

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Некоммерческое АО «Алматинский университет энергетики и связи»
Институт электроэнергетики и электротехники
Кафедра «Электротехника»

**Конспекты лекций
(15 часов)**

**ТОЕ 2207 - Теоретические основы электротехники
специальность 5В070200 – «Автоматизация и управление»**

1. Лекция 1. Элементы электрических цепей и электрических схем

Цель лекции: ознакомить с основными понятиями электрических цепей.

1.1 Основные понятия

Электромагнитные процессы, протекающие в электрических цепях можно описать с помощью таких интегральных понятий, как: напряжение, ток, электродвижущая сила (ЭДС). Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию, называются генераторами или источниками электрической энергии, а устройства, потребляющие ее – приемниками электрической энергии. Все элементы электрической цепи условно можно разделить на активные и пассивные. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия. Если элементы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями, то они называются линейными, в противном случае они относятся к классу нелинейных. Если параметры элемента не являются функциями пространственных координат, определяющих его геометрические размеры, то он называется элементом с сосредоточенными параметрами. Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Наличие в схеме хотя бы одного нелинейного элемента относит ее к классу нелинейных.

1.2 Резистивный элемент (резистор)

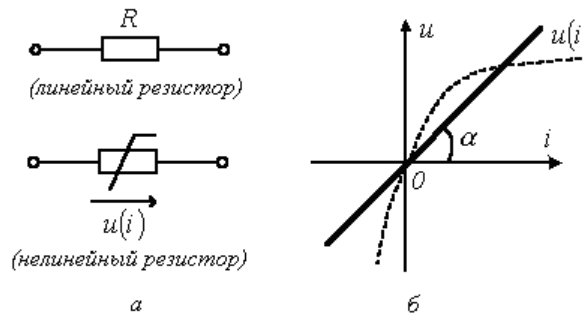


Рисунок 1.1

Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением (рисунок 1.1, а). Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость $u(i)$, называемая вольтамперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость $u(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рисунок 1.1, б), то резистор называется линейным и описывается соотношением

$$u = Ri = m_{Ri} \operatorname{tg} \alpha$$

Нелинейным резистивным элементом называется элемент, ВАХ которого нелинейная (см. рисунок 1.1, б).

1.3 Индуктивный элемент

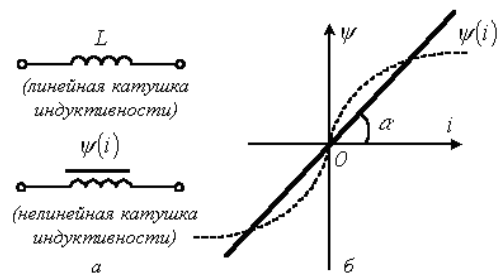


Рисунок 1.2

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушки (рисунок 1.2,а),

$$L = \frac{\psi}{i} \text{ (Гн)}$$

Основной характеристикой катушки индуктивности является зависимость $\psi(i)$, называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость $\psi(i)$ представляет собой прямую линию (рисунок 1.2, б); при этом

$$L = m_L \operatorname{tg} \alpha = \text{const}.$$

Для нелинейных индуктивностей – зависимость $\psi(i)$ нелинейная (рисунок 1.2, б).

1.4 Емкостный элемент

Конденсатор (рисунок 1.3, а) – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Емкость определяется отношением $C = \frac{q}{u} \text{ (Ф)}$.

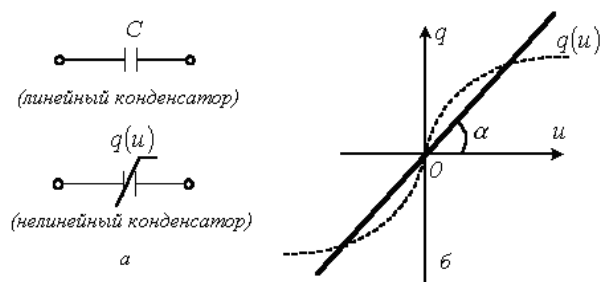


Рисунок 1.3

Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \text{const}$. В этом случае зависимость $q(u)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, (см. рисунок 1.3, б) и

$$C = m \operatorname{ctg} \alpha = \text{const}.$$

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обуславливает нелинейность зависимости $q(u)$ (рисунок 1.3, б).

1.5 Источники электрической энергии

Источники электрической энергии, питающие электрические цепи могут быть независимыми и зависимыми.

Источники напряжения или источники тока, в которых напряжение или ток в одной из ветвей зависит от напряжения или тока в другой, называются зависимыми. Различают четыре типа зависимых источников: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН) (рисунок 1.4, а) источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рисунок 1.4, б) источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рисунок 1.4, в) источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рисунок 1.4, г). На рисунках приведены соотношения, описывающие связи зависимых значений, выраженные через коэффициенты k, r, g, β , которые, как правило, являются положительными или отрицательными числами и однозначно полно характеризуют зависимый источник.

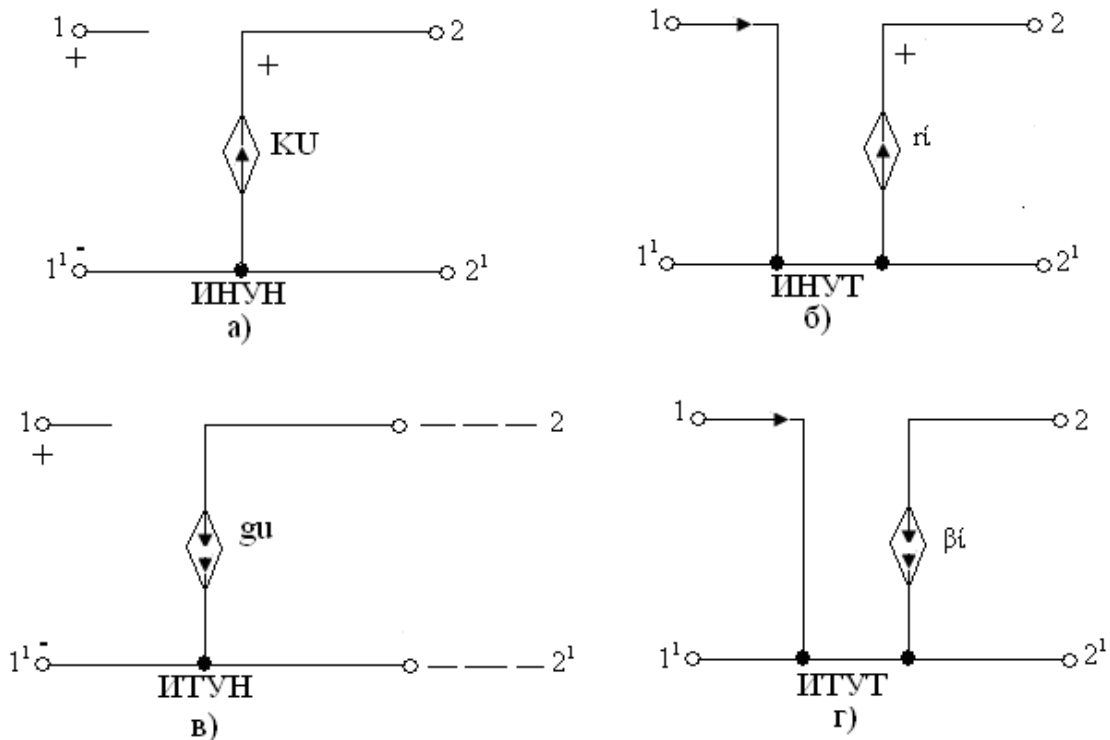


Рисунок 1.4

Источники напряжения или источники тока, в которых напряжение или ток в одной из ветвей не зависит от напряжения или тока в другой, называются независимыми.

Свойства источника электрической энергии описываются ВАХ $u(i)$, называемой внешней характеристикой источника. ВАХ источника может быть определена экспериментально (рисунок 1.5, а).

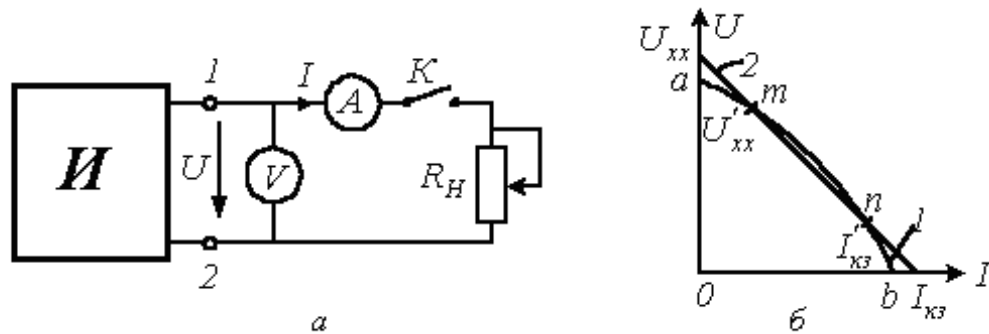


Рисунок 1.5

В общем случае ВАХ источника является нелинейной (кривая 1 на рисунке 1.5, б). Она имеет две характерные точки, которые соответствуют:

а – режиму холостого хода:

$$(I = 0; U = U'_{xx})$$

в – режиму короткого замыкания

$$(U = 0; I = I'_{кз}).$$

Прямая 2 на рисунке 1.5, б описывается линейным уравнением

$$U = U_{xx} - R_{вн} I \quad (1.1)$$

где U_{xx} – напряжение на зажимах источника при отключенной нагрузке;
 $R_{вн} = U_{xx} / I_{кз}$ – внутреннее сопротивление источника.

Уравнение (1.1) позволяет составить последовательную схему замещения источника энергии источником Э.Д.С. (рисунок 1.6, а). На этой схеме символом Е обозначен элемент, называемый идеальным источником ЭДС, ему соответствует ВАХ на рисунке 1.6, б, у такого источника $R_{вн} = 0$.

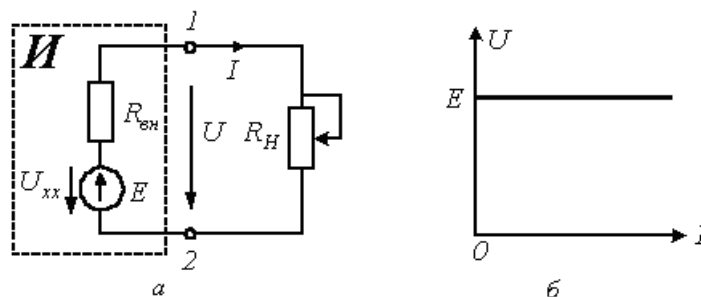


Рисунок 1.6

Существует также параллельная схема замещения источника. Для ее описания разделим левую и правую части соотношения (1.1) на $R_{\text{вн}}$. В результате получим

$$I = \frac{U_{\text{хх}}}{R_{\text{вн}}} - \frac{U}{R_{\text{вн}}} = I_{\text{кз}} - \frac{U}{R_{\text{вн}}} \quad \text{или} \quad I = J - g_{\text{вн}} U \quad (1.2)$$

где $J = I_{\text{кз}}$; $g_{\text{вн}} = R_{\text{вн}}^{-1}$ - внутренняя проводимость источника.

Уравнению (1.2) соответствует схема замещения источника на рисунке 1.7, а.

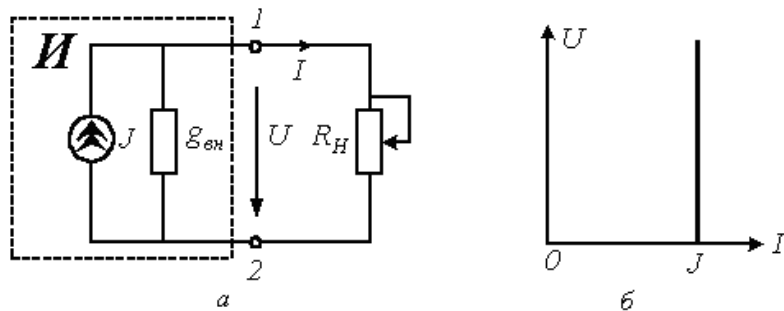


Рисунок 1.7

На этой схеме символом J обозначен элемент, называемый идеальным источником тока. Ток в ветви с этим элементом равен $J = I_{\text{кз}}$ и не зависит от напряжения на зажимах источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рисунке 1.7, б. На этом основании с учетом (1.2) у такого источника $g_{\text{вн}} = 0$, т.е. его внутреннее сопротивление $R_{\text{вн}} = \infty$. В расчетном плане при выполнении условия $E = JR_{\text{вн}}$ последовательная и параллельная схемы замещения источника являются эквивалентными. На практике важное значение имеет согласованный режим работы? когда $R_{\text{н}} = R_{\text{вн}}$, при котором нагрузкой от источника потребляется максимальная мощность

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{хх}}^2}{4R_{\text{вн}}} \quad (1.3)$$

2 Лекция 2. Методы преобразования электрических цепей. Закон Ома. Потенциальная диаграмма

Цель лекции: ознакомить с простейшими методами преобразования цепей и законом Ома.

2.1 Методы преобразования

Во всех случаях преобразования замена одних схем другими, им эквивалентными, не должна привести к изменению токов или напряжений участках цепи, не подвергшихся преобразованию.

Замена последовательно соединенных сопротивлений одним эквивалентным. Сопротивления соединены последовательно, если они обтекаются одним и тем же током.

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений

$$R_{\text{эк}} = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (2.1)$$

При последовательном соединении n сопротивлений напряжения на них распределяются прямо пропорционально этим сопротивлениям

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n.$$

В частном случае двух последовательно соединённых сопротивлений

$$U_1 / U_2 = R_1 / R_2; \quad U_1 = U R_1 / (R_1 + R_2); \quad U_2 = U R_2 / (R_1 + R_2)$$

где U — общее напряжение, действующее на участке цепи, содержащем два сопротивления R_1 и R_2 .

Замена параллельно соединенных сопротивлений одним эквивалентным. Сопротивления соединены параллельно, если все они присоединены к одной паре узлов.

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n параллельно соединенных сопротивлений, определяется из формулы

$$\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}, \quad \text{или} \quad G_{\text{эк}} = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (2.2)$$

В частном случае параллельного соединения двух сопротивлений R_1 и R_2 эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{эк}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

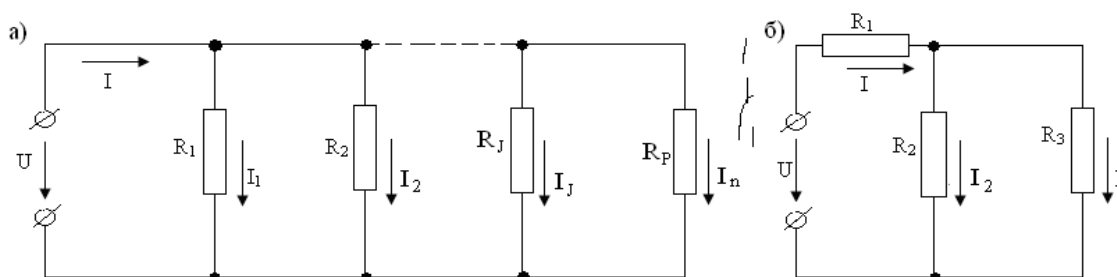


Рисунок 2.1

При параллельном соединении n сопротивлений (рисунок 2.1, а) токи в них распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям или прямо пропорционально их проводимостям

$$I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : \dots : G_n.$$

Ток I_s в каждой из них вычисляется через ток I в неразветвленной части цепи

$$I_s = I \frac{G_s}{\sum_{k=1}^n G_k}.$$

В частном случае двух параллельных ветвей (рисунок 2.1, б)

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

или

$$I_2 = I_1 \frac{G_2}{G_2 + G_3}, \quad I_3 = I_1 \frac{G_3}{G_2 + G_3}.$$

Замена смешанного соединения сопротивлений одним эквивалентным. Смешенное соединение это сочетание последовательного и параллельного соединений сопротивлений. Например, сопротивления R_1 , R_2 и R_3 (рисунок 2.1,б) соединены смешанно.

Их эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{эк}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Формулы преобразования треугольника сопротивлений (рисунок 2.2, а) в эквивалентную звезду сопротивлений (рисунок 2.2, б) и наоборот имеют вид

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (2.3)$$

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (2.4)$$

где G – проводимость соответствующей ветви.

Формулы (2.4) можно записать через сопротивления

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \quad (2.5)$$

2.2 Закон Ома

Этот закон применяется для ветви или для одноконтурной замкнутой цепи (не имеющей разветвлений).

При написании закона Ома следует, прежде всего, выбрать произвольно некоторое положительное направление тока.

Для ветви, состоящей только из резисторов и не содержащей э. д. с. (например, для ветви вка), при положительном направлении тока от точки в к точке а (рисунок 2.3)

$$I = \frac{\varphi_v - \varphi_a}{R_{va}} = \frac{U_{va}}{R_{va}}$$

где φ_a и φ_v — потенциалы точек а и в;

U_{va} - разность потенциалов или напряжение между точками в и а;

$R_{va} = R_4 + R_5$ – полное сопротивление ветви между точками в и а.

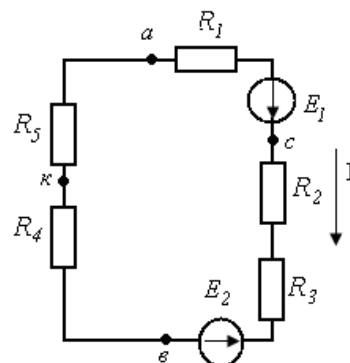


Рисунок 2.3

Для ветви цепи, содержащей э. д. с. и резисторы (например, для ветви асв, рисунок 2.3)

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_v + \sum E}{\sum R_{ab}} = \frac{U_{ab} + \sum E}{\sum R_{ab}} \quad (2.6)$$

где $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_v$ - напряжение на концах ветви аb, отсчитываемое по выбранному положительному направлению тока;

$\sum E$ — алгебраическая сумма э. д. с., находящихся в этой ветви; $\sum R_{ab}$ - арифметическая сумма ее сопротивлений.

В ветви асв $\sum E = E_1 - E_2$, $\sum R_{ab} = R_1 + R_2 + R_3$.

Формулу (2.6) называют обобщенным законом Ома.
Для замкнутой одноконтурной цепи

$$I = \frac{\sum E}{\sum R} \quad (2.7)$$

где $\sum R$ — арифметическая сумма всех внешних и внутренних сопротивлений цепи;

$\sum E$ — алгебраическая сумма электродвижущих сил.

Со знаком плюс берут те эдс., направления которых совпадают с выбранным положительным направлением тока, а со знаком минус - э. д. с. с противоположными направлениями.

3 Лекция 3. Потенциальная диаграмма. Метод наложения. Законы Кирхгофа.

Цель лекции: ознакомить с методикой построения потенциальной диаграммы, методом наложения и законами Кирхгофа.

3.1 Потенциальная диаграмма

Потенциальная диаграмма применяется при анализе цепей постоянного тока. Она представляет собой график распределения потенциала вдоль участка цепи или контура, при этом по оси абсцисс откладываются сопротивления резистивных элементов, встречающихся на пути обхода ветви или контура, а по оси ординат – потенциалы соответствующих точек. Таким образом, каждой точке рассматриваемого участка или контура соответствует точка на потенциальной диаграмме. Рассмотрим построение потенциальной диаграммы на примере схемы на рисунке 3.1.

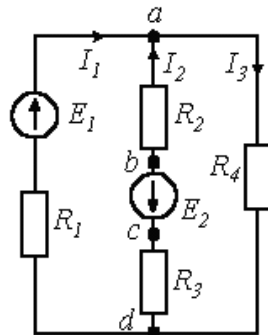


Рисунок 3.1

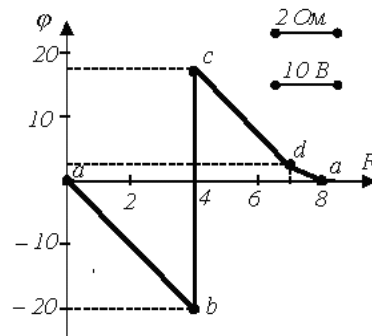


Рисунок 3.2

При параметрах схемы $E_1 = 48 \text{ В}$; $E_2 = 37 \text{ В}$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 4 \text{ Ом}$; $R_3 = 3 \text{ Ом}$ и $R_4 = 1 \text{ Ом}$ токи в ветвях схемы равны: $I_1 = 10 \text{ А}$; $I_2 = -5 \text{ А}$; $I_3 = -2 \text{ А}$.

Построим потенциальную диаграмму для контура $abcda$. Для выбора масштаба по оси абсцисс просуммируем сопротивления резисторов вдоль рассматриваемого контура: $R_{\Sigma} = R_2 + R_3 + R_4 = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ Ом}$, после чего определим потенциалы точек контура относительно потенциала произвольно выбранной точки a , потенциал которой принят за нуль

$$\varphi_b = \varphi_a + I_2 R_2 = 0 - 5 \cdot 4 = -20 \text{ В},$$

$$\varphi_c = \varphi_b + E_2 = -20 + 37 = 17 \text{ В},$$

$$\varphi_d = \varphi_c + I_2 R_3 = 17 - 5 \cdot 3 = 2 \text{ В}.$$

Таким образом, координаты точек потенциальной диаграммы: $a(0;0)$; $b(4;-20)$; $c(4;17)$; $d(7;2)$. С учетом выбранных масштабов на рисунке 3.2 построена потенциальная диаграмма для выбранного контура.

3.2 Метод наложения

Если в электрической цепи заданными величинами являются э.д.с. источников и токи источников тока, то расчет токов по методу наложения состоит в следующем. Ток в любой ветви можно рассчитать как алгебраическую сумму токов, вызываемых в ней э.д.с. каждого источника

э. д. с. в отдельности и током, проходящим по этой же ветви от действия каждого источника тока. При этом надо иметь в виду, что когда ведется расчет токов, вызванных каким-либо одним источником э. д. с. или тока, то остальные источники э. д. с. в схеме заменяются короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками тока размыкаются .

В некоторых случаях расчет линейных электрических цепей можно провести относительно просто, используя принцип наложения. Ток в любой ветви схемы, содержащей несколько источников электрических энергии, можно рассчитать как алгебраическую сумму частичных токов от действия каждого источника в отдельности. При этом остальные источники ЭДС заменяют короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками тока размыкаются.

Порядок расчета:

2. На основе исходной схемы составляют частные расчетные схемы, в каждой из которых действует только одна ЭДС или один источник тока. Остальные ЭДС и источники тока исключаются, оставляя их внутренние сопротивления.
3. Любым методом определяются частичные токи в частных схемах.
4. Алгебраическим сложением (наложением) частичных токов определяют токи в исходной схеме.

3.3 Законы Кирхгофа

Для написания законов Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов каждой ветви.

Первый закон Кирхгофа - алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в любом узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (3.1)$$

Токи, направленные от узла, условно принимаются положительными, а направленные к нему – отрицательными (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа - алгебраическая сумма э. д. с. замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в нём

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k. \quad (3.2)$$

Направление обхода контура выбирается произвольно. При записи левой части равенства э. д. с., направления которых совпадают с выбранным

направлением обхода, принимаются положительными, а э. д. с., направленные против - отрицательными. При записи правой части равенства со знаком плюс берутся падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода, а со знаком минус падения напряжения в тех ветвях, в которых положительное направление тока противоположно.

Пусть цепь состоит из N_b ветвей, имеет N_y узлов и N_T источников тока.

П р и м е н е н и е з а к о н о в К и р х г о ф а .

Устанавливаем число неизвестных токов, равное $N_b - N_T$. Для каждой ветви задаются положительным направлением тока.

Общее число уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу $(N_b - N_T)$ неизвестных токов. Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно $(N_y - 1)$. Число взаимонезависимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа

$$K = (N_b - N_T) - (N_y - 1). \quad (3.3)$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока.

Пример:

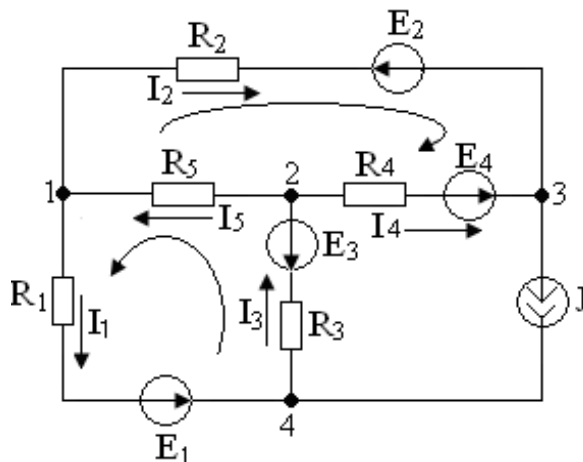


Рисунок 3.4

Решение. Схема содержит: узлов $N_y = 4$, ветвей $N_b = 6$, источников тока $N_T = 1$. Число неизвестных токов равно 5, следовательно число уравнений по законам Кирхгофа равно 5.

