数学模型（20 计算机）第 7 周作业

姓名	陈鹏宇	赵家乐	王星然
学号	20204227	20204241	20204256
序号	73	78	86

题目

1.在如何施救药物中毒问题中，如果采用洗胃方式抢救，该如何讨论呢？

模型

确定 t 时间胃肠道和血液系统中的药量

为了确定误吞药物后一定时间胃肠道和血液系统中的药量及血药浓度，可建立如下的药物代谢模型，其中血液系统为一室模型

口服药物 ——胃肠道——血液系统——体外

规定符号

x(t)表示吞下药物后 t 时间胃肠道内的药量，y(t)表示吞下药物 t 时间后血液系统中的药量

模型假设

假设胃肠道中药物向血液系统中的转移率正比于 x，其比例系数为$\lambda(>0)$，血液系统中药物排出体外的转移率正比于 y，其比率系数为$\mu(>0)$。

假设在 t = 0 时刻，总剂量 1100mg 药物瞬间进入胃肠道，$x(0) = 1100$

氨茶碱被吸收的半衰期为 5h，排除的半衰期为 6h

孩子的血液总量为 2000ml

模型求解

由前述假设可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x \\ x(0) = 1100 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt} = \lambda x - \mu y \\ y(0) = 0\end{cases} \tag{2}$$

$$\lambda = 0.1386, \mu = 0.1155 \tag{3}$$

最后解得

胃肠道药量：

$$x(t) = 1100e^{-0.1386t} \tag{4}$$

血液系统药量：

$$y(t) = 6600(e^{-0.1155t} - e^{-0.1386t}) \tag{5}$$

确定洗胃对胃肠道中药物的影响

如果采用洗胃对患者施救，则只能降低胃肠道中的药量

由于洗胃过程中，患者胃内环境变化复杂，溶液体积和药物浓度都会一直改变，为了简化模型便于讨论和计算

模型假设

假设在洗胃时，胃肠道中药量的减少率变为常数 k

假设刚刚吞入药物立刻洗胃治疗，需要 30 分钟清空胃肠道中的药物

假设在洗胃时，血液系统从胃肠道吸收药物的规律和将药物排除体外的规律不变

模型求解

由上述假设，可求解 $k = 1100/0.5 = 2200$

设在 w 时刻开始对患者洗胃，求出 w 时刻患者胃肠道和血液系统中的药量 $x(w)$和 $y(w)$

则

$$x(t) = \begin{cases} 1100e^{-0.1386t}, t < w \\ 1100e^{-0.1386w} - 2200(t-w)\ w \le t \le \frac{1100e^{-0.1386w}}{2200} + w \\ 0\ t > \frac{1100e^{-0.1386w}}{2200} + w \end{cases} \tag{6}$$

$$y(t) = \begin{cases} 6600(e^{-0.1155t} - e^{-0.1386w}), t < w \\ C_1e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}1100e^{-\lambda w} + \frac{2200\lambda w}{\mu} - 2200\lambda(\frac{1}{\mu}t - \frac{1}{\mu^2}), w \le t \le \frac{1100e^{-0.1386w}}{2200} + w \\ C_2e^{-\mu t}, t > \frac{1100e^{-0.1386w}}{2200} + w \end{cases} \tag{7}$$

其中C_1和C_2可由 $y(w) = 6600(e^{-0.1155w} - e^{-0.1386w})$和 $y(\frac{1100e^{-0.1386w}}{2200}) + w - 0 = y(\frac{1100e^{-0.1386w}}{2200}) + 0$

