Module No5.

Import No1.

Import No2.

Import No3.

Import No4.

Theorem n5\_1 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ Q) → (P ↔ Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n3\_4 with P Q.

  intros n3\_4a.

  specialize n3\_4 with Q P.

  intros n3\_4b.

  specialize n3\_22 with P Q.

  intros n3\_22a.

  Syll n3\_22a n3\_4b Sa.

  clear n3\_22a. clear n3\_4b.

  Conj n3\_4a Sa.

  split.

  apply n3\_4a.

  apply Sa.

  specialize n4\_76 with (P∧Q) (P→Q) (Q→P).

  intros n4\_76a.

  replace ((P ∧ Q → P → Q) ∧ (P ∧ Q → Q → P)) with (P ∧ Q → (P → Q) ∧ (Q → P)) in H.

  replace ((P→Q)∧(Q→P)) with (P↔Q) in H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  replace (P ∧ Q → (P → Q) ∧ (Q → P)) with ((P ∧ Q → P → Q) ∧ (P ∧ Q → Q → P)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_76a.

  Qed. (\*Note that n4\_76 is not cited, but it is used to move from ((a→b) ∧  (a→c)) to (a→ (b ∧ c)).\*)

Theorem n5\_11 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ∨ (~P → Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_5 with P Q.

  intros n2\_5a.

  specialize n2\_54 with ((P → Q)) (~ P → Q).

  intros n2\_54a.

  MP n2\_54a n2\_5a.

  apply n2\_54a.

  Qed.

Theorem n5\_12 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ∨ (P → ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_51 with P Q.

  intros n2\_51a.

  specialize n2\_54 with ((P → Q)) (P → ~ Q).

  intros n2\_54a.

  MP n2\_54a n2\_5a.

  apply n2\_54a.

  Qed.

Theorem n5\_13 : ∀ P Q : Prop,

  (P → Q) ∨ (Q → P).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_521 with P Q.

  intros n2\_521a.

  replace (~ (P → Q) → Q → P) with (~~ (P → Q) ∨ (Q → P)) in n2\_521a.

  replace (~~(P→Q)) with (P→Q) in n2\_521a.

  apply n2\_521a.

  apply EqBi.

  apply n4\_13.

  replace (~~ (P → Q) ∨ (Q → P)) with (~ (P → Q) → Q → P).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  Qed. (\*n4\_13 is not cited, but is needed for double negation elimination.\*)

Theorem n5\_14 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → Q) ∨ (Q → R).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_02 with P Q.

  intros n2\_02a.

  specialize Trans2\_16 with Q (P→Q).

  intros Trans2\_16a.

  MP Trans2\_16a n2\_02a.

  specialize n2\_21 with Q R.

  intros n2\_21a.

  Syll Trans2\_16a n2\_21a Sa.

  replace (~(P→Q)→(Q→R)) with (~~(P→Q)∨(Q→R)) in Sa.

  replace (~~(P→Q)) with (P→Q) in Sa.

  apply Sa.

  apply EqBi.

  apply n4\_13.

  replace (~~(P→Q)∨(Q→R)) with (~(P→Q)→(Q→R)).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  Qed.

Theorem n5\_15 : ∀ P Q : Prop,

  (P ↔ Q) ∨ (P ↔ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_61 with P Q.

  intros n4\_61a.

  replace (~ (P → Q) ↔ P ∧ ~ Q) with ((~ (P → Q) → P ∧ ~ Q) ∧ ((P ∧ ~ Q) → ~ (P → Q))) in n4\_61a.

  specialize Simp3\_26 with (~ (P → Q) → P ∧ ~ Q) ((P ∧ ~ Q) → ~ (P → Q)).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_61a.

  specialize n5\_1 with P (~Q).

  intros n5\_1a.

  Syll Simp3\_26a n5\_1a Sa.

  specialize n2\_54 with (P→Q) (P ↔ ~Q).

  intros n2\_54a.

  MP n2\_54a Sa.

  specialize n4\_61 with Q P.

  intros n4\_61b.

  replace ((~(Q → P)) ↔ (Q ∧ ¬ P)) with (((~(Q → P)) → (Q ∧ ¬ P)) ∧ ((Q ∧ ¬ P) → (~(Q → P)))) in n4\_61b.

  specialize Simp3\_26 with (~(Q → P)→ (Q ∧ ¬ P)) ((Q ∧ ¬ P)→ (~(Q → P))).

  intros Simp3\_26b.

  MP Simp3\_26b n4\_61b.

  specialize n5\_1 with Q (~P).

  intros n5\_1b.

  Syll Simp3\_26b n5\_1b Sb.

  specialize n4\_12 with P Q.

  intros n4\_12a.

  replace (Q↔~P) with (P↔~Q) in Sb.

  specialize n2\_54 with (Q→P) (P↔~Q).

  intros n2\_54b.

  MP n2\_54b Sb.

  clear n4\_61a. clear Simp3\_26a. clear n5\_1a. clear n2\_54a. clear n4\_61b. clear Simp3\_26b. clear n5\_1b. clear n4\_12a. clear n2\_54b.

  replace (¬ (P → Q) → P ↔ ¬ Q) with (~~ (P → Q) ∨ (P ↔ ¬ Q)) in Sa.

  replace (~~(P→Q)) with (P→Q) in Sa.

  replace (¬ (Q → P) → (P ↔ ~Q)) with (~~(Q → P) ∨ (P ↔ ~Q)) in Sb.

  replace (~~(Q→P)) with (Q→P) in Sb.

