

# 《深度逻辑》

## 統一 邏輯、深度學習、與人工智能

YKY

October 20, 2020

### Summary

- BERT 在训练过程中「被逼」预测遮掩的词语，由此诱导出人类的知识，这已经具有 AGI 的雏形
- 从经典逻辑 AI 的角度看，BERT 内部可能有符合逻辑思维的结构，而我们很惊讶地发现，透过 Curry-Howard 对应，BERT 可以看成是一种另类的逻辑
- AGI 系统可以和 逻辑结构（以 范畴论、topos 表述）建立紧密的联系，这个联系可以指导往后的 AGI 发展路线，非常方便
- 我需要一些合作者帮助，特别是 BERT 和 soft Actor-Critic 方面

### Contents

<b>2</b>	<b>Structure of logic</b>	<b>3</b>
2.1	Curry-Howard correspondence . . . . .	3
2.2	Symmetry in logic . . . . .	3
2.3	Symmetric neural network . . . . .	4
2.4	知识图谱 (knowledge graphs) . . . . .	4
2.5	逻辑 与 AI 之间的联系 . . . . .	5
2.6	谓词 (predicates) vs 命题 (propositions) . . . . .	5
2.7	对 逻辑主义 的质疑 . . . . .	6
<b>3</b>	<b>BERT as an alternative logic</b>	<b>7</b>
3.1	BERT 的革命性意义：「闭环路训练」 . . . . .	7
3.2	BERT 的内部结构 . . . . .	7
3.3	BERT 的逻辑化 . . . . .	8
3.4	Attention 是什么？ . . . . .	8
3.5	“Attention is all you need”？ . . . . .	9
3.6	BERT 为什么成功？ . . . . .	10
3.7	改良 BERT：类似 attention 的方法 . . . . .	10
3.8	逆因推理 (abduction) 与 自然语言理解 . . . . .	11
3.9	捕捉更广泛的 semantics . . . . .	11
3.10	Content-addressable long-term memory . . . . .	12

# 1 Structure of AI

An AI is essentially a dynamical system that constantly updates its “state”  $\boldsymbol{x}$ :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad (1)$$

Part of the state  $\boldsymbol{x}$  contains **sensory input** and **action output** that allow the AI to interact with the external environment.

## 2 Structure of logic

The central tenet of my theory is that the state  $\boldsymbol{x}$  of the AI system is consisted of **logic propositions** and that  $\boldsymbol{F}$  plays the role of the **logic consequence** operator  $\vdash$ :

$$\boxed{\text{propositions}} \xrightarrow{\boldsymbol{F}} \boxed{\text{propositions}} \quad (2)$$

So our goal now is to elucidate the structure of  $\vdash$ . Currently the most elegant formulation is given by **categorical logic** or **topos theory**.

### 2.1 Curry-Howard correspondence

### 2.2 Symmetry in logic

- **词语** 组成 **句子**，类比於 逻辑中，**概念** 组成 **逻辑命题**
- 抽象地说，逻辑语言 可以看成是一种有 2 个运算的 **代数结构**：加法（ $\wedge$ ，合并命题，可交换）和 乘法（ $\cdot$ ，用作概念合成，不可交换）

- 例如：

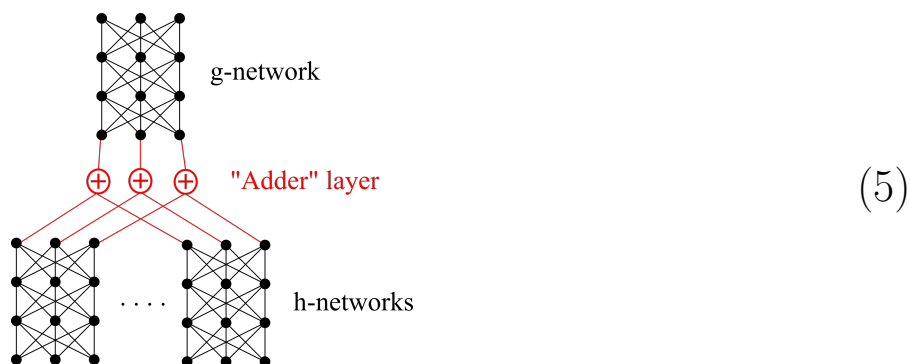
$$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv B \wedge A \\ \text{下雨} \wedge \text{失恋} &\equiv \text{失恋} \wedge \text{下雨} \end{aligned} \quad (3)$$

