第 33 届全国部分地区大学生物理竞赛

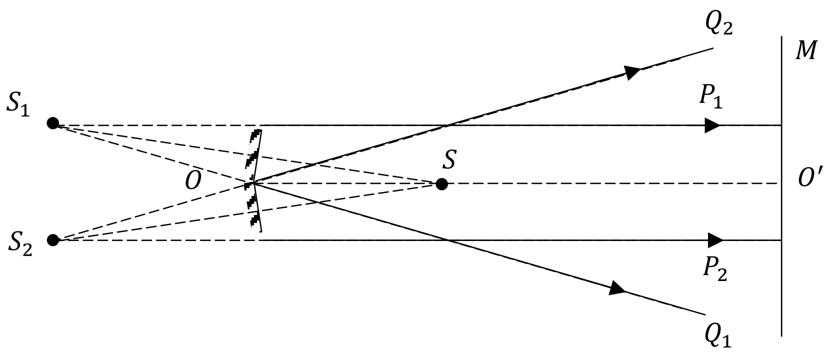
参考答案

2016.12

1. $\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{gH}$， $\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{gH}$ 。
2. 8×10^{-4}， 3×10^{-4} 。
3. $\frac{5}{2}mg$， $\left(2+\frac{\pi^2}{3}\right)l$ 。
4. $\frac{u}{u-v_s}\nu_0$， $\frac{u+v_B}{u}\nu_0$ 。
5. $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}$ 和 $4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}$， $p_0e^{-mgh/kT}$ 。
6. 不可能使热量从低温物体自发地传到高温物体而不产生任何其他影响，不可能从单一热源吸收热量使之完全转化为有用功而不产生任何其他影响。
7. $v_0>\gamma BR_0$， $\frac{v_0-\gamma R_0B}{v_0}R_0$ 。
8. $\sqrt{3}Ba^2/2RT$， $Ba^2/2\sqrt{3}RT$ 。
9. 5 Ω， 5 Ω。
10. 4， $\frac{140}{37}$ 。

11. （15 分）

解：参考题解图，S 发出的光经两块平面镜反射后形成两支相干光束。这两支光束可等效为



题解图

由 S 的两个虚像 S_1、S_2 发出，将 S_1、S_2 视为两个线光源，则问题转化为杨氏双缝干涉。考虑到反射机制，S_1 发出的光束由题解图中的射线 S_1P_1 和射线 S_1Q_1 界定，S_2 发出的光束由射线 S_2P_2 和射线 S_2Q_2 界定。由于屏幕足够远，为使这两支光束在 M 上能相遇形成相干叠加，便要求 S_1P_1 不能与两平面镜夹角的角平分线 OO' 向下相交成锐角。同理，S_2P_2 不能与OO' 向上相交成锐角。即取 S_1P_1、S_2P_2 分别与 OO' 平行（即夹角分别为零）时，可保证在很远的屏幕 M 上必有干涉图样，而且平面镜的宽度 a 又可取为最小，其值为 （8 分）

$$a_{\min}=2\left[d\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=2d\cdot\sin\alpha \qquad （5 分）$$

因 α 为小角度，故

$$a_{\min}=2d\cdot\sin\alpha\approx2d\alpha=4\text{cm} \qquad （2 分）$$

12. （15 分）

解：（1）无穷小过程

$$dQ = pdV + \frac{3}{2}\nu RdT, \qquad dp > 0, \qquad dV < 0$$

过程方程

$$(p + p_0)V = \nu RT_0, \qquad pV = \nu RT$$
$$\Rightarrow \nu RT = \nu RT_0 - p_0 V \Rightarrow \nu RdT = -p_0 dV$$

代入上式，得

$$dQ = pdV + \frac{3}{2}(-p_0 dV) = \left(p - \frac{3}{2}p_0\right)dV$$

结论：

$p > \frac{3}{2}p_0$ ： $dV < 0$，$dQ < 0$　　放热区域

$p = \frac{3}{2}p_0$ ： $dV < 0$，$dQ = 0$　　吸、放热区域转换点

$0 < p < \frac{3}{2}p_0$ ： $dV < 0$，$dQ > 0$　　吸热区域　　（7 分）

（2） A 点：

$p_A = \frac{3}{2}p_0$，由 $(p_A + p_0)V_A = \nu RT_0 \Longrightarrow V_A = \frac{2}{5}\nu R\frac{T_0}{p_0}$

由 $p_A V_A = \nu RT_A \Longrightarrow T_A = \frac{3}{5}T_0$

B 点：

由 $p_B = p_A + p_0 \Longrightarrow p_B = \frac{5}{2}p_0$，$T_B = T_0$

由 $p_B V_B = \nu RT_B \Longrightarrow V_B = \frac{2}{5}\nu R\frac{T_0}{p_0}$

C 点：

$T_C = T_0$，$p_C = p_A = \frac{3}{2}p_0$，由 $p_C V_C = \nu RT_C \Longrightarrow V_C = \frac{2}{3}\nu R\frac{T_0}{p_0}$

