

$$1. \frac{2}{3}\omega a, \frac{\sqrt{3}}{3}\omega a.$$

$$2. \sqrt{\frac{g}{L}}l, \lambda \frac{g}{L}(L-2l)l.$$

$$3. \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{5}}\sqrt{Rg}, \frac{19}{10\sqrt{3}}Mg.$$

$$4. \frac{p_A - p_B}{4\eta L}(R^2 - r^2), 8\eta L/\pi R^4.$$

$$5. \frac{m}{2\pi kT} e^{-m(v_x^2 + v_y^2)/2kT}, 2\pi v \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) e^{-mv^2/2kT}.$$

$$6. I_1 = I_2 + I_3, -I_2 R_2 + I_3 R_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

$$7. 0, \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

$$8. (2) \text{ 和 } (3), \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_L} \left(\vec{j}_m + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (2) \text{ 和 } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_{V_S} \rho_m dV \quad (3).$$

$$9. mr^* v^* = mbv_0, \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^*} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

$$10. (n + \frac{1}{6})d, (n + \frac{5}{6})d.$$

解：因绳子只形成驻波，若取绳子在墙上的固定端为原点，则驻波各点的振幅 $A(x)$ 为

$$A(x) = 2A_0 \left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \right|,$$

式中 λ 为波长，有 $\lambda = 2d$

设振动端与最接近的节点之间的距离为 b ，若改取该节点为坐标原点，则因振动端的振幅为 A ，利用上式可得

$$A_0 = 2A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}b\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}b = \begin{cases} \pi/6 \\ \text{或 } 5\pi/6 \end{cases} \Rightarrow b = \begin{cases} d/6 \\ \text{或 } 5d/6 \end{cases}$$

故绳长为

$$L = nd + b = \begin{cases} (n + \frac{1}{6})d \\ \text{或 } (n + \frac{5}{6})d \end{cases}$$

11. (15 分)

解：肥皂膜反射光相干叠加获最大增强的条件是

$$\text{光程差 } \delta = 2nh + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \Rightarrow k = \frac{2nh}{\lambda} + \frac{1}{2} \quad (4 \text{ 分})$$

其中 $n = 1.35$, $h = 0.550 \mu\text{m}$, 再将 4000 \AA 、 7000 \AA 代入, 分别计算得 $k = 4.2$ 、 $k = 2.6$ 。
据此可知得到增强的光波长分别为

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{2nh}{k_1 - \frac{1}{2}} \bigg|_{k_1=4} = 424 \text{ nm}, \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2nh}{k_2 - \frac{1}{2}} \bigg|_{k_2=3} = 594 \text{ nm} \quad (4 \text{ 分})$$

反射光干涉相消的条件是

$$\text{光程差 } \delta = 2nh + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow k = \frac{2nh}{\lambda} \quad (4 \text{ 分})$$

得 4000 \AA 对应 $k = 3.7$ 、 7000 \AA 对应 $k = 2.1$

反射光干涉相消的光波波长为

$$\lambda = \frac{2nh}{k} \bigg|_{k=3} = 495 \text{ nm} \quad (3 \text{ 分})$$

12. (15 分)

解：(1) $t = 0$ 合上电键 K 后, 电容充电的暂态过程方程为

$$\begin{aligned} iR + \frac{Q}{C} &= \varepsilon & i &= \frac{dQ}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{CR} &= \frac{\varepsilon}{R} & \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{T} &= \frac{C\varepsilon}{T} \end{aligned}$$

$t = 0$ 到 $t = T$ 有

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{t}{T} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{T} = \frac{C\varepsilon_0 t}{T^2} \quad t = 0 \text{ 时 } Q = 0$$

解得该时间段内有

$$Q(t) = C\varepsilon_0 \left(\frac{t}{T} - 1 \right) + C\varepsilon_0 e^{-t/T}$$

得 $Q_1 = C\varepsilon_0/e$ (6 分)

(2) $t = T$ 到 $t = 2T$ 时间段内, 因初始条件改取为 $t = T$ 时 $Q = Q_1$, 故改取

时间参量 $t' = t - T$

则 (1) 问解答中最后的微分方程改述为

$$\frac{dQ}{dt'} + \frac{Q}{T} = \frac{C\varepsilon_0 t'}{T^2} \quad t' = 0 \text{ 时 } Q = \frac{C\varepsilon_0}{e}$$

