AGI from the perspective of categorical logic

YKY

March 27, 2024

Basics

- 首先 范畴逻辑 的中心思想是 Curry-Howard isomorphism，不明白这点无从入门。
- Curry-Howard 同构 指的是：用数学上 函数的 模拟 逻辑上的蕴函关系 $A \Rightarrow B$.
- 由于这个对应关系，逻辑上的 命题 A 对应与函数的 domain A.
- 也就是说，命题对应于某种类似 空间 的东西。
- 而那空间里的物体，就是所谓 proof objects，即该命题的证明。
- 这样说有点难懂，但其实我们天天都面对这种东西：那就是 神经网络。
- 它将某些 向量 映射到 别的向量，向量 就是 proof，
- 某个向量周围的空间（在一定误差下）表示 同一概念，
- 所以不妨把那邻域的空间看成是一个 逻辑命题。
- 这种做法实在太明显也太自然了。

做了这个对应之后，逻辑上 $A \Rightarrow B$ 的真值表，很奇妙地跟函数空间的基数 (cardinality) 吻合：

A	B	$A \Rightarrow B$	B^A
0	0	1	$0^0 = 1$
0	1	1	$1^0 = 1$
1	0	0	$0^1 = 0$
1	1	1	$1^1 = 1$

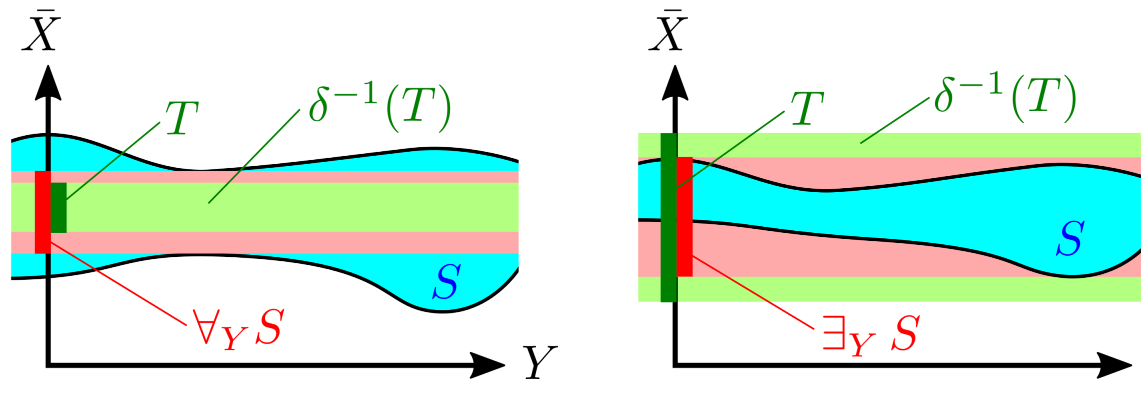
(1)

这也让我们更有信心，Curry-Howard 同构是将逻辑 数学化 的正确方向。

范畴逻辑 的目的就是：利用范畴论里各种抽象的工具，描述 逻辑的结构。

基于 命题 = 某种空间，那么 很自然地，我们可以用范畴里的 物体 (objects) 代表命题，这种做法更为一般。用范畴论 里的 products 表达逻辑上的 $\wedge$ 或 $\vee$，exponentiation 表达 逻辑上的 $A \Rightarrow B$，这也同时是范畴里的 morphism $A \to B$.

