# 再谈一次 AI 的逻辑结构

YKY 甄景贤

July 30, 2020

# Table of contents



多谢 支持 ☺️

# 「神经」知识表示

为什么要研究 神经知识表示?

- 从经典 logic-based AI 的传统，一直在使用「符号」的知识表示法
- 符号逻辑 很容易转换成 抽象代数 / 范畴论 形式（它们是同一个大家庭的「近亲」)
- 然而 或许存在 截然不同 的知识表示法? 但我们很难想像它 长什么样子
- 人脑的「神经」知识表示，可以作为参考, 然后再研究它和逻辑表示之间的 correspondence

神经知识表示 的特点:

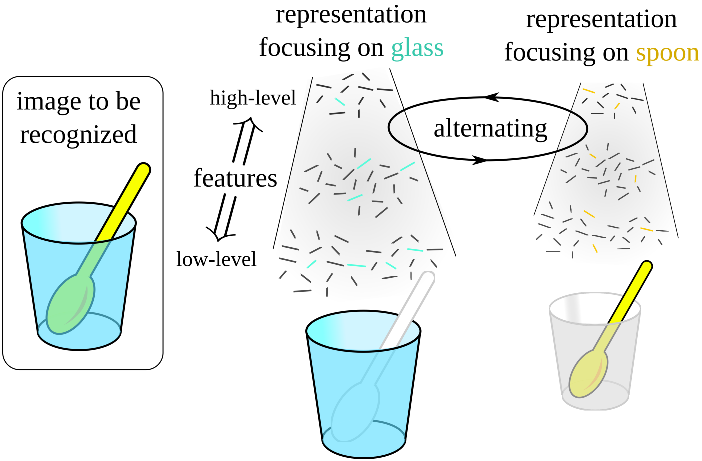
- distributive（分布性）
- model-based (vs rule-based)
- *in situ*（固定性）— 例如辨认「猫」的时候，大脑中 相应的神经元被 激活，但这些 神经元 不能移动，所以「猫」的表示 也不可移动

问题是：如果要辨认「白猫追黑猫」，「猫」的表示是固定的，则这两个「猫」表示 如何共存於神经网络中?

答案很可能是：两个「猫」交替地 出现在 时间上

# 神经 特征簇 (feature clusters)

例如，以「匙羹在杯中」作例子：

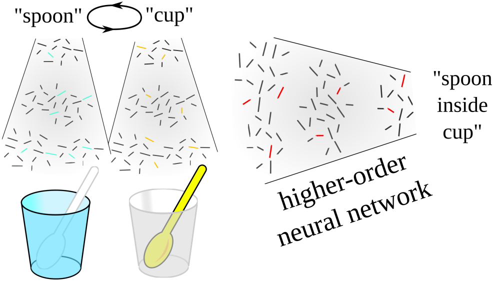



(1)

每个 复杂物体 由一个 feature cluster 辨认。多个「特征簇」在时间上交替出现，可以看成是一种 composition，例如 $A \cdot B$ 或 $A \circ B$.

# 高阶 特徵

- 一串 特征簇 的时间序列，例如 $A \cdot B$，可以被 更高阶 的神经网络 用作输入。高阶辨认 的结果是一些关系 (relations)，例如「匙羹在杯内」




(2)

- 这似乎是一个 特征空间 $\times$ 时间 的映射 $f : X \times T \to Y$
- 关於这部分其实我仍未肯定，或许有其他方法

# 关於 “model-based reasoning” 的质疑

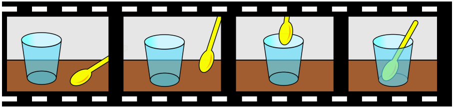
- 很多人认为大脑的思考方式是 先在脑中构造 models，然后再从 models 中「读出」一些结论
- 例如给定一个描述：「已婚妇人出轨，用刀刺死丈夫」

(3)

- 如果假设「妻子有长头发」、「丈夫死时穿著西装」，这些都是 臆想 出来的细节，是不正确的
- 那么这 model 可以有哪些细节？答案是：任何细节都不可以有，除非是 逻辑上蕴含的
- 例如我们可以假设妻子 probably 有一双手臂，但也有例外的情况是独臂的，这是一种 逻辑推导
- 所以，其实所谓 “model-based reasoning” 并没有那么神奇，也并不一定正确，它的细节必需被 逻辑 约束
- 而 model 本身也可以用一些 抽象的逻辑命题 构成，这也是合理的；反而，一个有很多感官细节的 model 并不合理

