Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Конспект лекций для студентов специальности
5В070200 – Автоматизация и управление

Алматы 2015

СОСТАВИТЕЛИ: А.К. Искакова, А.Г. Отарова. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление. – Алматы: АУЭС, 2015. – 41 с.

Конспект лекций «Теория вероятностей и математическая статистика», предназначен для студентов специальности 5В070200 – Автоматизация и управление, содержит основные теоретические сведения по теории вероятностей и математической статистике, имеет целью дать необходимые теоретические знания для их применении при решении практических задач.

Предлагаемый конспект лекций состоит из 8 лекций и составлен в соответствии с программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Ил. 8, табл. 2, прил. 2.

Рецензент: канд.техн.наук, старший преподаватель Мусапирова Г.Д.

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи» на 2015 г.

Сводный план 2015., поз. 301

Искакова Акжолтай Курмантаевна
Отарова Анар Гайппаевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Конспект лекций для студентов специальности
5В070200 – Автоматизация и управлени

Редактор Н.М. Голева
Специалист по стандартизации Н.К. Молдабекова

Подписано в печать _______
Тираж 40 экз.
Объем 2,6 уч. - изд. лист

Формат 60х84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ ____ Цена 1 300 тн.

Копировально-множительное бюро
некоммерческое акционерное общество
«Алматинский университет энергетики и связи»
050013, Алматы, Байтурсынова, 126

Модуль 1. Элементы теории вероятностей

1 Лекция №1. Предмет теории вероятностей. Элементы комбинаторики. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Классическое определение вероятности, статическая и геометрическая вероятность. Свойства вероятностей

1.1 Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей изучает случайные явления (события), то есть такие, которые в неизменных условиях могут либо произойти, либо не произойти. Однако необходимо помнить, что:

1) рассматриваемые явления должны быть массовыми, то есть требуется воспроизводимость условий опыта. События, происходящие в уникальных, неповторяющихся условиях, теория вероятностей не рассматривает;

2) частость событий, то есть доля опытов, в которых они наступают, должна быть устойчивой. Это значит, что от серии опытов к серии она должна колебаться в малых пределах;

3) устанавливаемые методами теории вероятностей закономерности, в отличие от большинства других наук, не обязательно отражают причинно-следственные связи процессов и явлений, поэтому теоретико-вероятностными выводами нельзя подменять анализ явлений и закономерностей методами соответствующих конкретных наук.

Понятие опыта и события – фундаментальные. Через них определяются: достоверное и невозможное события, совместность и несовместность событий. Событие – одно из основных понятий, которыми оперирует теория вероятностей.

Под *событием* понимается все то, что может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий.

В практической деятельности встречается три вида событий: *достоверные, невозможные и случайные.*

Достоверным называют событие, которое заведомо произойдет как исход испытаний.

Невозможным называют событие, которое не произойдет как исход испытаний.

Случайным называют событие, которое как исход испытаний может либо произойти, либо не произойти.

Таким образом, предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Методы теории вероятностей широко применяются в технике – теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других прикладных науках.

1.2 Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При вычислении вероятностей используются следующие формулы комбинаторики.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок определяется по формуле:

$$P_n = n!,$$

где $n!=1\cdot2\cdot3\ldots n$ (n факториал есть произведение натурального ряда чисел).

Следует отметить, что $0!=1$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

1.3 Пространство элементарных событий. Алгебра событий

Непосредственные исходы опыта называются *элементарными событиями.* Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий*.

События бывают равновозможные, совместные и несовместные.

События называют *равновозможными,* если одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Два события называют *совместными,* если наступление одного из событий не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Два события называют *несовместными,* если наступление одного из них исключает возможность наступления другого в одном и том же испытании.

События называют *единственно возможными,* если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием попарно несовместным.

Событие, *противоположное A,* обозначается $\overline{A}$ (читается «не A») и означает, что событие A не наступило.

Случайные события образуют *полную группу событий*, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Алгебра событий. Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$, означающее наступление хотя бы одного из событий - слагаемых. Эта операция обладает свойствами:

- коммутативности $A+B=B+A$;
- ассоциативности $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Произведение событий A и B записывается как AB и заключается в совместном наступлении обоих событий. Эта операция также обладает свойствами:

- коммутативности $AB=BA$;
- ассоциативности $(AB)=A(BC)$;
- дистрибутивности $A(B+C)=AB+AC$.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний m, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний n. Относительная частота события A определяется формулой:

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

Относительная частота обладает свойством устойчивости, то есть в различных опытах относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число и есть вероятность появления события.

1.4 Классическое определение вероятности, статистическая и геометрическая вероятность. Свойства вероятности

Вероятность – важнейшее понятие всей теории, выступающее количественной мерой возможности наступления события.

Классическое определение вероятности. *Вероятностью* наступления события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания. Тогда, вероятность появления события A определяется по формуле:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;
n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Классическое определение вероятности понимается как значение, около которого должна колебаться доля опытов, в которых данное событие наступает. Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Из классического определения непосредственно следуют основные свойства вероятности:

Свойство 1. Для случайного события $m < n$.

Свойство 2. Вероятность $P(A)$ появления случайного события A всегда заключена в интервале между нулем и единицей, то есть $0 \le P(A) \le 1$,

Свойство 3. Вероятность $P(A)$ появления достоверного события A равна единице, то есть $P(A)=1$ или для достоверного события $m = n$.

Свойство 4. Вероятность $P(A)$ появления невозможного события *A,* равна нулю, то есть $P(A)=0$ или для невозможного события $m=0$.