  Conj Sa Sb.

  split.

  apply Sa.

  apply Sb.

  specialize n4\_41 with (P↔~Q) (P→Q) (Q→P).

  intros n4\_41a.

  replace ((P → Q) ∨ (P ↔ ¬ Q)) with ((P ↔ ¬ Q) ∨ (P → Q)) in H.

  replace ((Q → P) ∨ (P ↔ ¬ Q)) with ((P ↔ ¬ Q) ∨ (Q → P)) in H.

  replace (((P ↔ ¬ Q) ∨ (P → Q)) ∧ ((P ↔ ¬ Q) ∨ (Q → P))) with ((P ↔ ¬ Q) ∨ (P → Q) ∧ (Q → P)) in H.

  replace ((P→Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in H.

  replace ((P ↔ ¬ Q) ∨ (P ↔ Q)) with ((P ↔ Q) ∨ (P ↔ ¬ Q)) in H.

  apply H.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_41a.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_13.

  replace (~~(Q → P) ∨ (P ↔ ~Q)) with (¬ (Q → P) → (P ↔ ~Q)).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_13.

  replace (~~ (P → Q) ∨ (P ↔ ¬ Q)) with (¬ (P → Q) → P ↔ ¬ Q).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_12a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_16 : ∀ P Q : Prop,

  ~((P ↔ Q) ∧ (P ↔ ~Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize Simp3\_26 with ((P→Q)∧ (P → ¬ Q)) (Q→P).

  intros Simp3\_26a.

  specialize n2\_08 with ((P ↔ Q) ∧ (P → ~Q)).

  intros n2\_08a.

  replace (((P → Q) ∧ (P → ¬ Q)) ∧ (Q → P)) with ((P → Q) ∧ ((P → ¬ Q) ∧ (Q → P))) in Simp3\_26a.

  replace ((P → ¬ Q) ∧ (Q → P)) with ((Q → P) ∧ (P → ¬ Q)) in Simp3\_26a.

  replace ((P→Q) ∧ (Q → P)∧ (P → ~Q)) with (((P→Q) ∧ (Q → P)) ∧ (P → ~Q)) in Simp3\_26a.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in Simp3\_26a.

  Syll n2\_08a Simp3\_26a Sa.

  specialize n4\_82 with P Q.

  intros n4\_82a.

  replace ((P → Q) ∧ (P → ¬ Q)) with (~P) in Sa.

  specialize Simp3\_27 with (P→Q) ((Q→P)∧ (P → ¬ Q)).

  intros Simp3\_27a.

  replace ((P→Q) ∧ (Q → P)∧ (P → ~Q)) with (((P→Q) ∧ (Q → P)) ∧ (P → ~Q)) in Simp3\_27a.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in Simp3\_27a.

  specialize Syll3\_33 with Q P (~Q).

  intros Syll3\_33a.

  Syll Simp3\_27a Syll2\_06a Sb.

  specialize Abs2\_01 with Q.

  intros Abs2\_01a.

  Syll Sb Abs2\_01a Sc.

  clear Sb. clear Simp3\_26a. clear n2\_08a. clear n4\_82a. clear Simp3\_27a. clear Syll3\_33a. clear Abs2\_01a.

  Conj Sa Sc.

  split.

  apply Sa.

  apply Sc.

  specialize Comp3\_43 with ((P ↔ Q) ∧ (P → ¬ Q)) (~P) (~Q).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  specialize n4\_65 with Q P.

  intros n4\_65a.

  replace (¬ Q ∧ ¬ P) with (¬ P ∧ ¬ Q) in n4\_65a.

  replace (¬ P ∧ ¬ Q) with (~(~Q→P)) in Comp3\_43a.

  specialize Exp3\_3 with (P↔Q) (P→~Q) (~(~Q→P)).

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a Comp3\_43a.

  replace ((P→~Q)→~(~Q→P)) with (~(P→~Q)∨~(~Q→P)) in Exp3\_3a.

  specialize n4\_51 with (P→~Q) (~Q→P).

  intros n4\_51a.

  replace (¬ (P → ¬ Q) ∨ ¬ (¬ Q → P)) with (¬ ((P → ¬ Q) ∧ (¬ Q → P))) in Exp3\_3a.

  replace ((P→~Q) ∧ (~ Q → P)) with (P↔~Q) in Exp3\_3a.

  replace ((P↔Q)→~(P↔~Q)) with (~(P↔Q)∨~(P↔~Q)) in Exp3\_3a.

  specialize n4\_51 with (P↔Q) (P↔~Q).

  intros n4\_51b.

  replace (¬ (P ↔ Q) ∨ ¬ (P ↔ ¬ Q)) with (¬ ((P ↔ Q) ∧ (P ↔ ¬ Q))) in Exp3\_3a.

  apply Exp3\_3a.

  apply EqBi.

  apply n4\_51b.

  replace (¬ (P ↔ Q) ∨ ¬ (P ↔ ¬ Q)) with (P ↔ Q → ¬ (P ↔ ¬ Q)).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_51a.

  replace (¬ (P → ¬ Q) ∨ ¬ (¬ Q → P)) with ((P → ¬ Q) → ¬ (¬ Q → P)).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_65a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_32.

  replace (¬ P) with ((P → Q) ∧ (P → ¬ Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_82a.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_32.

  apply EqBi.

  apply n4\_3.

  replace ((P → Q) ∧ (P → ¬ Q) ∧ (Q → P)) with (((P → Q) ∧ (P → ¬ Q)) ∧ (Q → P)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_32.

  Qed.

Theorem n5\_17 : ∀ P Q : Prop,

  ((P ∨ Q) ∧ ~(P ∧ Q)) ↔ (P ↔ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_64 with Q P.

  intros n4\_64a.

  specialize n4\_21 with (Q∨P) (~Q→P).

  intros n4\_21a.

  replace ((~Q→P)↔(Q∨P)) with ((Q∨P)↔(~Q→P)) in n4\_64a.

  replace (Q∨P) with (P∨Q) in n4\_64a.

  specialize n4\_63 with P Q.

  intros n4\_63a.

  replace (¬ (P → ¬ Q) ↔ P ∧ Q) with (P ∧ Q ↔ ¬ (P → ¬ Q)) in n4\_63a.

  specialize Trans4\_11 with (P∧Q) (~(P→~Q)).

  intros Trans4\_11a.

  replace (~~(P→~Q)) with (P→~Q) in Trans4\_11a.

  replace (P ∧ Q ↔ ¬ (P → ¬ Q)) with (¬ (P ∧ Q) ↔ (P → ¬ Q)) in n4\_63a.

  clear Trans4\_11a. clear n4\_21a.

  Conj n4\_64a n4\_63a.

  split.

  apply n4\_64a.

  apply n4\_63a.

  specialize n4\_38 with (P ∨ Q) (¬ (P ∧ Q)) (¬ Q → P) (P → ¬ Q).

  intros n4\_38a.

  MP n4\_38a H.

  replace ((~Q→P) ∧ (P → ~Q)) with (~Q↔P) in n4\_38a.

  specialize n4\_21 with P (~Q).

  intros n4\_21b.

  replace (~Q↔P) with (P↔~Q) in n4\_38a.

  apply n4\_38a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21b.

  apply Equiv4\_01.

  replace (¬ (P ∧ Q) ↔ (P → ¬ Q)) with (P ∧ Q ↔ ¬ (P → ¬ Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply n4\_13.

