Module No2.

Import No1.

(\*We proceed to the deductions of of Principia.\*)

Theorem Abs2\_01 : ∀ P : Prop,

  (P → ~P) → ~P.

Proof. intros P.

  specialize Taut1\_2 with (~P).

  replace (~P ∨ ~P) with (P → ~P).

  apply MP1\_1.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_02 : ∀ P Q : Prop,

  Q → (P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize Add1\_3 with (~P) Q.

  replace (~P ∨ Q) with (P → Q).

  apply (MP1\_1 Q (P → Q)).

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_03 : ∀ P Q : Prop,

  (P → ~Q) → (Q → ~P).

Proof. intros P Q.

  specialize Perm1\_4 with (~P) (~Q).

  replace (~P ∨ ~Q) with (P → ~Q).

  replace (~Q ∨ ~P) with (Q → ~P).

  apply (MP1\_1 (P → ~Q) (Q → ~P)).

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem Comm2\_04 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → (Q → R)) → (Q → (P → R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Assoc1\_5 with (~P) (~Q) R.

  replace (~Q ∨ R) with (Q → R).

  replace (~P ∨ (Q → R)) with (P → (Q → R)).

  replace (~P ∨ R) with (P → R).

  replace (~Q ∨ (P → R)) with (Q → (P → R)).

  apply (MP1\_1 (P → Q → R) (Q → P → R)).

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem Syll2\_05 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → R) → ((P  → Q) → (P → R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Sum1\_6 with (~P) Q R.

  replace (~P ∨ Q) with (P → Q).

  replace (~P ∨ R) with (P → R).

  apply (MP1\_1 (Q → R) ((P → Q) → (P → R))).

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem Syll2\_06 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → Q) → ((Q → R) → (P → R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Comm2\_04 with (Q → R) (P → Q) (P → R).

  intros Comm2\_04.

  specialize Syll2\_05 with P Q R.

  intros Syll2\_05.

  specialize MP1\_1 with ((Q → R) → (P → Q) → P → R) ((P → Q) → ((Q → R) → (P → R))).

  intros MP1\_1.

  apply MP1\_1.

  apply Comm2\_04.

  apply Syll2\_05.

Qed.

Theorem n2\_07 : ∀ P : Prop,

  P → (P ∨ P).

Proof. intros P.

  specialize Add1\_3 with P P.

  apply MP1\_1.

Qed.

Theorem n2\_08 : ∀ P : Prop,

  P → P.

Proof. intros P.

  specialize Syll2\_05 with P (P ∨ P) P.

  intros Syll2\_05.

  specialize Taut1\_2 with P.

  intros Taut1\_2.

  specialize MP1\_1 with ((P ∨ P) → P) (P → P).

  intros MP1\_1.

  apply Syll2\_05.

  apply Taut1\_2.

  apply n2\_07.

Qed.

Theorem n2\_1 : ∀ P : Prop,

  (~P) ∨ P.

Proof. intros P.

  specialize n2\_08 with P.

  replace (~P ∨ P) with (P → P).

  apply MP1\_1.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_11 : ∀ P : Prop,

  P ∨ ~P.

Proof. intros P.

  specialize Perm1\_4 with (~P) P.

  intros Perm1\_4.

  specialize n2\_1 with P.

  intros Abs2\_01.

  apply Perm1\_4.

  apply n2\_1.

Qed.

Theorem n2\_12 : ∀ P : Prop,

  P → ~~P.

Proof. intros P.

  specialize n2\_11 with (~P).

  intros n2\_11.

  rewrite Impl1\_01.

  assumption.

Qed.

Theorem n2\_13 : ∀ P : Prop,

  P ∨ ~~~P.

Proof. intros P.

  specialize Sum1\_6 with P (~P) (~~~P).

  intros Sum1\_6.

  specialize n2\_12 with (~P).

  intros n2\_12.

  apply Sum1\_6.

  apply n2\_12.

  apply n2\_11.

Qed.

Theorem n2\_14 : ∀ P : Prop,

  ~~P → P.

Proof. intros P.

  specialize Perm1\_4 with P (~~~P).

  intros Perm1\_4.

  specialize n2\_13 with P.

  intros n2\_13.

  rewrite Impl1\_01.

  apply Perm1\_4.

  apply n2\_13.

Qed.

Theorem Trans2\_15 : ∀ P Q : Prop,

  (~P → Q) → (~Q → P).

