Module No4.

Import No1.

Import No2.

Import No3.

Axiom Equiv4\_01 : ∀ P Q : Prop,

  (P↔Q)=((P→Q) ∧ (Q→P)). (\*n4\_02 defines P iff Q iff R as P iff Q AND Q iff R.\*)

Axiom EqBi : ∀ P Q : Prop,

  (P=Q) ↔ (P↔Q).

Ltac Equiv H1 :=

  match goal with

    | [ H1 : (?P→?Q) ∧ (?Q→?P) |- \_ ] =>

      replace ((P→Q) ∧ (Q→P)) with (P↔Q) in H1

end.

Ltac Conj H1 H2 :=

  match goal with

    | [ H1 : ?P, H2 : ?Q |- \_ ] =>

      assert (P ∧ Q)

end.

Theorem Trans4\_1 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ↔ (~Q → ~P).

Proof. intros P Q.

  specialize Trans2\_16 with P Q.

  intros Trans2\_16a.

  specialize Trans2\_17 with P Q.

  intros Trans2\_17a.

  Conj Trans2\_16a Trans2\_17a.

  split.

  apply Trans2\_16a.

  apply Trans2\_17a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem Trans4\_11 : ∀ P Q : Prop,

  (P ↔ Q) ↔ (~P ↔ ~Q).

Proof. intros P Q.

  specialize Trans2\_16 with P Q.

  intros Trans2\_16a.

  specialize Trans2\_16 with Q P.

  intros Trans2\_16b.

  Conj Trans2\_16a Trans2\_16b.

  split.

  apply Trans2\_16a.

  apply Trans2\_16b.

  specialize n3\_47 with (P→Q) (Q→P) (~Q→~P) (~P→~Q).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47 H.

  specialize n3\_22 with (~Q → ~P) (~P → ~Q).

  intros n3\_22a.

  Syll n3\_47a n3\_22a Sa.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in Sa.

  replace ((~P → ~Q) ∧ (~Q → ~P)) with (~P↔~Q) in Sa.

  clear Trans2\_16a. clear H. clear Trans2\_16b. clear n3\_22a. clear n3\_47a.

  specialize Trans2\_17 with Q P.

  intros Trans2\_17a.

  specialize Trans2\_17 with P Q.

  intros Trans2\_17b.

  Conj Trans2\_17a Trans2\_17b.

  split.

  apply Trans2\_17a.

  apply Trans2\_17b.

  specialize n3\_47 with (~P→~Q) (~Q→~P) (Q→P) (P→Q).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47a H.

  specialize n3\_22 with (Q→P) (P→Q).

  intros n3\_22a.

  Syll n3\_47a n3\_22a Sb.

  clear Trans2\_17a. clear Trans2\_17b. clear H. clear n3\_47a. clear n3\_22a.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in Sb.

  replace ((~P → ~Q) ∧ (~Q → ~P)) with (~P↔~Q) in Sb.

  Conj Sa Sb.

  split.

  apply Sa.

  apply Sb.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_12 : ∀ P Q : Prop,

  (P ↔ ~Q) ↔ (Q ↔ ~P).

  Proof. intros P Q.

    specialize n2\_03 with P Q.

    intros n2\_03a.

    specialize Trans2\_15 with Q P.

    intros Trans2\_15a.

    Conj n2\_03a Trans2\_15a.

    split.

    apply n2\_03a.

    apply Trans2\_15a.

    specialize n3\_47 with (P→~Q) (~Q→P) (Q→~P) (~P→Q).

    intros n3\_47a.

    MP n3\_47a H.

    specialize n2\_03 with Q P.

    intros n2\_03b.

    specialize Trans2\_15 with P Q.

    intros Trans2\_15b.

    Conj n2\_03b Trans2\_15b.

    split.

    apply n2\_03b.

    apply Trans2\_15b.

    specialize n3\_47 with (Q→~P) (~P→Q) (P→~Q) (~Q→P).

    intros n3\_47b.

    MP n3\_47b H0.

    clear n2\_03a. clear Trans2\_15a. clear H. clear n2\_03b. clear Trans2\_15b. clear H0.

    replace ((P → ~Q) ∧ (~Q → P)) with (P↔~Q) in n3\_47a.

    replace ((Q → ~P) ∧ (~P → Q)) with (Q↔~P) in n3\_47a.

    replace ((P → ~Q) ∧ (~Q → P)) with (P↔~Q) in n3\_47b.

    replace ((Q → ~P) ∧ (~P → Q)) with (Q↔~P) in n3\_47b.

    Conj n3\_47a n3\_47b.

    split.

    apply n3\_47a.

    apply n3\_47b.

    Equiv H.

    apply H.

    apply Equiv4\_01.

    apply Equiv4\_01.

    apply Equiv4\_01.

    apply Equiv4\_01.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_13 : ∀ P : Prop,

  P ↔ ~~P.

  Proof. intros P.

  specialize n2\_12 with P.

  intros n2\_12a.

  specialize n2\_14 with P.

  intros n2\_14a.

  Conj n2\_12a n2\_14a.

  split.

  apply n2\_12a.

  apply n2\_14a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_14 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∧ Q) → R) ↔ ((P ∧ ~R) → ~Q).

Proof. intros P Q R.

specialize n3\_37 with P Q R.

intros n3\_37a.

specialize n3\_37 with P (~R) (~Q).

intros n3\_37b.

Conj n3\_37a n3\_37b.

split. apply n3\_37a.

apply n3\_37b.

specialize n4\_13 with Q.

intros n4\_13a.

specialize n4\_13 with R.

intros n4\_13b.

replace (~~Q) with Q in H.

replace (~~R) with R in H.

Equiv H.

apply H.

apply Equiv4\_01.

apply EqBi.

apply n4\_13b.

apply EqBi.

apply n4\_13a.

Qed.

Theorem n4\_15 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∧ Q) → ~R) ↔ ((Q ∧ R) → ~P).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_14 with Q P (~R).

  intros n4\_14a.

  specialize n3\_22 with Q P.

  intros n3\_22a.

  specialize Syll2\_06 with (Q∧P) (P∧Q) (~R).

  intros Syll2\_06a.

  MP Syll2\_06a n3\_22a.

  specialize n4\_13 with R.

  intros n4\_13a.

  replace (~~R) with R in n4\_14a.

  rewrite Equiv4\_01 in n4\_14a.

  specialize Simp3\_26 with ((Q ∧ P → ~R) → Q ∧ R → ~P) ((Q ∧ R → ~P) → Q ∧ P → ~R).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_14a.

  Syll Syll2\_06a Simp3\_26a Sa.

  specialize Simp3\_27 with ((Q ∧ P → ~R) → Q ∧ R → ~P) ((Q ∧ R → ~P) → Q ∧ P → ~R).

  intros Simp3\_27a.

  MP Simp3\_27a n4\_14a.

  specialize n3\_22 with P Q.

  intros n3\_22b.

  specialize Syll2\_06 with (P∧Q) (Q∧P) (~R).

  intros Syll2\_06b.

  MP Syll2\_06b n3\_22b.

  Syll Syll2\_06b Simp3\_27a Sb.

  split.

  apply Sa.

  apply Sb.

  apply EqBi.

  apply n4\_13a.

  Qed.

Theorem n4\_2 : ∀ P : Prop,

  P ↔ P.

  Proof. intros P.

  specialize n3\_2 with (P→P) (P→P).

  intros n3\_2a.

  specialize n2\_08 with P.

  intros n2\_08a.

  MP n3\_2a n2\_08a.

  MP n3\_2a n2\_08a.

  Equiv n3\_2a.

  apply n3\_2a.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_21 : ∀ P Q : Prop,

  (P ↔ Q) ↔ (Q ↔ P).