解得该时间段内有

$$Q(t') = C\varepsilon_0 \left(\frac{t'}{T} - 1 \right) + C\varepsilon_0 (e^{-1} + 1) e^{-t'/T}$$

取 $t' = T$ ，即得 $Q_2 = C\varepsilon_0 \frac{e^{-1} + 1}{e}$ (5 分)

(3) 将上述求解过程继续下去，不难得到 $t_N = NT$ 时有

$$\begin{aligned} Q_N &= C\varepsilon_0 \left\{ \cdots \left[(e^{-1} + 1) e^{-1} + 1 \right] e^{-1} + 1 \right\} e^{-1} + \cdots \\ &= C\varepsilon_0 (e^{-1} + e^{-2} + \cdots + e^{-N}) = C\varepsilon_0 e^{-1} (1 + e^{-1} + \cdots + e^{-N+1}) \\ \Rightarrow Q_N &= \frac{1 - e^{-N}}{e - 1} C\varepsilon_0 \end{aligned}$$

得 $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = \frac{C\varepsilon_0}{e - 1}$ (4 分)

13. (15 分)

解：本题中若两物块始终沿斜面向下运动，所受摩擦力恒向上，质心下滑加速度为定值，质心作匀加速直线运动，在质心系中两物块相对质心运动是连续的单一简谐运动。弹簧为原长的初态与弹簧第一次恢复到原长的末态，两物块相对速度方向相反，大小不变（同为 $1.50m/s$ ）。

可是解题开始时，不能预知两物块必定始终沿斜面下滑，考虑到这一因素，作答如下。

（补充说明：

m_1 下滑初速度 $v_{10} = 0.50m/s$ 小于 m_2 下滑初速度 $v_{20} = 2.0m/s$ ，开始时弹簧伸长，为 m_1 、 m_2 分别提供向下和向上拉力。这样的拉力会使 m_1 下滑加速度大于 m_2 下滑加速度， m_1 继续下滑，其下滑速度向 m_2 下滑速度靠近（注意，开始时拉力较小， m_2 下滑加速度必定为正，下滑速度也在增大）。随着弹簧继续伸长， m_1 下滑速度越来越接近 m_2 的下滑速度。当 m_1 下滑速度等于 m_2 下滑速度时，弹簧伸长量达最大值。既然此时 m_1 是下滑， m_2 也必定是下滑，故两者所受摩擦力均为向上。如果此时弹簧拉力早已大到使 m_2 加速度向上，那么以后运动过程中尽管弹簧长度要回缩，但也有可能使 m_2 运动速度从向下改变为向上， m_2 所受摩擦力也会反向。

下面的解答中发现弹簧最大伸长时， m_2 所受合力仍是向下，以后弹簧长度回缩过程中， m_2 加速度和速度也始终向下，所受摩擦力仍然向上。）

第一阶段：弹簧伸长 (10 分)

将弹簧拉力大小记为 f ，则 m_1 、 m_2 沿斜面向下加速度（带正负号）分别为

$$a_1 = g \sin \theta - \mu g \cos \theta + \frac{f}{m_1}$$

$$a_2 = g \sin \theta - \mu g \cos \theta - \frac{f}{m_2}$$

m_1 相对 m_2 的向下加速度为

$$a_1 - a_2 = \frac{f}{m_1} + \frac{f}{m_2}, \quad f = kx, \quad x: \text{弹簧伸长量}$$

得
$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} kx = \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} = \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = -\frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$$

dt 时间内弹簧伸长量为 $dx = (v_2 - v_1)dt$

引入
$$v^* = v_2 - v_1 = \frac{dx}{dt}$$

即有
$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} kx = -\frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} kx = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k} = \frac{3}{\sqrt{2}} / s \approx 2.12 / s \end{cases} \quad x \sim t: \text{简谐振动}$$

利用初条件 $t=0$ 时, $x_0=0$, $v_0^*=1.50m/s$, 得

$$x = A \cos \omega t, \quad A = \frac{v_0^*}{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