Сравнение определений вероятности и относительной частоты показывает, что определение вероятности не требует, чтобы испытание проводилось в действительности. Определение относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

Статистическая вероятность. «Классическое» определение вероятности предполагает, что число исходов испытаний конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно**.** В таких случаях классическое определение неприемлемо.

Слабая сторона классического определения состоит в том, что часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

По этим причинам наряду с классическим определением вероятности используют статистическое определение вероятности, принимая за вероятность события относительную частоту или число близкое к ней. Например, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка к числу 0,4, то это число можно принять за статистическую вероятность события.

Для существования статистической вероятности события *A* требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие *A* наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления события *A* в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Геометрическое определение вероятности используется при вычислении вероятности появления события в том случае, когда результат испытания определяется случайным положением точек в некоторой области (отрезок, часть плоскости и т.д.), причем любые положения точек в этой области равновозможны. Если размер этой области *S*, а размер той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию есть S_b, то вероятность события *A* равна

$$P(A) = \frac{S_b}{S}.$$

Область *S* может иметь любое число измерений, поэтому S_b и *S* могут представлять собой длины отрезков, площади, объемы и т.д. При решении задач на геометрические вероятности особое внимание следует обращать на то, какие параметры принимают равновозможные значения.

2 Лекция №2. Основные теоремы теории вероятностей

2.1 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(\overline{A})+P(A)=1.$$

Два события называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого**.**

Теорема умножения независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A)=1-q_1q_2\ldots q_n.$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что событие *A* уже наступило.

Независимость событий понимается как отсутствие связи между фактом наступления одного из них и возможность наступления второго.

Таким образом, для независимых событий *A* и *B* условные вероятности равны безусловным, то есть

$$P_A(B)=P(B), \quad P_B(A)=P(A) \quad \text{и} \quad P(AB)=P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(AB)=P(A)P_A(B).$$

2.2 Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу.

Пусть известны вероятности этих событий $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$ и условные вероятности $P_{B_1}(A),\ P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$ события *A*.

Теорема. Вероятность появления события *A*, которое может наступить лишь при условии появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую вероятность события *A*:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Полученная формула называется формулой *полной вероятности***.**

Формулы Байеса. Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*.

Вероятность появления события *A* определяется по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие *A*. Поставим своей задачей определить, как изменились вероятности гипотез. Другими словами будем искать условные вероятности

$$P_{B_1}(A),\ P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A).$$

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$, то есть вероятность появления события B_1 при условии, что событие *A* наступило. По теореме умножения имеем:

$$P(AB_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\,P_{B_n}(A)}.$$

Аналогично выводятся формулы для определения условных вероятностей других гипотез. Условная вероятность любой гипотезы вычисляется по формулам Бейеса

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\,P_{B_i}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A)+P(B_2)\,P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\,P_{B_n}(A)}.$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

2.3 Повторение испытаний. Формула Бернулли

Опыты (испытания) называются независимыми, если вероятность какого-то исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Пусть предстоит провести серию опытов в количестве n, результатом каждого из которых может быть некоторое событие A с вероятностью $P(A)=p$, не зависящей от исходов предыдущих опытов.

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых опытов постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n опытах событие A наступит ровно m раз определяется формулой биноминального распределения или формулой Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q=1-p$, C_n^m - число сочетаний из n элементов по m.

Вероятность того, что число наступлений события A будет заключено в пределах от a до b также может быть решена с помощью формулы Бернулли, для этого достаточно просуммировать вероятности $P_n(m)$ для значений m от a до b:

$$P(a\le m\le b)=P_n(a)+P_n(a+1)+\ldots+P_n(b).$$

Таким образом, используя формулу Бернулли можно определить вероятность события, которое произойдет:

1) менее m раз

$$P(<m)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m-1);$$

2) не менее m раз

$$P(\ge m)=P_n(m)+P_n(m+1)+...+P_n(n);$$

3) более m раз

$$P(>m)=P_n(m+1)+P_n(m+2)+...+P_n(n):$$

4) не более m раз

$$P(\le m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m).$$

Однако формулу Бернулли при больших *n* использовать практически невозможно. Поэтому важны приближенные формулы, достаточно точные и простые.

2.4 Локальная и интегральная теоремы Муавра - Лапласа. Теорема Пуассона

Если число испытаний велико, локальная теорема Лапласа позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность *p* появления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие *A* появится в *n* испытаниях ровно k раз, приближенно равна значению функции

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad где \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \;\; q = 1-p.$$

Имеются таблицы значений функции $\varphi(x)$, которая называется *плотностью стандартного нормального или гауссова распределения* (Приложение 1).

При использовании таблицы следует учитывать честность функции, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$, а также что $\varphi(x) = 0$ при $x \ge 4$. Эта формула дает результат достаточной точности.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события *A* в *n* независимых испытаниях постоянна и равна *p* $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие *A* появится в *n* испытаниях не менее k_1 раз, но не более k_2 раз приближенно вычисляется по формуле**:**

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2}dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Достаточная точность формулы обеспечивается при условии $\sqrt{npq} \ge 15$.

Значения функции $\Phi(x)$ табулированы для различных x (Приложение 2). При использовании таблицы следует учитывать, что эта функция нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и для значений $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$. Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*.

Формула Пуассона (формула малых вероятностей)

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad где \quad \lambda = np.$$

Вероятностный смысл λ- это среднее число появления события *A* в *n* испытаниях.

Значения функции Пуассона для различных значений λ и *m* приведены в таблицах. Формула обеспечивает достаточно высокую точность при выполнении условий $n \geq 40$, $\lambda \leq 10$.