  Proof. intros P Q.

  specialize n3\_22 with (P→Q) (Q→P).

  intros n3\_22a.

  specialize Equiv4\_01 with P Q.

  intros Equiv4\_01a.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n3\_22a.

  specialize Equiv4\_01 with Q P.

  intros Equiv4\_01b.

  replace ((Q → P) ∧ (P → Q)) with (Q↔P) in n3\_22a.

  specialize n3\_22 with (Q→P) (P→Q).

  intros n3\_22b.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n3\_22b.

  replace ((Q → P) ∧ (P → Q)) with (Q↔P) in n3\_22b.

  Conj n3\_22a n3\_22b.

  split.

  apply Equiv4\_01b.

  apply n3\_22b.

  split.

  apply n3\_22a.

  apply n3\_22b.

Qed.

Theorem n4\_22 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ↔ Q) ∧ (Q ↔ R)) → (P ↔ R).

Proof. intros P Q R.

  specialize Simp3\_26 with (P↔Q) (Q↔R).

  intros Simp3\_26a.

  specialize Simp3\_26 with (P→Q) (Q→P).

  intros Simp3\_26b.

  replace ((P→Q) ∧ (Q→P)) with (P↔Q) in Simp3\_26b.

  Syll Simp3\_26a Simp3\_26b Sa.

  specialize Simp3\_27 with (P↔Q) (Q↔R).

  intros Simp3\_27a.

  specialize Simp3\_26 with (Q→R) (R→Q).

  intros Simp3\_26c.

  replace ((Q→R) ∧ (R→Q)) with (Q↔R) in Simp3\_26c.

  Syll Simp3\_27a Simp3\_26c Sb.

  specialize n2\_83 with ((P↔Q)∧(Q↔R)) P Q R.

  intros n2\_83a.

  MP n2\_83a Sa.

  MP n2\_83a Sb.

  specialize Simp3\_27 with (P↔Q) (Q↔R).

  intros Simp3\_27b.

  specialize Simp3\_27 with (Q→R) (R→Q).

  intros Simp3\_27c.

  replace ((Q→R) ∧ (R→Q)) with (Q↔R) in Simp3\_27c.

  Syll Simp3\_27b Simp3\_27c Sc.

  specialize Simp3\_26 with (P↔Q) (Q↔R).

  intros Simp3\_26d.

  specialize Simp3\_27 with (P→Q) (Q→P).

  intros Simp3\_27d.

  replace ((P→Q) ∧ (Q→P)) with (P↔Q) in Simp3\_27d.

  Syll Simp3\_26d Simp3\_27d Sd.

  specialize n2\_83 with ((P↔Q)∧(Q↔R)) R Q P.

  intros n2\_83b.

  MP n2\_83b Sc. MP n2\_83b Sd.

  clear Sd. clear Sb. clear Sc. clear Sa. clear Simp3\_26a. clear Simp3\_26b. clear Simp3\_26c. clear Simp3\_26d. clear Simp3\_27a. clear Simp3\_27b. clear Simp3\_27c. clear Simp3\_27d.

  Conj n2\_83a n2\_83b.

  split.

  apply n2\_83a.

  apply n2\_83b.

  specialize Comp3\_43 with ((P↔Q)∧(Q↔R)) (P→R) (R→P).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  replace ((P→R) ∧ (R→P)) with (P↔R) in Comp3\_43a.

  apply Comp3\_43a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_24 : ∀ P : Prop,

  P ↔ (P ∧ P).

  Proof. intros P.

  specialize n3\_2 with P P.

  intros n3\_2a.

  specialize n2\_43 with P (P ∧ P).

  intros n2\_43a.

  MP n3\_2a n2\_43a.

  specialize Simp3\_26 with P P.

  intros Simp3\_26a.

  Conj n2\_43a Simp3\_26a.

  split.

  apply n2\_43a.

  apply Simp3\_26a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_25 : ∀ P : Prop,

  P ↔ (P ∨ P).

Proof. intros P.

  specialize Add1\_3 with P P.

  intros Add1\_3a.

  specialize Taut1\_2 with P.

  intros Taut1\_2a.

  Conj Add1\_3a Taut1\_2a.

  split.

  apply Add1\_3a.

  apply Taut1\_2a.

  Equiv H. apply H.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_3 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) ↔ (Q ∧ P).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_22 with P Q.

  intros n3\_22a.

  specialize n3\_22 with Q P.

  intros n3\_22b.

  Conj n3\_22a n3\_22b.

  split.

  apply n3\_22a.

  apply n3\_22b.

  Equiv H. apply H.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_31 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) ↔ (Q ∨ P).

  Proof. intros P Q.

    specialize Perm1\_4 with P Q.

    intros Perm1\_4a.

    specialize Perm1\_4 with Q P.

    intros Perm1\_4b.

    Conj Perm1\_4a Perm1\_4b.

    split.

    apply Perm1\_4a.

    apply Perm1\_4b.

    Equiv H. apply H.

    apply Equiv4\_01.

Qed.

  Theorem n4\_32 : ∀ P Q R : Prop,

    ((P ∧ Q) ∧ R) ↔ (P ∧ (Q ∧ R)).

    Proof. intros P Q R.

    specialize n4\_15 with P Q R.

    intros n4\_15a.

    specialize Trans4\_1 with P (~(Q ∧ R)).

    intros Trans4\_1a.

    replace (~~(Q ∧ R)) with (Q ∧ R) in Trans4\_1a.

    replace (Q ∧ R→~P) with (P→~(Q ∧ R)) in n4\_15a.

    specialize Trans4\_11 with (P ∧ Q → ~R) (P → ~(Q ∧ R)).

    intros Trans4\_11a.

    replace ((P ∧ Q → ~R) ↔ (P → ~(Q ∧ R))) with (~(P ∧ Q → ~R) ↔ ~(P → ~(Q ∧ R))) in n4\_15a.

    replace (P ∧ Q → ~R) with (~(P ∧ Q ) ∨ ~R) in n4\_15a.

    replace (P → ~(Q ∧ R)) with (~P ∨ ~(Q ∧ R)) in n4\_15a.

    replace (~(~(P ∧ Q) ∨ ~R)) with ((P ∧ Q) ∧ R) in n4\_15a.

    replace (~(~P ∨ ~(Q ∧ R))) with (P ∧ (Q ∧ R )) in n4\_15a.

    apply n4\_15a.

    apply Prod3\_01.

    apply Prod3\_01.

    rewrite Impl1\_01.

    reflexivity.

    rewrite Impl1\_01.

    reflexivity.

    replace (~(P ∧ Q → ~R) ↔ ~(P → ~(Q ∧ R))) with ((P ∧ Q → ~R) ↔ (P → ~(Q ∧ R))).

    reflexivity.

    apply EqBi.

    apply Trans4\_11a.

    apply EqBi.

    apply Trans4\_1a.

    apply EqBi.

    apply n4\_13.

    Qed. (\*Note that the actual proof uses n4\_12, but that transposition involves transforming a biconditional into a conditional. This way of doing it - using Trans4\_1 to transpose a conditional and then applying n4\_13 to double negate - is easier without a derived rule for replacing a biconditional with one of its equivalent implications.\*)

Theorem n4\_33 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∨ (Q ∨ R)) ↔ ((P ∨ Q) ∨ R).

  Proof. intros P Q R.

    specialize n2\_31 with P Q R.

    intros n2\_31a.

    specialize n2\_32 with P Q R.

    intros n2\_32a.

    split. apply n2\_31a.

    apply n2\_32a.

  Qed.

