6.10 中国邮递员问题

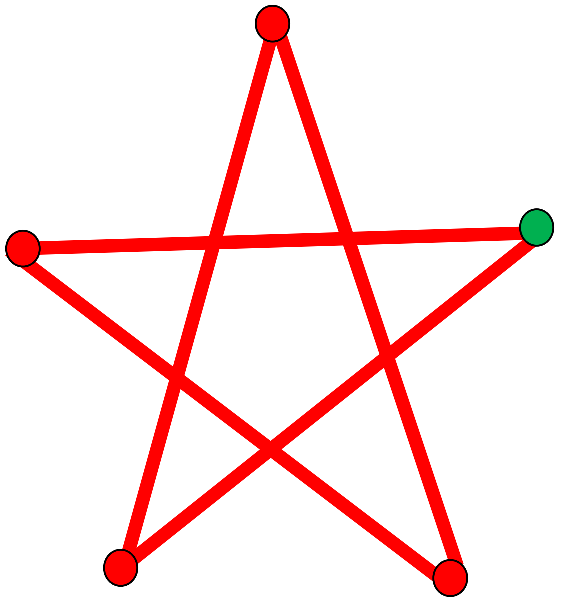
- 图的存储表示；
- 顶点的度数；
- 图的连通性；
- 顶点间的最短路径；
- 欧拉图的判断，欧拉回路输出；