(分段函数第二段最后的值带入最后一段开始)解得

显然洗胃的时间越早，治疗效果越好

程序

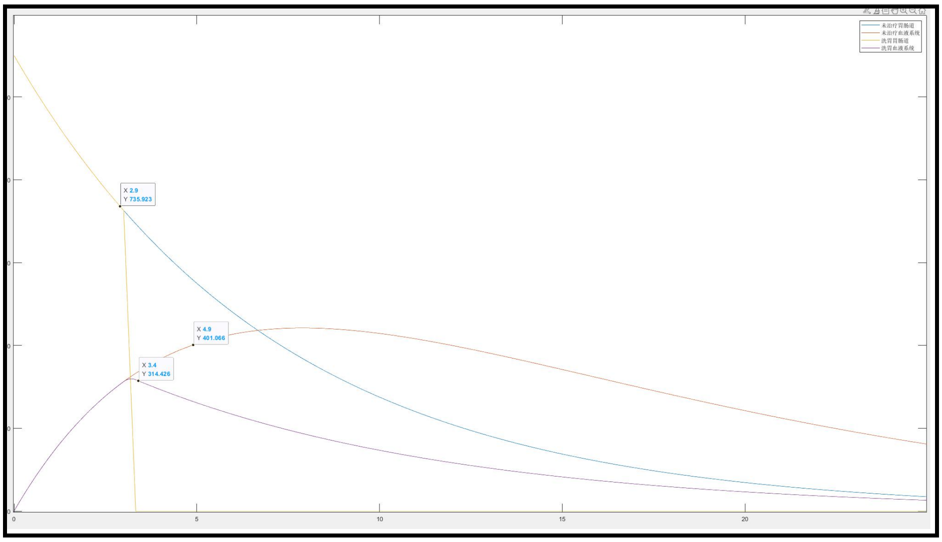
```
T = 0:0.01:25;
X_nocure = 1100 .* exp(-0.1386 .* T);
Y_nocure = 6600 .* (exp(-0.1155 .* T) - exp(-0.1386 .* T));
%没有治疗  胃肠道中药量
plot(T,X_nocure);
hold on;
%没有治疗  血液系统中药量
plot(T,Y_nocure);
ω = 3; %误吞 3 小时后开始洗胃
X_cure = calCureX(ω,T);
Y_cure = calCureY(ω,T);
plot(T,X_cure);
plot(T,Y_cure);
legend("未治疗胃肠道","未治疗血液系统","洗胃胃肠道","洗胃血液系统");
function X = calCureX(ω,T)
    T_len = length(T);
    X = zeros(1,T_len);
    lambda = 0.1386;
    k = 2200;
    for i = 1:T_len
        if T(i) < ω
            X(i) = 1100 * exp(-lambda*T(i));
        elseif (ω <= T(i)) && (T(i) <= 1100 * exp(-lambda * ω)/k + ω)
            X(i) = 1100 * exp(-lambda*ω) - k * (T(i)-ω);
        else
            X(i) = 0;
        end
    end
end

function Y = calCureY(ω,T)
    T_len = length(T);
    Y = zeros(1,T_len);
    lambda = 0.1386;
```

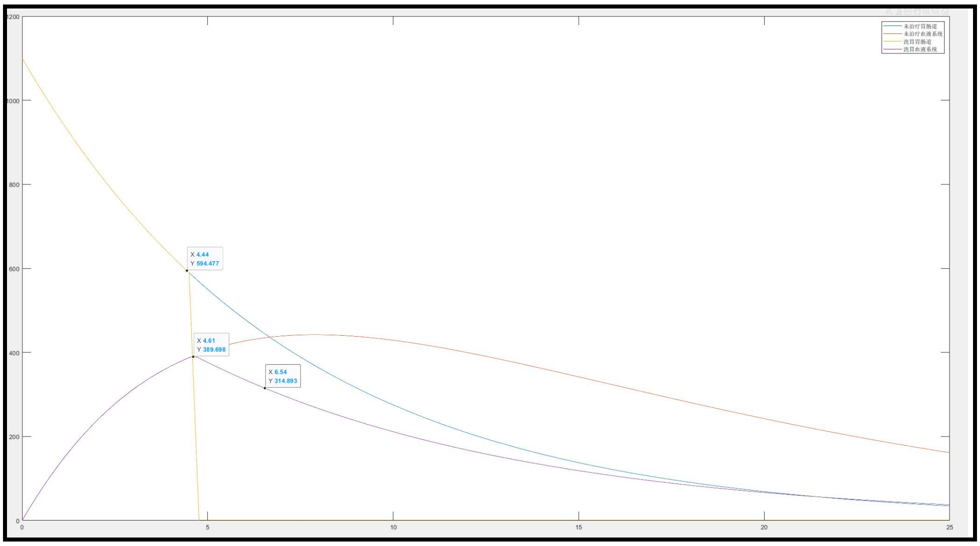
```
        micro = 0.1155;
        k = 2200;
        %计算 C_1
            C_1  =  (6600  *  (exp(-micro*  ω  )-exp(-lambda*  ω  ))  +  k  *  lambda  *  (  ω /micro - 1/micro^2) - k * lambda * ω / micro - lambda * 1100 * exp(-lambda * ω)/micro ) / exp(-micro * ω);
        %计算 C_2
        TMP_t = 1100 * exp(-lambda * ω)/k + ω;
        C_2 = ( C_1 * exp(-micro * TMP_t) + lambda * 1100 * exp(-lambda * ω) / micro + k * lambda * ω / micro - k * lambda * (TMP_t/micro - 1/micro^2) ) / exp(-micro * TMP_t);
        %分段计算
        for i = 1:T_len
            if T(i) < ω
                Y(i) = 6600 * (exp(-micro*T(i)) - exp(-lambda*T(i)));
            elseif (ω <= T(i)) && (T(i) <= 1100 * exp(-lambda * ω)/k + ω)
                 Y(i) = C_1 * exp(-micro * T(i)) + lambda * 1100 * exp(-lambda * ω) / micro + k * lambda * ω / micro - k * lambda * (T(i)/micro - 1/micro^2);
            else
                Y(i) = C_2 * exp(-micro * T(i));
            end
        end
    end
```