(这一结果表明, 弹簧伸长量最大时, $f = kA = 0.3\sqrt{2}N \approx 0.424N$, m_2 所受向下合力

$$m_2 g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - f \approx 1.175N > 0$$

此时合力向下, a_2 仍是向下, 故弹簧回缩时, m_2 所受合力仍向下, 继续下行, 摩擦力仍向上。)

第二阶段: 弹簧回缩 (5 分)

过程中 $x \leq A$, $f \leq kA$

$$a_1 = g \sin \theta - \mu g \cos \theta + \frac{f}{m_1} > a_2$$

$$a_2 = g \sin \theta - \mu g \cos \theta - \frac{f}{m_2} \geq g \sin \theta - \mu g \cos \theta - \frac{kA}{m_2} \approx 5.9m/s^2$$

这表明 m_1 、 m_2 始终下行, 摩擦力方向不变。此阶段动力学方程与第一阶段相同, 弹簧相对原长的伸长量 x 随时间 t 的变化关系仍是简谐振动关系。当弹簧回复到原长时, $x=0$, m_1 相对 m_2 的速度 $v_e^* = dx/dt$ 与第一阶段初态时相对速度 v_0^* 方向相反, 大小相同, 即为

$$v_e^* = -v_0^* = -1.50m/s$$

$$\Rightarrow |v_e^*| = 1.50m/s$$

14. (15 分)

解：(1) 瓶上方内壁的水珠是瓶从 $t = 27^\circ\text{C}$ 环境移入 $t_0 = 0^\circ\text{C}$ 的冰箱时，瓶内部分（饱和）水蒸气凝结而成。 (3 分)

(2) 瓶内水蒸气都是饱和水蒸气。为简化，将 $t_0 = 0^\circ\text{C}$ 时上方区域水珠全部等效移动到下方水区域内。室温 $t > 0^\circ\text{C}$ 时水的密度为

$$\rho = \rho_0 / (1 + \alpha t)$$

列方程组

$$\text{气：初态 } pV_{\text{气}} = \nu RT, \quad V_{\text{气}} = h\pi r^2, \quad T = 300\text{K}; \quad \nu \text{ 为未知量} \quad (1)$$

$$\text{末态 } p_0 V_{\text{气}0} = (\nu - \Delta\nu)RT_0, \quad T_0 = 273\text{K}; \quad V_{\text{气}0}, \Delta\nu \text{ 为未知量} \quad (2)$$

$$\text{水：初态 } M = \rho V_{\text{水}} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t} V_{\text{水}}, \quad V_{\text{水}} = H\pi R^2; \quad M \text{ 为未知量} \quad (3)$$

$$\text{末态 } M_0 = M + \Delta\nu\mu_{\text{水}}; \quad M_0 \text{ 为未知量} \quad (4)$$

$$\text{体积总和不变：} \frac{M_0}{\rho_0} + V_{\text{气}0} = V_{\text{水}} + V_{\text{气}} \quad (5)$$

由 (1)、(2) 式可得

$$p_0 V_{\text{气}0} = \nu RT_0 - \Delta\nu RT_0 = pV_{\text{气}} \frac{T_0}{T} - \Delta\nu RT_0 \Rightarrow \Delta\nu = \frac{pV_{\text{气}}}{RT} - \frac{p_0 V_{\text{气}0}}{RT_0} \quad (6)$$

由 (3)、(4)、(6) 式可得

$$M_0 = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t} V_{\text{水}} + \frac{pV_{\text{气}}}{RT} \mu_{\text{水}} - \frac{p_0 V_{\text{气}0}}{RT_0} \mu_{\text{水}}$$

代入 (5) 式可得

$$\frac{V_{\text{水}}}{1 + \alpha t} + \frac{pV_{\text{气}}}{RT\rho_0} \mu_{\text{水}} + \left(1 - \frac{p_0 \mu_{\text{水}}}{RT_0 \rho_0}\right) V_{\text{气}0} = V_{\text{水}} + V_{\text{气}}$$

