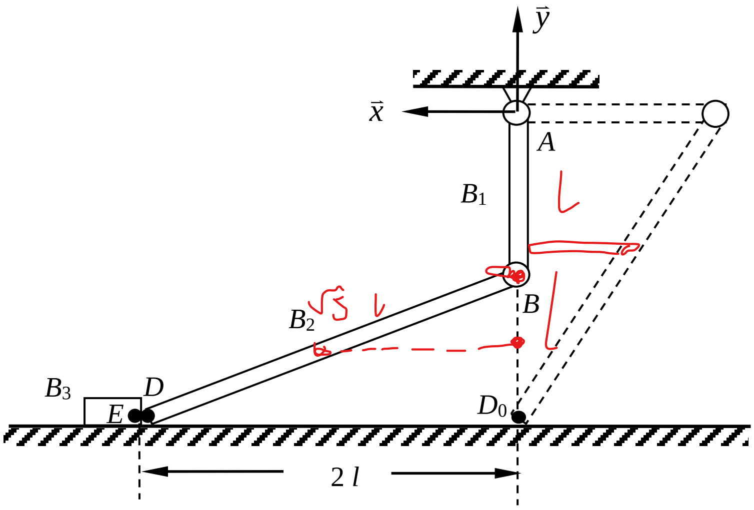
上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 20__13__ 至 20__14__ 学年 第 1 学期 ）

班级号________________________ 学号______________ 姓名 ________

课程名称 __理论力学 D__________________________ 成绩 ________



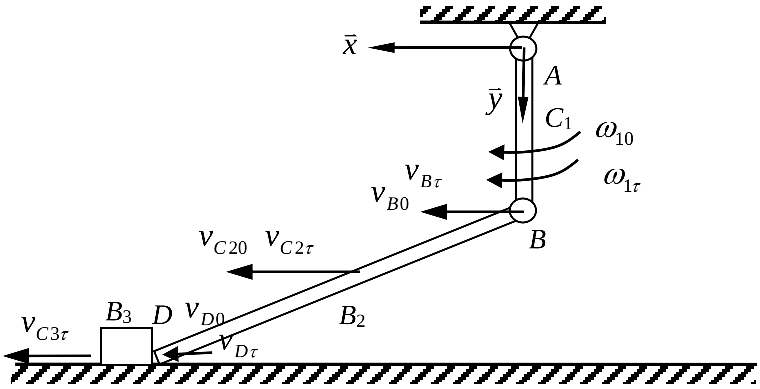
1． (20 分) 如图所示，匀质杆 B_1 与基座铰接于 A，与匀质杆 B_2 铰接于 B。杆 B_2 的端点 D 可以在光滑的水平面上滑动。滑块 B_3 置于光滑的水平面上。杆 B_1、B_2 与滑块 B_3 的质量均为 m。杆 B_1 长为 l ，杆 B_2 长为 $\sqrt{5}l$ 。虚线所示为系统的初始状态，此时系统静止，杆 B_1 处在水平位置，连线 AD_0 为铅垂线，ED_0 的距离为 $2l$ 。系统在重力作用下运动，在图示瞬时，杆 B_1 处于铅垂，杆 B_2 的端点 D 与滑块 B_3 的端面 E 发生碰撞，恢复因素为 $e = 0$。（图中 A-$\bar{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基）。求碰撞后（1）杆 B_1 的角速度；（2）滑块 B_3 的速度；（3）滑块 B_3 对杆 B_2 的碰撞冲量。

解：

(a) 碰撞前的速度分析（总共 6 分）

设 B_1 运动到铅垂位置时的角速度为 ω_{10}，此时，杆 B_2 作瞬时平动， $\omega_{20} = 0$ (1)

$v_{C20} = v_{B0} = v_{D0} = l\omega_{10}$ (2)



运动学分析图

运动学分析图**（1 分）**

系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega_{10}{}^2+\frac{1}{2}\cdot mv_{C2}{}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega_{10}{}^2+\frac{1}{2}\cdot ml^2\omega_{10}{}^2=\frac{2}{3}ml^2\omega_{10}{}^2$$ **（2 分）**

