag{5}$$

显然，运输问题在供应至少与需求一样多的情况下才可行:

$$\sum_{i=1}^{I} s_i \geq \sum_{j=1}^{J} r_j. \tag{6}$$

很容易看出，如果满足这个不等式，那么问题就是可行的；例如，我们可以取 $y_{ij} = s_i r_j / \sum^{I}{}_{i=1} s_i$（至少如果 $\sum s_i > 0$ ）。 由于对偶问题显然是可行的（$u_i = v_j = 0$ ），条件（6 ）对于两个问题都是有界可行的必要且充分条件。

下面，我们将开发一个简单的算法来解决在总需求等于总供应的假设下的运输问题。 通过添加一个虚拟市场（称为垃圾场）并选择其需求使总需求等于总供应，且所有运输成本到垃圾场为零，可以轻松避免这个假设。因此，我们假设

$$\sum_{i=1}^{I} s_i = \sum_{j=1}^{J} r_j. \tag{7}$$

在这个假设下，约束条件(2)和(3)中的不等式必须满足等式，因为如果约束条件(2)或(3)中有一个严格不等式，那么对i求和(2)和对j求和(3)将会产生(7)中的严格不等式。 因此，我们可以用(2)和(3)来替换

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ij} = s_i \qquad \text{对于 } i = 1, \ldots, I \tag{8}$$

和

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} = r_j \qquad \text{对于 } j = 1, \ldots, J。 \tag{9}$$

因此，为了解决这两个问题，找到满足平衡条件的可行向量y_{ij}和u_i和v_j是充分且必要的。 由于约束条件(8)和(9)中的等式，平衡条件简化为对所有i和j成立的条件

$$y_{ij} > 0 \text{意味着 } v_j - u_i = b_{ij}。 \tag{10}$$

当然，这个问题可以通过单纯形法来解决。 然而，这个问题的单纯形表格涉及到一个 IJ乘 $I+J$约束矩阵。 相反，我们使用一种更高效的算法，可以很容易地用 I乘 J运输数组来描述。

	M_1	M_2	$\ldots$	M_J		
P_1	b_{11} y_{11}	b_{12} y_{12}	$\ldots$	b_{1J} y_{1J}	s_1	
P_2	b_{21} y_{21}	b_{22} y_{22}	$\ldots$	b_{2J} y_{2J}	s_2	(11)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
P_I	b_{I1} y_{I1}	b_{I2} y_{I2}	$\ldots$	b_{IJ} y_{IJ}	s_I	
	r_1	r_2		r_J		

以下是一个运输数组的示例。

	M_1	M_2	M_3	M_4		
P_1	4	7	11	3	5	
P_2	7	5	6	4	7	(12)
P_3	1	3	4	8	8	
	2	9	4	5		

这表示有三个港口和四个市场。 港口 P_1有5个单位的商品， P_2有7个单位， P_3有8个单位。 市场 M_1， M_2， M_3和 M_4分别需要2、9、4和5个单位的商品。 每单位商品的运输成本输入到相应的方格中。 例如，从 P_1到M_3每单位的运输成本是11。 我们需要将从 P_i到 M_j运输的数量Y$_{ij}$输入到数组中。

该算法由三个部分组成。

1. 找到一个基本可行的运输计划， y_{ij}。

2. 测试最优性。

3. 如果测试失败，找到一个改进的基本可行的运输计划，并重复第2步。

1. 找到一个初始的基本可行的运输计划， y_{ij}。 我们首先用上面给出的例子非正式地描述这种方法。. 选择任意一个方格，比如左上角的$(\mathbf{1},\mathbf{1})$，并使 y_{11}尽可能大，同时满足约束条件。在这种情况下，
选择y_{11}等于2。 我们从 P_1中运送 M_1的所有需求。因此， $y_{21} = y_{31} = 0$。
我们选择另一个方格，比如(1,2)，并使 y_{12}尽可能大，同时满足约束条件。 这次， $y_{12} = 3$，因为 P_1只剩下三个单位。因此，
$y_{13} = y_{14} = 0$. 接下来，选择方格（2，2），假设 $y_{22} = 6$ ，这样 M_2就能满足它的需求，从 P_1获取3个单位，从 P_2获取6个单位。因此， $y_{32} = 0$ 。 继续这样做，直到所有变量 y_{ij}都确定。 （这种选择基本可行运输计划的方法称为西北角法。）

	M_1	M_2	M_3	M_4	
P_1	4 ②	7 ③	11	3	5
P_2	7	5 ⑥	6 ①	4	7
P_3	1	3	4 ③	8 ⑤	8
	2	9	4	5	

(13)

我们已经圈出了那些在解决方案中出现的变量 y_{ij}，以便稍后用于找到改进的基本可行运输计划。 有时，有必要圈出一个为零的变量 y_{ij}。 一般的方法可以如下表述。

A1. （a）选择任意可用的方格，比如 (i_0, j_0)，指定 $y_{i_0 j_0}$ 尽可能大，但受约束条件限制，并圈出该变量。

（b）从考虑中删除满足其约束条件的行或列，但不能同时删除两者。 如果有选择的余地，不要删除最后一行（列），如果它是最后一行（列）未删除的。

（c）重复（a）和（b），直到最后一个可用的方块填满一个被圈出的变量，然后从考虑中删除行和列。

我们注意到选择基本可行航运计划的这种方法具有两个特性。

引理**1**。（**1**）恰好有 $I+J-1$个被圈出的变量。**.**（*2*）没有包含超过I +J -1个被圈出的变量的子矩阵。

证明。每输入一个圈出的变量，就会删除一行或一列，除了最后一个变量，其中一行和一列都会被删除。由于有 $I+J$行和列，所以必须有 $I+J-1$个被圈出的变量，证明了（1）。通过集中在R行和C列上，并注意到对于每个行和列，子矩阵中最多只能删除一个被圈出的变量，当删除了R +C -1个行和列时，整个子矩阵都会被删除，类似的论证证明了（2）。