$ABCA$ 过程效率：η_{ABCA}

$$Q_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A) = \frac{3}{5}\nu RT_0$$
$$Q_{BC} = \nu RT_0 \ln\frac{V_C}{V_B} = \nu RT_0 \ln\frac{5}{3}$$
$$Q_{CA} = -\frac{5}{2}\nu R(T_C - T_A) = -\nu RT_0$$
$$\Longrightarrow \eta_{ABCA} = 1 - \frac{-Q_{CA}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 1 - \frac{1}{\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{3}} = 1 - \frac{1}{0.6 + 0.51} \approx 10\%$$　　（8 分）

13.（15 分）

解：银原子自旋磁矩在磁场中的势能：　$W = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu_z B$　　（3 分）

z 轴方向受力：　$f_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} = G\mu_z = \pm G\mu_{\mathrm{B}}$　　（5 分）

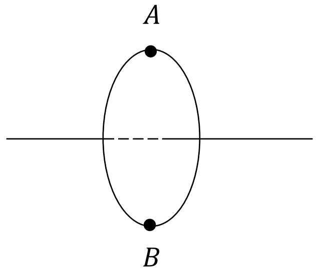
设银原子的质量为 m，z 轴方向加速度：$a = \frac{f_z}{m} = \pm\frac{G\mu_{\mathrm{B}}}{m}$　　（2 分）

通过磁极的时间：$t = \frac{L}{\sqrt{8kT/\pi m}}$　　（2 分）

痕迹偏离中心的距离：$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{\pi G\mu_{\mathrm{B}} L^2}{16kT}$　　（3 分）

14.（15 分）

解：（1）质量均匀分布的圆环在其中央轴线上的万有引力场强，可等效为将环质量平分给环上两个对径点（如题解图 1 中 A、B 点）后在原轴线上的场强。



题解图 1

质量 M 均匀分布、半径 R 的球体，其质量体密度为

$$\rho = 3M/4\pi R^3$$

如题解图 2 所示，建立 $O - xy$ 平面，原点 O 位于球心，在 $O - xy$ 平面上取 $\{r、\theta\}$ 位置附近小面元 dS。将此小面元

绕 y 轴旋转一周形成一细环体，它所含质量为

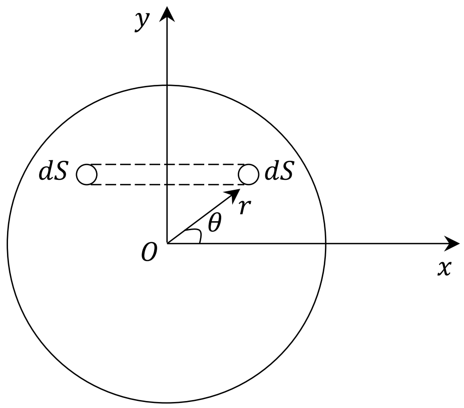
$$dM = \rho(2\pi r\cos\theta \cdot dS)$$

细环体上质量均匀分布，它在中央轴，即 y 轴上的引力场强等效为将 dM 等分给两个小面元后在 y 轴上的引力场强。两个小面元上的质量面密度同为

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{dM}{dS} = 3Mr\cos\theta/4R^3$$

用这种方法将球体质量集中在 xy 平面上的 R 半径圆面上，则球与圆面在 y 轴直径通道上的场强分布一致，故自由质点在该通道上均作简谐振动。因此，

$$\sigma(r、\theta) = \begin{cases} 3Mr\cos\theta/4R^3 & -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sigma(r、\pi-\theta) & \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$



题解图 2

（5 分）

（2）分步讨论

R' 的确定：

新圆盘面密度增加一倍，质量便为 $2M$，R' 小圆盘与外环质量均为 M，对小圆盘有

$$\sigma'(r、\theta) = 3Mr\cos\theta/4R'^3\ ,\qquad 2\sigma(r、\theta) = 6Mr\cos\theta/4R^3$$

即得

$$R' = R/\sqrt[3]{2}$$

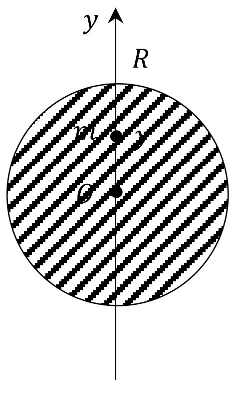
T_1 的计算：

同于质量为 M、半径为 R 匀质球直径隧道中的振动周期。如题解图 3 所示，自由质点 m 处于 y 位置时，将圆盘还原为匀质球，则受力

$$F_y(1) = -GM_y m/y^2\ ,\qquad M_y = \rho\frac{4}{3}\pi y^3$$

即为线性恢复力

$$F_y(1) = -GM_y m/y^2 \Longrightarrow 简谐振动\begin{cases}\omega = \sqrt{GM/R^3} \\ T_1 = 2\pi R\sqrt{R/GM}\end{cases}\qquad（4 分）$$