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_21a.

  Qed.

Theorem n5\_18 : ∀ P Q : Prop,

  (P ↔ Q) ↔ ~(P ↔ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_15 with P Q.

  intros n5\_15a.

  specialize n5\_16 with P Q.

  intros n5\_16a.

  Conj n5\_15a n5\_16a.

  split.

  apply n5\_15a.

  apply n5\_16a.

  specialize n5\_17 with (P↔Q) (P↔~Q).

  intros n5\_17a.

  replace ((P ↔ Q) ↔ ¬ (P ↔ ¬ Q)) with (((P ↔ Q) ∨ (P ↔ ¬ Q)) ∧ ¬ ((P ↔ Q) ∧ (P ↔ ¬ Q))).

  apply H.

  apply EqBi.

  apply n5\_17a.

  Qed.

Theorem n5\_19 : ∀ P : Prop,

  ~(P ↔ ~P).

  Proof. intros P.

  specialize n5\_18 with P P.

  intros n5\_18a.

  specialize n4\_2 with P.

  intros n4\_2a.

  replace (~(P↔~P)) with (P↔P).

  apply n4\_2a.

  apply EqBi.

  apply n5\_18a.

  Qed.

Theorem n5\_21 : ∀ P Q : Prop,

  (~P ∧ ~Q) → (P ↔ Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_1 with (~P) (~Q).

  intros n5\_1a.

  specialize Trans4\_11 with P Q.

  intros Trans4\_11a.

  replace (~P↔~Q) with (P↔Q) in n5\_1a.

  apply n5\_1a.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  Qed.

Theorem n5\_22 : ∀ P Q : Prop,

  ~(P ↔ Q) ↔ ((P ∧ ~Q) ∨ (Q ∧ ~P)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_61 with P Q.

  intros n4\_61a.

  specialize n4\_61 with Q P.

  intros n4\_61b.

  Conj n4\_61a n4\_61b.

  split.

  apply n4\_61a.

  apply n4\_61b.

  specialize n4\_39 with (~(P → Q)) (~(Q → P)) (P ∧ ~Q) (Q ∧ ~P).

  intros n4\_39a.

  MP n4\_39a H.

  specialize n4\_51 with (P→Q) (Q→P).

  intros n4\_51a.

  replace (~(P → Q) ∨ ~(Q → P)) with (~((P → Q) ∧ (Q → P))) in n4\_39a.

  replace ((P → Q) ∧ (Q → P)) with (P↔Q) in n4\_39a.

  apply n4\_39a.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_51a.

  Qed.

Theorem n5\_23 : ∀ P Q : Prop,

  (P ↔ Q) ↔ ((P ∧ Q) ∨ (~P ∧ ~Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_18 with P Q.

  intros n5\_18a.

  specialize n5\_22 with P (~Q).

  intros n5\_22a.

  specialize n4\_13 with Q.

  intros n4\_13a.

  replace (~(P↔~Q)) with ((P ∧ ~~Q) ∨ (~Q ∧ ~P)) in n5\_18a.

  replace (~~Q) with Q in n5\_18a.

  replace (~Q ∧ ~P) with (~P ∧ ~Q) in n5\_18a.

  apply n5\_18a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*with (~P) (~Q)\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_13a.

  replace (P∧~~Q∨~Q∧~P) with (~(P↔~Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n5\_22a.

  Qed. (\*The proof sketch in Principia offers n4\_36, but we found it far simpler to simply use the commutativity of conjunction (n4\_3).\*)

Theorem n5\_24 : ∀ P Q : Prop,

  ~((P ∧ Q) ∨ (~P ∧ ~Q)) ↔ ((P ∧ ~Q) ∨ (Q ∧ ~P)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_22 with P Q.

  intros n5\_22a.

  specialize n5\_23 with P Q.

  intros n5\_23a.

  replace ((P↔Q)↔((P∧ Q) ∨(~P ∧ ~Q))) with ((~(P↔Q)↔~((P∧ Q) ∨(~P ∧ ~Q)))) in n5\_23a.

  replace (~(P↔Q)) with (~((P ∧ Q) ∨ (~P ∧ ~Q))) in n5\_22a.

  apply n5\_22a.

  replace (~((P ∧ Q) ∨ (~P ∧ ~Q))) with (~(P ↔ Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n5\_23a.

  replace (~(P ↔ Q) ↔ ~(P ∧ Q ∨ ~P ∧ ~Q)) with ((P ↔ Q) ↔ P ∧ Q ∨ ~P ∧ ~Q).

  reflexivity.

  specialize Trans4\_11 with (P↔Q) (P ∧ Q ∨ ~P ∧ ~Q).

  intros Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  Qed. (\*Note that Trans4\_11 is not cited explicitly.\*)

Theorem n5\_25 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) ↔ ((P → Q) → Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_62 with P Q.

  intros n2\_62a.

  specialize n2\_68 with P Q.

  intros n2\_68a.

  Conj n2\_62a n2\_68a.

  split.

  apply n2\_62a.

  apply n2\_68a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_3 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∧ Q) → R) ↔ ((P ∧ Q) → (P ∧ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize Comp3\_43 with (P ∧ Q) P R.

  intros Comp3\_43a.

  specialize Exp3\_3 with (P ∧ Q → P) (P ∧ Q →R) (P ∧ Q → P ∧ R).

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a Comp3\_43a.

  specialize Simp3\_26 with P Q.

  intros Simp3\_26a.

  MP Exp3\_3a Simp3\_26a.

  specialize Syll2\_05 with (P ∧ Q) (P ∧ R) R.

  intros Syll2\_05a.

  specialize Simp3\_27 with P R.

  intros Simp3\_27a.

  MP Syll2\_05a Simp3\_27a.

  clear Comp3\_43a. clear Simp3\_27a. clear Simp3\_26a.

  Conj Exp3\_3a Syll2\_05a.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply Syll2\_05a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed. (\*Note that Exp is not cited in the proof sketch, but seems necessary.\*)

Theorem n5\_31 : ∀ P Q R : Prop,

  (R ∧ (P → Q)) → (P → (Q ∧ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize Comp3\_43 with P Q R.

  intros Comp3\_43a.

  specialize n2\_02 with P R.

  intros n2\_02a.

  replace ((P→Q) ∧ (P→R)) with ((P→R) ∧ (P→Q)) in Comp3\_43a.

  specialize Exp3\_3 with (P→R) (P→Q) (P→(Q ∧ R)).