初始时刻系统的动能为：$T_0=0$

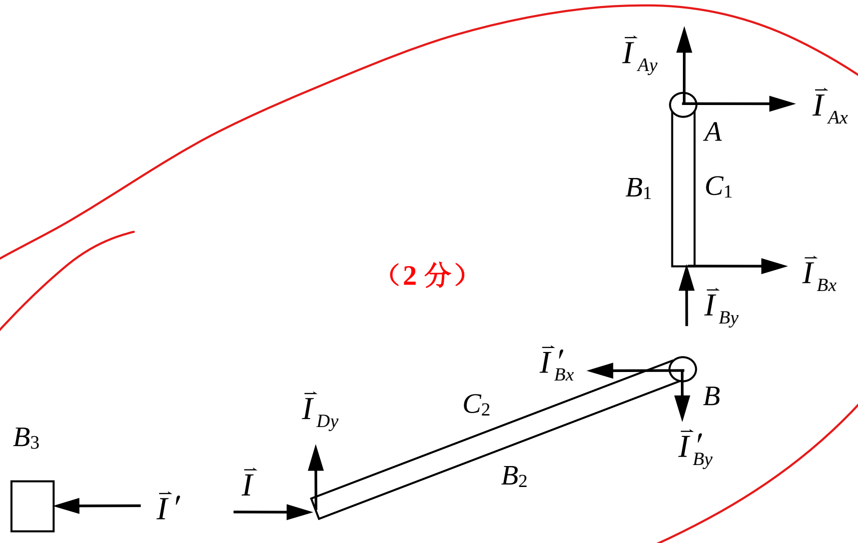
由动能定理：

$T-T_0=mg\frac{l}{2}+mg\frac{l}{2}$ **（1 分）**，　解得：$\omega_{10}=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$ **（1 分）**

$v_{C20}=v_{B0}=v_{D0}=l\omega_{10}=\sqrt{\frac{3gl}{2}}$ **（1 分）**

滑块静止，$v_{C30}=0$

(b) 碰撞过程分析（总共 14 分）



（2 分）

取 B_1 为研究对象，对 A 取矩：

$$\frac{1}{3}ml^2[\omega_{1\tau}-\omega_{10}]=-l\,I_{Bx} \quad (3)$$ **（2 分）**

取 B_2 为研究对象：

$$m[v_{C2\tau}-v_{C20}]=-I+I_{Bx} \qquad (4)$$ **（2 分）**

取 B_3 为研究对象：

$$m(v_{C3\tau}-0)=I \qquad (5)$$ **（2 分）**

碰撞后，由于位形不变，B_2 也作瞬时平动，$v_{C2\tau}=v_{B\tau}=v_{D\tau}=l\omega_{1\tau}$ (6) **（1 分）**

根据恢复因素定义：

$$\frac{v_{C3\tau}-v_{D\tau}}{v_{D0}-v_{C30}}=\frac{v_{C3\tau}-l\omega_{1\tau}}{l\omega_{10}-0}=e=0\text{，}\quad \text{得到：}\ v_{C3\tau}=l\omega_{1\tau} \qquad (7)$$ **（2 分）**

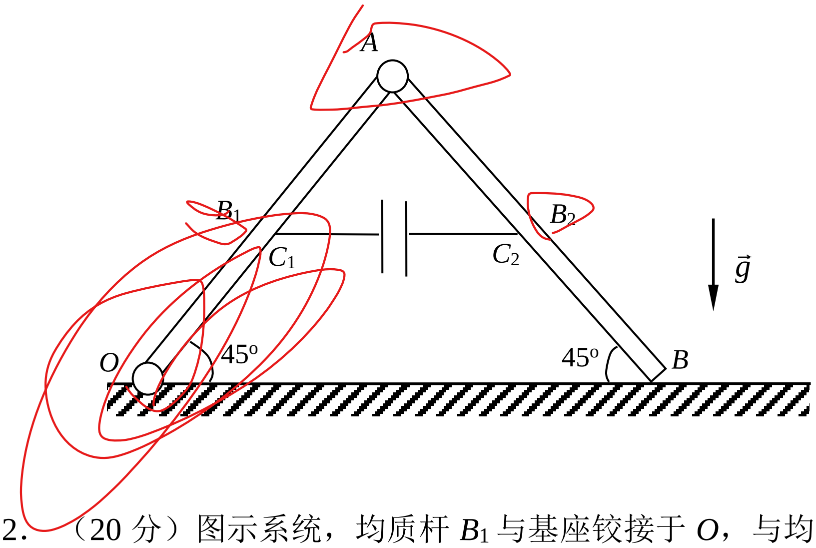
由(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)：

$$\frac{4}{3}ml^2\left(\omega_{1\tau}-\omega_{10}\right)+mv_{C3\tau}l=\frac{4}{3}ml^2\left(\omega_{1\tau}-\omega_{10}\right)+ml^2\omega_{1\tau}=0$$