题解图 3

T_2 与 T_1 的大小比较：

参考题解图 4，自由质点在 $R' \le y \le R$ 处受力

$$F_y(2) = -GMm/y^2 \Longrightarrow |F_y(2)| \ge |F_y(1)|$$

而在 $0 \le y \le R'$ 处受力

$$F_y(2) = -GMmy/R'^3 \Longrightarrow |F_y(2)| > |F_y(1)|$$

自由质点从 $y = R$ 处静止出发后，处处受力变大，加速度值也变大，速度值也处处变大。考虑到经过 $|\Delta y|$ 所需时间 $\Delta t = |\Delta y|/|v|$，故必有 $\Delta t(2) < \Delta t(1)$，对 $y = R$ 到 $y = 0$ 的四分之一周期有

$$T_2/4 < T_1/4 \qquad（3 分）$$

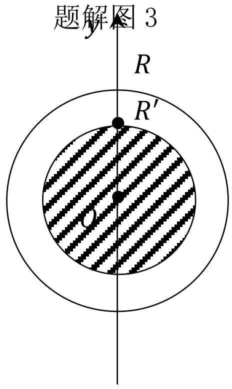
即得

$$T_2 < T_1$$

T_3 与 T_1 的大小比较：

自由质点在环内 $R' \le y \le R$ 处受力可算得为

$$F_y(3) = -2\,GMmy/R^3 + GMm/y^2$$



题解图 4

不再为线性恢复力，故其运动时间较难计算。但它在空洞内匀速运动，往返时间 t 较易求得，且有

$$T_3 > t$$

质点在 $y = R$ 处所具势能为

$$E_P(R) = -GM_{环}m/R = -GMm/R$$

在 $y=R'$ 处所具势能为

$$E_P(R')=\sum_{R'}^{R}(-G\Delta M\cdot m/r)$$

其中 ΔM 为被还原的 $r\longrightarrow r+\Delta r$ 球壳质量

$$\Delta M=\rho' 4\pi r^2\Delta r=6Mr^2\Delta r/R^3$$

由此可算得（或借所学电学知识直接写出）

$$E_P(R')=(-3GMm/R)\left(1-\frac{{R'}^2}{R^2}\right)$$

质点 R' 在处动能及速度大小为

$$E_K(R')=E_P(R)-E_P(R')=(GMm/R)\left(2-\frac{3{R'}^2}{R^2}\right)$$

$$v(R')=\sqrt{2E_K(R')/m}=\sqrt{2(GM/R)\left(2-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)}$$

故空洞内匀速运动往返时间为

$$t=4R'/v(R')=\left(2\sqrt{2}/\sqrt{2\sqrt[3]{4}-3}\right)R\sqrt{R/GM}>T_1=2\pi R\sqrt{R/GM} \qquad （2 分）$$

附注：

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt[3]{4}-3}}\approx\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\times 1.59-3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{0.18}}>2\sqrt{10}>2\pi$$

因此

$$T_3>T_1$$

据上述讨论最后 T_1 、T_2 、T_3 间大小关系为

$$T_3>T_1>T_2 \qquad （1 分）$$

15. （20 分）

解：I：平面反射成像

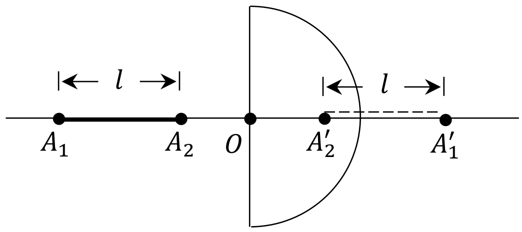
取 $R\longrightarrow\infty$ ，即成平面反射成像

$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=0\Longrightarrow v=-u$ 虚像

如题解图所示，有

虚像 $A_1'A_2'$ ：$\overline{OA_2'}=\overline{OA_2}=0.020\text{m}$

$\overline{A_2'A_1'}=l=0.20\text{m}$ （5 分）



题解图

II：平面折射----球面反射----平面折射成像

A 点（ A_1 点或 A_2 点）平面折射成像

$R\longrightarrow\infty$ ，即成平面折射成像

$$\frac{1}{u_1}+\frac{n}{v_1}=0\Longrightarrow v_1=-nu_1 \qquad （3 分）$$

凹球面反射成像

$$\frac{1}{u_2}+\frac{1}{v_2}=\frac{2}{R}\ ,u_2=R-v_1=R+nu_1\ ,v_2=\frac{R(R+nu_1)}{R+2nu_1} \qquad （3 分）$$