3 Лекция №3. Случайные величины

3.1 Виды случайных величин

Как правило, со случайными событиями связаны численные величины, характеризующие эти события. Таким образом, результатом опыта явится некоторое число. Такие числа называются случайными величинами и обозначают большими латинскими буквами.

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать в зависимости от исходов испытания те или иные случайные значения. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита *X*, *Y*, *Z*, …, а их возможные значения строчными *x*, *y*, *z*, …

Чтобы точно описать случайную величину, надо знать, какие значения и с какими вероятностями она принимает. Такая информация называется *законом распределения случайной величины.* Наиболее просто описываются случайные величины, называемые дискретными.

Случайная величина называется *дискретной,* если все ее возможные значения счетны (их можно пронумеровать), то есть случайная величина *X* принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка, то есть число непрерывных случайных величин несчетно. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

3.2 Дискретные случайные величины

Дискретная случайная величина может быть задана:

– рядом распределения;
– многоугольником распределения;
– функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения дискретной случайной величины называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей p_i. Вероятности p_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ряд распределения обычно задается таблицей**:**

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Графическое изображение ряда распределения дискретной случайной величины: в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), затем их последовательно соединяют отрезками прямых, полученную ломаную называют *многоугольником распределения*.

Функцией распределения (интегральным законом распределения) случайной величины X называется функция $F(x)$ равная вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина будет меньше произвольно выбранного значения x. Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$F(x) = \sum_{x_i < X} P(X = x_i).$$

Свойства функции распределения:

– функция распределения есть неотрицательная функция $0 \le F(x) \le 1$;

– функция распределения есть неубывающая функция, то есть при $\beta > \alpha$ имеем $F(\beta) \ge F(\alpha)$;

Вероятность появления случайной величины в интервале $[\alpha, \beta)$, полузамкнутом слева, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

При возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ функция распределения изменяется от нуля до единицы:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

3.3 Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, но часто он неизвестен. Иногда известны только числа, которые описывают случайную величину суммарно, такие числа называются *числовыми характеристиками случайной величины.*

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется ее среднее значение, вычисленное по формуле:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Математическое ожидание обозначается также m_X. *Вероятностный смысл математического ожидания*: математическое ожидание равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. Это значение тем точнее, чем больше число испытаний.

Свойства математического ожидания:

– математическое ожидание постоянной величины равно этой же постоянной величине, если *С*- постоянная величина, то $M(C)=C$;

– постоянную можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X);$$

– математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий. Пусть *X*,*Y* – случайные величины, тогда

$$M(X+У)=M(X)+M(У);$$
$$M(X-У)=M(X)-M(У);$$

– математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Пусть *Y*- случайная величина, независимая от *X*, тогда

$$M(X\cdot У)=M(X)\cdot M(У).$$

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, необходимо определить насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Математическое ожидание не несет информации о том, в какой степени случайные значения *X* отклоняются от $M(X)$. Мерой этого отклонения (рассеяния) значений случайной величины от ее среднего значения является *дисперсия.*

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X)=M[X-M(X)]^2 .$$

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться формулой

$$D(X)=M[X^2]-[M(X)]^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X) .$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины *X* называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} .$$

Среднее квадратическое отклонение служит для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Свойства дисперсии и средне квадратического отклонения:

1) если С- постоянная величина, то $D(C)=0,\quad \sigma(C)=0$;

2) $D(CX)=C^2D(X),\quad \sigma(CX)=|C|\sigma(X)$;

3) $D(C+X)=D(X),\quad \sigma(C+X)=\sigma(X)$

4) если $У$ – случайная величина, то

$$D(X+У)=D(X)+D(Y);$$

$$D(X-У)=D(X)-D(Y).$$

Замечание. Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью случайной величины *X*, а размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины. Например, если *X* выражается в линейных метрах, то и $\sigma(X)$ будет выражаться в линейных метрах, а дисперсия $D(X)$ - в квадратных метрах.

Модой M_0 дискретной случайной величины *X* называется ее наиболее вероятное значение, имеющее наибольшую вероятность (рисунок 1).

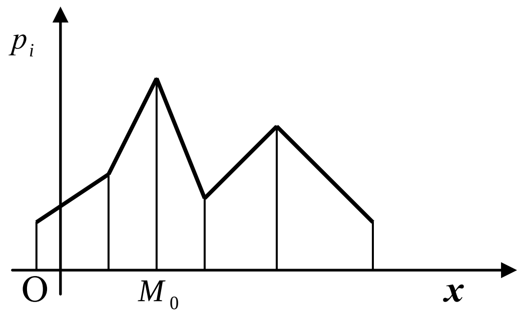

Рисунок 1

3.4 Биноминальное распределение. Распределение Пуассона

Важнейшими видами распределения дискретных случайных величин являются биноминальное распределение и распределение Пуассона.

Биноминальное распределение. Пусть задана случайная величина *X*, равная числу наступления события *A* в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых она имеет постоянную вероятность *p*, тогда вероятность не наступления события *A* равна $q=1-p$.

Биноминальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^{л} q^{n-k},$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Закон назван «биноминальным» потому, что правую часть этой формулы можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона.

Напишем биноминальный закон в виде таблицы

X	n	n-1	…	k	…	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	q^n

Для биноминального распределения имеем:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq},$$

где n – число независимых испытаний;

p - вероятность наступления события;

$q = 1 - p$ - вероятность не наступления события.