$\forall$ 和 $\exists$ 是 某种 variable substitution map 的 adjoint，因为 adjunction 也是数学上常见的结构：



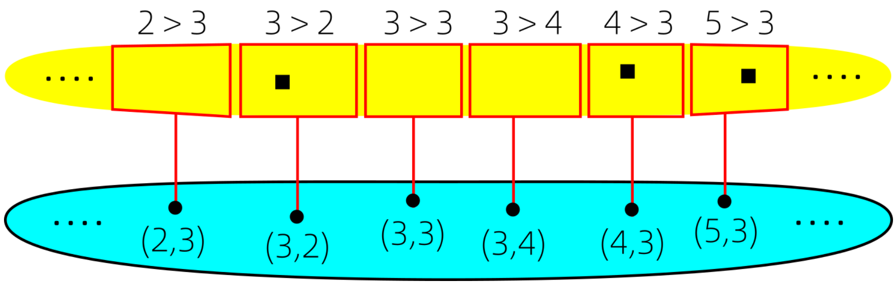
(2)

(这比较复杂，但我以前也讲解过了，重要的是理解整体的概念，暂时不要迷失在细节里)

①

Where is GPT?

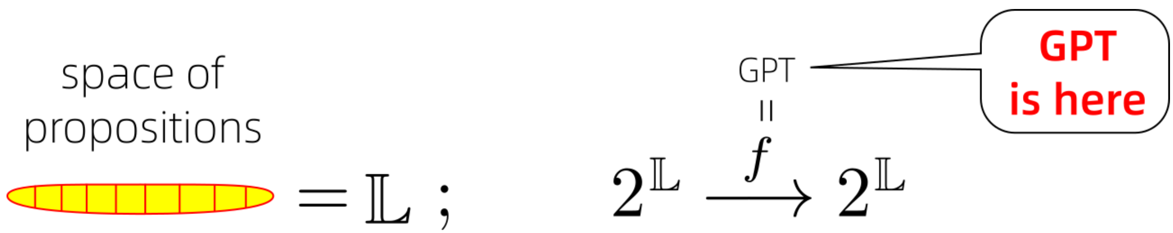
逻辑 谓词 (predicates) 表示为 纤维结构 (fibration), 即以一个 base 空间 对某个上层空间做 “indexing,” 可以看下图理解:



(3)

我们考虑的是某个二元关系 “>”, 所以底层 base space 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 即一对对的自然数。我们可以构成 谓词逻辑命题 $>(a, b)$，而因为 Curry-Howard，这些命题是一些 “空间”，即上层那些黄色的方格。每个方格是一个命题，它可以有或没有 证明，即黑色的小方格 。

上面 所有黄色方格的 并集 就是一个 层 (sheaf)，它是所有命题的空间 $\mathbb{L}$. GPT 就是一个将 命题 映射到 命题 的 逻辑推论算子 (logic consequence operator). 但注意: GPT 是一种 set-valued mapping, 它作为函数的 domain 不是 $\mathbb{L}$，而是 命题的 集合 的空间，亦即 power set of L 或者可以记作 PL:



(4)

大家知道了「GPT 在哪里」，是不是觉得清晰了很多？至少我是这样觉得的，因为我非常熟悉 logic-based AI, 我习惯了从这个角度 理解我需要用的数学。

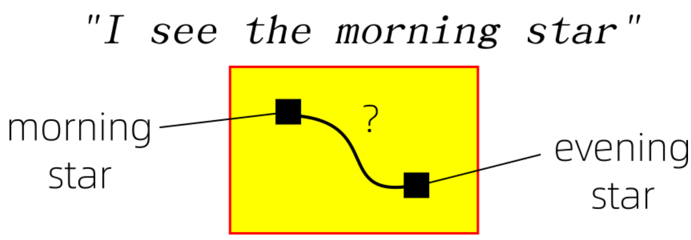
②

What is HoTT?

由于 Curry-Howard 说 命题 是 某种「空间」，那么这空间会不会有 拓扑结构？最近英年早逝的天才 Voevodsky 提出了 命题空间内有 homotopy 的结构，那就是 HoTT (homotopy type theory) 的基本思路。

以我肤浅的理解，一个命题 要么有证明 或没有证明，如果有证明的话，A 证明和 B 证明 是没有分别的。但 HoTT 提出 它们可以有区别。在一个命题的内部空间里，path-connected 的两个点 (proofs) 被视为 identical，但这空间内可以有不是 path-connected 的空间结构，那么 两个 proofs 就可以视为 不相同。