# 神经 $\leftrightarrow$ 逻辑 correspondence

- 我们的目标是了解 神经表示 和 逻辑表示 之间的关系，这关系或许可以用范畴论描述?
- 定义 复杂情境 (complex scenario) 是 感知材料 (sensory data) 的一个片段，如:

 (4)

又或者一个故事，例如「John 爱 Mary 但 Mary 不爱他」
- 一个复杂情境 可以用若干个 特征簇 描述
- Equivalently, 复杂情境 可以用 逻辑 表示，就是一大堆 逻辑命题 的 conjunction，这些命题 钜细无遗 地描述该情境

# 再谈一次 逻辑结构

- 以前曾经说过，机器视觉 的成功，有赖於 将 视觉的几何结构 impose 在深度神经网络上
- 这 深度神经网络 原本是 “free” 的，但加了限制之后，权重空间 变小了（例如维数降低），所以学习加速了
- 所谓 symmetry 的意义，简单例子：「如果知道左边等於右边，那就只需计算一次」
- 换句话说，数学家喜欢对称性，是因为它经常可以简化计算
- 同理，我们想将 逻辑结构 的对称性 impose 到神经网络
- 实际上，可能只需要逻辑上的交换律，就可以达到 强人工智能，正如 机器视觉的成功，在於引入了 CNN 的 convolution 结构，后者只是 视觉不变性 的其中一个最显著的 invariant
- 现代逻辑理论 非常漂亮，我花了十多年时间才弄懂，我希望将这套 逻辑-学习 理论简单讲解一下，也算功德完满了

- 在经典时代，逻辑的 代数形式 可以用 Boolean algebra 表述，然而这方法只适用於 命题逻辑
- Boolean algebra 是中学生熟悉的，类似 Venn diagram 的结构
- 这种结构和 拓樸学 的 open sets 结构一样，所以 命题逻辑 也可以看成是一种 topology
- 然而 predicate logic 的结构更复杂，直到最近才有比较完善的表述
- 现代逻辑结构和 type theory 有深刻的关系，此即 Curry-Howard isomorphism
- 现代逻辑也涉及 topos theory，那是一种由 algebraic geometry 引入的结构

# Type theory and the Curry-Howard isomorphism

- 大家都知道 Lisp 语言没有 type，它是一种 untyped $\lambda$-calculus
- 在 Lisp 之上引入 type system，衍生成 ML, Caml, OCaml, Haskell 等 一系列语言
- 每一个 program 属於某个 type，例如 $\mathrm{length}()$ 函数，输入一个字串，输出它的长度；$\mathrm{length}$ : String $\rightarrow$ Integer
- 有些逻辑学家 察觉到 类型论 的 $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ 和逻辑中 $P \rightarrow Q$ 是一模一样的
- 这个关系的发现者至少包括:
  Brouwer-Heyting-Kolmogorov-Curry-de Bruijn-Howard
- 这关系的深刻之处，在於把 符号逻辑上的 proofs 和 程式语言 的 programs 划上等号，前者是 符号／静态的，后者是 程序／动态的
- 每个 proof 就是一个 program，它输入一些 arguments，输出 关於那些 arguments 的证明
- 例如:「所有人都会死」是一个 program，它输入「苏格拉底」，输出「苏格拉底会死」
- 这个对应也許可以应用到深度学习：神经网络 也是一種 函數 / mapping，它将 逻辑前提 map 到结论

# Topos theory and fibrations

- Predicate logic （谓词逻辑）和 命题逻辑 之间的差异在於 fibration 结构
- Fibration 通常用 $\begin{smallmatrix}\mathbb{E}\\ \downarrow p\\ \mathbb{B}\end{smallmatrix}$ 表示，$\mathbb{B}$ = base space, $\mathbb{E}$ = ètalè space, $p$ = projection
- Base space 是 type 的空间，ètale space 是 predicate 的空间
- 由於 Curry-Howard 对应, type = propositions，在 base 空间上只有 命题逻辑
- 例如 $\mathbb{B}$ 空间的一个 type 是 $\text{Human}$，$\mathbb{E}$ 空间的一个谓词是 $\text{Mortal}$
- 於是有以下这个 type inference rule:

$$i : \text{Human} \vdash \text{Mortal}(i) : \mathsf{Prop} \tag{5}$$

意思是说，如果 $i$ 属於 $\text{Human}$ 类型，则 $\text{Mortal}(i)$ 属於 Prop 类型

- $H(a)$ is a type.
- $H$ is a prodicate type.
- The proof of $H(a)$ may be the tuple $(a, H)$ or $a \in H$

多谢收看 ☺️