解得：$\omega_{1\tau}=\frac{4}{7}\omega_{10}=\frac{4}{7}\sqrt{\frac{3g}{2l}}$ **（1 分）**

$$v_{C3\tau}=l\omega_{1\tau}=\frac{4}{7}\sqrt{\frac{3gl}{2}}$$ **（1 分）**

$$I=mv_{C3\tau}=\frac{4}{7}m\sqrt{\frac{3gl}{2}} \quad （10）$$ **（1 分）**

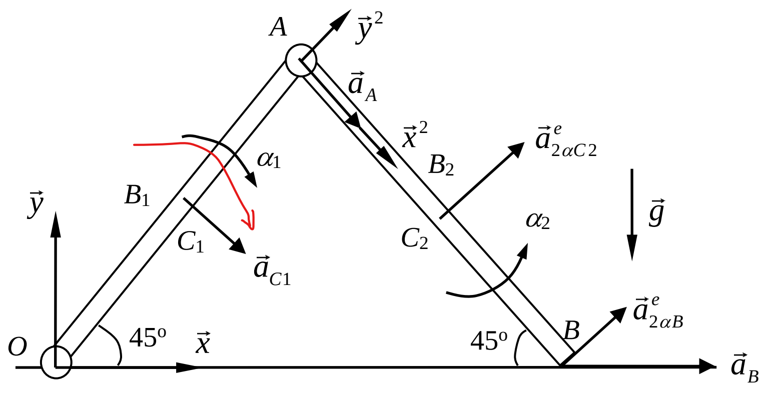


2．（20 分）图示系统，均质杆 B_1 与基座铰接于 O，与均质杆 B_2 通过圆柱铰 A 连接，均质杆 B_2 的右端搁置在光滑的地面上。杆 B_1 和杆 B_2 的长度均为 l，质量均为 m。图示位置杆 B_1 和杆 B_2 与水平面的夹角均为45°，由软绳 C_1C_2 连接，使系统保持平衡。当软绳 C_1C_2 被割断时，系统在重力作用下无初速开始运动，请利用**达朗贝尔原理**求该瞬时：

（1）杆 B_1 的角加速度；（2）杆 B_2 的角加速度；（3）地面作用于杆 B_2 的理想约束力。

(a) 运动学分析(总共 6 分)

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，画出运动学分析图**（1 分）**。



设杆 B_1 的角加速度为 α_1

杆 B_1 绕 O 点作定轴转动，系统无初速开始运动时，

由于 $\omega_1 = 0$，$a_{C1} = \dfrac{1}{2}\alpha_1 l$，$a_A = \alpha_1 l$ **（1 分）**

以 A 为基点，建立 B_2 的连体基 A-$\vec{\boldsymbol{e}}^2$，点 B 为给定点，点 B 的加速度为

$\vec{a}_B = \vec{a}^e_{2tB} + \vec{a}^e_{2\alpha B} + \vec{a}^e_{2\omega B}$， $a^e_{2tB} = a_A = \alpha_1 l$

设杆 B_2 的角加速度为 α_2，系统无初速开始运动，杆 B_2 的角速度为 $\omega_2 = 0$，

$a^e_{2\omega B} = 0$，点 B 的加速度为

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^e_{2\alpha B}$， $a^e_{2\alpha B} = \alpha_2 l$ （1 分）

在 y 轴上投影： $a_{By} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} a_A + \dfrac{\sqrt{2}}{2} a^e_{2\alpha B} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 l + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 l = 0$

得到： $\alpha_2 = \alpha_1$ （1 分）

点 C_2 的加速度为

$\vec{a}_{C2} = \vec{a}^e_{2tC2} + \vec{a}^e_{2\alpha C2} + \vec{a}^e_{2\omega C2}$， $a^e_{2tC2} = a_A = \alpha_1 l$