即解得

$$\begin{cases} V_{\text{气}0} = \left[\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha t}\right) V_{\text{水}} + \left(1 - \frac{p\mu_{\text{水}}}{RT\rho_0}\right) V_{\text{气}} \right] / \left(1 - \frac{p_0 \mu_{\text{水}}}{RT_0 \rho_0}\right) \\ V_{\text{水}} = H\pi R^2, V_{\text{气}} = h\pi r^2 \end{cases} \quad (7) \quad (9 \text{ 分})$$

(3) 由所给数据可得

$$\frac{1}{1 + \alpha t} = 0.996, \quad \frac{p\mu_{\text{水}}}{RT\rho_0} = 2.567 \times 10^{-5}, \quad \frac{p_0 \mu_{\text{水}}}{RT_0 \rho_0} = 0.484 \times 10^{-5}$$

$$V_{\text{水}} = 3h\pi(2r)^2 = 12h\pi r^2 = 12V_{\text{气}}$$

一起代入 (7) 式，可算得

$$V_{\text{气}0} = 1.048V_{\text{气}} = \beta V_{\text{气}} \Rightarrow \beta = 1.048 \quad (3 \text{ 分})$$

15. (20 分)

解: (1) 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$

得 $b^4x^2 + a^4y^2 = b^4x^2 + a^4b^2 - a^2b^2x^2 = a^4b^2 - b^2x^2(a^2 - b^2)$
 $\Rightarrow b^4x^2 + a^4y^2 = b^2(a^4 - c^2x^2)$

$$\Rightarrow \rho = [b^2(a^4 - c^2x^2)]^{\frac{3}{2}} / a^4b^4$$

即 $\rho = (a^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}} / a^4b$ (4 分)

再由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$

得 $\tan \phi = -b^2x/a^2y$

考虑到 取第 III 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时: $2\pi > \phi \geq \frac{3}{2}\pi$ $\sin \phi < 0$

取第 IV 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时: $\frac{\pi}{2} > \phi \geq 0$ $\sin \phi > 0$

取第 I 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时: $\pi > \phi \geq \frac{\pi}{2}$ $\sin \phi > 0$

取第 II 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时: $\frac{3\pi}{2} > \phi \geq \pi$ $\sin \phi < 0$

故取

$$\sin \phi = \frac{b^2x}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}} \begin{cases} > 0 & \text{取第 IV、I 象限 } \frac{1}{4} \text{ 椭圆时 } x > 0 \\ < 0 & \text{取第 II、III 象限 } \frac{1}{4} \text{ 椭圆时 } x < 0 \end{cases}$$

或改述为

$$\sin \phi = \frac{bx}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 初位置处, 有

$$mv_0^2 = \rho qE_0 = b^2qE_0/a \Rightarrow v_0 = b\sqrt{qE_0/ma} \quad (2 \text{ 分})$$

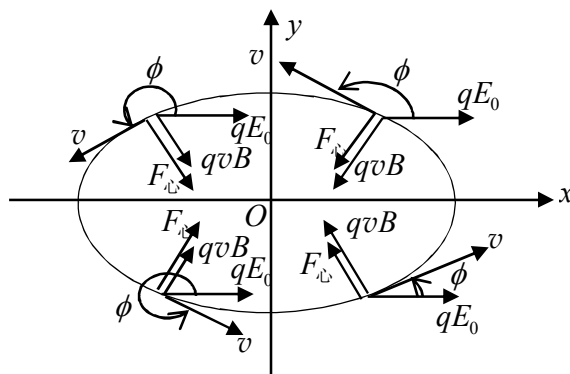
(3) 参考题解图, 有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qE_0(a+x)$$

$$mv^2 = mv_0^2 + 2qE_0(a+x)$$

$$= \frac{b^2qE_0}{a} + 2qE_0(a+x)$$

$$= qE_0 \left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x) \right]$$



题解图

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_{\text{心}} = qvB - qE_0 \sin \phi$$

得

$$B = \frac{1}{v} \left(E_0 \sin \phi + \frac{mv^2}{q\rho} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{qE_0}{m} \left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x) \right]}} \left\{ \frac{E_0 bx}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}} + \frac{a^4 b E_0 \left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x) \right]}{(a^4 - c^2 x^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{mE_0} b}{\sqrt{q \left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x) \right]} \sqrt{a^4 - c^2 x^2}} \left\{ x + \frac{a^4 \left[\frac{b^2}{a} + 2(a+x) \right]}{a^4 - c^2 x^2} \right\} \quad (10 \text{ 分})$$