一个例子是：西方古代将 金星 视为 morning star 和 evening star，而不知道它们其实是同一颗星。这就是 intension 和 extension 的不同（意指和实际的外延不同），涉及 内涵逻辑 (intensional logic) 的问题，它的 语义可以用 模态逻辑 (modal logic) 和 Montague semantics 处理，详细可参看这篇文章：https://plato.stanford.edu/entries/logic-intensional/



(5)

又例如 同一个群 可以有不同的 群展示 (group presentations)，似乎也可以用 HoTT 处理。

这些 不是 path-connected 的空间 具有 groupoid 结构，可以产生 1-groupoid，2-groupoid 等不同的层级，直至 ∞-groupoid. 这方面我暂时不太理解。

大家可以看到，HoTT 涉及的是「真」的 内部（即黄色方格），但 AGI 主要涉及的是 逻辑的应用，是在 命题空间的 外部（即整个黄色香蕉那空间、其子集空间

之间的映射）。这并不是说 HoTT 对 AGI 没用，但它的影响是比较 微妙 (subtle) 的，我暂时不能判断。

其实 Transformer 有能力学习非常复杂的 syntactic manipulations，也就是说，它可以隐式地学习各种我们研究的逻辑，例如 modal logic，的推导方式。如果这样，它似乎可以「绕过」而不需要我们直接 implement 那些麻烦的逻辑形式。但也有可能是，我们人工地 附加某些 逻辑结构 的 约束，可以加速 深度学习。这些需要实验证实，是现时非常重要的方向。

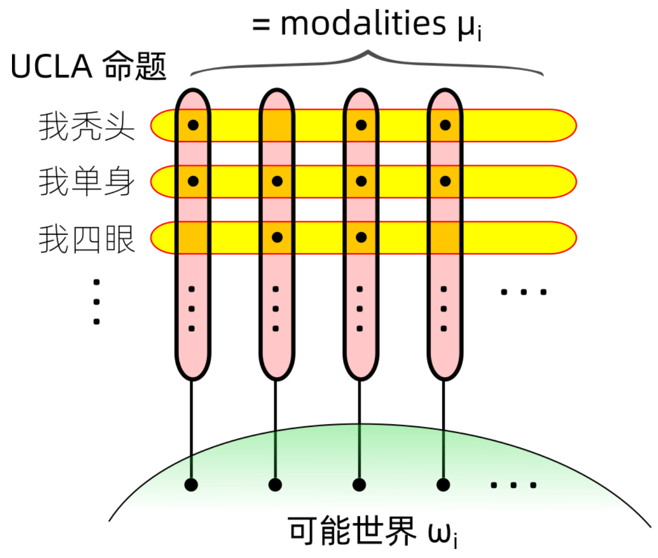
③

Modal logic and sheaf semantics

模态逻辑 (modal logic) 与 可能世界语义 (possible world semantics) 是一种很 powerful 的逻辑形式，它可以处理很多哲学逻辑上的课题。以前我学习符号逻辑 AI 时，比较忽略它，因为要在 计算机上实现 模态逻辑引擎 比较麻烦。随着 AGI 越来越接近，我觉得有必要更仔细研究一下。

这篇文章的重点是：模态逻辑 具有 层 (sheaf) 和 topos 的结构。事实上，topos semantics 是逻辑语义学的「最新」发展（其实也很旧了 哈），有说 topos 语义能处理几乎所有我们知道的逻辑语义（究竟有什么例外我也不知）。

以下这个图就是精要：



(6)

- 底下的绿色集合 纯粹是 每个可能世界的指标 (index)，例如 N = {1,2,3,4 }
- 每个蓝色的「冰条」代表一个 可能世界。它们构成一个 纤维结构 (fibration) 或 层。
- 红色横线 表示 每个逻辑命题 在不同的可能世界内的取值情况
- Modality = 可能世界 的同义词，在 John L Bell 的书里用这术语