结果

误吞后三小时开　　　　　　　　　　始洗胃　其预测结果如下图



误吞后四小时半开始洗胃　其预测结果如下图



分析

由图像可知，洗胃治疗对于口服药物中毒，且药物被人体吸收进入血液系统较慢时，治疗效果非常好，只要患者及时就医，在到达致命水平前，均可迅速抑制血液中药量的增加，并可与其他治疗方式如活性炭，血液透析配合，进一步加快患者从药物中毒中恢复

2 根据饮酒驾车模型来分析，如果小张每天都喝一瓶白酒，是否还能开车呢？

表 1 喝下两瓶啤酒后血液中酒精含量（毫克 / 百毫升）

时间	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
酒精浓度	30	68	75	82	82	77	68	68	58	51	50	41
时间	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
酒精浓度	38	35	28	25	18	15	12	10	7	7	4	

一、模型假设

1. 经查阅资料，一般情况下，白酒度数是啤酒度数的八倍，但考虑到喝白酒的量较少，该模型认为喝一瓶白酒的酒精量为一瓶啤酒酒精量的四倍。
2. 吸收室在初始时刻 t=0 时，酒精量立即为 $2g_0$，酒精从吸收室进入中心室的速率（吸收室在单位时间内酒精量的减少量）与吸收室的酒精量成正比，比例系数为 k_1.
3. 中心室的容积 V 保持不变；在初始时刻 t=0 时，中心室酒精量为 0;在任意时刻，酒精从中心室向体外排出的速率（中心室的单位时间内酒精量的减少量）与中心室的酒精量成正比，比例系数为 k_2.
4. 在饮酒者（体重为 70kg）适度饮酒没有酒精中毒的前提下，假设 k_1 和 k_2 都是常数，与酒精量无关。
5. 为简化模型，我们假设此人每日 0 点喝下一瓶白酒，且饮酒时间不计，考虑到白酒的度数较高，我们认为此人会在晚上 20-21 点开车

二、符号说明

表 2 符号说明

符号	解释
t	时间(小时)
$x_1(t)$	在时刻 t 吸收室(肠胃)内的酒精量(mg)
k_1	酒精从吸收室进入中心室的速率系数
g_0	在短时间内喝下 1 瓶啤酒后吸收室内的酒精量(mg)
$y_1(t)$	在时刻 t 中心室(血液和体液)的酒量(mg)
k_2	酒精从中心室向体外排出的速率系数
V	中心室的容积(100ml)

三、模型建立

我们用吸收室代表胃，用中心室代表体液。首先我们对吸收室建立微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -k_1 x_1(t) \\ x_1(0) = Ng_0 \end{cases} \tag{1}$$

再对中心室建立微分方程，可得：

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = k_1 x_1(t) - k_2 y_1(t) \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