  Axiom n4\_34 : ∀ P Q R : Prop,

  P ∧ Q ∧ R = ((P ∧ Q) ∧ R). (\*This axiom ensures left association of brackets. Coq's default is right association. But Principia proves associativity of logical product as n4\_32. So in effect, this axiom gives us a derived rule that allows us to shift between Coq's and Principia's default rules for brackets of logical products.\*)

Theorem n4\_36 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ↔ Q) → ((P ∧ R) ↔ (Q ∧ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Fact3\_45 with P Q R.

  intros Fact3\_45a.

  specialize Fact3\_45 with Q P R.

  intros Fact3\_45b.

  Conj Fact3\_45a Fact3\_45b.

  split.

  apply Fact3\_45a.

  apply Fact3\_45b.

  specialize n3\_47 with (P→Q) (Q→P) (P ∧ R → Q ∧ R) (Q ∧ R → P ∧ R).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47 H.

  replace  ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n3\_47a.

  replace ((P ∧ R → Q ∧ R) ∧ (Q ∧ R → P ∧ R)) with (P ∧ R ↔ Q ∧ R) in n3\_47a.

  apply n3\_47a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_37 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ↔ Q) → ((P ∨ R) ↔ (Q ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Sum1\_6 with R P Q.

  intros Sum1\_6a.

  specialize Sum1\_6 with R Q P.

  intros Sum1\_6b.

  Conj Sum1\_6a Sum1\_6b.

  split.

  apply Sum1\_6a.

  apply Sum1\_6b.

  specialize n3\_47 with (P → Q) (Q → P) (R ∨ P → R ∨ Q) (R ∨ Q → R ∨ P).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47 H.

  replace  ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n3\_47a.

  replace ((R ∨ P → R ∨ Q) ∧ (R ∨ Q → R ∨ P)) with (R ∨ P ↔ R ∨ Q) in n3\_47a.

  replace (R ∨ P) with (P ∨ R) in n3\_47a.

  replace (R ∨ Q) with (Q ∨ R) in n3\_47a.

  apply n3\_47a.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_38 : ∀ P Q R S : Prop,

  ((P ↔ R) ∧ (Q ↔ S)) → ((P ∧ Q) ↔ (R ∧ S)).

Proof. intros P Q R S.

  specialize n3\_47 with P Q R S.

  intros n3\_47a.

  specialize n3\_47 with R S P Q.

  intros n3\_47b.

  Conj n3\_47a n3\_47b.

  split.

  apply n3\_47a.

  apply n3\_47b.

  specialize n3\_47 with ((P→R) ∧ (Q→S)) ((R→P) ∧ (S→Q)) (P ∧ Q → R ∧ S) (R ∧ S → P ∧ Q).

  intros n3\_47c.

  MP n3\_47c H.

  specialize n4\_32 with (P→R) (Q→S) ((R→P) ∧ (S → Q)).

  intros n4\_32a.

  replace (((P → R) ∧ (Q → S)) ∧ (R → P) ∧ (S → Q)) with ((P → R) ∧ (Q → S) ∧ (R → P) ∧ (S → Q)) in n3\_47c.

  specialize n4\_32 with (Q→S) (R→P) (S → Q).

  intros n4\_32b.

  replace ((Q → S) ∧ (R → P) ∧ (S → Q)) with (((Q → S) ∧ (R → P)) ∧ (S → Q)) in n3\_47c.

  specialize n3\_22 with (Q→S) (R→P).

  intros n3\_22a.

  specialize n3\_22 with (R→P) (Q→S).

  intros n3\_22b.

  Conj n3\_22a n3\_22b.

  split.

  apply n3\_22a.

  apply n3\_22b.

  Equiv H0.

  replace ((Q → S) ∧ (R → P)) with ((R → P) ∧ (Q → S)) in n3\_47c.

  specialize n4\_32 with (R → P) (Q → S) (S → Q).

  intros n4\_32c.

  replace (((R → P) ∧ (Q → S)) ∧ (S → Q)) with ((R → P) ∧ (Q → S) ∧ (S → Q)) in n3\_47c.

  specialize n4\_32 with (P→R) (R → P) ((Q → S)∧(S → Q)).

  intros n4\_32d.

  replace ((P → R) ∧ (R → P) ∧ (Q → S) ∧ (S → Q)) with (((P → R) ∧ (R → P)) ∧ (Q → S) ∧ (S → Q)) in n3\_47c.

  replace ((P→R) ∧ (R → P)) with (P↔R) in n3\_47c.

  replace ((Q → S) ∧ (S → Q)) with (Q↔S) in n3\_47c.

  replace ((P ∧ Q → R ∧ S) ∧ (R ∧ S → P ∧ Q)) with ((P ∧ Q) ↔ (R ∧ S)) in n3\_47c.

  apply n3\_47c.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_32d.

  replace ((R → P) ∧ (Q → S) ∧ (S → Q)) with (((R → P) ∧ (Q → S)) ∧ (S → Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_32c.

  replace ((R → P) ∧ (Q → S)) with ((Q → S) ∧ (R → P)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply H0.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_32b.

  replace ((P → R) ∧ (Q → S) ∧ (R → P) ∧ (S → Q)) with (((P → R) ∧ (Q → S)) ∧ (R → P) ∧ (S → Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_32a.

  Qed.

Theorem n4\_39 : ∀ P Q R S : Prop,

  ((P ↔ R) ∧ (Q ↔ S)) → ((P ∨ Q) ↔ (R ∨ S)).

Proof.  intros P Q R S.

  specialize n3\_48 with P Q R S.

  intros n3\_48a.

  specialize n3\_48 with R S P Q.

  intros n3\_48b.

  Conj n3\_48a n3\_48b.

  split.

  apply n3\_48a.

  apply n3\_48b.

  specialize n3\_47 with ((P → R) ∧ (Q → S)) ((R → P) ∧ (S → Q)) (P ∨ Q → R ∨ S) (R ∨ S → P ∨ Q).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47a H.

  replace ((P ∨ Q → R ∨ S) ∧ (R ∨ S → P ∨ Q)) with ((P ∨ Q) ↔ (R ∨ S)) in n3\_47a.

  specialize n4\_32 with ((P → R) ∧ (Q → S)) (R → P) (S → Q).

  intros n4\_32a.

  replace (((P → R) ∧ (Q → S)) ∧ (R → P) ∧ (S → Q)) with ((((P → R) ∧ (Q → S)) ∧ (R → P)) ∧ (S → Q)) in n3\_47a.

  specialize n4\_32 with (P → R) (Q → S) (R → P).

  intros n4\_32b.

  replace (((P → R) ∧ (Q → S)) ∧ (R → P)) with ((P → R) ∧ (Q → S) ∧ (R → P)) in n3\_47a.

  specialize n3\_22 with (Q → S) (R → P).

  intros n3\_22a.

  specialize n3\_22 with (R → P) (Q → S).

  intros n3\_22b.

  Conj  n3\_22a n3\_22b.

  split.

  apply n3\_22a.

  apply n3\_22b.

