Module No3.

Import No1.

Import No2.

Axiom Prod3\_01 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) = ~(~P ∨ ~Q).

Axiom Abb3\_02 : ∀ P Q R : Prop,

  (P→Q→R)=(P→Q)∧(Q→R).

Theorem Conj3\_03 : ∀ P Q : Prop, P → Q → (P∧Q). (\*3.03 is a derived rule permitting an inference from the theoremhood of P and that of Q to that of P and Q.\*)

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_11 with (~P∨~Q). intros n2\_11a.

  specialize n2\_32 with (~P) (~Q) (~(~P ∨ ~Q)). intros n2\_32a.

  MP n2\_32a n2\_11a.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q) in n2\_32a.

  replace (~Q ∨ (P∧Q)) with (Q→(P∧Q)) in n2\_32a.

  replace (~P ∨ (Q → (P∧Q))) with (P→Q→(P∧Q)) in n2\_32a.

  apply n2\_32a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Prod3\_01.

Qed.

Theorem n3\_1 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) → ~(~P ∨ ~Q).

Proof. intros P Q.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q).

  specialize n2\_08 with (P∧Q).

  intros n2\_08a.

  apply n2\_08a.

  apply Prod3\_01.

Qed.

Theorem n3\_11 : ∀ P Q : Prop,

  ~(~P ∨ ~Q) → (P ∧ Q).

Proof. intros P Q.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q).

  specialize n2\_08 with (P∧Q).

  intros n2\_08a.

  apply n2\_08a.

  apply Prod3\_01.

Qed.

Theorem n3\_12 : ∀ P Q : Prop,

  (~P ∨ ~Q) ∨ (P ∧ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_11 with (~P∨~Q).

  intros n2\_11a.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q) in n2\_11a.

  apply n2\_11a.

  apply Prod3\_01.

Qed.

Theorem n3\_13 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∧ Q) → (~P ∨ ~Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_11 with P Q.

  intros n3\_11a.

  specialize Trans2\_15 with (~P∨~Q) (P∧Q).

  intros Trans2\_15a.

  MP Trans2\_16a n3\_11a.

  apply Trans2\_15a.

Qed.

Theorem n3\_14 : ∀ P Q : Prop,

  (~P ∨ ~Q) → ~(P ∧ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_1 with P Q.

  intros n3\_1a.

  specialize Trans2\_16 with (P∧Q) (~(~P∨~Q)).

  intros Trans2\_16a.

  MP Trans2\_16a n3\_1a.

  specialize n2\_12 with (~P∨~Q).

  intros n2\_12a.

  Syll n2\_12a Trans2\_16a S.

  apply S.

Qed.

Theorem n3\_2 : ∀ P Q : Prop,

  P → Q → (P ∧ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_12 with P Q.

  intros n3\_12a.

  specialize n2\_32 with (~P) (~Q) (P∧Q).

  intros n2\_32a.

  MP n3\_32a n3\_12a.

  replace (~Q ∨ P ∧ Q) with (Q→P∧Q) in n2\_32a.

  replace (~P ∨ (Q → P ∧ Q)) with (P→Q→P∧Q) in n2\_32a.

  apply n2\_32a.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n3\_21 : ∀ P Q : Prop,

  Q → P → (P ∧ Q).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_2 with P Q.

  intros n3\_2a.

  specialize Comm2\_04 with P Q (P∧Q).

  intros Comm2\_04a.

  MP Comm2\_04a n3\_2a.

  apply Comm2\_04a.

Qed.

Theorem n3\_22 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) → (Q ∧ P).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_13 with Q P.

  intros n3\_13a.

  specialize Perm1\_4 with (~Q) (~P).

  intros Perm1\_4a.

  Syll n3\_13a Perm1\_4a Ha.

  specialize n3\_14 with P Q.

  intros n3\_14a.

  Syll Ha n3\_14a Hb.

  specialize Trans2\_17 with (P∧Q) (Q ∧ P).

  intros Trans2\_17a.

  MP Trans2\_17a Hb.

  apply Trans2\_17a.

Qed.

Theorem n3\_24 : ∀ P : Prop,

  ~(P ∧ ~P).

Proof. intros P.

  specialize n2\_11 with (~P).

  intros n2\_11a.

  specialize n3\_14 with P (~P).

  intros n3\_14a.

  MP n3\_14a n2\_11a.

  apply n3\_14a.

Qed.

Theorem Simp3\_26 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) → P.

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_02 with Q P.

  intros n2\_02a.

  replace (P→(Q→P)) with (~P∨(Q→P)) in n2\_02a.

  replace (Q→P) with (~Q∨P) in n2\_02a.

  specialize n2\_31 with (~P) (~Q) P.

  intros n2\_31a.

  MP n2\_31a n2\_02a.

  specialize n2\_53 with (~P∨~Q) P.

  intros n2\_53a.