■

引理1的逆命题也成立。

引理**2**。满足引理*1*的条件*(1)*和*(***2***)*的任何可行变量集合都可以通过这个算法获得。

证明。每一行和每一列至少有一个被圈起来的变量，因为删除没有被圈起来的行或列会得到一个与(3)矛盾的子矩阵。**.** 根据(2)，由于有 $I+J$个行和列，但只有 $I+J-1$个被圈起来的变量，所以至少有一行或一列只有一个被圈起来的变量。我们可以在算法中首先选择这一行或一列。剩下的$(I-1)\times J$或 $I\times(J-1)$的子数组满足相同的两个条件，可以在算法中选择另一行或一列只有一个被圈起来的变量。这个过程可以一直进行下去，直到所有被圈起来的变量都被选择。

■

为了说明算法A1中零的循环和(b)的使用，我们选择了上面例子中不同的顺序来选择方块。我们尝试通过首先选择运输成本最低的方块来找到一个好的初始解。这被称为最小成本规则。

最小的运输成本在左下方的方块中。因此，$y{=}_{31}{=}_{2}$被圈出，M_1被删除。在剩下的方块中，$_3$是最低的运输成本，我们可能会选择右上角的方块。因此，$y{=}_{14}{=}5$被圈出，我们可以根据规则(b)删除P_1或M_4，但不能同时删除两者。假设我们删除P_1。接下来，$y{=}_{32}{=}6$被圈出，P_3被删除。在港口中，只剩下P_2，所以我们圈出$y{=}_{22}{=}_{3}$，$y{=}_{23}{=}_{4}$和$y{=}_{24}{=}0$。

4	7	11	3 ⑤	5
7	5 ③	6 ④	4 ⓪	7
1 ②	3 ⑥	4	8	8
2	9	4	5	

(14)

2. 检查最优性。给定一个可行的运输计划，我们提议使用均衡定理来检查最优性。这意味着找到满足均衡条件（10）的可行解 u_i 和v_j。

一种方法是解方程

$$v_j - u_i = b_{ij} \tag{15}$$

对于所有包含圈定变量的（i, j）-方块（无论变量是否为零）。
有 $I + J - 1$ 个圈定变量，因此在 I +J 个未知数中有 $I + J - 1$ 个方程。
因此，其中一个变量可以被固定为零，并且可以使用这些方程来解其他变量。 一些 u_i 或 v_j 可能为负数，但这并不重要。 可以始终向所有 u_i和v_j 添加一个大的正常数，使它们变为正数，而不改变 $v_j - u_i$的值。

一旦确定了 u_i和 v_j 以满足平衡条件，就必须通过检查来检查可行性 $v_j - u_i \leq b$i$_j$ 对于所有没有圈定变量的(i, j)-方格。总结一下，

A2. (a) 将 v_j 或 u_i 中的一个设为零，并使用*(15)*来找到包含圈定变量的方格中的所有 v_j 和 u_i。

(b) 检查剩余方格的可行性 $v_j - u_i \leq b_{ij}$。 如果可行，则该解对问题及其对偶问题都是最优解。

我们必须证明A2的(a)部分总是可以执行。也就是说，我们必须证明当其中一个变量 v_j或 u_i设为零时，对于包含圈定变量的(i, j)-方格，存在唯一的解决方案(15)。 与引理2的证明类似，我们可以找到一行（或列），其中只有一个圈定变量。一旦确定了其余的 u_i 和 v_j，就可以唯一地找到与该行（或列）对应的 u_i （或 v_j）。 我们删除这行（或列），并注意到缩减后的数组也是如此。 继续以类似的方式进行，我们可以将数组缩减为一个单独的元素。 可以固定与该方格对应的任一对偶变量，并唯一地找到其余的变量。 初始固定变量可以调整为给定的任何预设 u_i或 v_j 值为零。

■

让我们检查可行的运输时间表（14）的最优性。
首先解决 u_i 和 v_j的问题。我们将 $u_2 = 0$，因为这样可以快速解决 $v_2 = 5$， $v_3 = 6$和 $v_4 = 4$。 （通常，从$_i$行（j列）中有许多圈定变量的 ui$= 0$（或 $v_j = 0$）开始是一个好主意。）知道 $v_4 = 4$使我们能够解决 $u_1 = 1$。 知道 $v_2 = 5$使我们能够解决 $u_3 = 2$，从而使我们能够解决 $v_1 = 3$。 我们将 v_j变量写在数组的顶部，u_i 写在左侧。

	3	5	6	4	
1	4	7	11	3 ⑤	5
0	7	5 ③	6 ④	4 ⓪	7
2	1 ②	3 ⑥	4	8	8
	2	9	4	5	

(16)

然后，检查剩下的六个方块的可行性。 左上方的方块满足约束条件 $v_j - u_i \le b_{ij}$，因为3 $-1 = 2 \le 4$。. 类似地，所有的方块都可以看出满足约束条件，因此上述给出了原始问题和对偶问题的解。 最优的运输计划如下所示，其值为$\sum\sum y_{ij} b i_j =$

$2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 74$。 作为检查， $\sum v_j r_j - \sum u_i s_i = 95 - 21 = 74$。

注意，如果 b_{21}等于2而不是7，则可以从最小成本规则得到相同的运输计划，但它不是最优的，因为 $v_1 - u_2 > b_{21} = 2$。

3. 改进例程。假设我们通过计算对偶变量 u_i和 v_j来测试一个可行的运输计划的最优性，并发现对偶变量不可行。 取任意一个方块 (i_0, j_0)，其中 $v_{j_0} - u_{i_0} > b_{i_0 j_0}$.
我们希望从港口 P_{i_0} 运送一定数量的商品到市场 M_{j_0}，假设 $y_{i_0 j_0} = \theta$。 但是，如果我们在该方块上加上 θ，我们必须在其他包含圈内变量的方块上减去和加上 θ以保持约束条件满足。

考虑上述例子，将 b_{21}改为2。 那么方块 $(2, 1)$ 不满足可行性。 我们希望在方块 $(2, 1)$ 上加上 θ。 这需要从方块 $(3, 1)$ 和 (2,2) 中减去 θ，并在方块 (3,2) 中加上 θ。

