Т1

$\xi \sim R(0,\theta)$, $\theta>0$

вер. модель.

$\theta \in \Theta = (0,+\infty)$

выборка $\vec{x}_n$

оценки

$$\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x} = 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\tilde{\theta}_2 = x_{min}$$

$$\tilde{\theta}_3 = x_{max}$$

$$\tilde{\theta}_4 = x_1 + \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=2}^{n} x_i$$

$\left(p(x) = \frac{1}{b-a}\{(a,b)\}\right)$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x,\theta) = \int_{0}^{\theta} x\cdot\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{\theta}{2}$$

$$p(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\{(0,\theta)\}$$

$$M\xi^2=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{1}{\theta}\cdot dx=\frac{\theta^2}{3}$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{\theta^2}{3}-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{12}$$

парам. модель.

Опр. несмещённости:

$\forall\theta\in\Theta \quad M\tilde{\theta}=\theta$

опр. сост.

$\forall\theta\in\Theta\ \forall\varepsilon>0 \quad P(|\tilde{\theta}-\theta|\geq\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

1) $\tilde{\theta}_1$ 1) $\forall\theta>0 \quad M\tilde{\theta}_1=M\left(2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=$

x_i здесь - это независ. сл. вел. $x_i\sim R(0,\theta)$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}Mx_i=\frac{2}{n}\cdot n\underbrace{M\xi}_{\frac{\theta}{2}}=\theta$$

$\Rightarrow$ явл несмещённой

2) $D\tilde{\theta}_1=D\left(2\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{4}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}Dx_i=\frac{4}{n^2}nD\xi=$

$=\frac{\theta^2}{3n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\forall\theta>0$ вып! $\Rightarrow$ состоят. по дост. усл.

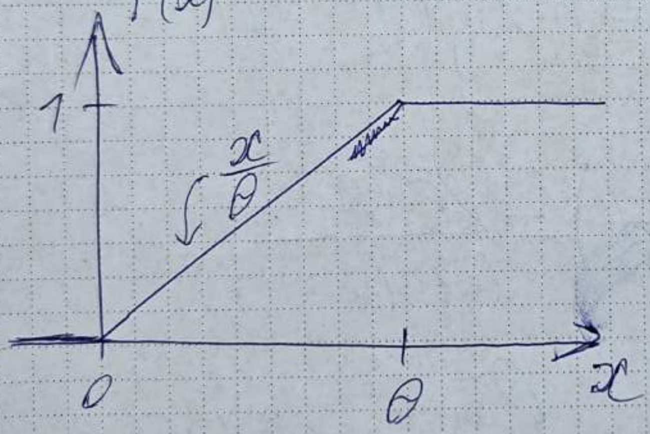
② $\tilde{\theta}_2 = x_{min}$

1) $\forall\ \theta > 0 \quad M\tilde{\theta}_2 = Mx_{min}$

$$\xi \sim F(x)$$

$$\xi_{min} \sim \underbrace{1-(1-F(x))^n}_{=\Phi(x)}$$

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = n(1-F(x))^{n-1} \cdot F'(x) \ominus$$



$$\ominus\ n\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \{(0,\theta)\}$$

$$Mx_{min} = \int_0^\theta x \cdot n \cdot \underbrace{\left(1-\frac{x}{\theta}\right)}_{=t}{}^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}\,dx = \quad t \Rightarrow x = \theta(1-t)$$

$$= -\int_1^0 n\cdot(1-t)\,t^{n-1} \cdot \theta\,dt = n\theta\int_0^1 (t^{n-1} - t^n)\,dt = n\theta\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\theta}{n+1}$$

смещ.!

Поправим, так, чтоб оценка была несмещённой.

$$\tilde{\theta}_2' = (n+1)x_{min}$$

$$M\tilde{\theta}_2' = (n+1)Mx_{min} = \theta \quad \underline{\text{несмещ}}$$

2) $$D\tilde{\theta}_2' = D\big((n+1)x_{min}\big) = (n+1)^2 Dx_{min}$$

$$Mx_{min}^2 = \int_0^\theta x^2 n\underbrace{\left(1-\frac{x}{\theta}\right)}_{t}^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \theta^2(1-t)^2 n\cdot t^{n-1}\,dt = n\theta^2\int_0^1\left(t^{n-1} - 2t^n + t^{n+1}\right)dt =$$

$$= n\theta^2\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{\theta^2\cdot 2}{(n+1)(n+2)}$$

$$Dx_{min} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2\cdot\left(\frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \quad \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$D\tilde{\theta}_2' = (n+1)^2 Dx_{min} = \frac{n\theta^2}{n+2} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

дост. усл. не работает.