  Equiv H0.

  replace ((Q → S) ∧ (R → P)) with ((R → P) ∧ (Q → S)) in n3\_47a.

  specialize n4\_32 with (P → R) (R → P) (Q → S).

  intros n4\_32c.

  replace ((P → R) ∧ (R → P) ∧ (Q → S)) with (((P → R) ∧ (R → P)) ∧ (Q → S)) in n3\_47a.

  replace ((P → R) ∧ (R → P)) with (P↔R) in n3\_47a.

  specialize n4\_32 with (P↔R) (Q→S) (S→Q).

  intros n4\_32d.

  replace (((P ↔ R) ∧ (Q → S)) ∧ (S → Q)) with ((P ↔ R) ∧ (Q → S) ∧ (S → Q)) in n3\_47a.

  replace ((Q → S) ∧ (S → Q)) with (Q ↔ S) in n3\_47a.

  apply n3\_47a.

  apply Equiv4\_01.

  replace ((P ↔ R) ∧ (Q → S) ∧ (S → Q)) with (((P ↔ R) ∧ (Q → S)) ∧ (S → Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_32d.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_32c.

  replace ((R → P) ∧ (Q → S)) with ((Q → S) ∧ (R → P)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply H0.

  apply Equiv4\_01.

  replace ((P → R) ∧ (Q → S) ∧ (R → P)) with (((P → R) ∧ (Q → S)) ∧ (R → P)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_32b.

  apply EqBi.

  apply n4\_32a.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_4 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∧ (Q ∨ R)) ↔ ((P∧ Q) ∨ (P ∧ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize n3\_2 with P Q.

  intros n3\_2a.

  specialize n3\_2 with P R.

  intros n3\_2b.

  Conj n3\_2a n3\_2b.

  split.

  apply n3\_2a.

  apply n3\_2b.

  specialize Comp3\_43 with P (Q→P∧Q) (R→P∧R).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  specialize n3\_48 with Q R (P∧Q) (P∧R).

  intros n3\_48a.

  Syll Comp3\_43a n3\_48a Sa.

  specialize Imp3\_31 with P (Q∨R) ((P∧ Q) ∨ (P ∧ R)).

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a Sa.

  specialize Simp3\_26 with P Q.

  intros Simp3\_26a.

  specialize Simp3\_26 with P R.

  intros Simp3\_26b.

  Conj Simp3\_26a Simp3\_26b.

  split.

  apply Simp3\_26a.

  apply Simp3\_26b.

  specialize n3\_44 with P (P∧Q) (P∧R).

  intros n3\_44a.

  MP n3\_44a H0.

  specialize Simp3\_27 with P Q.

  intros Simp3\_27a.

  specialize Simp3\_27 with P R.

  intros Simp3\_27b.

  Conj Simp3\_27a Simp3\_27b.

  split.

  apply Simp3\_27a.

  apply Simp3\_27b.

  specialize n3\_48 with (P∧Q) (P∧R) Q R.

  intros n3\_48b.

  MP n3\_48b H1.

  clear H1. clear Simp3\_27a. clear Simp3\_27b.

  Conj n3\_44a n3\_48b.

  split.

  apply n3\_44a.

  apply n3\_48b.

  specialize Comp3\_43 with (P ∧ Q ∨ P ∧ R) P (Q∨R).

  intros Comp3\_43b.

  MP Comp3\_43b H1.

  clear H1. clear H0. clear n3\_44a. clear n3\_48b. clear Simp3\_26a. clear Simp3\_26b.

  Conj Imp3\_31a Comp3\_43b.

  split.

apply Imp3\_31a.

apply Comp3\_43b.

Equiv H0.

apply H0.

apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_41 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∨ (Q ∧ R)) ↔ ((P ∨ Q) ∧ (P ∨ R)).

Proof. intros P Q R.

  specialize Simp3\_26 with Q R.

  intros Simp3\_26a.

  specialize Sum1\_6 with P (Q ∧ R) Q.

  intros Sum1\_6a.

  MP Simp3\_26a Sum1\_6a.

  specialize Simp3\_27 with Q R.

  intros Simp3\_27a.

  specialize Sum1\_6 with P (Q ∧ R) R.

  intros Sum1\_6b.

  MP Simp3\_27a Sum1\_6b.

  clear Simp3\_26a. clear Simp3\_27a.

  Conj Sum1\_6a Sum1\_6b.

  split.

  apply Sum1\_6a.

  apply Sum1\_6b.

  specialize Comp3\_43 with (P ∨ Q ∧ R) (P ∨ Q) (P ∨ R).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  specialize n2\_53 with P Q.

  intros n2\_53a.

  specialize n2\_53 with P R.

  intros n2\_53b.

  Conj n2\_53a n2\_53b.

  split.

  apply n2\_53a.

  apply n2\_53b.

  specialize n3\_47 with (P ∨ Q) (P ∨ R) (~P → Q) (~P → R).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47a H0.

  specialize Comp3\_43 with (~P) Q R.

  intros Comp3\_43b.

  Syll n3\_47a Comp3\_43b Sa.

  specialize n2\_54 with P (Q∧R).

  intros n2\_54a.

  Syll Sa n2\_54a Sb.

  split.

  apply Comp3\_43a.

  apply Sb.

Qed.

Theorem n4\_42 : ∀ P Q : Prop,

  P ↔ ((P ∧ Q) ∨ (P ∧ ~Q)).

Proof. intros P Q.

  specialize n3\_21 with P (Q ∨ ~Q).

  intros n3\_21a.

  specialize n2\_11 with Q.

  intros n2\_11a.

  MP n3\_21a n2\_11a.

  specialize Simp3\_26 with P (Q ∨ ~Q).

  intros Simp3\_26a. clear n2\_11a.

  Conj n3\_21a Simp3\_26a.

  split.

  apply n3\_21a.

  apply Simp3\_26a.

  Equiv H.

  specialize n4\_4 with P Q (~Q).

  intros n4\_4a.

  replace (P ∧ (Q ∨ ~Q)) with P in n4\_4a.

  apply n4\_4a.

  apply EqBi.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_43 : ∀ P Q : Prop,

  P ↔ ((P ∨ Q) ∧ (P ∨ ~Q)).

Proof. intros P Q.

  specialize n2\_2 with P Q.

  intros n2\_2a.

  specialize n2\_2 with P (~Q).

  intros n2\_2b.

  Conj n2\_2a n2\_2b.

  split.

  apply n2\_2a.

  apply n2\_2b.

  specialize Comp3\_43 with P (P∨Q) (P∨~Q).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  specialize n2\_53 with P Q.

  intros n2\_53a.

  specialize n2\_53 with P (~Q).

  intros n2\_53b.

  Conj n2\_53a n2\_53b.

  split.

  apply n2\_53a.

  apply n2\_53b.

  specialize n3\_47 with (P∨Q) (P∨~Q) (~P→Q) (~P→~Q).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47a H0.

  specialize n2\_65 with (~P) Q.

  intros n2\_65a.

  replace (~~P) with P in n2\_65a.

  specialize Imp3\_31 with (~P → Q) (~P → ~Q) (P).

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a n2\_65a.

  Syll n3\_47a Imp3\_31a Sa.

  clear n2\_2a. clear n2\_2b. clear H. clear n2\_53a. clear n2\_53b. clear H0. clear n2\_65a. clear n3\_47a. clear Imp3\_31a.

  Conj Comp3\_43a Sa.

  split.

  apply Comp3\_43a.

  apply Sa.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_13.

Qed.

Theorem n4\_44 : ∀ P Q : Prop,

  P ↔ (P ∨ (P ∧ Q)).

  Proof. intros P Q.

    specialize n2\_2 with P (P∧Q).

    intros n2\_2a.

    specialize n2\_08 with P.

    intros n2\_08a.

    specialize Simp3\_26 with P Q.

    intros Simp3\_26a.

    Conj n2\_08a Simp3\_26a.

    split.

    apply n2\_08a.

    apply Simp3\_26a.

    specialize n3\_44 with P P (P ∧ Q).

    intros n3\_44a.

    MP n3\_44a H.

    clear H. clear n2\_08a. clear Simp3\_26a.

    Conj n2\_2a n3\_44a.

    split.

    apply n2\_2a.

    apply n3\_44a.