4	7	11	3 ⑤	5
2 $+\theta$	5 $-\theta$ ③	6 ④	4 ⓪	7
1 $-\theta$ ②	3 $+\theta$ ⑥	4	8	8
2	9	4	5	

(17)

我们选择 θ尽可能大，记住不允许负运输。
这意味着我们选择 θ为我们在减去 θ的方块中的 y_{ij}的最小值。在这个例子中， $\theta = 2$。

至少有一个 y_{ij}被设置为0，或者保持为0。 从圈出的变量中移除任意一个，并圈出 $y_{i_0 j_0}$。 然后进行最优性检查。 这是针对例子进行的，可以看到新的计划是最优的，价值为72。

	2	5	6	4	
1	4	7	11	3 ⑤	5
0	2 ②	5 ①	6 ④	4 ⓪	7
2	1	3 ⑧	4	8	8
	2	9	4	5	

(18)

总结一下，

$A3$。（a）选择任意一个方块（i，j），其中 $v_j - u_i > b_{ij}$，设置 $y_{ij} = \theta$，但通过从适当的圈出变量中减去和加上 θ来满足约束条件。

（b）选择 θ为减去 θ的方块中的变量的最小值。

(c) 圈出新变量，并从被减去的变量中删除θ，使其为零。

请注意，如果所有非圈出的变量 $y\mathrm{i}_j$ 都被赋予任意值，我们可以使用（8）和（9）逐个解出圈出的变量，首先选择一个具有一个圈出变量的行或列，然后继续以相同的方式进行，直到所有变量都被指定。 因此，A3的步骤（a）总是可以执行。

我们必须证明A3的步骤（c）会留下一组可通过算法A1获得的圈出变量，以便可以重复A2和A3。 为了看清楚这一点，请注意当θ作为新变量被圈出时，依赖于θ的变量集合包含在一个包含2 k 个圈出变量的k行k列的方形子阵列中，每行和每列都有2个圈出变量。 其余的 $I + J - 2\ k$ 行和列中的圈出变量可以逐个删除，就像引理2的证明中一样。 如果剩下的任何一个圈出变量也可以逐行或逐列删除。

■

让我们看看通过这个过程在运输成本方面有什么改进。
改变之前的成本减去改变之后的成本可以计算为$\sum\sum y_{ij} b_{ij} -$
$\sum\sum y'_{ij} b_{ij} = \theta \sum^{+} b_{ij} - \theta \sum^{-} b_{ij},$ 其中 $\sum^{+}$是在添加了 θ的平方和上求和，而 $\sum^{-}$是在减去了 θ的平方和上求和。由于
对于除了新的方块（称为（$_{i0}, j_0$））之外的所有方块，都有$b_{ij} = v_j - ui$，我们可以将这个成本改进写成

$$\theta(v_{j_0} - u_{i_0} - b_{i_0 j_0}) - \theta \overset{+}{\sum}(v_i - u_j) + \theta \overset{-}{\sum}(v_j - u_i) = \theta(v_{j_0} - u_{i_0} - b_{i_0 j_0}) \qquad (19)$$

因为每个添加的变量 v_j 和 u_i 都会被减去。 这个值永远不会是负数，如果 $\theta > 0$，它严格为正数。 也就是说，当 $\theta > 0$ 时，改进算法会严格改进。

可能会发生 $\theta = 0$ 的情况，在这种情况下，改进算法不会有任何改进，但会将基本运输计划变成一个新的计划，从中我们可以希望得到改进甚至优化检查。

练习题。使用以下数组解决运输问题。

1.

1	4	2
2	6	2
3	1	

2.

1	3	5	8	6
2	5	6	7	5
1	2	3	5	

3.

10	8	9	15
5	2	3	20
6	7	4	30
7	6	8	35
25	25	50	

4.

4	3	4	2	4
8	6	7	5	4
6	4	5	3	6
7	5	6	4	4
2	7	3	6	

9. 练习题的解答。

第**1**节练习题的解答。

1. 问题的图形表示为

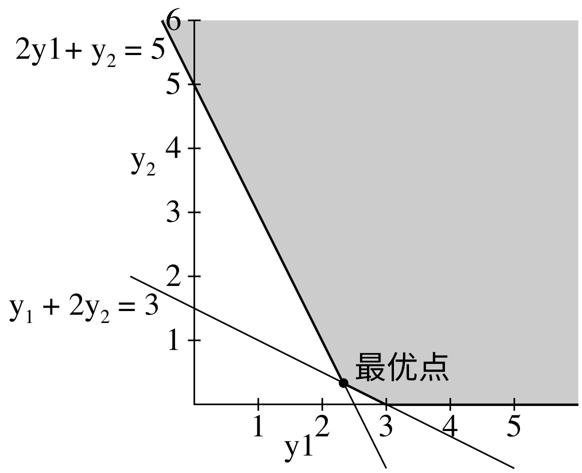

图1。

约束集合被阴影填充。 目标函数 $y_1 + y_2$ 的斜率为 -1 。 当我们将斜率为 -1 的直线向下移动时，它最后与约束集合相交的地方是在两条直线 $2y_1 + y_2= 5$ 和 $y_1+ 2y_2= 3$ 的交点处。 交点的坐标为 $(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$，是最优解向量。

2. 对于小于 $-\frac{1}{2}$ 的情况，最优向量为$(0, \frac{1}{2})$。 对于从 $-\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2}$ 的情况，最优向量为$(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$。 对于从 $\frac{1}{2}$ 到2的情况，最优向量为$(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$。 对于大于2的情况，最优向量为(3,0) 。因此，值为

$$
值 = \begin{cases} 1 & \text{对于} \le -1\text{的情况，}(2a \\ +5)/3\text{；对于 } -1 \le a \le 1/2\text{的情况，}(8a+2)/3\text{；对于}\geqslant 2\text{的情况，}3a \\ \text{对于}1/2 \le a \le 2\text{的情况，}(8a+2)/3\text{。} \\ 3a & \text{对于} \ge 2\text{的情况。} \end{cases}
$$

3. 设 $\boldsymbol{y}^T = (y_{11}, \ldots, y_{1J}, y_{21}, \ldots, y_{2J}, \cdots, y_{I1}, \ldots, y_{IJ})$。 然后主要约束条件