Proof. intros P Q.

  specialize Syll2\_05 with (~P) Q (~~Q).

  intros Syll2\_05a.

  specialize n2\_12 with Q.

  intros n2\_12.

  specialize n2\_03 with (~P) (~Q).

  intros n2\_03.

  specialize Syll2\_05 with (~Q) (~~P) P.

  intros Syll2\_05b.

  specialize Syll2\_05 with (~P → Q) (~P → ~~Q) (~Q → ~~P).

  intros Syll2\_05c.

  specialize Syll2\_05 with (~P → Q) (~Q → ~~P) (~Q → P).

  intros Syll2\_05d.

  apply Syll2\_05d.

  apply Syll2\_05b.

  apply n2\_14.

  apply Syll2\_05c.

  apply n2\_03.

  apply Syll2\_05a.

  apply n2\_12.

Qed.

Ltac Syll H1 H2 S :=

  let S := fresh S in match goal with

    | [ H1 : ?P → ?Q, H2 : ?Q → ?R |- \_ ] =>

       assert (S : P → R) by (intros p; apply (H2 (H1 p)))

end.

Ltac MP H1 H2 :=

  match goal with

    | [ H1 : ?P → ?Q, H2 : ?P |- \_ ] => specialize (H1 H2)

end.

Theorem Trans2\_16 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) → (~Q → ~P).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_12 with Q.

  intros n2\_12a.

  specialize Syll2\_05 with P Q (~~Q).

  intros Syll2\_05a.

  specialize n2\_03 with P (~Q).

  intros n2\_03a.

  MP n2\_12a Syll2\_05a.

  Syll Syll2\_05a n2\_03a S.

  apply S.

Qed.

Theorem Trans2\_17 : ∀ P Q : Prop,

  (~Q → ~P) → (P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_03 with (~Q) P.

  intros n2\_03a.

  specialize n2\_14 with Q.

  intros n2\_14a.

  specialize Syll2\_05 with P (~~Q) Q.

  intros Syll2\_05a.

  MP n2\_14a Syll2\_05a.

  Syll n2\_03a Syll2\_05a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_18 : ∀ P : Prop,

  (~P → P) → P.

Proof. intros P.

  specialize n2\_12 with P.

  intro n2\_12a.

  specialize Syll2\_05 with (~P) P (~~P).

  intro Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a n2\_12.

  specialize Abs2\_01 with (~P).

  intros Abs2\_01a.

  Syll Syll2\_05a Abs2\_01a Sa.

  specialize n2\_14 with P.

  intros n2\_14a.

  Syll H n2\_14a Sb.

  apply Sb.

Qed.

Theorem n2\_2 : ∀ P Q : Prop,

  P → (P ∨ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize Add1\_3 with Q P.

  intros Add1\_3a.

  specialize Perm1\_4 with Q P.

  intros Perm1\_4a.

  Syll Add1\_3a Perm1\_4a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_21 : ∀ P Q : Prop,

  ~P → (P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_2 with (~P) Q.

  intros n2\_2a.

  specialize Impl1\_01 with P Q.

  intros Impl1\_01a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_2a.

  apply n2\_2a.

Qed.

Theorem n2\_24 : ∀ P Q : Prop,

  P → (~P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_21 with P Q.

  intros n2\_21a.

  specialize Comm2\_04 with (~P) P Q.

  intros Comm2\_04a.

  apply Comm2\_04a.

  apply n2\_21a.

Qed.

Theorem n2\_25 : ∀ P Q : Prop,

  P ∨ ((P ∨ Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_1 with (P ∨ Q).

  intros n2\_1a.

  specialize Assoc1\_5 with (~(P∨Q)) P Q.

  intros Assoc1\_5a.

  MP Assoc1\_5a n2\_1a.

  replace (~(P∨Q)∨Q) with (P∨Q→Q) in Assoc1\_5a.

  apply Assoc1\_5a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_26 : ∀ P Q : Prop,

  ~P ∨ ((P → Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_25 with (~P) Q.

  intros n2\_25a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_25a.

  apply n2\_25a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_27 : ∀ P Q : Prop,

  P → ((P → Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_26 with P Q.

  intros n2\_26a.

  replace (~P∨((P→Q)→Q)) with (P→(P→Q)→Q) in n2\_26a.

  apply n2\_26a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_3 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∨ (Q ∨ R)) → (P ∨ (R ∨ Q)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Perm1\_4 with Q R.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Sum1\_6 with P (Q∨R) (R∨Q).

  intros Sum1\_6a.