    Equiv H.

    apply H.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_45 : ∀ P Q : Prop,

  P ↔ (P ∧ (P ∨ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_2 with (P ∧ P) (P ∧ Q).

  intros n2\_2a.

  replace (P ∧ P ∨ P ∧ Q) with (P ∧ (P ∨ Q)) in n2\_2a.

  replace (P ∧ P) with P in n2\_2a.

  specialize Simp3\_26 with P (P ∨ Q).

  intros Simp3\_26a.

  split.

  apply n2\_2a.

  apply Simp3\_26a.

  apply EqBi.

  apply n4\_24.

  apply EqBi.

  apply n4\_4.

Qed.

Theorem n4\_5 : ∀ P Q : Prop,

  P ∧ Q ↔ ~(~P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_2 with (P ∧ Q).

    intros n4\_2a.

    rewrite Prod3\_01.

    replace (~(~P ∨ ~Q)) with (P ∧ Q).

    apply n4\_2a.

    apply Prod3\_01.

  Qed.

Theorem n4\_51 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∧ Q) ↔ (~P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_5 with P Q.

    intros n4\_5a.

    specialize n4\_12 with (P ∧ Q) (~P ∨ ~Q).

    intros n4\_12a.

    replace ((P ∧ Q ↔ ~(~P ∨ ~Q)) ↔ (~P ∨ ~Q ↔ ~(P ∧ Q))) with ((P ∧ Q ↔ ~(~P ∨ ~Q)) = (~P ∨ ~Q ↔ ~(P ∧ Q))) in n4\_12a.

    replace (P ∧ Q ↔ ~(~P ∨ ~Q)) with (~P ∨ ~Q ↔ ~(P ∧ Q)) in n4\_5a.

    replace (~P ∨ ~Q ↔ ~(P ∧ Q)) with (~(P ∧ Q) ↔ (~P ∨ ~Q)) in n4\_5a.

    apply n4\_5a.

    specialize n4\_21 with (~(P ∧ Q)) (~P ∨ ~Q).

    intros n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply n4\_21.

    apply EqBi.

    apply EqBi.

  Qed.

Theorem n4\_52 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ ~Q) ↔ ~(~P ∨ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_5 with P (~Q).

    intros n4\_5a.

    replace (~~Q) with Q in n4\_5a.

    apply n4\_5a.

    specialize n4\_13 with Q.

    intros n4\_13a.

    apply EqBi.

    apply n4\_13a.

  Qed.

Theorem n4\_53 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ∧ ~Q) ↔ (~P ∨ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_52 with P Q.

    intros n4\_52a.

    specialize n4\_12 with ( P ∧ ~Q) ((~P ∨ Q)).

    intros n4\_12a.

    replace ((P ∧ ~Q ↔ ~(~P ∨ Q)) ↔ (~P ∨ Q ↔ ~(P ∧ ~Q))) with ((P ∧ ~Q ↔ ~(~P ∨ Q)) = (~P ∨ Q ↔ ~(P ∧ ~Q))) in n4\_12a.

    replace (P ∧ ~Q ↔ ~(~P ∨ Q)) with (~P ∨ Q ↔ ~(P ∧ ~Q)) in n4\_52a.

    replace (~P ∨ Q ↔ ~(P ∧ ~Q)) with (~(P ∧ ~Q) ↔ (~P ∨ Q)) in n4\_52a.

    apply n4\_52a.

    specialize n4\_21 with (~(P ∧ ~Q)) (~P ∨ Q).

    intros n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply EqBi.

  Qed.

Theorem n4\_54 : ∀ P Q : Prop,

  (~P ∧ Q) ↔ ~(P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_5 with (~P) Q.

    intros n4\_5a.

    specialize n4\_13 with P.

    intros n4\_13a.

    replace (~~P) with P in n4\_5a.

    apply n4\_5a.

    apply EqBi.

    apply n4\_13a.

  Qed.

Theorem n4\_55 : ∀ P Q : Prop,

  ~(~P ∧ Q) ↔ (P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_54 with P Q.

    intros n4\_54a.

    specialize n4\_12 with (~P ∧ Q) (P ∨ ~Q).

    intros n4\_12a.

    replace (~P ∧ Q ↔ ~(P ∨ ~Q)) with (P ∨ ~Q ↔ ~(~P ∧ Q)) in n4\_54a.

    replace (P ∨ ~Q ↔ ~(~P ∧ Q)) with (~(~P ∧ Q) ↔ (P ∨ ~Q)) in n4\_54a.

    apply n4\_54a.

    specialize n4\_21 with (~(~P ∧ Q)) (P ∨ ~Q).

    intros n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply n4\_21a.

    replace ((~P ∧ Q ↔ ~(P ∨ ~Q)) ↔ (P ∨ ~Q ↔ ~(~P ∧ Q))) with ((~P ∧ Q ↔ ~(P ∨ ~Q)) = (P ∨ ~Q ↔ ~(~P ∧ Q))) in n4\_12a.

    rewrite n4\_12a.

    reflexivity.

    apply EqBi.

    apply EqBi.

  Qed.

Theorem n4\_56 : ∀ P Q : Prop,

  (~P ∧ ~Q) ↔ ~(P ∨ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_54 with P (~Q).

    intros n4\_54a.

    replace (~~Q) with Q in n4\_54a.

    apply n4\_54a.

    apply EqBi.

    apply n4\_13.

  Qed.

Theorem n4\_57 : ∀ P Q : Prop,

  ~(~P ∧ ~Q) ↔ (P ∨ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_56 with P Q.

    intros n4\_56a.

    specialize n4\_12 with (~P ∧ ~Q) (P ∨ Q).

    intros n4\_12a.

    replace (~P ∧ ~Q ↔ ~(P ∨ Q)) with (P ∨ Q ↔ ~(~P ∧ ~Q)) in n4\_56a.

    replace (P ∨ Q ↔ ~(~P ∧ ~Q)) with (~(~P ∧ ~Q) ↔ P ∨ Q) in n4\_56a.

    apply n4\_56a.

    specialize n4\_21 with (~(~P ∧ ~Q)) (P ∨ Q).

    intros n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply n4\_21a.

    replace ((~P ∧ ~Q ↔ ~(P ∨ Q)) ↔ (P ∨ Q ↔ ~(~P ∧ ~Q))) with ((P ∨ Q ↔ ~(~P ∧ ~Q)) ↔ (~P ∧ ~Q ↔ ~(P ∨ Q))) in n4\_12a.

    apply EqBi.

    apply n4\_12a.

    apply EqBi.

    specialize n4\_21 with (P ∨ Q ↔ ~(~P ∧ ~Q)) (~P ∧ ~Q ↔ ~(P ∨ Q)).

    intros n4\_21b.

    apply n4\_21b.

  Qed.

Theorem n4\_6 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ↔ (~P ∨ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_2 with (~P∨ Q).

    intros n4\_2a.

    rewrite Impl1\_01.

    apply n4\_2a.

  Qed.

Theorem n4\_61 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P → Q) ↔ (P ∧ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_6 with P Q.

  intros n4\_6a.

  specialize Trans4\_11 with (P→Q) (~P∨Q).

  intros Trans4\_11a.

  specialize n4\_52 with P Q.

  intros n4\_52a.

  replace ((P → Q) ↔ ~P ∨ Q) with (~(P → Q) ↔ ~(~P ∨ Q)) in n4\_6a.

  replace (~(~P ∨ Q)) with (P ∧ ~Q) in n4\_6a.

  apply n4\_6a.

  apply EqBi.

  apply n4\_52a.

  replace (((P → Q) ↔ ~P ∨ Q) ↔ (~(P → Q) ↔ ~(~P ∨ Q))) with ((~(P → Q) ↔ ~(~P ∨ Q)) ↔ ((P → Q) ↔ ~P ∨ Q)) in Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  Qed.