系统无初速开始运动，杆 B$_2$ 的角速度为 $\omega_2 = 0$， $a^e_{2\omega C2} = 0$， 点 C_2 的加速度为

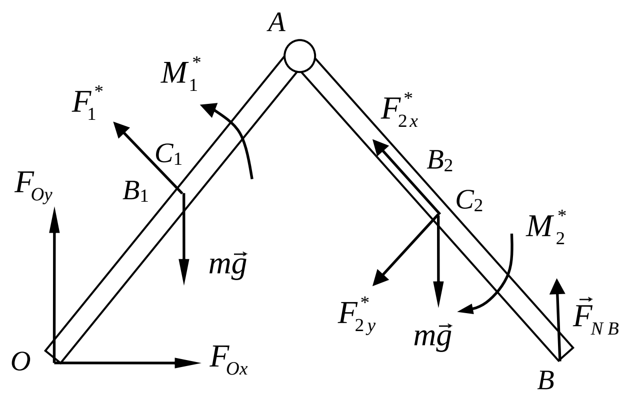
$\vec{a}_{C2} = \vec{a}_A + \vec{a}^e_{2\alpha C2}$， $a^e_{2\alpha C2} = \dfrac{1}{2}\alpha_2 l$ （1 分）

在 $\vec{x}^2$ 轴上投影： $a'_{C2x} = \alpha_1 l$

在 $\vec{y}^2$ 轴上投影： $a'_{C2y} = \dfrac{1}{2}\alpha_2 l = \dfrac{1}{2}\alpha_1 l$ （1 分）

(b) 受力图和惯性力系定义 (总共 6 分)

取系统为研究对象，画出受力图（1 分）

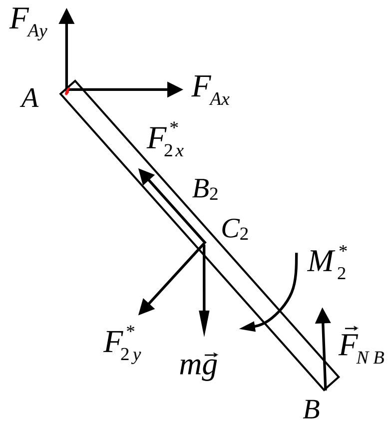


$F_1^* = m a_{C1} = \dfrac{1}{2} m\alpha_1 l$ （1 分）， $M_1^* = \dfrac{1}{12} m l^2 \alpha_1$ （1 分）

$F_{2x}^* = m a'_{C2x} = m\alpha_1 l$， $F_{2y}^* = m a'_{C2y} = \dfrac{1}{2} m\alpha_2 l = \dfrac{1}{2} m\alpha_1 l$ （1 分）

$$M_2^* = \frac{1}{12}ml^2\alpha_2 = \frac{1}{12}ml^2\alpha_1$$ **（1 分）**

取 B₂ 为研究对象，画出受力图**（1 分）**



(c) 动静法，写出平衡方程 (6 分)

取系统为研究对象，利用达朗贝尔原理，$\sum M_O(\vec{F}) + \sum M_O(\vec{F}^*) = 0$：

$$\frac{1}{2}F_1^* l + M_1^* + F_{2x}^* l - \frac{1}{2}F_{2y}^* l - M_2^* - mg\frac{\sqrt{2}}{4}l - mg\frac{3\sqrt{2}}{4}l + F_{NB}\sqrt{2}l = 0 \quad (1)$$

（3 分）

取 B2 为研究对象，利用达朗贝尔原理，$\sum M_A(\vec{F}) + \sum M_A(\vec{F}^*) = 0$：

$$-\frac{1}{2}F_{2y}^* l - M_2^* - mg\frac{\sqrt{2}}{4}l + F_{NB}\frac{\sqrt{2}}{2}l = 0 \quad (2)$$

（3 分）

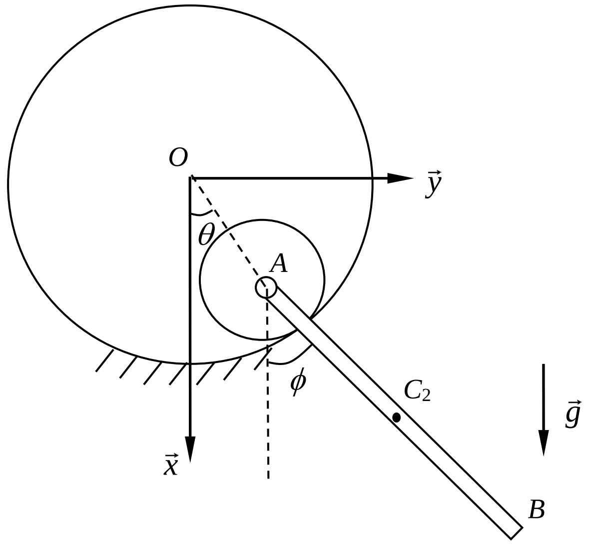
化简：

$$m\alpha_1 l^2 - mg\sqrt{2}l + F_{NB}\sqrt{2}l = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3}m\alpha_1 l^2 - mg\frac{\sqrt{2}}{2}l + F_{NB}\sqrt{2}l = 0 \quad (4)$$