Составление уравнений по законам Кирхгофа. Составим уравнения по первому закону Кирхгофа. Выберем произвольно положительные направления токов в ветвях цепи (рисунок 3.4). Токи направленные к узлу примем положительными, а токи направленные от узла – отрицательными. Число уравнений равно $U = 4 - 1 = 3$. Для узлов 1, 2, 3 уравнения по первому закону Кирхгофа имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -I_1 - I_2 + I_5 &= 0; \\ I_3 - I_4 - I_5 &= 0; \\ I_2 + I_4 - J &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Составим уравнения по *второму закону Кирхгофа*. Выберем независимые контура, не содержащие источников тока (рисунок 3.4). Число уравнений равно $K = N_B - N_T - U = 6 - 1 - 3 = 2$, Уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров 1-4-2 и 1-3-2 (рисунок 3.4) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_5 I_5 &= E_1 - E_3; \\ R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 &= -E_2 - E_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Цель лекции: ознакомить с основными методами расчета линейных электрических цепей постоянного тока.

4.1 Метод контурных токов

Метод основан на том, что ток в любой ветви цепи можно представить в виде алгебраической суммы контурных токов, протекающих по этой ветви. При пользовании этим методом выбирают и обозначают контурные токи (по любой ветви цепи должен проходить хотя бы один выбранный контурный ток). Общее число контурных токов равно $K = (N_b - N_T) - (N_y - 1)$. Рекомендуется выбирать N_T , контурных токов так, чтобы каждый из них - проходил через один источник тока. Эти контурные токи можно считать совпадающими с соответствующими токами источников тока J_1, J_2, \dots, J_{NT} , и они обычно являются заданными условиями задачи. Для них уравнения не составляют, но учитывают при составлении уравнений для других контуров.

Оставшиеся $K = (N_b - N_T) - (N_y - 1)$ контурные токи выбирают проходящими по ветвям, не содержащим источников тока. Для определения последних контурных токов по второму закону Кирхгофа для этих контуров составляют K уравнений в виде

$$\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1k}I_{kk} + \dots + \sum_1 J_n R_n &= E_{11}, \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \dots + R_{2k}I_{kk} + \dots + \sum_2 J_n R_n &= E_{22}, \\ R_{k1}I_{11} + R_{k2}I_{22} + \dots + R_{kk}I_{kk} + \dots + \sum_n J_n R_n &= E_{kk} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где R_{nn} — собственное сопротивление контура n (сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в контур n);

R_{nl} — общее сопротивление контуров n и L , причем $R_{nl} = R_{ln}$. Если направления контурных токов в общей ветви для n и L , совпадают, то R_{nl} положительно, в противном случае R_{nl} отрицательно;

E_{nn} — алгебраическая сумма э. д. с., включенных в ветви, образующие контур n ;

R_n — общее сопротивление ветви контура n с контуром, содержащим источник тока J_n .

Пример:

Один контурный ток выберем так, чтобы он проходил через источник тока, тогда этот контурный ток совпадёт с током источника тока J . В двух других независимых контурах цепи (*не содержащих источник тока!*) введем контурные токи I_{11}, I_{22} (рисунок 4.1).

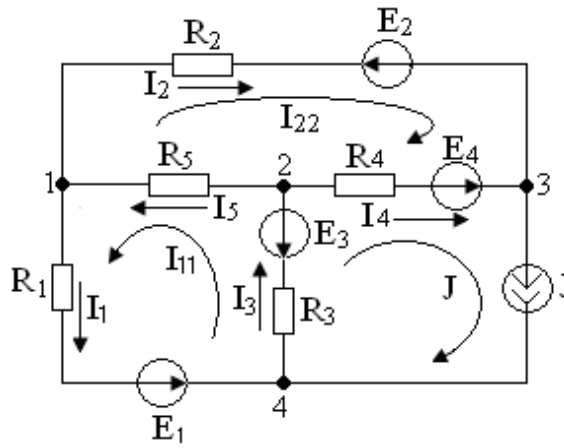


Рисунок 4.1

Для двух неизвестных контурных токов I_{11} , I_{22} составим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_3 + R_5) + I_{22}R_5 + JR_3 &= E_1 - E_3; \\ I_{11}R_5 + I_{22}(R_2 + R_4 + R_5) - JR_4 &= -E_2 - E_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Перенесём JR_3 , JR_4 в правую часть уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_3 + R_5) + I_{22}R_5 &= -JR_3 + E_1 - E_3; \\ I_{11}R_5 + I_{22}(R_2 + R_4 + R_5) &= JR_4 - E_2 - E_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Решая систему уравнений (4.3), определим контурные токи I_{11} и I_{22} . Токи в ветвях представим в виде алгебраической суммы контурных токов протекающим по этим же ветвям:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}; \quad I_2 = I_{22}; \quad I_3 = I_{11} + J; \\ I_4 &= J - I_{22}; \quad I_5 = I_{11} + I_{22}. \end{aligned}$$

Если в результате решения значение какого-либо тока получилось отрицательным, то это означает, что действительное направление этого тока противоположно направлению, принятому за положительное.

4.2 Метод узловых потенциалов.

Он позволяет уменьшить количество уравнений системы до числа

$$m = N_y - 1. \quad (4.4)$$

Сущность метода заключается в том, что вначале путем решения системы уравнений определяют потенциалы всех узлов схемы, а токи ветвей, соединяющих узлы, находят с помощью закона Ома.

При составлении уравнений по методу узловых потенциалов вначале полагают равным нулю потенциал какого-либо узла (его называют базисным).

Для определения потенциалов оставшихся ($m = N_y - 1$) узлов составляется следующая система уравнений

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \dots - \varphi_s G_{1s} - \dots - \varphi_n G_{1n} &= \sum_1 EG + \sum_1 J \\ \varphi_1 G_{21} - \varphi_2 G_{22} - \dots - \varphi_s G_{2s} - \dots - \varphi_n G_{2n} &= \sum_2 EG + \sum_2 J \\ \varphi_n G_{n1} - \varphi_2 G_{n2} - \dots - \varphi_s G_{ns} - \dots - \varphi_n G_{nn} &= \sum_n EG + \sum_n J. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Здесь G_{ss} – сумма проводимостей ветвей, присоединённых к узлу S;
 G_{sq} – сумма проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих узел S с узлом q;
 $\sum_s EG$ – алгебраическая сумма произведений э.д.с. ветвей, примыкающих к узлу S, на их проводимости; при этом со знаком плюс берутся те э.д.с., которые действуют в направлении узла S, и со знаком минус – в направлении от узла S;

$\sum_s J$ – алгебраическая сумма источников тока, присоединённых к узлу S; при этом со знаком плюс берутся те токи, которые направлены к узлу S, а со знаком минус – в направлении от узла S.

Методом узловых потенциалов рекомендуется пользоваться в тех случаях, когда число уравнений будет меньше числа уравнений, составленных по методу контурных токов.

Если в схеме некоторые узлы соединяются идеальными источниками э.д.с., то число m уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов, уменьшается

$$m = N_y - N_{и} - 1 \quad (4.6)$$

где $N_{и}$ – число ветвей, содержащих только идеальные источники э.д.с. В этом случае за нуль принимается один из узлов, принадлежащих ветви с идеальным источником э.д.с., тогда потенциал другого равен $\pm E$. Плюс, если двигаться по э.д.с., минус – если против.

Пример.

Число уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов для схемы 4.1 $m = 3$. Примем $\varphi_4 = 0$ и запишем уравнения для определения потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(g_1 + g_2 + g_5) - \varphi_2 g_5 - \varphi_3 g_2 &= -E_1 g_1 + E_2 g_2; \\ -\varphi_1 g_5 + \varphi_2(g_3 + g_4 + g_5) - \varphi_3 g_4 &= -E_3 g_3 - E_4 g_4; \\ -\varphi_1 g_2 - \varphi_2 g_4 + \varphi_3(g_2 + g_4) &= -E_2 g_2 + E_4 g_4 - J, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где $g_1 = 1/R_1, g_2 = 1/R_2, g_3 = 1/R_3, g_4 = 1/R_4, g_5 = 1/R_5$.

Решая систему 4.7, найдём потенциалы узлов электрической цепи φ_1, φ_2 и φ_3 .

Токи определим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 + E_1}{R_1};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - E_2}{R_2};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 - E_3}{R_3};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_4}{R_4};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_5}.$$

4.3 Метод двух узлов

Для схем, имеющих два узла (например, узлы а и b), узловое напряжение U_{ab} определяется формулой

$$U_{ab} = \frac{\sum_n E_n G_n + \sum_n J_n}{\sum_m G_m} \quad (4.8)$$

где $\sum E_n G_n$ - алгебраическая сумма произведений э.д.с. ветвей (э.д.с. считаются положительными, если они направлены к узлу а, и отрицательными, если направлены от узла а, к узлу b) на проводимости этих ветвей;

J_n – токи источников тока (положительны, если они направлены к узлу а, и отрицательны, если направлены от узла а, к узлу b);

$\sum_m G_m$ - сумма проводимости всех ветвей, соединяющих узлы а и b.

4.4 Метод замены нескольких соединенных параллельно источников э.д.с. одним эквивалентным

Если имеется несколько источников с э.д.с. $E_1, E_2 \dots, E_n$ и внутренними сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n , работающих параллельно на общее сопротивление нагрузки R (рисунок 4.2, а), то они могут быть заменены одним эквивалентным источником, э.д.с. которого $E_{эк}$, а внутреннее сопротивление $R_{эк}$ (рисунок 4.2, б). При этом

$$R_{\text{эк}} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}, \quad G_k = \frac{1}{R_k}. \quad (4.9)$$

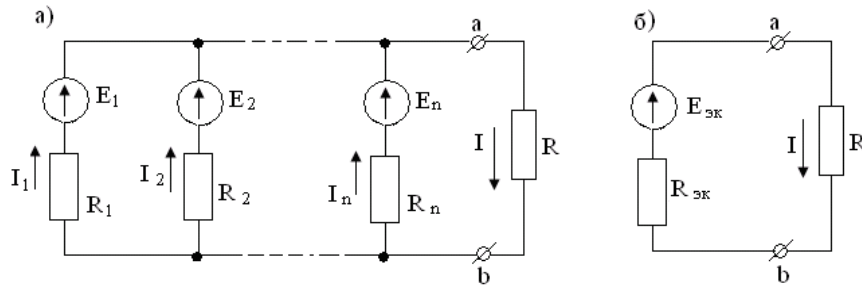


Рисунок 4.2

4.5 Метод замены параллельно соединенных источников тока одним эквивалентным

Если несколько источников тока с токами J_1, J_2, \dots, J_n и внутренними проводимостями G_1, G_2, \dots, G_n соединены параллельно (рисунок 4.3, а), то их можно заменить одним эквивалентным источником тока (рисунок 4.3, б), ток которого $J_{\text{эк}}$ равен алгебраической сумме токов, а его внутренняя проводимость $G_{\text{эк}}$ равна сумме внутренних проводимостей отдельных источников

$$J = \sum_{k=1}^n J_k, \quad G_{\text{эк}} = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (4.10)$$

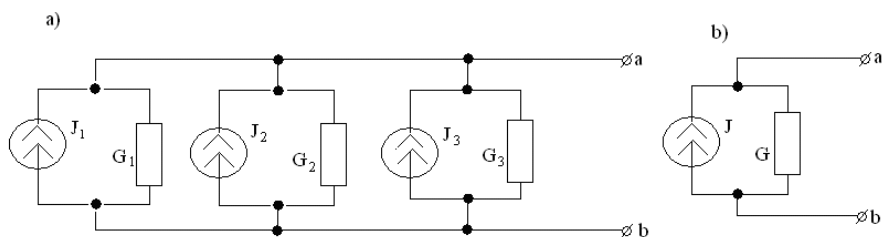


Рисунок 4.3

4.6 Баланс мощностей

Баланс мощностей является следствием закона сохранения энергии и может служить критерием правильности расчета электрической цепи. Для любой замкнутой электрической цепи сумма мощностей $P_{\text{и}}$, развиваемых источниками электрической энергии, равна сумме мощностей $P_{\text{п}}$, расходуемых в приемниках энергии

$$\sum P_{\text{и}} = \sum P_{\text{п}}, \text{ или } \sum (E_k I_k + U_k J_k) = \sum I_k^2 R_k. \quad (4.11)$$

Это уравнение представляет собой математическую форму записи баланса мощностей: суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи.

Следует указать, что в левой части (4.11) слагаемые имеют знак “+”, поскольку активная мощность рассеивается на резисторах. В правой части (4.11) сумма слагаемых больше нуля, но отдельные члены здесь могут иметь знак “-”, что говорит о том, что соответствующие источники работают в режиме потребителей энергии (например, заряд аккумулятора).

Где $\sum E_k I_k$ – алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых направления действия э.д.с. E_k и соответствующего тока I_k совпадают, в противном случае слагаемое отрицательно;

$\sum E_k J_k$ - алгебраическая сумма; здесь положительны те из слагаемых, для которых напряжение на источнике тока (оно определяется расчетом цепи внешней по отношению к зажимам источника тока) и его ток J_k совпадают по направлению, в противном случае слагаемое отрицательно .

5 Лекция 5. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины

Цель лекции: усвоить основные понятия о синусоидальных токах и напряжениях.

5.1 Синусоидальные электрические величины

Переменный ток долгое время не находил практического применения. Это было связано с тем, что первые генераторы электрической энергии вырабатывали постоянный ток, который вполне удовлетворял технологическим процессам электрохимии, а двигатели постоянного тока обладают хорошими регулировочными характеристиками. Однако по мере развития производства постоянный ток все менее стал удовлетворять возрастающим требованиям экономичного электроснабжения. Переменный ток дал возможность эффективного дробления электрической энергии и изменения величины напряжения с помощью трансформаторов. Появилась возможность производства электроэнергии на крупных электростанциях с последующим экономичным ее распределением потребителям, увеличился радиус электроснабжения.

В настоящее время центральное производство и распределение электрической энергии осуществляется в основном на переменном токе. Цепи с изменяющимися (переменными) токами по сравнению с цепями постоянного тока имеют ряд особенностей. Переменные токи и напряжения вызывают переменные электрические и магнитные поля. В результате изменения этих полей в цепях возникают явления самоиндукции и взаимной индукции, которые оказывают самое существенное влияние на процессы, протекающие в цепях, усложняя их анализ.

Переменным током (напряжением, ЭДС и т.д.) называется ток (напряжение, ЭДС и т.д.), изменяющийся во времени. Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени в одной и той же последовательности, называются периодическими, а наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются, - периодом T . Для периодического тока имеем

$$i = F(t) = F(t + T).$$

Величина, обратная периоду, есть частота, измеряемая в герцах (Гц)

$$f = 1/T.$$

Диапазон частот, применяемых в технике: от сверхнизких частот (0.01, 10 Гц – в системах автоматического регулирования, в аналоговой вычислительной технике) – до сверхвысоких (3000, 300000 МГц – миллиметровые волны: радиолокация, радиоастрономия). Промышленная частота $f = 50 \text{ Гц}$.

Мгновенное значение переменной величины есть функция времени. Ее принято обозначать строчной буквой: i - мгновенное значение тока $i(t)$; u - мгновенное значение напряжения $u(t)$; e - мгновенное значение ЭДС $e(t)$; p - мгновенное значение мощности $p(t)$. Наибольшее мгновенное значение пе-

ременной величины за период называется амплитудой (ее обозначают заглавной буквой с индексом m): I_m - амплитуда тока; U_m - амплитуда напряжения; E_m - амплитуда ЭДС.

5.2 Действующее значение переменного тока

Значение периодического тока, равное такому значению постоянного тока, который за время одного периода произведет тот же самый тепловой или электродинамический эффект, что и периодический ток, называют действующим значением периодического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (5.1)$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения. В соответствии с выражением (5.3) для действующего значения синусоидального тока запишем:

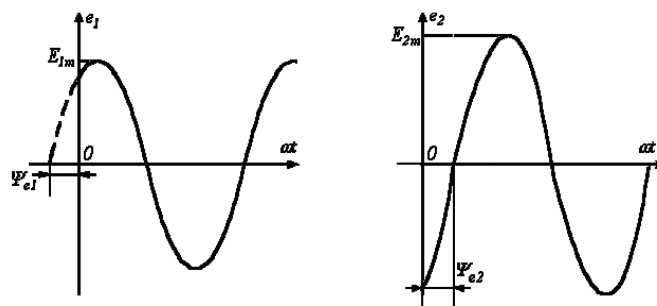
$$I = \sqrt{\frac{I^T}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.2)$$

Аналогичный результат можно получить для синусоидальных ЭДС и напряжений. Таким образом, действующие значения синусоидальных токов, ЭДС и напряжения меньше своих амплитудных значений в $\sqrt{2}$ раз.

5.3 Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов на плоскости декартовых координат

Синусоидальные токи и напряжения можно изобразить графически, записать при помощи уравнений с тригонометрическими функциями, представить в виде векторов на декартовой плоскости или комплексными числами.

Приведенным на рисунке 5.1, 5.2 графикам двух синусоидальных ЭДС e_1 и e_2 соответствуют уравнения



$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \Psi_{e1}), \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \Psi_{e2}).$$

Рисунок 5.1

Рисунок 5.2

Значения аргументов синусоидальных функций $(at + \Psi_{e1})$ и $(at + \Psi_{e2})$ называются фазами синусоид, а значение фазы в начальный момент времени $(t=0)$: Ψ_{e1} и Ψ_{e2} - начальной фазой ($\Psi_{e1} > 0$; $\Psi_{e2} < 0$).

Величину ω , характеризующую скорость изменения фазового угла, называют угловой частотой. Так как фазовый угол синусоиды за время одного периода T изменяется на 2π рад., то угловая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ где f - частота.

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их начальных фаз, называют углом сдвига фаз.

$$\varphi = \Psi_{e1} - \Psi_{e2} . \quad (5.3).$$

6 Лекция 6. Синусоидальный ток в сопротивлении, индуктивности и емкости. Представление синусоидальных функций в виде векторов и комплексных чисел.

Цель лекции: усвоить особенности протекания синусоидального тока в основных элементах электрической цепи.

6.1 Синусоидальный ток в сопротивлении

Если синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ приложено к сопротивлению r (рисунок 6.1а), то через сопротивление пройдет синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$.

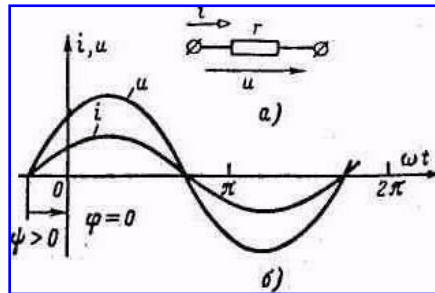


Рисунок 6.1

Напряжение на зажимах сопротивления и ток, проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу или, как говорят, совпадают по фазе. (рисунок 6.1 ,б).

В данном случае сдвиг по фазе равен нулю

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0. \quad (6.1)$$

При прохождении синусоидального тока через сопротивление r не только мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока в нем, но и амплитуды и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны законом Ома

$$i = ru; U_m = rI_m; U = rI.$$

6.2 Синусоидальный ток в индуктивности

Пусть через индуктивность L (рисунок 6.2,а) проходит ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$.

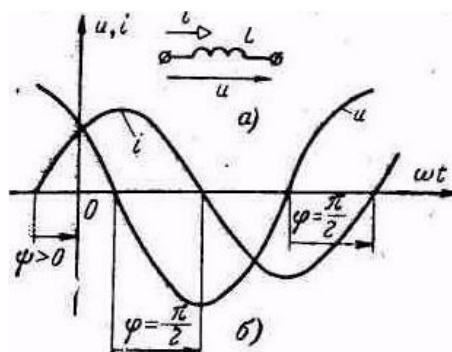


Рисунок 6.2

Электродвижущая сила самоиндукции определяется по формуле

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi) = -U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}). \quad (6.2)$$

Значит напряжение на индуктивности

$$u_L = -e_L = U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}). \quad (6.3)$$

Полученное выражение показывает, что напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\pi/2$ (рисунок 6.2,б).

Фазовый сдвиг равен

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (6.4)$$

Амплитуда так же, как и действующие значения напряжения и тока, связаны соотношением, подобным закону Ома

$$U_m = \omega L I_m = x_L I_m, U = x_L I. \quad (6.5)$$

Величина $x_L = \omega L$, имеющая размерность сопротивления, называется индуктивным сопротивлением; обратная ей величина $b_L = 1/\omega L$ называется индуктивной проводимостью.

$$I_m = b_L U_m, I = b_L U. \quad (6.6)$$

6.3 Синусоидальный ток в емкости

Пусть напряжение на емкости C (рисунок 6.3,а) синусоидально:
 $u = U_m \sin(\omega t + \psi).$

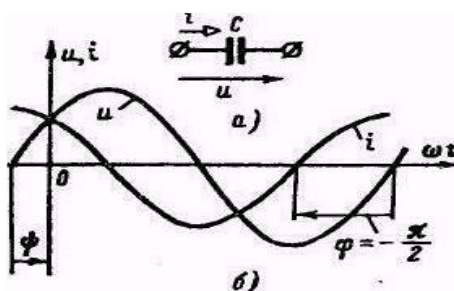


Рисунок 6.3

Ток в емкости

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}). \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) показывает, что ток i опережает приложенное напряжение на угол $\pi/2$ (рисунок 6.3,б).

Сдвиг по фазе $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2$.

Амплитуды и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны соотношением, подобным закону Ома

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = x_C I_m, U = x_C I. \quad (6.8)$$

Величина $x_C = 1/\omega C$, имеющая размерность сопротивления, называется емкостным сопротивлением. Обратная ей величина $b_C = \omega C$ называется емкостной проводимостью. Следовательно,

$$I_m = b_C U_m, I = b_C U. \quad (6.9)$$

6.4 Представление синусоидальных функций в виде векторов и комплексных чисел.

Известно, что каждая точка на комплексной плоскости определяется радиус-вектором этой точки (рисунок 6.4).

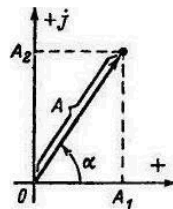


Рисунок 6.4

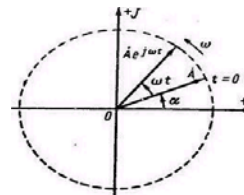


Рисунок 6.5

Комплексное число может быть представлено в показательной тригонометрической и алгебраической формах

$$\dot{A} = A e^{j\alpha} = \dot{A} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha = \dot{A} = A_1 + j A_2$$

здесь A - модуль;

α - аргумент или фаза;

$$j = \sqrt{-1}.$$

Вектор, вращающийся в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки, с угловой скоростью ω может быть выражен следующим образом

$$A e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A} e^{j\omega t} = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha) \quad (6.10)$$

где $\dot{A} = A e^{j\alpha}$ - комплексная амплитуда, представляющая данный вектор в момент $t = 0$ (рисунок 6.5).

Синусоидальная функция $A \sin(\omega t + \alpha)$ может рассматриваться как мнимая часть комплексной функции (6.10) или как проекция вращающегося вектора на мнимую ось.

$$\text{Условно это записывается так } A \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}(A e^{j\omega t}). \quad (6.11)$$

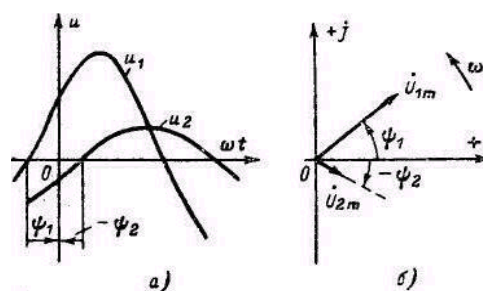


Рисунок 6.6

На рисунке 6.6, а показаны две синусоидальные функции: $u_1 = U_{1m} \times \sin(\omega t + \psi_1)$ и $u_2 = U_{2m} \sin(\omega t - \psi_2)$, имеющие одинаковую угловую частоту ω . Функция u_1 опережает по фазе функцию u_2 , причем фазовый сдвиг равен разности начальных фаз $\varphi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2$. Этот угол образуют векторы, показанные на рисунке 6.6,б. При равенстве начальных фаз, т. е. при фазовом сдвиге, равном нулю, векторы совпадают по фазе. При фазовом сдвиге 180° векторы находятся в противофазе. Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с соблюдением их взаимной ориентации по фазе, называется векторной диаграммой.

7 Лекция 7. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Цель лекции: ознакомить с применением метода комплексных амплитуд.