  MP n2\_53a n2\_02a.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q) in n2\_53a.

  apply n2\_53a.

  apply Prod3\_01.

  replace (~Q∨P) with (Q→P).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  replace (~P∨(Q→P)) with (P→Q→P).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem Simp3\_27 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) → Q.

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_22 with P Q.

  intros n3\_22a.

  specialize Simp3\_26 with Q P.

  intros Simp3\_26a.

  Syll n3\_22a Simp3\_26a S.

  apply S.

Qed.

Theorem Exp3\_3 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∧ Q) → R) → (P → (Q → R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Trans2\_15 with (~P∨~Q) R.

  intros Trans2\_15a.

  replace (~R→(~P∨~Q)) with (~R→(P→~Q)) in Trans2\_15a.

  specialize Comm2\_04 with (~R) P (~Q).

  intros Comm2\_04a.

  Syll Trans2\_15a Comm2\_04a Sa.

  specialize Trans2\_17 with Q R.

  intros Trans2\_17a.

  specialize  Syll2\_05 with P (~R→~Q) (Q→R).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a Trans2\_17a.

  Syll Sa Syll2\_05a Sb.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q) in Sb.

  apply Sb.

  apply Prod3\_01.

  replace (~P∨~Q) with (P→~Q).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem Imp3\_31 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → (Q → R)) → (P ∧ Q) → R.

Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_31 with (~P) (~Q) R.

  intros n2\_31a.

  specialize n2\_53 with (~P∨~Q) R.

  intros n2\_53a.

  Syll n2\_31a n2\_53a S.

  replace (~Q∨R) with (Q→R) in S.

  replace (~P∨(Q→R)) with (P→Q→R) in S.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q) in S.

  apply S.

  apply Prod3\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem Syll3\_33 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P → R).

Proof. intros P Q R.

  specialize Syll2\_06 with P Q R.

  intros Syll2\_06a.

  specialize Imp3\_31 with (P→Q) (Q→R) (P→R).

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a Syll2\_06a.

  apply Imp3\_31a.

Qed.

Theorem Syll3\_34 : ∀ P Q R : Prop,

  ((Q → R) ∧ (P → Q)) → (P → R).

Proof. intros P Q R.

  specialize Syll2\_05 with P Q R.

  intros Syll2\_05a.

  specialize Imp3\_31 with (Q→R) (P→Q) (P→R).

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a Syll2\_05a.

  apply Imp3\_31a.

Qed.

Theorem Ass3\_35 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ (P → Q)) → Q.

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_27 with P Q.

  intros n2\_27a.

  specialize Imp3\_31 with P (P→Q) Q.

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a n2\_27a.

  apply Imp3\_31a.

Qed.

Theorem n3\_37 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∧ Q → R) → (P ∧ ~R → ~Q).

Proof. intros P Q R.

  specialize Trans2\_16 with Q R.

  intros Trans2\_16a.

  specialize Syll2\_05 with P (Q→R) (~R→~Q).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a Trans2\_16a.

  specialize Exp3\_3 with P Q R.

  intros Exp3\_3a.

  Syll Exp3\_3a Syll2\_05a Sa.

  specialize Imp3\_31 with P (~R) (~Q).

  intros Imp3\_31a.

  Syll Sa Imp3\_31a Sb.

  apply Sb.

Qed.

Theorem n3\_4 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) → P → Q.

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_51 with P Q.

  intros n2\_51a.

  specialize Trans2\_15 with (P→Q) (P→~Q).

  intros Trans2\_15a.

  MP Trans2\_15a n2\_51a.

  replace (P→~Q) with (~P∨~Q) in Trans2\_15a.

  replace (~(~P∨~Q)) with (P∧Q) in Trans2\_15a.

  apply Trans2\_15a.

  apply Prod3\_01.

  replace (~P∨~Q) with (P→~Q).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n3\_41 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → R) → (P ∧ Q → R).

Proof. intros P Q R.

  specialize Simp3\_26 with P Q.

  intros Simp3\_26a.

  specialize Syll2\_06 with (P∧Q) P R.

  intros Syll2\_06a.

  MP Simp3\_26a Syll2\_06a.

  apply Syll2\_06a.

Qed.

Theorem n3\_42 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → R) → (P ∧ Q → R).

Proof. intros P Q R.

  specialize Simp3\_27 with P Q.

  intros Simp3\_27a.

  specialize Syll2\_06 with (P∧Q) Q R.

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_05a Simp3\_27a.

  apply Syll2\_06a.

Qed.

Theorem Comp3\_43 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → Q) ∧ (P → R) → (P → Q ∧ R).

Proof. intros P Q R.

  specialize n3\_2 with Q R.

  intros n3\_2a.

  specialize Syll2\_05 with P Q (R→Q∧R).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a n3\_2a.

  specialize n2\_77 with P R (Q∧R).

  intros n2\_77a.

  Syll Syll2\_05a n2\_77a Sa.

  specialize Imp3\_31 with (P→Q) (P→R) (P→Q∧R).

  intros Imp3\_31a.