(d) 计算结果 (2 分)

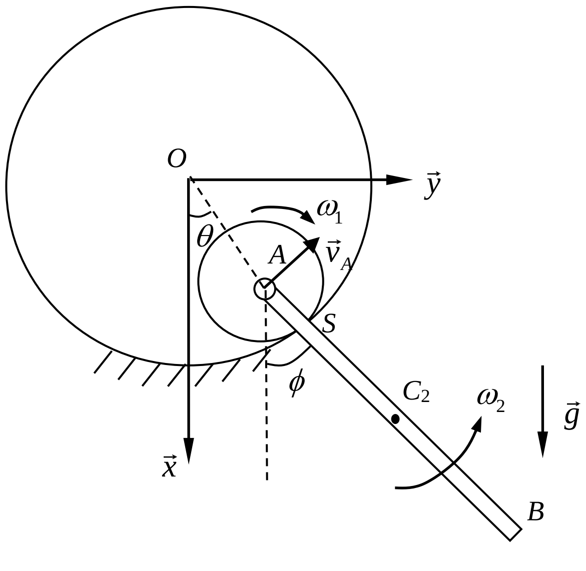
解得：$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3\sqrt{2}}{10}\frac{g}{l}$ **（1 分）**，$F_{NB} = \frac{7}{10}mg$ **（1 分）**



3.（20 分）半径为 r 的均质圆盘 B_1 在半径为 R 的固定的半圆槽内作纯滚动，圆盘 B_1 与长为 l 的均质杆 B_2 通过圆柱铰 A 连接。设圆盘 B_1 和均质杆 B_2 的质量均为 m。

（1）以 θ 和 ϕ 为广义坐标写出系统的动能和势能，写出拉格朗日函数。

（2）写出系统的初积分。



解：

(a) 运动学分析 (总共 4 分)

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，圆盘 B_1 在半径为 R 的半圆槽内作纯滚动，接触点 S 为速度瞬心，设圆盘 B_1 的角速度为 ω_1，点 A 的速度为：

$v_A = (R-r)\dot{\theta} = r\omega_1$，得到：$\omega_1 = \dfrac{(R-r)}{r}\dot{\theta}$ **（2 分）**

$x_{C2} = (R-r)\cos\theta + \dfrac{l}{2}\cos\phi$，$y_{C2} = (R-r)\sin\theta + \dfrac{l}{2}\sin\phi$

$\dot{x}_{C2} = -(R-r)\sin\theta\dot{\theta} - \dfrac{l}{2}\sin\phi\dot{\phi}$，$\dot{y}_{C2} = (R-r)\cos\theta\dot{\theta} + \dfrac{l}{2}\cos\phi\dot{\phi}$ **（2 分）**

(b) 动能，势能和拉格朗日函数计算 (总共 10 分)

$\omega_2 = \dot{\phi}$

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}J_{Sz}\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_{C2}^2 + \frac{1}{2}J_{C2z}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{C2}^2 + \dot{y}_{C2}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\omega_2^2$$ **（5 分）**

化简得到：

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m\left[(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\phi}^2 + (R-r)l\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\phi}^2$$

$$= \frac{5}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)l\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$ **（1 分）**

以 O 为零势能点，系统的势能为：

$$V = -mg(R-r)\cos\theta - mg\left[(R-r)\cos\theta + \frac{1}{2}l\cos\phi\right]$$

$$= -2mg(R-r)\cos\theta - \frac{1}{2}mgl\cos\phi$$ **（3 分）**

拉格朗日函数为:

$$L = T - V$$

$$= \frac{5}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)l\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta) + 2mg(R-r)\cos\theta + \frac{1}{2}mgl\cos\phi$$

