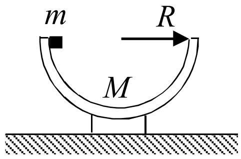
第 31 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷与解答

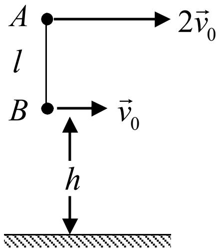
2014.12.07

1. 将地球半径 R、自转周期 T、地面重力加速度 g 取为已知量，则人造地球同步卫星的轨道半径= $\underline{\left[gT^2\big/\left(4\pi^2R\right)\right]^{\frac{1}{3}}R}$，轨道速度相对第一宇宙速度的比值= $\underline{\left[4\pi^2R\big/\left(T^2g\right)\right]^{\frac{1}{6}}}$。

2. 如图所示，水平桌面上静放着质量为 M，内半径为 R 的半球面形薄瓷碗，碗的底座与桌面间无摩擦。将质量为 m 的小滑块在图示的碗边位置从静止释放，随后将会无摩擦地沿碗的内表面滑下。小滑块到达最低位置时，它相对桌面的速度大小为 $\underline{\sqrt{2MgR\big/\left(M+m\right)}}$，它对碗底的正压力大小为 $\underline{\dfrac{3M+2m}{M}mg}$。



3. 如图所示，长 l 的轻细杆两端连接质量相同的小球 A、B，开始时细杆处于竖直方位，下端 B 球距水平地面高度记为 h。某时刻让 B 球具有水平朝右初速度 $\vec{v}_0$（其大小 $v_0<\pi\sqrt{gl}\big/2$），其上方 A 球具有水平朝右初速度 $2\vec{v}_0$。假设而后 A、B 同时着地，则 h 可取的最小值 $h_{\min}$= $\underline{\left(\pi^2gl-4v_0^2\right)l\big/\left(8v_0^2\right)}$，取 $h_{\min}$ 时，B 从开始运动到着地过程中其水平位移 s = $\underline{\left(\dfrac{3}{2}\pi-1\right)l\big/2}$。



4. 两个测量者 A 和 B，各自携带频率同为 1000Hz 的声波波源。设 A 静止，B 以 10m/s 的速度朝着 A 运动，已知声速为 340m/s，不考虑人体的反射，则 A 接收到的拍频 $\nu_{A拍}$ = $\underline{30}$ Hz（请保留 2 位有效数字），B 接收到的拍频 $\nu_{B拍}$ = $\underline{29}$ Hz（请保留 2 位有效数字）。

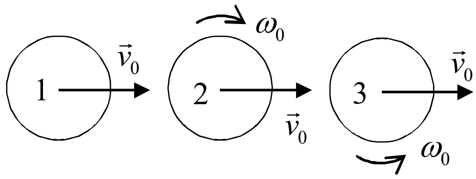


图 1

5. 如图 1 所示，3 个相同的匀质球体以相同的水平初速度 $\vec{v}_0$ 平抛出去。其中球 1 抛出时无自转，球 2、球 3 抛出时有自转，自转方向已在图 1 中示出，自转角速度值 ω_0 相同且较大。球 1 抛出后，落地前球心的一段运动轨道如图 2 长方形内一段曲线所示，试在该长方形区域内定性画出球 2、球 3 落地前各自球心的一段运动轨道。（球 2、球 3 球心在图 2 中的初始位置，可不受图 1 所示位置限制。）

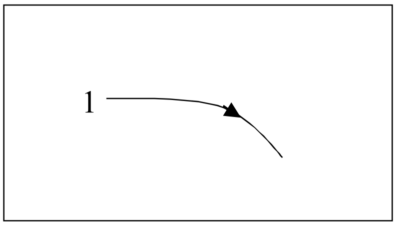
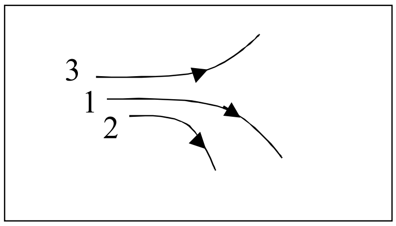
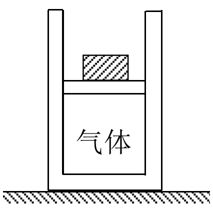
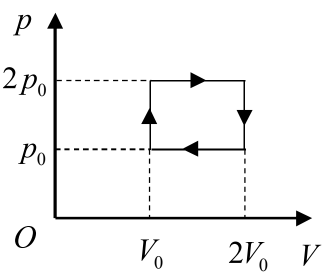


图 2



6. 如图所示，在一个绝热的竖直气缸里存有一定量的理想气体，开始时绝热的活塞是固定的。现拆去销钉（图中未画出），气体因膨胀而将活塞和重物举高，则此过程中气体的压强<u>减小</u>，温度<u>降低</u>。（空白处可填“增大”、“减小”、“升高”、“降低”。）

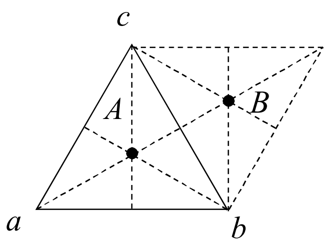




7. 某气体经历的循环过程如图所示，气体分子的热运动平均自由程 $\bar{\lambda}$ 和气体温度 T 都会随过程而变。将 $\bar{\lambda}$ 的最大值和最小值分别记为 $\bar{\lambda}_{\max}$ 和 $\bar{\lambda}_{\min}$，则 $\bar{\lambda}_{\max}:\bar{\lambda}_{\min}$ = $\underline{2}$。将 T 的最大值和最小值分别记为 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$，

则该气体在 $T_{\max}$ 热源和 $T_{\min}$ 热源之间形成的卡诺循环过程效率 $\eta_{卡}=$ 75% 。（空白处只可填数值。）

8. 在图中用实线代表的 3 根首尾相接的等长绝缘细棒上的电荷分布，与绝缘棒都换成等长细导体棒且处于静电平衡时的电荷分布完全相同。已测得图中 A、B 两点电势分别为 U_A、U_B，今将绝缘棒 ab 取走，设这不影响绝缘棒 ac、bc 的电荷分布，则此时 A 点电势 $U_A'=\dfrac{2}{3}U_A$，B 点电势 $U_B'=\dfrac{1}{6}U_A+\dfrac{1}{2}U_B$。



9. 双缝干涉装置如图 1 所示，屏幕中央 O 处出现亮条纹。O 处上下都有亮条纹，设图 1 标出的参量均为已知量，则相邻两条亮条纹间距可表述为 $\Delta x=\dfrac{D}{a}\lambda$。图 2 所示也是一种杨氏双缝干涉装置，直角挡板的两个侧面分别有对称的透光细缝 A、B。屏幕与挡板的一个侧面平行，屏幕 O 处可出现亮条纹。设图 2 标出的参量均为已知量，则屏幕 O 处附近相邻两条亮条纹的间距可表述为 $\Delta x=\dfrac{\sqrt{2}b}{a}\lambda$。