- Word2Vec 也是革命性的；由 Word2Vec 演变成 Sentence2Vec 则比较容易，基本上只是向量的 **合并** (concatenation)；Sentence 对应於逻辑命题
- 但命题的 **集合** 需要用 symmetric NN 处理，因为集合的元素是**顺序无关**的

## 2.3 Symmetric neural network

- Symmetric NN 问题 已经由 两篇论文解决了：  
[PointNet 2017] [DeepSets 2017]
- Any symmetric function can be represented by the following form (a special case of the Kolmogorov-Arnold representation of functions):

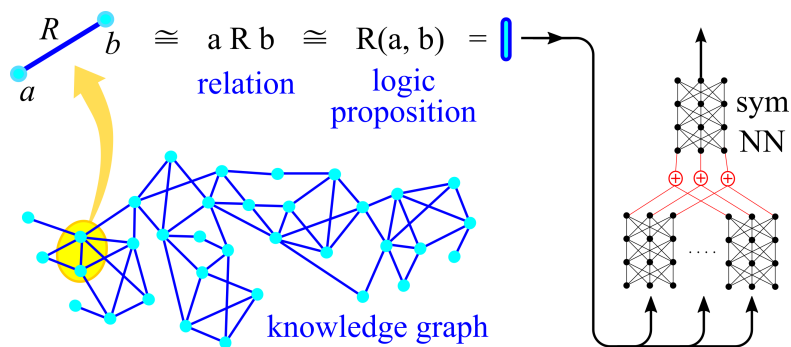
$$f(x, y, \dots) = g(h(x) + h(y) + \dots) \quad (4)$$



## 2.4 知识图谱 (knowledge graphs)

- 知识图谱 不能直接输入神经网络，它必需分拆成很多 edges，每个 edge 是一个 **关系**，也是一个 **逻辑命题**；也可以说 “graphs are isomorphic to

logic”



- 而这些 edges 似乎必需用 **symmetric NN** 处理，因为它们是 permutation invariant
- 逻辑化 建立了 知识图谱 和 BERT 之间的一道桥梁  
接下来讨论 BERT....

## 2.5 逻辑 与 AI 之间的联系

- 既然 AI 基於 逻辑，则 AI 与逻辑之间 必然存在 精确 (precise) 的联系
- BERT 似乎是在执行 句子之间的变换，而这些句子是 word embedding 的 concatenation，例如：

$$\text{苏格拉底} \cdot \text{是} \cdot \text{人} \xrightarrow{\text{BERT}} \text{苏格拉底} \cdot \text{会} \cdot \text{死} \quad (7)$$

