因果网络范畴和因果凝聚框架

范畴学，图论和量子物理的新联系

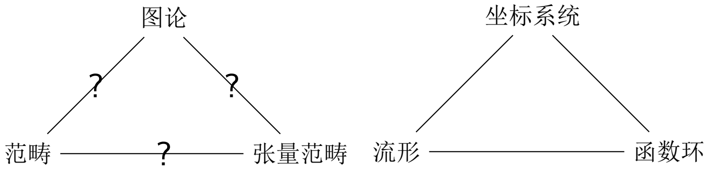
鲁学星

数学与统计学院
枣庄学院

2022 年 11 月 16 日

问题

- 如何从范畴学的角度理解图论?图是一种什么类型的结构?如何定义图范畴?
- 如何把图论范畴化?或者图论范畴化的意义是什么?
- 图形演算和图论的关系是什么? 图论和张量范畴学的关系是什么?
- 范畴论和和张量范畴的关系是什么?



三个平行世界: 因果网络, 定向图, 无向图

项目: 图形演算和向上平面性

计划

- 什么是范畴
- 因果网络范畴
- 张量范畴的图形演算及粗粒化
- 对称张量范畴的图形演算
- 因果网络态的规范等价
- 因果凝聚框架
- 范畴学，图论和量子物理的新联系

什么是范畴

从例子开始

- 集合范畴 **Set**

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "h\circ g"] & Z \arrow[dr, "h"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "g\circ f"] \arrow[rrr, "h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f"'] & & & W
\end{tikzcd}
$$

对象=集合,态射=映射,单位态射=恒等映射,结合律

- 向量空间范畴 **Vect**

对象=线性空间,态射=线性映射,单位态射=恒等映射,结合律

- 关系范畴 **Rel**

对象=集合,态射=二元关系,单位态射=恒等关系,结合律

范畴的定义

一个**范畴** $\mathcal{C}$ 由下列数据构成:
- 对象类$Ob(\mathcal{C})$, 其中的元素称为**对象**;
- 对任意两个对象 $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, 都存在一个态射集 $Hom(A, B)$, 其中的元素称为从 A 到 B 的**态射**, 记为 $f : A \to B$;
- 对任意对象 $A \in Ob(\mathcal{C})$, 都存在一个特殊的态射(**恒等态射**)

$$Id_A \in Hom(A, B);$$

- 对任意三个对象 $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, 存在一个**复合运算**

$$\circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) \to Hom(A, C),$$

把 $f : A \to B, g : B \to C$ 映为 $g \circ f : A \to C$, 并且满足下列性质:
(1) (**结合律**)对任意的 $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(2) (**恒等律**) 对任意的 $f : A \to B$,

$$Id_B \circ f = f = f \circ Id_A$$

.

更多的例子

- 小范畴: 一个范畴称为小的, 如果它的对象类是一个集合
- 离散范畴: 任意集合定义了一个小范畴.

对象集$=X$, $Hom(x,x)=\{Id_x\}$, $Hom(x,y)=\emptyset, x\neq y$

范畴学有可能成为新的数学基础

- 偏序集 $(P,\preceq)$: 对象$=P$中的元素, $Hom(x,y)=\{*\}$ 当且仅当 $x\preceq y$, 结合律$\Leftrightarrow\preceq$ 的传递性
- 幺半群 $(M,\mu,1)$: 对象集$=\{*\}$, $Hom(*,*)=M, \circ=\mu, Id_*=1$

范畴=多对象版本的幺半群=幺半群的水平范畴化

- 道路范畴: 任意给定一个拓扑空间 X, 可定义一个道路范畴 $\mathcal{P}(X)$, 其对象为 X 中的点, 从 x 到 y 的态射为从 x 到 y 的无参数化道路, 复合运算为道路的复合, 恒等态射为平凡道路.