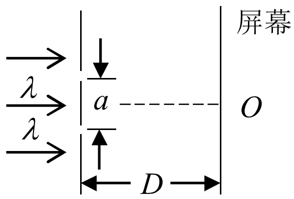


图 1

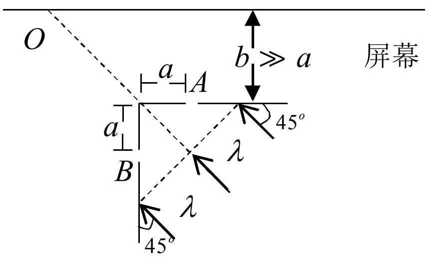


图 2

10. 铝的逸出功是 4.2eV，铝的红限波长 $\lambda_m=3\times10^2\ \text{nm}$。若用波长为 $200\ \text{nm}$ 的光照射铝表面，则光电效应的遏止电压 $U_0=2\ \text{V}$。（普朗克常量 $h=6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$，如上结果保留一位有效数字即可）

11.（15 分）

净质量 M_0 的喷水车，存水质量 m_0，在平直道路上以匀速度 v 行驶的同时，朝左、右两侧绿化带水平横向喷水，喷出去的水相对车身速度大小为常量 u，单位时间喷水质量为常量 κ。已知车在行驶过程中受正面空气阻力大小为 αv，其中 α 为正的常量；受地面阻力大小为 βN，其中 β 为正的常数，N 为地面所受正压力。不计其它能耗因素，试求车装满水启动达匀速 v 并开始喷水后，直到水喷净为止，车内作功装置的作功量 W。

解：为喷水提供作功总量

$$W_1=\frac{1}{2}m_0u^2 \qquad （2 分）$$

$t=0$，$x=0$ 开始计时、计程，$t>0$ 时刻

$$x=vt \qquad M=M_0+m_0-\kappa\frac{x}{v}$$

牵引力 $$F=\alpha v+\beta Mg=\alpha v+\beta g\left(M_0+m_0-\kappa\frac{x}{v}\right) \qquad （5 分）$$

$x=0$ 到 $x_e=vt_e=v\dfrac{m_0}{\kappa}$，总功

$$W_2=\int_0^{x_e}Fdx=\int_0^{x_e}\left[\alpha v+\beta g\left(M_0+m_0-\kappa\frac{x}{v}\right)\right]dx$$

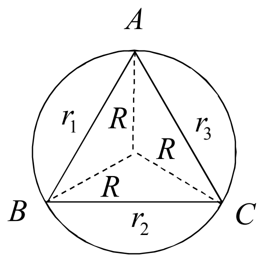
$$=\left[\alpha v+\beta g\left(M_0+\frac{m_0}{2}\right)\right]\frac{m_0 v}{\kappa}\qquad（6 分）$$

所求为

$$W=W_1+W_2=\frac{1}{2}m_0u^2+\left[\alpha v+\beta g\left(M_0+\frac{m_0}{2}\right)\right]\frac{m_0 v}{\kappa}\qquad（2 分）$$

12.（15 分）

如图所示，半径为R的长直圆柱形几何空间区域内，有轴向的匀强磁场，磁感应强度$\vec{B}$的方向垂直于图平面朝里，其大小随t变化，且有$dB/dt=k$，式中k为正的常量。圆柱形空间区域外没有磁场。在圆柱形空间区域内的一个正截面内，有一个用金属丝连接而成的圆内接正三角形$ABCA$，其中AB段、BC段和CA段的电阻分别记为r_1、r_2和r_3。



（1）试求AB段从A到B方向的电动势ε_{AB}；

（2）设$r_1=r_2=r_3$，试求AB段从A到B的电压U_{AB}；

（3）改设$r_1=r_0$、$r_2=2r_0$、$r_3=3r_0$，再求AB段从A到B的电压U'_{AB}。

解：（1）回路电动势为

$$\varepsilon_{ABCA}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(-B\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}R\cdot\sqrt{3}R\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}kR^2$$

因对称，即得 $\varepsilon_{AB}=\frac{1}{3}\varepsilon_{ABCA}=\frac{\sqrt{3}}{4}kR^2$ （6 分）

（2）回路电压 $U_{ABCA}=0$

因对称，有

$$U_{AB}=U_{BC}=U_{CA}\Rightarrow U_{AB}=0\qquad（3 分）$$

（3）将$r_1=r_0$、$r_2=2r_0$、$r_3=3r_0$代入电流公式：

$$I=I_{ABCA}=\varepsilon_{ABCA}\Big/(r_1+r_2+r_3)=\frac{3\sqrt{3}}{4}kR^2\Big/(6r_0)$$

得 $I=\sqrt{3}kR^2\big/(8r_0)$

继而得 $U'_{AB}=-\varepsilon_{AB}+Ir_1=-\frac{\sqrt{3}}{8}kR^2$ （6 分）

13.（15 分）

理想气体多方过程可表述为$pV^n=\kappa_1$（常量）或$TV^{n-1}=\kappa_2$（常量）

（1）已知κ_1和气体的摩尔数ν，求κ_2；

（2）已知多方指数n和气体的等体摩尔热容量C_{mV}，试依据过程摩尔热容量定义式$C_m=dQ\big/(\nu dT)$，

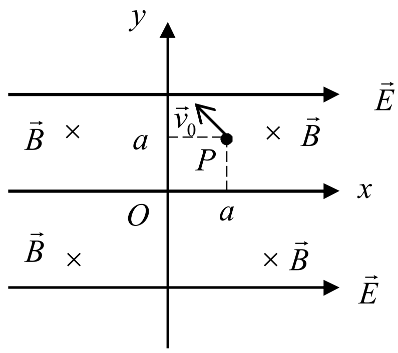
导出该多方过程的摩尔热容量C_m。

解：（1）
$$\begin{cases} pV^n=\kappa_1 \\ pV=\nu RT \end{cases} \Rightarrow TV^{n-1}=\kappa_1/(\nu R)\Rightarrow \kappa_2=\kappa_1/(\nu R)$$
（5 分）

（2）
$$C_m=dQ/(\nu dT)=(pdV+\nu C_{mV}dT)/(\nu dT)=\frac{pdV}{\nu dT}+C_{mV} \quad ①$$
$$V^{n-1}=\kappa_2/T\Rightarrow(n-1)V^{n-2}dV=-\kappa_2 dT/T^2$$
$$(V^n=\kappa_1/p)\Rightarrow(n-1)\frac{\kappa_1 dV}{pV^2}=-\kappa_2 dT/T^2=-\kappa_1 dT/(\nu RT^2)$$
$$(pV=\nu RT)\Rightarrow(n-1)\frac{dV}{V}=-dT/T=-\nu RdT/(pV)$$
$$\Rightarrow pdV=-\nu RdT/(n-1)$$
$$C_m=C_{mV}-\frac{R}{n-1}$$
（10 分）