这个做法看似很「粗暴」，其实它和 **逻辑式子** 的作用一样：

$$\forall x. \text{Human}(x) \Rightarrow \text{Mortal}(x) \quad (8)$$

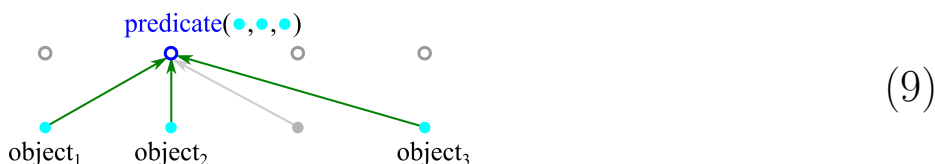
而这式子，根据 Curry-Howard 对应，就是 (7) 的函数映射！

- 我会在另一辑 slides 里 简介一下这些理论；可以说，逻辑的 几何结构 是「永恒」的，它可以指示 AI 的 长远发展

## 2.6 谓词 (predicates) vs 命题 (propositions)

- “Predicate” 来自拉丁文「断言」的意思

- 逻辑里，predicate 代表一个 没有主体 / 客体的断言，换句话说，是一个有「洞」的命题
- 命题 = 谓词 (predicate) + 主体 / 客体 (统称 objects)
- 例如：Human(John), Loves(John, Mary)
- 从逻辑的角度看，attention 的输出可以看成是 predicate 和 objects 的结合：



- 形象地说：

$$\begin{aligned} \text{predicate} + \text{objects} &= \text{proposition} \\ \text{blue circle} + \text{blue dots} \dots &= \text{blue line} \end{aligned} \quad (10)$$

## 2.7 对 逻辑主义 的质疑

- 很多人怀疑：人脑真的用 逻辑 思考吗？
- 其实我们每句表达的 语言，都是逻辑形式的 (logical form)
- 直觉认为，人脑 构造一些 models，再从 model 中「读出」一些结论
- 例如给定一个描述：「已婚妇人出轨，用刀刺死丈夫」

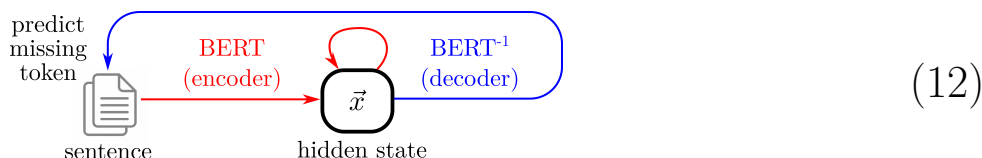


- 那么 妻子穿著什么衣服？衣服什么颜色？这些都是 臆想 出来的细节，是不正确的
- 这个 model 可以有哪些细节？答案是：任何细节都不可以有，除非是 逻辑上蕴含的，或被 逻辑约束
- Model 本身可以是一些 抽象的逻辑命题 构成的，这也合理；反而，一个有很多感官细节的 model 并不合理
- 其实人脑可能 比我们想像中 更接近逻辑

## 3 BERT as an alternative logic

### 3.1 BERT 的革命性意义：「闭环路训练」

- BERT 利用平常的文本 induce 出知识，而这 representation 具有 通用性 (universality) :



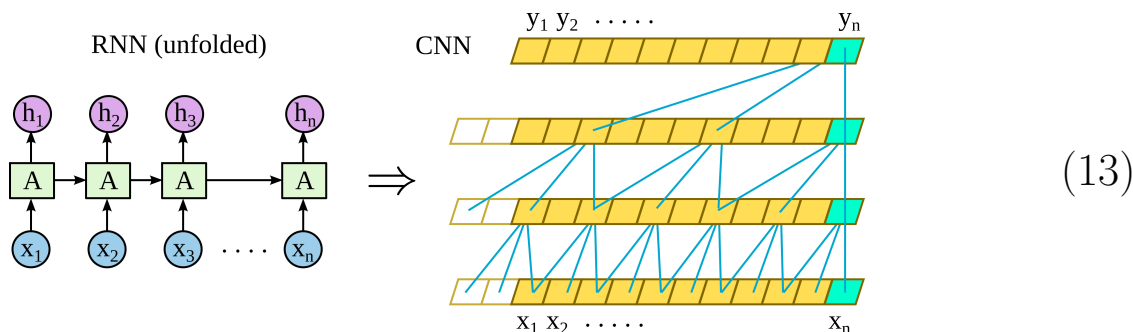
换句话说：隐状态的 representation 压缩了句子的意思，而它可以应用在别的场景下