16. (20 分)

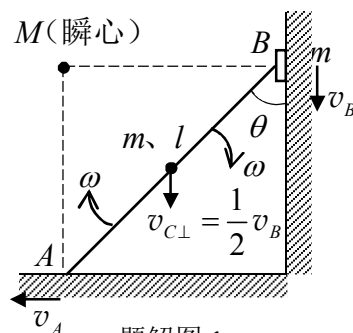
解：(1) 下滑过程态及相应的参量如题解图 1 所示，有

$$v_B = \omega l \sin \theta \Rightarrow \omega = v_B / l \sin \theta$$

$$E_{K\text{杆}} = \frac{1}{2} I_M \omega^2, \quad I_M = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

$$E_{K\text{柱}} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$E_K = E_{K\text{杆}} + E_{K\text{柱}} = \frac{1}{2} m v_B^2 \left(1 + \frac{1}{3 \sin^2 \theta} \right)$$



题解图 1

$v_B \sim \theta$ 的确定：

$$mgl(1 - \cos \theta) + mg \frac{l}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v_B^2 \left(1 + \frac{1}{3 \sin^2 \theta} \right)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 9gl \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos \theta)}{3 \sin^2 \theta + 1}$$

$a_B \sim \theta$ 的确定：

$$2v_B a_B = \frac{[2 \sin \theta \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin^3 \theta](3 \sin^2 \theta + 1) - \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) 6 \sin \theta \cos \theta}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2} \cdot \omega \cdot 9gl$$

$$= \frac{[2 \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta](3 \sin^2 \theta + 1) - 6 \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \cos \theta)}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2} \cdot 9g v_B$$

$$= \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta (3 \sin^2 \theta + 1)}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2} \cdot 9 g v_B$$

$$\Rightarrow a_B = \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta (3 \sin^2 \theta + 1)}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2} \cdot \frac{9}{2} g$$

$N \sim \theta$ 的确定:

$$P_{\perp} = m v_B + m v_{C\perp} \Big|_{v_{C\perp} = \frac{1}{2} v_B} = \frac{3}{2} m v_B$$

$$2mg - N = \frac{dP_{\perp}}{dt} = \frac{3}{2} m a_B$$

$$\Rightarrow N = 2mg - \frac{3}{2} m a_B = 2mg - \frac{27}{4} mg \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta (3 \sin^2 \theta + 1)}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2}$$

$$= \frac{8(3 \sin^2 \theta + 1)^2 - 27 \cdot [2 \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta (3 \sin^2 \theta + 1)]}{4 \cdot (3 \sin^2 \theta + 1)^2} mg$$

$$\Rightarrow N = \frac{29 - 9 \sin^4 \theta - 54 \cos \theta + 33 \cos^2 \theta}{4(3 \sin^2 \theta + 1)^2} mg$$

$$\text{或} = \frac{62 - 42 \sin^2 \theta + 9 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 54 \cos \theta}{4(3 \sin^2 \theta + 1)^2} mg \quad (5 \text{ 分})$$

可算得 $\theta = 45^\circ$ 时, $N = 0.2027mg$ (1 分)

(2) 杆落地前瞬间, 相关运动学量为

$$B \text{ 端竖直向下速度 } v_{B0} = \frac{3}{2} \sqrt{gl}$$

$$\text{细杆中心点 } C \text{ 的竖直向下速度 } v_{C0} = \frac{1}{2} v_{B0}$$

$$\text{细杆绕 } C \text{ 点旋转角速度 } \omega_0 = v_{B0}/l$$

$$\text{细杆中与 } A \text{ 端相距 } x \text{ 处的竖直向下速度 } v_0(x) = \omega_0 x = \frac{x}{l} v_{B0}$$