平面折射成像

$$\frac{n}{u_3}+\frac{1}{v_3}=0\ ,u_3=R-v_2=\frac{Rnu_1}{R+2nu_1}\ ,v_3=-\frac{Ru_1}{R+2nu_1} \qquad （3 分）$$

A_1 点成像点 A_1''

$$u_1=\overline{OA_1}=\overline{OA_2}+l=0.22\text{m}, \qquad v_3=-\frac{0.128\times 0.22}{0.128+2n\times 0.22}\text{m}<0$$

$\Longrightarrow A_1''$ 点在 O点右侧 （3 分）

A_2 点成像点 A_2''

$$u_1=\overline{OA_2}=0.02\text{m}, \qquad v_3=-\frac{0.128\times 0.02}{0.128+2n\times 0.02}\text{m}<0$$

$\Longrightarrow A_2''$ 点在 O点右侧，且 A_1'' 点在 A_2'' 点右侧

结论：为使条形物 A_1A_2 的两个像恰无重叠地连接在一起，要求 A_1'' 与 A_2' 重合，即要求

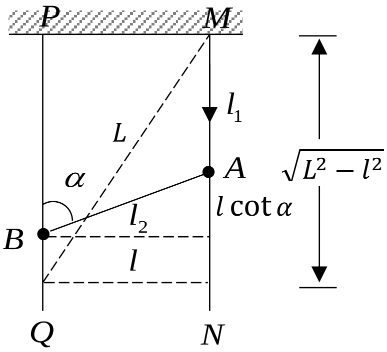
$$-\frac{0.128\times 0.22}{0.128+2n\times 0.22}\mathrm{m}=-\overline{OA_2'}=-0.02\mathrm{m}$$

即可求得

$$n=2.91\approx 3 \qquad （3 分）$$

16. （20 分）

解：（1）绳段 MA、 AB 若不是伸直状态，两环受力不会平衡。因此，平衡态只需讨论两个绳段均处于伸直状态时系统的重力势能值与角 α 之间的函数关系。



题解图 1

将 $l_1=0$ 时系统所处状态的势能定为零值。$l_1>0$ 时，有

$$l_1=L-l_2=L-\frac{l}{\sin\alpha}>0$$

参考题解图 1，系统重力势能为

$$E_P=-mgl_1+mg\left(\sqrt{L^2-l^2}-l_1-l\cot\alpha\right)$$

$$=mg\left[\sqrt{L^2-l^2}-2\left(L-\frac{l}{\sin\alpha}\right)-l\cot\alpha\right]$$

$$=mg\left(\sqrt{L^2-l^2}-2L+\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}l\right)$$

E_P 对 α 求微商，得

$$\frac{dE_P}{d\alpha}=mgl\frac{\sin^2\alpha-(2-\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}mgl$$

系统处于平衡位置时，有

$$\frac{dE_P}{d\alpha}=0 \ \Rightarrow 1-2\cos\alpha=0 \ \Rightarrow \alpha=60^o$$

为判定该平衡态的稳定性，作下述运算：

$$\frac{d^2E_P}{d\alpha^2}=\frac{2\sin\alpha\cdot\sin^2\alpha-(1-2\cos\alpha)\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^4\alpha}mgl$$

$$=2\left[\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{(1-2\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right]mgl$$

$\alpha=60^o$ 时，$\dfrac{d^2E_P}{d\alpha^2}=2mgl/\sin 60^o>0$ （此时 $l_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}l<L$） （4 分）

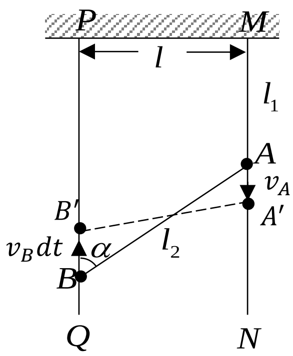
故为稳定平衡态。

（2）

（2.1）参考题解图 2，为使 A 在 B 的上方可以朝下运动，B 在 A 的下方可以朝上运动，要求 $\alpha<90^o$，故 l_1 可取范围为 $l_1<L-l$ （1 分）

（2.2）参考题解图 2，有

$v_A d\,t+\overline{A'B'}={}_2$，



题解图 2

$$\overline{A'B'} = l_2 - v_A dt\cos\alpha - v_B dt\cos\alpha$$

即得 $v_B = \dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_A$ （1）

微商可得

$$a_B = \frac{dv_B}{dt}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}v_A$$

$$+\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\frac{dv_A}{dt}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}v_A + \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A$$

又因 $l_1 = L - \dfrac{l}{\sin\alpha} \Rightarrow v_A = \dfrac{dl_1}{dt} = \dfrac{l\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}v_A$