Распределение Пуассона. Вероятность того, что при большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, а произведение $n \cdot p$ сохраняет постоянное значение $\lambda = n \cdot p$, событие наступит ровно k раз вычисляется по формуле:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

Дискретная величина X, распределенная *по закону Пуассона* с параметром λ, имеет следующие числовые характеристики:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

4 Лекция №4. Непрерывные случайные величины

4.1 Функция распределения. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

С помощью дискретных случайных величин невозможно описать реальные случайные эксперименты. Действительно, таким величинам, как размеры любых физических объектов, температура, давление, длительность тех или иных физических процессов, нельзя приписать дискретное множество возможных значений. Число возможных значений бесконечно. Но это множество заполняет какой-то числовой промежуток. Поэтому вводится понятие непрерывной случайной величины.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Другое определение. Случайная величина называется *непрерывной,* если ее функция распределения всюду непрерывна и имеет производную во всех точках, за исключением, быть может, конечного их числа на каждом конечном интервале.

Для непрерывной случайной величины ряд распределения построить невозможно, так как:

1) невозможно перечислить одно за другим возможные значения;

2) вероятность отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение меньшее x, то есть вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$.

Функцией распределения или интегральной функцией называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$, и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a,b), равна приращению функции распределения на этом интервале

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

График функции распределения расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0,\ y = 1$. При $x \le a$ ординаты графика равны нулю, при $x \ge b$ ординаты графика равны единице. График функции распределения для дискретной случайной величины (рисунок 2), график функции распределения для непрерывной случайной величины (рисунок 3).

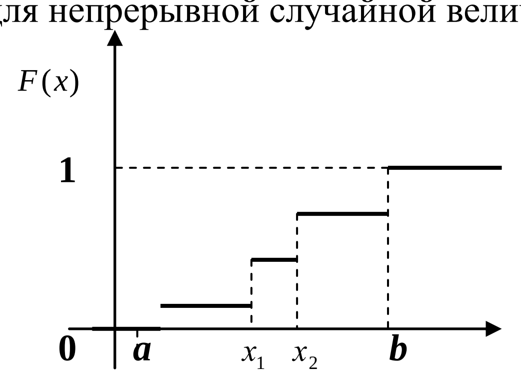

Рисунок 2

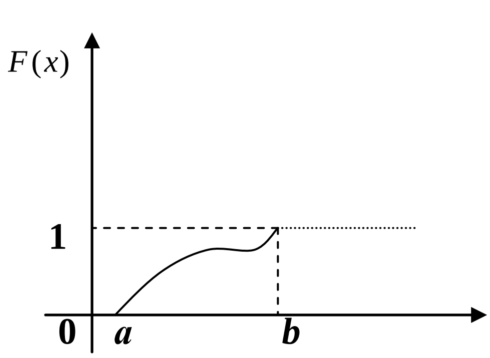

Рисунок 3

При изучении непрерывных случайных величин основным является понятие плотности вероятности.

Производная функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X называется *плотностью вероятности* $f(x)$, то есть $f(x)=F'(x)$.

Плотность вероятности показывает, насколько вероятны значения случайной величины *X*, близкие к данному значению *x*. Плотность вероятности связана с функцией распределения интегральным соотношением:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Непосредственно из выражения $F(x)$ через $f(x)$ и свойств функции распределения вытекают основные свойства плотности вероятности:

- плотность вероятности неотрицательна $f(x)\geq 0$;
- вероятность достоверного события равна единице $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$;
- функция $f(x)$ непрерывна или кусочно-непрерывна.

Функция распределения выражается через плотность вероятности формулой

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина *X* примет какое-то значение из отрезка $[\alpha,\beta]$, равна

$$P(\alpha\leq X\leq\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

График плотности вероятности называется кривой распределения.

4.2 Числовые характеристики непрерывной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X*, для которой функция $f(x)$ является плотность вероятности, называется величина несобственного интеграла

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx,$$

если он сходится.

Дисперсией называется значение несобственного интеграла

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X),$$

если он сходится.

Модой M_0 непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, при котором плотность вероятности имеет наибольшее значение (рисунок 4).

Медианой M_e случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины, то есть $P(X < M_e) = P(X > M_e)$. Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам (рисунок 5).

В случае симметрического распределения медиана совпадает с модой и математическим ожиданием.

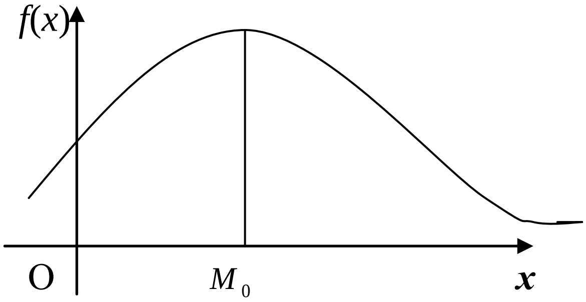

Рисунок 4

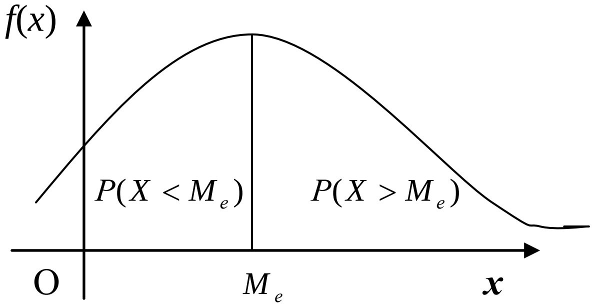

Рисунок 5

5 Лекция №5. Законы распределения случайных величин

5.1 Равномерное распределение

Пусть плотность вероятности равна нулю всюду, кроме отрезка $[a, b]$, на котором все значения случайной величины X одинаково возможны. Самым простым непрерывным распределением является равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, задаваемое плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Функция равномерного распределения задается формулой:

$$F(x)=\begin{cases} 0\,, & x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}\,, & a\le x\le b; \\ 1\,, & x>b. \end{cases}$$

Определим основные числовые характеристики случайной величины X, подчиненной закону равномерной плотности на промежутке $[a,b]$.