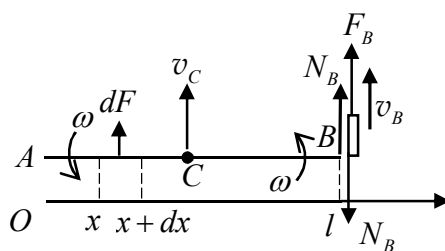
(2.1) 碰后运动学量以及与碰撞相关的竖直方向作用力, 已在题解图 2 中示出, 其中桌面提供的碰撞力都用字符 F 标记, 且有

$$F_B = f m = \alpha v_{B0} m$$

$$dF = f dm = [\alpha v_0(x)] \cdot \left(\frac{dx}{l} m \right) = \alpha v_{B0} \frac{m}{l^2} x dx$$

下面将要列出的 5 个独立方程中含有 5 个独立未知量:

$$\alpha \Delta t, N_B \Delta t, v_B, v_C, \omega$$



题解图 2

小柱体的动量方程:

$$F_B \Delta t - N_B \Delta t = m(v_B + v_{B0}) \Rightarrow mv_{B0}(\alpha \Delta t) - N_B \Delta t = m(v_B + v_{B0})$$

杆的动量方程:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^l dF \right) \Delta t + N_B \Delta t &= m(v_C + v_{C0}), \quad v_{C0} = \frac{1}{2} v_{B0}, \quad \int_0^l dF = \alpha v_{B0} \frac{m}{l^2} \int x dx = \frac{1}{2} \alpha v_{B0} m \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} mv_{B0}(\alpha \Delta t) + N_B \Delta t = m \left(v_C + \frac{1}{2} v_{B0} \right) \end{aligned}$$

杆的质心参考系中杆的定轴转动方程:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^l dF \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) + N_B \cdot \frac{l}{2} \right] \Delta t &= (I_C \beta) \Delta t = I_C (\omega + \omega_0), \quad I_C = \frac{1}{12} ml^2 \\ \int_0^l dF \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) &= \int_0^l \left(\alpha v_{B0} \frac{m}{l^2} x dx \right) \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{12} \alpha v_{B0} ml \\ &\Rightarrow \frac{1}{12} mv_{B0} l (\alpha \Delta t) + \frac{l}{2} (N_B \Delta t) = \frac{1}{12} ml^2 (\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

系统动能方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_B^2 + \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 &= \frac{1}{2} mv_{B0}^2 + \frac{1}{2} mv_{C0}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_0^2 \Big|_{I_C = \frac{1}{12} ml^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} mv_B^2 + \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{24} ml^2 \omega^2 = \frac{2}{3} mv_{B0}^2 \end{aligned}$$

运动关联方程:

$$v_B = v_C + \omega \cdot \frac{l}{2}$$

小结: 5 个独立方程如下

$$mv_{B0}(\alpha \Delta t) - N_B \Delta t = m(v_B + v_{B0}) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} mv_{B0}(\alpha \Delta t) + N_B \Delta t = m \left(v_C + \frac{1}{2} v_{B0} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} mv_{B0} l (\alpha \Delta t) + \frac{l}{2} (N_B \Delta t) = \frac{1}{12} ml^2 (\omega + \omega_0) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} mv_B^2 + \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{24} ml^2 \omega^2 = \frac{2}{3} mv_{B0}^2 \quad (4)$$

$$v_B = v_C + \omega \cdot \frac{l}{2} \quad (5)$$

将 (1) 式所得 $N_B \Delta t = mv_{B0}(\alpha \Delta t) - m(v_B + v_{B0})$ (1)'

代入 (2)、(3) 式, 再改写 (4)、(5) 式, 得

$$\frac{3}{2} v_{B0}(\alpha \Delta t) = v_C + v_B + \frac{3}{2} v_{B0} \quad (2)'$$

$$\frac{7}{6} v_{B0}(\alpha \Delta t) - (v_B + v_{B0}) = \frac{1}{6} l(\omega + \omega_0) \quad (3)'$$

$$v_B^2 + v_C^2 + \frac{1}{12}l^2\omega^2 = \frac{4}{3}v_{B0}^2 \quad (4)'$$

$$v_C = v_B - \frac{1}{2}\omega l \quad (5)'$$

将(5)'式代入(2)'、(4)'式，保留(3)'式，得

$$\frac{3}{2}v_{B0}(\alpha\Delta t) = 2v_B - \frac{1}{2}\omega l + \frac{3}{2}v_{B0} \quad (2)''$$

$$\frac{7}{6}v_{B0}(\alpha\Delta t) = v_B + v_{B0} + \frac{1}{6}l(\omega + \omega_0) \quad (3)''$$

$$2v_B^2 - \omega l v_B + \frac{1}{3}\omega^2 l^2 = \frac{4}{3}v_{B0}^2 \quad (4)''$$