函子=范畴间的态射

所有的范畴在一起也形成一个范畴, 其中的态射称为**函子**.
具体地, 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴, 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个函子 F 是一个对应: 它把每一个 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 映为 $\mathcal{D}$ 中的对象 $F(A)$, 把每一个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \to B$ 映为 $\mathcal{D}$ 中的态射 $F(f) : F(A) \to F(B)$, 并且满足 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$; $F(Id_A) = Id_{F(A)}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] & & & & F(B) \arrow[dr, "F(g)"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \arrow[rr, "F"] & & F(A) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)"'] & & F(C)
\end{tikzcd}
$$

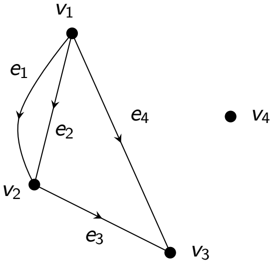
函子把交换图映为交换图

函子的例子

- $span : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}$
- 集合之间的映射
- 偏序集间的保序映射
- 幺半群的同态
- 拓扑空间之间的连续映射

因果网络范畴

因果网络=无环定向图



离散洛伦兹流形

因果网络生成的自由范畴

每一个因果网络 G 都自由生成一个范畴 $\mathcal{P}(G)$

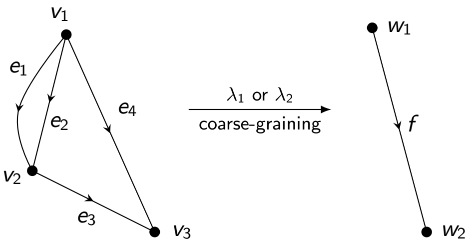
- $Ob(\mathcal{P}(G)) = V(G)$
- $Hom(v_1, v_2) = \{$以v_1为起点，v_2 为终点的定向道路$\}$
- 恒等态射=长度为零的定向道路
- $Hom(v_1, v_1) = \{Id_{v_1}\}, Hom(v_2, v_2) = \{Id_{v_2}\}, Hom(v_3, v_3) = \{Id_{v_3}\}$, $Hom(v_1, v_2) = \{e_1, e_2\}, Hom(v_2, v_3) = \{e_3\}, Hom(v_1, v_3) = \{e_3e_1, e_3e_2, e_4\}$, $Hom(v_2, v_1) = Hom(v_3, v_2) = Hom(v_3, v_1) = \emptyset$

自由范畴=道路范畴=范畴的克莱斯利(Kleisli)构造

- 如果把 G 理解为洛伦兹流形，则 $\mathcal{P}(G)$ 可以理解为其**类时道路范畴**.

因果网络范畴 **Cau**

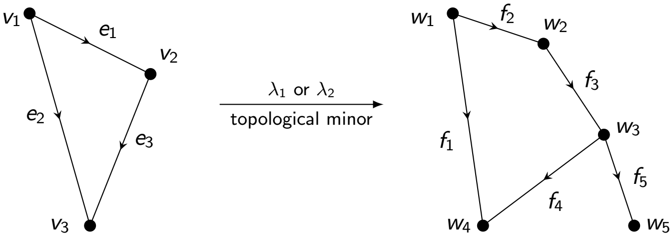
- 对象=因果网络
- $Hom(G_1, G_2) = Hom(\mathcal{P}(G_1), \mathcal{P}(G_2))$
- 态射的例子：