另解：
$$TV^{n-1}=\kappa_2$$
$$\Rightarrow V^{n-1}dT+(n-1)V^{n-2}TdV=0$$
$$\therefore \frac{dV}{dT}=-\frac{1}{n-1}\frac{V}{T}=-\frac{1}{n-1}\frac{\nu R}{P}$$
代入①式：$C_m=C_{mV}+\dfrac{pdV}{\nu dT}=C_{mV}-\dfrac{R}{n-1}$

14.（15 分）

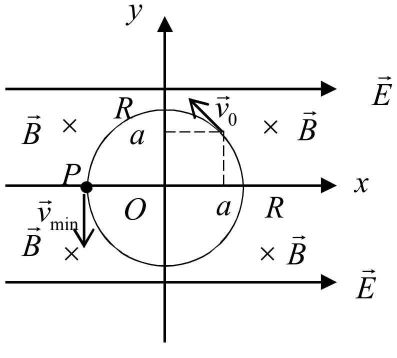


如图所示，在$O-xy$平面上有场强为$\vec{E}$平行于x轴方向的匀强电场，还有垂直于$O-xy$平面朝里的磁场，磁感应强度B的值仅随x变化。在$x=a$、$y=a$处，质量为m、电量$q>0$的质点P具有速度$\vec{v}_0$，使得P的而后运动轨道恰好是在$O-xy$平面上以O为圆心的圆周。已知P在运动过程中速度达最小值（不为零）时，所受磁场力为零。（过程中不考虑重力的影响。）

（1）试求速度$\vec{v}_0$的方向和大小；

（2）将圆半径记为R，试在$R\ge x\ge -R$范围内确定B随x变化的函数。

解：（1）P的初始位置到O的距离即为圆半径，故有
$$R=\sqrt{2}a$$
磁场力不作功，电场力作功，P的动能最小（即速度最小）位置必是在题解图 1 中
$$x=-R、y=0$$
处。P在该位置处不受磁场力，表明



题解图 1

$$B\left(x=-R\right)=0$$

P 作圆周运动所需向心力即为电场力，可得

$$\frac{mv_{\min}^2}{R}=qE\Rightarrow v_{\min}^2=qER/m\text{，}\quad R=\sqrt{2}a$$

P 在初始 $x=a$、$y=a$ 处时的动能为

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_{\min}^2+qE\left(R+a\right)\text{，}\quad R=\sqrt{2}a$$

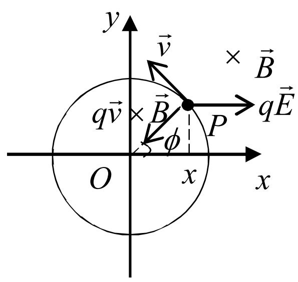
故有 $$v_0^2=v_{\min}^2+\frac{2qE\left(\sqrt{2}+1\right)a}{m}=qE\left(3\sqrt{2}+2\right)a\Big/m$$

即得

$$\vec{v}_0\begin{cases}\text{方向：如题解图 1 所示的切线方向}\\ \text{大小：}v_0=\sqrt{qE\left(3\sqrt{2}+2\right)a\Big/m}\end{cases}\qquad\text{（7 分）}$$

（2）参考题解图 2，P 处于图示位置时，引入参量

$$\alpha_x=x/a\text{（}\alpha_x\text{ 带正、负号）}$$



题解图 2

则有

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_{\min}^2+qE\left(\alpha_x+\sqrt{2}\right)a$$

$$\Rightarrow v^2=v_{\min}^2+\frac{2qE\left(\alpha_x+\sqrt{2}\right)a}{m}$$

$$=qE\left(3\sqrt{2}+2\alpha_x\right)a\Big/m$$

因 $$qvB-qE\cos\phi=mv^2\Big/\left(\sqrt{2}a\right)$$

得 $$B=\frac{E\cos\phi}{v}+\frac{mv}{\sqrt{2}qa}\text{，}\quad\cos\phi=\frac{x}{R}=\frac{\alpha_x}{\sqrt{2}}$$

所求 $B\sim x$ 函数便为

$$\begin{cases}B(x)=\sqrt{\dfrac{mE}{2qa}}\left[\dfrac{\alpha_x}{\sqrt{3\sqrt{2}+2\alpha_x}}+\sqrt{3\sqrt{2}+2\alpha_x}\right]\\ R\geq x\geq -R\Rightarrow\sqrt{2}a\geq x\geq-\sqrt{2}a\end{cases}\qquad\text{（8 分）}$$

说明：题解图 2 中，P 位于第 I 象限求得 $B(x)$ 分布，考虑到 x 正负号与不同象限中 $\cos\phi$ 正负号的组合关系，所得 $B(x)$ 分布同样适用于 II、III、IV 象限。

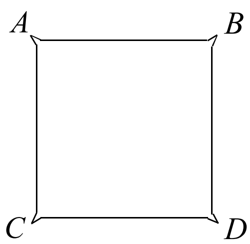


图 1

15.（20 分）

用某种导电材料制成如图 1 所示的匀质正方形电阻薄平板，4 个微微朝外突出的顶端记为 A、B、C、D。将 A、C 两端间的等效电阻记为 R_1，A、D 两端间的等效电阻记为 R_2。

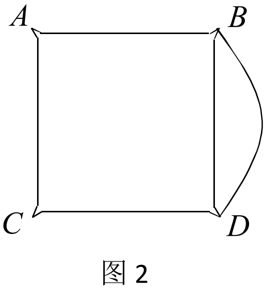


图 2

（1）设电流 I 从 A 端流入，C 端流出，请定性画出平板中电流线的分布，而后

试导出 R_1、R_2、$2R_1$ 之间的大小排序关系。

（2）如图 2 所示，用理想导线连接 B、D 端，试求此时 A、C 两端间的等效电阻 R_{AC}，答案用 R_1、R_2 表示。

（3）如图 3 所示，将 6 块这样的电阻薄平板通过顶端间的焊接，棱边间均不焊接且不接触，构成一个中空且露缝的“正方体”，试求图中两个相对顶端 C、B' 间的等效电阻 $R_{CB'}$，答案用 R_1、R_2 表示。

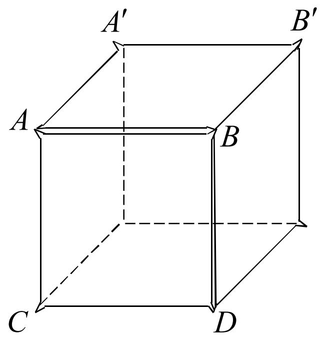


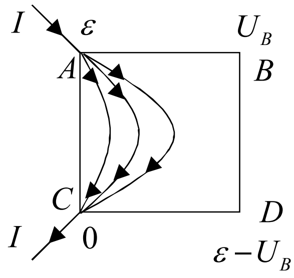
图 3

解：（1）设电流 I 从 A 端流入，C 端流出，板中电流的定性分布图如题解图 1 所示。将 C 端电势记为 0，A 端电势记为 ε，则有

$$R_1=\frac{\varepsilon}{I} \qquad （1）$$

再将 B 端电势记为 U_B，则必有

$$U_B<\varepsilon$$



题解图 1

若将 D 点电势记为 U_D，则因电流分布的对称性，

必有 $\quad U_D-U_C=U_A-U_B \Rightarrow U_D=\varepsilon-U_B$

又因 $U_B>U_D$，与上式联立，便得

（$U_B>U_D=\varepsilon-U_B \Rightarrow 2U_B>\varepsilon \Rightarrow U_B>\frac{1}{2}\varepsilon$）