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\ldots\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания в заданный интервал $[c,d]\in[a,b]$:

$$P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a.}.$$

Равномерное распределение имеют случайные величины, характеризующие ошибки измерений при помощи инструмента с крупными делениями, когда значение округляется до ближайшего целого.

5.2 Нормальное распределение

Наиболее важным видом распределения непрерывной случайной величины является нормальное распределение, плотность вероятности которого описывается формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание,

σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Функция распределения определяется из формулы:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

ее значения табулированы. Функция Лапласа или интеграл вероятностей имеет вид:

$$\varPhi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Через функцию Лапласа можно определить функцию распределения нормально распределенной случайной величины

$$F(x)=\varPhi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5.$$

Отсюда, используя свойство функции распределения, получаем выражение для вероятности того, что значение нормально распределенной случайной величины X окажется заключенным в интервале (α, β):

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Заметим, что

$$\Phi(0) = 0,\ \Phi(-\infty) = -\frac{1}{2},\quad \Phi(+\infty) = \frac{1}{2},\quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

А также для любого значения $x > 5$ можно принять $\Phi\ \ (x) = 0{,}5$.

Вероятность заданного отклонения $X - M(X)$ нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного числа δ или вероятность попадания этой величины в интервал, симметричный относительно центра рассеяния a вычисляется по формуле:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Числовые характеристики случайной величины

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2.$$

Кривая распределения – это *кривая Гаусса*, которая имеет симметричный холмообразный вид (рисунок 6), где параметр σ характеризует форму кривой, а параметр a – ее положение.

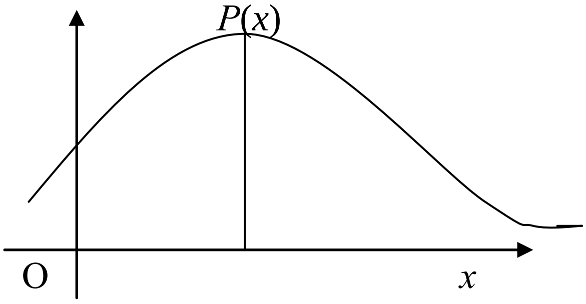

Рисунок 6

Правило «трех сигм». Определим, какой надо взять интервал с центром в точке $x = a$, чтобы почти все значения случайной величины принадлежали этому интервалу. Известно, что если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превысит величину $\delta > 0$, равна

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В этом равенстве положим $\frac{\delta}{\sigma} = t$, тогда $\delta = t\sigma$, отсюда получим

$$P(|X-a|<t\sigma)=2\Phi(t).$$

Вычислим вероятность $P(|X-a|\le t\sigma)$ при различных значениях *t*:

если t=1, то $P(|X-a|<\delta)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826$;

если t=2, то $P(|X-a|<2\delta)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544$;

если t=3, то $P(|X-a|<3\delta)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$.

Вероятность события $|X-a|<3\sigma$ близка к 1. Такое событие является практически достоверным событием ($\approx 99{,}7\%$). Найдем вероятность противоположного события:

$$P(|X-a|\ge 3\sigma)=1-P(|X-a|<3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027,$$

то есть вероятность того, что значение случайной величины X не попадет в интервал с границами $a\pm 3\sigma$, равна 0,0027, то есть близка к нулю. Такое событие считается практически невозможным.

Правило «трех сигм»: если случайная величина *X* имеет нормальное распределение, то отклонение этой величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения

$$P(|X-a|<3\sigma)=0{,}9973.$$

Другими словами, практически достоверно, что нормально распределенная случайная величина *X* удовлетворяет неравенству

$$a-3\sigma<X<a+3\sigma.$$

5.3 Показательное (экспоненциальное) распределение

Показательным распределением называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое задается плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

где λ- постоянная положительная величина.

Функция распределения (интегральная функция) показательного закона:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x} xe^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x},$$

то есть

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Вероятность попадания в заданный интервал (a,b) имеет вид:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Числовые характеристики

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda},$$

то есть для показательного распределения непрерывной случайной величины имеет место

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Если T – непрерывная случайная величина, выражающая продолжительность времени безотказной работы какого-либо элемента, а λ - интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени), то продолжительность времени t безотказной работы этого элемента можно считать случайной величиной, распределенной по показательному закону с функцией распределения

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (\lambda > 0),$$

которая определяет вероятность отказа элемента за время t.

Функция надежности $R(t)$ определяет вероятность отказа элемента за время t

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Модуль 2. Элементы математической статистики

6 Лекция №6. Предмет и основные понятия математической статистики

6. 1 Предмет математической статистики

Предметом математической статистики являются законы и закономерности, абстрактно сформулированные теорией вероятностей.

Математическая статистика, базируясь на теории вероятностей, имеет своим методом изучение выборочных совокупностей и идет от наблюдения. Таким образом, метод математической статистики, как способа познания объективного мира, - это индукция, то есть обобщение.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных – результатах наблюдений. Перед математической статистикой ставят две задачи:

– указать способы отбора и группировки статистических данных;

– разработать методы анализа статистических данных, в зависимости от целей исследования.