  MP Sum1\_6a Perm1\_4a.

  apply Sum1\_6a.

Qed.

Theorem n2\_31 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∨ (Q ∨ R)) → ((P ∨ Q) ∨ R).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_3 with P Q R.

  intros n2\_3a.

  specialize Assoc1\_5 with P R Q.

  intros Assoc1\_5a.

  specialize Perm1\_4 with R (P∨Q).

  intros Perm1\_4a.

  Syll Assoc1\_5a Perm1\_4a Sa.

  Syll n2\_3a Sa Sb.

  apply Sb.

Qed.

Theorem n2\_32 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∨ Q) ∨ R) → (P ∨ (Q ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Perm1\_4 with (P∨Q) R.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Assoc1\_5 with R P Q.

  intros Assoc1\_5a.

  specialize n2\_3 with P R Q.

  intros n2\_3a.

  specialize Syll2\_06 with ((P∨Q)∨R) (R∨P∨Q) (P∨R∨Q).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a Perm1\_4a.

  MP Syll2\_06a Assoc1\_5a.

  specialize Syll2\_06 with ((P∨Q)∨R) (P∨R∨Q) (P∨Q∨R).

  intros Syll2\_06b.

  MP Syll2\_06b Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06b n2\_3a.

  apply Syll2\_06b.

Qed.

Axiom n2\_33 : ∀ P Q R : Prop,

  (P∨Q∨R)=((P∨Q)∨R). (\*This definition makes the default left association. The default in Coq is right association, so this will need to be applied to underwrite some inferences.\*)

Theorem n2\_36 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → R) → ((P ∨ Q) → (R ∨ P)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Perm1\_4 with P R.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Syll2\_05 with (P∨Q) (P∨R) (R∨P).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a Perm1\_4a.

  specialize Sum1\_6 with P Q R.

  intros Sum1\_6a.

  Syll Sum1\_6a Syll2\_05a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_37 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → R) → ((Q ∨ P) → (P ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Perm1\_4 with Q P.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Syll2\_06 with (Q∨P) (P∨Q) (P∨R).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_05a Perm1\_4a.

  specialize Sum1\_6 with P Q R.

  intros Sum1\_6a.

  Syll Sum1\_6a Syll2\_05a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_38 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → R) → ((Q ∨ P) → (R ∨ P)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Perm1\_4 with P R.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Syll2\_05 with (Q∨P) (P∨R) (R∨P).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a Perm1\_4a.

  specialize Perm1\_4 with Q P.

  intros Perm1\_4b.

  specialize Syll2\_06 with (Q∨P) (P∨Q) (P∨R).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a Perm1\_4b.

  Syll Syll2\_06a Syll2\_05a H.

  specialize Sum1\_6 with P Q R.

  intros Sum1\_6a.

  Syll Sum1\_6a H S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_4 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ (P ∨ Q)) → (P ∨ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_31 with P P Q.

  intros n2\_31a.

  specialize Taut1\_2 with P.

  intros Taut1\_2a.

  specialize n2\_38 with Q (P∨P) P.

  intros n2\_38a.

  MP n2\_38a Taut1\_2a.

  Syll n2\_31a n2\_38a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_41 : ∀ P Q : Prop,

  (Q ∨ (P ∨ Q)) → (P ∨ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize Assoc1\_5 with Q P Q.

  intros Assoc1\_5a.

  specialize Taut1\_2 with Q.

  intros Taut1\_2a.

  specialize Sum1\_6 with P (Q∨Q) Q.

  intros Sum1\_6a.

  MP Sum1\_6a Taut1\_2a.

  Syll Assoc1\_5a Sum1\_6a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_42 : ∀ P Q : Prop,

  (~P ∨ (P → Q)) → (P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_4 with (~P) Q.

  intros n2\_4a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_4a.

  apply n2\_4a. apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_43 : ∀ P Q : Prop,

  (P → (P → Q)) → (P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_42 with P Q.

  intros n2\_42a.

  replace (~P ∨ (P→Q)) with (P→(P→Q)) in n2\_42a.

  apply n2\_42a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_45 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∨ Q) → ~P.

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_2 with P Q.

  intros n2\_2a.

  specialize Trans2\_16 with P (P∨Q).

  intros Trans2\_16a.