可以写成 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^T$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{c}^T = (-s_1, -s_2, \ldots, -s_I, r_1, r_2, \ldots, r_J)。$$

4. 由于 x_2是无限制的，我们必须用 $u_2 - v_2$替换它在任何出现的地方，其中$u_2 \geq 0$ 且 $v_2 \geq 0$ 。 第二个主要约束是一个等式，因此必须用两个不等式替换它。 标准形式的问题变为：最大化 $x_1 + 2u_2 -_2 v\, 2 + 3\ x_3 + 4x_4$，满足

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3u_2 & - & 3v_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\ x_1 & & & & & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 2 \\ -x_1 & & & & & + & x_3 & - & 2x_4 & \leq & -2 \\ -x_1 & - & u_2 & + & v_2 & - & x_3 & - & x_4 & \leq & -1, \end{array}$$

和

$$x_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

第2节练习的解答。

1. 找出 x_1，x_2，x_3 和 x_4 使得 $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4$ 最大化，

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \le & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \le & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \le & 1 \end{array}$$

和

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

2. 我们检查 $\boldsymbol{y} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{14}{3})$ 和 $\boldsymbol{x} = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ 分别对于它们的问题是可行的，并且它们具有相同的值。显然，$\boldsymbol{y} \ge 0$ 和 $\boldsymbol{x} \ge 0$。将$\boldsymbol{y}$代入练习1的主要约束条件，我们发现 $\frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3} \ge 2$，$-\frac{2}{3} + \frac{14}{3} = 4 \ge 4$，$-\frac{4}{3} + \frac{14}{3} = 6 \ge 6$，并且 $\frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3} \ge 2$，所以 $\boldsymbol{y}$ 是可行的。类似地，将 $\boldsymbol{x}$ 代入练习1的主要约束条件，我们发现 $-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \le 1$，$\frac{1}{3} \le 2$，和 $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 2 \le 2$，所以 $\boldsymbol{x}$是可行的。$\boldsymbol{y}$ 的值是 $\frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3}$，而 $\boldsymbol{x}$ 的值是 $\frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{16}{3}$。由于它们相等，两者都是最优解。

3. (a) 找到 y_1，y_2，y_3 和 y_4 最小化 $4y_1 + 6y_2 + 3y_3 + 8y_4$，限制条件为

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & + & y_4 & \ge & 3 \\ -y_1 & + & y_2 & & & + & y_4 & \ge & 2 \\ y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & \ge & 1 \end{array}$$

和

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

(b) 如果 $\boldsymbol{x} = (0, 6, 0)$ 是最大化问题的最优解，则第一个、第三个和第四个主要约束中的严格不等式意味着 $y_1 = y_3 = y_4 = 0$。此外，$x_2 > 0$意味着在最小化问题中第二个约束中存在等式。解决这个问题得到 $y_2 = 2$。经过检查，$\boldsymbol{y} = (0, 2, 0, 0)$ 是可行解，我们得出结论它是最优解。

4. (a) 找到 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_I, x_{I+1}, \ldots, x_{I+J})$ 以最大化 $-\sum_{i=1}^{I} s_i x_i + \sum_{j=1}^{J} r_j x_{I+j}$ 满足以下条件

$$-x_i + x_{I+j} \le b_{ij} \qquad \text{对于所有 } i \text{和 } j$$

和

$$x_i \ge 0 \qquad \text{对于所有 } i\text{。}$$

(b) 由于 b_{ij} 以成本的形式衡量，比如以美元计算，每单位商品，主要的约束条件表明 x_i也以每单位商品的美元计算。因此，目标函数的衡量单位也是美元。(这是尺寸分析。) 我们可以想象一个独立的企业家，他愿意以每单位商品x_i的价格在港口 P_i购买商品，并以每单位商品x_{I+j}的价格在市场M_j销售商品。

如果满足最小约束条件，我们基本上可以将所有商品从港口运送到市场，成本不增加，因此我们会接受这个报价。 自然地，他会选择 x_i来最大化他的利润，这正是目标函数−ΣIi=1si xi+ΣJ j=1r$_j$x$_I$+$_j$。 他会选择
x_i来最大化他的利润，这正是目标函数 $-\sum_{i=1}^{I} s_i x_i + \sum_{j=1}^{J} r_j x_{I+j}$。
因此， x_i 对于 $1 \leq_i \leq I$ 表示货物在港口的单位影子价值
P_i，以及 x_{I+j} 对于 $1 \leq_j \leq J$ 表示货物在市场 M j的单位影子价值。

第3节练习的解答。

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline
y_1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
y_2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
y_3 & -1 & 1 & 0 & 3 \\
y_4 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ \hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & y_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline
s_1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
y_2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
y_3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\
y_4 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ \hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & y_1 & s_2 & y_2 & s_4 \\ \hline
s_1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
s_3 & 0 & -2 & -1 & -1 \\
y_3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\
y_4 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & y_1 & y_4 & y_2 & s_4 \\ \hline
s_1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\
s_3 & -2 & 2 & 3 & 1 \\
y_3 & 3 & -2 & -4 & 3 \\
s_2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & y_1 & y_4 & y_2 & y_3 \\ \hline
s_1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\
s_3 & -3 & \frac{8}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} \\
s_4 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\
s_2 & -2 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|cccc|}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline
s_1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
s_2 & -2 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\
s_3 & -3 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\
s_4 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \hline
\end{array}
$$

因此,

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ -6 & 10 & -1 & 5 \\ -9 & 13 & -1 & 8 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

第4节练习的解答.