Theorem n4\_62 : ∀ P Q : Prop,

  (P → ~Q) ↔ (~P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_6 with P (~Q).

    intros n4\_6a.

    apply n4\_6a.

  Qed.

Theorem n4\_63 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P → ~Q) ↔ (P ∧ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n4\_62 with P Q.

    intros n4\_62a.

    specialize Trans4\_11 with (P → ~Q) (~P ∨ ~Q).

    intros Trans4\_11a.

    specialize n4\_5 with P Q.

    intros n4\_5a.

    replace (~(~P ∨ ~Q)) with (P ∧ Q) in Trans4\_11a.

    replace ((P → ~Q) ↔ ~P ∨ ~Q) with ((~(P → ~Q) ↔ P ∧ Q)) in n4\_62a.

    apply n4\_62a.

    replace (((P → ~Q) ↔ ~P ∨ ~Q) ↔ (~(P → ~Q) ↔  P ∧ Q)) with ((~(P → ~Q) ↔  P ∧ Q) ↔ ((P → ~Q) ↔ ~P ∨ ~Q)) in Trans4\_11a.

    apply EqBi.

    apply Trans4\_11a.

    specialize n4\_21 with (~(P → ~Q) ↔ P ∧ Q) ((P → ~Q) ↔ ~P ∨ ~Q).

    intros n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply n4\_21a.

    apply EqBi.

    apply n4\_5a.

  Qed.

Theorem n4\_64 : ∀ P Q : Prop,

  (~P → Q) ↔ (P ∨ Q).

  Proof. intros P Q.

    specialize n2\_54 with P Q.

    intros n2\_54a.

    specialize n2\_53 with P Q.

    intros n2\_53a.

    Conj n2\_54a n2\_53a.

    split.

    apply n2\_54a.

    apply n2\_53a.

    Equiv H.

    apply H.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_65 : ∀ P Q : Prop,

  ~(~P → Q) ↔ (~P ∧ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_64 with P Q.

  intros n4\_64a.

  specialize Trans4\_11 with(~P → Q) (P ∨ Q).

  intros Trans4\_11a.

  specialize n4\_56 with P Q.

  intros n4\_56a.

  replace (((~P → Q) ↔ P ∨ Q) ↔ (~(~P → Q) ↔ ~(P ∨ Q))) with ((~(~P → Q) ↔ ~(P ∨ Q)) ↔ ((~P → Q) ↔ P ∨ Q)) in Trans4\_11a.

  replace ((~P → Q) ↔ P ∨ Q) with (~(~P → Q) ↔ ~(P ∨ Q)) in n4\_64a.

  replace (~(P ∨ Q)) with (~P ∧ ~Q) in n4\_64a.

  apply n4\_64a.

  apply EqBi.

  apply n4\_56a.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  Qed.

Theorem n4\_66 : ∀ P Q : Prop,

  (~P → ~Q) ↔ (P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_64 with P (~Q).

  intros n4\_64a.

  apply n4\_64a.

  Qed.

Theorem n4\_67 : ∀ P Q : Prop,

  ~(~P → ~Q) ↔ (~P ∧ Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_66 with P Q.

  intros n4\_66a.

  specialize Trans4\_11 with (~P → ~Q) (P ∨ ~Q).

  intros Trans4\_11a.

  replace ((~P → ~Q) ↔ P ∨ ~Q) with (~(~P → ~Q) ↔ ~(P ∨ ~Q)) in n4\_66a.

  specialize n4\_54 with P Q.

  intros n4\_54a.

  replace (~(P ∨ ~Q)) with (~P ∧ Q) in n4\_66a.

  apply n4\_66a.

  apply EqBi.

  apply n4\_54a.

  replace (((~P → ~Q) ↔ P ∨ ~Q) ↔ (~(~P → ~Q) ↔ ~(P ∨ ~Q))) with ((~(~P → ~Q) ↔ ~(P ∨ ~Q)) ↔ ((~P → ~Q) ↔ P ∨ ~Q)) in Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  Qed.

Theorem n4\_7 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ↔ (P → (P ∧ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize Comp3\_43 with P P Q.

  intros Comp3\_43a.

  specialize Exp3\_3 with  (P → P) (P → Q) (P → P ∧ Q).

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a Comp3\_43a.

  specialize n2\_08 with P.

  intros n2\_08a.

  MP Exp3\_3a n2\_08a.

  specialize Simp3\_27 with P Q.

  intros Simp3\_27a.

  specialize Syll2\_05 with P (P ∧ Q) Q.

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a Simp3\_26a.

  clear n2\_08a. clear Comp3\_43a. clear Simp3\_27a.

  Conj Syll2\_05a Exp3\_3a.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply Syll2\_05a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_71 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ↔ (P ↔ (P ∧ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_7 with P Q.

  intros n4\_7a.

  specialize n3\_21 with (P→(P∧Q)) ((P∧Q)→P).

  intros n3\_21a.

  replace ((P → P ∧ Q) ∧ (P ∧ Q → P)) with (P↔(P ∧ Q)) in n3\_21a.

  specialize Simp3\_26 with P Q.

  intros Simp3\_26a.

  MP n3\_21a Simp3\_26a.

  specialize Simp3\_26 with (P→(P∧Q)) ((P∧Q)→P).

  intros Simp3\_26b.

  replace ((P → P ∧ Q) ∧ (P ∧ Q → P)) with (P↔(P ∧ Q)) in Simp3\_26b. clear Simp3\_26a.

  Conj n3\_21a Simp3\_26b.

  split.

  apply n3\_21a.

  apply Simp3\_26b.

  Equiv H.

  clear n3\_21a. clear Simp3\_26b.

  Conj n4\_7a H.

  split.

  apply n4\_7a.

  apply H.

  specialize n4\_22 with (P → Q) (P → P ∧ Q) (P ↔ P ∧ Q).

  intros n4\_22a.

  MP n4\_22a H0.

  apply n4\_22a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_72 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ↔ (Q ↔ (P ∨ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize Trans4\_1 with P Q.

  intros Trans4\_1a.

  specialize n4\_71 with (~Q) (~P).

  intros n4\_71a.

  Conj Trans4\_1a n4\_71a.

  split.

  apply Trans4\_1a.

  apply n4\_71a.

  specialize n4\_22 with (P→Q) (~Q→~P) (~Q↔~Q ∧ ~ P).

  intros n4\_22a.

  MP n4\_22a H.

  specialize n4\_21 with (~Q) (~Q ∧ ~P).

  intros n4\_21a.

  Conj n4\_22a n4\_21a.

  split.

  apply n4\_22a.

  apply n4\_21a.

  specialize n4\_22 with (P→Q) (~Q ↔ ~Q ∧ ~P) (~Q ∧ ~P ↔ ~Q).

  intros n4\_22b.

  MP n4\_22b H0.

  specialize n4\_12 with (~Q ∧ ~ P) (Q).

  intros n4\_12a.

  Conj n4\_22b n4\_12a.

  split.

  apply n4\_22b.

  apply n4\_12a.

  specialize n4\_22 with (P → Q) ((~Q ∧ ~ P) ↔ ~Q) (Q ↔ ~(~Q ∧ ~P)).

  intros n4\_22c.

  MP n4\_22b H0.

  specialize n4\_57 with Q P.

  intros n4\_57a.

  replace (~(~Q ∧ ~P)) with (Q ∨ P) in n4\_22c.

  specialize n4\_31 with P Q.

  intros n4\_31a.

  replace (Q ∨ P) with (P ∨ Q) in n4\_22c.

  apply n4\_22c.

  apply EqBi.

  apply n4\_31a.

  apply EqBi.

  replace (~(~Q ∧ ~P) ↔ Q ∨ P) with (Q ∨ P ↔~(~Q ∧ ~P)) in n4\_57a.

  apply n4\_57a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  Qed.