$$\lambda_1(v_1) = \lambda_1(v_2) = w_1, \lambda_1(v_3) = w_2$$

$$\lambda_2(v_1) = w_1, \lambda_2(v_2) = \lambda_2(v_3) = w_2$$

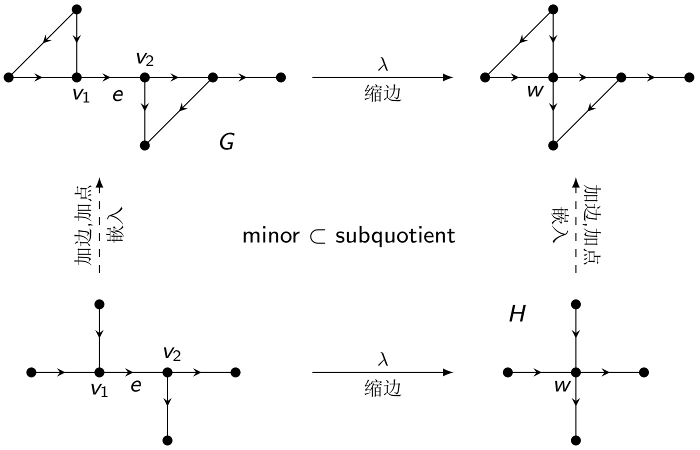
拓扑次图: 加边,加点,边重分



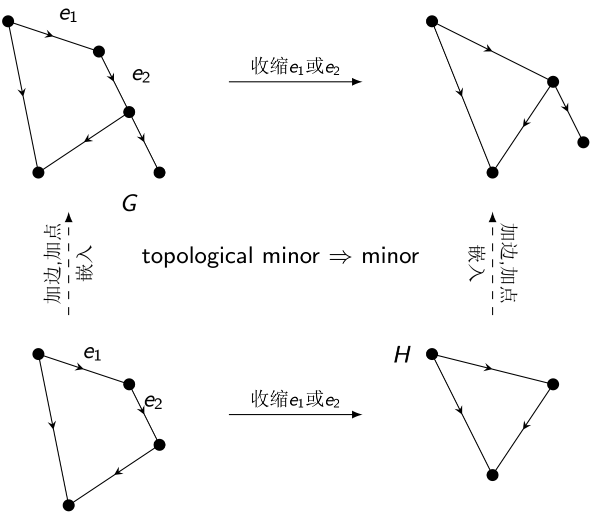
$\lambda_1(e_1) = f_2, \lambda_1(e_3) = f_4 \circ f_3$
$\lambda_2(e_1) = f_3 \circ f_2, \lambda_2(e_3) = f_4$

次图:加边,加点,缩边;　次图 $\subseteq$ 子商

H 是 G 的次图



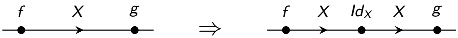
H 是 G 的拓扑次图


e_1
e_2
收缩e_1或e_2
G
加边,加点
嵌入
topological minor $\Rightarrow$ minor
加边,加点
嵌入
e_1
e_2
收缩e_1或e_2
H

六类基本态射(1+2+3)

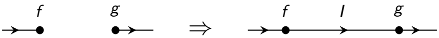
基本重分

- 重分一条边(单位约定)

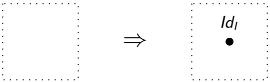


基本嵌入

- 加一条边(恒等约定)

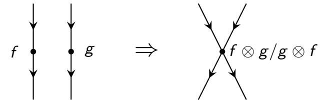


- 加一个孤立点(单位约定+恒等约定)

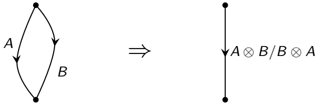


基本粗粒化

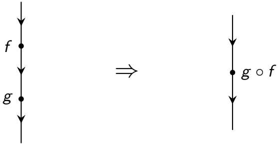
- 合并两个顶点(态射的张量积)

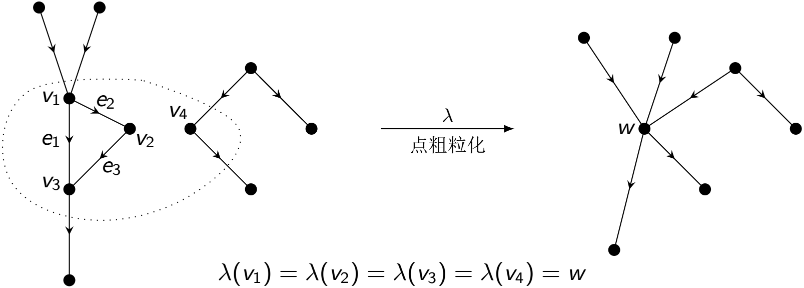


- 粗粒化两条平行边(对象的张量积)



- 收缩一条边(态射的复合)

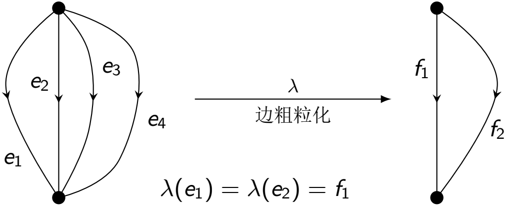




$$\lambda(v_1)=\lambda(v_2)=\lambda(v_3)=\lambda(v_4)=w$$

$$\lambda(e_1)=\lambda(e_2)=\lambda(e_3)=Id_w$$

边粗粒化



$$\lambda(e_1) = \lambda(e_2) = f_1$$

$$\lambda(e_3) = \lambda(e_4) = f_2$$

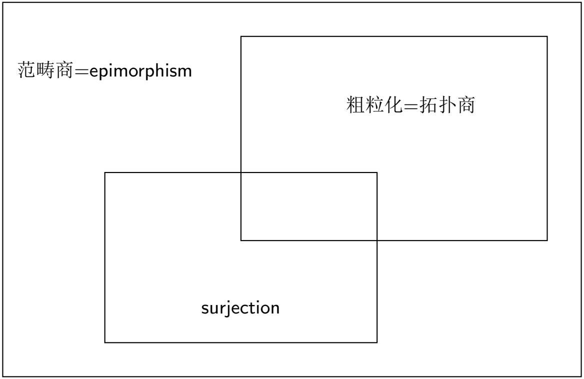
因果网络态射的一般结构

$$
\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[rrr, "\lambda", "\text{morphism}"'] \arrow[dr, "\lambda_s", "\text{subdivision}"'] & & & G_2 \\
& G_s \arrow[r, "\lambda_c", "\text{coarse-graining}"'] & G_c \arrow[ur, "\lambda_\iota", "\text{embedding}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\lambda_s =$ 边重分
$\lambda_c =$ 粗粒化=商图
$\lambda_\iota =$嵌入

基本定理: 任何态射都是基本态射的复合.