可得 $a_B = \dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\dfrac{v_A^2}{l} + \dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A$ （2） （3 分）

（3）$L = 2l$ 时，初态和过程态中系统重力势能分别为

$$\alpha_0 = 30^o,\quad E_{P0} = 0,\quad \alpha \Rightarrow E_P(\alpha) = \left(\sqrt{3} - 4 + \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)mgl$$

（3.1）初态 $v_A = v_B = 0$，$a_B = \dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A$

由动力学方程得

$$\begin{cases} mg + T\cos\alpha - T = ma_A \\ T\cos\alpha - mg = ma_B = \dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}ma_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)T = ma_A \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}T - mg = \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}ma_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}T - mg = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\left[mg + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)T\right]$$

解得 $T = \dfrac{2}{5-2\sqrt{3}}mg = 1.302mg$

再由 $ma_A = mg + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\dfrac{2}{5-2\sqrt{3}}mg = \dfrac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}mg$

得 $a_A = \dfrac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}g = 0.826g$，$a_B = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}a_A = \dfrac{9-5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-6}g = 0.128g$ （3 分）

（3.2）$\alpha = 60^o$ 时

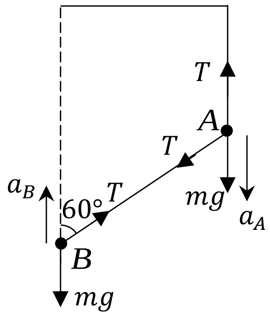
$$E_P\left(60^o\right)=\left(\sqrt{3}-4+\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)mgl=2\left(\sqrt{3}-2\right)mgl<0\text{，}\quad v_B=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}v_A=v_A$$

结合能量守恒方程，得

$$\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2=-E_P\Rightarrow mv_A^2=2\left(2-\sqrt{3}\right)mg$$

$$\Rightarrow v_B=v_A=\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)gl}=0.732\sqrt{gl}$$

参考题解图 3，有



题解图 3

$$\begin{cases}mg+T\cos\alpha-T=ma_A\\ T\cos\alpha-mg=ma_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}mg-\dfrac{T}{2}=ma_A\\ \dfrac{T}{2}-mg=ma_B\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_B=-a_A$$

得

$$\frac{T}{2}-mg=ma_B=m\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{v_A^2}{l}+m\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A$$

$\alpha=60^o$

将 $v_A^2=2\left(2-\sqrt{3}\right)gl$，$ma_A=mg-\dfrac{T}{2}$ 代入，解得

$$T=4\left(3\sqrt{3}-4\right)mg=4.78mg$$

再代入 $ma_A=mg-\dfrac{T}{2}$ 和 $a_B=-a_A$

可得

$$a_A=-3\left(2\sqrt{3}-3\right)g=-1.39g\text{，}\quad a_B=3\left(2\sqrt{3}-3\right)g=1.39g \qquad \text{（4 分）}$$

（3.3）据（2.1）问解答可知，在 $L=2l$ 时，l_1 可取为

$$l_1<L-l=l$$

$\alpha\to 90^o$ 时，A 的下行速度必趋于零，此时 A 的向下加速度已改变为向上加速度，即有

$$a_A<0\text{，}\quad v_A\to 0$$

随着 A 下行变慢，B 上行也有变慢趋势，故在 $\alpha\to 90^o$ 时，B 的向上加速度也改变为向下加速度。其实此时绳对 B 的拉力水平无竖直分量，在 B 的重力作用下必有

$$a_B\to -g$$

又因能量守恒，$v_A\to 0$，必有

$$v_B\neq 0$$

若 $v_B<0$，则从开始时的 $v_B\geq 0$ 到 $\alpha\to 90^o$ 时的 $v_B<0$ 过程中，必定会出现某个 $\alpha_0>30^o$ 对应 $v_B=0$。因 $v_B=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_A$，在 $90^o>\alpha>30^o$ 时必有 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}>0$（除去

$\alpha\to 90^o$ 外），$v_B=0$ 时必对应 $v_A=0$ 使 α_0 对应的 $E_P(\alpha_0)=\left(\sqrt{3}-4+\frac{2-\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right)mgl$。由于

$$\frac{dE_P}{d\alpha}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}mgl\begin{cases}<0 & 60^o>\alpha>30^o\\ >0 & 90^o>\alpha>60^o\end{cases},\quad E_P(30^o)=0,\quad E_P(90^o)<0$$

可知，不存在 $90^o>\alpha_0>30^o$ 可使 $E_P(\alpha_0)=0$。据此可判定 $v_B<0$ 不可取，应为

$$v_B>0$$

$\alpha\to 90^o$ 时，极限意义下有

$$E_P(90^o)=\left(\sqrt{3}-4+\frac{2-\cos 90^o}{\sin 90^o}\right)mgl=\left(\sqrt{3}-2\right)mgl \text{ 和 } v_A=0$$