$$U_B>\frac{1}{2}\varepsilon$$

即有 $\qquad \varepsilon>U_B>\frac{1}{2}\varepsilon \qquad$ （2）

以题解图 1 电流分布为样本，构建题解图 2 中（a）、（b）两种电流分布，它们叠加成题解图 2 中（c）的电流分布，此分布便可给出题文中的 R_2 为

$$R_2=\frac{U_B-(-U_B)}{I}=\frac{2U_B}{I} \qquad （3）$$

由（3）、（1）式，得 $\qquad U_B=\frac{I}{2}R_2$，$\varepsilon=IR_1$

代入（2）式，可得

$$IR_1>\frac{I}{2}R_2>\frac{1}{2}IR_1$$

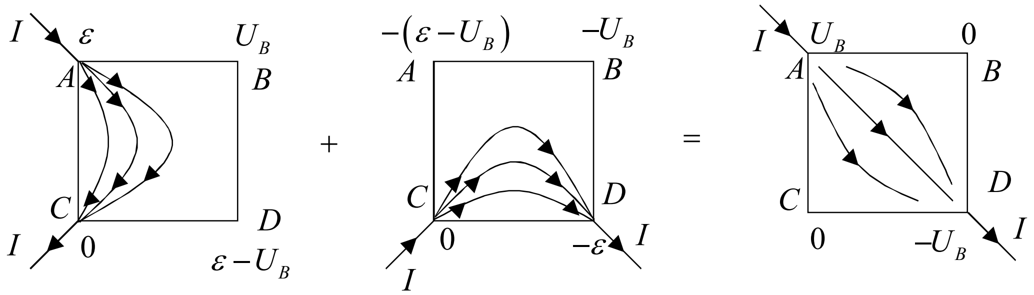
即得所求大小关系为

$2R_1>R_2>R_1 \qquad$ （4）（7 分）

此处，还可得

$$U_B=\frac{I}{2}R_2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{R_1}R_2$$

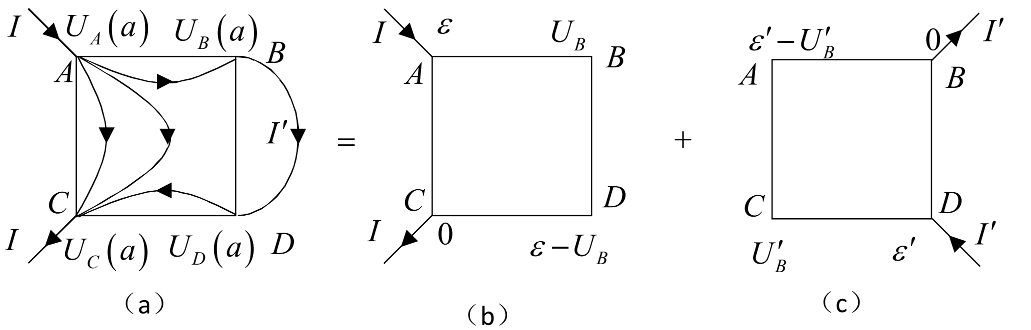
$$\Rightarrow U_B=\frac{\varepsilon}{2}\frac{R_2}{R_1} \qquad （5）$$



（a）　（b）　（c）

题解图 2

（2）设电流I从题图 2 的A端流入，C端流出，电流的定性分布如题解图 3 中（a）所示，并将A、B、C、D端电势分别记为$U_A(a)$、$U_B(a)$、$U_C(a)$、$U_D(a)$。图（a）中左侧正方形平板中的电流分布，可分解为题解图 3 中（b）和（c）中未画出的电流分布的叠加。（b）中电流和电势分布与题解图 1 完全相同。（c）中电流I'从D端流入，B端流出，参照题解图 1 的结构，可设B端电势为0，D端电势记为待定的ε'，C端电势记为U_B'，A端电势便应为$\varepsilon'-U_B'$。



题解图 3

（a）中B、D间的理想导线使B、D等势，结合叠加关联，有

$$U_B(a)=U_D(a)，U_B(a)=U_B，U_D(a)=\varepsilon-U_B+\varepsilon'$$

得 $$\varepsilon'=2U_B-\varepsilon \qquad (6)$$

将（5）式代入，得 $$\varepsilon'=\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\varepsilon \qquad (7)$$

（c）中I'流入形成的ε'、U_B'与（b）中I流入形成的ε、U_B之间应有同构关联，即可引入两个比例常量$\alpha>0$、$\beta>0$，有

$$\varepsilon'=\alpha I'，U_B'=\beta I'；\varepsilon=\alpha I，U_B=\beta I$$

即得 $$\frac{U_B'}{\varepsilon'}=\frac{U_B}{\varepsilon}\Rightarrow U_B'=U_B\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

将（5）、（7）式代入，得 $$U_B'=\frac{R_2}{2R_1}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\varepsilon$$

对应图（a）中有

$$\begin{aligned}U_{AC}(a)&=U_A(a)-U_C(a)=\left(\varepsilon+\varepsilon'-U_B'\right)-\left(0+U_B'\right)\\&=\varepsilon+\varepsilon'-2U_B'\\&=\varepsilon+\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\varepsilon-\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\varepsilon\end{aligned}$$

得 $$U_{AC}(a)=\frac{R_2}{R_1}\left(2-\frac{R_2}{R_1}\right)\varepsilon \qquad (8)$$

图（a）中A、C两端间的等效电阻，即为题（2）所求R_{AC}，应为

$$R_{AC}={U_{AC}(a)}\Big/{I}=\frac{R_2}{R_1}\left(2-\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\varepsilon}{I}$$