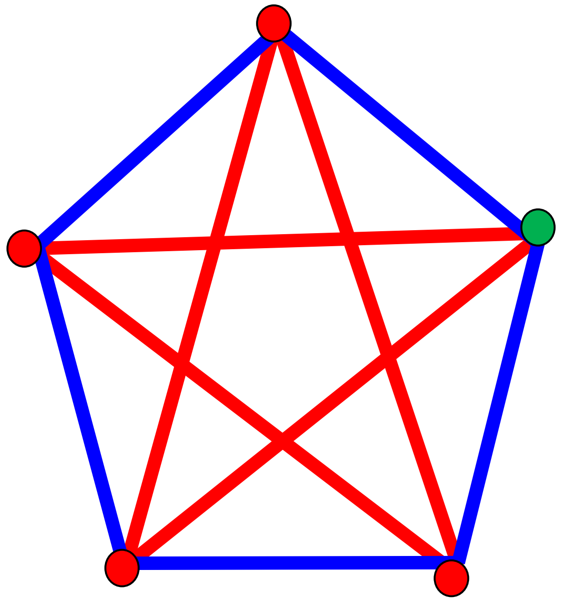
6.10 中国邮递员问题

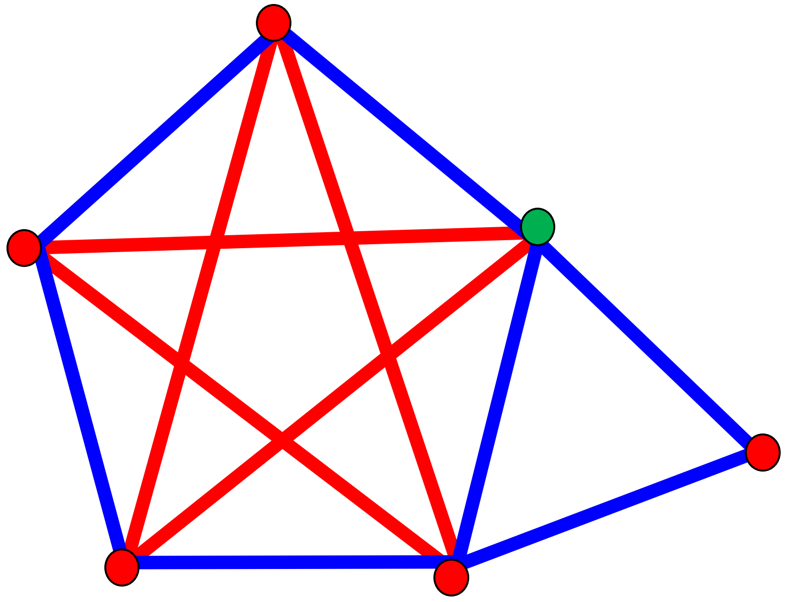
问题提出：我国数学家管梅谷先生在20世纪60年代提出

问题描述：一个邮递员从邮局出发走遍每条街道，最后返回邮局，找到一条最短的行走线路？

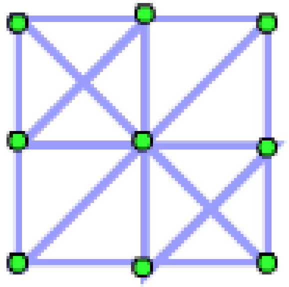
最短欧拉回路！



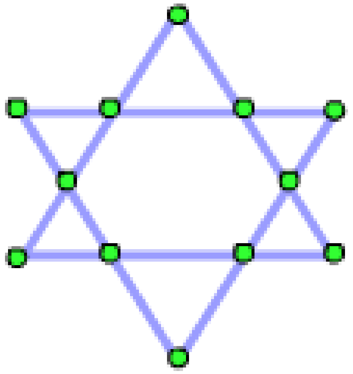




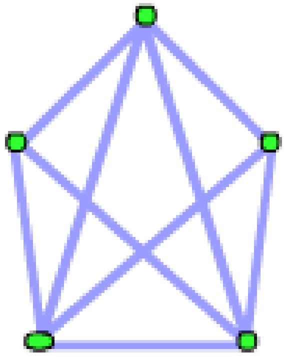
一笔画游戏



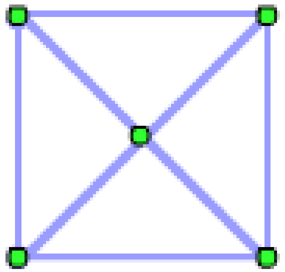