据 $v_B=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_A$，因 $\cos\alpha\to 0$，$v_A\to 0$，v_B 值未必为零。由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_B^2=-E_P(90^o)\ \Rightarrow v_B=\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)gl}=0.732\sqrt{gl}$$

由 $\begin{cases}mg+T\cos\alpha-T=ma_A\\ T\cos\alpha-mg=ma_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}mg-T=ma_A\\ -mg=ma_B\end{cases}$

得 $a_B=-g$ 和 $T=mg-ma_A$

求 a_A，直接利用（2.2）问所得（2）式

$$a_B=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{v_A^2}{l}+\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A \qquad (2)$$

不妥。因为从动力学考虑 a_A 不可能是发散量，（2）式等号右边两项都是发散量，其代数和得有限量 $a_B=-g$，涉及发散量，数学上不易从该式反解出 a_A。因此，为求解 a_A，将

$$v_B=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_A\Rightarrow v_A=\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}v_B$$

代入（2）式，得

$$\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}a_B=\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\left[\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}v_B\right)^2\frac{1}{l}\right]+a_A=\frac{\sin^3\alpha}{\left(1-\cos\alpha\right)^3}\frac{v_B^2}{l}+a_A$$

$$\Rightarrow a_A=-\frac{\sin^3\alpha}{\left(1-\cos\alpha\right)^3}\frac{v_B^2}{l}+\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}a_B \qquad (2')$$

等号右边两项都不是发散量，而且 v_B 和 a_B 都是已知的有限量。由 $(2)'$ 式，在 $\alpha\to 90^o$ 时

解得 $a_A=-\frac{v_B^2}{l}=-2\left(2-\sqrt{3}\right)g=-0.536g$

将其代入 $T=mg-ma_A$，得 $T=\left(5-2\sqrt{3}\right)mg=1.54mg$ （5 分）

附注 1：对于一般角度 $90^o>\alpha\geq 30^o$ 的解

取 $L=2l$，$90^o>\alpha\geq 30^o$ 对应的势能

$$E_P(\alpha)=\left(\sqrt{3}-4+\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)mgl$$

为求解对应的 5 个未知量：v_A、v_B，a_A、a_B 和 T，引用前面解答中相关公式，可得

$$v_B=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_A \qquad （1）$$

$$a_B=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{v_A^2}{l}+\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A \qquad （2）$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_A^2+v_B^2\right)=\left(4-\sqrt{3}-\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)mgl \qquad （3）$$

$$mg+T\cos\alpha-T=ma_A\Rightarrow\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}mg-\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}(1-\cos\alpha)T=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}ma_A$$

$$T\cos\alpha-mg=ma_B=m\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{v_A^2}{l}+m\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}a_A$$

下式减上式，得

$$T\cos\alpha-mg-\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}mg+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha}T=m\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{v_A^2}{l}$$

$$\Rightarrow\left(1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha\right)T=mg+m\frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{v_A^2}{l} \qquad （4）$$

补写 $\quad ma_B=T\cos\alpha-mg \qquad （5）$

由（1）至（5）式求解 v_A、v_B，a_A、a_B 和 T，如下所述。

v_A、v_B 的求解：

联立 （1）、（3）式，可得

$$v_A=\sqrt{\frac{2\cos^2\alpha}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}\left(4-\sqrt{3}-\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)gl} \qquad （6）$$

$$v_B=\sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha)^2}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}\left(4-\sqrt{3}-\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)gl} \qquad （7）$$

验证：

$\alpha=30^o$： $v_A=0$ $\qquad v_B=0$

$\alpha=60^o$： $v_A=\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)gl}$ $\qquad v_B=\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)gl}$

$\alpha=90^o$： $v_A=0$ $\qquad v_B=\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)gl}$

与前面所得结果一致。

T 、a_B 的求解：

联立 （4）、（6）式可得

$$T=\frac{1}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}\left[1+\frac{2\sin^3\alpha}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}\left(4-\sqrt{3}-\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]mg \qquad （8）$$

$$a_B=\left\{\frac{\cos\alpha}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}\left[1+\frac{2\sin^3\alpha}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}\left(4-\sqrt{3}-\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]-1\right\}g$$

（9）

验证：

$\alpha=30^o$：$T=\dfrac{2}{5-2\sqrt{3}}mg$　　　$a_B=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{5-2\sqrt{3}}g$（或$\dfrac{9-5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-6}g$）

$\alpha=60^o$：$T=4\left(3\sqrt{3}-4\right)mg$　　　$a_B=3\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)g$（或$3\left(2\sqrt{3}-3\right)g$）