Модуль «Элементы математической статистики» нацелен на развитие у студентов навыков по обработке статистических данных.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

6.2 Генеральная и выборочная совокупности, способы отбора

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Выборочной совокупностью, или просто *выборкой*, называют совокупность случайно подобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом выборки (как выборочной так и генеральной) называют число объектов этой совокупности. При составлении выборки можно поступать двояко: после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен или нет в генеральную совокупность.

В дальнейшем объем генеральной совокупности будем обозначать N, а объем выборки через n.

Повторной называется выборка, при которой отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называется выборка, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике применяют различные способы отбора. Принципиально их можно разделить на два вида:

– отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части, сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор;

– отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части, сюда относятся: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.

Простым случайным отбором называется такой отбор, при котором объекты извлекаются из генеральной совокупности по одному. Если объект не возвращается в генеральную совокупность, то выборка будет бесповторной.

Типическим называется отбор, при котором объекты выбираются не из всей генеральной совокупности, а из некоторой ее «типической» части.

Механическим называется отбор, при котором генеральная совокупность «механически» делится на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, и из каждой группы выбирается один объект.

Серийным называется отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а сериями, которые потом подвергаются исследованию.

6.3 Статистическое распределение выборки

Информация, полученная в результате обследования элементов выборки, имеет большой объем и неудобна для обработки. Поэтому ее, как правило, группируют. Пусть анализируется один числовой признак. Тогда естественно разбить объекты по группам с близкими или одинаковыми значениями этого признака.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз и так далее x_k наблюдалось n_k раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – *вариационным рядом*.

Если варианта в каждой группе имеет одно значение, то ряд называется *дискретным*, а если варианта занимает интервал значений, *то интервальным*.

При формировании интервального ряда часть выборочной информации теряется, так как он не отражает распределения характеристики внутри интервала. Пример дискретного ряда – распределение студентов по курсам: распределение их по росту естественно представить интервальным рядом.

Число наблюдений называют *частотами***,** а их отношение к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ - *относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно также задать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот.

6.4 Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения *x* относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x - число вариант, меньших *x*;

n - объем выборки.

Свойства эмпирической функцией распределения:

– значения эмпирической функцией распределения принадлежат отрезку $[0,1]$;

– 2) $F^*(x)$ - неубывающая функция;

– если x_1 наименьшая варианта, то $F^*(x)=0$ при $x \le x_1$;если x_k наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x > x_k$.

6.5 Полигон и гистограмма

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму. Графическое представление обладает наглядностью и часто используется для качественной оценки распределения признака. В графиках горизонтальная ось соответствует значениям признака (варианты), а вертикальная ось – частотам.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, y_i), i=1,2,…,k. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты, а на оси ординат - соответствующие им частоты. Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот рисунок 7).

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, w_i), i=1,2,…,k. Полигон относительных частот строится аналогично полигону частот.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Она строится для интервальных рядов (рисунок 8).

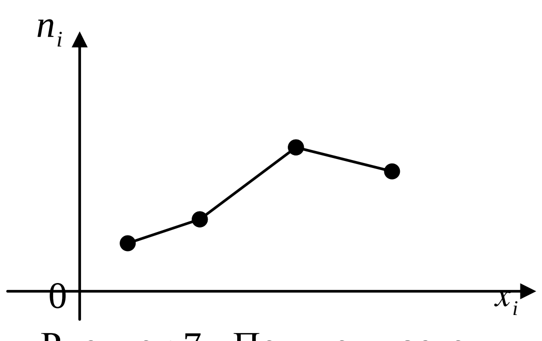

Рисунок 7 - Полигон частот

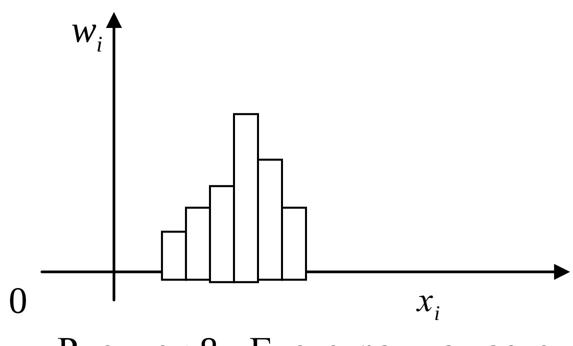

Рисунок 8 - Гистограмма частот

6.6 Статистические оценки параметров распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Если их теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак, то возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров, которыми определяется это распределение.

Рассматривая $x_1, x_2, ..., x_n$ как независимые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$, можно сказать, что найти статистическую оценку неизвестного параметра теоретического распределения – это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра.

Таким образом, статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

6.7 Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i (i=1,2,…,n) – результаты n наблюдений над количественным признаком X.

Для того, чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

Пусть $\theta*$ есть статистическая оценка неизвестного параметра θ.

Допустим, что по выборке объема n найдена ошибка θ_1^*. Повторим опыт, то есть найдем вторую ошибку $\theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$, которые, вообще говоря, отличаются друг от друга. Таким образом, оценку $\theta*$ можно рассматривать как случайную величину, а числа θ_i^*, (i=1,2,…,k) как ее возможные значения.

Пусть оценка $\theta*$ дает приближенное значение θ с избытком, тогда каждое, найденное по данным выборок, число θ_i^* будет больше истинного значения θ,то есть $M(\theta*) > \theta$. Если оценка с недостатком, то $M(\theta*) < \theta$. То есть использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому признаку привело бы к систематическим ошибкам. По этой причине естественно требовать, чтобы математическое ожидание оценки $\theta*$было равно оцениваемому параметру.