  MP n2\_2 Trans2\_16a.

  apply Trans2\_16a.

Qed.

Theorem n2\_46 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∨ Q) → ~Q.

Proof. intros P Q.

  specialize Add1\_3 with P Q.

  intros Add1\_3a.

  specialize Trans2\_16 with Q (P∨Q).

  intros Trans2\_16a.

  MP Add1\_3a Trans2\_16a.

  apply Trans2\_16a.

Qed.

Theorem n2\_47 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∨ Q) → (~P ∨ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_45 with P Q.

  intros n2\_45a.

  specialize n2\_2 with (~P) Q.

  intros n2\_2a.

  Syll n2\_45a n2\_2a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_48 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∨ Q) → (P ∨ ~Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_46 with P Q.

  intros n2\_46a.

  specialize Add1\_3 with P (~Q).

  intros Add1\_3a.

  Syll n2\_46a Add1\_3a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_49 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∨ Q) → (~P ∨ ~Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_45 with P Q.

  intros n2\_45a.

  specialize n2\_2 with (~P) (~Q).

  intros n2\_2a.

  Syll n2\_45a n2\_2a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_5 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P → Q) → (~P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_47 with (~P) Q.

  intros n2\_47a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_47a.

  replace (~~P∨Q) with (~P→Q) in n2\_47a.

  apply n2\_47a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_51 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P → Q) → (P → ~Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_48 with (~P) Q.

  intros n2\_48a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_48a.

  replace (~P∨~Q) with (P→~Q) in n2\_48a.

  apply n2\_48a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_52 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P → Q) → (~P → ~Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_49 with (~P) Q.

  intros n2\_49a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_49a.

  replace (~~P∨~Q) with (~P→~Q) in n2\_49a.

  apply n2\_49a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_521 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P→Q)→(Q→P).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_52 with P Q.

  intros n2\_52a.

  specialize Trans2\_17 with Q P.

  intros Trans2\_17a.

  Syll n2\_52a Trans2\_17a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_53 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) → (~P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_12 with P.

  intros n2\_12a.

  specialize n2\_38 with Q P (~~P).

  intros n2\_38a.

  MP n2\_38a n2\_12a.

  replace (~~P∨Q) with (~P→Q) in n2\_38a.

  apply n2\_38a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_54 : ∀ P Q : Prop,

  (~P → Q) → (P ∨ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_14 with P.

  intros n2\_14a.

  specialize n2\_38 with Q (~~P) P.

  intros n2\_38a.

  MP n2\_38a n2\_12a.

  replace (~~P∨Q) with (~P→Q) in n2\_38a.

  apply n2\_38a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_55 : ∀ P Q : Prop,

  ~P → ((P ∨ Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_53 with P Q.

  intros n2\_53a.

  specialize Comm2\_04 with (P∨Q) (~P) Q.

  intros Comm2\_04a.

  MP n2\_53a Comm2\_04a.

  apply Comm2\_04a.

Qed.

Theorem n2\_56 : ∀ P Q : Prop,

  ~Q → ((P ∨ Q) → P).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_55 with Q P.

  intros n2\_55a.

  specialize Perm1\_4 with P Q.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Syll2\_06 with (P∨Q) (Q∨P) P.

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a Perm1\_4a.

  Syll n2\_55a Syll2\_06a Sa.

  apply Sa.

  Qed.

Theorem n2\_6 : ∀ P Q : Prop,

  (~P→Q) → ((P → Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_38 with Q (~P) Q.

  intros n2\_38a.

  specialize Taut1\_2 with Q.

  intros Taut1\_2a.

  specialize Syll2\_05 with (~P∨Q) (Q∨Q) Q.

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a Taut1\_2a.

  Syll n2\_38a Syll2\_05a S.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in S.

  apply S.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_61 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) → ((~P → Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_6 with P Q.

  intros n2\_6a.

  specialize Comm2\_04 with (~P→Q) (P→Q) Q.

  intros Comm2\_04a.

  MP Comm2\_04a n2\_6a.

  apply Comm2\_04a.

Qed.

Theorem n2\_62 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) → ((P → Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_53 with P Q.

  intros n2\_53a.

  specialize n2\_6 with P Q.

  intros n2\_6a.

  Syll n2\_53a n2\_6a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_621 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) → ((P ∨ Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_62 with P Q.

  intros n2\_62a.

  specialize Comm2\_04 with (P ∨ Q) (P→Q) Q.

  intros Comm2\_04a.