1. 最小化 $4\quad y_1+2y_2+y_3$ 满足以下条件

$$\begin{array}{rcl} y_1+2y_2-2y_3 &\geq& 1\\ -y_1\qquad\quad +\ y_3 &\geq& -2\\ -2y_1+\ y_2\qquad\quad &\geq& -3\\ -y_1-4y_2+\ y_3 &\geq& -1 \end{array}\qquad 和 \qquad y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_3\geq 0.$$

根据单纯形法则进行枢轴运算得到

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline y_1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 4\\ y_2 & 2 & 0 & 1 & -4 & 2\\ y_3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ \hline & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} & y_2 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline y_1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 1 & 3\\ x_1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1\\ y_3 & 1 & 1 & 1 & -3 & 3\\ \hline & \frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{2} & -1 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} & y_2 & x_2 & x_3 & y_1 & \\ \hline x_4 & & & & & 3\\ x_1 & & & & & 7\\ y_3 & & & & & 12\\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

从中我们可以看出，两个问题的值都是4，最小化问题的解是 $y_1=1$, $y_2=0$, $y_3=0$, 最大化问题的解是 $x_1=7$,
$x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=3$.

2. 最大化 $-x_1+2x_2+x_3$ 满足以下条件

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+\ x_2-7x_3 &\leq& 3\\ -x_1\qquad\quad +4x_3 &\leq& -1\\ x_1+2x_2-6x_3 &\leq& 2 \end{array}\qquad 和 \qquad x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0.$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline y_1 & 2 & 1 & -7 & 3\\ y_2 & -1 & 0 & 4 & -1\\ y_3 & 1 & 2 & -6 & 2\\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & y_2 & x_2 & x_3 & \\ \hline y_1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & -1 & 0 & -4 & 1\\ y_3 & 1 & 2 & -2 & 1\\ \hline & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & y_2 & y_3 & x_3 & \\ \hline y_1 & & & & 3/2\\ x_1 & & & & 1\\ x_2 & & & & 1/2\\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

该值为零，最小问题的解为 $y_1=0$, $y_2=2$, $y_3=1$ ，而
最大问题的解为 $x_1=1$, $x_2=1/2$, $x_3=0$.

3.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\
y_2 & 2 & -1 & -2 & 1 \\
y_3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & y_3 & \\
\hline
y_1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\
y_2 & 0 & -1 & 2 & 3 \\
x_3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & -1 & 1 & 2 & 2
\end{array}
$$

第一列显示最大问题是无界可行的。

4.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 & -2 & 2 & 3 & 5 \\
y_2 & 0 & -1 & 2 & -2 \\
y_3 & 3 & 1 & -1 & -1 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & y_3 & \\
\hline
y_1 & 7 & 5 & 3 & 2 \\
y_2 & 6 & 1 & 2 & -4 \\
x_3 & -3 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array}
$$

第二行显示最大问题是不可行的。 由此可知，最小问题是无界可行的，因为向量 $(y_1, y_2, y_3) = (1/2, 0,0)$ 是可行的。
一般来说，要确定最小问题是否可行，可能需要使用对偶单纯形法。

5. 使用对偶单纯形法,

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 & -1 & 4 & 2 & 0 \\
y_2 & -2 & 1 & -3 & -2 \\
y_3 & 0 & 7 & 1 & 1 \\
\hline
 & 3 & 1 & 5 & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & y_2 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 & & & & 1 \\
x_1 & & & & 1 \\
y_3 & & & & 1 \\
\hline
 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3
\end{array}
$$

数值为 -3，最小问题的解为 $y_1 = 0$， $y_2 = 3/2$， $y_3 = 0$，以及
最大问题的解为 $x_1 = 1$， $x_2 = 0$， $x_3 = 0$。

6. 使用对偶单纯形法，第二种情况,

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
y_2 & -3 & 0 & 1 & -1 \\
y_3 & -2 & -1 & 0 & -1 \\
\hline
 & -3 & -4 & -5 & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & y_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
x_1 & & & & 1 \\
y_2 & & & & 2 \\
y_3 & & & & 1 \\
\hline
 & 3 & 2 & 1 & 3
\end{array}
$$

数值为3，最小问题的解为 $y_1 = 3$， $y_2 = 0$， $y_3 = 0$，以及
最大问题的解为 $x_1 = 1$， $x_2 = 0$， $x_3 = 0$。

第5节练习的解答。

1. (a) 最大化 $\sum^{\ell}{}_{j=1} c_jx_j + \sum^{n}{}_{j=\ell+1} c_jx'_j + \sum^{n}{}_{j=\ell+1}(-c_j)x''_j$ 满足以下条件

$$\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}x_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_{ij}x'_j + \sum_{j=\ell+1}^{n}(-a_{ij})x''_j \le b_i \quad \text{for } i=1,\ldots,k$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}x_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_{ij}x'_j + \sum_{j=\ell+1}^{n}(-a_{ij})x''_j \le b_i \quad \text{for } i=k+1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{\ell}(-a_{ij})x_j + \sum_{j=\ell+1}^{n}(-a_{ij})x'_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_{ij}x''_j \le -b_i \quad \text{for } i=k+1,\ldots,m$$

和

$$x_j \ge 0 \text{ 对于 } j=1,\ldots,\ell$$
$$x'_j \ge 0 \text{ and } x''_j \ge 0 \quad \text{for } j=\ell+1,\ldots,n$$

(b) 最小化 $\sum_{i=1}^{k} b_iy_i + \sum_{i=k+1}^{m} b_iy'_i + \sum_{i=k+1}^{m}(-b_i)y''_i$ 受限于

$$\sum_{i=1}^{k} y_ia_{ij} + \sum_{i=k+1}^{m} y'_ja_{ij} + \sum_{i=k+1}^{m} y''_i(-a_{ij}) \ge c_j \quad \text{for } j=1,\ldots,\ell$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_ia_{ij} + \sum_{i=k+1}^{m} y'_ja_{ij} + \sum_{i=k+1}^{m} y''_i(-a_{ij}) \ge c_j \quad \text{for } j=\ell+1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i(-a_{ij}) + \sum_{i=k+1}^{m} y'_j(-a_{ij}) + \sum_{i=k+1}^{m} y''_ia_{ij} \ge -c_j \quad \text{for } j=\ell+1,\ldots,n$$

和

$$y_i \ge 0 \text{ 对于 } i=1,\ldots,k$$
$$y'_i \ge 0 \text{ and } y''_i \ge 0 \quad \text{for } i=k+1,\ldots,m$$