  MP Sa Imp3\_31a.

  apply Imp3\_31a.

Qed.

Theorem n3\_44 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → P) ∧ (R → P) → (Q ∨ R → P).

Proof. intros P Q R.

  specialize Syll3\_33 with (~Q) R P.

  intros Syll3\_33a.

  specialize n2\_6 with Q P.

  intros n2\_6a.

  Syll Syll3\_33a n2\_6a Sa.

  specialize Exp3\_3 with (~Q→R) (R→P) ((Q→P)→P).

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a Sa.

  specialize Comm2\_04 with (R→P) (Q→P) P.

  intros Comm2\_04a.

  Syll Exp3\_3a Comm2\_04a Sb.

  specialize Imp3\_31 with (Q→P) (R→P) P.

  intros Imp3\_31a.

  Syll Sb Imp3\_31a Sc.

  specialize Comm2\_04 with (~Q→R) ((Q→P)∧(R→P)) P.

  intros Comm2\_04b.

  MP Comm2\_04b Sc.

  specialize n2\_53 with Q R.

  intros n2\_53a.

  specialize Syll2\_06 with (Q∨R) (~Q→R) P.

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a n2\_53a.

  Syll Comm2\_04b Syll2\_06a Sd.

  apply Sd.

Qed.

Theorem Fact3\_45 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → Q) → (P ∧ R) → (Q ∧ R).

Proof. intros P Q R.

  specialize Syll2\_06 with P Q (~R).

  intros Syll2\_06a.

  specialize Trans2\_16 with (Q→~R) (P→~R).

  intros Trans2\_16a.

  Syll Syll2\_06a Trans2\_16a S.

  replace (P→~R) with (~P∨~R) in S.

  replace (Q→~R) with (~Q∨~R) in S.

  replace (~(~P∨~R)) with (P∧R) in S.

  replace (~(~Q∨~R)) with (Q∧R) in S.

  apply S.

  apply Prod3\_01.

  apply Prod3\_01.

  replace (~Q∨~R) with (Q→~R).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  replace (~P∨~R) with (P→~R).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

Qed.

Theorem n3\_47 : ∀ P Q R S : Prop,

  ((P → R) ∧ (Q → S)) → (P ∧ Q) → R ∧ S.

Proof. intros P Q R S.

  specialize Simp3\_26 with (P→R) (Q→S).

  intros Simp3\_26a.

  specialize Fact3\_45 with P R Q.

  intros Fact3\_45a.

  Syll Simp3\_26a Fact3\_45a Sa.

  specialize n3\_22 with R Q.

  intros n3\_22a.

  specialize Syll2\_05 with (P∧Q) (R∧Q) (Q∧R).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a n3\_22a.

  Syll Sa Syll2\_05a Sb.

  specialize Simp3\_27 with (P→R) (Q→S).

  intros Simp3\_27a.

  specialize Fact3\_45 with Q S R.

  intros Fact3\_45b.

  Syll Simp3\_27a Fact3\_45b Sc.

  specialize n3\_22 with S R.

  intros n3\_22b.

  specialize Syll2\_05 with (Q∧R) (S∧R) (R∧S).

  intros Syll2\_05b.

  MP Syll2\_05b n3\_22b.

  Syll Sc Syll2\_05b Sd.

  specialize n2\_83 with ((P→R)∧(Q→S)) (P∧Q) (Q∧R) (R∧S).

  intros n2\_83a.

  MP n2\_83a Sb.

  MP n2\_83 Sd.

  apply n2\_83a.

Qed.

Theorem n3\_48 : ∀ P Q R S : Prop,

  ((P → R) ∧ (Q → S)) → (P ∨ Q) → R ∨ S.

Proof. intros P Q R S.

  specialize Simp3\_26 with (P→R) (Q→S).

  intros Simp3\_26a.

  specialize Sum1\_6 with Q P R.

  intros Sum1\_6a.

  Syll Simp3\_26a Sum1\_6a Sa.

  specialize Perm1\_4 with P Q.

  intros Perm1\_4a.

  specialize Syll2\_06 with (P∨Q) (Q∨P) (Q∨R).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a Perm1\_4a.

  Syll Sa Syll2\_06a Sb.

  specialize Simp3\_27 with (P→R) (Q→S).

  intros Simp3\_27a.

  specialize Sum1\_6 with R Q S.

  intros Sum1\_6b.

  Syll Simp3\_27a Sum1\_6b Sc.

  specialize Perm1\_4 with Q R.

  intros Perm1\_4b.

  specialize Syll2\_06 with (Q∨R) (R∨Q) (R∨S).

  intros Syll2\_06b.

  MP Syll2\_06b Perm1\_4b.

  Syll Sc Syll2\_06a Sd.

  specialize n2\_83 with ((P→R)∧(Q→S)) (P∨Q) (Q∨R) (R∨S).

  intros n2\_83a.

  MP n2\_83a Sb.

  MP n2\_83a Sd.

  apply n2\_83a.

Qed.

End No3.