Theorem n4\_73 : ∀ P Q : Prop,

  Q → (P ↔ (P ∧ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_02 with P Q.

  intros n2\_02a.

  specialize n4\_71 with P Q.

  intros n4\_71a.

  replace ((P → Q) ↔ (P ↔ P ∧ Q)) with (((P → Q) → (P ↔ P ∧ Q)) ∧ ((P ↔ P ∧ Q)→(P→Q))) in n4\_71a.

  specialize Simp3\_26 with ((P → Q) → P ↔ P ∧ Q) (P ↔ P ∧ Q → P → Q).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_71a.

  Syll n2\_02a Simp3\_26a Sa.

  apply Sa.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_74 : ∀ P Q : Prop,

  ~P → (Q ↔ (P ∨ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_21 with P Q.

  intros n2\_21a.

  specialize n4\_72 with P Q.

  intros n4\_72a.

  replace (P → Q) with (Q ↔ P ∨ Q) in n2\_21a.

  apply n2\_21a.

  apply EqBi.

  replace ((P → Q) ↔ (Q ↔ P ∨ Q)) with ((Q ↔ P ∨ Q) ↔ (P → Q)) in n4\_72a.

  apply n4\_72a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  Qed.

Theorem n4\_76 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P → Q) ∧ (P → R)) ↔ (P → (Q ∧ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_41 with (~P) Q R.

  intros n4\_41a.

  replace (~P ∨ Q) with (P→Q) in n4\_41a.

  replace (~P ∨ R) with (P→R) in n4\_41a.

  replace (~P ∨ Q ∧ R) with (P → Q ∧ R) in n4\_41a.

  replace ((P → Q ∧ R) ↔ (P → Q) ∧ (P → R)) with ((P → Q) ∧ (P → R) ↔ (P → Q ∧ R)) in n4\_41a.

  apply n4\_41a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  Qed.

Theorem n4\_77 : ∀ P Q R : Prop,

  ((Q → P) ∧ (R → P)) ↔ ((Q ∨ R) → P).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n3\_44 with P Q R.

  intros n3\_44a.

  split.

  apply n3\_44a.

  split.

  specialize n2\_2 with Q R.

  intros n2\_2a.

  Syll n2\_2a H Sa.

  apply Sa.

  specialize Add1\_3 with Q R.

  intros Add1\_3a.

  Syll Add1\_3a H Sb.

  apply Sb.

  Qed. (\*Note that we used the split tactic on a conditional, effectively introducing an assumption for conditional proof. It remains to prove that (AvB)→C and A→(AvB) together imply A→C, and similarly that (AvB)→C and B→(AvB) together imply B→C. This can be proved by Syll, but we need a rule of replacement in the context of ((AvB)→C)→(A→C)/\(B→C).\*)

Theorem n4\_78 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P → Q) ∨ (P → R)) ↔ (P → (Q ∨ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_2 with ((P→Q) ∨ (P → R)).

  intros n4\_2a.

  replace (((P → Q) ∨ (P → R))↔((P → Q) ∨ (P → R))) with (((P → Q) ∨ (P → R))↔((~P ∨ Q) ∨ ~P ∨ R)) in n4\_2a.

  specialize n4\_33 with (~P) Q (~P ∨ R).

  intros n4\_33a.

  replace ((~P ∨ Q) ∨ ~P ∨ R) with (~P ∨ Q ∨ ~P ∨ R) in n4\_2a.

  specialize n4\_31 with (~P) Q.

  intros n4\_31a.

  specialize n4\_37 with (~P∨Q) (Q ∨ ~P) R.

  intros n4\_37a.

  MP n4\_37a n4\_31a.

  replace (Q ∨ ~P ∨ R) with ((Q ∨ ~P) ∨ R) in n4\_2a.

  replace ((Q ∨ ~P) ∨ R) with ((~P ∨ Q) ∨ R) in n4\_2a.

  specialize n4\_33 with (~P) (~P∨Q) R.

  intros n4\_33b.

  replace (~P ∨ (~P ∨ Q) ∨ R) with ((~P ∨ (~P ∨ Q)) ∨ R) in n4\_2a.

  specialize n4\_25 with (~P).

  intros n4\_25a.

  specialize n4\_37 with (~P) (~P ∨ ~P) (Q ∨ R).

  intros n4\_37b.

  MP n4\_37b n4\_25a.

  replace (~P ∨ ~P ∨ Q) with ((~P ∨ ~P) ∨ Q) in n4\_2a.

  replace (((~P ∨ ~P) ∨ Q) ∨ R) with ((~P ∨ ~P) ∨ Q ∨ R) in n4\_2a.

  replace ((~P ∨ ~P) ∨ Q ∨ R) with ((~P) ∨ (Q ∨ R)) in n4\_2a.

  replace (~P ∨ Q ∨ R) with (P → (Q ∨ R)) in n4\_2a.

  apply n4\_2a.

  apply Impl1\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_37b.

  apply n2\_33.

  replace ((~P ∨ ~P) ∨ Q) with (~P ∨ ~P ∨ Q).

  reflexivity.

  apply n2\_33.

  replace ((~P ∨ ~P ∨ Q) ∨ R) with (~P ∨ (~P ∨ Q) ∨ R).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_33b.

  apply EqBi.

  apply n4\_37a.

  replace ((Q ∨ ~P) ∨ R) with (Q ∨ ~P ∨ R).

  reflexivity.

  apply n2\_33.

  apply EqBi.

  apply n4\_33a.

  replace (~P ∨ Q) with (P→Q).

  replace (~P ∨ R) with (P→R).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  apply Impl1\_01.

  Qed.

Theorem n4\_79 : ∀ P Q R : Prop,

  ((Q → P) ∨ (R → P)) ↔ ((Q ∧ R) → P).

  Proof. intros P Q R.

    specialize Trans4\_1 with Q P.

    intros Trans4\_1a.

    specialize Trans4\_1 with R P.

    intros Trans4\_1b.

    Conj Trans4\_1a Trans4\_1b.

    split.

    apply Trans4\_1a.

    apply Trans4\_1b.

    specialize n4\_39 with (Q→P) (R→P) (~P→~Q) (~P→~R).

    intros n4\_39a.

    MP n4\_39a H.

    specialize n4\_78 with (~P) (~Q) (~R).

    intros n4\_78a.

    replace ((~P → ~Q) ∨ (~P → ~R)) with (~P → ~Q ∨ ~R) in n4\_39a.

    specialize Trans2\_15 with P (~Q ∨ ~R).

    intros Trans2\_15a.

    replace (~P → ~Q ∨ ~R) with (~(~Q ∨ ~R) → P) in n4\_39a.

    replace (~(~Q ∨ ~R)) with (Q ∧ R) in n4\_39a.

    apply n4\_39a.

    apply Prod3\_01.

    replace (~(~Q ∨ ~R) → P) with (~P → ~Q ∨ ~R).

    reflexivity.

    apply EqBi.

    split.

    apply Trans2\_15a.

    apply Trans2\_15.

    replace (~P → ~Q ∨ ~R) with ((~P → ~Q) ∨ (~P → ~R)).

    reflexivity.

    apply EqBi.

    apply n4\_78a.

  Qed.

Theorem n4\_8 : ∀ P : Prop,

  (P → ~P) ↔ ~P.

  Proof. intros P.

    specialize Abs2\_01 with P.

    intros Abs2\_01a.

    specialize  n2\_02 with P (~P).

    intros n2\_02a.

    Conj Abs2\_01a n2\_02a.

    split.

    apply Abs2\_01a.

    apply n2\_02a.