7.1 Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Расчет цепей переменного синусоидального тока может производиться не только путем построения векторных диаграмм, но и аналитически – путем операций с комплексами, символически изображающими синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Достоинством векторных диаграмм является их наглядность, недостатком – малая точность графических построений. Применение символического метода позволяет производить расчеты цепей с большей степенью точности. Символический метод расчета цепей синусоидального тока основан на законах Кирхгофа и законе Ома в комплексной форме. Уравнения, выражающие законы Кирхгофа в комплексной форме, имеют совершенно такой же вид, как и соответствующие уравнения для цепей постоянного тока. Только токи, ЭДС, напряжения и сопротивления входят в уравнение в виде комплексных величин.

7.2 Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости

Рассмотрим применение метода комплексных амплитуд в случае последовательного соединения элементов r , L и C (рисунок 7.1).

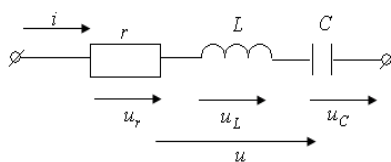


Рисунок 7.1

Положим, что в уравнении Кирхгофа

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (7.1)$$

заданными являются параметры r , L , C и напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, а искомой величиной является ток i . Решение этого дифференциального уравнения должно дать синусоидальную функцию вида $i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$.

Комплексные амплитуды напряжения и тока равны соответственно

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}, \quad \dot{I}_m = I_m e^{j(\psi - \varphi)}.$$

Комплексное уравнение, соответствующее уравнению (7.1)

$$\dot{U}_m = r \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m. \quad (7.2)$$

Комплексное сопротивление рассматриваемой электрической цепи

$$Z = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = r + jx. \quad (7.3)$$

Таким образом, получается уравнение, выражающее закон Ома для комплексных амплитуд и действующих значений.

$$\dot{U}_m = Z \dot{I}_m \text{ и } \dot{U} = Z \dot{I}. \quad (7.4)$$

Комплексное сопротивление \underline{Z} в тригонометрической и показательной формах имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= z \cos \varphi + jz \sin \varphi \\ \underline{Z} &= ze^{j\varphi} = z \angle \varphi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь z - модуль комплексного числа \underline{Z} , представляет собой полное сопротивление цепи; а φ — аргумент комплексного числа \underline{Z}

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}; \varphi = \arctg \frac{x}{r}. \quad (7.6)$$

На основании (7.4) комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m}{z} e^{j(\psi - \varphi)}$$

где $\psi - \varphi$ - начальная фаза тока. Следовательно, искомый ток в тригонометрической форме

$$i = \text{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

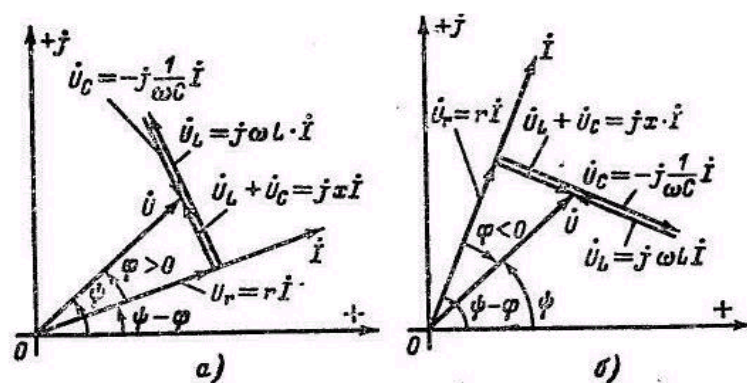


Рисунок 7.2

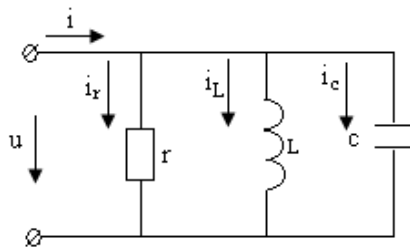
На рисунке 7.2 дана геометрическая интерпретация на комплексной плоскости уравнения (7.2). Рисунок 7.2,а относится к случаю, когда реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер ($x > 0$) и $\varphi > 0$. Рисунок 7.2,б относится к случаю, когда реактивное сопротивление цепи имеет емкостный характер ($x < 0$), и $\varphi < 0$.

Как видно из векторных диаграмм, приведенных на рисунке 7.2, $\dot{U}_r = r\dot{I}$ — напряжение на сопротивлении r (совпадает по фазе с током \dot{I}), $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$ — напряжение на индуктивности L (опережает ток \dot{I} на угол $\pi/2$) и $\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ — напряжение на емкости C (отстает от тока \dot{I} на угол $\pi/2$).

Геометрическая сумма векторов \dot{U}_r, \dot{U}_L и \dot{U}_C дает вектор приложенного к цепи напряжения \dot{U} .

7.3 Параллельное соединение сопротивления, индуктивности и емкости

Если к зажимам электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов r, L и C (рисунок 7.3), приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то синусоидальный ток, проходящий через эту цепь, равен



$$i = i_r + i_L + i_C$$

Рисунок 7.3

Ток i_r в сопротивлении r совпадает по фазе с напряжением u , ток i_L в индуктивности L отстает, а ток i_C в емкости C опережает напряжение на $\pi/2$.

Следовательно, суммарный ток i в цепи равен

$$\begin{aligned} I_m \sin(\omega t - \varphi) &= \frac{1}{r} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \omega C U_m \cos \omega t = \\ U_m \left[\frac{1}{r} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] &= U_m (g \sin \omega t - b \cos \omega t). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Величина $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ называется реактивной проводимостью цепи, которая в зависимости от знака может иметь индуктивный ($b > 0$) или емкостный ($b < 0$) характер. Величина $g = 1/r$ называется активной проводимостью.

В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$\dot{I} = g\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C \quad (7.8)$$

где $\dot{I}_r = g\dot{U}$ — ток в сопротивлении (совпадает по фазе с напряжением);

$\dot{I}_L = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}$ - ток в индуктивности (отстает от напряжения на $-\pi/2$);

$\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}$ - ток в емкости (опережает напряжение на $\pi/2$).

Выражение комплексной проводимости

$$\underline{Y} = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb. \quad (7.9)$$

Уравнение закона Ома в комплексной форме

$$\dot{I} = \underline{Y} \dot{U}. \quad (7.10)$$

Тригонометрическая и показательная формы комплексной проводимости имеют следующий вид

$$\underline{Y} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi; Y = ye^{-j\varphi}$$

здесь y - модуль комплексного числа;

\underline{Y} - представляет собой полную проводимость цепи;

а φ — аргумент комплексного числа \underline{Y} .

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \varphi = \arctg \frac{b}{g}. \quad (7.11)$$

Комплексный ток равен

$$\dot{I} = yUe^{j(\psi - \varphi)}$$

что соответствует синусоидальному току

$$i = \text{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = yU_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

На рисунке 7.4 дана геометрическая интерпретация на комплексной плоскости уравнения (7.8). Рисунок 7.4 а относится к случаю, когда реактивная проводимость цепи имеет индуктивный характер ($b > 0$) и соответственно ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$). Рисунок 7.4 б относится к случаю, когда реактивная проводимость цепи имеет емкостный характер ($b < 0$) и соответственно ток опережает по фазе напряжение ($\varphi < 0$).

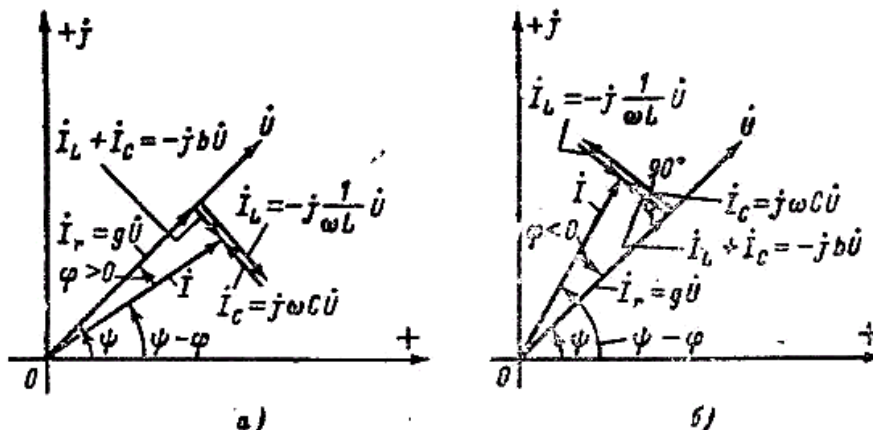


Рисунок 7.4

8 Лекция 8. Применение законов Кирхгофа, метода контурных токов и узловых потенциалов для расчета цепей синусоидального тока символическим методом.

Цель лекции: познакомить с основными методами расчета цепей синусоидального тока.

8.1 Применение законов Кирхгофа, метода контурных токов и узловых потенциалов для расчета цепей синусоидального тока символическим методом.

8.1.1 Законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\sum \dot{I} = 0 \quad (8.1)$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\sum \underline{Z} \dot{I} = \sum \dot{E} \quad (8.2)$$

Пример. Составим уравнения по законам Кирхгофа (рисунок 8.1)

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0, \\ \dot{I}_1(-jX_{C1} + R_1) + \dot{I}_3(-jX_{C3}) &= \dot{U}, \\ \dot{I}_3(-jX_{C3}) - \dot{I}_2(R_2 + jX_{L2}) &= 0. \end{aligned}$$

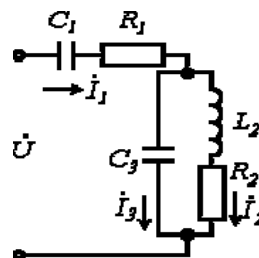


Рисунок. 8.1

8.1.2 Метод контурных токов

Пример. Составим уравнения методом контурных токов (рисунок 8.2)

$$\begin{aligned} -\underline{Z}_5 \dot{I}_{11} + (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \dot{I}_{22} - \underline{Z}_6 \dot{I}_{33} - 0 \cdot \dot{I}_{44} &= 0, \\ 0 \cdot \dot{I}_{11} - \underline{Z}_6 \dot{I}_{22} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7) \dot{I}_{33} - \underline{Z}_7 \dot{I}_{44} &= -\dot{E}_3, \\ -\underline{Z}_2 \dot{I}_{11} + 0 \cdot \dot{I}_{22} - \underline{Z}_7 \dot{I}_{33} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_7 + \underline{Z}_8) \dot{I}_{44} &= \dot{E}_2. \end{aligned}$$

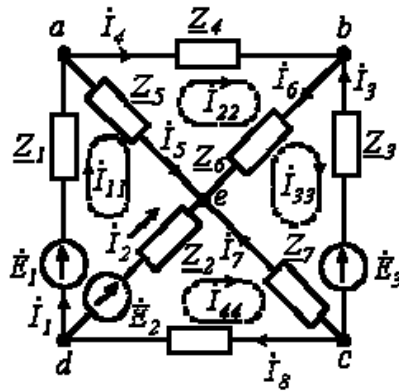


Рисунок 8.2

Решим их относительно контурных токов и затем по уравнениям, связывающим контурные токи и токи ветвей, найдем последние.

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{44} - \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_3 = -\dot{I}_{33}, \quad \dot{I}_8 = \dot{I}_{44}, \quad \dot{I}_4 = \dot{I}_{22}, \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22},$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33}, \quad \dot{I}_7 = \dot{I}_{33} - \dot{I}_{44}.$$

8.1.3 Метод узловых потенциалов

Пример. Составим уравнения методом узловых потенциалов (рисунок 8.3).

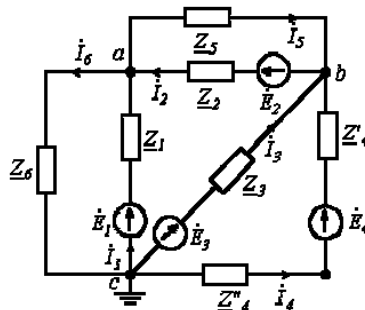


Рисунок 8.3

Составим уравнения по методу узловых потенциалов для узлов а и в. Потенциал узла $\phi_c = 0$.

$$(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \phi_b - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) \phi_a = -\dot{E}_2 \underline{Y}_2 + \dot{E}_3 \underline{Y}_3 + \dot{E}_4 \underline{Y}_4.$$

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6) \phi_a - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) \phi_b = \dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2.$$

Токи ветвей выразим по закону Ома

$$\left. \begin{aligned}
\dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{\phi}_a}{\underline{Z}_1} = (\dot{E}_1 - \dot{\phi}_a) \underline{Y}_1; \\
\dot{I}_2 &= (\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_a + \dot{E}_2) \underline{Y}_2; \\
\dot{I}_3 &= (\dot{E}_3 - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_3; \\
\dot{I}_4 &= (\dot{E}_4 - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_4, \quad \text{where } \underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}'_4 + \underline{Z}''_4}; \\
\dot{I}_5 &= (\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_5; \\
\dot{I}_6 &= \dot{\phi}_a \underline{Y}_6.
\end{aligned} \right\}.$$

9. Лекция 9. Мощность в цепях синусоидального тока. Входные и передаточные характеристики

Цель лекции: рассмотреть вопросы преобразования энергии в электрической цепи, в мгновенную, активную, реактивную и полную мощности синусоидального тока.

9.1 Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности в цепях синусоидального тока

Передача энергии w по электрической цепи, рассеяние энергии, то есть переход электромагнитной энергии в тепловую, а также и другие виды преобразования энергии характеризуются интенсивностью, с которой протекает процесс. Интенсивность передачи или преобразования энергии называется мощностью p

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (9.1)$$

Выражение для мгновенного значения мощности в электрических цепях имеет вид

$$p = ui \quad (9.2)$$

Приняв начальную фазу напряжения за нуль, а сдвиг фаз между напряжением и током за $-\varphi$, получим

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (9.3)$$

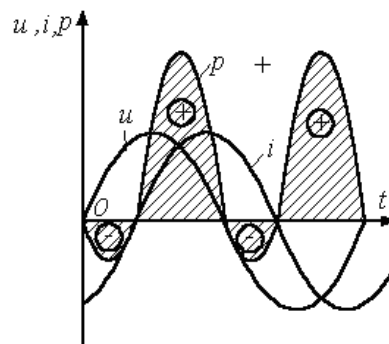


Рисунок 9.1

Когда мгновенная мощность отрицательна (рисунок 9.1), т.е. когда направления напряжения и тока в двухполюснике противоположны, энергия

возвращается из двухполюсника к источнику питания. Среднее за период значение мгновенной мощности называется активной мощностью.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi \quad (Bm) \quad (9.4)$$

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник будет генерировать энергию), поэтому $\cos \varphi \geq 0$, т.е. на входе пассивного двухполюсника

$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Случай $P=0$, $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} \right|$ теоретически возможен для двухполюсника, не имеющего активных сопротивлений, а содержащего только идеальные индуктивные и емкостные элементы.

Резистор (идеальное активное сопротивление).

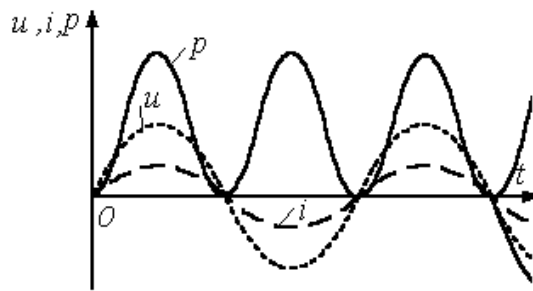


Рисунок 9.2

Здесь напряжение и ток (рисунок 9.2) совпадают по фазе ($\varphi = 0$), поэтому мощность $p = ui$ всегда положительна, т.е. резистор потребляет активную мощность

$$P = UI \cos \varphi = |\cos 0 = 1| = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (9.5)$$

Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)

При идеальной индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому в соответствии с (9.3) можно записать

$$p = U_L I_L \cos \frac{\pi}{2} - U_L I_L \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_L I_L \sin 2\omega t. \quad (9.6)$$

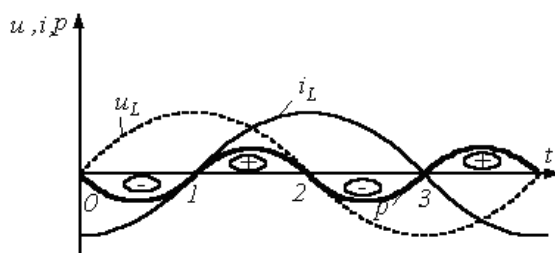


Рисунок 9.3

Участок 1-2: энергия $\frac{Li^2}{2}$, запасаемая в магнитном поле катушки, нарастает.

Участок 2-3: энергия магнитного поля убывает, возвращаясь в источник. Конденсатор (идеальная емкость).

Аналогичный характер имеют процессы и для идеальной емкости. Здесь $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Поэтому из (9.3) вытекает, что $p = U_C I_C \sin 2\omega t$. Таким образом, в катушке индуктивности и конденсаторе активная мощность не потребляется ($P=0$). Происходит только циркуляция энергии: электрическая энергия запасается в электрическом поле конденсатора на протяжении четверти периода, а на протяжении следующей четверти периода вновь возвращается в сеть. В силу этого катушку индуктивности и конденсатор называют реактивными элементами, а их сопротивления X_L и X_C , в отличие от активного сопротивления R резистора, – реактивными. Интенсивность обмена энергии принято характеризовать реактивной мощностью.

$$Q = UI \sin \varphi \quad (9.7)$$

Она положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка- $\varphi > 0$) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка- $\varphi < 0$). Единицу измерения реактивной мощности называют вольт-ампер реактивный (ВАр).

9.2 Полная мощность

Помимо понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике широко используется понятие полной мощности

$$S = UI \quad (BA) \quad (9.8)$$

Активная, реактивная и полная мощности связаны следующим соотношением

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (9.9)$$

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности. Из приведенных выше соотношений видно, что коэффициент мощности $\cos \varphi$ равен косинусу угла сдвига между током и напряжением. Итак

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (9.10)$$

9.3 Комплексная мощность

Активную, реактивную и полную мощности можно определить, пользуясь комплексными изображениями напряжения и тока. Пусть $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$, а $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

Тогда комплекс полной мощности

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* \quad (9.11)$$

где \dot{I}^* - комплекс, сопряженный с комплексом \dot{I} .

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \dot{U} \dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = |S| e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Комплексной мощности можно поставить в соответствие треугольник мощностей (рисунок 9.4). Рисунок 9.4 соответствует $\cos \varphi > 0$ (активно-индуктивная нагрузка).

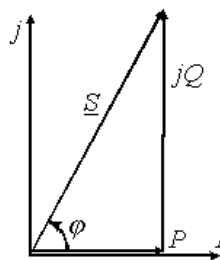


Рисунок 9.4

9.4 Баланс мощностей

Из закона сохранения энергии следует, что сумма всех отдаваемых активных мощностей равна сумме всех потребляемых активных мощностей, т.е.

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \cos \varphi_{k2}(\text{генератора}). \quad (9.13)$$

Баланс соблюдается и для реактивных мощностей

$$\sum_{k=1}^n \pm X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \sin \varphi_{k2} \quad (9.14)$$

“-” где знак “+” относится к индуктивным элементам ($X = \omega L$); – к емкостным ($X_c = 1/(\omega C)$).

Умножив (9.14) на “j” и сложив полученный результат с (9.13), придем к аналитическому выражению баланса мощностей в цепях синусоидального тока (без учета взаимной индуктивности)

$$\sum_{k=1}^n (R_k \pm jX_k) I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k (\cos \varphi_{k2} + j \sin \varphi_{k2}) = \sum_{k=1}^n E_k I_k e^{j\varphi_{k2}} \quad \text{или}$$

$$\sum_{k=1}^n Z_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \times I_k. \quad (9.16)$$

10 Лекция 10. Резонансы в электрических цепях

Цель лекции: изучить резонансные явления в последовательном и параллельном колебательном контуре.

10.1 Резонанс напряжений

Резонансом называется такой режим работы цепи, включающей в себя индуктивные и емкостные элементы, при котором ее входное сопротивление вещественно. Следствием этого является совпадение по фазе тока на входе цепи с входным напряжением.

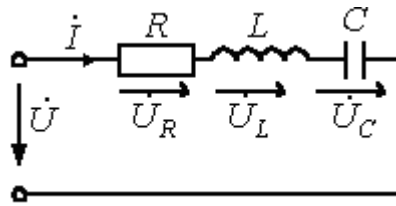


Рисунок 10.1

Для цепи на рисунке 10.1 имеет место

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{I} \underline{Z}$$

Где

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j\varphi} \quad (10.1)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \quad (10.2)$$

В зависимости от соотношения величин ωL и $1/(\omega C)$ возможны три различных случая.

1. В цепи преобладает индуктивность, т.е. $\omega L > 1/(\omega C)$, а, следовательно, $\dot{U}_L > \dot{U}_C$.

Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 10.2,а.

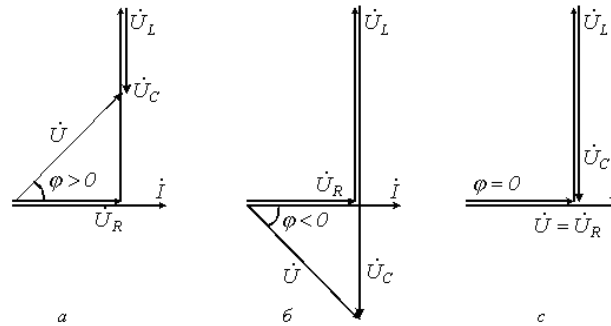


Рисунок 10.2

2. В цепи преобладает емкость, т.е. $\omega L < 1/(\omega C)$, а значит, $\dot{U}_L < \dot{U}_C$. Этот случай отражает векторная диаграмма на рисунке 10.2,б.

3. $\dot{U}_L = \dot{U}_C$ - случай резонанса напряжений (рисунок 10.2,с).

Условие резонанса напряжений

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (10.3)$$

При этом, как следует из (10.1) и (10.2), $\underline{Z} = R$; $\varphi = 0$.

При резонансе напряжений ток в цепи наибольший $I_o = \frac{V}{R}$. Соответственно возрастанию тока увеличиваются напряжения на индуктивном и емкостном элементах, которые могут во много раз превысить величину напряжения источника питания. Физическая сущность резонанса заключается в периодическом обмене энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, причем сумма энергий полей остается постоянной.

Как показывает анализ уравнения (10.3), режима резонанса можно добиться путем изменения параметров L и C, а также частоты. На основании (10.3) для резонансной частоты можно записать

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (10.4)$$

10.2 Добротность и затухание последовательного колебательного контура

Добротность Q определяется отношением напряжения на индуктивном (емкостном) элементе в режиме резонанса к входному напряжению

$$Q = \frac{U_{Lp}}{U} = \frac{U_{Cp}}{U} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R} . \quad (10.5)$$

Добротность характеризует “избирательные” свойства резонансного контура, в частности его полосу пропускания $\Delta S = \omega_p / Q$.

Другим параметром резонансного контура является характеристическое сопротивление, связанное с добротностью соотношением

$$\rho = QR \quad (10.6)$$

или с учетом (10.4) и (10.5) для ρ можно записать

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.7)$$

Тогда добротность

$$Q = \frac{X_{Lp}}{R} = \frac{X_{Cp}}{R} = \frac{\rho}{R} . \quad (10.8)$$

Затухание величина обратная добротности

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} . \quad (10.9)$$

10.3 Частотные характеристики последовательного колебательного контура

Зависимость реактивного сопротивления контура от частоты $X = f(\omega)$

(рисунок 10.3), где $X = X_L - X_C$, $X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$.

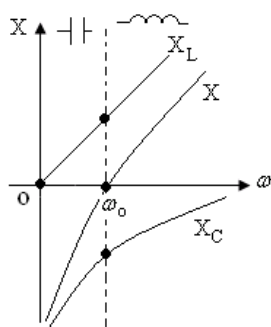


Рисунок 10.3

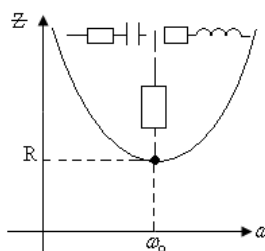


Рисунок 10.4

Зависимость полного сопротивления контура от частоты $Z = f(\omega)$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ (рисунок 14.2). До резонанса характер сопротивления контура активно-емкостной, при резонансе активный, после резонанса активно-индуктивный.

Зависимость $I = f(\omega)$ - амплитудно - частотная характеристика (АЧХ),
 $I = \frac{U}{Z}, I_o = \frac{U}{R}$ (рисунок 10.5).

Зависимости $U_L = f(\omega)$ $U_C = f(\omega), U_L = I\omega L, U_C = \frac{1}{\omega C} I$ (рисунок 10.6).