将（1）式代入即得 $R_{AC}=\left(2-\dfrac{R_2}{R_1}\right)R_2$ （9） （6 分）

据（4）式，已有 $2R_1>R_2$，故必有

$$R_{AC}>0$$

（3）参考题解图 4，电流 I 从 C 端流入后，均分到正板面、左板面和下板面，故正板面中电流

$$I_{C正}=\frac{1}{3}I$$

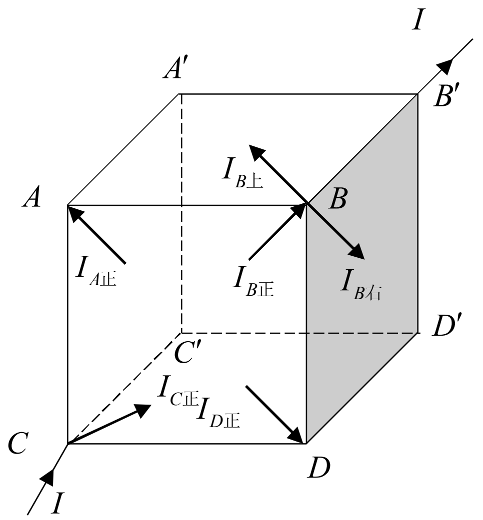
此电流经 A、B、D 端分流流出，应有

$$I_{A正}=I_{D正}$$

$$I_{A正}+I_{D正}+I_{B正}=I_{C正}=\frac{1}{3}I \qquad （10）$$

其中 $I_{B正}$ 将等分给从 B 端流入上板面的 $I_{B上}$ 和流入右板面的 $I_{B右}$，即有

$$I_{B上}=I_{B右}，\ I_{B正}=I_{B上}+I_{B右}$$



题解图 4

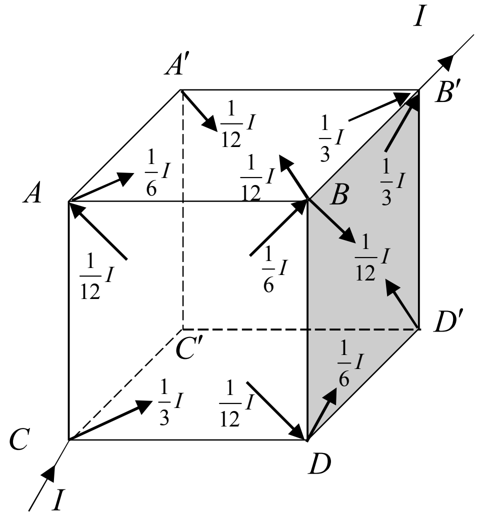
最终从 B' 端流出的总电流也为 I。如果让电流 I 从 B' 端反向流入，则 $I_{B上}$、$I_{B右}$ 也将大小不变地反流，它们将与题解图 4 中的 $I_{A正}$ 或 $I_{D正}$ 同构，故必有

$$I_{B正}=I_{A正}+I_{D正}=2I_{A正}$$

结合（10）式，得

$$I_{B正}=\frac{1}{6}I，\ I_{A正}=I_{D正}=\frac{1}{12}I \qquad （11）$$

据此可得题解图 5 所示的电流分布



题解图 5

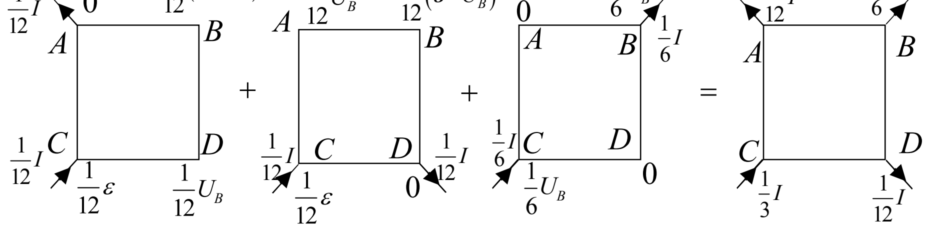
电流 I 从输入端 C 到输出端 B' 形成的总电压为

$$U_{CB'}=U_{CB}(正)+U_{BB'}(上)$$

从上板面 B 端到 B' 端的电压 $U_{BB'}(上)$，可等效为从正板面 A 端到 C 端的电压的负值，即等效为从正板面 C 端到 A 端的电压 U_{CA}，即有

$$U_{BB'}(上)=U_{CA}(正)\Rightarrow U_{CB'}=U_{CB}(正)+U_{CA}(正) \qquad （12）$$

题解图 6 中（a）、（b）、（c）的电流分布，可叠加成（d）所示的正板面电流分布。（a）、（b）、（c）中各端点的电势依据题解图 1、2 给出，叠加成（d）中相应点的电势（（d）中未标出）：



（a） （b） （c） （d）

题解图 6

$$U_A(\text{正})=\frac{1}{12}U_B，\ U_B(\text{正})=\frac{1}{12}\left(\varepsilon-U_B\right)+\frac{1}{12}\left(\varepsilon-U_B\right)-\frac{1}{6}U_B=\frac{1}{6}\varepsilon-\frac{1}{3}U_B$$

$$U_C(\text{正})=\frac{1}{12}\varepsilon+\frac{1}{12}\varepsilon+\frac{1}{6}U_B=\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{1}{6}U_B$$

继而可得

$$U_{CB}(\text{正})=U_C(\text{正})-U_B(\text{正})=\left(\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{1}{6}U_B\right)-\left(\frac{1}{6}\varepsilon-\frac{1}{3}U_B\right)=\frac{1}{2}U_B$$

$$U_{CA}(\text{正})=U_C(\text{正})-U_A(\text{正})=\left(\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{1}{6}U_B\right)-\frac{1}{12}U_B=\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{1}{12}U_B$$

代入（12）式，得

$$U_{CB'}=\frac{1}{2}U_B+\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{1}{12}U_B=\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{7}{12}U_B \qquad (13)$$

其中ε、U_B均由本题（1）问解答中给出，即

$$\varepsilon=IR_1，\ U_B=\frac{\varepsilon}{2}\frac{R_2}{R_1}$$

代入（13）式，即得

$$U_{CB'}=\frac{1}{6}IR_1+\frac{7}{12}\bullet\frac{1}{2}IR_1\bullet\frac{R_2}{R_1}=\left(\frac{1}{6}R_1+\frac{7}{24}R_2\right)I$$

所求$R_{CB'}$便为

$$R_{CB'}=U_{CB'}/I=\frac{1}{6}R_1+\frac{7}{24}R_2 \qquad \text{（7 分）}$$

16.（20 分）

阻尼振动的微分方程为

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0 \qquad \beta>0$$

（1）$\beta=\omega_0$为临界阻尼，方程通解为

$$x_{\text{临}}=\left(C_{\text{临}1}+C_{\text{临}2}t\right)e^{-\beta t}$$

设$t=0$时，$x_{\text{临}}=x_{\text{临}0}$，$\dot{x}_{\text{临}}=v_{\text{临}0}$，其中$x_{\text{临}0}$、$v_{\text{临}0}$都带有正负号。

（1.1）试求$C_{\text{临}1}$、$C_{\text{临}2}$。

（1.2）若$x_{\text{临}0}>0$，试通过分析，确定$v_{\text{临}0}$取哪些值，使振子都不能经有限时间降到$x_{\text{临}}=0$位置。

（2）$\beta>\omega_0$为过阻尼，方程通解为

$$x_{\text{过}}=C_{\text{过}1}e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}+C_{\text{过}2}e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$

设$t=0$时，$x_{\text{过}}=x_{\text{过}0}$，$\dot{x}_{\text{过}}=v_{\text{过}0}$，其中$x_{\text{过}0}$、$v_{\text{过}0}$都带有正负号。

（2.1）试求$C_{\text{过}1}$、$C_{\text{过}2}$。

（2.2）若$x_{\text{过}0}>0$，试通过分析，确定$v_{\text{过}0}$取哪些值，使振子都能经有限时间降到$x_{\text{过}}=0$位置。