☒



☑



☑



☒

满足“一笔画”：

- 凡是由偶点组成的连通图,一定可以一笔画成.画时可以把任一偶点为起点,最后一定能以这个点为终点画完此图
- 凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点）,一定可以一笔画成.画时必须把一个奇点为起点,另一个奇点终点
- 其他情况的图都不能一笔画出

实例：一个邮递员投递信件要走的街道如图所示，图中的数字表示各条街道的千米数，他从邮局出发，要走遍各街道，最后回到邮局。怎样走才能使所走的行程最短？全程多少千米？

怎么样使非欧拉图变为欧拉图?

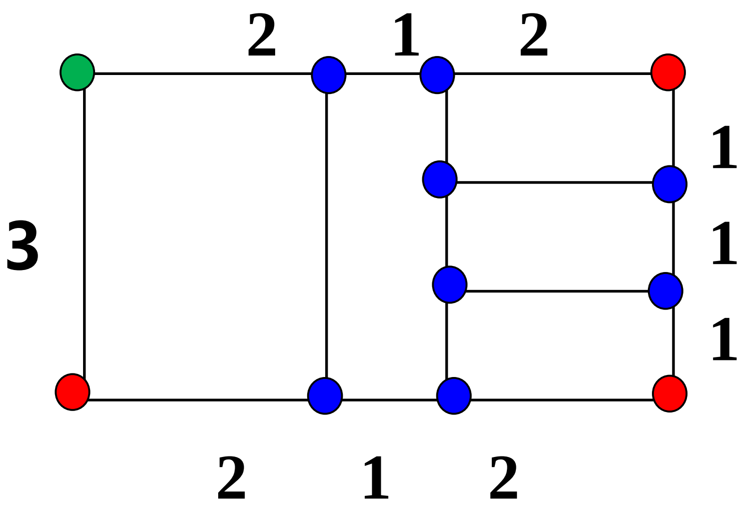
除去奇点!

怎么样除去奇点?