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a Comp3\_43a.

  Syll n2\_02a Exp3\_3a Sa.

  specialize Imp3\_31 with R (P→Q) (P→(Q ∧ R)).

  intros Imp3\_31a.

  MP Imp3\_31a Sa.

  apply Imp3\_31a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*with (P→R)∧(P→Q)).\*)

  Qed. (\*Note that Exp, Imp, and n4\_3 are not cited in the proof sketch.\*)

Theorem n5\_32 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → (Q ↔ R)) ↔ ((P ∧ Q) ↔ (P ∧ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_76 with P (Q→R) (R→Q).

  intros n4\_76a.

  specialize Exp3\_3 with P Q R.

  intros Exp3\_3a.

  specialize Imp3\_31 with P Q R.

  intros Imp3\_31a.

  Conj Exp3\_3a Imp3\_31a.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply Imp3\_31a.

  Equiv H.

  specialize Exp3\_3 with P R Q.

  intros Exp3\_3b.

  specialize Imp3\_31 with P R Q.

  intros Imp3\_31b.

  Conj Exp3\_3b Imp3\_31b.

  split.

  apply Exp3\_3b.

  apply Imp3\_31b.

  Equiv H0.

  specialize n5\_3 with P Q R.

  intros n5\_3a.

  specialize n5\_3 with P R Q.

  intros n5\_3b.

  replace (P→Q→R) with (P∧Q→R) in n4\_76a.

  replace (P∧Q→R) with (P∧Q→P∧R) in n4\_76a.

  replace (P→R→Q) with (P∧R→Q) in n4\_76a.

  replace (P∧R→Q) with (P∧R→P∧Q) in n4\_76a.

  replace ((P∧Q→P∧R)∧(P∧R→P∧Q)) with ((P∧Q)↔(P∧R)) in n4\_76a.

  replace ((P∧Q ↔ P∧R)↔(P→(Q→R)∧(R→Q))) with ((P→(Q→R)∧(R→Q))↔(P∧Q ↔ P∧R)) in n4\_76a.

  replace ((Q→R)∧(R→Q)) with (Q↔R) in n4\_76a.

  apply n4\_76a.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*to commute the biconditional to get the theorem.\*)

  apply Equiv4\_01.

  replace (P ∧ R → P ∧ Q) with (P ∧ R → Q).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n5\_3b.

  apply EqBi.

  apply H0.

  replace (P ∧ Q → P ∧ R) with (P ∧ Q → R).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n5\_3a.

  apply EqBi.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_33 : ∀ P Q R : Prop,

  (P ∧ (Q → R)) ↔ (P ∧ ((P ∧ Q) → R)).

  Proof. intros P Q R.

    specialize n5\_32 with P (Q→R) ((P∧Q)→R).

    intros n5\_32a.

    replace ((P→(Q→R)↔(P∧Q→R))↔(P∧(Q→R)↔P∧(P∧Q→R))) with (((P→(Q→R)↔(P∧Q→R))→(P∧(Q→R)↔P∧(P∧Q→R)))∧((P∧(Q→R)↔P∧(P∧Q→R)→(P→(Q→R)↔(P∧Q→R))))) in n5\_32a.

    specialize Simp3\_26 with ((P→(Q→R)↔(P∧Q→R))→(P∧(Q→R)↔P∧(P∧Q→R))) ((P∧(Q→R)↔P∧(P∧Q→R)→(P→(Q→R)↔(P∧Q→R)))). (\*Not cited.\*)

    intros Simp3\_26a.

    MP Simp3\_26a n5\_32a.

    specialize n4\_73 with Q P.

    intros n4\_73a.

    specialize n4\_84 with Q (Q∧P) R.

    intros n4\_84a.

    Syll n4\_73a n4\_84a Sa.

    replace (Q∧P) with (P∧Q) in Sa.

    MP Simp3\_26a Sa.

    apply Simp3\_26a.

    apply EqBi.

    apply n4\_3. (\*Not cited.\*)

    apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_35 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P → Q) ∧ (P → R)) → (P → (Q ↔ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize Comp3\_43 with P Q R.

  intros Comp3\_43a.

  specialize n5\_1 with Q R.

  intros n5\_1a.

  specialize Syll2\_05 with P (Q∧R) (Q↔R).

  intros Syll2\_05a.

  MP Syll2\_05a n5\_1a.

  Syll Comp3\_43a Syll2\_05a Sa.

  apply Sa.

  Qed.

Theorem n5\_36 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∧ (P ↔ Q)) ↔ (Q ∧ (P ↔ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_32 with (P↔Q) P Q.

  intros n5\_32a.

  specialize n2\_08 with (P↔Q).

  intros n2\_08a.

  replace (P↔Q→P↔Q) with ((P↔Q)∧P↔(P↔Q)∧Q) in n2\_08a.

  replace ((P↔Q)∧P) with (P∧(P↔Q)) in n2\_08a.

  replace ((P↔Q)∧Q) with (Q∧(P↔Q)) in n2\_08a.

  apply n2\_08a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3.

  apply EqBi.

  apply n4\_3.

  replace ((P ↔ Q) ∧ P ↔ (P ↔ Q) ∧ Q) with (P ↔ Q → P ↔ Q).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n5\_32a.

  Qed. (\*The proof sketch cites Ass3\_35 and n4\_38. Since I couldn't decipher how that proof would go, I used a different one invoking other theorems.\*)

Theorem n5\_4 : ∀ P Q : Prop,

  (P → (P → Q)) ↔ (P → Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n2\_43 with P Q.

  intros n2\_43a.

  specialize n2\_02 with (P) (P→Q).

  intros n2\_02a.

  Conj n2\_43a n2\_02a.

  split.

  apply n2\_43a.

  apply n2\_02a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_41 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P → Q) → (P → R)) ↔ (P → Q → R).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n2\_86 with P Q R.

  intros n2\_86a.

  specialize n2\_77 with P Q R.

  intros n2\_77a.

  Conj n2\_86a n2\_77a.

  split.

  apply n2\_86a.

  apply n2\_77a.