  MP Comm2\_04a n2\_62a.

  apply Comm2\_04a.

Qed.

Theorem n2\_63 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) → ((~P ∨ Q) → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_62 with P Q.

  intros n2\_62a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q).

  apply n2\_62a.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_64 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) → ((P ∨ ~Q) → P).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_63 with Q P.

  intros n2\_63a.

  specialize Perm1\_4 with P Q.

  intros Perm1\_4a.

  Syll n2\_63a Perm1\_4a Ha.

  specialize Syll2\_06 with (P∨~Q) (~Q∨P) P.

  intros Syll2\_06a.

  specialize Perm1\_4 with P (~Q).

  intros Perm1\_4b.

  MP Syll2\_05a Perm1\_4b.

  Syll Syll2\_05a Ha S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_65 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) → ((P → ~Q) → ~P).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_64 with (~P) Q.

  intros n2\_64a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_64a.

  replace (~P∨~Q) with (P→~Q) in n2\_64a.

  apply n2\_64a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_67 : ∀ P Q : Prop,

  ((P ∨ Q) → Q) → (P → Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_54 with P Q.

  intros n2\_54a.

  specialize Syll2\_06 with (~P→Q) (P∨Q) Q.

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a n2\_54a.

  specialize n2\_24 with  P Q.

  intros n2\_24.

  specialize Syll2\_06 with P (~P→Q) Q.

  intros Syll2\_06b.

  MP Syll2\_06b n2\_24a.

  Syll Syll2\_06b Syll2\_06a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_68 : ∀ P Q : Prop,

  ((P → Q) → Q) → (P ∨ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_67 with (~P) Q.

  intros n2\_67a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_67a.

  specialize n2\_54 with P Q.

  intros n2\_54a.

  Syll n2\_67a n2\_54a S.

  apply S.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_69 : ∀ P Q : Prop,

  ((P → Q) → Q) → ((Q → P) → P).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_68 with P Q.

  intros n2\_68a.

  specialize Perm1\_4 with P Q.

  intros Perm1\_4a.

  Syll n2\_68a Perm1\_4a Sa.

  specialize n2\_62 with Q P.

  intros n2\_62a.

  Syll Sa n2\_62a Sb.

  apply Sb.

Qed.

Theorem n2\_73 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → Q) → (((P ∨ Q) ∨ R) → (Q ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_621 with P Q.

  intros n2\_621a.

  specialize n2\_38 with R (P∨Q) Q.

  intros n2\_38a.

  Syll n2\_621a n2\_38a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n2\_74 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → P) → ((P ∨ Q) ∨ R) → (P ∨ R).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_73 with Q P R.

  intros n2\_73a.

  specialize Assoc1\_5 with P Q R.

  intros Assoc1\_5a.

  specialize n2\_31 with Q P R.

  intros n2\_31a. (\*not cited explicitly!\*)

  Syll Assoc1\_5a n2\_31a Sa.

  specialize n2\_32 with P Q R.

  intros n2\_32a. (\*not cited explicitly!\*)

  Syll n2\_32a Sa Sb.

  specialize Syll2\_06 with ((P∨Q)∨R) ((Q∨P)∨R) (P∨R).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a Sb.

  Syll n2\_73a Syll2\_05a H.

  apply H.

Qed.

Theorem n2\_75 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∨ Q) → ((P ∨ (Q → R)) → (P ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_74 with P (~Q) R.

  intros n2\_74a.

  specialize n2\_53 with Q P.

  intros n2\_53a.

  Syll n2\_53a n2\_74a Sa.

  specialize n2\_31 with P (~Q) R.

  intros n2\_31a.

  specialize Syll2\_06 with (P∨(~Q)∨R)((P∨(~Q))∨R)  (P∨R).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a n2\_31a.

  Syll Sa Syll2\_06a Sb.

  specialize Perm1\_4 with P Q.

  intros Perm1\_4a. (\*not cited!\*)

  Syll Perm1\_4a Sb Sc.

  replace (~Q∨R) with (Q→R) in Sc.

  apply Sc.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_76 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∨ (Q → R)) → ((P ∨ Q) → (P ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_75 with P Q R.

  intros n2\_75a.

  specialize Comm2\_04 with (P∨Q) (P∨(Q→R)) (P∨R).

  intros Comm2\_04a.

  apply Comm2\_04a.

  apply n2\_75a.