- This implies that human-level AI can be *induced* from existing corpora, 而不需重复 像人类婴儿成长的学习阶段
- 这种训练方法是较早的另一篇论文提出，它并不属于 BERT 的内部结构

### 3.2 BERT 的内部结构

其实，BERT 也是混合了很多技巧 发展而成的：

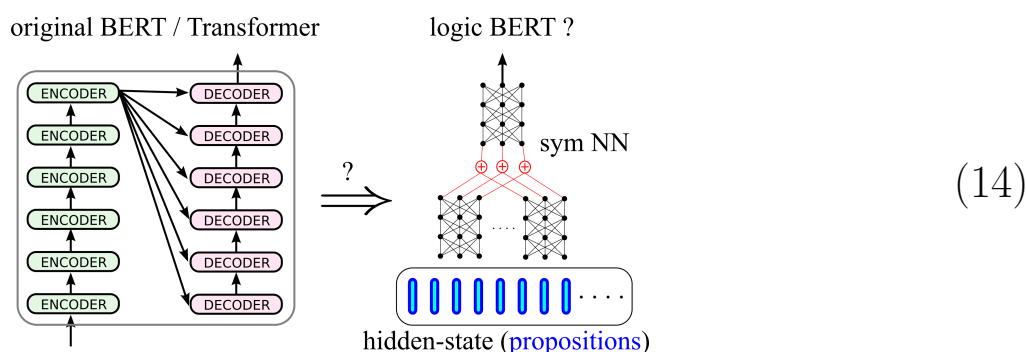
- BERT 基本上是一个 seq-to-seq 的运算过程
- Seq-to-seq 问题最初是用 RNN 解决的
- 但 RNN 速度较慢，有人提出用 CNN 取代：



- CNN 加上 attention mechanism 变成 Transformer
- 我的想法是重复这个思路，但引入 逻辑的对称性

### 3.3 BERT 的逻辑化

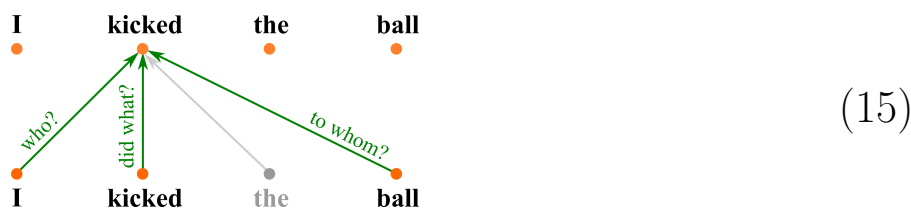
- 可以强迫 BERT 的隐状态变成 “set of propositions” 的形式，方法是将对称性施加在 Encoder 上：



- 下面会看到，BERT 的「注意力机制」已经是对称的，它可以做逻辑推导

### 3.4 Attention 是什么？

- 注意力 最初起源於 Seq2seq，后来 BERT 引入 self-attention
- Attention 的本质就是 加权，权值 可以反映 模型 关注的点
- For each input, attention weighs the **relevance** of every other input and draws information from them accordingly to produce the output
- 在 BERT 里，attention 是一种 **words** 之间的关系：