范畴商和拓扑商

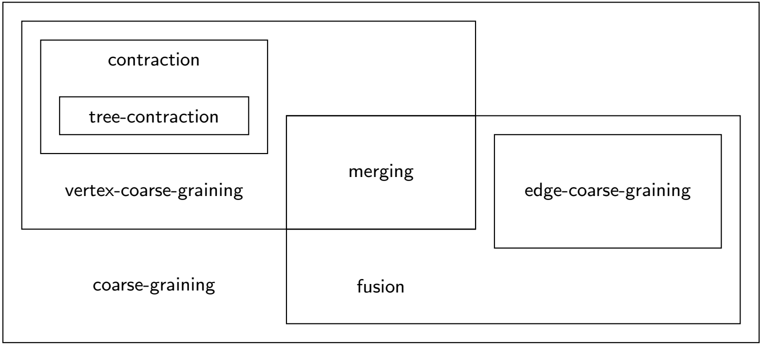


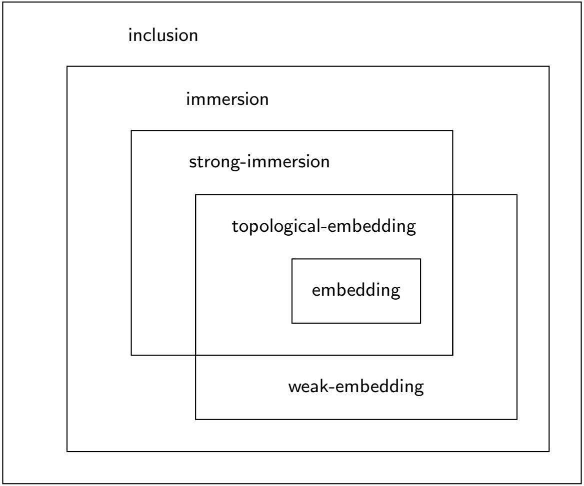
态射的分类

粗粒化,着色,合并,收缩,浸入,强浸入,拓扑次图, 拓扑嵌入, 重分

图论范畴化的意义: 图论操作 $\Longrightarrow$ 图的态射

Causal-net category, arxiv:2201.08963




inclusion
immersion
strong-immersion
topological-embedding
embedding
weak-embedding

把图论中的minor理论推广到任意范畴上去

广义minor理论=研究一般范畴非对称结构的理论

范畴=群胚+minor范畴

范畴=对称+偏序

结构图论 $\Longrightarrow$ 结构范畴论

张量范畴的图形演算及粗粒化

一个(严格)**幺半范畴(或张量范畴)**是具有张量积 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 和单位对象 $I_{\mathcal{C}} \in Ob(\mathcal{C})$ 的范畴 $\mathcal{C}$, 满足结合律和单位公理:

- (结合律)

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

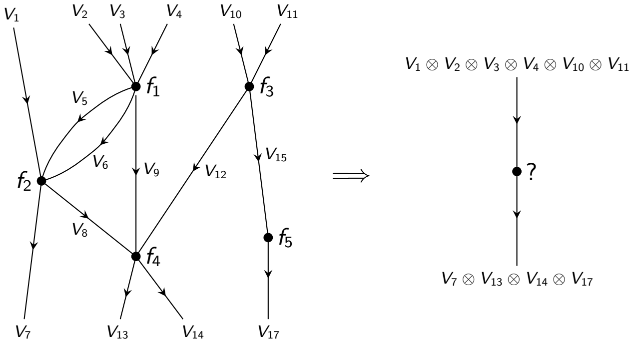
- (单位公理)

$$I_{\mathcal{C}} \otimes A = A = A \otimes I_{\mathcal{C}}$$

- $\otimes$ 的函子性=中间-四- 交换律

$$(g \circ f) \otimes (g' \otimes f') = (g \otimes g') \circ (f \circ f')$$

张量范畴是代数学的平台. 例子包括集合范畴,向量空间范畴,拓扑空间范畴,等

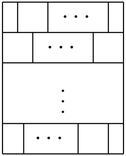


张量范畴的图形演算 $\dashrightarrow$ 渐进平面图(progressive plane graph)