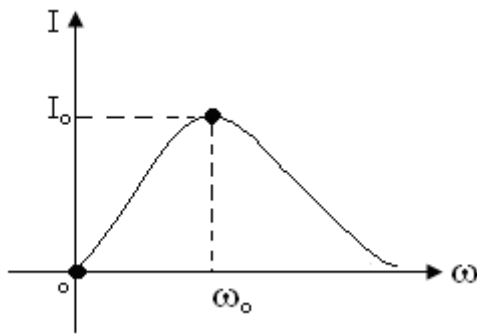


Рисунок 10.5

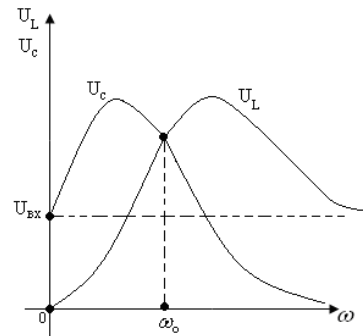


Рисунок 10.6

Зависимость $\varphi = f(\omega)$ - фазо- частотная характеристика (ФЧХ),
 $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ (рисунок 10.7).

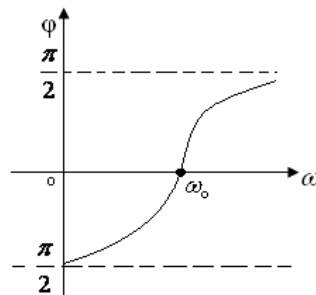


Рисунок 10.7

10.4 Резонанс токов

Резонанс токов возникает в параллельном колебательном контуре при условии, что входная реактивная проводимость

$$\theta = 0, \theta = \theta_2 - \theta_c = 0 \quad \theta_L = \theta_c. \quad (10.10)$$

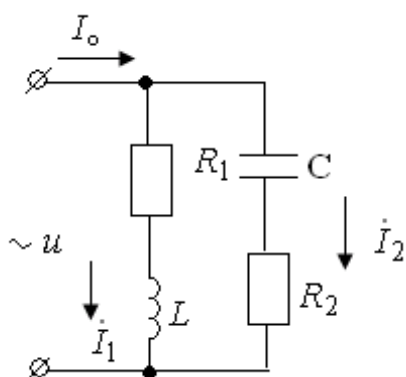


Рисунок 10.8

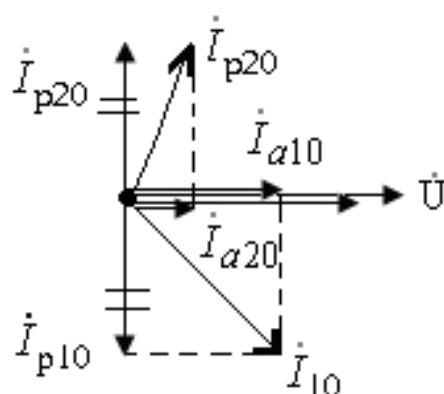


Рисунок 10.9

Учитывая (10.10), видно, что полная проводимость чисто активная

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (g_1 - j\mathcal{B}_L) + (g_2 + j\mathcal{B}_c) = g_1 + g_2 - j(\mathcal{B}_L - \mathcal{B}_c) = g_1 + g_2. \quad (10.11)$$

При резонансе токов общий ток наименьший и совпадает с напряжением на входе

$$\dot{I}_o = \dot{U} \cdot \underline{Y} = \dot{U}(g_1 + g_2), \quad (10.12)$$

$$\frac{I_{Lo}}{I_o} = \frac{I_{co}}{I_o} = Q. \quad (10.13)$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2} \quad (10.14)$$

где $R = R_1 + R_2$ - активное сопротивление контура;

S_a - полоса пропускания.

$$S_a = 2\Delta f = \frac{f_o}{Q}. \quad (10.15)$$

10.5 Резонансная частота параллельного колебательного контура

По условию резонанса токов $\mathcal{B}_L = \mathcal{B}_c$

$$\text{где } \mathcal{B}_L = \frac{\omega L}{Z^2} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \mathcal{B}_c = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{1}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (10.16)$$

Решая совместно (10.16), получим

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (10.17)$$

Резонанс токов возможен при $\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, если:

а) $R_1 > \rho; R_2 > \rho$ $R_1 < \rho; R_2 < \rho$;

б) $R_1 = R_2 \neq \rho$ или $R_1 \ll \rho$ и $R_2 \ll \rho$.

В случае, когда $R_1 = R_2 = \rho$ получаем неопределенность, т.е. может быть любое значение резонансной частоты.

Резонанс, не при какой частоте не возникает, если $R_1 > \rho$, а $R_2 < \rho$ или наоборот.

11 Лекция 11. Переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами. Законы коммутации. Переходные процессы в RL- цепи. Переходные процессы в RC- цепи.

Цель лекции: ознакомить с возникновением переходных процессов, законами коммутации, с расчетом переходных процессов в RL- цепи, с расчетом переходных процессов в RC- цепи.

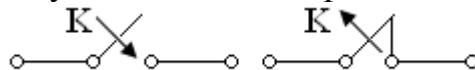
11.1 Установившийся и переходный режимы

В работе электрических цепей различают два режима процессов: *установившийся* и *переходный*.

Установившийся режим – это режим, при котором токи и напряжения либо не зависят от времени, либо являются периодическими функциями времени в зависимости от вида приложенного воздействия.

Переходным процессом называют электромагнитный процесс, возникающий в цепи, содержащей накопители энергии (индуктивности и ёмкости) при переходе от одного установившегося режима к другому. Возникновение переходных процессов в цепях с энергоемкими элементами обусловлено тем, что энергии электрических полей конденсаторов $W_C = C u_C^2 / 2$ и магнитных полей индуктивных катушек $W_M = L i_L^2 / 2$ вследствие закона непрерывности изменения энергии не могут изменяться скачком.

Переходный процесс возникает в электрических цепях, при различного рода воздействиях (подключении к цепи или отключении от цепи источников электрической энергии, а также при скачкообразном изменении схемы цепи или параметров входящих в нее элементов), которые называются *коммутациями*. Коммутация осуществляется с помощью идеального ключа: сопротивление ключа в разомкнутом положении равно ∞ , в замкнутом – 0.



Будем считать, что коммутация происходит мгновенно $\Delta t_{ком} = 0$. Начало отсчёта времени $t = 0$ совмещается с моментом коммутации.

Законы коммутации:

- 1) Ток в индуктивности непосредственно *после* коммутации $t = 0_+ = 0$ сохраняет значение, которое он имел непосредственно *до* коммутации $t = 0_-$:

$$i_L(0_+) = i_L(0) = i_L(0_-) \quad (11.1)$$

- 2) Напряжение на ёмкости непосредственно *после* коммутации $t = 0_+ = 0$

сохраняет значение, которое оно имело непосредственно *до* коммутации $t = 0_-$:

$$u_C(0_+) = u_C(0) = u_C(0_-) \quad (11.2)$$

Начальные условия – значения токов и напряжений при $t = 0$.

Независимые начальные условия – это значения тока в индуктивности $i_L(0)$ и напряжения на ёмкости $u_C(0)$ в момент коммутации $t = 0$, которые определяются на основании законов коммутации путем расчета установивше-

гося режима в цепи до коммутации. *Зависимые начальные условия* – это значения токов и напряжений и их производных в момент коммутации $t=0$, которые в момент коммутации могут изменяться скачком, например: $i'_L(0)$, $i_R(0)$, $u_L(0)$, $i_C(0)$ и т.п. Они определяются по схеме, образованной после коммутации, по законам Кирхгофа с учетом законов коммутации.

11.2 Расчет переходных процессов в RL- цепи классическим методом.

Классическим методом расчета переходных процессов называется метод, основанный на решении классической системы дифференциальных уравнений, составленных относительно мгновенных значений искомой переходной величины.

В основе временных методов расчета переходных процессов в электрических цепях лежит составление интегрально-дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений. Эти уравнения составляются на основе законов Кирхгофа, методов контурных токов, узловых напряжений.

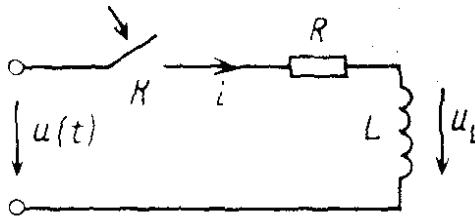


Рисунок 11.1

Из рисунка 11.1 следует, что до коммутации ключ К разомкнут, поэтому ток $i_L(0)=0$ и цепь находится при нулевых начальных условиях. В момент $t=0$ ключом К замыкаем цепь, подключив ее к источнику напряжения $u(t)$. После замыкания ключа К в цепи начнется переходный процесс. Дифференциальное уравнение по ЗК:

$$iR + u_L = iR + L \frac{di}{dt} = U \quad (11.3)$$

решение, которого можно записать в форме

$$i = i_{cb} + i_{np} \quad (11.4)$$

Свободная составляющая тока есть общее решение однородного дифференциального уравнения

$$i_{cb}R + L \frac{di_{cb}}{dt} = 0, \quad (11.5)$$

а именно:

$$i_{cb} = Ae^{pt} \quad (11.6)$$

где A - постоянная интегрирования; p - корень характеристического уравнения, составляемого по дифференциальному уравнению.

$$R + pL = 0. \quad (11.7)$$

Отсюда получаем $p = -R/L$. Величина $\tau = 1/|p|$ носит название постоянной времени RL-цепи $\tau = L/R$ [с].

Принужденная составляющая i_{np} может быть определена из установившегося режима: $i_{np} = U/R$. Для нахождения постоянной интегрирования A запишем:

$$i(0_-) = i(0_+) = 0 = A + U/R.$$

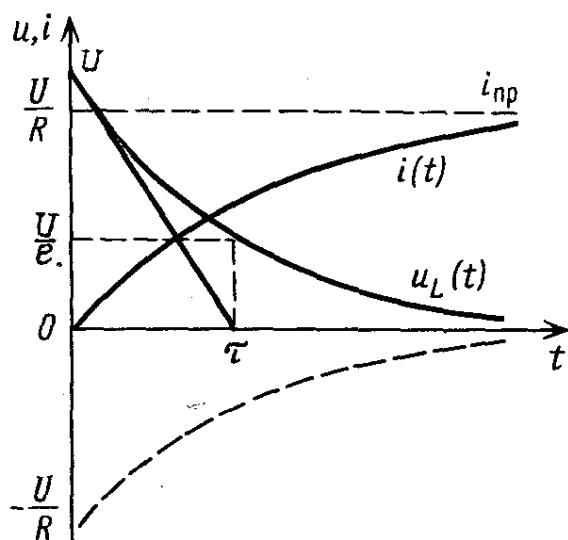


Рисунок 11.2

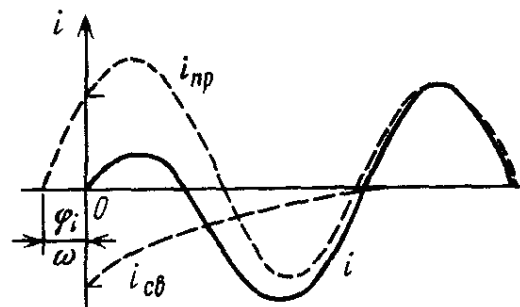


Рисунок 11.3

Отсюда находим $A = -U/R$. Закон изменения тока в RL-цепи будет определяться уравнением

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (11.8)$$

напряжение на индуктивности определится

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-t/\tau} \quad (11.8)$$

Если напряжение $u(t)$ изменяется по синусоидальному закону, то ток будет равен:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - I_m \sin(\varphi_u - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (11.9)$$

Графики переходных величин приведены на рисунках 11.2 и 11.3.

12 Лекция 12. Переходные процессы в RC- цепи.

Цель лекции: ознакомить с расчетом переходных процессов в RC- цепи.

12.1 Подключение RC- цепи к источнику постоянного напряжения и синусоидального напряжения .

Рассмотрим в начале RC-цепь при нулевых начальных условиях (рисунок 12.1), которая подключается в момент $t=0$ к источнику постоянного $u(t)=U$ или синусоидального $u(t)=U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ напряжения.

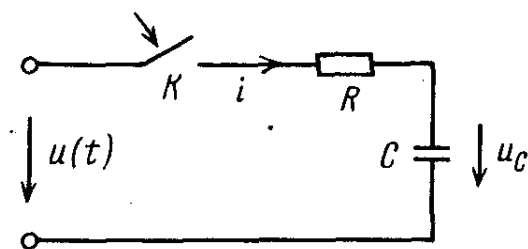


Рисунок 12.1

Переходный процесс в данной цепи будет описываться следующим дифференциальным уравнением:

$$Ri + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u, \quad (12.1)$$

решение которого:

$$u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}}. \quad (12.2)$$

Свободная составляющая:

$$u_{C\text{св}} = Ae^{pt}, \quad (12.3)$$

где p определяется из характеристического уравнения $RCp + 1 = 0$; $p = -1/RC$.

Величина RC носит название постоянной времени RC-цепи и обозначается через τ . Когда $u(t)=U=\text{const}$, $u_{C\text{пр}}=U$ и $u_C=Ae^{-t/\tau} + U$.

Для нахождения постоянной интегрирования A : $u_C(0_-)=u_C(0_+)=0=A+U$, откуда $A=-U$.

$$u_C = U(1 - e^{-t/\tau}) \quad (12.4)$$

Ток в цепи определяется

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -e^{-t/\tau}. \quad (12.5)$$

Графики переходных величин приведены на рисунке 11.5

Для случая гармонического воздействия:

$$u_{Cnp} = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2) \quad (12.6)$$

Постоянная А определится из начальных условий для $u_C(0_+)$ при $t=0_+$:

$$A = -U_{mC} \sin(\varphi_u + \varphi - \pi/2).$$

Окончательно закон изменения u_C определится уравнением

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2) - U_{mC} \sin(\varphi_u + \varphi - \pi/2) e^{-t/\tau}. \quad (12.7)$$

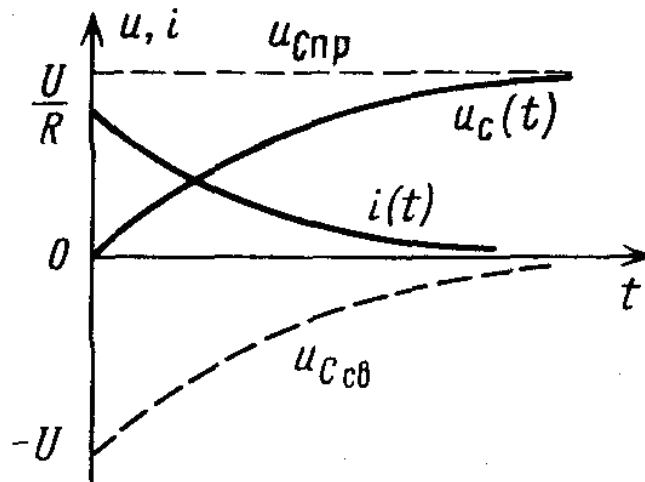


Рисунок 12.2

12.2 Короткое замыкание в цепи RC.

Переходный процесс определяется уравнением (рисунок 12.3)

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad (12.8)$$

т.е. имеет место свободный режим разряда (емкости)

$$u_C = u_{Cсв} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}. \quad (12.9)$$

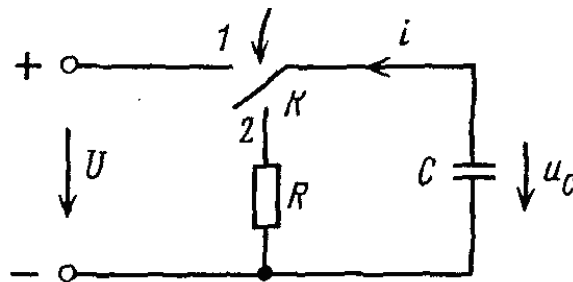


Рисунок 12.3

Постоянную интегрирования А находим из начального условия

для $u_C(0_+) = U$ и закона коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U = A.)$$

Таким образом, получаем закон изменения напряжения на емкости

$$u_C = Ue^{-t/\tau}. \quad (12.10)$$

Графики переходных величин приведены на рисунке 12.4

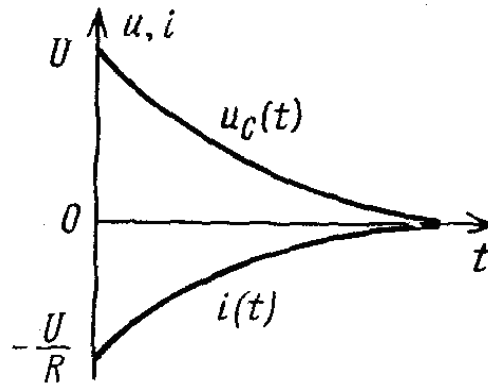


Рисунок 12.4

13 Лекция 13. Переходные процессы в RLC- цепи.

Цель лекции: ознакомить с расчетом переходных процессов в RLC- цепи.

13.1 Разряд емкости на цепь RL .

При наличии в цепи двух независимых накопителей энергии (L и C) переходные процессы в них будут описываться уравнением второго порядка (рисунок 13.1).

Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u. \quad (13.1)$$

Решение дифференциального уравнения:

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр} \quad (13.2)$$

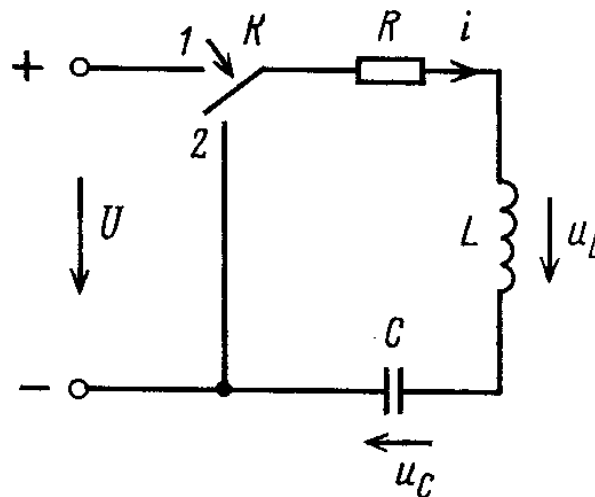


Рисунок 13.1

$U_{Cсв}$ определяется уравнением:

$$LC \frac{d^2 u_{Cсв}}{dt^2} + RC \frac{du_{Cсв}}{dt} + u_{Cсв} = 0. \quad (13.3)$$

Решение уравнения (13.3) будет зависеть от вида корней характеристического уравнения

$$LCP^2 + RC_p + 1 = 0. \quad (13.4)$$

Рассмотрим разряд емкости C на цепь RL (рисунок 13.1).

Так как до коммутации емкость C была заряжена:

$$u_C(0_+) = U;$$

После коммутации емкость начнет разряжаться и в цепи возникнет переходный процесс:

$$u_C = u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (13.5)$$

Для определения A_1 и A_2 запишем еще уравнение для тока в цепи:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}) \quad (13.6)$$

Получим значения A_1 и A_2 :

$$A_1 = -U p_2 / (p_1 - p_2); A_2 U p_1 / (p_1 - p_2).$$

В результате получаем уравнения для напряжения u_C и тока i :

$$u_C = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}) \quad (13.7)$$

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) \quad (13.8)$$

Анализ полученных кривых (рисунок 13.2) показывает, что при $R > R_{кр}$ происходит аperiodический разряд емкости C .

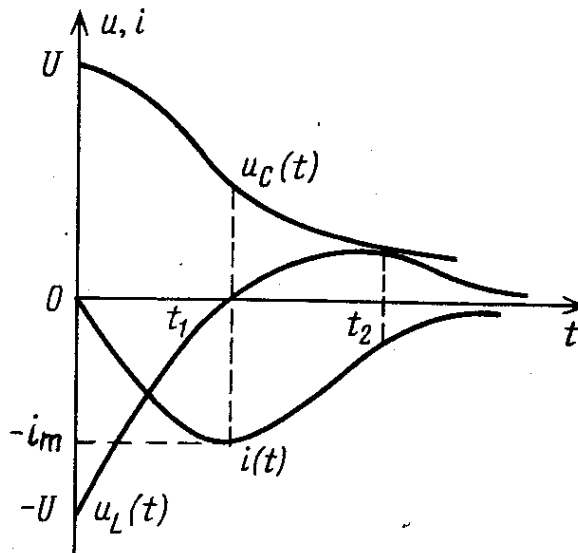


Рисунок 13.2

Во втором случае при $R < R_{кр}$ имеет место колебательный разряд емкости C (рисунок 13.3).

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_C, \quad (13.9)$$

u_C имеет вид

$$u_C = u_{C\text{св}} = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \theta), \quad (13.10)$$

Постоянные A и θ определяются из начальных условий для u_C и i и законов коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U = A \sin \theta;$$

$$i(0_-) = i(0_+) = -\alpha A \sin \theta + \omega_C A \cos \theta.$$

Окончательно уравнения для u_C , i и u_L примут вид

$$u_C = U \frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \theta). \quad (13.11)$$

$$i = -U \frac{1}{\omega_C L} e^{-\alpha t} \sin \omega_C t; \quad (13.12)$$

$$u_L = U \frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t - \theta). \quad (13.13)$$

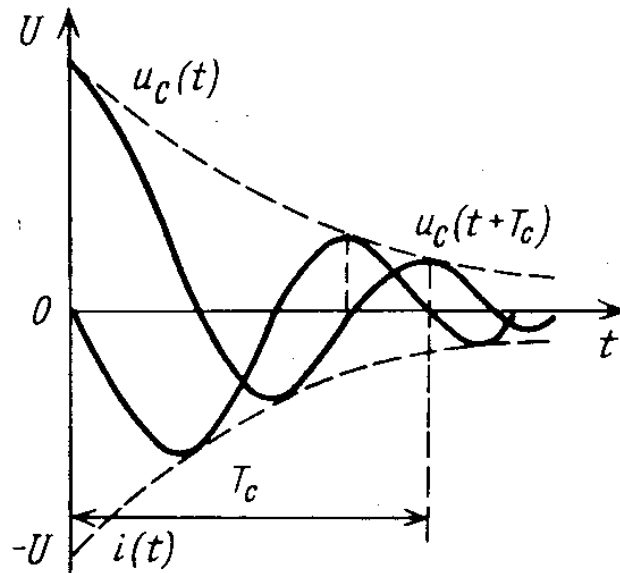


Рисунок 13.3

14. Лекция 14. Общий случай расчета переходных процессов.

Цель лекции: ознакомить с алгоритмом расчета переходных процессов в общем случае.

14.1 Общий случай расчета переходных процессов.

При анализе переходных процессов в электрических цепях *классическим методом* составляется система уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по законам Кирхгофа или с помощью других методов расчета цепей, например метода контурных токов или метода узловых потенциалов. При этом используются соотношения между токами и напряжениями:

$$u_R = iR, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt, \quad i = \frac{u_R}{R}, \quad i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (14.1)$$

В полученной таким образом системе уравнений выбирается основная переменная (ток или напряжение), и исключением других переменных из системы уравнений получают одно дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, содержащее только основную переменную. Полученное, в общем случае, линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеет вид:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad (14.2)$$

где a_0, a_1, a_{n-1}, a_n – постоянные коэффициенты, зависящие от схемы цепи и её параметров; $y(t)$ – выходная величина, основная переменная (ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$); $f(t)$ – функция, описывающая характер воздействия на цепь.

Порядок высшей производной дифференциального уравнения определяет порядок цепи. Если этот порядок будет первым, то и цепь называют цепью первого порядка, эти цепи содержат только однотипные реактивные элементы (ёмкости или индуктивности). Цепь, содержащая два независимых накопителя энергии (и ёмкость и индуктивность), описывается уравнением второго порядка и называется цепью второго порядка.

Решение уравнения (14.2) ищется в виде:

$$y(t) = y_{\text{пр}}(t) + y_{\text{св}}(t) \quad (14.3)$$

где $y_{\text{пр}}(t)$ – принуждённая составляющая, являющаяся частным решением уравнения (14.2), и определяется путём расчёта установившегося режима в цепи после коммутации; $y_{\text{св}}(t)$ – свободная составляющая, являющаяся общим решением однородного дифференциального уравнения:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0. \quad (14.4)$$

Общая формула свободной составляющей $y_{\text{св}}(t)$ имеет вид:

$$y_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (14.6)$$

где A_k - постоянная интегрирования; p_k - корни характеристического уравнения $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$.

Выражение свободной составляющей $y_{CB}(t)$ зависит от вида корней характеристического уравнения. Для цепи второго порядка выражение свободной составляющей $y_{CB}(t)$ имеет вид:

при действительных и различных корнях $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$

$$y_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

при действительных и равных корнях $p_1 = p_2 = p < 0$

$$y_{CB}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{p t},$$

при комплексно-сопряжённых корнях $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{CB}$ (α – коэффициент затухания, ω_{CB} – частота свободных колебаний)

$$y_{CB}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t + \psi)$$

где A и ψ постоянные интегрирования;

или $y_{CB}(t) = [A_1 \cos(\omega_{CB} t) + A_2 \sin(\omega_{CB} t)] e^{-\alpha t}$

14.2 Характеристическое уравнение.

