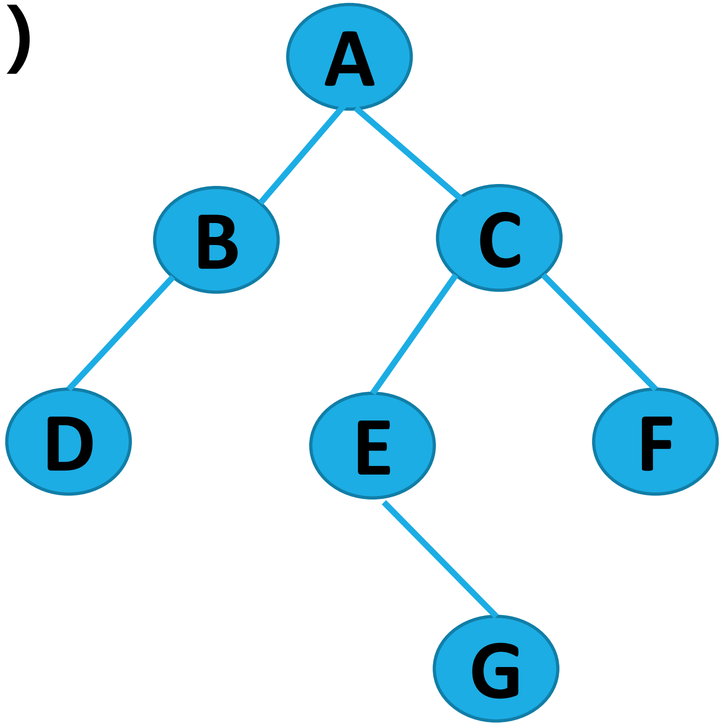
4.2 二叉树的性质

性质1. 在非空二叉树的第i层上至多有 $\underline{2^i}$ 个结点（i≥0）

归纳： $i=0$， 结点数 $=1=2^0$

假设对于 $j(0\leq j\leq i)$，结点数至多有 2^j

对于 $i=j+1$，结点数至多为 $2*2^j=2^{j+1}$

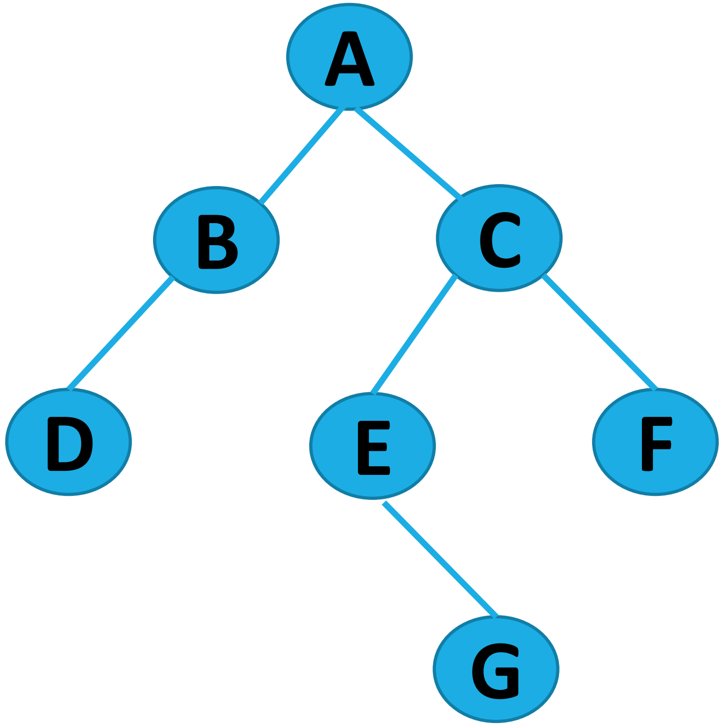


性质2. 深度为k的二叉树至多有 $\underline{2^{k+1}-1}$ 个结点（k ≥ 0）

$$M=\sum m_i\leq\sum 2^i=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1$$