（2.3）若$x_{\text{过}0}>0$，试问$v_{\text{过}0}$取何值时，可使$C_{\text{过}1}=0$？

（3）若临界阻尼振动取（1.2）问所得 $x_{临0}$ 和 $v_{临0}$，过阻尼振动取（2.3）问所得 $x_{过0}$ 和 $v_{过0}$，且 $x_{过0} > x_{临0}$，试问临界阻尼振动与过阻尼振动中哪一个可使振子更快地趋向零点？

解：

（1）由 $t=0$ 时的初始条件，可得

$C_{临1} = x_{临0}$， $C_{临2} - \beta C_{临1} = v_{临0}$

（1.1）由上述两式，可解得

$C_{临1} = x_{临0}$，$C_{临2} = \beta x_{临0} + v_{临0}$ （3 分）

（1.2）在 $x_{临0} > 0$ 前提下，振子在有限时间内不能降到 $x_{临} = 0$ 位置的条件是

$$\left(C_{临1} + C_{临2} t\right)\Big|_{t>0} > 0$$

即得所求为

$v_{临0} \ge -\beta x_{临0}$ （2 分）

（2）由 $t=0$ 时的初始条件，可得

$$C_{过1} + C_{过2} = x_{过0}，\ -\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right) C_{过1} - \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right) C_{过2} = v_{过0}$$

$$\Rightarrow -\beta(C_{过1} + C_{过2}) + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}(C_{过1} - C_{过2}) = v_{过0}$$

（2.1）由上述两式，可解得

$$C_{过1} = \frac{1}{2}\left(x_{过0} + \frac{\beta x_{过0} + v_{过0}}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right),\quad C_{过2} = \frac{1}{2}\left(x_{过0} - \frac{\beta x_{过0} + v_{过0}}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right) \qquad （3 分）$$

（2.2）过阻尼通解可表述为

$$x_{过} = \frac{1}{2} x_{过0} e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} \left[\left(\frac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + 1\right) e^{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} - \left(\frac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} - 1\right)\right] \qquad （2 分）$$

$\alpha = v_{过0} / x_{过0}$

等号右边第一项整体取正，且单调递减，但不会达到零值。t = 0 时，方括号内的算式其值为正，而后其中左侧项整体绝对值随 t 增大，右侧项则为常量。如果在某个 t > 0 有限时刻，方括号算式其值为零，则对应 $x_{过} = 0$，振子降到该位置。

分两种情况分析：

I. $v_{过0} \ge 0$，则 $\dfrac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$ 为正，$\dfrac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + 1$ 为正

（a）若 $\dfrac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} - 1$ 为正，则因

$$\frac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + 1 > \frac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} - 1$$

$t > 0$ 时，恒有

$$\left(\frac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + 1\right) e^{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t} - \left(\frac{\beta + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} - 1\right) > 0$$

II. $v_{过0}<0$，则 $\alpha<0$

（a）设 $\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+1>0$（为正），则 $\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}>-1$，$\beta+\alpha>-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

$$\Rightarrow \alpha>-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})\Rightarrow v_{过0}>-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x_{过0}$$

又因

$$\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+1>\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}-1,$$

无论 $\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}-1$ 为正或为负

$t>0$ 时，仍然恒有

$$\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+1\right)e^{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}-\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}-1\right)>0$$

（b）设 $\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+1<0$（为负），则 $\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}<-1$，$\beta+\alpha<-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

$$\Rightarrow \alpha<-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x\Rightarrow v_{过0}<-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x_{过0}$$

仍因

$$\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+1>\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}-1,$$

故两者均为负值，且左边的绝对值小，右边的绝对值大。

故必定存在有限的某个 $t>0$，使得

$$\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}+1\right)e^{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}-\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}-1\right)=0$$

左边负值的绝对值增大到等于右边负值的绝对值

综上所述，$v_{过0}$ 取值范围为

$$v_{过0}<-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x_{过0} \qquad （5 分）$$

时，振子都能经过有限时间降到 $x_{过}=0$ 位置。

（2.3）为使 $C_{过1}=0$，要求 $v_{过0}$ 取值为

$$v_{过0}<-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x_{过0}$$

此时必有 $C_{过2}=x_{过0}>0$

（3）此时

$$x_{临} = \left(C_{临1} + C_{临2}t\right)e^{-\beta t}$$

$$x_{过} = C_{过2}e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} = \left(x_{过0}e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right)e^{-\beta t}$$

据（1.2）题文和（1.2）问解答以及（1.1）解答，已有

$x_{临0} > 0$， $C_{临1} = x_{临0} > 0$

$C_{临2} = \beta x_{临0} + v_{临0}$， $v_{临0} \geq -\beta x_{临0}$ 即 $\beta x_{临0} + v_{临0} > 0$

$\Rightarrow C_{临2} \geq 0$

据（2.3）题文，还有

$x_{过0} > x_{临0} > 0$

则必存在某个 t_0 时刻，使得 $t > t_0$ 时有

$$C_{临1} > x_{过0}e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} \Rightarrow e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} > \frac{x_{过0}}{C_{临1}} = \frac{x_{过0}}{x_{临0}}$$

$$\Rightarrow t > t_0 = \ln\frac{x_{过0}}{x_{临0}} / \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

进而，$t > t_0$ 时必有

$$C_{临1} + C_{临2}t > C_{临1} > x_{过0}e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}$$ （5 分）

考虑到前式中的 $e^{-\beta t}$ 为公共的衰减因子，故过阻尼振动可使振子能更快地趋向零位置。

17.（20 分）

如图 1 所示，在光滑的水平面上，平放着一个质量为 $M = \gamma m$、半径为 R 的均匀圆环，它的直径两端分别连接长度同为 l 的轻细绳，绳的另一端分别连接质量同为 m 的小物块。开始时细绳伸直，环和物块静止。某时刻令两小物块在垂直绳的水平方向上分别获得方向相反、大小同为 v_0 的初速度。假设最终细绳能全部缠绕在环上，两个小物块贴在环边与环一起转动，且过程中不发生小物块与圆环的碰撞。

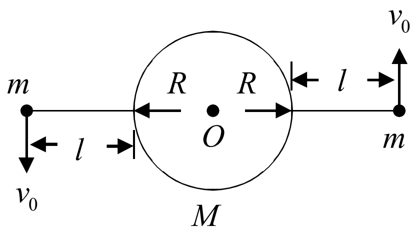


图 1

（1）考虑到过程中绳的作用可能不损耗机械能，也可能损耗机械能，试求 γ 的取值范围。

（2）假设系统从初态到末态的过程可分为两个阶段，第一阶段如图 2 所示，图中 θ 为圆环转角，u 为环边转动速度，ϕ $\left(90^o \geq \phi \geq 0\right)$ 角为细绳相对圆环转角，v' 为物块相对圆环速度。据（1）问，取绳不损耗机械能对应的 γ 值，试导出两个可求解 u、v' 的方程组(不必求解)，方程组中不含参量 M、