Методы составления характеристического уравнения:

1) по однородному дифференциальному уравнению, например, для уравнения (14.4), характеристическое уравнение имеет вид: $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$;

2) методом главного определителя, суть которого состоит в следующем: записывают определитель матрицы комплексных контурных сопротивлений (или узловых проводимостей) и, заменив $j\omega$ на p , приравнивают его к нулю;

3) методом входного сопротивления:

а) записывают входное комплексное сопротивление $\underline{Z}(j\omega)$ цепи после коммутации относительно любой ветви, кроме ветви с идеальным источником тока;

б) в формуле $\underline{Z}(j\omega)$ заменяют $j\omega$ на p ;

в) полученное выражение $\underline{Z}(p)$ приравнивают к нулю: $\underline{Z}(p) = 0$.

14.3 Постоянные интегрирования.

Особенностью классического метода является необходимость определения постоянных интегрирования, число которых зависит от порядка цепи. Постоянные интегрирования определяются по значениям искомой выходной величины $y(t)$ и её производных, рассматриваемых в момент $t = 0_+$:

а) для цепи первого порядка постоянная интегрирования определяется из уравнения: $y(0_+) = y_{IP}(0_+) + y_{CB}(0_+) = y_{IP}(0_+) + A$;

б) для цепи второго порядка постоянные интегрирования определяются по начальным значениям $y(0_+)$ и $y'(0_+)$.

Корни действительные и различные:	$\left. \begin{aligned} y(0_+) &= y_{IP}(0_+) + A_1 + A_2; \\ y'(0_+) &= y'_{IP}(0_+) + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{aligned} \right\}$
Корни комплексно-сопряжённые:	$\left. \begin{aligned} y(0_+) &= y_{IP}(0_+) + A \sin \psi; \\ y'(0_+) &= y'_{IP}(0_+) + \omega A \cos \psi - \alpha A \sin \psi. \end{aligned} \right\}$

14.4 Порядок расчета переходных процессов классическим методом

- а) определяют независимые начальные условия $i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$;
- б) записывают дифференциальные уравнения по законам Кирхгофа, решение которых представляют в виде: $y(t) = y_{\text{пр}}(t) + y_{\text{св}}(t)$;
- в) определяют принуждённую составляющую $y_{\text{пр}}(t)$;
- г) определяют $y_{\text{св}}(t)$: составляют характеристическое уравнение, вычисляют его корни и находят постоянные интегрирования,
- д) построение графика $y(t)$;

15 Лекция 15. Преобразования Лапласа, эквивалентные операторные схемы. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Эквивалентные операторные схемы.

Цель лекции: ознакомить с основами операторного метода расчета переходных процессов.

15.1 Преобразования Лапласа.

Операторный метод расчёта переходных процессов широко применяется в теории электрических цепей для решения линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Суть операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ действительной переменной t сопоставляется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$. Это сопоставление осуществляется с помощью прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (15.1)$$

Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, функция $F(p)$ называется **изображением**. Это сопоставление обозначается: $f(t) \stackrel{\Delta}{=} F(p)$ и $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

Из выражения (15.1) следует, что изображение постоянной равно:

$$A \stackrel{\Delta}{=} \frac{A}{p}.$$

Изображения производных: $\frac{df}{dt} \stackrel{\Delta}{=} pF(p) - f(0_+)$; $\frac{d^2f}{dt^2} \stackrel{\Delta}{=} p^2F(p) - pf(0_+) - f'(0_+)$

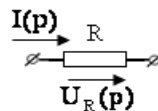
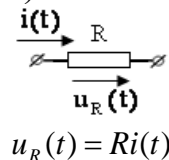
где $f(0_+), f'(0_+)$ – начальные значения функции и её производной. При нулевых начальных значениях $f(0_+) = 0, f'(0_+) = 0$: $\frac{df}{dt} \stackrel{\Delta}{=} pF(p)$; $\frac{d^2f}{dt^2} \stackrel{\Delta}{=} p^2F(p)$.

Изображение интеграла: $\int_0^t f(t)dt \stackrel{\Delta}{=} F(p)/p$.

Таким образом изображения производных и интегралов от оригинала выражаются алгебраическими функциями от изображения и от начальных значений самой функции и её производных. Отсюда следует, что система интегро-дифференциальных уравнений относительно оригиналов заменяется системой алгебраических уравнений относительно их изображений. При этом нет необходимости вычислять постоянные интегрирования.

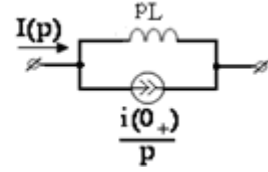
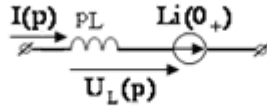
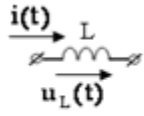
15.2 Изображения напряжений на пассивных элементах и их эквивалентные операторные схемы замещения.

а) Резистивное сопротивление.



$$U(p) = RI(p)$$

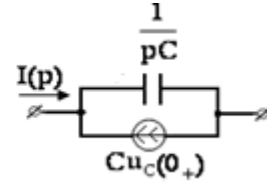
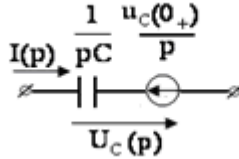
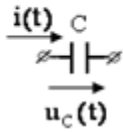
б) Индуктивность



$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0_+);$$

в) Ёмкость.



$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0_+);$$

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0_+)}{p};$$

15.3 Законы Ома в операторной форме.

Для исходной схемы после коммутации (рисунок 15.2) запишем уравнение по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме:

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (15.2)$$

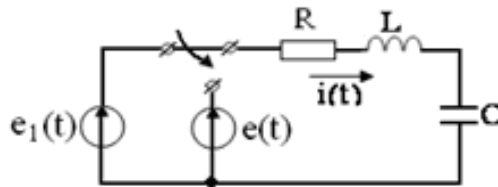


Рисунок 15.2

Перейдём от оригинала к изображению, получим второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$$E(p) + Li(0_+) - \frac{u_C(0_+)}{p} = (R + pL + \frac{1}{pC})I(p) \quad (15.3)$$

где $I(p)$ - изображение тока; $E(p)$ - изображение источника ЭДС $e(t)$;
 $Li(0_+)$, $u_C(0_+)/p$ - внутренние (расчетные) ЭДС, показывающие, что в магнитном поле катушки и в электрическом поле конденсатора в момент коммутации была запасена энергия. ЭДС $Li(0_+)$ совпадает с положительным направлением тока в ветви, ЭДС $u_C(0_+)/p$ противоположно положительному направлению тока в ветви (здесь $i(0_+) \equiv i_L(0_+)$ - ток в индуктивности).

$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$ - операторное сопротивление, $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ - операторная проводимость.

Из уравнения (15.3) получим закон Ома в операторной форме:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0_+) - u_c(0_+)/p}{R + pL + 1/pC}. \quad (15.4)$$

15.4 Законы Кирхгофа в операторной форме.

Система интегро-дифференциальных уравнений Кирхгофа относительно оригиналов:

$$\begin{aligned} \sum i_K &= 0; \\ \sum (R_K i_K + L_K \frac{di_K}{dt} + \frac{1}{C} \int i_K dt) &= \sum e_K, \end{aligned} \quad (15.5)$$

заменяется системой алгебраических уравнений относительно их изображений:

$$\begin{aligned} \sum I_K(p) &= 0; \\ \sum (R_K + pL_K + \frac{1}{pC_K}) I_K(p) &= \sum (E_K(p) + L_K i_K(0_+) - \frac{u_{CK}(0_+)}{p}). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Чтобы сразу записывать уравнения по законам Кирхгофа, а также уравнения расчета по МКТ, МУП, МЭГ и т.п., составляют эквивалентную операторную схему. (рисунок 15.3).

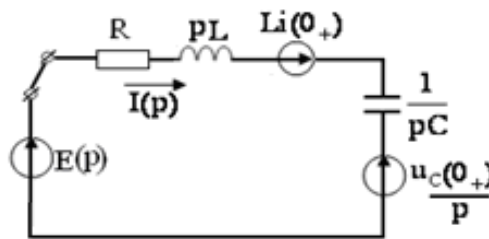


Рисунок 15.3

15.5 Определение оригинала по изображению.

Оригинал $f(t)$ можно определить по его изображению $F(p)$, используя таблицы, обратное преобразование Лапласа, теорему разложения.

Т а б л и ц а 15.1 - Теорема разложения

<p>Изображение имеет вид рациональной дроби:</p> $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0},$ <p>где $m < n$, $F_2(p) = 0$ - характеристическое уравнение. Оригинал определяется по теореме разложения.</p>	
по вид корней характеристического уравнения $F_2(p) = 0$	Теорема разложения
p_k – простые вещественные корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$	$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$ <p>где $F_2'(p) = dF(p)/dp$.</p>
знаменатель имеет один нулевой корень: $pF_2(p)$	$\frac{F_1(p)}{pF_2(p)} \doteq f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$
<p>1. характеристическое уравнение $F_2(p) = 0$ имеет простые вещественные корни $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$ и комплексные сопряженные корни $p_{(n+1)}, p_{(n+2)}^*$.</p> <p>2. $n = 2$, $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{CB}$ - комплексные сопряженные корни уравнения $F_2(p) = 0$</p>	<p>1. $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq$</p> $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_{(n+1)})}{F_2'(p_{(n+1)})} e^{p_{(n+1)} t} \right].$ <p>2. $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq f(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$</p>

15.6 Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1) По законам коммутации определяют независимые начальные условия:

$$i_L(0_+), u_C(0_+).$$

2) Составляют эквивалентную операторную схему. Ненулевые начальные условия $i_L(0_+) \neq 0, u_C(0_+) \neq 0$ учитываются введением внутренних (расчетных) ЭДС (или источников тока): в ветвях с индуктивностью вводится ЭДС $Li_L(0_+)$, в ветвях с емкостью вводится ЭДС $u_C(0_+)/p$

3) Изображения токов и напряжений рассчитывают по операторной схеме известными методами (законы Ома и Кирхгофа, МКТ, МУП, МЭГ и т.п.).

4) Оригинал определяют по теореме разложения, по таблице оригиналов и изображений или с помощью обратного преобразования Лапласа.

16 Лекция 16. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля. Преобразования Фурье. Спектральный анализ линейных электрических цепей непериодических воздействиях.

Цель лекции: получить навыки расчета переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля. Знакомство с преобразованием Фурье и его свойствами. Получение навыков анализа переходных процессов в линейных электрических цепях спектральным методом.

16.1 Интеграл Дюамеля в тех случаях, когда входное воздействие представляет собой кусочно-непрерывную функцию

Интеграл Дюамеля применяют и в тех случаях, когда входное воздействие $f_{ex}(t)$, представляет собой кусочно-непрерывную функцию, содержащую скачки напряжения конечной величины (рисунок 16.1.)

В интервале времени $0 \leq t \leq t_1$:

$$f_{ex}(t) = f_{ex1}(0) \cdot h(t) + \int_0^t f'_{ex1}(x) \cdot h(t-x) dx. \quad (16.1)$$

В интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$f_{ex}(t) = f_{ex1}(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} f'_{ex1}(x) \cdot h(t-x) dx + \\ + [f_{ex2}(t_1) - f_{ex1}(t_1)] h(t-t_1) + \int_{t_1}^t f'_{ex2}(x) \cdot h(t-x) dx. \quad (16.2)$$

В интервале времени $t \geq t_2$

$$f_{ex}(t) = f_{ex1}(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} f'_{ex1}(x) \cdot h(t-x) dx + [f_{ex2}(t_1) - f_{ex1}(t_1)] h(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} f'_{ex2}(x) \cdot h(t-x) dx + [0 - f_{ex2}(t_2)] h(t-t_2). \quad (16.3)$$

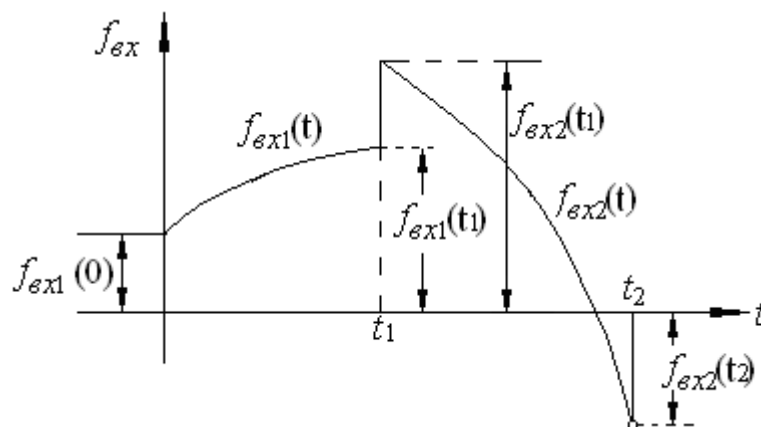


Рисунок 16.1

16.2 Преобразования Фурье.

При воздействии на цепь сигналов произвольной формы широко используется спектральный (частотный) метод анализа электрических цепей. Спектральный метод позволяет определять спектр входного воздействия и вычислять спектральную плотность реакции цепи по спектру входного воздействия и соответствующей комплексной функции передачи цепи $H(j\omega)$, а также находить реакцию цепи в переходном и установившемся режимах.

Математической основой спектрального метода анализа электрических цепей являются преобразования Фурье. Непериодическая функция, удовлетворяющая условию абсолютной интегрируемости в бесконечных пределах

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, может быть представлена интегралом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (16.4)$$

Внутренний интеграл в выражении (16.1) является спектром или спектральной плотностью $F(j\omega)$ заданной функции $f(t)$ и называется прямым преобразованием Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (16.5)$$

Заданную функцию $f(t)$ можно определить по спектру $F(j\omega)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16.6)$$

Одностороннее прямое преобразование Фурье (если $f(t) = 0$ при $t < 0$):

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (16.7)$$

Спектральная плотность $F(j\omega)$ является комплексной функцией частоты и может быть записана в показательной форме: $F(j\omega) = F(\omega) * e^{j\varphi(\omega)}$, где $F(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика АЧХ (чётная функция частоты), $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика ФЧХ (нечётная функция частоты).

Обратное преобразование Фурье в тригонометрической форме:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t + \varphi) d\omega. \quad (16.8)$$

Сравнивая прямое и обратное преобразование Лапласа с прямым и обратным преобразованием Фурье, можно сделать вывод, что преобразования Фурье являются частным случаем преобразований Лапласа и получаются из него при $p \Rightarrow j\omega$.

16.3 Некоторые свойства преобразований Фурье.

Теорема линейности: $\sum_{k=1}^n f_k(t) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=1}^n F_k(j\omega)$;

спектры производной и интеграла: если $f(t) \stackrel{\Delta}{=} F(j\omega)$, то $df(t)/dt \stackrel{\Delta}{=} j\omega F(j\omega)$ и

$$\int_{-\infty}^t f(t)dt \triangleq F(j\omega)/j\omega;$$

теорема запаздывания: если $f(t) \triangleq F(j\omega)$, то $f(t-t_0) \triangleq F(j\omega) * e^{-j\omega t_0}$.

16.4 Определение спектральной плотности реакции цепи.

Спектральную плотность реакции цепи вычисляют по спектральной плотности входного воздействия и соответствующей комплексной функции передачи цепи.

Расчет спектра тока в RLC -цепи, закон Ома для частотных спектров при нулевых начальных значениях:

$$I(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{U_1(j\omega)}{Z(j\omega)} \quad (16.9)$$

где $U_1(j\omega)$ - спектр непериодического входного воздействия;

$Z(j\omega) = R + j\omega L + 1/j\omega C$ - комплексное сопротивление RLC -цепи, которое применялось ранее для расчёта установившихся гармонических процессов.

Расчет спектра тока двухполюсника (рисунок 15.1):

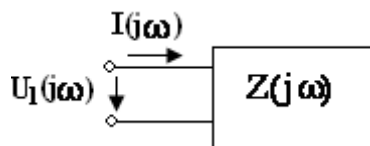


Рисунок 16.2

$$I(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{Z(j\omega)} = U_1(j\omega)Y(j\omega) \quad (16.10)$$

где $Z(j\omega), Y(j\omega) = 1/Z(j\omega)$ - комплексные входные сопротивление и проводимость.

В общем случае (рисунок 16.3) спектральную плотность реакции цепи (напряжение $U_2(j\omega)$ или ток $I_2(j\omega)$ произвольного элемента цепи) вычисляют по спектральной плотности входного воздействия по формулам (16.11):



Рисунок 16.3

$$\begin{aligned} U_2(j\omega) &= H_U(j\omega)U_1(j\omega), \quad I_2(j\omega) = H_Y(j\omega)U_1(j\omega); \\ U_2(j\omega) &= H_Z(j\omega)I_1(j\omega), \quad I_2(j\omega) = H_I(j\omega)I_1(j\omega) \end{aligned} \quad (16.11)$$

где $U_1(j\omega)$, $I_1(j\omega)$ - спектры непериодических входных воздействий (напряжения и тока);

$H_U(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$; $H_Y(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$; $H_Z(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{I_1(j\omega)}$; $H_I(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{I_1(j\omega)}$ - комплексные передаточные функции цепи.

Для расчёта комплексных передаточных функций цепи применяется комплексный метод, который применялся ранее для расчёта установившихся гармонических процессов.

16.5 Спектральный метод расчета переходных процессов

Спектральный метод может быть применён для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях, так как преобразования Фурье являются частным случаем преобразований Лапласа и получаются из него при $p \Rightarrow j\omega$.

Основные этапы расчета переходных процессов спектральным методом:

1. Определение спектральной плотности входного воздействия $F_1(j\omega)$;
2. Определение комплексной функции передачи цепи;
3. Определение спектральной плотности реакции цепи $F_2(j\omega)$;
4. Определение реакции цепи $f_2(j\omega)$, которая может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье, теоремы разложения или по таблицам.

17 Лекция 17. Основные понятия о трехфазных цепях, симметричные режимы трехфазных цепей.

Цель лекции: Рассмотреть основные понятия о трехфазных цепях и способах их соединения, а также изучить методику расчета симметричных режимов трехфазных цепей.

17.1 Понятие о трёхфазных источниках питания и трёхфазных цепях

На рисунке 17.1 схематично показано устройство генератора переменного тока с тремя обмотками на статоре. Ради упрощения каждая обмотка показана состоящей только из двух проводов, заложенных в диаметрально противоположные пазы статора. Эти провода на заднем торце статора соединены друг с другом (соединения показаны пунктиром). На переднем торце статора они оканчиваются зажимами A, X, B, Y, C, Z, которые служат для подсоединения внешней цепи.

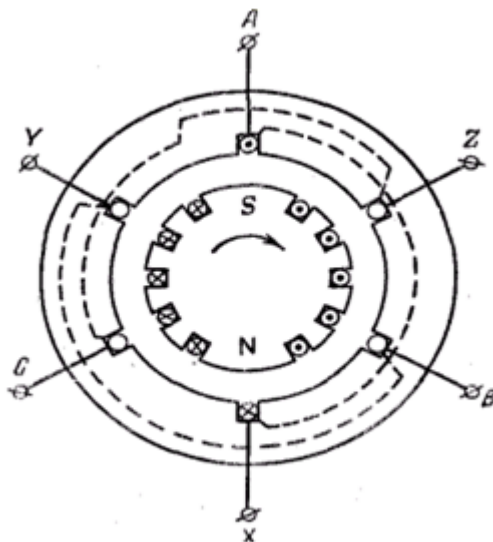


Рисунок 17.1

Наводимые в обмотках э.д.с. максимальны, когда ось полюсов ротора пересекает проводники статора. Для разных обмоток это происходит в различные моменты времени. Поэтому наводимые э.д.с. не совпадают по фазе.

Генераторы с несколькими обмотками, в которых наводятся э.д.с. одинаковой частоты, но сдвинутые относительно друг друга по фазе, называются многофазными генераторами.

Соответственно любые источники питания, имеющие несколько зажимов (полюсов), между которыми создаются напряжения одной и той же частоты, сдвинутые относительно друг друга по фазе, называются многофазными источниками питания. Совокупность электрических цепей с многофазными источниками питания называется многофазной системой электрических цепей. Отдельные ее части называются фазами, например, отдельные обмотки генератора называют фазными обмотками или, кратко, фазами генератора. Таким образом, в электротехнике термин “фаза” имеет два различных значения: он является понятием, характеризующим стадию периодического процесса и,

с другой стороны, наименованием составной части многофазной системы электрических цепей.

По числу фаз многофазные источники питания и системы цепей подразделяются на двух-, трех-, четырехфазные и т. д. В соответствии с этой классификацией генератор с тремя обмотками (рисунок 17.1) - трехфазный, а цепи переменного тока, рассмотренные в предыдущих главах, можно назвать однофазными.

В электроэнергетике вследствие наибольшей экономичности и технического совершенства применяются почти исключительно трехфазные цепи. В установках, преобразующих переменный ток в постоянный, встречаются шести- и двенадцати фазные цепи. В автоматике и телемеханике применяются двухфазные цепи.

Крайним точкам фазных обмоток генераторов дают наименования “начало” и “конец”. В трехфазных генераторах “начала” обозначим первыми буквами латинского алфавита А, В и С, а “концы” - последними буквами Х, У и Z. При разметке руководствуются следующим условием: при одинаковых положительных направлениях э.д.с. во всех обмотках от “концов” к “началам” (или от “начал” к “концам”) э.д.с. должны быть сдвинуты по фазе друг относительно друга симметрично. Поясним сказанное на примере трехфазного генератора. Покажем, что разметка концов фазных обмоток на рисунке 17.1 удовлетворяет принятому условию, т.е. что э.д.с. в фазах А, В и С сдвинуты друг относительно друга симметрично на $1/3$ периода. Выберем положительные направления э.д.с. во всех обмотках от концов к началам. В момент времени, соответствующий положению ротора, показанному на рисунке 17.1, э.д.с. в обмотке А максимальна и имеет направление, которое принято положительным, т.е. в этот момент э.д.с. в обмотке А достигает положительного максимума. Положительный максимум э.д.с. в обмотке В наступит позже, когда ротор повернется на $1/3$ оборота. Так как один оборот ротора двухполюсного генератора соответствует одному периоду изменения э.д.с. в любой обмотке, то поворот ротора на $1/3$ оборота соответствует $1/3$ периода и, следовательно, э.д.с. в обмотке В отстает по фазе от э.д.с. в обмотке А на $1/3$ периода. Рассуждая аналогично, можно убедиться, что э.д.с. в обмотке С отстает по фазе от э.д.с. в обмотке В также на $1/3$ периода.

На рисунке 17.2 показаны векторная диаграмма и график мгновенных э.д.с. трехфазного генератора.

Порядок, в котором э.д.с. в фазных обмотках генератора проходят через одинаковые значения, например через положительные максимумы, называют последовательностью фаз или порядком чередования фаз. При указанном на рисунке 17.1 направлении вращения ротора получаем последовательность фаз АВС. Если изменить направление вращения ротора на противоположное, то последовательность фаз получится обратной. У генераторов роторы вращаются всегда в одном направлении, поэтому последовательность фаз никогда не изменяется и может быть раз навсегда установлена и обозначена.

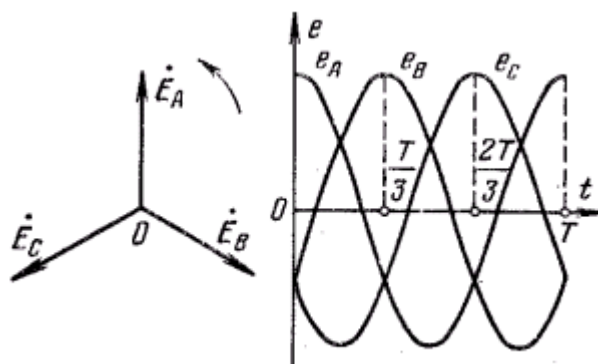


Рисунок 17.2

Ее обозначение связывают с наименованием фаз. Наименования устанавливаются первыми буквами латинского алфавита, причем таким образом, чтобы нормальный порядок букв (А, В и С) соответствовал последовательности фаз.

Рассмотренная совокупность э.д.с. в обмотках трехфазного генератора называется трехфазной системой э.д.с. Совокупности э.д.с. (напряжений, токов) в многофазных цепях называют многофазными системами э.д.с. (напряжений, токов). Эти системы называют симметричными, если все э.д.с. (напряжения, токи) равны по величине и если каждая э. д. с. (напряжение, ток) отстает по фазе от предыдущей э.д.с. (напряжения, тока) на один и тот же фазный угол, равный $2\pi/m$, где m - число фаз.

На рисунке 17.3, а в качестве примера приведена векторная диаграмма симметричной системы э.д.с. шестифазного генератора.