（1 分）

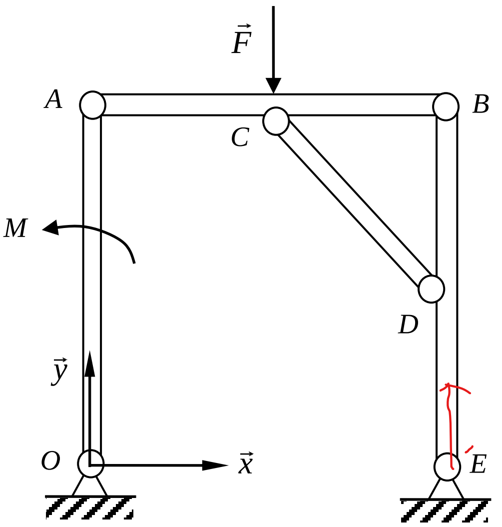
(c) 写出初积分 (总共 6 分)

由于 L 不显含时间 t，仅有势力做功，且为定常约束，广义能量守恒：$T + V = C$ **（3 分）**

系统的初积分为：

$$\frac{5}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)l\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta) - 2mg(R-r)\cos\theta - \frac{1}{2}mgl\cos\phi = C$$

（3 分）



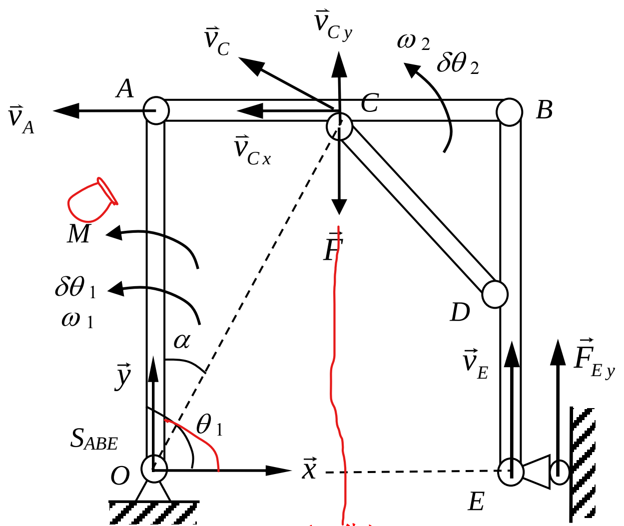
4. （20 分）平衡系统由杆 *OA*、杆 *AB*、杆 *CD* 和杆 *BE* 组成。铰 *O* 和铰 *E* 为固定铰支座，铰 *A*、*B*、*C*、*D* 为圆柱铰。图示位置 *AB* 水平，*OA* 和 *BE* 铅垂。已知：$\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BE}=a$，点 *C* 和点 *D* 分别为杆 *AB* 和杆 *BE* 的中点。铅垂力 $\vec{F}$ 作用于杆 *AB* 的中点，大小为 *F*。杆 *OA* 上作用一力偶 *M*，力偶矩的大小为 *M*，不计各杆件的重量。用**虚位移原理**求：

(1) 支座 *E* 处沿 $\vec{y}$ 方向的约束力。(2) 杆 *CD* 的内力。

解：(a) 支座 *E* 处沿 $\vec{y}$ 方向的约束力计算 (总共 10 分)

释放点 *E* 沿 $\vec{y}$ 方向的约束。系统的自由度为 1，以 θ_1 为独立的广义坐标，由虚位移原理：

$M\delta\theta - F\delta y_C + F_{Ey}\delta y_D = 0$ **（3 分）**



（1 分）

杆 *OA* 绕 *O* 点作定轴转动，$v_A=\omega_1 a$，$\dot{\theta}_1=\omega_1$ **（1 分）**

由于$\vec{v}_A$水平，$\vec{v}_E$铅垂，刚体ABE的速度瞬心S_{ABE}为O点

$v_A=\omega_1 a=\omega_2 a$，得到：$\omega_2=\omega_1$ （1 分）

$v_C=\omega_2\overline{OC}=\omega_1\overline{OC}$

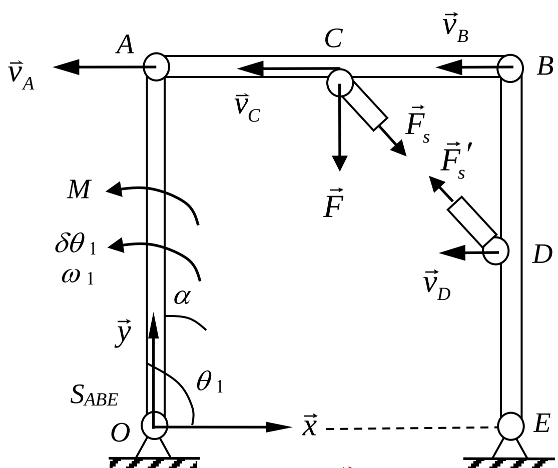
$\dot{y}_C=v_C\sin\theta=\omega_1\overline{OC}\sin\theta=\dfrac{a}{2}\omega_1=\dfrac{a}{2}\dot{\theta}_1$，得到：$\delta y_C=\dfrac{a}{2}\delta\theta_1$ （1 分）