  Equiv H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_42 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → Q → R) ↔ (P → Q → P ∧ R).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n5\_3 with P Q R.

  intros n5\_3a.

  specialize n4\_87 with P Q R.

  intros n4\_87a.

  replace ((P∧Q)→R) with (P→Q→R) in n5\_3a.

  specialize n4\_87 with P Q (P∧R).

  intros n4\_87b.

  replace ((P∧Q)→(P∧R)) with (P→Q→(P∧R)) in n5\_3a.

  apply n5\_3a.

  specialize Imp3\_31 with P Q (P∧R).

  intros Imp3\_31b.

  specialize Exp3\_3 with P Q (P∧R).

  intros Exp3\_3b.

  Conj Imp3\_31b Exp3\_3b.

  split.

  apply Imp3\_31b.

  apply Exp3\_3b.

  Equiv H.

  apply EqBi.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  specialize Imp3\_31 with P Q R.

  intros Imp3\_31a.

  specialize Exp3\_3 with P Q R.

  intros Exp3\_3a.

  Conj Imp3\_31a Exp3\_3.

  split.

  apply Imp3\_31a.

  apply Exp3\_3a.

  Equiv H.

  apply EqBi.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  Qed. (\*The law n4\_87 is really unwieldy to use in Coq. It is actually easier to introduce the subformula of the importation-exportation law required and apply that biconditional. It may be worthwhile in later parts of PM to prove a derived rule that allows us to manipulate a biconditional's subformulas that are biconditionals.\*)

Theorem n5\_44 : ∀ P Q R : Prop,

  (P→Q) → ((P → R) ↔ (P → (Q ∧ R))).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_76 with P Q R.

  intros n4\_76a.

  replace ((P→Q)∧(P→R)↔(P→Q∧R)) with (((P→Q)∧(P→R)→(P→Q∧R))∧((P→Q∧R)→(P→Q)∧(P→R))) in n4\_76a.

  specialize Simp3\_26 with ((P→Q)∧(P→R)→(P→Q∧R)) ((P→Q∧R)→(P→Q)∧(P→R)).

  intros Simp3\_26a. (\*Not cited.\*)

  MP Simp3\_26a n4\_76a.

  specialize Exp3\_3 with (P→Q) (P→R) (P→Q∧R).

  intros Exp3\_3a. (\*Not cited.\*)

  MP Exp3\_3a Simp3\_26a.

  specialize Simp3\_27 with ((P→Q)∧(P→R)→(P→Q∧R)) ((P→Q∧R)→(P→Q)∧(P→R)).

  intros Simp3\_27a. (\*Not cited.\*)

  MP Simp3\_27a n4\_76a.

  specialize Simp3\_26 with (P→R) (P→Q).

  intros Simp3\_26b.

  replace ((P→Q)∧(P→R)) with ((P→R)∧(P→Q)) in Simp3\_27a.

  Syll Simp3\_27a Simp3\_26b Sa.

  specialize n2\_02 with (P→Q) ((P→Q∧R)→P→R).

  intros n2\_02a. (\*Not cited.\*)

  MP n2\_02a Sa.

  clear Sa. clear Simp3\_26b. clear Simp3\_26a. clear n4\_76a. clear Simp3\_27a.

  Conj Exp3\_3a n2\_02a.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply n2\_02a.

  specialize n4\_76 with (P→Q) ((P→R)→(P→(Q∧R))) ((P→(Q∧R))→(P→R)).

  intros n4\_76b.

  replace (((P→Q)→(P→R)→P→Q∧R)∧((P→Q)→(P→Q∧R)→P→R)) with ((P→Q)→((P→R)→P→Q∧R)∧((P→Q∧R)→P→R)) in H.

  replace (((P→R)→P→Q∧R)∧((P→Q∧R)→P→R)) with ((P→R)↔(P→Q∧R)) in H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  replace ((P→Q)→((P→R)→P→Q∧R)∧((P→Q∧R)→P→R)) with (((P→Q)→(P→R)→P→Q∧R)∧((P→Q)→(P→Q∧R)→P→R)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_76b.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited.\*)

  apply Equiv4\_01.

  Qed. (\*This proof does not use either n5\_3 or n5\_32. It instead uses four propositions not cited in the proof sketch, plus a second use of n4\_76.\*)

Theorem n5\_5 : ∀ P Q : Prop,

  P → ((P → Q) ↔ Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize Ass3\_35 with P Q.

  intros Ass3\_35a.

  specialize Exp3\_3 with P (P→Q) Q.

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a Ass3\_35a.

  specialize n2\_02 with P Q.

  intros n2\_02a.

  specialize Exp3\_3 with P Q (P→Q).

  intros Exp3\_3b.

  specialize n3\_42 with P Q (P→Q). (\*Not mentioned explicitly.\*)

  intros n3\_42a.

  MP n3\_42a n2\_02a.

  MP Exp3\_3b n3\_42a.

  clear n3\_42a. clear n2\_02a. clear Ass3\_35a.

  Conj Exp3\_3a Exp3\_3b.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply Exp3\_3b.

  specialize n3\_47 with P P ((P→Q)→Q) (Q→(P→Q)).

  intros n3\_47a.

  MP n3\_47a H.

  replace (P∧P) with P in n3\_47a.

  replace (((P→Q)→Q)∧(Q→(P→Q))) with ((P→Q)↔Q) in n3\_47a.

  apply n3\_47a.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_24. (\*with P.\*)

  Qed.

Theorem n5\_501 : ∀ P Q : Prop,

  P → (Q ↔ (P ↔ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_1 with P Q.

  intros n5\_1a.

  specialize Exp3\_3 with P Q (P↔Q).

  intros Exp3\_3a.

  MP Exp3\_3a n5\_1a.

  specialize Ass3\_35 with P Q.

  intros Ass3\_35a.

  specialize Simp3\_26 with (P∧(P→Q)) (Q→P).

  intros Simp3\_26a. (\*Not cited.\*)

  Syll Simp3\_26a Ass3\_35a Sa.

  replace ((P∧(P→Q))∧(Q→P)) with (P∧((P→Q)∧(Q→P))) in Sa.

  replace ((P→Q)∧(Q→P)) with (P↔Q) in Sa.

  specialize Exp3\_3 with P (P↔Q) Q.

  intros Exp3\_3b.