Несмещенной называют статистическую оценку $\theta*$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки $M(\theta*) = \theta$.

Смещенной называется оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако было бы ошибочно считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование эффективности.

Эффективной называется оценка, которая имеет наименьшую возможную дисперсию при заданном объеме выборки.

При рассмотрении выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к 0, то такая оценка является состоятельной.

6.8 Выборочная средняя. Генеральная дисперсия, выборочная дисперсия

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака *X*.

Генеральной средней $\overline{x_Г}$, называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения x_i (i=1,2,…,N) признака генеральной совокупности объема *N* различны, то

$$\overline{x_r} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}.$$

Если же значения признака x_i (i=1,2,…,k) имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, причем $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то

$$\overline{x_r} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N},$$

то есть генеральная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Если рассматривать обследуемый признак *X* генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака

$$M(X) = \overline{x_Г}.$$

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака *X* извлечена выборка объема *n*.

Выборочной средней $\overline{x_В}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения x_i (i=1,2,…n) признака выборки объема *n* различны, то

$$\overline{x_B} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \right) / n.$$

Если же значения признака x_i (i=1,2,…,k) имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, причем $\sum n_i = n$, то

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}.$$

то есть выборочная средняя есть величина взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Если первоначальные варианты x_i - большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число *C*, то есть перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$ (в качестве *C* выгодно принять число, близкое к выборочной средней), тогда

$$\overline{x_B} = C + \left(\sum n_i u_i \right) / n).$$

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака *X* генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику – генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_Г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $x_Г$.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема *N* различны, то

$$D_r = \frac{\sum (x_i - \overline{x_r})^2}{N}.$$

Если же значения признака x_i имеют соответственно частоты N_i, i=1,2,,…,k, то

$$D_r = \frac{\sum N_i (x_i - \overline{x_r})^2}{N},$$

то есть генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего значения $\overline{x_B}$ вводят сводную характеристику – выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_B}$.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема *n* различны, то

$$D_B = \frac{\sum (x_i - \overline{x_B})^2}{n}.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $\sum n_i = n$, то

$$D_B = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n},$$

то есть выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

На практике при вычислении любой дисперсии удобно использовать формулу

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2,$$

то есть дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат общей средней.

7 Лекция №7. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. При выборке малого объема точечная оценка может привести к большим погрешностям. По этой причине при небольшом объеме выборки пользуются интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами - концами интервала. Эти оценки позволяют установить точность и надежность оценок**.**

Доверительной вероятностью оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство

$$\left|\theta - \theta^*\right| < \gamma.$$

Обычно, надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к 1.

Доверительным интервалом называется интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания *a* нормально распределенного количественного признака *X* по выборочной средней $\overline{x_в}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точность оценки;

n- объем выборки;

t- значение аргумента функции Лапласа *Ф*(*t*), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном σ и объеме выборки меньшей 30, имеем

$$\overline{x_в} - t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где s- «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение;

t_γ -находят по таблице по заданным *n*, γ.

Интервальной оценкой с надежностью γ для среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака *X* по «исправленному» выборочному среднему квадратического отклонения *s* служит доверительный интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad \text{при } q<1,$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad \text{при } q>1,$$

где *q* находят по таблице по заданным *n* и γ.

Интервальной оценкой с надежностью γ неизвестной вероятности биноминального распределения по относительной частоте *w* служит доверительный интервал с приближенными значениями p_1 и p_2

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left[w^2 + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right];$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left[w^2 + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

где *n* - общее число испытаний;

m - число появления события;

w - относительная частота, равная отношению m/n; t - значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $x_в = 14$ и объем выборки равен 15.

Решение: требуется найти доверительный интервал

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения Ф(t)=0,95/2=0,475. По таблице находим t=1,96. Подставим значения t=1,96, $\overline{x_в} = 14$, $\sigma = 5$, n=25 в формулу и получим искомый интервал 12,04<a<15,96.

8 Лекция №8. Метод моментов, метод максимального правдоподобия

8.1 Метод моментов

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в выравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Если распределение определяется одним параметром, то для его отыскания приравнивают один теоретический момент одному эмпирическому моменту того же порядка. Например, можно приравнять начальный эмпирический момент 1 порядка теоретическому моменту 1 порядка: $\nu_1 = M_1$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$ и $M_1 = \overline{x_B}$, то $M(X) = \overline{x_B}$.

Математическое ожидание является функцией от неизвестного параметра заданного распределения, поэтому решив уравнение $M(X) = \overline{x_B}$ относительно неизвестного параметра, тем самым получим его точечную оценку.

Если распределение определяется двумя параметрами, то приравнивают два теоретических момента соответственно к двум эмпирическим моментам того же порядка.

Например, можно приравнять начальный теоретический момент 1 порядка начальному эмпирическому моменту 1 порядка и центральный теоретический момент 2 порядка к центральному эмпирическому моменту второго порядка: $\nu_1 = M_1$, $\mu_2 = M_2$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$ и $M_1 = \overline{x_B}$, $\mu_2 = D(X)$, $m_2 = D_B$, имеем

$$M(X) = \overline{x_B}, \quad D(X) = D_B. \qquad (*)$$

Левые части этих равенств являются функциями от неизвестных параметров, поэтому решив систему (*) относительно них, тем самым получим точечные оценки параметров. Для вычисления выборочной средней $\overline{x_B}$ и выборочной дисперсии D_B надо располагать выборкой $x_1, x_2, ..., x_n$.