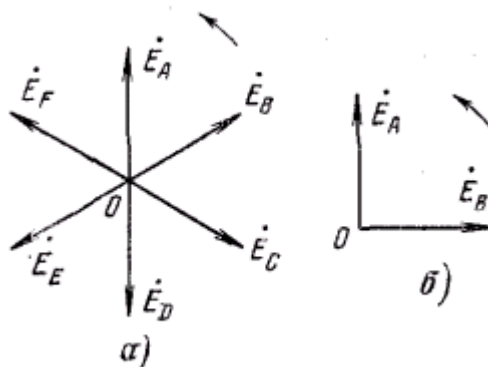


Рисунок 17.3

Двухфазные генераторы изготавливаются таким образом, чтобы э.д.с. в одной из обмоток была сдвинута по фазе относительно э.д.с. другой обмотки на $1/4$ периода. Векторная диаграмма системы э.д.с. двухфазного генератора приведена на рисунке 17.3, б, эта система э.д.с. несимметрична.

17.2 Соединения звездой и треугольником

Существуют два основных способа соединения обмоток генераторов, трансформаторов и приемников в трёхфазных цепях: соединение звездой и соединение треугольником. Например, соединение генератора и приемника звездой показано на рисунке 17.4, а соединение треугольником - на рисунке 17.5.

При соединении звездой (рисунок 17.4) все “концы” фазных обмоток генератора соединяют в одну общую точку. Общие точки обмоток генератора и ветвей звезды приемника называют нейтральными или нулевыми точками, а соединяющий их провод - нейтральным или нулевым проводом. Остальные провода, соединяющие обмотки генератора с приемником, называют линейными.

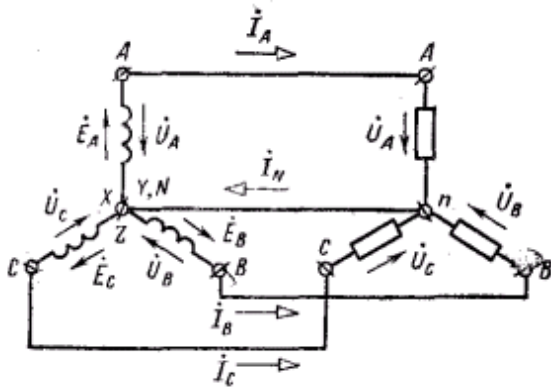


Рисунок 17.4

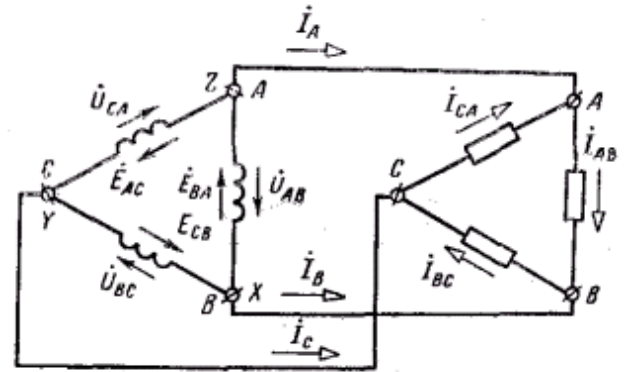


Рисунок 17.5

При соединении треугольником (рисунок 17.5) фазные обмотки генератора соединяются последовательно таким образом, чтобы “начало” одной обмотки соединялось с “концом” другой обмотки. Общие точки каждой пары фазных обмоток генератора и общие точки каждой пары ветвей приемника соединяются проводами, носящими название линейных проводов. На первый взгляд может показаться, что соединение обмоток генератора в треугольник равносильно короткому замыканию, как это было бы при подобном соединении, например, гальванических элементов. На самом деле, при симметричной системе э.д.с. сумма э.д.с., действующих в контуре треугольника, в любой момент времени равна нулю. Убедиться в этом можно хотя бы из рассмотрения векторной диаграммы и кривых мгновенных значений э.д.с. для трехфазного генератора (рисунок 17.2).

Схемы соединения обмоток источников питания и приемников не зависят друг от друга. В одной и той же цепи могут быть источники питания и приемники с разными схемами соединений. Лучи звезды или ветви треугольника приемника называют фазами приемника, а сопротивления фаз приемника – фазными сопротивлениями. Электродвижущие силы, наводимые в фазных обмотках генератора или трансформатора, напряжения на их зажимах, напряжения на фазах приемника и токи в них называют соответственно фазными э.д.с., напряжениями и токами (E_{ϕ} , U_{ϕ} , I_{ϕ}). Напряжения между линейными проводами и токи в них называют линейными напряжениями и токами ($U_{\text{л}}$, $I_{\text{л}}$). При соединении фаз звездой линейные токи равны фазным $I_{\text{л}} = I_{\phi}$. При соединении фаз треугольником линейное напряжение между проводами, присоединенными к одной и той же фазе приемника или источника питания, равно соответствующему фазному напряжению $U_{\text{л}} = U_{\phi}$.

Положительные направления токов во всех линейных проводах выберем одинаковыми от источника питания к приемнику, а в нейтральном проводе –

от нейтральной точки приемника к нейтральной точке источника питания. Положительные направления э.д.с. и токов в ветвях треугольника источника питания будем обычно выбирать в направлении АСВА, а напряжений и токов в ветвях треугольника приемника – в направлении АВСА {рисунок 17.5).

Трёхфазную цепь и трёхфазный приемник называют симметричными, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы. В противном случае их называют несимметричными.

Если к симметричной трехфазной цепи приложена симметричная система напряжений, то получается симметричная система токов. Режим трёхфазной цепи, при котором трёхфазные системы напряжений и токов симметричны, называется симметричным режимом.

17.3 Симметричный режим трехфазной цепи

На рисунке 17.6 приведены топографическая диаграмма и векторная диаграмма токов при симметричном режиме для схемы по рисунку 17.4 и индуктивном характере нагрузки ($\varphi > 0$).

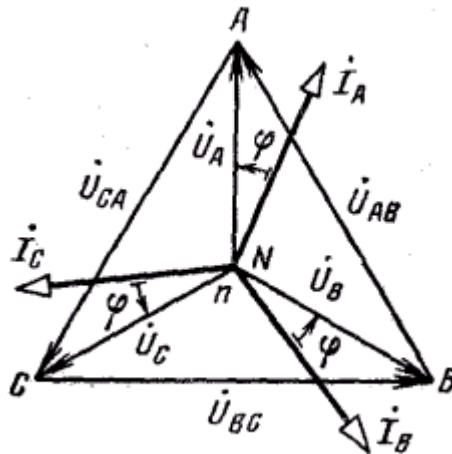


Рисунок 17.6

Ток в нейтральном проводе отсутствует: $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Поэтому при симметричном приемнике нейтральный провод не применяют. Линейные напряжения определяются как разности фазных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (17.1)$$

Из равнобедренного треугольника ANB имеем:

$$U_{AB} = 2U_A \cos \angle NAB = 2U_A \cos 30^\circ, \text{ или } U_\pi = \sqrt{3}U_\phi. \quad (17.2)$$

На рисунке 17.7 приведены векторные диаграммы напряжений и токов при симметричном режиме и $\varphi > 0$ для схемы рисунка 17.5.

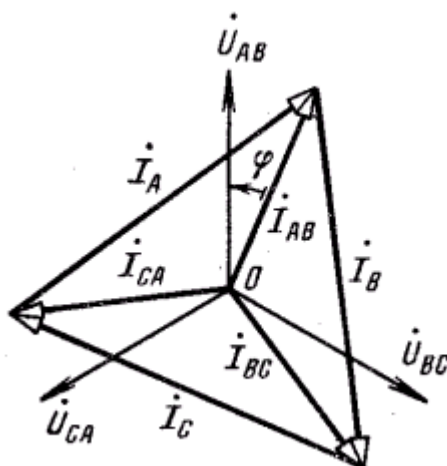


Рисунок 17.7

Линейные токи определяются как разности фазных токов:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}, \quad (17.3)$$

Причем

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi. \quad (17.4)$$

Активная мощность симметричного трехфазного приемника

$$P = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi. \quad (17.5)$$

Принимая во внимание, что при соединении ветвей приемника звездой

$$U_\phi = U_L / \sqrt{3} \quad \text{и} \quad I_\phi = I_L,$$

а при соединении ветвей приемника треугольником $U_\phi = U_L$ и $I_\phi = I_L / \sqrt{3}$, получим независимо от вида соединения:

$$P = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Следует помнить, что в этом выражении φ - сдвиг по фазе между фазным напряжением и фазным током.

Аналогично для реактивной и полной мощностей симметричного трехфазного приемника имеем:

$$Q = 3 U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi; \quad (17.6)$$

$$S = 3 U_\phi I_\phi = \sqrt{3} U_L I_L. \quad (17.7)$$

18 Лекция 18. Расчет симметричных и несимметричных режимов трехфазных цепей.

Цель лекции: Изучить методику расчета симметричных и несимметричных режимов трехфазных цепей со статической нагрузкой.

18.1 Расчет симметричных режимов трехфазных цепей

Для ознакомления с расчетами симметричных режимов рассмотрим порядок расчета токов в симметричной цепи рисунке 18.1. Пусть напряжения на зажимах источника питания симметричны и заданы и пусть известны сопротивления всех-элементов цепи 1, 2, 3 и 4. Для выполнения расчета проще всего преобразовать схему, заменив соединения треугольниками источника питания и элементов 4 на соединения звездами. Сопротивления фаз симметричной звезды в 3 раза меньше сопротивлений фаз эквивалентного симметричного треугольника. Фазные напряжения эквивалентного источника питания, соединенного звездой, в $\sqrt{3}$ раз меньше заданных линейных напряжений. Таким образом, получим схему, показанную на рисунке 18.2.

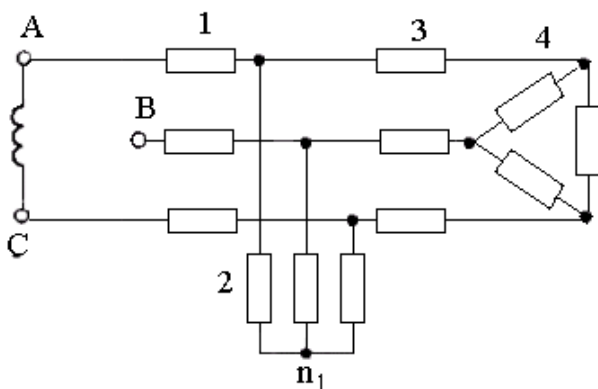


Рисунок 18.1

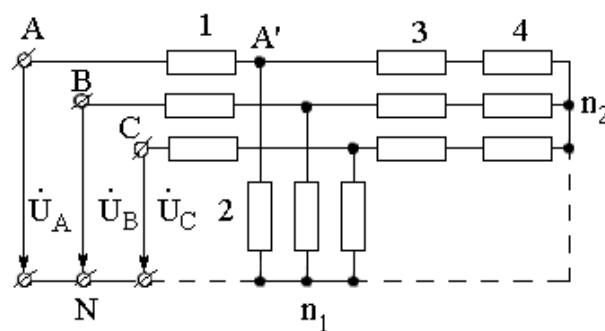


Рисунок 18.2

Все нейтральные точки в симметричном режиме имеют одинаковый потенциал. Поэтому, не нарушая режима схемы, соединим их проводом без сопротивления (показан пунктиром). Затем удалим из схемы две фазы, например В и С, и перейдем к схеме по рисунку 18.3. Это не изменит режима оставшейся фазы А.

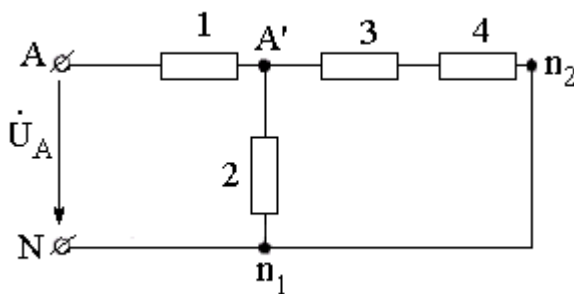


Рисунок 18.3

Действительно, уравнения, составленные по законам Кирхгофа, для узла A' и для контуров $AA'n_1N$ и $A'n_2n_1A'$ для схем, показанных на рисунках

18.2 и 18.3, одинаковы, а следовательно, токи и напряжения в фазе А обеих схем также одинаковы. Токи в фазе А легко рассчитывают по однофазной схеме (рисунок 18.3), например, методом ее дальнейшего преобразования - заменой параллельного соединения ветвей $A'n_2$ и $A'n_1$, эквивалентным сопротивлением. Токи в фазах В и С по модулю такие же, что и в фазе А. Токи в ветвях треугольника 4 в $\sqrt{3}$ раз меньше токов в элементах 3 (в каждом из элементов любой из групп ток сдвинут по фазе по отношению к токам в других элементах той же группы на равные углы $+120^\circ$ или -120°).

Для расчета симметричных режимов в сложных разветвленных трехфазных цепях широко применяют моделирование соответствующих однофазных схем.

18.2 Расчет несимметричных режимов трехфазных цепей со статической нагрузкой

При расчете симметричных режимов трехфазных цепей двигателя можно заменять эквивалентными схемами, состоящими из трех одинаковых сопротивлений, соединенных звездой или треугольником. Падения напряжения в фазах генератора могут учитываться как напряжения на трех одинаковых сопротивлениях.

Такие простые эквивалентные схемы для двигателей и такой простой учет падений напряжения в генераторах оказываются непригодными для расчета несимметричных режимов. Анализ процессов в трехфазных электрических машинах (двигателях и генераторах) при несимметричных режимах показывает, что для них справедливы более сложные эквивалентные схемы, не удовлетворяющие принципу взаимности. В настоящее время для расчета несимметричных режимов в трехфазных цепях с трехфазными двигателями почти исключительно пользуются специальным методом расчета - методом симметричных составляющих, который будет рассмотрен далее.

В этом параграфе ограничимся исследованием несимметричных режимов цепей при следующих двух условиях:

- 1) имеется только статическая нагрузка (нет электродвигателей);
- 2) падения напряжения в генераторах не учитываются.

При двух указанных ограничениях расчеты несимметричных режимов трехфазных цепей не содержат ничего принципиально нового и могут выполняться любыми методами, известными из предыдущих глав. Последующее содержание параграфа иллюстрирует это положение на ряде частных примеров.

Пусть заданы несимметричные фазные напряжения U_A , U_B и U_C на зажимах несимметричного приемника (рисунок 18.4).

Определим токи. Заданные напряжения можно всегда приписать источникам э.д.с. (показаны пунктиром)

$$\dot{E}_A = \dot{U}_A; \quad \dot{E}_B = \dot{U}_B \quad \text{и} \quad \dot{E}_C = \dot{U}_C.$$

В схеме два узла, поэтому целесообразно применить для расчета метод узловых потенциалов.

Обозначая напряжение между нейтральными точками приемника и источника питания через \dot{U}_{nN} получаем:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}, \quad (18.1)$$

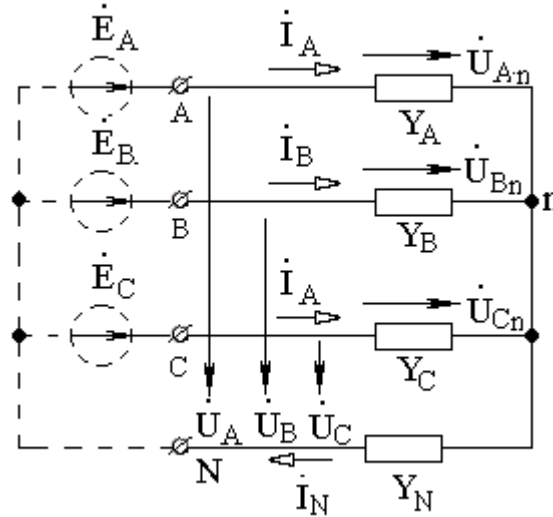


Рисунок 18.4

где Y_A, Y_B, Y_C, Y_N - проводимости ветвей;

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= Y_A (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}); & \dot{I}_B &= Y_B (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}), \\ \dot{I}_C &= Y_C (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}); & \dot{I}_N &= Y_N \dot{U}_{nN} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

В предельном случае при $Y_A = \infty$, т.е. $Z_N = 0$, имеем $\dot{U}_{nN} = 0$ и, следовательно, напряжения на фазах приемника равны фазным напряжениям источника питания. При этом условии ток в каждой фазе может быть подсчитан по закону Ома независимо от токов остальных фаз.

При отсутствии нейтрального провода расчет можно вести в таком же порядке. Изменится лишь выражение для напряжения \dot{U}_{nN} , поскольку $Y_N = 0$, а именно

$$\dot{U}_{nN} = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C}, \quad (18.3)$$

Однако обычно при отсутствии нейтрального провода бывают заданы не фазные, а линейные напряжения на зажимах цепи. Сумма линейных напряжений равна нулю, как сумма напряжений вдоль замкнутого контура, соединяющего зажимы А, В и С:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0.$$

Учитывая эту связь, достаточно задать два линейных напряжения. Можно, например, их задать двумя источниками напряжения (рисунок 2.5) с э.д.с.

$$\dot{E}_B = \dot{U}_{BA} \text{ и } \dot{E}_C = \dot{U}_{CA}.$$

Тогда, принимая во внимание, что потенциалы точек N и A одинаковы, имеем:

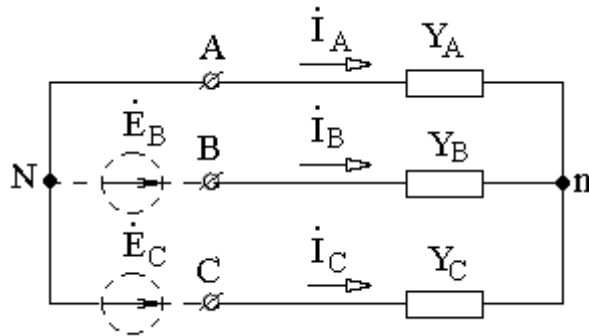


Рисунок 18.5

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= \frac{Y_B \dot{U}_{BA} + Y_C \dot{U}_{CA}}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ \dot{I}_A &= -Y_A \dot{U}_{nN}; \quad \dot{I}_B = Y_B (\dot{E}_B - \dot{U}_{nN}) = Y_B (\dot{U}_{BA} - \dot{U}_{nN}); \\ \dot{I}_C &= Y_C (\dot{E}_C - \dot{U}_{nN}) = Y_C (\dot{U}_{CA} - \dot{U}_{nN}) = -\dot{I}_A - \dot{I}_B. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Рассмотрим простейшую схему с несимметричным приемником; соединенным треугольником (рисунок 18.6). Если известны линейные напряжения между зажимами A', B', C', к которым присоединены сопротивления приемника, то задача определения токов элементарно проста. Ток в каждой ветви треугольника определяется по закону Ома, а затем находятся токи в проводах питающей линии.

Однако обычно бывают известны напряжения не на зажимах приемника, а на зажимах A, B, C источника питания, поэтому расчет несколько усложняется. Проще всего его провести, заменяя треугольник сопротивлений эквивалентной звездой. Тогда получается схема по рисунку 18.5 и токи в ней рассчитываются, как указано выше. По найденным токам определяются напряжения на зажимах треугольника в исходной схеме (рисунок 18.6) и затем токи в ветвях треугольника.

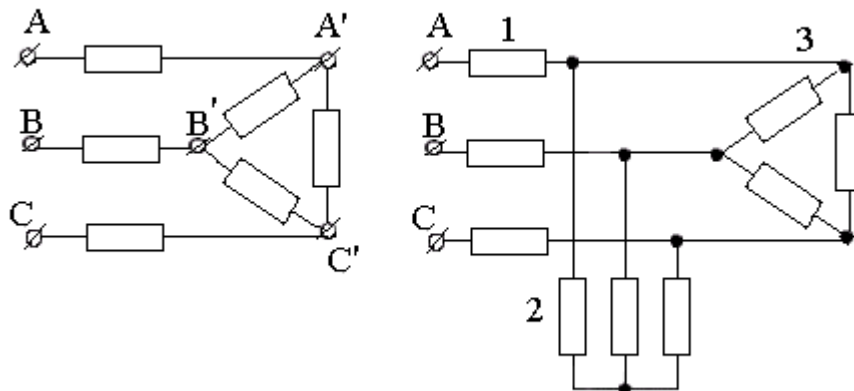


Рисунок 18.6

Рисунок 18.7

К преобразованию схемы следует прибегать и в случае цепи с несколькими приемниками, имеющими различные схемы соединений. Так, например, при расчете токов в цепи, представленной на рисунке 18.7, звезду 2 следует преобразовать в эквивалентный треугольник, ветви которого будут параллельны ветвям треугольника 3. После замены каждой пары параллельных ветвей треугольников одной ветвью получается рассмотренная выше схема (рисунок 18.6).

Заметим, что преобразование треугольника 3 в звезду не дало бы возможности продолжить упрощение схемы. Потенциалы нейтральных точек получившейся звезды и звезды 2 в общем случае различны и нейтральные точки этих звезд нельзя соединять друг с другом.

19 Лекция 19. Несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи

Цель лекции: линейные электрические цепи при несинусоидальных периодических токах.

19.1 Несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи

На практике э.д.с., напряжения и токи в большей или меньшей степени являются несинусоидальными. Это связано с тем, что реальные генераторы не обеспечивают, строго говоря, синусоидальной формы кривых напряжения, а с другой стороны, наличие нелинейных элементов в цепи обуславливает иска-

жение формы токов даже при синусоидальных ЭДС источников. В радиотехнике, вычислительной технике и т.п. применяются генераторы периодических несинусоидальных импульсов.

В общем случае характер изменения несинусоидальных величин может быть периодическим, почти периодическим и непериодическим. В данной лекции будут рассматриваться цепи только с несинусоидальными периодическими э.д.с., напряжениями и токами.

В качестве примера (рисунок 19.1,а) представлена цепь с нелинейным резистором (НР), нелинейная вольт-амперная характеристика (ВАХ) которого обуславливает несинусоидальную форму тока i в цепи при синусоидальном напряжении u на ее входе (рисунок 19.1,б).

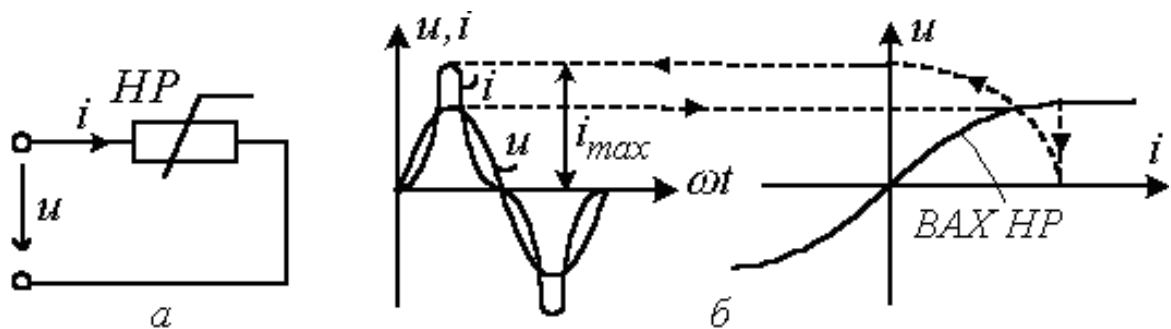


Рисунок 19.1

19.2 Разложение периодических несинусоидальных кривых в ряд Фурье

Периодическая функция $f(t) = f(t + T)$

где T – период, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (19.1)$$

Здесь A_0 – постоянная составляющая или нулевая гармоника;

$c_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ – первая (основная) гармоника, изменяющаяся с угловой частотой $\omega = 2\pi/T$

где T – период несинусоидальной периодической функции.

В выражении (19.1) $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\tan \varphi_k = a_k / b_k$. Коэффициенты A_0 , a_k и b_k определяются по формулам

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt$$

Свойства периодических кривых, обладающих симметрией:

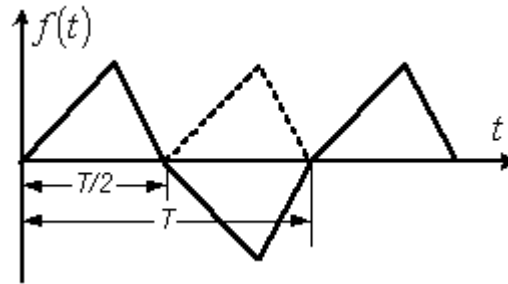


Рисунок 19.2

а) кривые, симметричные относительно оси абсцисс.

К данному типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству $f(t) = -f(t + T/2)$ (рисунок 19.2). В их разложении отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т.е. $A_0 = c_2 = c_4 = c_6 \dots = 0$;

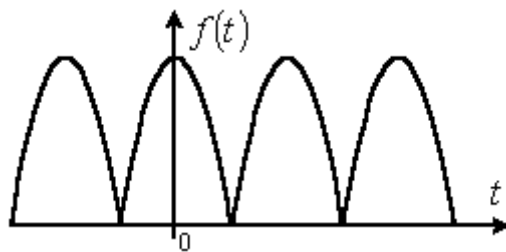


Рисунок 19.3

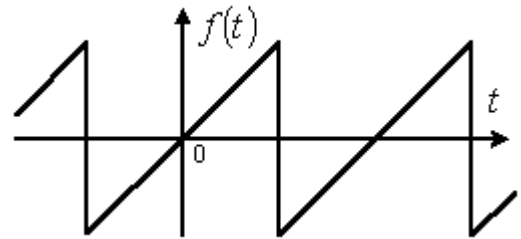


Рисунок 19.4

б) кривые, симметричные относительно оси ординат.