  MP Exp3\_3b Sa.

  clear n5\_1a. clear Ass3\_35a. clear Simp3\_26a. clear Sa.

  Conj Exp3\_3a Exp3\_3b.

  split.

  apply Exp3\_3a.

  apply Exp3\_3b.

  specialize n4\_76 with P (Q→(P↔Q)) ((P↔Q)→Q).

  intros n4\_76a. (\*Not cited.\*)

  replace ((P→Q→P↔Q)∧(P→P↔Q→Q)) with ((P→(Q→P↔Q)∧(P↔Q→Q))) in H.

  replace ((Q→(P↔Q))∧((P↔Q)→Q)) with (Q↔(P↔Q)) in H.

  apply H.

  apply Equiv4\_01.

  replace (P→(Q→P↔Q)∧(P↔Q→Q)) with ((P→Q→P↔Q)∧(P→P↔Q→Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_76a.

  apply Equiv4\_01.

  replace (P∧(P→Q)∧(Q→P)) with ((P∧(P→Q))∧(Q→P)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_32. (\*Not cited.\*)

  Qed.

Theorem n5\_53 : ∀ P Q R S : Prop,

  (((P ∨ Q) ∨ R) → S) ↔ (((P → S) ∧ (Q → S)) ∧ (R → S)).

  Proof. intros P Q R S.

  specialize n4\_77 with S (P∨Q) R.

  intros n4\_77a.

  specialize n4\_77 with S P Q.

  intros n4\_77b.

  replace (P ∨ Q → S) with ((P→S)∧(Q→S)) in n4\_77a.

  replace ((((P→S)∧(Q→S))∧(R→S))↔(((P∨Q)∨R)→S)) with ((((P∨Q)∨R)→S)↔(((P→S)∧(Q→S))∧(R→S))) in n4\_77a.

  apply n4\_77a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_77b.

  Qed.

Theorem n5\_54 : ∀ P Q : Prop,

  ((P ∧ Q) ↔ P) ∨ ((P ∧ Q) ↔ Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_73 with P Q.

  intros n4\_73a.

  specialize n4\_44 with Q P.

  intros n4\_44a.

  specialize Trans2\_16 with Q (P↔(P∧Q)).

  intros Trans2\_16a.

  MP n4\_73a Trans2\_16a.

  specialize Trans4\_11 with Q (Q∨(P∧Q)).

  intros Trans4\_11a.

  replace (Q∧P) with (P∧Q) in n4\_44a.

  replace (Q↔Q∨P∧Q) with (~Q↔~(Q∨P∧Q)) in n4\_44a.

  replace (~Q) with (~(Q∨P∧Q)) in Trans2\_16a.

  replace (~(Q∨P∧Q)) with (~Q∧~(P∧Q)) in Trans2\_16a.

  specialize n5\_1 with (~Q) (~(P∧Q)).

  intros n5\_1a.

  Syll Trans2\_16a n5\_1a Sa.

  replace (~(P↔P∧Q)→(~Q↔~(P∧Q))) with (~~(P↔P∧Q)∨(~Q↔~(P∧Q))) in Sa.

  replace (~~(P↔P∧Q)) with (P↔P∧Q) in Sa.

  specialize Trans4\_11 with Q (P∧Q).

  intros Trans4\_11b.

  replace (~Q↔~(P∧Q)) with (Q↔(P∧Q)) in Sa.

  replace (Q↔(P∧Q)) with ((P∧Q)↔Q) in Sa.

  replace (P↔(P∧Q)) with ((P∧Q)↔P) in Sa.

  apply Sa.

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11b.

  apply EqBi.

  apply n4\_13. (\*Not cited.\*)

  replace (~~(P↔P∧Q)∨(~Q↔~(P∧Q))) with (~(P↔P∧Q)→~Q↔~(P∧Q)).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_56. (\*Not cited.\*)

  replace (~(Q∨P∧Q)) with (~Q).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_44a.

  replace (~Q↔~(Q∨P∧Q)) with (Q↔Q∨P∧Q).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited.\*)

  Qed.

Theorem n5\_55 : ∀ P Q : Prop,

  ((P ∨ Q) ↔ P) ∨ ((P ∨ Q) ↔ Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize Add1\_3 with (P∧Q) (P).

  intros Add1\_3a.

  replace ((P∧Q)∨P) with ((P∨P)∧(Q∨P)) in Add1\_3a.

  replace (P∨P) with P in Add1\_3a.

  replace (Q∨P) with (P∨Q) in Add1\_3a.

  specialize n5\_1 with P (P∨Q).

  intros n5\_1a.

  Syll Add1\_3a n5\_1a Sa.

  specialize n4\_74 with P Q.

  intros n4\_74a.

  specialize Trans2\_15 with P (Q↔P∨Q).

  intros Trans2\_15a. (\*Not cited.\*)

  MP Trans2\_15a n4\_74a.

  Syll Trans2\_15a Sa Sb.

  replace (~(Q↔(P∨Q))→(P↔(P∨Q))) with (~~(Q↔(P∨Q))∨(P↔(P∨Q))) in Sb.

  replace (~~(Q↔(P∨Q))) with (Q↔(P∨Q)) in Sb.

  replace (Q↔(P∨Q)) with ((P∨Q)↔Q) in Sb.

  replace (P↔(P∨Q)) with ((P∨Q)↔P) in Sb.

  replace ((P∨Q↔Q)∨(P∨Q↔P)) with ((P∨Q↔P)∨(P∨Q↔Q)) in Sb.

  apply Sb.

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_21.

  apply EqBi.

  apply n4\_13. (\*Not cited.\*)

  replace (~~(Q↔P∨Q)∨(P↔P∨Q)) with (~(Q↔P∨Q)→P↔P∨Q).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_25. (\*Not cited.\*)

  replace ((P∨P)∧(Q∨P)) with ((P∧Q)∨P).

  reflexivity.

  replace ((P∧Q)∨P) with (P∨(P∧Q)).

  replace (Q∨P) with (P∨Q).

  apply EqBi.

  apply n4\_41. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  Qed.