二叉树的性质

性质3. 对任何一棵非空二叉树T，如果叶结点数 为n_0，度为2的结点数为n_2，则$n_0=n_2+1$



证明：

(1)$n=n_0+n_1+n_2$；二叉树的结点数为度为0，1，2的结点数之和

(2) $n=B+1$;(B为分支总数）除根结点外，每个结点都有父结点（即每个结点都有一个分支进入）

(3)$B= n_1+ 2*n_2$;二叉树的分支总数都是由度为1和2的结点发出去的

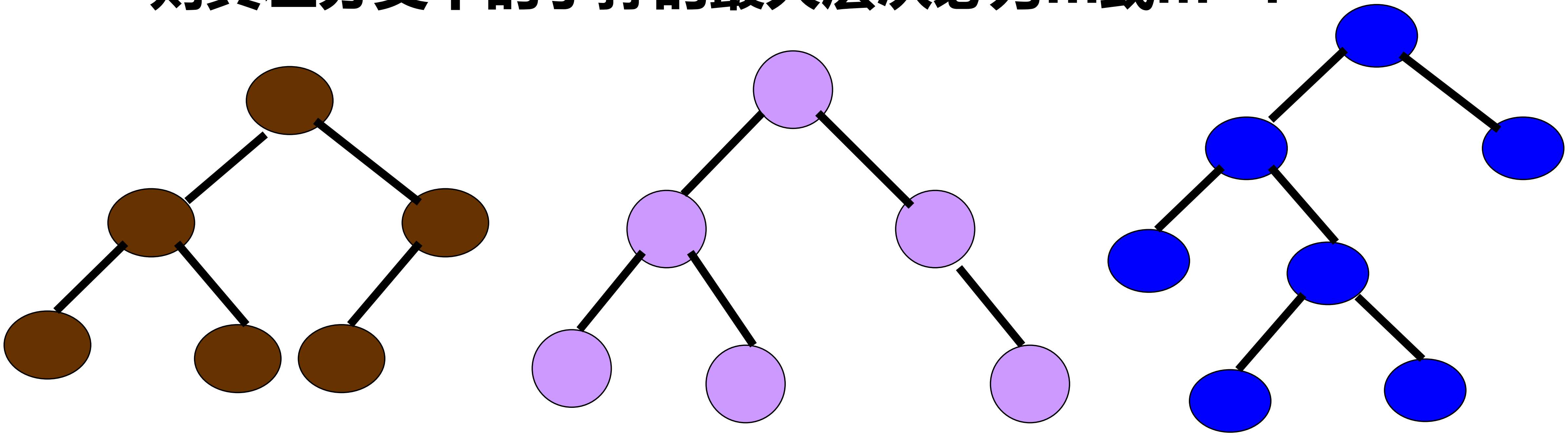
二叉树的性质

完全二叉树的特点：

（1）叶子结点只可能在层次最大的两层上出现

（2）对任一结点，若其右分支下的最大层次为m

则其左分支下的子孙的最大层次必为m或m+1



完全二叉树的性质

性质4. 具有n个结点的完全二叉树的深度k为$\lfloor \log_2 n \rfloor$

证明：深度为K的完全二叉树，则深度为K-1是满的

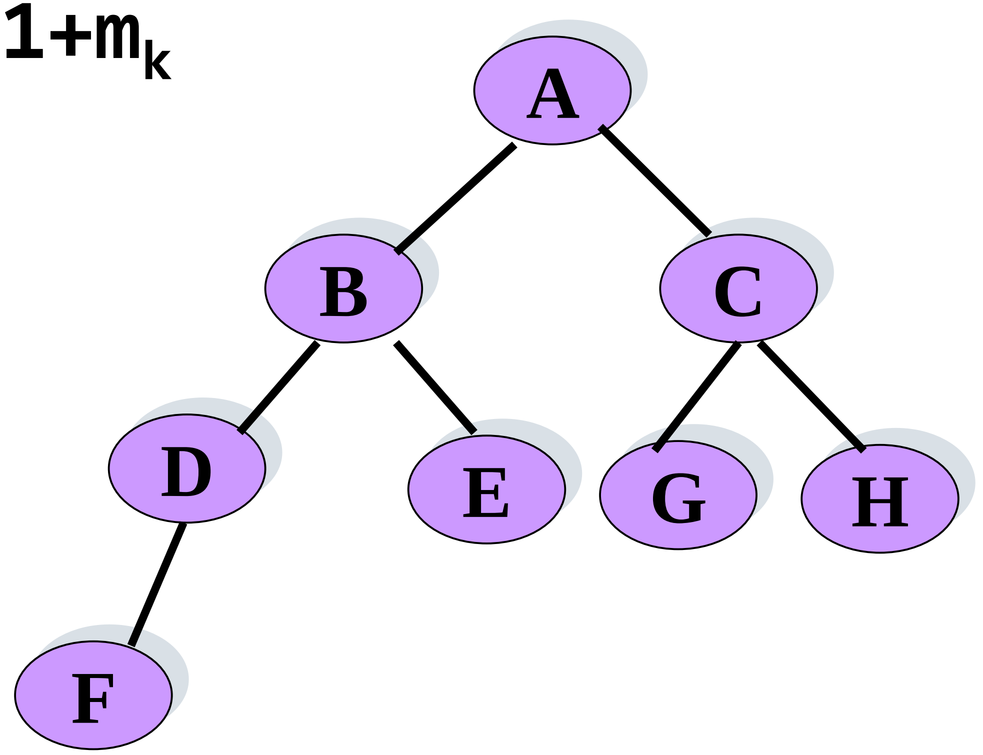
$$n=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{k-1}+m_k=2^k-1+m_k$$