8.2 Метод наибольшего (максимального) правдоподобия

Этот метод точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения сводится к отысканию максимума функции одной или нескольких оцениваемых параметров.

Дискретные случайные величины. Пусть *X*- дискретная случайная величина, которая в результате *n* опытов приняла возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины *X* задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку $\theta^* = \theta^*(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2 ...., \tilde{o}_{n)}$.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение x_i через $\eth(x_i, \theta)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot ... \cdot p(x_n, \theta).$$

Оценкой наибольшего правдоподобия параметра θ называют такое его значение $\theta *$, при котором функция подобия достигает своего максимума.

Функции *L, lnL* достигают своего максимума при одном и том же значении θ, поэтому удобнее искать максимум функции *lnL* - логарифмическая функция правдоподобия.

Точку максимума *lnL* можно отыскать, например так:

– найти производную $\dfrac{d \ln L}{d\theta}$;

– приравнять производную к нулю и найти критические точки $\theta *$ - корень полученного уравнения (его называют уравнением правдоподобия);

– найти вторую производную $\dfrac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$. Если вторая производная при $\theta = \theta^*$ отрицательна, то точка $\theta *$ - точка максимума;

– найденную точку максимума θ^* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра θ.

Непрерывные случайные величины. Пусть *X*- непрерывная случайная величина, которая в результате *n* испытаний приняла значения $x_1, x_2, ..., x_{n.}$

Допустим, что вид плотности распределения – функции $f(x)$ - задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется эта функция.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot ... \cdot f(x_n, \theta)$$

Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины ищут также как и в случае дискретной случайной величины.

Глоссарий

Биномиальное распределение − закон распределения случайной величины X, выражающей число появлений события A в n независимых испытаниях, проводимых в одинаковых условиях. Вероятность появления события A постоянна.

Благоприятствующие исходы испытания − элементарные события, при которых событие А наступает.

Вероятность события А− отношение числа ***m*** элементарных исходов испытания, благоприятствующих событию А, к общему числу ***n*** всевозможных элементарных исходов испытания $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Дискретная случайная величина (ДСВ) − величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде последовательности.

Дисперсия случайной величины − математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X)=M\big((X-M(X)\big)^2$.

Достоверное событие − это событие, которое обязательно произойдет при реализации определенного комплекса условий.

Закон распределения ДСВ − правило, по которому каждому возможному значению случайной величины ставится в соответствие вероятность, с которой случайная величина может принять это значение.

Математическое ожидание *ДСВ* - сумма произведений всех возможных значений ДСВ на соответствующие им вероятности $M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i$.

Невозможное событие − это событие, которое заведомо не произойдет.

Независимые события − появление одного из них не изменяет вероятности другого.

Независимые испытания − вероятность какого-либо исхода каждого испытания не зависит от того, какие исходы имели другие испытания.

Непрерывная случайная величина − случайная величина, принимающая все возможные значения из некоторого числового промежутка.

Несовместные события − их одновременное появление в опыте невозможно.

Нормальное распределение − распределение непрерывной случайной величины X, плотность вероятности которой равна $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a - математическое ожидание; σ - среднее квадратическое отклонение.

Относительная частота события А − отношение числа испытаний, в которых событие А произошло, к количеству проведенных испытаний.

Предмет теории вероятностей − изучение закономерностей, возникающих при массовых, однородных опытах.

Случайное событие − явление, которое может произойти или не произойти в результате испытания.

Событие $\bar{A}$ противоположно событию А − если оно происходит тогда и только тогда, когда когда не происходит событие А.

Плотность вероятности − производная функции распределения $f(x) = F'(x)$.

Полная группа событий − появление одного и только одного из них в результате испытания является достоверным событием.

Произведение событий А и В − событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.

Равномерное распределение − распределение непрерывной случайной величины X, все возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, а плотность вероятности постоянна $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \textit{при } a \le x \le b, \\ 0 & \textit{при } x < a,\ x > b. \end{cases}$

Случайная величина − это величина, численное значение которой может меняться в зависимости от исхода испытания.

Среднее квадратическое отклонение − квадратный корень из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Статистическое определение вероятности − если при увеличении числа опытов относительная частота стремится к некоторому фиксированному числу, то это число называют вероятностью события А.

Сумма событий А и В − событие А+В, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Условная вероятность Р(В/А) - это вероятность события В, вычисленная при условии, что событие А уже произошло.

Формула Бернулли − вероятность появления события *A* *m* раз в *n* независимых испытаниях *p=P(A), q=1−p.* $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Функция распределения − функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Элементарные события − это события, обладающие следующими свойствами: 1) образуют полную группу, то есть при каждом осуществлении опыта наступает одно и только одно из них; 2) эти события являются равновозможными.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	0894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	34448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2827	2803	2780	2756	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1609	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0709	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0001

3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000								
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	04783
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4205	2,30	0,4893
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938
0,26	0,126	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956

0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,35	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,1732	2,86	0,4979
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986
0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
						3,2	0,49931	3,8	0,499928
						3,4	0,49966	4,00	0,499968
						3,6	0,499841	4,50	0,499997
								5,00	0,499997

Список литературы

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: - Учебное пособие для вузов.- М.: ВШ, 2013.-479 с.

2 Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике, случайные процессы.- М.: Айрис-пресс, 2006.-288 с.

3 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: ВШ, 2004.-400 с.

5 Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. - Минск: ВШ, 2011. -576 с.

Содержание