结合(1)(2)：

$$\begin{cases} x_1(t) = Ng_0 e^{-k_1 t} \\ y_1(t) = \frac{Ng_0 k_1}{(k_1 - k_2)}(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}) \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathrm{k} = \frac{Ng_0 k_1}{V(k_1 - k_2)} \tag{4}$$

$$\mathrm{c(t) = k(e^{-k_2} - e^{-k_1})} \tag{5}$$

四、模型求解

4.1 第一天喝酒

快速喝下两瓶啤酒，酒精浓度函数为：

$$\begin{cases} k = 114.4325 \\ k_1 = 0.1855 \\ k_2 = 2.0079 \end{cases} \tag{6}$$

$$\mathrm{c(t) = 114.4325(e^{-0.1855t} - e^{-2.0079t})} \tag{7}$$

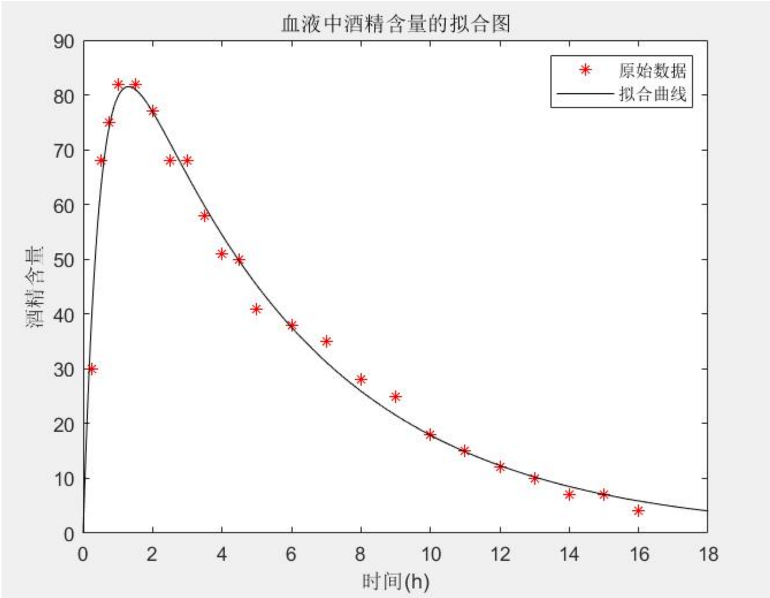


图 1 喝下两瓶啤酒后的酒精浓度拟合图

根据假设 1、4，第一天快速喝下一瓶白酒，酒精浓度函数为：

$$C_1(t) = 228.8470(e^{-0.1855t} - e^{-2.0079t}) \tag{8}$$

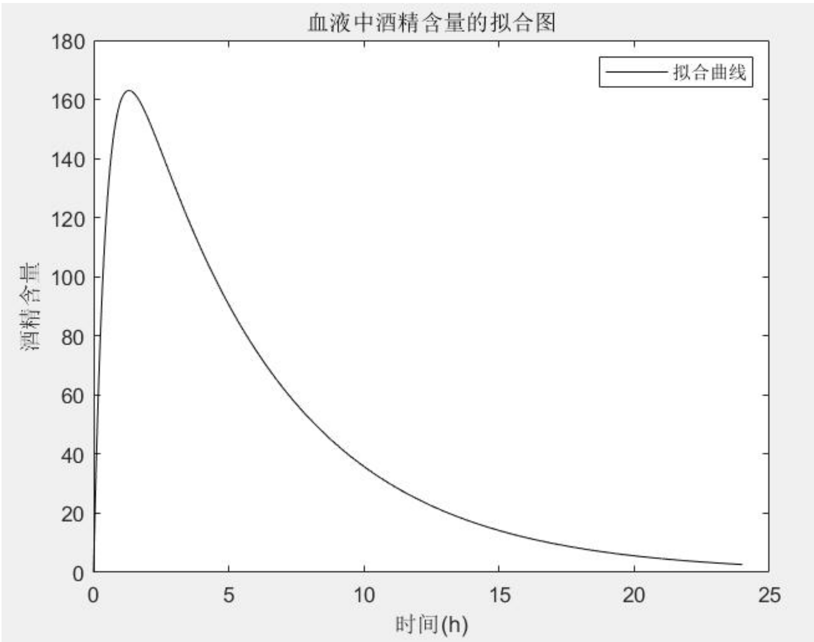


图 2 喝下一瓶白酒后的酒精浓度拟合图

根据假设 5，此人在 20-21 点出行时，酒精含量低于 20mg/100ml，所以第一天能继续开车。

4.2 第二天喝酒

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -k_1 x_2(t) \\ x_2(0) = Ng_0 + x_1(s) \end{cases} \tag{9}$$

$$
\begin{cases} \frac{dy_2(t)}{dt} = k_1x_2(t) - k_2y_2(t) \\ y_2(0) = y_1(s) \end{cases} \tag{10}
$$