Theorem n5\_6 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∧ ~Q) → R) ↔ (P → (Q ∨ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_87 with P (~Q) R.

  intros n4\_87a.

  specialize n4\_64 with Q R.

  intros n4\_64a.

  specialize n4\_85 with P Q R.

  intros n4\_85a.

  replace (((P ∧ ¬ Q → R) ↔ (P → ¬ Q → R)) ↔ ((¬ Q → P → R) ↔ (¬ Q ∧ P → R))) with ((((P ∧ ¬ Q → R) ↔ (P → ¬ Q → R)) → ((¬ Q → P → R) ↔ (¬ Q ∧ P → R)))∧((((¬ Q → P → R) ↔ (¬ Q ∧ P → R)))→(((P ∧ ¬ Q → R) ↔ (P → ¬ Q → R))))) in n4\_87a.

  specialize Simp3\_27 with (((P ∧ ¬ Q → R) ↔ (P → ¬ Q → R) → (¬ Q → P → R) ↔ (¬ Q ∧ P → R))) (((¬ Q → P → R) ↔ (¬ Q ∧ P → R) → (P ∧ ¬ Q → R) ↔ (P → ¬ Q → R))).

  intros Simp3\_27a.

  MP Simp3\_27a n4\_87a.

  specialize Imp3\_31 with (~Q) P R.

  intros Imp3\_31a.

  specialize Exp3\_3 with (~Q) P R.

  intros Exp3\_3a.

  Conj Imp3\_31a Exp3\_3a.

  split.

  apply Imp3\_31a.

  apply Exp3\_3a.

  Equiv H.

  MP Simp3\_27a H.

  replace (~Q→R) with (Q∨R) in Simp3\_27a.

  apply Simp3\_27a.

  replace (Q ∨ R) with (¬ Q → R).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_64a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed. (\*A fair amount of manipulation was needed here to pull the relevant biconditional out of the biconditional of biconditionals.\*)

Theorem n5\_61 : ∀ P Q : Prop,

  ((P ∨ Q) ∧ ~Q) ↔ (P ∧ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_74 with Q P.

  intros n4\_74a.

  specialize n5\_32 with (~Q) P (Q∨P).

  intros n5\_32a.

  replace (¬ Q → P ↔ Q ∨ P) with (¬ Q ∧ P ↔ ¬ Q ∧ (Q ∨ P)) in n4\_74a.

  replace (~Q∧P) with (P∧~Q) in n4\_74a.

  replace (~Q∧(Q∨P)) with ((Q∨P)∧~Q) in n4\_74a.

  replace (Q∨P) with (P∨Q) in n4\_74a.

  replace (P ∧ ¬ Q ↔ (P ∨ Q) ∧ ¬ Q) with ((P ∨ Q) ∧ ¬ Q ↔ P ∧ ¬ Q) in n4\_74a.

  apply n4\_74a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited exlicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited explicitly.\*)

  replace (¬ Q ∧ P ↔ ¬ Q ∧ (Q ∨ P)) with (¬ Q → P ↔ Q ∨ P).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n5\_32a.

  Qed.

Theorem n5\_62 : ∀ P Q : Prop,

  ((P ∧ Q) ∨ ~Q) ↔ (P ∨ ~Q).

  Proof. intros P Q.

  specialize n4\_7 with Q P.

  intros n4\_7a.

  replace (Q→P) with (~Q∨P) in n4\_7a.

  replace (Q→(Q∧P)) with (~Q∨(Q∧P)) in n4\_7a.

  replace (~Q∨(Q∧P)) with ((Q∧P)∨~Q) in n4\_7a.

  replace (~Q∨P) with (P∨~Q) in n4\_7a.

  replace (Q∧P) with (P∧Q) in n4\_7a.

  replace (P ∨ ¬ Q ↔ P ∧ Q ∨ ¬ Q) with (P ∧ Q ∨ ¬ Q ↔ P ∨ ¬ Q) in n4\_7a.

  apply n4\_7a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited explicitly.\*)

  replace (¬ Q ∨ Q ∧ P) with (Q → Q ∧ P).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_6. (\*Not cited explicitly.\*)

  replace (¬ Q ∨ P) with (Q → P).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_6. (\*Not cited explicitly.\*)

  Qed.

Theorem n5\_63 : ∀ P Q : Prop,

  (P ∨ Q) ↔ (P ∨ (~P ∧ Q)).

  Proof. intros P Q.

  specialize n5\_62 with Q (~P).

  intros n5\_62a.

  replace (~~P) with P in n5\_62a.

  replace (Q ∨ P) with (P ∨ Q) in n5\_62a.

  replace ((Q∧~P)∨P) with (P∨(Q∧~P)) in n5\_62a.

  replace (P ∨ Q ∧ ~ P ↔ P ∨ Q) with (P ∨ Q ↔ P ∨ Q ∧ ~ P) in n5\_62a.

  replace (Q∧~P) with (~P∧Q) in n5\_62a.

  apply n5\_62a.

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited explicitly.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_13. (\*Not cited explicitly.\*)

  Qed.

Theorem n5\_7 : ∀ P Q R : Prop,

  ((P ∨ R) ↔ (Q ∨ R)) ↔ (R ∨ (P ↔ Q)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n5\_32 with (~R) (~P) (~Q).

  intros n5\_32a. (\*Not cited.\*)

  replace (~R∧~P) with (~(R∨P)) in n5\_32a.

  replace (~R∧~Q) with (~(R∨Q)) in n5\_32a.

  replace ((~(R∨P))↔(~(R∨Q))) with ((R∨P)↔(R∨Q)) in n5\_32a.

  replace ((~P)↔(~Q)) with (P↔Q) in n5\_32a.

  replace (~R→(P↔Q)) with (~~R∨(P↔Q)) in n5\_32a.

  replace (~~R) with R in n5\_32a.

  replace (R∨P) with (P∨R) in n5\_32a.

  replace (R∨Q) with (Q∨R) in n5\_32a.

  replace ((R∨(P↔Q))↔(P∨R↔Q∨R)) with ((P∨R↔Q∨R)↔(R∨(P↔Q))) in n5\_32a.

  apply n5\_32a. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_31.

  apply EqBi.

  apply n4\_13. (\*Not cited.\*)

  replace (~~R∨(P↔Q)) with (~R→P↔Q).

  reflexivity.

  apply Impl1\_01. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply Trans4\_11.

  replace (~(R∨Q)) with (~R∧~Q).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_56. (\*Not cited.\*)

  replace (~(R∨P)) with (~R∧~P).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_56.