张量运算 = 平面演算

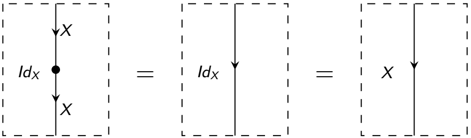
经典算术	平面演算
数	张量
$+$	$\circ$
0	恒等态射
$\times$	$\otimes$
1	单位对象
分配律	中间-4-交换律
f=多项式	Γ= 渐进平面图
多项式的复合	渐进平面图的粗粒化

$$f = x_{11}\cdots x_{1i_1} + \cdots + x_{m1}\cdots x_{mi_m}$$
$$\Gamma = (\Gamma_{m1}\otimes\cdots\otimes\Gamma_{m\alpha_m})\circ\cdots\circ(\Gamma_{11}\otimes\cdots\otimes\Gamma_{1\alpha_1})$$

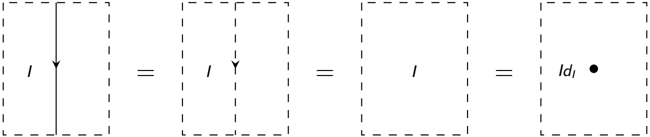


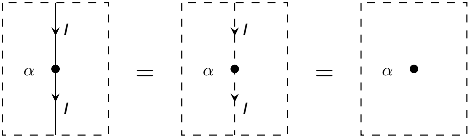
图形演算的约定

- 恒等约定



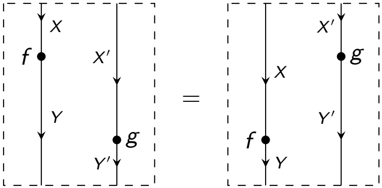
- 单位约定



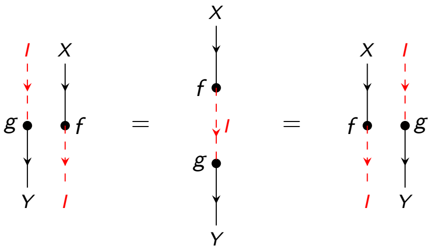


图形演算的拓扑本性

- 恒等约定+中间-4-交换律 $\Longrightarrow$ 层次交换



- 单位约定+中间-4-交换律$\Longrightarrow$ 左右换位

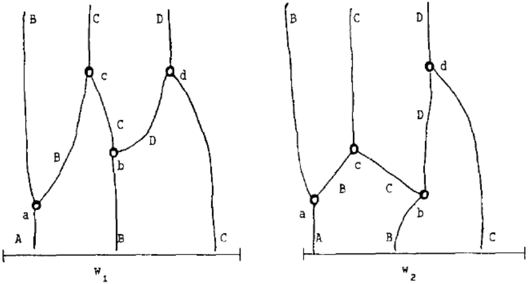


$$a : A \to B \otimes B,\ \ b : B \to C \otimes D,\ \ c : B \otimes C \to C,\ \ d : D \otimes C \to D$$

$$w_1 = (I_B \otimes c \otimes d) \circ (I_B \otimes I_B \otimes b \otimes C) \circ (a \otimes I_B \otimes I_C)$$

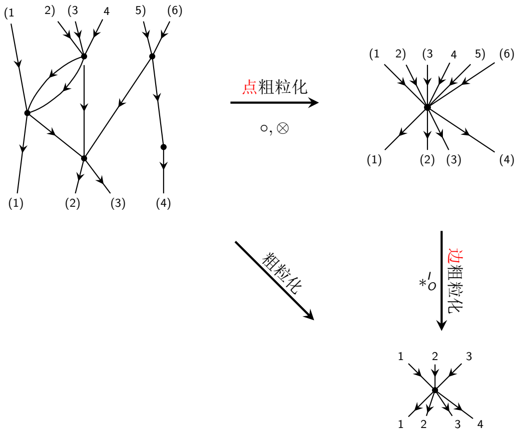
$$w_2 = (I_B \otimes I_C \otimes d) \circ (I_B \otimes c \otimes I_D \otimes I_C) \circ (a \otimes b \otimes I_C)$$

$$w_1 \stackrel{?}{=} w_2$$



Word Problem

张量运算=粗粒化



更本质的事实:张量范畴=粗粒化代数

博士论文: Combinatorics and algebra of tensor calculus, 2015

对称张量范畴的图形演算

一个**对称张量范畴**是一个带有对称结构的张量范畴. 对称张量范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个**对称结构** s 是从 $\otimes \circ T$ 到 $\otimes$ 的自然等价, 即