$\alpha=90^o$：$T=\left(5-2\sqrt{3}\right)mg$　　　$a_B=-g$

与前面所得结果一致。

a_A的求解：

联立（2）、（6）、（9）式可得

$$a_A=\frac{1}{1-\cos\alpha}\left[\frac{\cos^2\alpha}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}-\frac{2\sin^3\alpha\left(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\left(1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha\right)^2}\left(4-\sqrt{3}-\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\cos\alpha\right]g$$

（10）

验证：

$\alpha=30^o$：$a_A=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{16-9\sqrt{3}}g$（或$\dfrac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}g$）

$\alpha=60^o$：$a_A=-3\left(2\sqrt{3}-3\right)g$

$\alpha=90^o$：$a_A=-2\left(2-\sqrt{3}\right)g$

与前面所得结果一致。

由（8）式可见，在$90^o>\alpha\geq30^o$范围内T恒为正，表明绳始终处于拉直状态。

附注 2：

环A、B和绳构成的系统，在绳始终处于伸直状态的过程中，天花板在M处为系统提供的竖直向上的拉力，其大小即为绳中拉力大小T。系统质心竖直向上的加速度为

$$a_C=\frac{ma_B-ma_A}{2m}=\frac{1}{2}\left(a_B-a_A\right)$$

合外力$T-2mg$为质心提供此加速度，应有

$$T=2mg+ma_C=2mg+m\left(a_B-a_A\right)$$

$\alpha=30^o$时，

$$a_B-a_A=\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{5-2\sqrt{3}}-\frac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}\right)g=\frac{4\sqrt{3}-8}{5-2\sqrt{3}}g$$

$$T=2mg+m\left(a_B-a_A\right)=\frac{2}{5-2\sqrt{3}}mg$$　与前面所得结果一致。

$\alpha=60^o$时

$$a_B - a_A = \left[3\left(2\sqrt{3}-3\right)+3\left(2\sqrt{3}-3\right)\right]g = 6\left(2\sqrt{3}-3\right)g$$

$$T = 2mg + m\left(a_B - a_A\right) = 4\left(3\sqrt{3}-4\right)mg$$ 与前面所得结果一致。

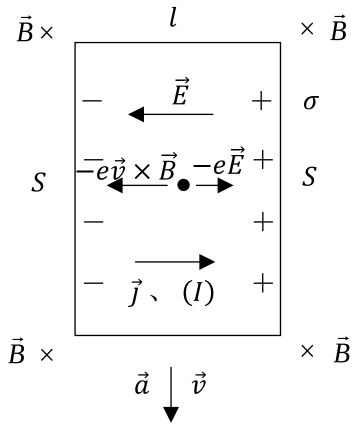
$\alpha = 90^o$ 时

$$a_B - a_A = \left[-1+2\left(2-\sqrt{3}\right)\right]g = \left(3-2\sqrt{3}\right)g$$

$$T = 2mg + m\left(a_B - a_A\right) = \left(5-2\sqrt{3}\right)mg$$ 与前面所得结果一致。

17. （20 分）

解：（1）参照题解图，导体块左、右表面积同记为 S，面间距记为 l。t 时刻导体块下落加速度和速度分别记为 $\vec{a}$、$\vec{v}$，内部电场强度记为 $\vec{E}$，自由电子受水平方向电磁作用场力为



题解图

$$\vec{f} = -e\left(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E}\right)$$

或可表述为

$$\vec{f} = -e\vec{E}^*, \vec{E}^* = \vec{v}\times\vec{B}+\vec{E}\begin{cases}\text{方向朝右为正}\\ \text{大小 } E^* = vB - E\end{cases}$$

此力可与直流电路中自由电子受静电场 $\vec{E}_0$ 作用力

$$\vec{f}_0 = -e\vec{E}_0$$

类比。直流电路中 $\vec{f}_0$ 使自由电子逆着 $\vec{E}_0$ 方向运动，形成电流密度

$$\vec{j}_0 = \vec{E}_0/\rho$$

同理，此处导体块中自由电子受电磁作用力 $-e\vec{E}^*$，使自由电子逆着 $\vec{E}^*$ 方向运动，形成电流密度

$$\vec{j} = \vec{E}^*/\rho \quad \begin{cases}\text{方向朝右为正}\\ \text{大小 } j = E^*/\rho = (vB-E)/\rho\end{cases}$$

导体中 $\vec{j}$ 形成的从左到右方向的电流为

$$I = jS$$

受安培力

$$\vec{F} \quad \begin{cases}\text{方向朝上}\\ \text{大小 } F = IBl = jB(Sl)\end{cases}$$

据牛顿第二定律，有

$$(\rho_m Sl)a = (\rho_m Sl)\frac{dv}{dt} = (\rho_m Sl)g - jBSl$$

得

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{jB}{\rho_m}$$

可为未知量 j、v、E、σ 建立下述方程组

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&j = (vB-E)/\rho\\ &j = d\sigma/dt\end{aligned}\right\} vB - E = \rho\dfrac{d\sigma}{dt}\\ E = \sigma/\varepsilon_0\\ \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{jB}{\rho_m}\end{cases}$$