$\dot{y}_E=a\omega_1=a\dot{\theta}_1$，得到：$\delta y_E=a\delta\theta_1$ （1 分）

$$M\delta\theta_1-F\frac{a}{2}\delta\theta_1+F_{Ey}a\delta\theta_1=\delta\theta_1\left(M-F\frac{a}{2}+F_{Ey}a\right)=0$$ （1 分）

根据$\delta\theta_1$的独立性，得到：$M-F\dfrac{a}{2}+F_{Ey}a=0$，$F_{Ey}=-\dfrac{M}{a}+\dfrac{F}{2}$ （1 分）

(b) 杆CD的内力计算(总共 10 分)



（1 分）

将两力杆CD截断，假定内力为拉力。系统的自由度为 1，以θ_1为独立的广义坐标，由虚位移原理：

$$M\delta\theta_1-F\delta y_C+\frac{\sqrt{2}}{2}F_s\delta x_C-\frac{\sqrt{2}}{2}F_s\delta x_D=0$$ （3 分）

杆OA绕O点作定轴转动，$v_A=a\omega_1$，$\dot{\theta}_1=\omega_1$

$\vec{v}_A//\vec{v}_B$，由速度投影定理，$v_B=v_A=a\omega_1$，杆AB作瞬时平动，$\omega_2=0$，$v_C=v_A=a\omega_1$

（1 分）

$\dot{y}_C=v_{Cy}=0$，$\delta y_C=0$ (1) （1 分）

$\dot{x}_C=-v_C=-a\omega_1=-a\dot{\theta}_1$，得到：$\delta x_C=-a\delta\theta_1$ (2) （1 分）

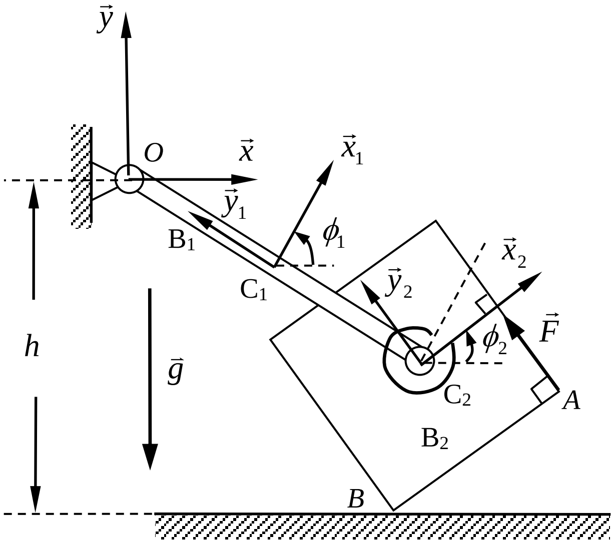
杆BE绕E点作定轴转动，$\dot{x}_D=-v_D=-\dfrac{1}{2}v_B=-\dfrac{1}{2}v_A=-\dfrac{1}{2}\omega_1 a=-\dfrac{1}{2}\dot{\theta}_1 a$

得到：$\delta x_D = -\dfrac{a}{2}\delta\theta_1$ (3) （1 分）

将(1)，(2)和(3)代入虚功原理：

$$M\delta\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_s a\delta\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_s\frac{a}{2}\delta\theta_1 = \delta\theta_1\left(M - \frac{\sqrt{2}}{2}F_s a + \frac{\sqrt{2}}{2}F_s\frac{a}{2}\right) = 0$$ （1 分）