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[dd, "T"'] \arrow[rd, "\otimes"] & \\
\arrow[r, phantom, "s \ \Updownarrow"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[ru, "\otimes"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 T 表示置换函子.
对任意 $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, 对称结构都指派了一个自然同构

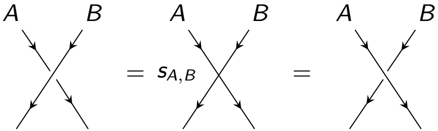
$$s_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A.$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[rr, "s_{A,B}"] \arrow[rd, "1_{A\otimes B}"'] & & B \otimes A \arrow[ld, "s_{B,A}"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

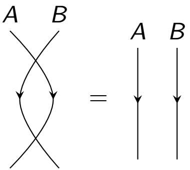
$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes C \arrow[rr, "s_{A\otimes B,C}"] \arrow[rd, "1_A\otimes s_{B,C}"'] & & C \otimes A \otimes B \\
& A \otimes C \otimes B \arrow[ru, "s_{A,C}\otimes 1_B"'] &
\end{tikzcd}$$

图形演算的对称约定

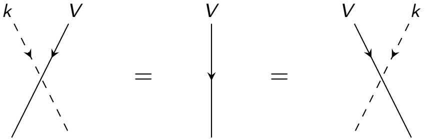
- 对称约定



-

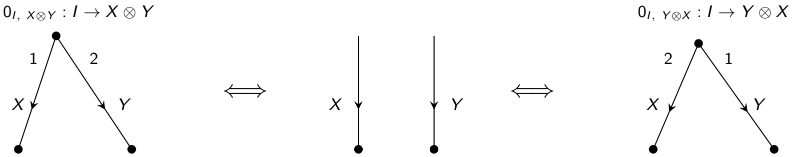


- 交换一致性

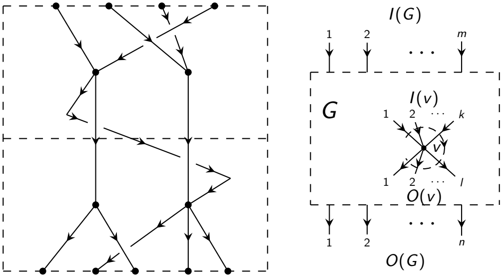


零对象,零扩张, 零约定

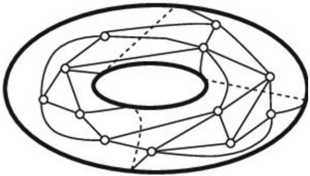
- 对象0称为零对象, 如果它对于态射和对象均有吸收性. 零对象是始对象,终对象,并且满足对任意对象 X, $X \times 0 = 0 = 0 \times X$.
- 零扩张:任何张量范畴都可以典范地加一个零对象, 变成一个带零的张量范畴.
- 零约定: 可以去掉配有零对象和零态射的边和点.



对称张量范畴的图形演算 $\dashrightarrow$ 带锚的极化渐进图(anchored and polarized progressive graph)



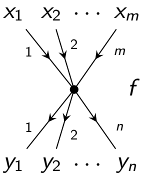
极化结构, 锚结构



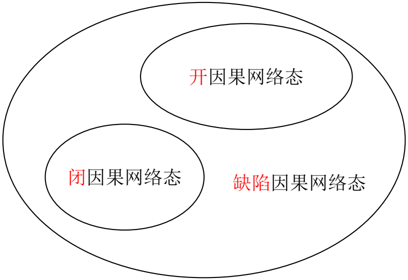
$\Longrightarrow$ 因果网络的拓扑理论

因果网络态的规范等价

因果网络态=带有赋值的极化渐进图



$$f: x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \to y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$$