(c) 容易验证这些标准程序是对偶的。

2. 可以模仿标准问题的均衡定理的证明。如果条件(*)被满足，那么

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^*b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i^*a_{ij}x_j^*$$

因为 $y_i^*= 0$，当 $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*$时。同样地，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij})x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i^* a_{ij} x_j^*.$$

由于这些值相等， $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$都是最优的。

现在假设 $\boldsymbol{x}^*$和 $\boldsymbol{y}^*$都是最优的。根据对偶定理，它们的值相等，即 $\sum_j c_j x_j^* = \sum_i y_i^* b_i$. 但是

$$\sum_j c_j x_j \le \sum_j \sum_i y_i a_{ij} x_j \le \sum_i y_i b_i$$

对于所有可行的 $\boldsymbol{x}$和 $\boldsymbol{y}$. 因此，对于 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{y}^*$，我们在整个过程中都得到了相等。因此，

$$\sum_j (c_j - \sum_i a_{ij} y_i) x_j^* = 0$$

并且由于 $c_j \le \sum_i a_{ij} y_i^*$ 对于所有 j，我们必须有 $x_j^* = 0$，只要 $c_j < \sum_i a_{ij} y_i^*$. 同样地， $y_i^* = 0$只要 $\sum_j a_{ij} x_j^* < b_i$，如所示。

3. (a) 最小化 $5y_1 + 2y_2 + y_3$，满足条件

$$\begin{array}{rcl} -y_1 \qquad - \ y_3 & \ge & 0 \\ 5y_1 + 3y_2 \qquad & \ge & 5 \\ 2y_1 \qquad + \ y_3 & = & 1 \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 & \ge & 4 \end{array} \qquad \text{和} \qquad y_1 \ge 0,\ y_2 \text{ 和 } y_3 \text{ 无限制。}$$

（b）从示例1的显示中，我们可以看到最优值为 $y_1 = 1$，和 $y_2 = 1$。然后解决等式约束得到 y_3，我们发现 $y_3 = 1 - 2\,y_1 = -1$。

4。我们首先进行主元交换，交换 y_1和 λ并删除 λ行。

	x_1	x_2	x_3	λ	
y_1	-1	1	2	1	0
y_2	0	-2	3	1	0
y_3	2	-3	-4	1	0
y_4	-1	0	3	1	0
$\uparrow\mu$	1	1	1	0	1
	0	0	0	-1	0

$\longrightarrow$

	x_1	x_2	x_3	y_1	
y_2	1	-3	1	-1	0
y_3	3	-4	-6	-1	0
y_4	0	-1	1	-1	0
$\uparrow\mu$	1	1	1	0	1
	-1	1	2	1	0

然后我们交换 x_2和 μ，删除 μ行，并根据单纯形法的规则进行一次主元交换：

$\longrightarrow$

	x_1	x_3	y_1	
y_2	4	4	-1	3
y_3	7	-2	-1	4
y_4	1	2	-1	1
x_2	1	1	0	1
	-2	1	1	-1

$\longrightarrow$

	y_3	x_3	y_1	
y_2				5/7
x_1				4/7
y_4				3/7
x_2				3/7
	2/7	3/7	5/7	1/7

游戏的价值为1/7。玩家I的最优策略是（4/7，3/7，0），玩家II的最优策略是（5/7, 0 ,2/7, 0).

第6节练习的解答

1. 根据指示进行枢轴运算

	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_1	1	-2	-1	2	0
y_2	2	-3	-1	1	0
y_3	0	0	1	0	1
	-3	5	-1	2	0

$\longrightarrow$

	y_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-2	-1	2	0
y_2	-2	1	1	-3	0
y_3	0	0	1	0	1
	3	-1	-4	8	0

$\longrightarrow$

	y_1	y_2	x_3	x_4	
x_1	-3	2	1	-4	0
x_2	-2	1	1	-3	0
y_3	0	0	1	0	1
	1	1	-3	5	0

$\longrightarrow$

	y_1	y_2	x_1	x_4	
x_3	-3	2	1	-4	0
x_2	1	-1	-1	1	0
y_3	3	-2	-1	4	1
	-8	7	3	-7	0

$\longrightarrow$

	y_1	y_2	x_1	x_2	
x_3	1	-2	-3	4	0
x_4	1	-1	-1	1	0
y_3	-1	2	3	-4	1
	-1	0	-4	7	0

$\longrightarrow$

	x_3	y_2	x_1	x_2	
y_1	1	-2	-3	4	0
x_4	-1	1	2	-3	0
y_3	1	0	0	0	1
	1	-2	-7	11	0

$\longrightarrow$

	x_3	x_4	x_1	x_2	
y_1	-1	2	1	-2	0
y_2	-1	1	2	-3	0
y_3	1	0	0	0	1
	-1	2	-3	5	0

然后我们回到了起点，只是某些列进行了交换。

2.

	x_1	x_2	x_3	x_4				
y_1	1	-2	-1	2	0	1	0	0
y_2	2	-3	-1	1	0	0	1	0
y_3	0	0	1	0	1	0	0	1
	-3	5	-1	2	0	0	0	0

$\longrightarrow$

	y_2	x_2	x_3	x_4				
y_1	$-.5$	$-.5$	$-.5$	1.5	0	1	$-.5$	0
x_1	.5	-1.5	$-.5$	.5	0	0	.5	0
y_3	0	0	1	0	1	0	0	1
	1.5	.5	-2.5	3.5	0	0	1.5	0

$\longrightarrow$

	y_2	x_2	y_3	x_4				
y_1	$-.5$	$-.5$	.5	1.5	.5	1	$-.5$	.5
x_1	.5	-1.5	.5	.5	.5	0	.5	.5
x_3	0	0	1	0	1	0	0	1
	1.5	.5	2.5	3.5	2.5	0	1.5	2.5

值为2.5，最大化问题的解为 $\boldsymbol{x}=(.5,0,1,0)$，最小化问题的解为 $\boldsymbol{y}=(0,1.5,2.5)$.