合并(2)''、(3)''式，消去 $\alpha\Delta t$ ，得

$$\frac{10}{21}v_B + \frac{1}{7}v_{B0} = \frac{10}{21}\omega l + \frac{1}{7}\omega_0 l \quad (6)$$

将 $v_{B0} = \omega_0 l$ 代入(6)式，得

$$v_B = \omega l \quad (7)$$

将(7)式代入(4)''式，得

$$v_B = v_{B0} \quad (8)$$

将(7)、(8)式代入(5)'式和(2)''式，得

$$v_C = \frac{1}{2}v_{B0} \quad (9)$$

$$\alpha\Delta t = 2 \quad (10)$$

再将(8)式、(10)式代入(1)'式，得

$$N_B\Delta t = 0 \quad (11)$$

本问所求量的解便分别为

$$v_C = \frac{1}{2}v_{B0} = \frac{3}{4}\sqrt{gl}, \quad \omega = v_B/l = v_{B0}/l = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \alpha\Delta t = 2, \quad N_B\Delta t = 0 \quad (10)$$

分)

(2.2) 上问解答中已设碰后瞬间速度、角速度方向与碰前瞬间速度、角速度方向相反，推导结果所得

$$v_B = v_{B0}, \quad v_C = \frac{1}{2}v_{B0} = v_{C0}, \quad \omega = v_B/l = v_{B0}/l = \omega_0$$

又显示，碰后瞬间速度、角速度大小与碰前瞬间速度、角速度大小相同。这意味着碰后运动为碰前运动的反演，故为周期性运动，

碰前运动周期 $T/2$ ，可由

$$dt = d\theta/\omega, \quad \omega = v_B/l \sin \theta, \quad v_B = 3 \sin \theta \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)}{3 \sin^2 \theta + 1}} gl$$

得

$$\frac{T}{2} = \int_{\theta_0}^{90^\circ} dt = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta_0}^{90^\circ} \sqrt{\frac{3 \sin^2 \theta + 1}{1 - \cos \theta}} d\theta, \quad \theta_0 = 1^\circ$$

$$\Rightarrow T = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{1^\circ}^{90^\circ} \sqrt{\frac{3 \sin^2 \theta + 1}{1 - \cos \theta}} d\theta$$

数值积分，得

$$\int_{1^\circ}^{90^\circ} \sqrt{\frac{3 \sin^2 \theta + 1}{1 - \cos \theta}} d\theta = 7.82$$

即有

$$T = 5.21 \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4 \text{ 分})$$

17. (20 分)

解：(1) s' 系中， A 、 B 碰前瞬间速度大小同为

$$u'_{ye} = \sqrt{2a_0 l} = \frac{3}{5}c$$

质量同为

$$m'_e = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{ye}}{c^2}}} = \frac{5}{4}m_0$$

碰撞前后能量守恒，有

$$M'c^2 = 2m'_e c^2 \Rightarrow M' = 2m'_e$$

得

$$M' = \frac{5}{2}m_0 \quad (2 \text{ 分})$$

(2) s' 系中， t' 时刻 A 、 B 速度大小同记为 u'_y ， s 系中对应的 t 时刻 A 、 B 沿 y 轴速度大小同为

$$u_y = \sqrt{1 - \beta^2} u'_y / \left(1 - \frac{v}{c^2} u'_x \right) \Big|_{u'_x=0} = \sqrt{1 - \beta^2} u'_y$$

且有

$$t = \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) / \sqrt{1 - \beta^2}$$

s 系中 A 、 B 加速度大小即为沿 y 轴方向加速度大小，有

$$a = \frac{du_y}{dt} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{du'_y}{dt'} / \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Big|_{dx'=0} = (1 - \beta^2) \frac{du'_y}{dt'}$$