$$2^k-1<n\leq 2^{k+1}-1$$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}$$

$$k \leq \log_2 n < k+1$$

$$k=\lfloor \log_2 n \rfloor$$



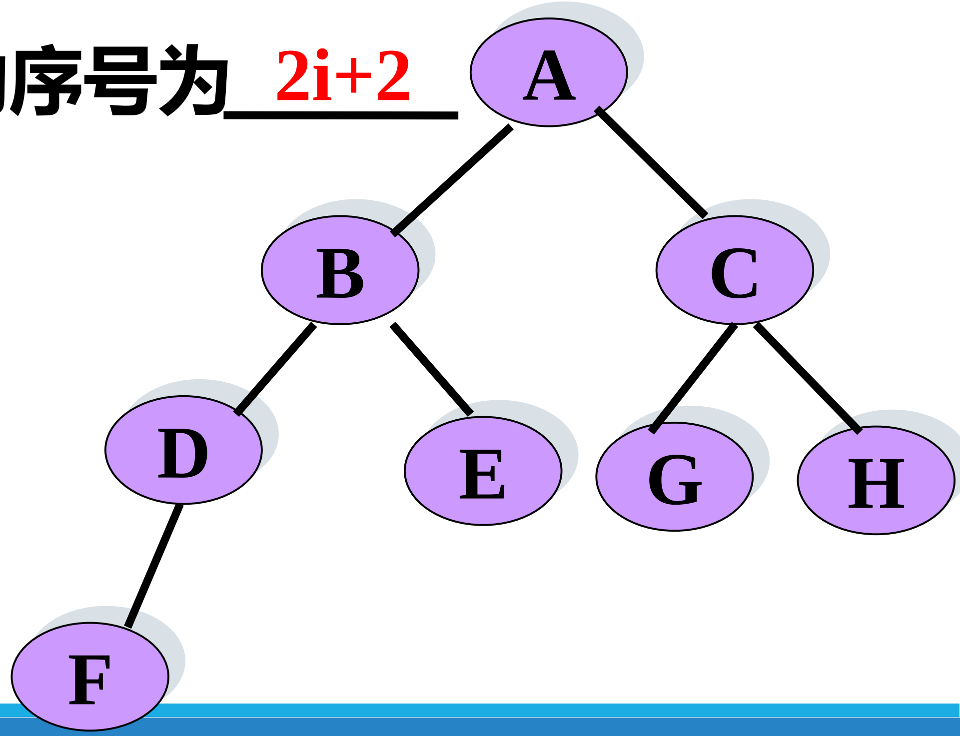
完全二叉树的性质

性质5. 如果对一棵有n个结点的**完全二叉树**按层次次序从0开始编号，则对任一结点i（$0\le i\le n-1$），有：

- $i=0$，序号结点i是根；$i>0$，其双亲结点是 $\lfloor (i-1)/2 \rfloor$
- $2i+1\le n-1$，序号为i的结点的左子女结点的序号为 $2i+1$

  $2i+1>n-1$，序号为i的结点无左子女
- $2i+2\le n-1$，序号为i的结点的右子女结点的序号为 $2i+2$

  $2i+2>n-1$，序号为i的结点无右子女



二叉树的性质

满二叉树的性质

性质6：在满二叉树中，叶结点的个数比分支结点个数多1

证明：根据性质3证明

扩充二叉树的性质

性质7：在扩充二叉树中，外部结点的个数比内部结点的个数多1

证明：扩充二叉树是满二叉树，根据性质6证明