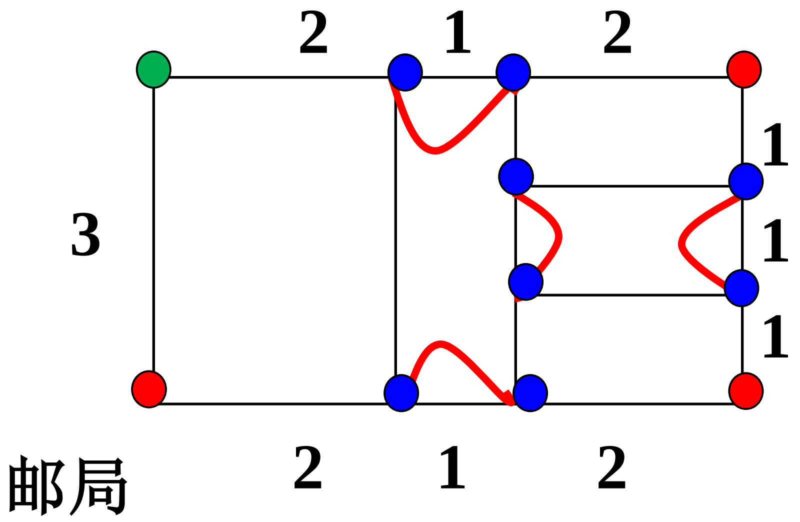
添加边或删除边。

这里应该采用的办法?

重复某些边（添加边）



分析：图中共有8个奇点，不可能不重复地走遍所有的路。必须在8个奇点间添加4条线，才能消除所有奇点，从而成为能从邮局出发最后返回邮局的一笔画。当然要在距离最近的两个奇点间添加一条连线，图中虚线所示，共添加4条连线，这4条连线表示要重复走的路，显然，这样重复走的路程最短，全程34千米。走法不唯一



中国邮递员问题

- 建立街区无向网的邻接矩阵；
- 求各顶点的度数；
- 求出所有奇度点；
- 图的连通性判断；
- 求出每一个奇度点到其它奇度结点的最短路径；
- 根据最佳方案添加边，对图进行修改，使之满足一笔画；
- 对图进行一笔画，并输出；