结合(9)(10)(3)可得：

$$
\begin{cases} x_2(t) = Ng_0(1 + e^{-k_1s})e^{-k_1t} \\ y_2(t) = \frac{Ng_0k_1}{(k_1-k_2)}[(1 + e^{-k_2s})e^{-k_2t} - (1 + e^{-k_1s})e^{-k_1t}] \end{cases} \tag{11}
$$

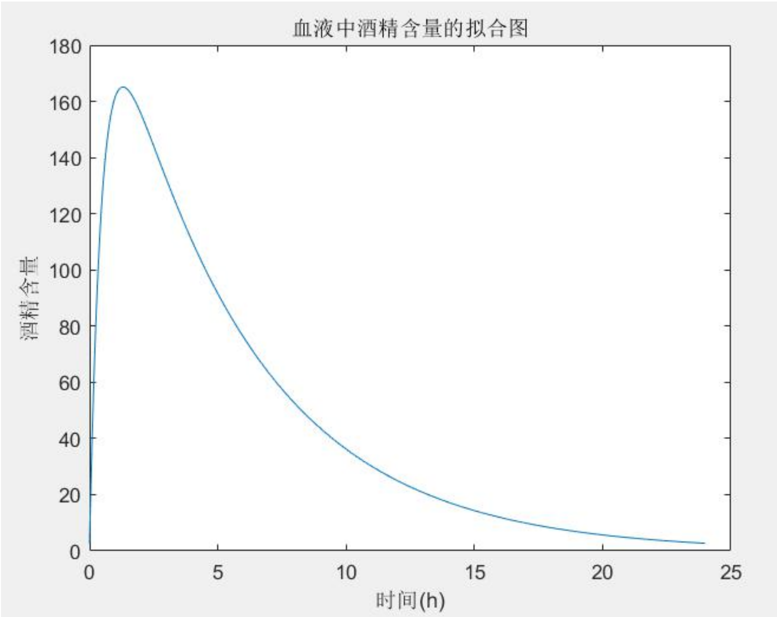


图 3 连续两天喝下一瓶白酒后的酒精浓度拟合图

此人在 20-21 点出行时，酒精含量低于 20mg/100ml，所以第二天能继续开车。

我们对四天连续喝酒进行分析

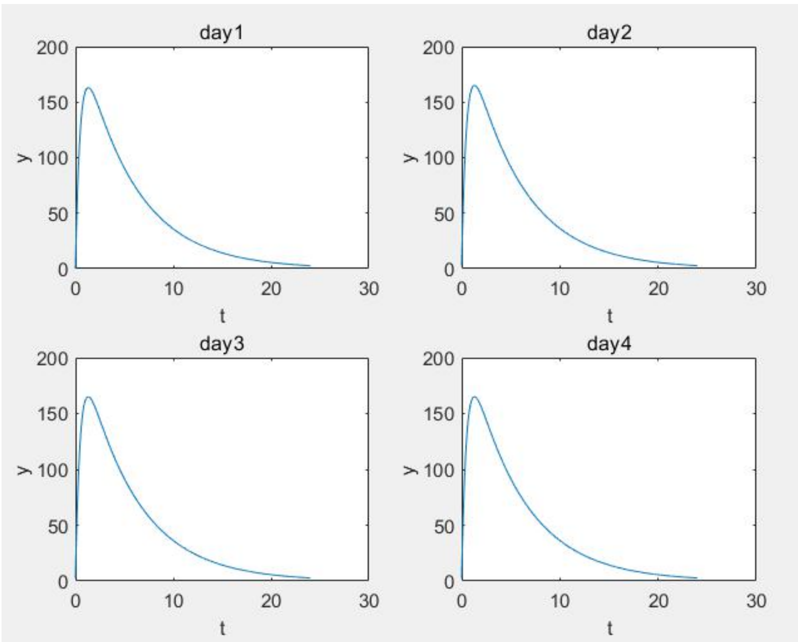


图 4 连续四天喝下一瓶白酒后的酒精浓度拟合图

我们发现总体拟合曲线差别不大，四天中，体内酒精浓度接近 20mg/100ml 的时间点和晚上 20 点血液中残留的酒精浓度分别为：

	第一天	第二天	第三天	第四天
酒精浓度合格的时间	13.1391	13.2017	13.2024	13.2024
20 点酒精浓度残留量	5.6018	5.6669	5.6677	5.6677