即得

$$a = (1 - \beta^2) a_0 = \frac{16}{25} a_0$$

在 s' 系中大质点静止，故有

$$M_0 = M' = \frac{5}{2}m_0$$

s 系中大质点速度即为沿 x 轴方向的速度 v ，静质量 M_0 不变，(动) 质量即为

$$M = M_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{4}{5}$$

得
$$M = \frac{25}{8} m_0 \quad (4 \text{ 分})$$

(3) s' 系中

$$F'_y = \frac{d}{dt'} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_y'^2}{c^2}}} u'_y \right) = \frac{d}{du'_y} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_y'^2}{c^2}}} u'_y \right) \frac{du'_y}{dt'}$$

因 $du'_y/dt' = a_0$, 得

$$F'_y = m_0 a_0 / \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

s 系中 A 的速度平方值为

$$u^2 = u_y^2 + v^2, \quad u_y^2 = (1 - \beta^2) u_y'^2$$

有
$$\begin{aligned} F_y &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{du_y} \left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2}}} \right) \frac{du_y}{dt}, \quad \frac{du_y}{dt} = a = (1 - \beta^2) a_0 \\ &= m_0 \left[\left(1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2} + \frac{u_y^2}{c^2} \right) / \left(1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2} \right)^{3/2} \right] (1 - \beta^2) a_0 \\ &= (1 - \beta^2)^2 m_0 a_0 / \left(1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

因
$$1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2} = 1 - \frac{(1 - \beta^2) u_y'^2}{c^2} - \beta^2 = (1 - \beta^2) \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)$$

得
$$F_y = \sqrt{1 - \beta^2} m_0 a_0 / \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

即
$$F_y = \sqrt{1 - \beta^2} F'_y \quad (4 \text{ 分})$$

(4) s 系中

$$F_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2}}} \right) = m_0 v \frac{d}{du_y} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2}}} \right) \frac{du_y}{dt}, \quad \frac{du_y}{dt} = (1 - \beta^2) a_0$$

$$\begin{aligned}
&= m_0 v \left[\frac{u_y}{c^2} / \left(1 - \frac{u_y^2 + v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] (1 - \beta^2) a_0 \\
&= \left[m_0 \frac{v u_y}{c^2} / (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] (1 - \beta^2) a_0, \quad \frac{\sqrt{1 - \beta^2} m_0 a_0}{\left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = F_y \\
&= \frac{v u_y}{c^2} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \beta^2) F_y
\end{aligned}$$

即得

$$F_x = \frac{v u_y}{c^2} \frac{F_y}{1 - \beta^2} \quad (4 \text{ 分})$$

(5) s' 系中 F_y' 作功 W' 等于 A 的能量增量, 有

$$\begin{aligned}
W' &= m_e' c^2 - m_0 c^2 = \frac{5}{4} m_0 c^2 - m_0 c^2 \\
\Rightarrow W' &= \frac{1}{4} m_0 c^2
\end{aligned}$$

s 系中 F_y 对 A 作功

$$\begin{aligned}
W_y &= \int_{-l}^0 F_y dy, \quad F_y = \sqrt{1 - \beta^2} F_y', \quad dy = dy' \\
\Rightarrow W_y &= \sqrt{1 - \beta^2} \int_{-l}^0 F_y' dy' = \sqrt{1 - \beta^2} W' \\
\Rightarrow W_y &= \frac{1}{5} m_0 c^2
\end{aligned}$$

s 系中 A 的能量增量为

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_{ye}^2 + v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad 1 - \frac{u_{ye}^2 + v^2}{c^2} = (1 - \beta^2) \left(1 - \frac{u_{ye}'^2}{c^2} \right) \Big|_{u_{ye}' = \frac{3}{5}c} \\
\Rightarrow \Delta E &= \left(\frac{5}{4} \right)^2 m_0 c^2 - \frac{5}{4} m_0 c^2 = \frac{5}{16} m_0 c^2
\end{aligned}$$

此增量等于 F_y 对 A 作功 W_y 与 F_x 对 A 作功 W_x 之和, 即有

$$\begin{aligned}
\Delta E &= W_y + W_x \Rightarrow W_x = \Delta E - W_y = \frac{5}{16} m_0 c^2 - \frac{1}{5} m_0 c^2 \\
\Rightarrow W_x &= \frac{9}{80} m_0 c^2 \quad (6 \text{ 分})
\end{aligned}$$