中国邮递员问题

其一："添加"哪些边？

- "添加"的边所依附的顶点必须均是奇度顶点
- "添加"的边必须是已有的边，也就是有的边不止走一次

其二：如何选择代价最小的边？

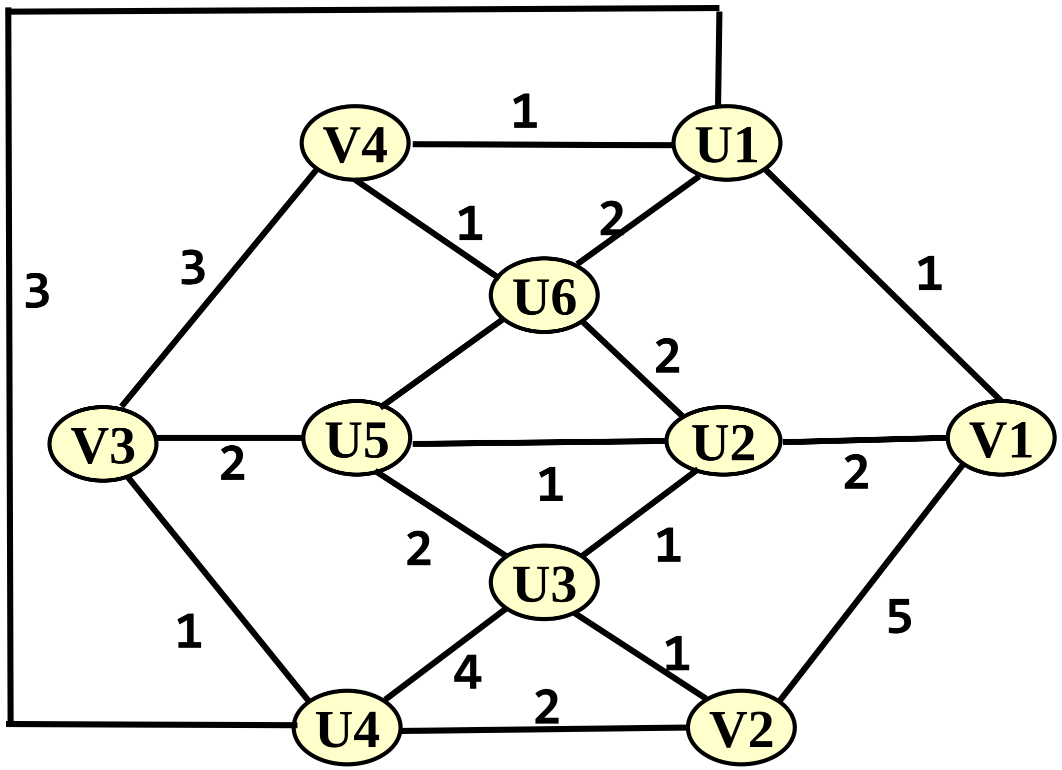
- 奇数顶点之间的最短路径
  - Dijstra算法
  - Floyd算法

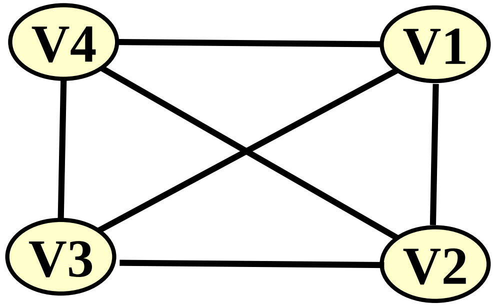
其三：输出一笔画？

- FE算法（Fleury Euler)

一个实例

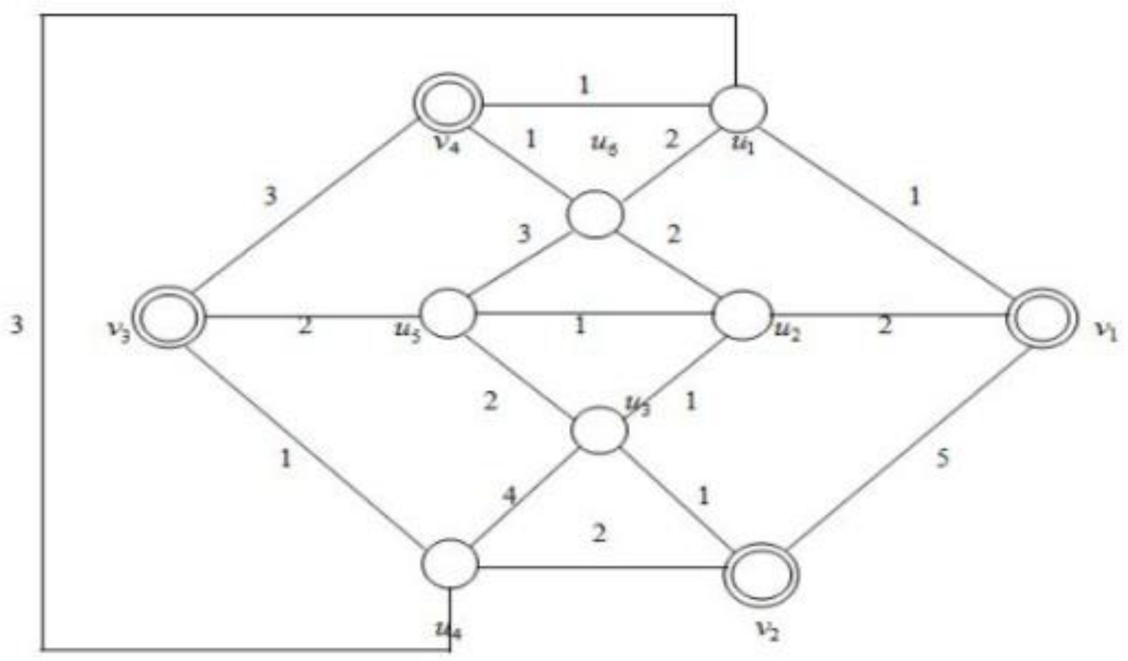
1. 求奇度点的最短路径
2. 构造奇度点间的完全加权图
3. 求图的最佳（总权最小）完备匹配
   M={1,4;2,3}
4. 求1和4之间的最短轨V1 U1 V4；
   2和3之间的最短轨V2 U4 V3；
5. 加同权边即可