闭=不含0数据

开=允许部分1度顶点上有0数据

缺陷=部分顶点和边上有0数据

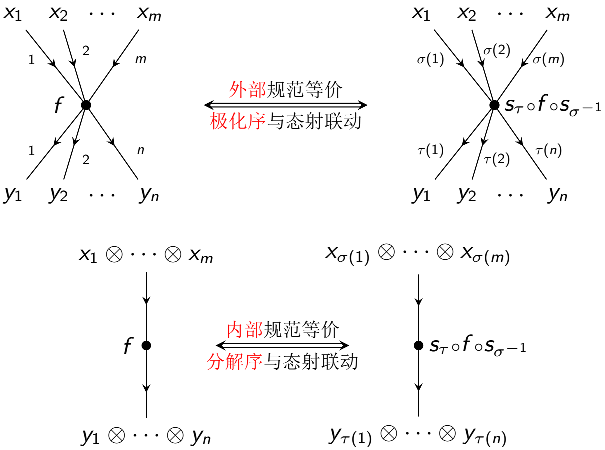
因果网络态与锚结构相容的规范结构

规范结构相当于时空边界条件

张量零对象的数学价值和物理意义还有待进一步地发掘.

两类基本规范变换

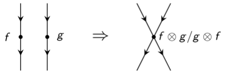
G 上的两个闭/开/局部因果网络态称为规范等价的，如果在每一个顶点和每一条边上它们都规范等价.



规范等价关系=外部规范等价+内部规范等价的自由生成等价关系

- 实现组合与代数的分离
- 消除张量运算的不确定性
- 量子(互)信息和量子纠缠有相对性的一面
- 背景无关性/微分同胚不变性的要求(参考贝兹的图嵌入技巧)

- 合并两个顶点(态射的张量积)



- 粗粒化两条平行边(对象的张量积)

J.C.Baez, Spin network states in gauge theory, 1996

粗粒化=量子参考系变换

- 对称张量范畴的物理意义: 量子规范场=量子序(隐缠序)

量子序和隐缠序的统一?

量子序是量子纠缠/关系/相互作用的相对性中的不变性

- 因果网络态的规范等价类表征的是量子过程的真正物理自由度
- 粗粒化=量子参考系的变换, 这种变换导致了量子过程的规范变换

例如:

- 粒子标记顺序(外部规范变换)
- 霍金辐射/昂鲁效应(粒子数不确定, 内部规范变换)
- 量子计数与粗粒化有关 (洛韦利, How many quanta?, 规范变换)

因果凝聚框架

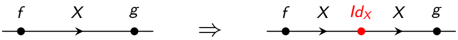
因果代数

因果代数=因果网络范畴上的余层⇐粗粒化代数

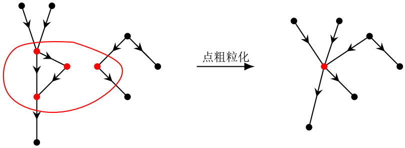
任给对称张量范畴 $\mathcal{S}$, 可得一个**因果代数** $F_{\mathcal{S}}$. 对因果网络 G,

$$F_{\mathcal{S}}(G) = \text{定义在}G\text{上取值于 }\mathcal{S}\text{ 的因果网络态的规范等价类集合}$$

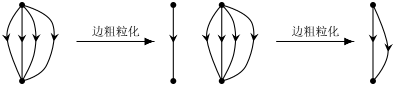
- 边重分(恒等约定)



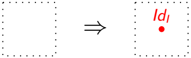
- 点粗粒化(外部规范变换)



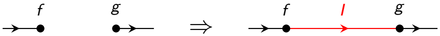
- 边粗粒化(内部或混合规范变换)



- 加点(单位约定+恒等约定)



- 加边(单位约定)



因果凝聚是一种以因果代数为系数的广义同调理论.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Cau} \arrow[r, "F_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{Set} \\
\mathbf{Top} \arrow[r, "path"] & \mathbf{Cat} \arrow[ur, dashed, "L = Lan_i F_{\mathcal{S}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$L(X) = \mathop{Colim}_{\phi : i(G) \to path(X)} F_{\mathcal{S}}(G) = \int_X F_{\mathcal{S}} = \frac{\coprod_{\phi} F_{\mathcal{S}}(\phi)}{\sim}$$

$$L(point) = End(I_{\mathcal{S}})$$

$L(X) = \{X$内不可约因果网络态的强等价类$\}$

强等价=规范等价+单位约定+恒等约定+零约定

因果凝聚=量子流形理论

给定(紧)李群 $\mathbf{H}$, $\mathcal{S} = Rep(\mathbf{H})$, $F_{\mathcal{S}}(G) = L^2\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}}(G)\right)$

$$\mathcal{H}_G \xrightarrow{\iota} \mathcal{H}_M$$

$$L^2\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}}(G)\right) \xrightarrow{(\eta^*)_*} L^2\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}}(M)\right)$$