[illegible]

По определению:

$$\forall \theta>0 \quad \forall \varepsilon>0 \quad P\left(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

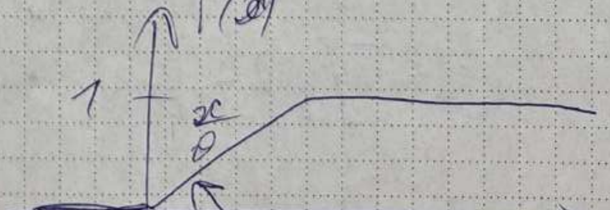
хотим док-ть ~~[illegible]~~ несостоятельность

$$P\left(|\tilde{\theta}_2' - \theta| \geq \varepsilon\right) \geq P\left(\tilde{\theta}_2' \geq \theta+\varepsilon\right) =$$

$$= P\left((n+1)x_{min} \geq \theta+\varepsilon\right) = P\left(x_{min} \geq \frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right) =$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right) =$$

$$\Phi(x) = 1-(1-F(x))^n$$



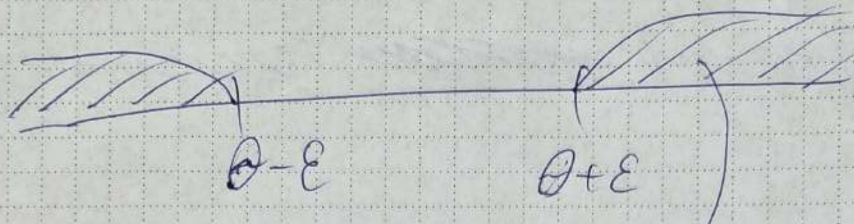
$\theta+\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ при каком-то $n \geq N$ мы попадём сюда

$$= 1-\left(1-\left(1-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n\right) = \left(1-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta}} > 0$$

$\Rightarrow$ оценка $\tilde{\theta}_2$ не состоятельна

Исслед на состоятельность $\theta_2 = x_{min}$:

$$P(|x_{min} - \theta| \geq \varepsilon) = P(x_{min} \leq \theta - \varepsilon) =$$



вер-ть попасть сюда $= 0$

$$\left(P(x_{min} \geq \theta + \varepsilon) = 0\right)$$

$$= \Phi(\theta - \varepsilon) = 1 - \left(1 - F(\theta - \varepsilon)\right)^n =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

т.е. $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \theta > 0$: $\frac{\varepsilon}{\theta} < 1$

$\Rightarrow \theta_2$ не явл. состоятельной.

③ $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$

$M\tilde{\theta}_3 = M x_{max}$

$$x_{max} \sim \underbrace{\left(F(x)\right)^n}_{\Psi(x)}$$

$$\psi(x) = \Psi'(x) = n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \{(0;\theta)\}$$

$$M x_{max} = \int_0^\theta x \cdot n \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}\, dx =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \theta$$

смещённая оценка

$$\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} \cdot x_{max}$$

$M\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} M x_{max} = \theta$ несмещ.

$$D\tilde{\theta}_3' = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot D x_{max}$$

$$M x_{max}^2 = \int_0^\theta x^2 n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{\theta^2 n}{n+2}$$

$$\mathcal{D}x_{max} = \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \ldots = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$\mathcal{D}\tilde{\theta}_3' = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies$$

$\implies$ оц. состоятельна

T1. (1) Док-во состоятельности оценки $\tilde{\theta}'_3 = \frac{n+1}{n} \cdot x_{max}$ по определению.

Опр. $\forall \theta \in \Theta \; \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\tilde{\theta}'_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$P(|\tilde{\theta}'_3 - \theta| \geq \varepsilon) = P(\tilde{\theta}'_3 - \theta \geq \varepsilon) + P(-(\tilde{\theta}'_3 - \theta) \geq \varepsilon) =$$

$$= P(\tilde{\theta}'_3 - \theta \geq \varepsilon) + P(\tilde{\theta}'_3 - \theta \leq -\varepsilon) = P(\tilde{\theta}'_3 \geq \theta + \varepsilon) +$$

$$+ P(\tilde{\theta}'_3 \leq \theta - \varepsilon) = P\Big(\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \cdot x_{max} \geq \theta + \varepsilon\Big) +$$