К данному типу относятся кривые, для которых выполняется равенство $f(t) = f(-t)$ (рисунок 19.3). В их разложении отсутствуют синусные составляющие, т.е. $b_k = 0$;

в) кривые, симметричные относительно начала координат.

К этому типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству $f(t) = -f(-t)$ (рисунок 19.4). При разложении таких кривых отсутствуют постоянная и косинусные составляющие, т.е. $A_0 = a_k = 0$.

20 Лекция 20. Линейные электрические цепи при несинусоидальных периодических токах

Цель лекции: изучение методов расчета линейных электрических цепей при несинусоидальных периодических токах.

20.1 Действующее значение периодической несинусоидальной переменной.

Действующее значение периодического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} . \quad (20.1)$$

Разложим периодический несинусоидальный ток в тригонометрический ряд

$$i(t) = I_0 + \sum_{K=1}^{\infty} I_{K\text{м}} \sin(k\omega t + \varphi_{ik}) \text{ и подставим в формулу (20.1), после преобразования получим } I = \sqrt{\sum_{K=0}^{\infty} I_K^2} . \quad (20.2)$$

Аналогичные выражения имеют место для э.д.с. напряжения

$$E = \sqrt{\sum_{K=0}^{\infty} E_K^2} , \quad U = \sqrt{\sum_{K=0}^{\infty} U_K^2} .$$

20.2 Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

Выразим мгновенные значения напряжения и тока в виде тригонометрических рядов

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k\text{м}} \sin(k\omega t + \alpha_k) \quad i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{k\text{м}} \sin(k\omega t + \beta_k) .$$

Тогда для активной мощности можно записать

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{k\text{м}} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{k\text{м}} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) \right] dt . \quad (20.3)$$

После интегрирования, получим:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{k\text{м}} I_{k\text{м}}}{2} \cos(\psi_{uk} - \psi_{ik}) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k . \quad (20.4)$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармонических

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k .$$

Аналогично для реактивной мощности можно записать

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k .$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}.$$

Для несинусоидального тока $S^2 \geq P^2 + Q^2$.

20.3 Расчёт цепей с несинусоидальными периодическими э.д.с., напряжениями, токами

Расчёт линейных электрических цепей несинусоидального тока распадается на три этапа:

а) разложение несинусоидальных э.д.с. и токов источников на постоянную и синусоидальные составляющие (т.е. в тригонометрический ряд Фурье);

б) применение принципа наложения и расчет токов и напряжений в цепи для каждой из составляющих в отдельности. При расчете цепи с постоянными составляющими э.д.с. и тока источника следует учитывать, что индуктивное сопротивление равно 0 и индуктивность в эквивалентной схеме заменяется короткозамкнутым участком, а ёмкостное равно ∞ и ветвь с ёмкостью размыкается. При расчете цепи для каждой синусоидальной составляющей э.д.с. и тока источника можно пользоваться комплексным методом, но недопустимо сложение комплексных токов и напряжений различных синусоидальных составляющих. Необходимо учитывать, что индуктивное и емкостное сопротивления для различных частот неодинаковы, индуктивное сопротивление для k -й гармоники равно: $x_{L_k} = k\omega L = kx_{L_1}$, а емкостное сопротивление для k -й гармоники

равно: $x_{C_k} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{x_{C_1}}{k}$;

в) совместное рассмотрение решений, полученных для каждой из составляющих. Причём суммируются только мгновенные значения составляющих токов и напряжений.

21 Лекция 21. Нелинейные электрические цепи постоянного тока

Цель лекции: определение нелинейных резистивных элементов и их характеристики.

21.1 Нелинейные резистивные элементы и их характеристики.

При постоянных токах и напряжениях в качестве нелинейных могут рассматриваться только резистивные электрические цепи.

Резистивными нелинейными цепями называются цепи, содержащие хотя бы один нелинейный резистивный элемент (НЭ) хотя бы один источник напряжения или тока и линейные сопротивления. Нелинейным резистивным элементом называется резистивный элемент с нелинейной ВАХ.

По виду ВАХ нелинейные резистивные элементы можно разбить на две основные группы: симметричные и несимметричные. Симметричными называются нелинейные резистивные элементы, у которых ВАХ не зависит от направления тока в них и напряжения на их зажимах: $I(U) = -I(-U)$ (рисунок 21.1 а).

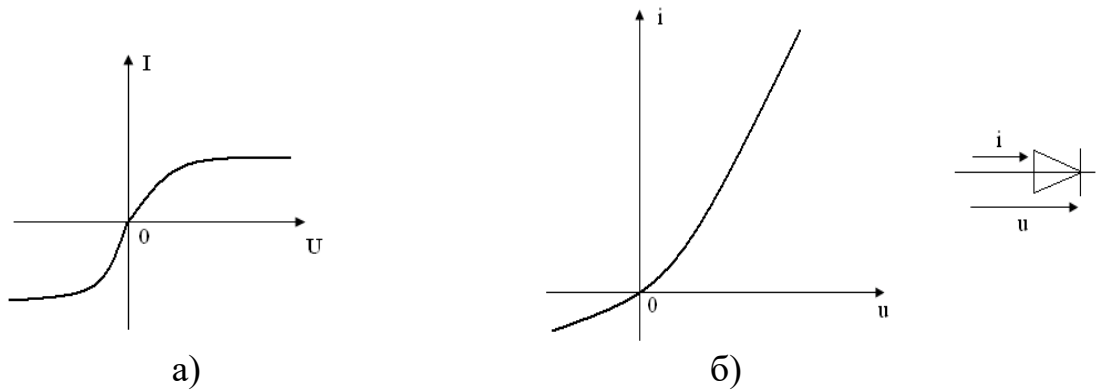


Рисунок 21.1

Несимметричными называются нелинейные резистивные элементы, у которых ВАХ неодинаковы при различных направлениях тока и напряжения на зажимах (рисунок 21.1 б).

21.2 Статическое и дифференциальное сопротивление

Различают два вида сопротивлений нелинейных резистивных элементов: статическое и дифференциальное (динамическое).

21.2.1 Статическое сопротивление.

Статическое сопротивление определяется по формуле:

$$R_{\text{ст}} = \frac{U_0}{I_0} = m_R \operatorname{tg} \beta \quad (21.1)$$

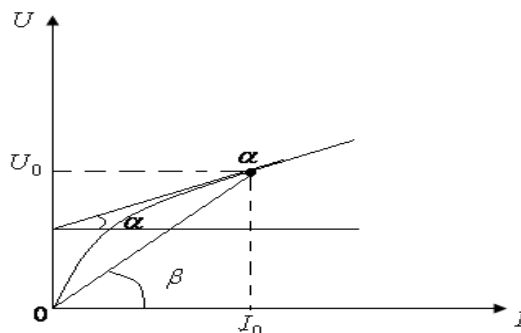


Рисунок 21.2

21.2.2 Дифференциальное сопротивление

Дифференциальное сопротивление определяется по формуле:

$$R_g = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} = m_R \operatorname{tg} \alpha, \quad (21.2)$$

Дифференциальное сопротивление может быть как положительным $R_g > 0$ (на восходящем участке ВАХ), так и отрицательным $R_g < 0$ (на падающем участке ВАХ).

21.3 Вольт – амперные характеристики активного нелинейного двухполюсника.

Нелинейный активный двухполюсник (рисунок 21.3) содержит один нелинейный резистор с ВАХ, изображенной на рисунке 21.4 и один идеальный источник ЭДС.

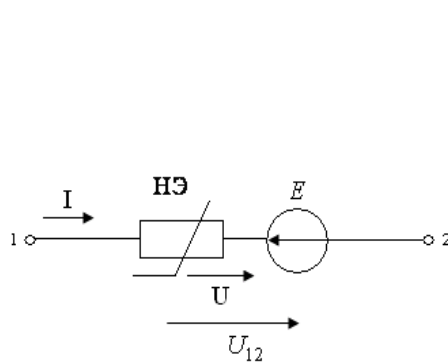


Рисунок 21.3

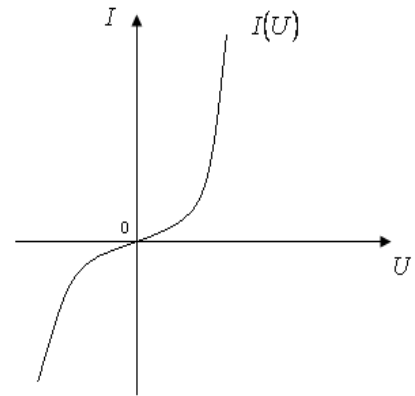


Рисунок 21.4

Для построения ВАХ активного нелинейного $I(U_{12})$ определяется напряжения $U_{12} = E + U$.

Пользуясь вольт – амперной характеристикой нелинейного резистора $I(U)$ построим вольт – амперную характеристику $I(U_{12}) = I(E + U)$, абсциссы которой получены сложением абсцисс ВАХ $I(U)$ и ЭДС E для различных значений тока (рисунок 21.5).

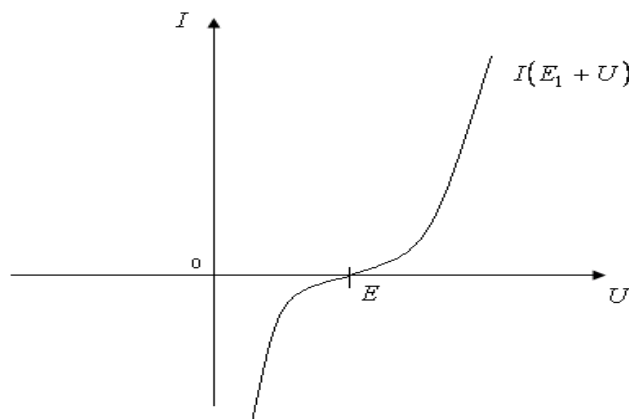


Рисунок 21.5

При изменении положительного направления ЭДС E кривая $I(U_{12})$ получается путем сдвига ВАХ нелинейного резистора $I(U)$ влево на величину

равную E . При изменении положительного направления тока на противоположное в активном нелинейном двухполюснике (рисунок 21.3) кривая $I(U_{12})$ получается путем зеркального отображения ВАХ $I(U)$ с последующим сдвигом вправо на величину E , т.к. в этом случае $U_{12} = E - U$.

22 Лекция 22. Графические методы расчета нелинейных резистивных цепей.

Цель лекции: освоение графических методов расчета нелинейных резистивных цепей.

22.1 Графический метод расчета неразветвленных цепей с нелинейными резистивными элементами.

К цепи (рисунок 22.1) с последовательным соединением двух нелинейных резисторов НЭ1 и НЭ2, ВАХ которых $I_1(U_1), I_2(U_2)$ приложено постоянное напряжения $E = U$. Требуется определить ток I и напряжения U_1 и U_2 на элементах НЭ1 и НЭ2.

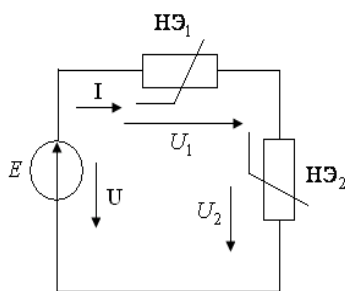


Рисунок 22.1

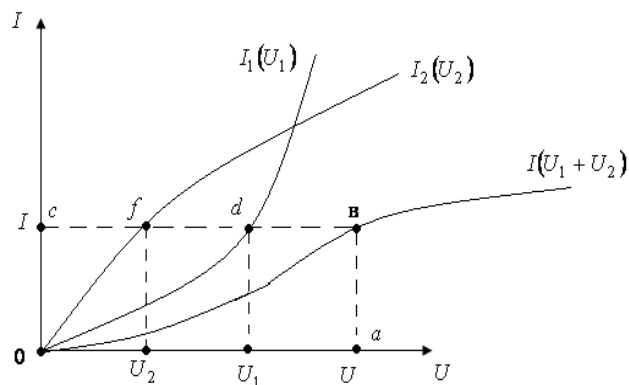


Рисунок 22.2

Запишем второй закон Кирхгофа для нелинейной цепи (рисунок 22.1):

$$U = U_1 + U_2,$$

Ток в обоих элементах один и тот же $I_1 = I_2 = I$.

Построим ВАХ $I(U) = I(U_1 + U_2)$, для построения которой просуммируем напряжения U_1 и U_2 при одинаковых значениях тока (рисунок 22.2). Отложим на оси абсцисс напряжение $U = E$ из точки а проведем прямую параллельно оси ординат до пересечения с кривой $I(U_1 + U_2)$. Отрезок ав равен в масштабе m_I току I : $I = m_I av$. Из точки в проводим прямую вс, параллельную оси абсцисс, в результате получим отрезки cd и cf , равные в масштабе m_u напряжениям U_1 и U_2 : $U_1 = m_u cd, U_2 = m_u cf$.

22.2 Графический метод расчета цепей с параллельным соединением нелинейных элементов. К цепи (рисунок 22.3) с параллельным соединением нелинейных резистивных элементов НЭ1 и НЭ2 с вольт – амперными характеристиками $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ (рисунок 22.4) приложено постоянное напряжение U .

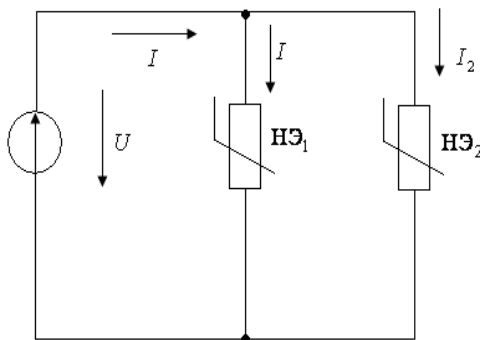


Рисунок 22.3

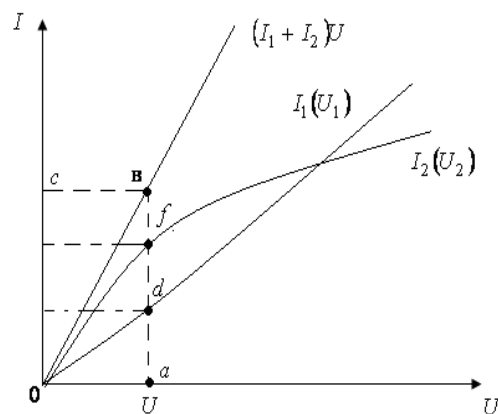


Рисунок 22.4

При параллельном соединении $U_1 = U_2 = U$ и согласно первому закону Кирхгофа.

$$I = I_1 + I_2 \quad (22.1)$$

Если задано напряжение U , то токи I_1 и I_2 в нелинейных элементах определяются по ВАХ $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$, а ток в неразветвленной части цепи на основании уравнения (22.1).

Если задан ток I , то для определения напряжения U и токов I_1, I_2 строят вспомогательную характеристику $(I_1 + I_2)U$ и путем суммирования ординат кривых $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ для одних и тех же значений напряжения $U_1 = U_2$. Далее откладывается на оси ординат O_C , равный в масштабе m току I , из точки c проводим с характеристикой $(I_1 + I_2)U$, полученный отрезок $cb = O_C$ равен в масштабе m_u напряжению $U = m_u O_a$. Из точки b проведем прямую ba до пересечения с осью абсцисс, получим отрезки ad и af , которые в масштабе m_I равны токам I_1 и I_2 : $I_1 = m_I ad, I_2 = m_I af$.

23 Лекция 23. Графические методы расчета нелинейных резистивных цепей.

Цель лекции: освоение графических методов расчета нелинейных резистивных цепей.

23.1 Цепь с последовательно-параллельным (смешанным) соединением резистивных элементов

Расчет таких цепей производится в следующей последовательности. Исходная схема сводится к цепи с последовательным соединением резисторов, для чего строится результирующая ВАХ параллельно соединенных элементов,

как это показано выше. Проводится расчет полученной схемы с последовательным соединением резистивных элементов, на основании которого затем определяются токи в исходных параллельных ветвях.

23.2 Графический метод двух узлов

Для цепей, содержащих два узла или сводящихся к таковым, можно применять метод двух узлов. При графическом способе реализации метода он заключается в следующем. Строятся графики зависимостей $I_i(U_{mn})$ токов во всех i -х ветвях в функции общей величины – напряжения U_{mn} между узлами m и n , для чего каждая из исходных кривых $I_i(U_i)$ смещается вдоль оси напряжений параллельно самой себе, чтобы ее начало находилось в точке, соответствующей ЭДС E_i в i -й ветви, а затем зеркально отражается относительно перпендикуляра, восстановленного в этой точке. Определяется, в какой точке графически реализуется первый закон Кирхгофа $\sum I_i(U_{mn}) = 0$. Соответствующие данной точке токи являются решением задачи.

23.3 Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора

Если в сложной электрической цепи имеется одна ветвь с нелинейным резистором, то определение тока в ней можно проводить на основе теоремы об активном двухполюснике (методом эквивалентного генератора). Идея решения заключается в следующем. Ветвь, содержащая нелинейный резистор, выделяется из исходной цепи, а вся остальная, уже линейная, схема представляется в виде активного двухполюсника (АД). Согласно теореме об АД схему линейного АД по отношению к зажимам 1-2 выделенной ветви (рисунок 23.1,а) можно представить эквивалентным генератором (рисунок 23.1,б) с ЭДС, равной напряжению U_{xx1-2} на зажимах 1-2 при разомкнутой ветви с нелинейным резистором, и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению линейного двухполюсника. Последняя схема рассчитывается, например, графическим методом как цепь с последовательным соединением элементов.

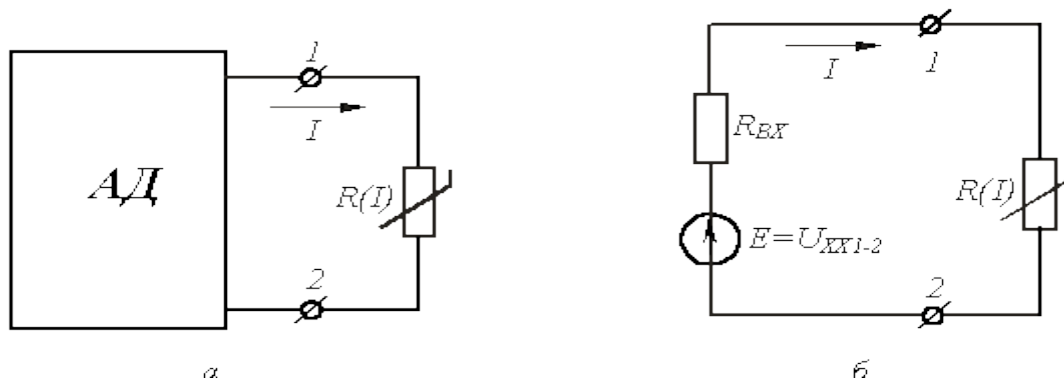


Рисунок 23.1

Если необходимо также найти токи в линейной части исходной цепи, то после расчета нелинейной схемы на рисунке 23.1,б в соответствии с теоремой о компенсации нелинейный резистор заменяется источником ЭДС или тока, после чего проводится анализ полученной линейной цепи любым известным методом.

24 Лекция 24. Аналитические методы расчета нелинейных резистивных цепей.

Цель лекции: освоение аналитических методов расчета нелинейных резистивных цепей.

Метод аналитической аппроксимации основан на замене характеристики (или ее участка) нелинейного элемента общим аналитическим выражением. Применяются следующие виды аналитической аппроксимации: степенным многочленом; трансцендентными (экспоненциальными, гиперболическими, тригонометрическими) функциями (рисунок 24.1). Выбор коэффициентов (a, b, c, \dots) осуществляется исходя из наибольшего соответствия аналитического выражения рабочему участку нелинейной характеристики. При этом

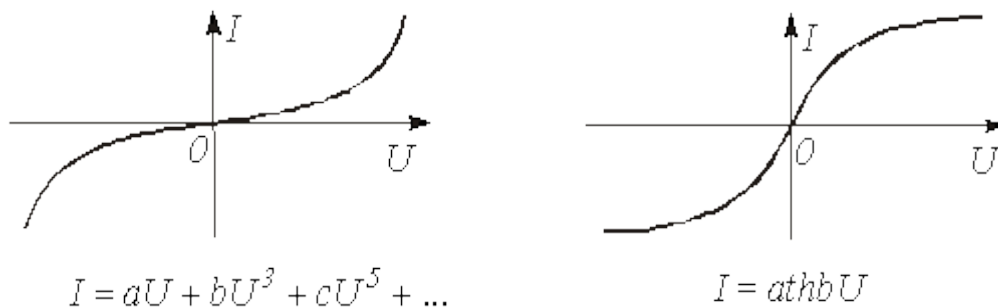


Рисунок 24.1

выбираются наиболее характерные точки, через которые должна пройти аналитическая кривая. Число точек равно числу коэффициентов в аналитическом выражении, что позволяет их однозначно определить.

Метод кусочно-линейной аппроксимации основан на представлении характеристики нелинейного элемента отрезками прямых линий (рисунок 24.2), в результате чего нелинейная цепь может быть описана линейными уравнениями с постоянными (в пределах каждого отрезка) коэффициентами.

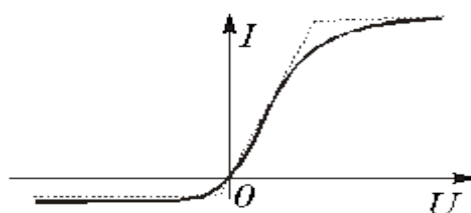


Рисунок 24.2

При наличии в цепи двух и более нелинейных резисторов реализация метода затруднена, так как в общем случае изначально неизвестно, на каких участках ломаных кривых находятся рабочие точки.

Метод линеаризации применим для анализа нелинейных цепей при малых отклонениях рабочей точки p (рисунок 24.3) от исходного состояния.

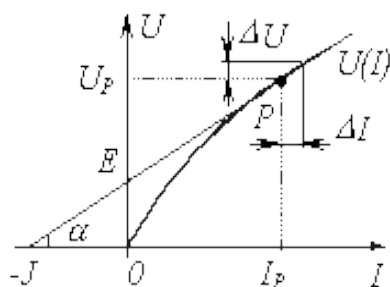


Рисунок 24.3

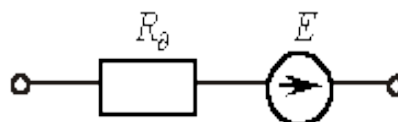


Рисунок 24.5

Идея метода заключается в замене нелинейного резистора линейным с сопротивлением, равным дифференциальному в заданной рабочей точке, и либо последовательно включенным с ним источником ЭДС, либо параллельно

включенным источником тока. Таким образом, линейризованной ВАХ (прямой на рисунке 24.3) соответствует последовательная схема замещения нелинейного резистора (рисунок 24.5).

25 Лекция 25. Основные понятия о четырехполюсниках, электрических фильтрах.

Цель лекции: освоить основные понятия о четырехполюсниках, электрических фильтрах.

Четырёхполюсником называется электрическая цепь или её часть, имеющая две пары зажимов (полюсов), для подключения к источнику и приемнику электрической энергии (рисунок 25.1).

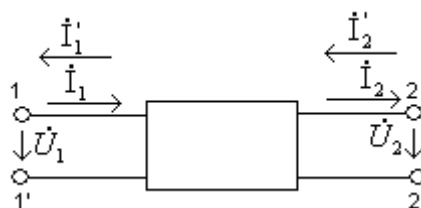


Рисунок 25.1

Уравнения определяющие зависимость между $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ называются уравнениями передачи четырёхполосника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{I}_1'; \\ \dot{I}_2' &= A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}_1'. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Параметры четырёхполосника:

\underline{Y} – параметры: $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{22}$;

\underline{Z} – параметры: $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{22}$;

A – параметры: $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$;

H – параметры: $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$.

Параметры четырёхполосника являются комплексными величинами, определяются только схемой четырёхполосника и её элементами; между различными системами параметров четырёхполосника существует однозначная связь.

Четырёхполосниками являются электрические фильтры, длинные линии, трансформаторы и т. д.

25.2 Электрические частотные фильтры и их классификация

Электрическим фильтром называется четырёхполосник, устанавливаемый между источником питания и нагрузкой и служащий для беспрепятственного (с малым ослаблением) пропускания токов одних частот и задержки (или пропускания с большим ослаблением) токов других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без ослабления (или с малым ослаблением), называется полосой пропускания или полосой прозрачности; диапазон частот, пропускаемых с большим ослаблением, называется полосой затухания или полосой задерживания. Качество фильтра считается тем выше, чем ярче выражены его фильтрующие свойства.