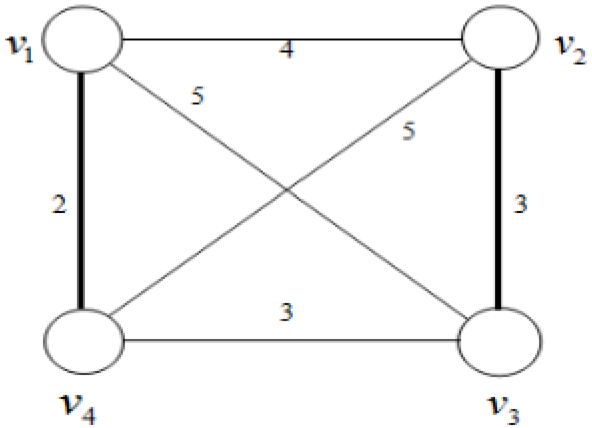


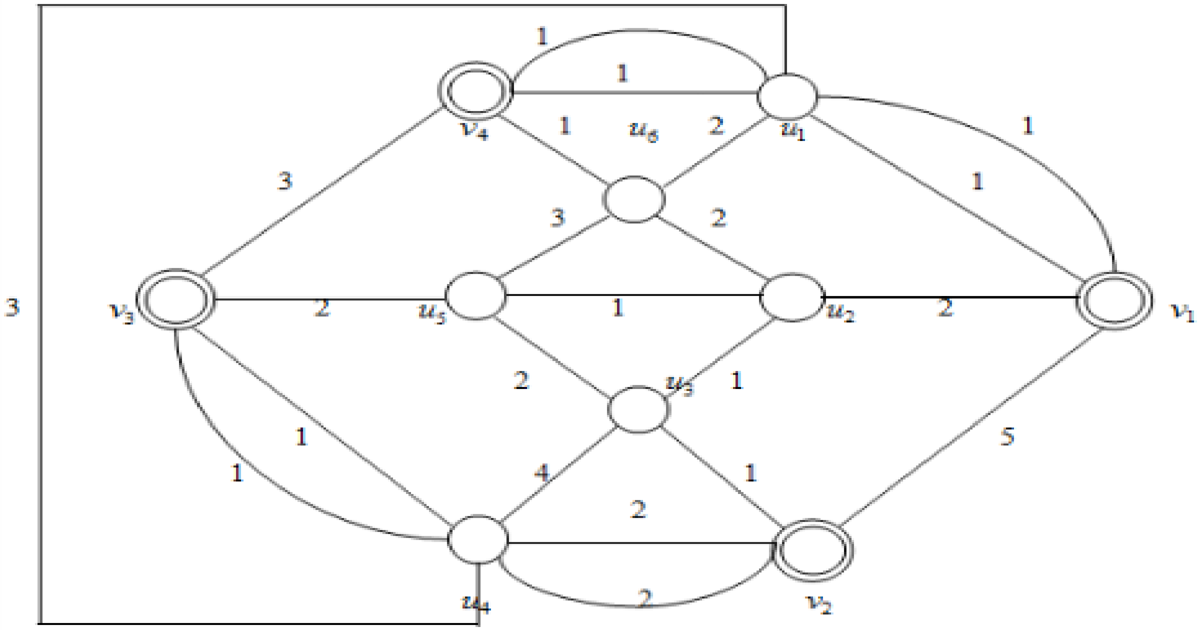
给定一个图G，M为G边集的一个子集，如果M满足当中的任意两条边都不依附于同一个顶点，则称M是一个匹配