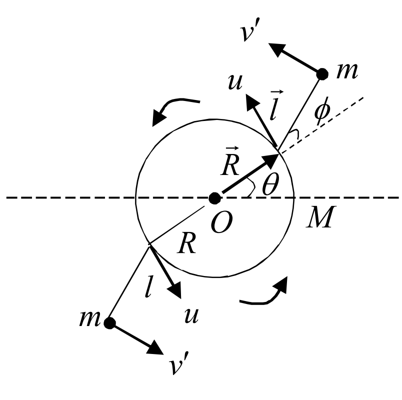


图 2

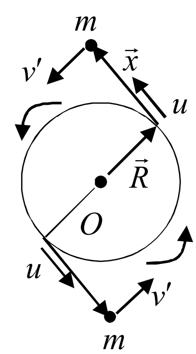


图 3

m 和θ。

（3）设$l=R$，将$\phi=90^o$代入（2）问所得方程组，求解u和v'，答案用v_0表示。

（4）第一阶段结束于图 2 中的ϕ达90^o，而后进入过程的第二阶段，即绳连续地缠绕在环上。继（3）问所设；参考图 3 所示的过程态参量：x（尚未缠绕在环上的绳段长度）、u（环边转动速度）、v'（物块相对圆环速度）。试求第二阶段所经时间T（答案用R、v_0表示）。

解：（1）因对称，环心O为不动点，地面系中取O所在位置为参考点，系统角动量守恒。由

$$R\left(M+2m\right)\omega R=2\left(l+R\right)mv_0$$

得末态圆环转动角速度 $\omega=\dfrac{2\left(l+R\right)mv_0}{\left(M+2m\right)R^2}$

系统末态动能小于或等于初态动能，即有

$$\frac{1}{2}\left(M+2m\right)\left(\omega R\right)^2\le 2\times\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(M+2m\right)R^2\left[\frac{2\left(l+R\right)mv_0}{\left(M+2m\right)R^2}\right]^2=\frac{2\left(l+R\right)^2m^2v_0^2}{\left(M+2m\right)R^2}\le mv_0^2$$

$$\Rightarrow 2\left(l+R\right)^2m\Big/\left[\left(M+2m\right)R^2\right]\le 1$$

得 $\gamma=\dfrac{M}{m}\ge\dfrac{2l\left(l+2R\right)}{R^2}$ $\begin{cases} >\text{：绳损耗机械能} \\ =\text{：绳不损耗机械能} \end{cases}$ （5 分）

（2）将图 2 中右上方的u、v'矢量化为$\vec{u}$、$\vec{v}'$，将圆环转动角速度矢量化为$\vec{\omega}$。右上方小物块相对地面系的速度

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\left(\vec{R}+\vec{l}\right)，\ \vec{\omega}\times\vec{R}=\vec{u}$$

$$\Rightarrow\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}+\vec{\omega}\times\vec{l}$$

将$\vec{v}$分解成与$\vec{u}$平行及垂直的分量$v_{\parallel}$、$v_{\perp}$，则有

$$v_{\parallel}=v'\cos\phi+u+\omega l\cos\phi，\ v_{\perp}=v'\sin\phi+\omega l\sin\phi$$

因 $u=\omega R\Rightarrow\omega l=\dfrac{l}{R}u$

得

$$\begin{cases} v_{\parallel}=v'\cos\phi+u+\dfrac{l}{R}u\bullet\cos\phi=v'\cos\phi+\left(1+\dfrac{l}{R}\bullet\cos\phi\right)u \\ v_{\perp}=v'\sin\phi+\dfrac{l}{R}u\bullet\sin\phi \end{cases}$$

也可将$\vec{v}$分解成与$\vec{v}'$平行及垂直的分量$v_{\parallel}^*$、$v_{\perp}^*$，则有

$$\begin{cases} v_{\parallel}^*=v'+\omega R\cos\phi+\omega l=v'+u\cos\phi+\dfrac{l}{R}u=v'+\left(\cos\phi+\dfrac{l}{R}\right)u \\ v_{\perp}^*=\omega R\sin\phi=u\sin\phi \end{cases}$$

每个小物块相对地面系O点角动量为

$$\left(\vec{R}+\vec{l}\right)\times m\vec{v}=\vec{R}\times m\vec{v}+\vec{l}\times m\vec{v}=\left(Rmv_{\parallel}+lmv_{\parallel}^{*}\right)\vec{k}，\ \vec{k}=\vec{\omega}/\omega$$

$$=\left\{Rm\left[v'\cos\phi+\left(1+\frac{l}{R}\cos\phi\right)u\right]+lm\left[v'+\left(\cos\phi+\frac{l}{R}\right)u\right]\right\}\vec{k}$$

系统角动量守恒方程为

$$RMu+2m\left\{R\left[v'\cos\phi+\left(1+\frac{l}{R}\cos\phi\right)u\right]+l\left[v'+\left(\cos\phi+\frac{l}{R}\right)u\right]\right\}=2\left(R+l\right)mv_0$$

$$\Rightarrow\gamma Ru+2\left\{\left[R\left(1+\frac{l}{R}\cos\phi\right)+l\left(\cos\phi+\frac{l}{R}\right)\right]u+\left[R\cos\phi+l\right]v'\right\}=2\left(R+l\right)v_0 \qquad （1）$$

系统机械能守恒方程为

$$\frac{1}{2}Mu^2+2\times\frac{1}{2}m\left(v_{\parallel}^{*2}+v_{\perp}^{*2}\right)=2\times\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow\gamma u^2+2\left\{\left[v'+\left(\cos\phi+\frac{l}{R}\right)u\right]^2+u^2\sin^2\phi\right\}=2v_0^2 \qquad （2）$$

（或为$\gamma u^2+2\left\{\left[v'\cos\phi+\left(1+\frac{l}{R}\cos\phi\right)u\right]^2+\left(v'\sin\phi+\frac{l}{R}u\sin\phi\right)^2\right\}=2v_0^2$ （2））

方程（1）（2）联立，即成可求解u、v'的方程组。　　（6 分）

（3）取

$$l=R，\ \gamma=6，\ \phi=90^o，\ \cos\phi=0，\ \sin\phi=1$$

（2）问解答中（1）、（2）式简化为

$$5u+v'=2v_0，\ 5u^2+2v'u+v'^2=v_0^2$$

得解为　　$u=\frac{3}{10}v_0，\ v'=\frac{1}{2}v_0$　　（2 分）

（4）先将　$\gamma=6，\ \phi=90^o，\ \cos\phi=0，\ \sin\phi=1$

代入（2）问解答中的（1）、（2）式，得

$$3Ru+\left\{\left(R+\frac{l^2}{R}\right)u+lv'\right\}=\left(R+l\right)v_0 \qquad (1)'$$

$$3u^2+\left\{\left(v'+\frac{l}{R}u\right)^2+u^2\right\}=v_0^2 \qquad (2)'$$

考虑到图 2 中l已由图 3 中的$x\le l$代替，先将$(1)'$、$(2)'$式等号左边的l换成x；但因$(1)'$、$(2)'$等号右边的量为系统初态量，其中l不可用x取代，而应以（3）问所设$l=R$用R取代，即得

$$\left(4+\frac{x^2}{R^2}\right)u+\frac{x}{R}v'=2v_0，\ \left(4+\frac{x^2}{R^2}\right)u^2+2\frac{x}{R}v'u+v'^2=v_0^2$$