    Equiv H.

    apply H.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_81 : ∀ P : Prop,

  (~P → P) ↔ P.

  Proof. intros P.

    specialize n2\_18 with P.

    intros n2\_18a.

    specialize  n2\_02 with (~P) P.

    intros n2\_02a.

    Conj n2\_18a n2\_02a.

    split.

    apply n2\_18a.

    apply n2\_02a.

    Equiv H.

    apply H.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_82 : ∀ P Q : Prop,

  ((P → Q) ∧ (P → ~Q)) ↔ ~P.

  Proof. intros P Q.

    specialize n2\_65 with P Q.

    intros n2\_65a.

    specialize Imp3\_31 with (P→Q) (P→~Q) (~P).

    intros Imp3\_31a.

    MP Imp3\_31a n2\_65a.

    specialize n2\_21 with P Q.

    intros n2\_21a.

    specialize n2\_21 with P (~Q).

    intros n2\_21b.

    Conj n2\_21a n2\_21b.

    split.

    apply n2\_21a.

    apply n2\_21b.

    specialize Comp3\_43 with (~P) (P→Q) (P→~Q).

    intros Comp3\_43a.

    MP Comp3\_43a H.

    clear n2\_65a. clear n2\_21a. clear n2\_21b.

    clear H.

    Conj Imp3\_31a Comp3\_43a.

    split.

    apply Imp3\_31a.

    apply Comp3\_43a.

    Equiv H.

    apply H.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_83 : ∀ P Q : Prop,

  ((P → Q) ∧ (~P → Q)) ↔ Q.

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_61 with P Q.

  intros n2\_61a.

  specialize Imp3\_31 with (P→Q) (~P→Q) (Q).

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a n2\_61a.

  specialize n2\_02 with P Q.

  intros n2\_02a.

  specialize n2\_02 with (~P) Q.

  intros n2\_02b.

  Conj n2\_02a n2\_02b.

  split.

  apply n2\_02a.

  apply n2\_02b.

  specialize Comp3\_43 with Q (P→Q) (~P→Q).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  clear n2\_61a. clear n2\_02a. clear n2\_02b.

  clear H.

  Conj Imp3\_31a Comp3\_43a.

  split.

  apply Imp3\_31a.

  apply Comp3\_43a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_84 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ↔ Q) → ((P → R) ↔ (Q → R)).

  Proof. intros P Q R.

    specialize Syll2\_06 with P Q R.

    intros Syll2\_06a.

    specialize Syll2\_06 with Q P R.

    intros Syll2\_06b.

    Conj Syll2\_06a Syll2\_06b.

    split.

    apply Syll2\_06a.

    apply Syll2\_06b.

    specialize n3\_47 with (P→Q) (Q→P) ((Q→R)→P→R) ((P→R)→Q→R).

    intros n3\_47a.

    MP n3\_47a H.

    replace ((P→Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n3\_47a.

    replace (((Q → R) → P → R) ∧ ((P → R) → Q → R)) with ((Q → R) ↔ (P → R)) in n3\_47a.

    replace ((Q → R) ↔ (P → R)) with ((P→ R) ↔ (Q → R)) in n3\_47a.

    apply n3\_47a.

    apply EqBi.

    apply n4\_21.

    apply Equiv4\_01.

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_85 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ↔ Q) → ((R → P) ↔ (R → Q)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize Syll2\_05 with R P Q.

  intros Syll2\_05a.

  specialize Syll2\_05 with R Q P.

  intros Syll2\_05b.

  Conj Syll2\_05a Syll2\_05b.

  split.

  apply Syll2\_05a.

  apply Syll2\_05b.

  specialize n3\_47 with (P→Q) (Q→P) ((R→P)→R→Q) ((R→Q)→R→P).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47a H.

  replace ((P→Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n3\_47a.

  replace (((R → P) → R → Q) ∧ ((R → Q) → R → P)) with ((R → P) ↔ (R → Q)) in n3\_47a.

  apply n3\_47a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

Qed.

Theorem n4\_86 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ↔ Q) → ((P ↔ R) ↔ (Q ↔ R)).

  Proof. intros P Q R.

  split.

  split.

  replace (P↔Q) with (Q↔P) in H.

  Conj H H0.

  split.

  apply H.

  apply H0.

  specialize n4\_22 with  Q P R.

  intros n4\_22a.

  MP n4\_22a H1.

  replace (Q ↔ R) with ((Q→R) ∧ (R→Q)) in n4\_22a.

  specialize Simp3\_26 with (Q→R) (R→Q).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_22a.

  apply Simp3\_26a.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  replace (P↔R) with (R↔P) in H0.

  Conj H0 H.

  split.

  apply H.

  apply H0.

  replace ((P ↔ Q) ∧ (R ↔ P)) with ((R ↔ P) ∧ (P ↔ Q)) in H1.

  specialize n4\_22 with R P Q.

  intros n4\_22a.

  MP n4\_22a H1.

  replace (R ↔ Q) with ((R→Q) ∧ (Q→R)) in n4\_22a.

  specialize Simp3\_26 with (R→Q) (Q→R).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_22a.

  apply Simp3\_26a.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_3.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  split.

  Conj H H0.

  split.

  apply H.

  apply H0.

  specialize n4\_22 with P Q R.

  intros n4\_22a.

  MP n4\_22a H1.

  replace (P↔R) with ((P→R)∧(R→P)) in n4\_22a.

  specialize Simp3\_26 with (P→R) (R→P).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_22a.

  apply Simp3\_26a.

  apply Equiv4\_01.

  Conj H H0.

  split.

  apply H.

  apply H0.

  specialize n4\_22 with P Q R.

  intros n4\_22a.

  MP n4\_22a H1.

  replace (P↔R) with ((P→R)∧(R→P)) in n4\_22a.

  specialize Simp3\_27 with (P→R) (R→P).

  intros Simp3\_27a.

  MP Simp3\_27a n4\_22a.

  apply Simp3\_27a.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n4\_87 : ∀ P Q R : Prop,

  (((P ∧ Q) → R) ↔ (P → Q → R)) ↔ ((Q → (P → R)) ↔ (Q ∧ P → R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize Exp3\_3 with P Q R.

  intros Exp3\_3a.

  specialize Imp3\_31 with P Q R.

  intros Imp3\_31a.

  Conj Exp3\_3a Imp3\_31a.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply Imp3\_31a.

  Equiv H.

  specialize Exp3\_3 with Q P R.

  intros Exp3\_3b.

  specialize Imp3\_31 with Q P R.

  intros Imp3\_31b.

  Conj Exp3\_3b Imp3\_31b.

  split.

  apply Exp3\_3b.

  apply Imp3\_31b.

  Equiv H0.

  specialize Comm2\_04 with P Q R.

  intros Comm2\_04a.

  specialize Comm2\_04 with Q P R.

  intros Comm2\_04b.

  Conj Comm2\_04a Comm2\_04b.

  split.

  apply Comm2\_04a.

  apply Comm2\_04b.

  Equiv H1.

  clear Exp3\_3a. clear Imp3\_31a. clear Exp3\_3b. clear Imp3\_31b. clear Comm2\_04a. clear Comm2\_04b.

  replace (P∧Q→R) with (P → Q → R).

  replace (Q∧P→R) with (Q → P → R).

  replace (Q→P→R) with (P → Q → R).

  specialize n4\_2 with ((P → Q → R) ↔ (P → Q → R)).

  intros n4\_2a.

  apply n4\_2a.

  apply EqBi.

  apply H1.

  replace (Q→P→R) with (Q∧P→R).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply H0.

  replace (P→Q→R) with (P∧Q→R).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

End No4.