如果一个匹配中，图中的每个顶点都和图中某条边相关联，则称此匹配为完全匹配，也称作完备匹配



1. 求奇度点的最短路径
2. 构造奇度点间的完全加权图
3. 求图的最佳（总权最小）完备匹配
   M={1,4;2,3}
4. 求1和4之间的最短轨V1 U1 V4；
   2和3之间的最短轨V2 U4 V3；
5. 加同权边即可



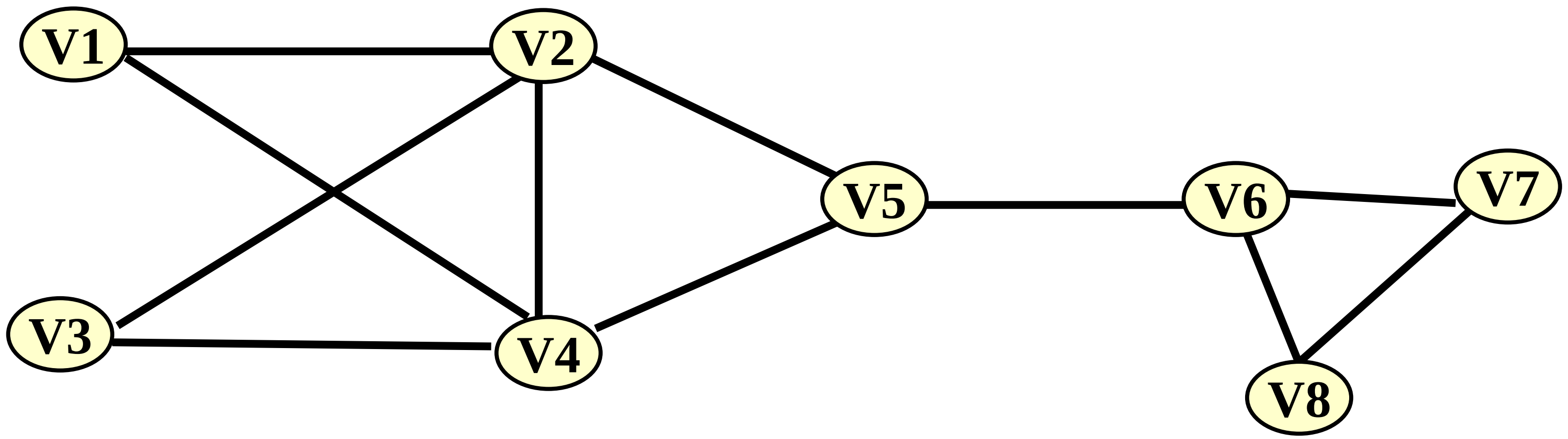


给定一个图G，M为G边集的一个子集，如果M满足当中的任意两条边都不依附于同一个顶点，则称M是一个匹配

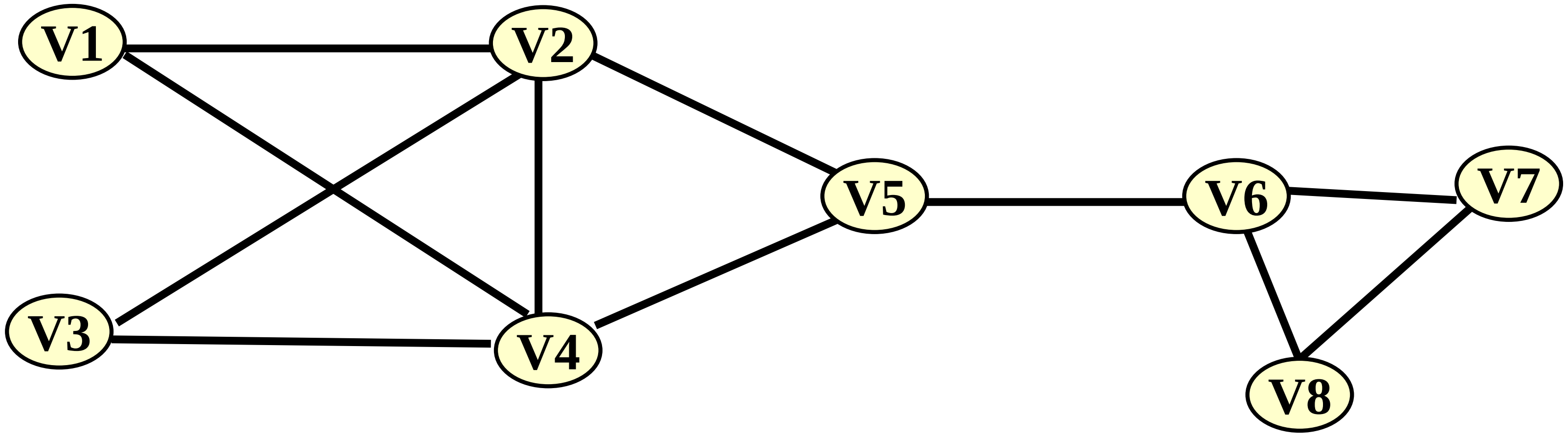
如果一个匹配中，图中的每个顶点都和图中某条边相关联，则称此匹配为完全匹配，也称作完备匹配

FE算法（Fleury Euler)

1. 取G中的起始顶点V_0，令$P_0=V_0$
2. 假设沿着$P_i = v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_iv_i$走到顶点vi，按下面方法从$E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选$e_{i+1}$
   ① e_{i+1}与v_i相关联；
   ② 除非没有别的边可供选择，否则e_{i+1}不应该是$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥
3. 当2不能再进行时算法停止



FE算法（Fleury Euler)

