

数学模型（20 计算机）第 8 周作业

姓名	陈鹏宇	赵家乐	王星然
学号	20204227	20204241	20204256
序号	73	78	86

用层次分析法来解决一个你生活中所遇到的问题。

1.题目

通过国民收入，军事实力，科技水平，自然资源，对外贸易，确定中、美、日、俄、德五国的综合实力排名。

2.模型建立

2.1 建立层次分析结构

我们的目标是评价五个国家的综合实力，所以，目标层（最高层）即为国家综合实力，准则层一共有五个指标，分别是国民收入、科技水平、军事实力、自然资源、对外贸易，，最后一层方案层则对应我们想要评价的五个国家，每个国家的综合实力都受这五个指标的影响。

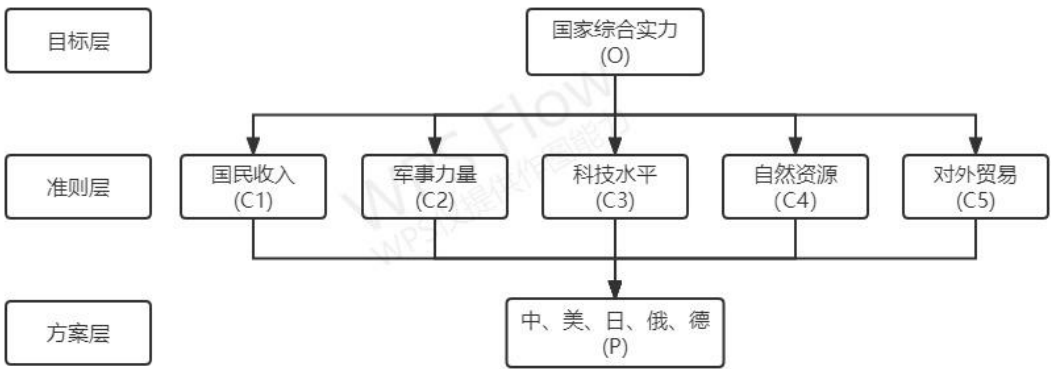


图 1.层次分析结构

2.2 构造对比矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 5 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，n 表示准则层指标数，i, j 表示各指标。

2.3 一致性检验

表 1.随机一致性指标

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} \tag{2}$$

其中λ为最大特征根，n 为矩阵阶数

$$CR = \frac{CI}{RI} \tag{3}$$

我们得到准则层对比矩阵特征向量为

$$w = [0.053 \quad 0.268 \quad 0.434 \quad 0.135 \quad 0.109]^T$$
$$CR = 0.008 < 0.1$$

通过一致性检验。

2.3 第三层对比矩阵

由于 AHP 的主观性太强，为保证模型的严谨性，我们准备对准则层进一步量化，分别以收集到的国民人均收入、科研支出占比、军费支出占比、天然气储备量、对外贸易额占比为依据，决定方案层在准则层的权重。我们通过查阅资料得到数据如下：

表 2.各国指标数据

	国民人均收入	科研支出占比	军费支出占比	天然气储备量	对外贸易额占比
中国	10,098	2 . 1 5	13%	2.4	34.51
美国	68,309	2 . 8 1	39%	6.3	23.38
日本	40,704	3 . 2 0	2.5%	0.6	31.07
俄罗斯	11,162	1 . 1 1	3.1%	26.0	46.08
德国	51,860	3 . 0 4	2.7%	7.2	81.11

我们参考此数据建立方案层对准则层的对比矩阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 1 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 & 4 & 1 \\ 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 8 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.4 一致性检验

重复一致性检验过程，得到如下结果

表 3.一致性检验结果

k	1	2	3	4	5
w_k	0.055	0.158	0.248	0.079	0.141
	0.376	0.200	0.575	0.172	0.101
	0.227	0.300	0.050	0.029	0.121
	0.055	0.082	0.070	0.520	0.229
	0.287	0.261	0.057	0.201	0.407
λ_k	5.034	5.071	5.074	5.200	5.055
CR_k	0.007	0.016	0.017	0.045	0.012

均符合一致性检验。

2.5 组合权向量

$$P = w \times w_k \quad (9)$$

其中 P 为方案层对目标的组合权向量，经计算得：

$$P = [0.179 \ 0.357 \ 0.131 \ 0.151 \ 0.182]^T$$

3. 程序

```

1. %A=[1 1/5 1/7 1/3 1/2;5 1 1/2 2 3;7 2 1 3 4;3 1/2 1/3 1 1;2 1/3 1/4 1 1]
2. %B1=[1 1/7 1/4 1 1/5;7 1 2 7 1;4 1/2 1 4 1;1 1/7 1/4 1 1/5;5 1 1 5 1]
3. %B2=[1 1 1/2 2 1/2;1 1 1/2 3 1;2 2 1 3 1;1/2 1/3 1/3 1 1/3;2 1 1 3 1]
4. %B3=[1 1/3 5 4 5;3 1 9 9 9;1/5 1/9 1 1/2 1;1/4 1/9 2 1 1;1/5 1/9 1 1 1]
5. %B4=[1 1/2 4 1/8 1/3;2 1 8 1/4 1;1/4 1/8 1 1/9 1/9;8 4 9 1 3;3 1 9 1/3 1]
6. %B5=[1 2 1 1/2 1/3;1/2 1 1 1/2 1/4;1 1 1 1/2 1/3;2 2 2 1 1/2;3 4 3 2 1]
7. disp('请输入准则层判断矩阵 A(n 阶)');
8. A=input('A=');
9. [n,n]=size(A);
10. [V,D]=eig(A);%求得特征向量和特征值
11. %求出最大特征值和它所对应的特征向量
12. tempNum=D(1,1);
13. pos=1;
14. for h=1:n
15.     if D(h,h)>tempNum
16.         tempNum=D(h,h);
17.         pos=h;
18.     end
19. end
20. w=abs(V(:,pos));
21. w=w/sum(w);
22. t=D(pos,pos);

```

```

23. disp('准则层特征向量 w=');disp(w);disp('准则层最大特征根 t=');disp(t);
24. %以下是一致性检验
25. CI=(t-n)/(n-1);RI=[0 0 0.52 0.89 1.12 1.26 1.36 1.41 1.46 1.49 1.52 1.54 1.56 1.58 1.59 1.60 1.61
    1.615 1.62 1.63];
26. CR=CI/RI(n);
27. if CR<0.10
28.     disp('此矩阵的一致性可以接受!');
29.     disp('CI=');disp(CI);
30.     disp('CR=');disp(CR);
31. else disp('此矩阵的一致性验证失败，请重新进行评分!');
32. end

```

4. 结果

经 AHP 模型计算后，对应的综合国家实力的排序顺序为：美国、德国、中国、日本、俄罗斯，对应综合国力的五个指标的大概权重占比为国民收入 5.3%，科技水平 26.8%，军事实力 43.4%，自然资源 13.5%，对外贸易 10.9%。

5. 分析

国家综合实力有多种不同的计算方法，不同的计算方法极有可能产生不同的结果。和其他国家综合实力的计算方法相比，层次分析法具有较强的实用性，将定性与定量相结合，计算简便，结果明确。但由于 AHP 模型的主观性，不同模型计算出的结果可能大有差异，比如此模型的国民收入权重之占比 5.3%。在方案层对准则层权重计算中，如果存在所有国家在该指标中水平基本一致，或出现一方独大的情况，利用标准的定性到定量指标转化可能会有所偏差。可以使用其余的权重计算方法，如熵权法或变异系数法与 AHP 结合，可降低一定误差。