消去 E、j，得

$$\begin{cases} vB - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \rho \dfrac{d\sigma}{dt} \Longrightarrow B\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{d\sigma}{dt} = \rho\dfrac{d^2\sigma}{dt^2} \\ \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{B}{\rho_m}\dfrac{d\sigma}{dt} \end{cases}$$

消去 dv/dt ，得

$$gB - \frac{B^2}{\rho_m}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d\sigma}{dt} = \rho\frac{d^2\sigma}{dt^2}$$

或简书为

$$\ddot{\sigma} + \tfrac{1}{\rho}\left(\tfrac{1}{\varepsilon_0} + \tfrac{B^2}{\rho_m}\right)\tfrac{d\sigma}{dt} = gB/\rho \qquad \text{（10 分）}$$

（2）

（2.1）方程可改述为以 $\dot{\sigma}$ 作为待求函数的一阶微分方程

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dt} + \alpha\dot{\sigma} = gB/\rho \ , \qquad \alpha = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{B^2}{\rho_m}\right)$$

它的齐次通解和非齐次特解分别为

$$\dot{\sigma}_0 = Ce^{-\alpha t} \text{ 和 } \dot{\sigma}^* = gB/\alpha\rho$$

原非齐次通解便为

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}^* = Ce^{-\alpha t} + \frac{gB}{\alpha\rho}$$

利用初条件

$$t = 0 \text{ 时 } \dot{\sigma} = j = 0$$

得

$$C = -gB/\alpha\rho \Longrightarrow \dot{\sigma} = \frac{gB}{\alpha\rho}(1 - e^{-\alpha t})$$

积分

$$\int_0^{\sigma} d\sigma = \int_0^t \frac{gB}{\alpha\rho}(1 - e^{-\alpha t})dt$$

得

$$\sigma = \tfrac{gB}{\alpha\rho}\left[t + \tfrac{1}{\alpha}(e^{-\alpha t} - 1)\right] \qquad \text{（5 分）}$$

（2.2）由

$$j = \dot{\sigma} = \frac{gB}{\alpha\rho}(1 - e^{-\alpha t}) \ , \qquad a = g - \frac{jB}{\rho_m}$$

得

$$a = g - \tfrac{gB^2}{\alpha\rho\rho_m}(1 - e^{-\alpha t}) \qquad \text{（3 分）}$$

继而得

$$v = \int_0^v dv = \int_0^t a dt = \int_0^t \left[g - \frac{gB^2}{\alpha\rho\rho_m}(1 - e^{-\alpha t})\right]dt$$

$$\Longrightarrow v = gt\left(1 - \tfrac{B^2}{\alpha\rho\rho_m}\right) + \tfrac{gB^2}{\alpha^2\rho\rho_m}(1 - e^{-\alpha t}) \qquad \text{（2 分）}$$

附注：

也可由

$$j = (vB - E)/\rho \Longrightarrow vB - E = \rho\dot{\sigma} \, , \qquad E = \sigma/\varepsilon_0$$

得

$$v = \frac{1}{B}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \rho\dot{\sigma}\right) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = \dfrac{gB}{\alpha\rho}(1 - e^{-\alpha t}) \\ \sigma = \dfrac{gB}{\alpha\rho}\left[t + \dfrac{1}{\alpha}(e^{-\alpha t} - 1)\right] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v = \frac{g}{\alpha\varepsilon_0\rho}t + \frac{g}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha\varepsilon_0\rho}\right)(1 - e^{-\alpha t})$$

利用

$$\alpha=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{B^2}{\rho_m}\right)\Longrightarrow\frac{1}{\varepsilon_0}=\alpha\rho-\frac{B^2}{\rho_m}$$

可得

$$\frac{g}{\alpha\varepsilon_0\rho}t=\frac{g}{\alpha\rho}\left(\alpha\rho-\frac{B^2}{\rho_m}\right)t=gt\left(1-\frac{B^2}{\alpha\rho\rho_m}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{g}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha\varepsilon_0\rho}\right)(1-e^{-\alpha t})&=\frac{g}{\alpha}\left[1-\frac{1}{\alpha\rho}\left(\alpha\rho-\frac{B^2}{\rho_m}\right)\right](1-e^{-\alpha t})\\&=\frac{g}{\alpha}\left[1-1+\frac{B^2}{\alpha\rho\rho_m}\right](1-e^{-\alpha t})\\&=\frac{gB^2}{\alpha^2\rho\rho_m}(1-e^{-\alpha t})\end{aligned}$$

与前面所得 $v(t)$ 表达式一致。