Т а б л и ц а 2 5 . 1 Классификация фильтров

Название фильтров	Диапазон пропускаемых частот
Низкочастотные фильтры (НЧФ)	$0 \leq \omega \leq \omega_{C1}$
Высокочастотные фильтры (ВЧФ)	$\omega_{C2} \leq \omega < \infty$

Полосовые фильтры (ПФ)	$\omega_{C1} \leq \omega \leq \omega_{C2}$
Заграждающие или режекторные фильтры (ЗФ или РФ)	$0 \leq \omega \leq \omega_{C1}$ и $\omega_{C2} \leq \omega < \infty$, где $\omega_{C1} < \omega_{C2}$

Частота ω_C называется частотой среза или граничной частотой.

Фильтры используются как в радиотехнике и технике связи, где имеют место токи достаточно высоких частот, так и в силовой электронике и электротехнике.

Применяются: пассивные LC-фильтры и RC-фильтры ; активные RC-фильтры (ARC-фильтры); цифровые фильтры.

26 Лекция 26. Основные понятия о цепях с распределенными параметрами.

Цель лекции: освоить основные понятия о цепях с распределенными параметрами.

Ранее рассматривались электрические цепи, геометрические размеры которых, а также входящих в них элементов не играли роли, т.е. электрические и магнитные поля были локализованы соответственно в пределах конденсатора и катушки индуктивности, а потери мощности – в резисторе. Однако на практике часто приходится иметь дело с цепями (линии электропередачи, передачи информации, обмотки электрических машин и аппаратов и т.д.), где электромагнитное поле и потери равномерно или неравномерно распределены вдоль всей цепи. В результате напряжения и токи на различных участках даже неразветвленной цепи отличаются друг от друга, т.е. являются функциями двух независимых переменных: времени t и пространственной координаты x . Такие цепи называются цепями с распределенными параметрами. Смысл дан-

ного названия заключается в том, что у цепей данного класса каждый бесконечно малый элемент их длины характеризуется сопротивлением, индуктивностью, а между проводами – соответственно емкостью и проводимостью.

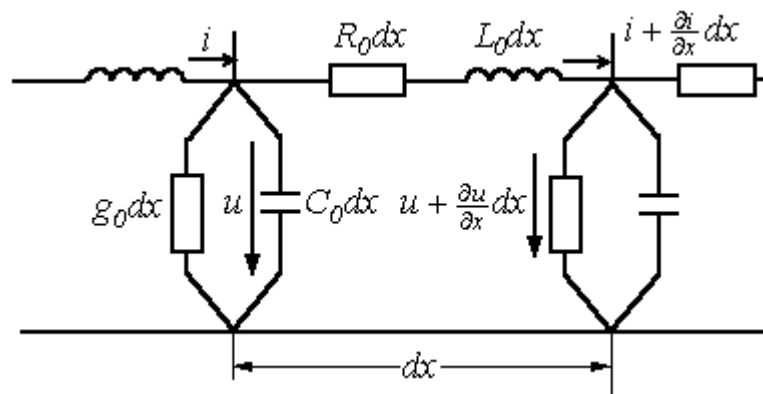


Рисунок 26.1

Для исследования процессов в цепи с распределенными параметрами (другое название – *длинная линия*) введем дополнительное условие о равномерности распределения вдоль линии ее параметров: индуктивности, сопротивления, емкости и проводимости. Такую линию называют *однородной*. Линию с неравномерным распределением параметров часто можно разбить на однородные участки.

27 Лекция 27. Основные понятия и законы магнитных цепей

Цель лекции: изучить основные характеристики и законы магнитных цепей.

27.1 Основные величины, описывающие магнитные цепи

Для концентрации магнитного поля и придания ему желаемой конфигурации отдельные части электротехнических устройств выполняются из ферромагнитных материалов. Эти части называют магнитопроводами или сердечниками. Магнитный поток создается токами, протекающими по обмоткам электротехнических устройств, реже – постоянными магнитами. Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела и образующих замкнутую цепь, вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции, называют магнитной цепью. Магнитное поле характеризуется тремя векторными величинами, которые приведены в таблице 27.1

Т а б л и ц а 27.1

Наименование	Обозначение	Единицы измерения	Определение
Вектор магнитной индукции	\vec{B}	Тл (тесла)	Векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на ток по закону Ампера
Вектор намагниченности	\vec{J}	А/м	Магнитный момент единицы объема вещества
Вектор напряженности магнитного поля	\vec{H}	А/м	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}$

Основные скалярные величины, используемые при расчете магнитных цепей, приведены в таблице 27.2.

Т а б л и ц а 27.2

Наименование	Обозначение	Единицы измерения	Определение
Магнитный поток	Φ	Вб (вебер)	Поток вектора магнитной индукции через поперечное сечение S магнитопровода $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$
Магнитодвижущая (намагничивающая) сила МДС (НС)	F	А	$F = Iw$, где I - ток в обмотке, w - число витков обмотки
Магнитное напряжение	U_M	А	Линейный интеграл от напряженности магнитного поля $U_M = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}$

27.2 Характеристики ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов характеризуются зависимостью $B(H)$ магнитной индукции от напряженности магнитного поля. При этом различают кривые намагничивания, представляющие собой однозначные зависимости $B(H)$, и гистерезисные петли - неоднозначные зависимости $B(H)$ (рисунок 27.1).

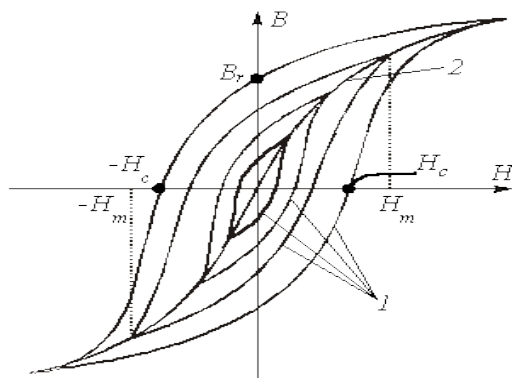


Рисунок 27.1

Перемагничивание ферромагнитного материала связано с расходом энергии на этот процесс. Площадь петли гистерезиса характеризует энергию, выделяемую в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания. В зависимости от величины этих потерь и соответственно формы петли гистерезиса ферромагнитные материалы подразделяются на магнитомягкие и магнитотвердые. Первые характеризуются относительно узкой петлей гистерезиса и круто поднимающейся основной кривой намагничивания; вторые обладают большой площадью гистерезисной петли и полого поднимающейся основной кривой намагничивания. Магнитомягкие материалы (электротехнические стали, железоникелевые сплавы, ферриты) определяют малые потери в сердечнике и применяются в устройствах, предназначенных для работы при переменных магнитных потоках (трансформаторы, электродвигатели). Магнитотвердые материалы (углеродистые стали, вольфрамовые сплавы) используются для изготовления постоянных магнитов.

27.3 Основные законы магнитных цепей

Закон (принцип) непрерывности магнитного потока: поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Закон полного тока: циркуляция вектора напряженности вдоль произвольного контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

При анализе магнитных цепей и, в первую очередь, при их синтезе обычно используют следующие допущения:

- магнитная напряженность, соответственно магнитная индукция, во всех точках поперечного сечения магнитопровода одинакова ($B = \Phi/S$);

- потоки рассеяния отсутствуют (магнитный поток через любое сечение неразветвленной части магнитопровода одинаков);

- сечение воздушного зазора равно сечению прилегающих участков магнитопровода. Это позволяет использовать при расчетах законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей, сформулированные в таблице 27.3.

Т а б л и ц а 27.3

Наименование закона	Аналитическое выражение закона	Формулировка закона
Первый закон Кирхгофа	$\sum \Phi = 0$	Алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитопровода равна нулю
Второй закон Кирхгофа	$\sum F = \sum U_M = \sum Hl$	Алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС, действующих в контуре
Закон Ома	$U_M = \Phi R_M,$ где $R_M = l / \mu_0 \mu S$	Падение магнитного напряжения на участке магнитопровода длиной l равно произведению магнитного потока и магнитного сопротивления R_M участка

Сформулированные законы и понятия магнитных цепей позволяют провести формальную аналогию между основными величинами и законами электрических и магнитных цепей, представленную в таблице 27.4.

Т а б л и ц а 27.4

Электрическая цепь	Магнитная цепь
Ток I, A	Поток Φ, Bb
ЭДС E, B	МДС (НС) F, A
Электрическое сопротивление $R, Ом$	Магнитное сопротивление $R_M, Гн^{-1}$
Электрическое напряжение U, B	Магнитное напряжение U_M, A
Первый закон Кирхгофа: $\sum I = 0$	Первый закон Кирхгофа: $\sum \Phi = 0$
Второй закон Кирхгофа: $\sum E = \sum U$	Второй закон Кирхгофа: $\sum F = \sum U_M$
Закон Ома: $U = IR$	Закон Ома: $U_M = \Phi R_M$

28 Лекция 28. Методы расчета магнитных цепей

Цель лекции: изучить основные методы расчета магнитных цепей.

28.1 Методы расчета магнитных цепей

Нелинейность магнитных цепей определяется нелинейным характером зависимости $\Phi(U_M)$, являющейся аналогом ВАХ $I(U)$ и определяемой характеристикой ферромагнитного материала $B(H)$. При расчете магнитных цепей при постоянных потоках обычно используют основную кривую намагничивания. При расчете магнитных цепей на практике встречаются две типичные задачи: задача определения величины намагничивающей силы (НС), необходимой для создания заданного магнитного потока (заданной магнитной индукции) на каком-либо участке магнитопровода (задача синтеза или “прямая” задача); задача нахождения потоков (магнитных индукций) на отдельных участках цепи по заданным значениям НС (задача анализа или “обратная” задача). Следует отметить, что задачи второго типа являются обычно более сложными и трудоемкими в решении.

В общем случае в зависимости от типа решаемой задачи (“прямой” или “обратной”) решение может быть осуществлено следующими методами: аналитическими; графическими; итерационными. При использовании каждого из этих методов первоначально необходимо указать на схеме направления НС, если известны направления токов в обмотках, или задаться их положительными направлениями, если их нужно определить. Затем задаются положительными направлениями магнитных потоков, после чего можно переходить к составлению эквивалентной схемы замещения и расчетам.

28.2 Аналитические методы расчёта

Данными методами решаются задачи первого типа - “прямые” задачи. При этом в качестве исходных данных для расчета заданы конфигурация и основные геометрические размеры магнитной цепи, кривая (кривые) намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или магнитная индукция в каком-либо сечении магнитопровода. Требуется найти НС, токи обмоток или, при известных значениях последних, число витков.

28.2.1.” Прямая” задача для неразветвленной магнитной цепи

Решение задач подобного типа осуществляется в следующей последовательности.

1. Намечается средняя линия (пунктирная линия на рисунке 28.1), которая затем делится на участки с одинаковым сечением магнитопровода.

2. Исходя из постоянства магнитного потока вдоль всей цепи, определя-

ются значения индукции для каждого i -го участка

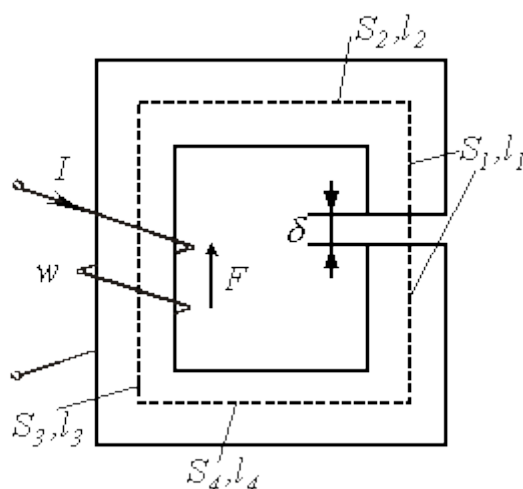
$$B_i = \frac{\Phi}{S_i}.$$


Рисунок 28.1

3. По кривой намагничивания для каждого значения B_i находятся напряженности H_i на ферромагнитных участках; напряженность поля в воздушном

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = 0,796 \cdot 10^6 \text{ Вб}.$$

зазоре определяется согласно

4. По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи определяется искомая НС путем суммирования падений магнитного напряжения вдоль контура:

$$F = Iw = \sum H_i l_i + H_{\delta} \delta,$$

где δ - длина воздушного зазора.

28.2.2 “Прямая” задача для разветвленной магнитной цепи

Расчет разветвленных магнитных цепей основан на совместном применении первого и второго законов Кирхгофа для магнитных цепей.

Последовательность решения задач данного типа в целом соответствует рассмотренному выше алгоритму решения “прямой” задачи для неразветвленной цепи.

В качестве примера анализа разветвленной магнитной цепи при заданных геометрии магнитной цепи на рисунке 28.3 и характеристике $B(H)$ ферромагнитного сердечника определим НС $F = Iw$, необходимую для создания в воздушном зазоре индукции B_{δ} .

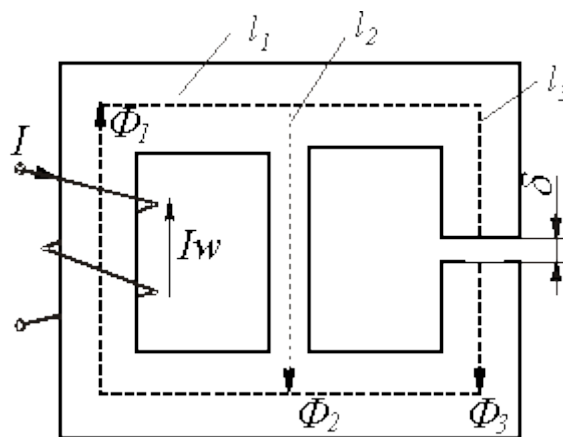


Рисунок 28.2

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Задаем положительные направления магнитных потоков в стержнях магнитопровода (рисунок 28.2).

2. Определяем напряженность в воздушном зазоре по зависимости $B(H)$ для $B_{\delta} = B_{\delta}$ - значение H_{δ} .

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0}$$

3. По второму закону Кирхгофа для правого контура можно записать

$$H_3 l_3 + H_\delta \delta - H_2 l_2 = 0,$$

откуда находим H_2 и по зависимости $B(H)$ - B_2 .

4. В соответствии с первым законом Кирхгофа $\Phi_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3$.

.Тогда $B_1 = \Phi_1 / S_1$, и по зависимости $B(H)$ определяем H_1 .

5. В соответствии со вторым законом Кирхгофа получаем искомую НС

$$F_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2.$$

28.3 Графические методы расчета

Графическими методами решаются задачи второго типа - “обратные” задачи. При этом в качестве исходных данных для расчета заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания ферромагнитного материала, а также НС обмоток. Требуется

найти значения потоков (индукций) на отдельных участках магнитопровода. Данные методы основаны на графическом представлении вебер-амперных характеристик $\Phi(U_M)$ участков магнитной цепи с последующим решением алгебраических уравнений, записанных по законам Кирхгофа, с помощью соответствующих графических построений.

28.3.1 “Обратная” задача для неразветвленной магнитной цепи

Решение задач подобного типа осуществляется в следующей последовательности.

1. Задаются значениями потока и определяют для них НС $F = \sum Hl$, как при решении “прямой” задачи. При этом следует стремиться подобрать два достаточно близких значения потока, чтобы получить $\sum Hl$, несколько меньшую и несколько большую заданной величины НС.

2. По полученным данным строится часть характеристики $\Phi(\sum Hl)$ магнитной цепи (вблизи заданного значения НС), и по ней определяется поток, соответствующий заданной величине НС. При расчете неразветвленных магнитных цепей, содержащих воздушные зазоры, удобно использовать метод пересечений, при котором искомое решение определяется точкой пересечения нелинейной вебер-амперной характеристики нелинейной части цепи и линейной характеристики линейного участка, строящейся на основании уравнения

$$\sum Hl = \sum Iw - \sum H_\delta \delta = \sum Iw - \Phi \sum R_{M\delta},$$

где $R_{M\delta} = \delta / (\mu_0 S_\delta)$ - магнитное сопротивление воздушного зазора.

28.3.2 “Обратная” задача для разветвленной магнитной цепи

Замена магнитной цепи эквивалентной электрической схемой замещения (на рисунке 28.4 представлена схема замещения магнитной цепи рисунка 28.3) позволяет решать задачи данного типа с использованием всех графических методов и приемов, применяемых при анализе аналогичных нелинейных электрических цепей постоянного тока.

В этом случае при расчете магнитных цепей, содержащих два узла (такую конфигурацию имеет большое число используемых на практике магнитопроводов), широко используется метод двух узлов. Идея решения данным методом аналогична рассмотренной для нелинейных резистивных цепей постоянного тока и заключается в следующем.

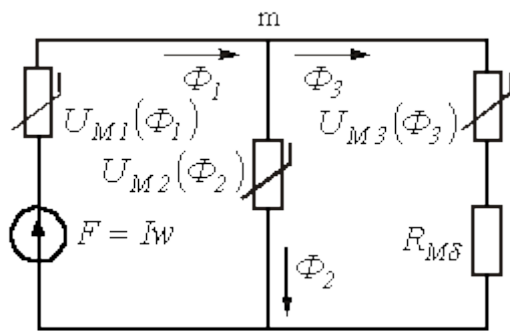


Рисунок 28.3

1. Вычисляются зависимости $\Phi_i(U_{Mmn})$ потоков во всех i -х ветвях магнитной цепи в функции общей величины -магнитного напряжения U_{Mmn} между узлами m и n .

2. Определяется, в какой точке графически реализуется первый закон Кирхгофа $\sum \Phi_i(U_{Mmn}) = 0$. Соответствующие данной точке потоки являются решением задачи.

29 Лекция 29. Основные понятия теории электромагнитного поля

Цель лекции: изучить основные понятия теории электромагнитного поля.

29.1 Определение электромагнитного поля и его физических величин.

Электромагнитным полем (ЭМП) называется вид материи, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие и определяемый во всех точках двумя парами векторных величин, которые характеризуют две его стороны - электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле - это составляющая ЭМП, которая характеризуется воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Магнитное поле - это составляющая ЭМП, которая характеризуется воздействием на движущуюся частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

29.2 Физические величины, характеризующие ЭМП.

Вектором напряженности электрического поля в точке Q называется вектор силы, действующей на электрически заряженную неподвижную частицу, помещенную в точку Q , если эта частица имеет единичный положительный заряд.

В соответствии с этим определением электрическая сила, действующая на точечный заряд q равна:

$$\mathbf{F}_э = q\mathbf{E},$$

где \mathbf{E} измеряется в В/м.

Магнитное поле характеризуется *вектором магнитной индукции*. Магнитная индукция в некоторой точке наблюдения Q - это векторная величина, модуль которой равен магнитной силе, действующей на заряженную частицу, находящуюся в точке Q , имеющую единичный заряд и движущуюся с единичной скоростью, причем векторы силы, скорости, магнитной индукции, а также заряд частицы удовлетворяют условию

$$\mathbf{F}_M = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Магнитная сила, действующая на криволинейный проводник с током может быть определена по формуле

$$d\mathbf{F}_M = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

На прямолинейный проводник, если он находится в однородном поле, действует следующая магнитная сила

$$\mathbf{F}_M = I \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Во всех последних формулах \mathbf{B} - магнитная индукция, которая измеряется в теслах (Тл).

1 Тл - это такая магнитная индукция, при которой на прямолинейный проводник с током 1А действует магнитная сила, равная 1Н, если линии магнитной индукции направлены перпендикулярно проводнику с током, и если длина проводника равна 1м.

Кроме напряженности электрического поля и магнитной индукции в теории электромагнитного поля рассматриваются следующие векторные величины:

1) электрическая индукция \mathbf{D} (электрическое смещение), которая измеряется в Кл/м²,

2) напряженность магнитного поля \mathbf{H} , которая измеряется в А/м.

Векторы ЭМП являются функциями пространства и времени:

$$\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B} = f(Q, t),$$

где Q - точка наблюдения, t - момент времени.

Если точка наблюдения Q находится в вакууме, то между соответствующими парами векторных величин имеют место следующие соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

где ϵ_0 - абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума (основная элек-

трическая постоянная), $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$;

μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость вакуума (основная магнитная постоянная); $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

30 Лекция 30. Основные законы теории электромагнитного поля

Цель лекции: изучить основные законы теории электромагнитного поля.

30.1 Уравнения ЭМП в интегральной форме

Закон полного тока:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_i I_i \quad \text{или} \quad \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_n dS$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль контура l равна полному электрическому току, протекающему через поверхность S , натянутую на контур l , если направление тока образуют с направлением обхода контура правовинтовую систему.

30.2 Закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_n = \oint_l (\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где E_c - напряженность стороннего электрического поля.

ЭДС электромагнитной индукции $e_{\text{и}}$ в контуре l равна скорости изменения магнитного потока через поверхность S , натянутую на контур l , причем направление скорости изменения магнитного потока образует с направлением $e_{\text{и}}$ левовинтовую систему.

30.3 Теорема Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q = \int_V \rho dV$$

Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность S равен сумме свободных электрических зарядов в объеме, ограниченном поверхностью S .

30.4 Закон непрерывности линий магнитной индукции:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Непосредственное применение уравнений в интегральной форме позволяет производить расчет простейших электромагнитных полей. Для расчета электромагнитных полей более сложной формы применяют уравнения в дифференциальной форме. Эти уравнения называются уравнениями Максвелла.

30.5 Уравнения Максвелла для неподвижных сред

Эти уравнения непосредственно следуют из соответствующих уравнений в интегральной форме и из математических определений пространственных дифференциальных операторов.

Закон полного тока в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{п}},$$

где $\mathbf{j}_{\text{п}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}} + \mathbf{j}_{\text{пер}}$,

$\mathbf{j}_{\text{п}}$ - плотность полного электрического тока,

\mathbf{j} - плотность стороннего электрического тока,

$\delta_{\text{пр}}$ - плотность тока проводимости,

$\delta_{\text{см}}$ - плотность тока смещения: $\delta_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$,

$\delta_{\text{пер}}$ - плотность тока переноса: $\delta_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v}$.

Это означает, что электрический ток является вихревым источником векторного поля напряженности магнитного поля.

Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Это означает, что переменное магнитное поле является вихревым источником для пространственного распределения вектора напряженности электрического поля.

Уравнение непрерывности линий магнитной индукции:

Это означает, что поле $\text{div } \mathbf{B} = 0$ вектора магнитной индукции не имеет истоков, т.е. в природе не существует магнитных зарядов (магнитных монополей).

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

Это означает, что истоками векторного поля электрического смещения являются электрические заряды.

Для обеспечения единственности решения задачи анализа ЭМП необходимо дополнить уравнения Максвелла уравнения материальной связи между векторами \mathbf{E} и \mathbf{D} , а также \mathbf{B} и \mathbf{H} .

Основная литература

1.С.Ю. Креслина, А.Т. Аршабекова. Теоретические основы электротехники. Методические указания и задания по выполнению лабораторных работ для специальности 5В070200 - Автоматизация и управление.– Алматы: АУЭС, 2014. – 34 с.

2.С.Ю. Креслина, А.Т. Аршабекова. Теоретические основы электротехники. Методические указания и задания к курсовой работе для студентов специальности 5В070200- Автоматизация и управление. – Алматы: АУЭС, 2013.- 12 с.

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники.-М.: Гардарики, 2013. – 638 с.
4. К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. ТОЭ: В 3-х т. Учебник для вузов. Спб.: Питер, 2006.
5. Денисенко В.И., Креслина С.Ю., Светашев Г.М. ТОЭ2. Конспект лекций (для бакалавриата 050702 – Автоматизация и управление). Алматы: АИЭС, 2009, с. 62.
6. Денисенко В.И., Креслина С.Ю. ТОЭ1. Конспект лекций (для бакалавриата 050702 – Автоматизация и управление). Алматы: АИЭС, 2008, с. 67.

Дополнительная литература:

7. Башарин С.А., Федоров В.В. ТОЭ. Теория электрических цепей и электромагнитного поля.
8. Денисенко В.И., Зуслина Е.Х. ТОЭ. Учебное пособие.- Алматы: АИЭС, 2000, 83 с.
9. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/ Л.Д.Бессонов, И.Г.Демидова, М.Е.Заруди и др.-М.: Высшая школа, 2003.-159 с.
10. Прянишников В.А. ТОЭ: Курс лекций: Учебное пособие – 3-е изд., перераб. И доп. – СПб., 2000 – 368 с.
11. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях: Практикум на Electronics Workbench. В 2-х томах/ Под ред. Д.И. Панфилова – М.: ДОДЭКА, 1999.- т.1-Электротехника. – 304с.
12. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1990.- 544с.
13. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей.- М.: Энергоатомиздат, 1989. -528с.
14. Теоретические основы электротехники. Т.1. Основы теории линейных цепей / Под ред. П.А.Ионкина - М.: Высшая школа, 1976. -544с.