  Qed. (\*The proof sketch was indecipherable, but an easy proof was available through n5\_32.\*)

Theorem n5\_71 : ∀ P Q R : Prop,

  (Q → ~R) → (((P ∨ Q) ∧ R) ↔ (P ∧ R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n4\_4 with R P Q.

  intros n4\_4a.

  specialize n4\_62 with Q R.

  intros n4\_62a.

  specialize n4\_51 with Q R.

  intros n4\_51a.

  replace (~Q∨~R) with (~(Q∧R)) in n4\_62a.

  replace ((Q→~R)↔~(Q∧R)) with (((Q→~R)→~(Q∧R))∧(~(Q∧R)→(Q→~R))) in n4\_62a.

  specialize Simp3\_26 with ((Q→~R)→~(Q∧R)) (~(Q∧R)→(Q→~R)).

  intros Simp3\_26a.

  MP Simp3\_26a n4\_62a.

  specialize n4\_74 with (Q∧R) (P∧R).

  intros n4\_74a.

  Syll Simp3\_26a n4\_74a Sa.

  replace (R∧P) with (P∧R) in n4\_4a.

  replace (R∧Q) with (Q∧R) in n4\_4a.

  replace ((P∧R)∨(Q∧R)) with ((Q∧R)∨(P∧R)) in n4\_4a.

  replace ((Q∧R)∨(P∧R)) with (R∧(P∨Q)) in Sa.

  replace (R∧(P∨Q)) with ((P∨Q)∧R) in Sa.

  replace ((P∧R)↔((P∨Q)∧R)) with (((P∨Q)∧R)↔(P∧R)) in Sa.

  apply Sa.

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_4a. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_31. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited.\*)

  apply EqBi.

  apply n4\_3. (\*Not cited.\*)

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_51a.

  Qed.

Theorem n5\_74 : ∀ P Q R : Prop,

  (P → (Q ↔ R)) ↔ ((P → Q) ↔ (P → R)).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n5\_41 with P Q R.

  intros n5\_41a.

  specialize n5\_41 with P R Q.

  intros n5\_41b.

  Conj n5\_41a n5\_41b.

  split.

  apply n5\_41a.

  apply n5\_41b.

  specialize n4\_38 with ((P→Q)→(P→R)) ((P→R)→(P→Q)) (P→Q→R) (P→R→Q).

  intros n4\_38a.

  MP n4\_38a H.

  replace (((P→Q)→(P→R))∧((P→R)→(P→Q))) with ((P→Q)↔(P→R)) in n4\_38a.

  specialize n4\_76 with P (Q→R) (R→Q).

  intros n4\_76a.

  replace ((Q→R)∧(R→Q)) with (Q↔R) in n4\_76a.

  replace ((P→Q→R)∧(P→R→Q)) with (P→(Q↔R)) in n4\_38a.

  replace (((P→Q)↔(P→R))↔(P→Q↔R)) with ((P→(Q↔R))↔((P→Q)↔(P→R))) in n4\_38a.

  apply n4\_38a.

  apply EqBi.

  apply n4\_21. (\*Not cited.\*)

  replace (P→Q↔R) with ((P→Q→R)∧(P→R→Q)).

  reflexivity.

  apply EqBi.

  apply n4\_76a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

Theorem n5\_75 : ∀ P Q R : Prop,

  ((R → ~Q) ∧ (P ↔ Q ∨ R)) → ((P ∧ ~Q) ↔ R).

  Proof. intros P Q R.

  specialize n5\_6 with P Q R.

  intros n5\_6a.

  replace ((P∧~Q→R)↔(P→Q∨R)) with (((P∧~Q→R)→(P→Q∨R))∧((P→Q∨R)→(P∧~Q→R))) in n5\_6a.

  specialize Simp3\_27 with ((P∧~Q→R)→(P→Q∨R)) ((P→Q∨R)→(P∧~Q→R)).

  intros Simp3\_27a.

  MP Simp3\_27a n5\_6a.

  specialize Simp3\_26 with (P→(Q∨R)) ((Q∨R)→P).

  intros Simp3\_26a.

  replace ((P→(Q∨R))∧((Q∨R)→P)) with (P↔(Q∨R)) in Simp3\_26a.

  Syll Simp3\_26a Simp3\_27a Sa.

  specialize Simp3\_27 with (R→~Q) (P↔(Q∨R)).

  intros Simp3\_27b.

  Syll Simp3\_27b Sa Sb.

  specialize Simp3\_27 with (P→(Q∨R)) ((Q∨R)→P).

  intros Simp3\_27c.

  replace ((P→(Q∨R))∧((Q∨R)→P)) with (P↔(Q∨R)) in Simp3\_27c.

  Syll Simp3\_27b Simp3\_27c Sc.

  specialize n4\_77 with P Q R.

  intros n4\_77a.

  replace (Q∨R→P) with ((Q→P)∧(R→P)) in Sc.

  specialize Simp3\_27 with (Q→P) (R→P).

  intros Simp3\_27d.

  Syll Sa Simp3\_27d Sd.

  specialize Simp3\_26 with (R→~Q) (P↔(Q∨R)).

  intros Simp3\_26b.

  Conj Sd Simp3\_26b.

  split.

  apply Sd.

  apply Simp3\_26b.

  specialize Comp3\_43 with ((R→~Q)∧(P↔(Q∨R))) (R→P) (R→~Q).

  intros Comp3\_43a.

  MP Comp3\_43a H.

  specialize Comp3\_43 with R P (~Q).

  intros Comp3\_43b.

  Syll Comp3\_43a Comp3\_43b Se.

  clear n5\_6a. clear Simp3\_27a. clear Simp3\_27b. clear Simp3\_27c. clear Simp3\_27d. clear Simp3\_26a. clear Simp3\_26b. clear Comp3\_43a. clear Comp3\_43b. clear Sa. clear Sc. clear Sd. clear H. clear n4\_77a.

  Conj Sb Se.

  split.

  apply Sb.

  apply Se.

  specialize Comp3\_43 with ((R→~Q)∧(P↔Q∨R)) (P∧~Q→R) (R→P∧~Q).

  intros Comp3\_43c.

  MP Comp3\_43c H.

  replace ((P∧~Q→R)∧(R→P∧~Q)) with (P∧~Q↔R) in Comp3\_43c.

  apply Comp3\_43c.

  apply Equiv4\_01.

  apply EqBi.

  apply n4\_77a.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  apply Equiv4\_01.

  Qed.

End No5.