解得：$F_s = \dfrac{2\sqrt{2}M}{a}$ （拉力）（1 分）



5．（20 分）如图动力学系统由均质杆 B_1 和均质正方形板 B_2 组成。铰 O 为固定铰支座，杆 B_1 与板 B_2 在 C_2 处铰接，B_2 的角点 D 可以在光滑的水平面内滑动。设杆 B_1 的长度为 $2l$，正方形板 B_2 的边长为 $2a$，杆 B_1 和板 B_2 的质量分别为 m_1 和 m_2。板 B_2 关于质心 C_2 的转动惯量为 J_2。杆 B_1 和板 B_2 之间有卷簧，刚度为 k，当 $\varphi_1 = \varphi_2$ 时，卷簧的力偶矩为 0。沿 $\vec{y}_2$ 方向的主动力 $\vec{F}$ 作用于 B_2 的角点 A。图中 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$ 为惯性基。以系统的位形坐标写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程。

解：(a) 位移约束方程，雅可比阵和加速度约束方程右项 (总共 8 分)

建立惯性基 O-$\vec{\boldsymbol{e}}$，系统的运动学约束方程为：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} x_1 - l\sin\phi_1 \\ y_1 + l\cos\phi_1 \\ x_1 + l\sin\phi_1 - x_2 \\ y_1 - l\cos\phi_1 - y_2 \\ y_2 - a\sin\phi_2 - a\cos\phi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$ （3 分）

系统的位形坐标为 $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \phi_1 & x_2 & y_2 & \phi_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ （1 分）

$$\boldsymbol{\Phi}_q=\begin{bmatrix}1&0&-l\cos\phi_1&0&0&0\\0&1&-l\sin\phi_1&0&0&0\\1&0&l\cos\phi_1&-1&0&0\\0&1&l\sin\phi_1&0&-1&0\\0&0&0&0&1&-a\cos\phi_2+a\sin\phi_2\end{bmatrix}$$ （2 分）

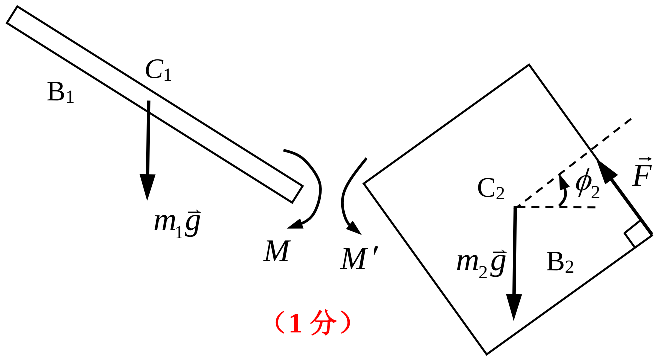
$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-l\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2\\l\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2\\l\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2\\-l\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2\\-a\sin\phi_2\dot{\phi}_2^2-a\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2\end{bmatrix}$$ （2 分）

(b) 增广质量阵和增广主动力阵 (总共 9 分)

增广质量阵为：

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Z}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z}_1=\begin{bmatrix}m_1&0&0\\0&m_1&0\\0&0&\frac{1}{12}m_1(2l)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_1&0&0\\0&m_1&0\\0&0&\frac{1}{3}m_1l^2\end{bmatrix}$$ （1 分），$$\boldsymbol{Z}_2=\begin{bmatrix}m_2&0&0\\0&m_2&0\\0&0&J_2\end{bmatrix}$$ （1 分）



（1 分）

卷簧的力偶矩为 $M=k(\phi_1-\phi_2-\phi_0)$

由于 $\phi_1=\phi_2$ 时，卷簧的力偶矩为 0， $\phi_0=0$， $M=k(\phi_1-\phi_2)$

增广主动力阵为：

$$\hat{\boldsymbol{F}}^a=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}}_1^a\\\hat{\boldsymbol{F}}_2^a\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{F}}_1^a=\begin{bmatrix}0\\-m_1g\\-k(\phi_1-\phi_2)\end{bmatrix}$$ （3 分），$$\hat{\boldsymbol{F}}_2^a=\begin{bmatrix}-F\sin\phi_2\\F\cos\phi_2-m_2g\\k(\phi_1-\phi_2)+Fa\end{bmatrix}$$ （3 分）

(c) 写出封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程 (总共 3 分)

封闭的带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\Phi_q}^T \\ \boldsymbol{\Phi_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{F}}^a \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$ **（2 分）**

$\ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_1^T & \ddot{\boldsymbol{q}}_2^T \end{bmatrix}^T$，$\ddot{\boldsymbol{q}}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_i & \ddot{y}_i & \ddot{\varphi}_i \end{pmatrix}^T \ (i = 1, 2)$

$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \end{bmatrix}^T$ **（1 分）**