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}}(G) \xleftarrow{\eta^*} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}}(M)$$

$$G \xrightarrow{\eta} M$$

$$\mathcal{H}_M = \frac{\bigoplus_{\eta:G\to M} \mathcal{H}_G}{\sim}$$

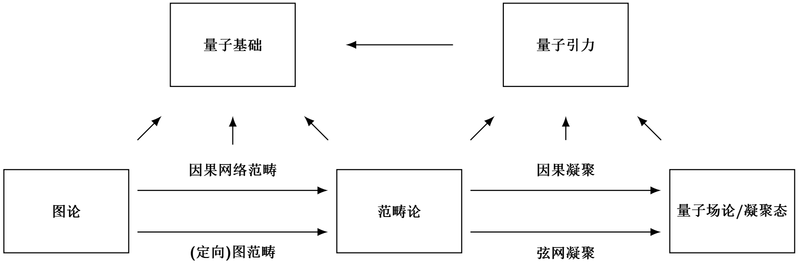
图嵌入技巧=余极限构造

背景无关的格点规范理论

- 格点规范理论的问题: 1. 固定格点系统(离散时空), 与背景无关性不相容; 2. 有尺度的概念; 3. 有热力学极限(大N极限)

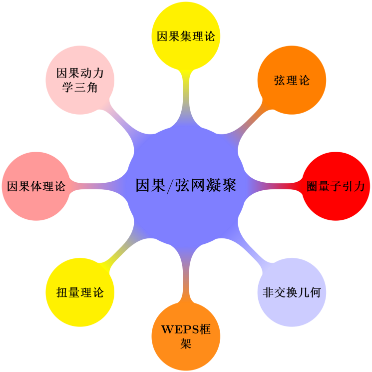
- 因果凝聚解决背景无关性: 1. 考虑所有可能的格点系统(因果网络); 2. 格点系统之间通过粗粒化变换; 3. 没有尺度的概念; 4. 没有大N极限问题

(对称)张量范畴$\Longrightarrow$ 粗粒化代数 $\Longrightarrow$ 因果代数 $\Longrightarrow$ 因果凝聚



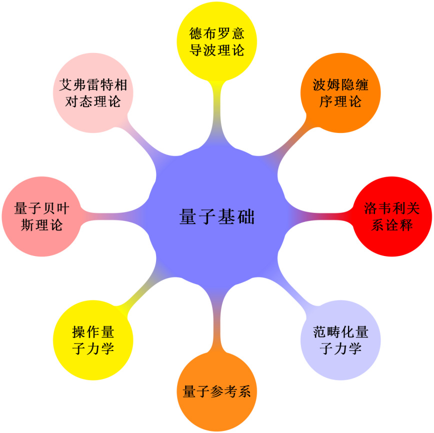
基础物理的趋势: 强关联,非微扰,演生观,信息论倾向,背景无关性
应用数学的趋势: 应用范畴学, 强人工智能, 机器学习

背景无关性√, 时间问题√, 低能极限问题?



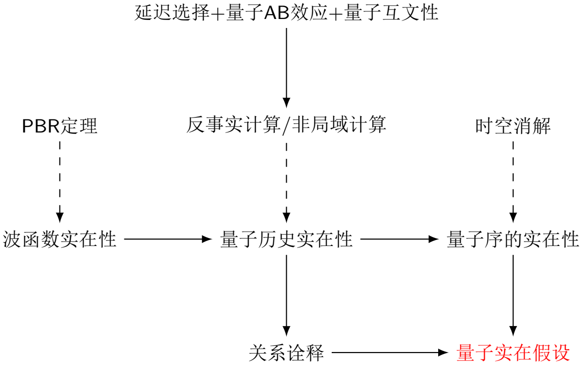
- 相干态假设:经典时空是因果凝聚相干态,叠加系数表现为基于互信息的爱因斯坦-希尔伯特作用量
- 量子颤振假设: 惯性起源于狄拉克方程预言的量子颤振
- 能量的定义???

- 信息的基本特征是创生性,涌现性,相互性和共享性
- 信息不是物质性的也不是能量性的,是实在的一种全新属性.
- 信息存在于关系之中, 关系存在于对称张量范畴之中.



交易诠释(被惠勒延迟选择实验否定), PBR定理(波函数实在被关系诠释消解)

量子实在假设



量子实在假设：量子序=隐缠序

谢谢大家!!