或改述为

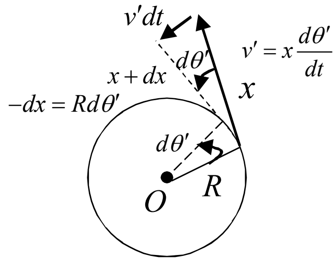
$$u=\left(2v_0-\beta v'\right)/\alpha，\ \alpha u^2+2\beta v'u+v'^2=v_0^2，\ \beta=\frac{x}{R}，\ \alpha=4+\beta^2$$

两式联立，消去u，得

$$\left(2v_0-\beta v'\right)^2+2\beta\left(2v_0-\beta v'\right)v'+\alpha v'^2=\alpha v_0^2$$
$$\Rightarrow 4v_0^2-\beta^2v'^2+\alpha v'^2=\alpha v_0^2\Rightarrow 4v'^2=\beta^2v_0^2$$

解得 $$v'=\frac{x}{2R}v_0$$

取圆环参考系，参考题解图，有



题解图

$$x\frac{d\theta'}{dt}=v'=\frac{x}{2R}v_0$$
$$\Rightarrow\frac{d\theta'}{dt}=v_0/(2R)$$
$$-dx=Rd\theta'=R\frac{d\theta'}{dt}dt=\frac{v_0}{2}dt$$
$$\Rightarrow dt=-\frac{2}{v_0}dx$$
$$\Rightarrow\int_0^T dt=-\frac{2}{v_0}\int_R^0 dx$$

得 $T=2R/v_0$ （7 分）

（注意：$d\theta'/dt$ 并非圆环相对地面系旋转角速度ω。）

附录：填空题答案导出过程简述（参考）

1.地球自转角速度$\omega=2\pi/T$，同步卫星轨道半径R^*满足方程

$$m\omega^2R^*=GM_e m/R^{*2}\text{，}\quad GM_e=gR^2$$

得 $$R^*=\left[gT^2/\left(4\pi^2R\right)\right]^{\frac{1}{3}}R$$

第一宇宙速度$v_1=\sqrt{gR}$，同步卫星速度

$$v^*=\omega R^*=\frac{2\pi}{T}\left[gT^2/\left(4\pi^2R\right)\right]^{\frac{1}{3}}R$$

得 $$v^*/v_1=\left[4\pi^2R/\left(T^2g\right)\right]^{\frac{1}{6}}$$

2.小滑块到达最低点时相对桌面速度记为v_m，瓷碗相对桌面反向速度记为v_M，则有

$$mv_m=Mv_M\Rightarrow v_M=\frac{m}{M}v_m$$
$$\frac{1}{2}mv_m^2+\frac{1}{2}Mv_M^2=mgR\Rightarrow mgR=\frac{1}{2}mv_m^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_m\right)^2=\frac{1}{2}mv_m^2\frac{M+m}{M}$$

得 $$v_m=\sqrt{2MgR/\left(M+m\right)}$$

小滑块到达最低点时，瓷碗参考系为瞬时惯性系，此时滑块对碗底正压力大小若记为N，则有

$$N=mg+m\frac{\left(v_m+v_M\right)^2}{R}=\cdots=\frac{3M+2m}{M}mg$$

3.系统质心水平朝右速度和A、B绕质心旋转角速度大小分别为

$$v_{C0}=\frac{3}{2}v_0，\ \omega=\frac{1}{2}v_0\Big/\left(\frac{l}{2}\right)=v_0/l$$

质心经Δt时间着地，要求A、B绕质心转过$\pi/2$，有

$$\Delta t=\sqrt{2\left(\frac{l}{2}+h\right)\Big/g}，\ \omega\Delta t=\pi/2$$

可解得 $$h_{\min}=h=\left(\pi^2gl-4v_0^2\right)l\Big/\left(8v_0^2\right)$$

质心平抛射程和B的水平位移分别为

$$s_C=\frac{3}{2}v_0\Delta t，\ s=s_C-\frac{l}{2}=\frac{3}{2}v_0\frac{\pi}{2\omega}-\frac{l}{2}=\frac{3}{2}v_0\frac{\pi}{2}\cdot\frac{l}{v_0}-\frac{l}{2}$$

得 $$s=\left(\frac{3}{2}\pi-1\right)l/2$$

4.略

5.略

6.略

7. $\bar{\lambda}\propto V$：$\bar{\lambda}_{\max}:\bar{\lambda}_{\min}=2V_0/V_0=2$

$T_{\max}$由{$2p_0$、$2V_0$}态对应，$T_{\min}$由{p_0、V_0}态对应，故

$$T_{\max}=4T_{\min}$$

继而可得 $$\eta_{卡}=1-\frac{T_{\min}}{T_{\max}}=75\%$$

8. ab、bc、ac棒中电荷必有相同的对称分布，各自对A点电势贡献相同，记为U_1。bc棒对B点电势贡献也必为U_1，而ab、ac棒对B点电势贡献相同，记为U_2。

于是有 $3U_1=U_A$，$U_1+U_2=U_B$

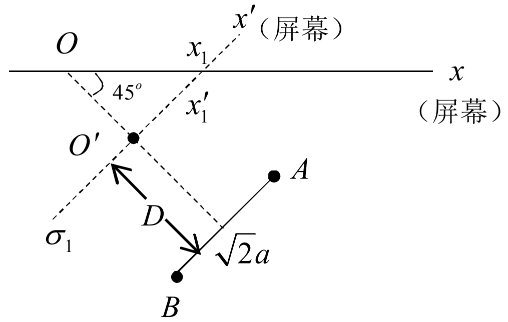
解得 $U_1=\frac{1}{3}U_A$，$U_2=\frac{1}{2}U_B-\frac{1}{6}U_A$

将ab棒取走后，A、B两点电势便分别为

$$U_A'=2U_1=\frac{2}{3}U_A，\ U_B'=U_1+U_2=\frac{1}{6}U_A+\frac{1}{2}U_B$$

9.题图1对应的Δx，可按公式直接写出其值为$\frac{D}{a}\lambda$。

题图2对应的O处附近相邻两条亮条纹间距Δx的求解，可参考题解图进行。



题解图

图中σ_1平面可记为原始杨氏双缝干涉中的平行屏幕，其上$k=1$级亮纹恰好是题图2屏幕上的$k=1$级亮纹，则有

$$\vartriangle x=\sqrt{2}\vartriangle x'，\quad \vartriangle x'=\frac{D}{\sqrt{2}a}\lambda$$

因$b\gg a$，得

$$D\approx\sqrt{2}b\Rightarrow\Delta x=\frac{\sqrt{2}b}{a}\lambda$$

10. $$A=h\nu=hc/\lambda_m\Rightarrow\lambda_m=hc/A=296nm$$

$$E_\kappa=h\nu-A=\frac{hc}{\lambda}-A，\quad U_0=\frac{E_\kappa}{e}=2.0V$$