Qed.

Theorem n2\_77 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → (Q → R)) → ((P → Q) → (P → R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_76 with (~P) Q R.

  intros n2\_76a.

  replace (~P∨(Q→R)) with (P→Q→R) in n2\_76a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_76a.

  replace (~P∨R) with (P→R) in n2\_76a.

  apply n2\_76a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_8 : ∀ Q R S : Prop,

  (Q ∨ R) → ((~R ∨ S) → (Q ∨ S)).

Proof. intros Q R S.

  specialize n2\_53 with R Q.

  intros n2\_53a.

  specialize Perm1\_4 with Q R.

  intros Perm1\_4a.

  Syll Perm1\_4a n2\_53a Ha.

  specialize n2\_38 with S (~R) Q.

  intros n2\_38a.

  Syll H n2\_38a Hb.

  apply Hb.

Qed.

Theorem n2\_81 : ∀ P Q R S : Prop,

  (Q → (R → S)) → ((P ∨ Q) → ((P ∨ R) → (P ∨ S))).

Proof. intros P Q R S.

  specialize Sum1\_6 with P Q (R→S).

  intros Sum1\_6a.

  specialize n2\_76 with P R S.

  intros n2\_76a.

  specialize Syll2\_05 with (P∨Q) (P∨(R→S)) ((P∨R)→(P∨S)).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a n2\_76a.

  Syll Sum1\_6a Syll2\_05a H.

  apply H.

Qed.

Theorem n2\_82 : ∀ P Q R S : Prop,

  (P ∨ Q ∨ R)→((P ∨ ~R ∨ S)→(P ∨ Q ∨ S)).

Proof. intros P Q R S.

  specialize n2\_8 with Q R S.

  intros n2\_8a.

  specialize n2\_81 with P (Q∨R) (~R∨S) (Q∨S).

  intros n2\_81a.

  MP n2\_81a n2\_8a.

  apply n2\_81a.

Qed.

Theorem n2\_83 : ∀ P Q R S : Prop,

  (P→(Q→R))→((P→(R→S))→(P→(Q→S))).

Proof. intros P Q R S.

  specialize n2\_82 with (~P) (~Q) R S.

  intros n2\_82a.

  replace (~Q∨R) with (Q→R) in n2\_82a.

  replace (~P∨(Q→R)) with (P→Q→R) in n2\_82a.

  replace (~R∨S) with (R→S) in n2\_82a.

  replace (~P∨(R→S)) with (P→R→S) in n2\_82a.

  replace (~Q∨S) with (Q→S) in n2\_82a.

  replace (~Q∨S) with (Q→S) in n2\_82a.

  replace (~P∨(Q→S)) with (P→Q→S) in n2\_82a.

  apply n2\_82a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n2\_85 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∨ Q) → (P ∨ R)) → (P ∨ (Q → R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Add1\_3 with P Q.

  intros Add1\_3a.

  specialize Syll2\_06 with Q (P∨Q) R.

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a Add1\_3a.

  specialize n2\_55 with P R.

  intros n2\_55a.

  specialize Syll2\_05 with (P∨Q) (P∨R) R.

  intros Syll2\_05a.

  Syll n2\_55a Syll2\_05a Ha.

  specialize n2\_83 with (~P) ((P∨Q)→(P∨R)) ((P∨Q)→R) (Q→R).

  intros n2\_83a.

  MP n2\_83a Ha.

  specialize Comm2\_04 with (~P) (P∨Q→P∨R) (Q→R).

  intros Comm2\_04a.

  Syll Ha Comm2\_04a Hb.

  specialize n2\_54 with P (Q→R).

  intros n2\_54a.

  specialize n2\_02 with (~P) ((P∨Q→R)→(Q→R)).

  intros n2\_02a. (\*Not mentioned! Greg's suggestion per the BRS list in June 25, 2017.\*)

  MP Syll2\_06a n2\_02a.

  MP Hb n2\_02a.

  Syll Hb n2\_54a Hc.

  apply Hc.

Qed.

Theorem n2\_86 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P → Q) → (P → R)) → (P → (Q →  R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_85 with (~P) Q R.

  intros n2\_85a.

  replace (~P∨Q) with (P→Q) in n2\_85a.

  replace (~P∨R) with (P→R) in n2\_85a.

  replace (~P∨(Q→R)) with (P→Q→R) in n2\_85a.

  apply n2\_85a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

End No2.