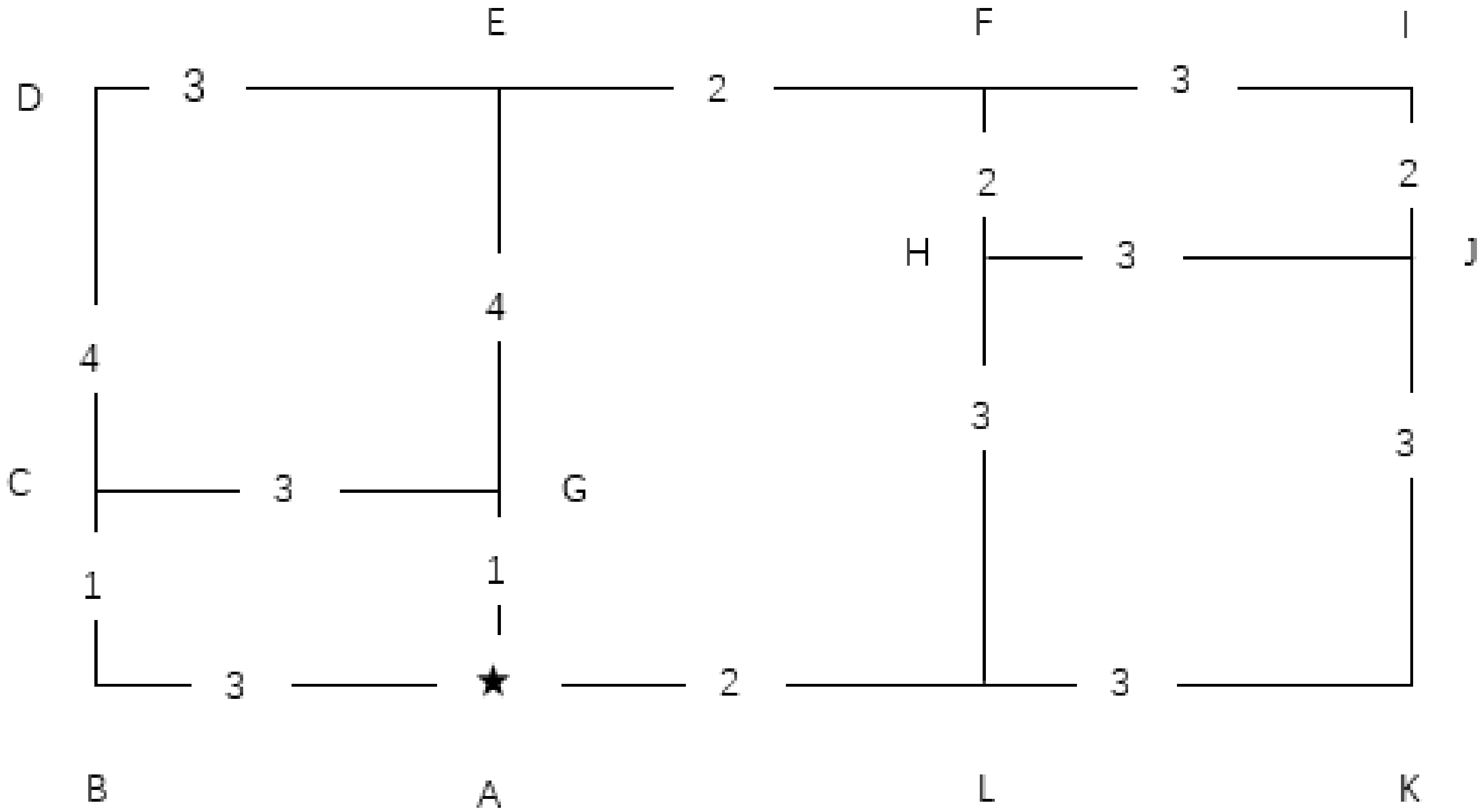


总结步骤

1. 求图G中奇度结点集合V0={v}；
2. 对V0中的每个顶点对u，v，用Dijkstra算法求距离d(u,v)；
3. 构造加权完全图；
4. 求加权图的总权最小的完备匹配M；
5. 在G中求M中同一边的结点间的最短轨；
6. 把G中在上一步求得的每条最短轨之边变成同权倍边，得到欧拉图G1；
7. 用FE算法求G1的一条欧拉回路W，W即为解；

6.10 中国邮递员问题

举例：邮递员要从邮局出发，走遍左下图(单位：千米)中所有街道，最后回到邮局，怎样走路程最短？全程多少千米？



6.10 中国邮递员问题

其二：如何选择代价最小的边？

- 奇数顶点之间的最短路径
  - Dijstra算法
  - Floyd算法
- 最小生成树的方法
  - Prim算法
  - Kruskal算法

奇度结点间最短路径计算

- 如果只有两个奇度结点，那么最短路径就是原来每条街道代价加上两个奇度顶点之间的最短代价之和；
- 如果有多个奇度结点，要进行不同的组合。
  - 假设n个奇度顶点，则组合数为(n-1)*(n-3)*(n-5)…*1
  - n=6 则组合数是5*3*=15
- 能否换个思路：解决奇度结点的配对问题，那么可以先去掉偶度结点，只考虑奇度结点，并找到它们之间的最小生成树。

具体思路

- 去掉原始图中的偶度数结点，即得到的新图中只包含原奇度数结点与题目之间的路径；
- 求新图的最小生成树
- 由最小生成树确定奇度结点的配对
- 在原始图中添加重复边

最小生成树n-1条边；
邮局问题添加边为n/2条边；
如何在n-1条边中选择n/2条边呢？