$\Rightarrow$ это событие возможно!

$$+ P\left(\frac{n+1}{n} \cdot x_{max} \leq \theta - \varepsilon\right) = 1 - P\left(\frac{n+1}{n} \cdot x_{max} < \theta + \varepsilon\right) +$$

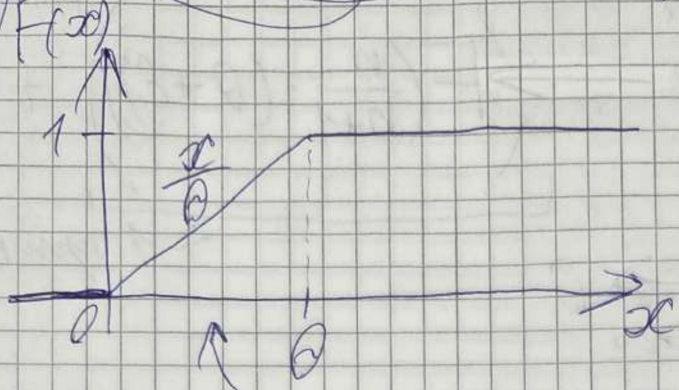
$$+ P\left(x_{max} \leq \frac{n}{n+1} \cdot (\theta - \varepsilon)\right) = 1 - P\left(x_m < \frac{n}{n+1} \cdot (\theta + \varepsilon)\right) +$$

$$+ P\left(x_{max} < \frac{n}{n+1} \cdot (\theta - \varepsilon)\right) =$$

может поставить знак "меньше", т.к. ф-ция распред. $\Psi(x)$ сл. вел. x_{max} "скачков" не имеет
$(\Psi(x) = (F(x))^n$, $F(x)$ - непрер на $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.)

$$= 1 - \Psi\left(\frac{n}{n+1} \cdot (\theta + \varepsilon)\right) + \Psi\left(\frac{n}{n+1} \cdot (\theta - \varepsilon)\right) =$$

$$= 1 - \left(F\left(\frac{n}{n+1}\cdot(\theta+\varepsilon)\right)\right)^n + \left(F\left(\frac{n}{n+1}\cdot(\theta-\varepsilon)\right)\right)^n$$



$$F\left(\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{<1}\cdot\underbrace{(\theta-\varepsilon)}_{<\theta}\right)$$

$$\Leftarrow \frac{n}{n+1}\cdot(\theta-\varepsilon)<\theta \quad \forall\theta\ \forall\varepsilon\ \forall n$$

аргумента попадает в эту область, где

$$F(x)=\frac{x}{\theta} \Rightarrow F\left(\frac{n}{n+1}\cdot(\theta-\varepsilon)\right)=\frac{n\cdot(\theta-\varepsilon)}{(n+1)\cdot\theta}$$

$\Rightarrow \frac{n}{n+1}\cdot(\theta+\varepsilon)$ [redacted]

[redacted] $\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \Rightarrow$ [redacted]

$$\Rightarrow \forall n\geq N\in\mathbb{N} \hookrightarrow \underbrace{\frac{n}{n+1}\cdot(\theta+\varepsilon)\geq\theta}$$

(при достаточно больших n будет верно)

А при $x\geq\theta$ $F(x)=1$

$$\forall n\geq N \hookrightarrow \left(F\left(\underbrace{\frac{n}{n+1}\cdot(\theta+\varepsilon)}_{=1 \text{ при достаточно больших } n}\right)\right)^n = 1$$

Тогда $P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geq \varepsilon) = 1 - \left(F\left(\frac{n}{n+1}\cdot(\theta+\varepsilon)\right)\right)^n +$

$$+\left(F\left(\frac{n}{n+1}\cdot(\theta-\varepsilon)\right)\right)^n = 1 - \underbrace{\left(F\left(\frac{n}{n+1}\cdot(\theta+\varepsilon)\right)\right)^n}_{=1 \text{ при } n\to\infty} +$$

$$+\underbrace{\left(\frac{n\cdot(\theta-\varepsilon)}{(n+1)\cdot\theta}\right)^n}_{<1 \quad <1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ оценка $\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n}\cdot x_{max}$ состоятельна,

ч.т.д.

Т1. (2) Исследование оценки $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$ на состоятельность.