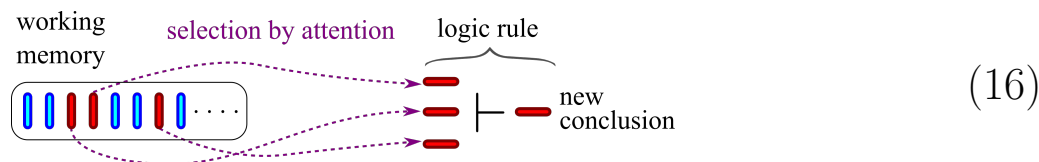


- 但，从逻辑的角度看，word  $\neq$  命题
- 在逻辑学上，必需分清 命题内部 与 命题之间 这两个层次，非常关键！



### 3.5 “Attention is all you need” ?

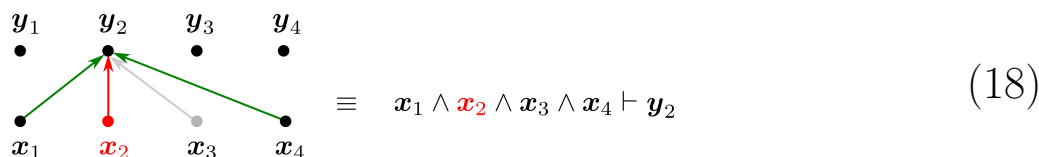
- 类似地，**高层的** attention 可以处理 **命题之间** 的关系
- 我们希望 attention 做到的是 **选择** 有关联的命题，去做逻辑推导：



- 但从  $N$  个命题中选择  $K$  个，可以有  $\binom{N}{K}$  个子集，是 exponential 的
- BERT 的做法是：每次只输出  $N$  个命题，而前提的 “support” 也是上一层的 全部  $N$  个命题，每个前提的「影响力」由 matrix 权重决定
- 根据 Curry-Howard isomorphism, BERT 的映射 其实对应於某种 **另类的逻辑** (BERT 的设计者可能也意识到这点)，这种逻辑的好处是运行**非常快**
- BERT 的逻辑 看似有局限，但这种表面的局限未必阻止它是 universal 的逻辑
- 关键是在 速度 与 逻辑的 expressive power 之间 找到平衡
- 最简单的 attention 公式是（其中  $Q, K, V = \text{query, key, value 矩阵}$ ）：

$$y_j = \sum_i \langle Q \mathbf{x}_j, K \mathbf{x}_i \rangle V \mathbf{x}_i \quad (17)$$

(**红色** 代表注意力的 focus) 这对应於一个逻辑式子：



亦即是说： $y_j$  是由  $x_1, \dots, x_n$  得出的逻辑结论 with focus on  $\mathbf{x}_j$

- 所谓 “focus” 并不是 逻辑概念，它只是 BERT 加速的 heuristic

- 容易看到, attention 對於  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  是 **交换不变的** (equivariant), 这表示每层 attention 的输出是一些 **逻辑命题**, 和我的理论相符
- **Multi-head** attention 亦有一个很好的逻辑解释: 即使  $\text{focus} = \mathbf{x}_j$ , 亦有其他不同的前提, 可以导致不同的结论, 例如:

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \vdash \mathbf{y}_1 \quad , \quad \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \vdash \mathbf{y}_2 \quad (19)$$

## 3.6 BERT 为什么成功?

- 6 层的 BERT 有  $512 \times 6 = 3072$  个 head, 如果  $8 \times$  multi-head 则有 24576 个
- Each head does not simply correspond to 1 formula in conventional logic, may require further in-depth analysis....
- 我的猜测是: BERT 的高层 representation 是一些有 “high-level” 意义的命题, 就像在视觉中, 高层特征 代表一些复杂的物体
- The embedding of high-level propositions in vector space may be “semantically dense”, meaning that slight changes in the vector position may convey many different meanings
- 由於 logic rules 是以 6 层的 hierarchy 组织而成, 这結構具有 “**deep learning**” 的特性

## 3.7 改良 BERT: 类似 attention 的方法

- The BERT attention formula (17) has some unnecessary restrictions, where generally we just need a symmetric function in the  $\mathbf{x}_i$ 's
- The general form of symmetric functions is given by (4)

- Imitating BERT, we introduce a “focus” of attention on  $\mathbf{x}_j$ :

$$\mathbf{y}_j = g( h(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_1) + \dots + h(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_n) ) \quad (20)$$

this preserves **equivariance**

- We can use this function to replace the entire BERT Encoder:



### 3.8 逆因推理 (abduction) 与 自然语言理解

- 根据 Jerry Hobbs 的 “abductive interpretation of natural language” 理论, 语言理解 是一个 **解释** (explain) 的过程
- 解释** 在逻辑上等同於 **逆因推理** (abduction), 亦即是 **逻辑蕴涵** (implication,  $A \Rightarrow B$ ) 的反方向
- 举例来说: 天气热  $\Rightarrow$  流汗, 所以「天气热」就是「流汗」的 **解释**
- 这个理论 今天很少人知道, 因为属於 经典逻辑 AI 时期

2013 年 他  
获得  
计算语言学  
终身成就奖



### 3.9 捕捉更广泛的 semantics

- 阅读时, 我们 (人脑) 有时可以预测下个 word (这是 BERT 训练的目标), 但有时即使不能预测, 但看到 next word 之后, 仍会有某种「意料之内」的感觉

- 举例来说：

「天气热，我不停 流汗」  
「天气热，我不停 吃冰淇淋」

第二个例子是比较少见的，但也合理

- （从逻辑角度看）BERT 只会预测 **最有可能** 的结论：

$$\text{前提} \xrightarrow{\text{BERT}} \text{预测} \quad (22)$$

其实我们想要的是：

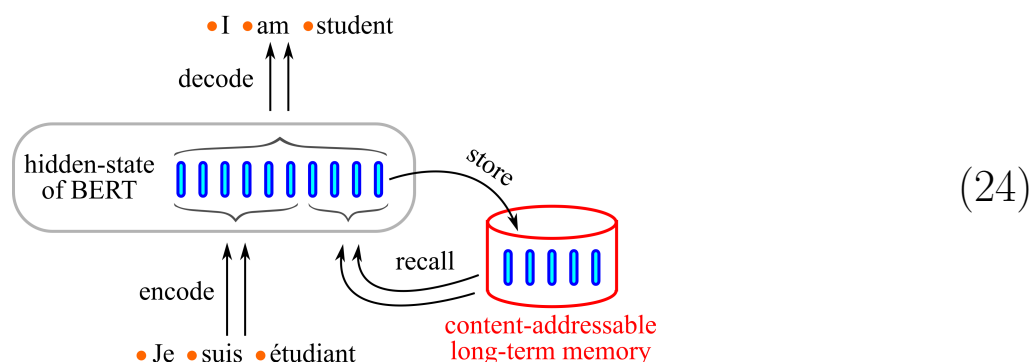
$$\text{前提} \longrightarrow \text{很多不同的 预测} \quad (23)$$

而只要其中一个预测成功，即给予「奖励」

- 这个情况和 **强化学习** 中的 “stochastic actions” 类似，需要的是：stochastic, multi-modal, continuous actions （例如 SAC, soft actor-critic）

### 3.10 Content-addressable long-term memory

- Content-addressable memory 的想法来自 Alex Graves *et al* 的 Neural Turing Machine [2014]
- 以前 BERT 的隐状态 没有逻辑结构，我们不是很清楚它的内容是什么；逻辑化之后，BERT 内部的命题可以储存在 **长期记忆** 中：



- 这种系统 已非常接近 strong AI，而这是有赖 **逻辑化** 才能做到的
- 但这个 idea 暂时仍未成熟，有待更多研究

## 4 References

欢迎提问和讨论 ☺

## References

- [1] Alex Graves, Greg Wayne, and Ivo Danihelka. “Neural Turing Machines”. In: *CoRR* abs/1410.5401 (2014). arXiv: 1410.5401. URL: <http://arxiv.org/abs/1410.5401>.
- [2] Qi et al. “Pointnet: Deep Learning on Point Sets for 3D Classification and Segmentation”. In: *CVPR* (2017). <https://arxiv.org/abs/1612.00593>.
- [3] Zaheer et al. “Deep sets”. In: *Advances in Neural Information Processing Systems* 30 (2017), pp. 3391–3401.