3. 前四个枢轴运算与问题1相同。然后

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 & \\
\hline
x_3 & 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\
x_4 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
y_3 & -1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\
\hline
 & -1 & 0 & -4 & 7 & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|cccc|c}
 & y_1 & y_2 & y_3 & x_2 & \\
\hline
x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x_4 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
x_1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\
\hline
 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_4 & y_2 & y_3 & x_2 & \\
\hline
x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
y_1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2}
\end{array}
$$

这是问题2中找到的解，但是进行了某些列和某些行的交换。

第7节练习的解答

1. 有 $n=3$个活动， $m=1$个资源， $p=3$个零件需要制造。我们希望最大化

$$\min\{(2x_1+4x_2+6x_3)/2,(2x_1+x_2+3x_3)/1,(x_1+3x_2+2x_3)/1\}$$

满足以下条件

$$2x_1+3x_2+4x_3\le 12 \qquad \text{和} \qquad x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$$

我们在最小值中添加一个额外的变量， λ 不受限制（尽管它也可以被限制为非负），小于或等于最小值中的三个线性形式之一。 我们希望最大化 λ，同时满足以下条件

$$\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3 &\ge& \lambda\\ 2x_1+x_2+3x_3 &\ge& \lambda\\ x_1+x_2+x_3 &\ge& \lambda\\ 2x_1+3x_2+4x_3 &\le& 12 \end{array} \qquad \text{和} \qquad x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$$

通过单纯形法解决单纯形表格：

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \lambda & \\ \hline y_1 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0\\ y_2 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0\\ y_3 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ y_4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12\\ \hline & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & \\ \hline \lambda & -1 & -2 & -3 & 1 & 0\\ y_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ y_3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0\\ y_4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12\\ \hline & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & y_2 & x_3 & y_1 & \\ \hline \lambda & -3 & 2 & -3 & -1 & 0\\ x_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ y_3 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ y_4 & 5 & -3 & 4 & 3 & 12\\ \hline & -3 & 2 & -3 & -1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & y_2 & y_3 & y_1 & \\ \hline \lambda & -6 & 5 & 3 & -7 & 0\\ x_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ x_3 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ y_4 & 9 & -7 & -4 & 11 & 12\\ \hline & -6 & 2 & 3 & -7 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|cccc|c} & y_4 & y_2 & y_3 & y_1 & \\ \hline \lambda & & & & & 8\\ x_2 & & & & & 4/3\\ x_3 & & & & & 4/3\\ x_1 & & & & & 4/3\\ \hline & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 8 \end{array}$$

最大问题的值为8，最大问题的解为 $x_1=x_2=x_3=4/3$.

2. 问题是最小化 y $_3+y_4+y_5$ 受限于 $|y_1+y_2-1| \le y_3$, $|2y_1-y_2+1| \le$ y_4, 和 $|y_1$ 每个涉及绝对值的不等式变成两个不等式：最小化 $y_3 + y_4 + y_5$受限于

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \ge & 1 \\ -y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \ge & -1 \\ 2y_1 & - & y_2 & + & y_4 & \ge & -1 \\ -2y_1 & + & y_2 & + & y_4 & \ge & 1 \\ y_1 & - & y_2 & + & y_5 & \ge & 2 \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_5 & \ge & -2 \end{array} \qquad \text{和} \quad y_1 \ge \quad 0, y_2 \ge 0.$$

我们将 y_3, y_4 和 y_5 作为主元，并删除它们。 然后我们得到了最小问题的可行解，所以我们根据对偶单纯形法完成。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
y_1	1	−1	2	−2	1	−1	0
y_2	1	−1	−1	1	−1	1	0
$\uparrow y_3$	1	1	0	0	0	0	1
$\uparrow y_4$	0	0	1	1	0	0	1
$\uparrow y_5$	0	0	0	0	1	1	1
	−1	1	1	−1	−2	2	0

$\longrightarrow$

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
y_1	−2	2	−2	1	−1	−1
y_2	−2	−1	1	−1	1	−1
x_1	1	0	0	0	0	1
$\uparrow y_4$	0	1	1	0	0	1
$\uparrow y_5$	0	0	0	1	1	1
	2	1	−1	−2	2	1

$\longrightarrow$

	x_2	x_3	x_5	x_6	
y_1	−2	4	1	−1	0
y_2	−2	−2	−1	1	−1
x_1	1	0	0	0	1
x_4	0	1	0	0	1
$\uparrow y_5$	0	0	1	1	1
	2	2	−2	2	4

$\longrightarrow$

	x_2	x_3	x_6	
y_1	−2	4	−2	0
y_2	−2	−2	2	−1
x_1	1	0	0	1
x_4	0	1	0	1
x_5	0	0	1	1
	2	2	4	4

$\longrightarrow$

	y_2	x_3	x_6	
y_1				1
x_2				.5
x_1				.5
x_4				1
x_5				1
	1	0	6	3

数值为3，最优点为$(y_1, y_2) = (0, 1)$。

3. 我们要最小化 μ，满足条件 $|y_1 + y_2 - 1| \le \mu$， $|2y_1 - y_2+ 1| \le \mu$，以及$|y_1 - y_2 - 2| \le \mu$，所有变量无限制。 每个涉及绝对值的不等式变成两个不等式：最小化 μ，满足条件

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & y_2 & + & \mu & \ge & 1 \\ -y_1 & - & y_2 & + & \mu & \ge & -1 \\ 2y_1 & - & y_2 & + & \mu & \ge & -1 \\ -2y_1 & + & y_2 & + & \mu & \ge & 1 \\ y_1 & - & y_2 & + & \mu & \ge & 2 \\ -y_1 & + & y_2 & + & \mu & \ge & -2 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\uparrow y_1$	1	−1	2	−2	1	−1	0
$\uparrow y_2$	1	−1	−1	1	−1	1	0
$\uparrow \mu$	1	1	1	1	1	1	1
	−1	1	1	−1	−2	2	0

$\longrightarrow$

	x_1	x_2	x_3	$\uparrow y_2$	x_5	x_6	
$\uparrow y_1$	3	−3	0	2	−1	1	0
x_4	1	−1	−1	1	−1	1	0
$\uparrow \mu$	0	2	2	−1	2	0	1
	0	0	0	1	−3	3	0