发现连续四天喝白酒中，每日酒精浓度恢复正常的时间都在下午 1 点左右，且增加幅度不大，而 20 点酒精浓度残留量也趋于 5.67 稳定，且因为过了一天后，酒精浓度残留量已经很低了，对下一天同一时刻饮酒基本没有影响。

所以，我们认为如果小张每天 0 点喝一瓶白酒，则每一天内的下午 1 点前不能开车，2 点后可以正常开车。

五、分析

就模型而言，该模型为使计算简便，使所得结果理想化，忽略了一些次要因素，如人体对酒精的吸收率和排除率的变化，也没有考虑不同人之间对酒精吸收的差异性。对于每天饮酒来说，没有推出普适性公式，缺少一定严谨性。

就开车安全而言，司机喝了一瓶白酒后，应至少休息 14 个小时才能保证酒精浓度符合国家相关部门规定。为了保证个人安全和公共安全，司机个人应做到喝酒不开车，开车不喝酒。

六、代码

```
f=@(k,x)k(3).*(exp(-k(2).*x)-exp(-k(1).*x));
x=[0.25 0.5 0.75 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16];
y=[30 68 75 82 82 77 68 68 58 51 50 41 38 35 28 25 18 15 12 10 7 7 4];
k0=[2,1,80];%参数的初值
k=nlinfit(x,y,f,k0)
k(3)= k(3) * 2
%plot(x,y,'r*',0:0.01:24,f(k,0:0.01:24),'k')
plot(0:0.01:24,f(k,0:0.01:24),'k')
xlabel('时间(h)')
ylabel('酒精含量')
title('血液中酒精含量的拟合图')
%axis([0 24 0 90])
legend('拟合曲线')
b=f(k,20)
```

```
k=[2.0079,0.1855,228.8470];
t=0:0.01:24;

y1=k(3).*(exp(-k(2).*t)-exp(-k(1).*t));
y2=k(3).*((1+exp(-k(2).*24)).*exp(-k(2).*t)-(1+exp(-k(1).*24)).*exp(-k(1).*t));
```

```
y3=k(3).*((1+exp(-k(2).*24)+exp(-k(2).*48)).*exp(-k(2).*t)-(1+exp(-k(1).*24)+exp(-k(1).*48)).*exp(-k(1).*t));
y4=k(3).*((1+exp(-k(2).*24)+exp(-k(2).*48)+exp(-k(2).*72)).*exp(-k(2).*t)-(1+exp(-k(1).*24)+exp(-k(1).*48)+exp(-k(1).*72)).*exp(-k(1).*t));

subplot(2,2,1);plot(t,y1),title('day1');xlabel('t'); ylabel('y');
subplot(2,2,2);plot(t,y2),title('day2');xlabel('t'); ylabel('y');
subplot(2,2,3);plot(t,y3),title('day3');xlabel('t'); ylabel('y');
subplot(2,2,4);plot(t,y4),title('day4');xlabel('t'); ylabel('y');
```

```
clc
clear
k=[2.0079,0.1855,228.8470];

f1=@(x)k(3).*(exp(-k(2).*x)-exp(-k(1).*x))-20;
f2=@(x)k(3).*((1+exp(-k(2).*24)).*exp(-k(2).*x)-(1+exp(-k(1).*24)).*exp(-k(1).*x))-20;
f3=@(x)k(3).*((1+exp(-k(2).*24)+exp(-k(2).*48)).*exp(-k(2).*x)-(1+exp(-k(1).*24)+exp(-k(1).*48)).*exp(-k(1).*x))-20;
f4=@(x)k(3).*((1+exp(-k(2).*24)+exp(-k(2).*48)+exp(-k(2).*72)).*exp(-k(2).*x)-(1+exp(-k(1).*24)+exp(-k(1).*48)+exp(-k(1).*72)).*exp(-k(1).*x))-20;

a1=fzero(f1,7)
a2=fzero(f2,7)
a3=fzero(f3,7)
a4=fzero(f4,7)
```