$x_{max} \sim \Psi(x) = (F(x))^n$

1) Ранее было доказано, что $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$ — смещённая оценка $\Rightarrow$ дост. усл. состоятельности не применимо.

2) Попробуем док-ть состоятельность $\tilde{\theta}_3$ по определению.

Опр. $\forall \theta \in \Theta \; \forall \varepsilon > 0 \; \hookrightarrow P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) = P(\tilde{\theta}_3 \geq \theta + \varepsilon) + P(\tilde{\theta}_3 \leq \theta - \varepsilon) =$$

$$= P(x_{max} \geq \theta + \varepsilon) + P(x_{max} \leq \theta - \varepsilon) \; \ominus$$

x_{max} — один из элементов выборки.

Т.к. $x \sim R(0, \theta)$ (по усл.), то ни один элемент не может лежать правее отрезка $[0, \theta]$ (т.е. $\forall x \leq \theta$) $\Rightarrow x_{max} \leq \theta \Rightarrow$

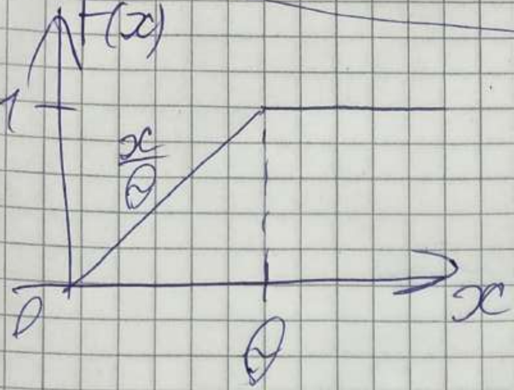
$\Rightarrow x_{max} < \theta + \varepsilon$

Значит, $P(x_{max} \geq \theta + \varepsilon) = 0$.

$$\ominus \; P(x_{max} \leq \theta - \varepsilon) = P(x_{max} < \theta - \varepsilon) = \Psi(\theta - \varepsilon) =$$

можем поставить знак "<", т.к. ф-ция распр. сл. вел. x_{max} не имеет скачков.

$$= \left(F(\theta-\varepsilon)\right)^n \overset{*}{=}$$



аргумент $\theta-\varepsilon \in [0,\theta]$

где $F(x)=\dfrac{x}{\theta}$.

$$\overset{*}{=} \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$<1$$

Получили:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow P(|\tilde{\theta}_3-\theta| \geq \varepsilon) =$$

$$= \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

То есть, оценка $\tilde{\theta}_3$ явл. состоятельной.

(4) $\tilde{\Theta}_4 = x_1 + \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=2}^{n} x_i$

1) $M\tilde{\Theta}_4 = Mx_1 + \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=2}^{n} Mx_i = M\xi + \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=2}^{n} M\xi =$

$= \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$ несмещ.

2) $D\tilde{\theta}_n = Dx_1 + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=2}^{n} Dx_i = \frac{\theta^2}{12} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\theta^2}{12}$

$\not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

дост. усл. не вып!

По опр.: $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

$x_1 + \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=2}^{n} x_i \xrightarrow{P}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n \xrightarrow{P} \xi \\ \eta_n \xrightarrow{P} \eta \end{array} \right| \Longrightarrow \begin{array}{l} \xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta \\ \xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta \end{array} \Bigg\}$$

$x_1 \xrightarrow{P} \xi$

ЗБЧ Хинчина
ξ_n – незав, одинак. распр.
и $\exists M\xi_n < \infty$
$\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_n \xrightarrow{P} M\xi_1$

По ЗБЧ Хинч:

$$\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=2}^{n} x_i \xrightarrow{P} \frac{\theta}{2}$$

$(= M\xi)$

$$x_1 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} x_i \xrightarrow{P} \xi + \frac{\theta}{2} \neq \theta \Rightarrow \text{не состоят.}$$

$(\xi \in R(0;\theta) \Rightarrow 0 \le x \le \theta)$

•) Сравнение эффективностей оценок.
несостоятельные выкинули.
Остались $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_3'$.

$$D\tilde{\theta}_1 = \frac{\theta^2}{3n} \qquad D\tilde{\theta}_3' = \frac{\theta^2}{(n+2)n}$$

$$\frac{1}{3n} \qquad \frac{1}{n(n+2)}$$

$$n^2 + 2n > 3n$$

справедл для $n > 1$

т.е. для $n > 1$ $\tilde{\theta}_3'$ более эффективна, чем $\tilde{\theta}_1$