$\longrightarrow$

	x_1	x_2	x_3	$\uparrow y_2$	$\uparrow \mu$	x_6	
$\uparrow y_1$	3	−3	0	1.5	.5	1	.5
x_4	1	0	0	.5	.5	1	.5
x_5	0	1	1	−.5	.5	0	.5
	0	3	3	−.5 1	.5	3	1.5

$\longrightarrow$

	$\uparrow y_1$	x_2	x_3	$\uparrow y_2$	$\uparrow \mu$	x_6	
x_1							1/6
x_4							1/3
x_5							1/2
	0	3	3	−.5 1	.5	3	1.5

数值为1.5，切比雪夫点为 $(y_1, y_2) = (0, -.5)$。

4. 设 x_i 为活动 A_i 的强度，$i= 1,2$. 我们希望
最大化回报率，$(2x_1+ 3x_2)/(x_1+ 2x_2+ 1)$，满足条件

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 3 \end{aligned} \qquad \text{且} \quad x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,.$$

选择 t使得 $t(x_1+ 2x_2+ 1) = 1$，并且令 $z_i = tx_i$，对于 $i= 1,2$. 问题变为：选择 z_1, z_2和 t 使得 $2z_1+ 3z_2$最大化，满足条件

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + t &= 1 \\ z_1 + 3z_2 - 2t &\le 0 \\ 3z_1 + 2z_2 - 3t &\le 0 \end{aligned} \qquad \text{并且} \quad z_1 \ge 0\,,\ z_2 \ge 0\,.$$

	z_1	z_2	$\overleftarrow{t}$	
$\uparrow y_1$	1	2	1	1
y_2	1	3	−2	0
y_3	1	2	−3	0
	−2	−3	0	0

$\longrightarrow$

	z_1	z_2	$\uparrow y_1$	
$\overleftarrow{t}$	1	2	1	1
y_2	3	7	2	2
y_3	6	8	3	3
	−2	−3	0	0

$\longrightarrow$

	y_3	z_2	$\uparrow y_1$	
$\overleftarrow{t}$	−1/6	2 /3	1 /2	1/2
y_2	−1/2	3	1/2	1/2
z_1	1/6	4/3	1 /2	1/2
	1/3	−1/3	1	1

$\longrightarrow$

	y_3	y_2	$\uparrow y_1$	
$\overleftarrow{t}$				7/18
z_2				1/6
z_1				5/18
	5/18	1/9	19/18	19/18

该值为19/18，解为 $(z_1, z_2, t) = (5/18, 3/$ $18, 7,18)$. 最优强度为 (x_1, x_2) $= (z_1/t, z_2/t) = (5/$ 7，3/7)，最优比率为19/18。

第8节练习的解答。

1. 西北角法和最小成本法得出相同的可行运输计划。 求解对偶变量并发现约束条件 $v_j - u_i \le b_{ij}$对于 $i=1$， $j=2$不满足。 在该方格中添加 θ，并在满足约束条件的情况下添加和减去 θ。 通过取 $\theta=1$可以改善运输成本。

	1 2	4	2
	2 1	6 1	2
	3	1	

$\longrightarrow$

	2	6	
1	1 $-\theta$ 2	4 $+\theta$	2
0	2 $+\theta$ 1	6 $-\theta$ 1	2
	3	1	

$\longrightarrow$

	1	4	
0	1 1	4 1	2
-1	2 2	6	2
	3	1	

这导致了一个满足最优性条件的运输数组。 最优运输计划的值为$1+4+4=9$。 作为检查， $\sum v_j r_j - \sum u_i s_i = 7+2=9$。

2. 最小成本法则，无论行和列如何重新排列，都会得到相同的结果，在第一次尝试中取得成功。该值为$1+6+15+35=57$。

	1	3	5	6	
0	1 1	3 2	5 3	8	6
-1	2	5	6 0	7 5	5
	1	2	3	5	

3. 在找到最小成本的运输计划和对偶变量之后，我们发现约束条件 $v_j - u_i \le b_{ij}$对于 $i=2$， $j=3$不满足。 通过在该方格中添加 $\theta=5$，可以得到改进。 新的计划是最优的，其值为535。

	7	6	8	
-1	10	8	9 15	15
4	5	2 $-\theta$ 20	3 $+\theta$	20
4	6	7	4 30	30
0	7 25	6 $+\theta$ 5	8 $-\theta$ 5	35
	25	25	50	

$\longrightarrow$

	7	6	7	
-2	10	8	9 15	15
4	5	2 15	3 5	20
3	6	7	4 30	30
0	7 25	6 10	8	35
	25	25	50	

4. 在使用最小成本法则找到初始运输计划后，还需要进行两次改进程序的应用，每次使用 $\theta = 1$，才能得到最优计划。

	8	6	7	5	
3	4 $+\theta$	3	4	2 $-\theta$ 4	4
0	8 $-\theta$ 2	6	7 $+\theta$ 2	5	4
2	6	4 $-\theta$ 4	5	3 $+\theta$ 2	6
1	7	5 $+\theta$ 3	6 $-\theta$ 1	4	4
	2	7	3	6	

	8	7	7	6	
4	4 $+\theta$ 1	3	4	2 $-\theta$ 3	4
0	8 $-\theta$ 1	6	7 3	5 $+\theta$	4
3	6	4 3	5	3 3	6
2	7	5 4	6	4	4
	2	7	3	6	

	7	6	7	5	
3	4 2	3	4	2 2	4
0	8	6	7 3	5 1	4
2	6	4 3	5	3 3	6
1	7	5 4	6	4	4
	2	7	3	6	

相关文献

[1] Vaˇsek Chv´atal，线性规划，(1983) W. H. Freeman & Co.

[2] G. B. Dantzig，线性规划和扩展，(1963) Princeton University Press.

[3] 大卫・盖尔，线性经济模型理论，(1960) 麦格劳-希尔出版社。

[4] 萨缪尔・卡林，数学方法与博弈论、规划和经济理论，卷1，(1959) 阿迪生-韦斯利出版社。

[5] 詹姆斯・K・斯特雷尔，线性规划与应用，(1989) 斯普林格出版社。