但我觉得最精简的论述是这篇 2008 的论文：Topology and Modality: The Topological Interpretation of First-Order Modal Logic by Awodey & Kishida. 本文主要是基于这篇。

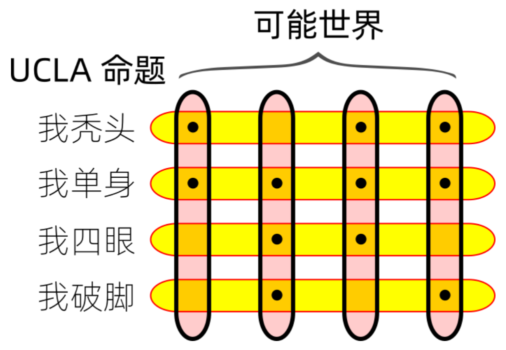
那篇论文的重点是：modal propositional logic 有某种简单的 拓扑语义，而 first-order predicate logic 有另一种 denotational 语义，将两者「乘积」起来，构成 first-order modal logic 的 sheaf 语义。（学过 编程语言语义学 的人可能已听过 denotational semantics.）我们先分别介绍这两种语义：

模态逻辑的拓扑语义

这是 Tarski-McKinsey 1944 年 最先提出的。想法就是：

- 一个 可能世界 对应于 拓扑空间的一个 开集 (open set)
- 一个 命题 等同于 其所在为真的可能世界的 集合 (= set of open sets) 这种命题称为「UCLA 命题」，由加州大学的研究者们提出
- 模态算符 和 分别对应于拓扑上的 closure 和 interior operation

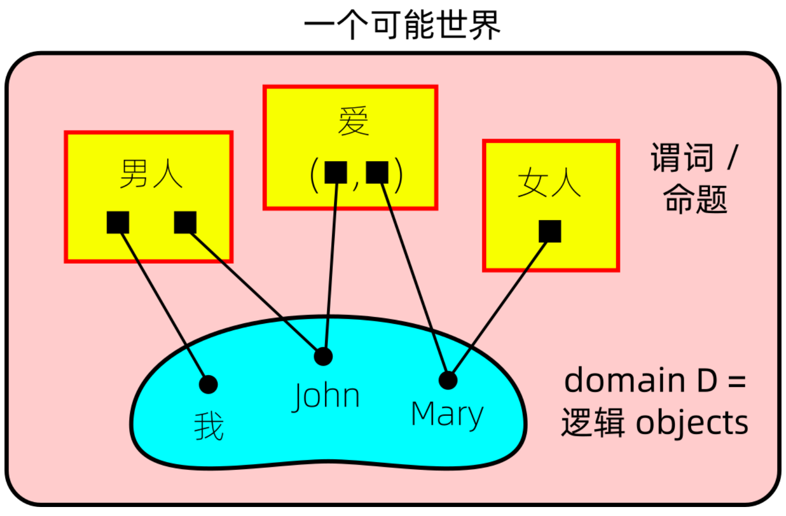
举例来说，只考虑下面 4 个可能世界，那么「我破脚」并不是必然的，但「我单身」是必然的。「 我单身」这命题的 interior = 全域，所以命题为 真。



(7)

谓词逻辑的 denotational 语义

这部分是比较经典的 模型论 (model theory)，我不想花太多时间解释，基本上它用一个 结构 来 诠释 (interpret) 逻辑命题。D 是一个逻辑物体的 论域 (domain)，例如 苹果，香蕉，橙，John，Mary 等。R 是一些 关系 (relations) 或 谓词 (predicates)，例如「x 是男人」、「x 喜欢吃 y」等。f 是一些 函数 (functions)，例如「x 的妈妈」、「x 最喜欢的水果」、等。c 是一些 常数，例如「c1 = John」等。一个结构 M 包含足够的资料去 赋值 (interpret) 任何命题的真假。也可以把 M 看成一个 可能世界 的资料，只是它是唯一的世界而已。



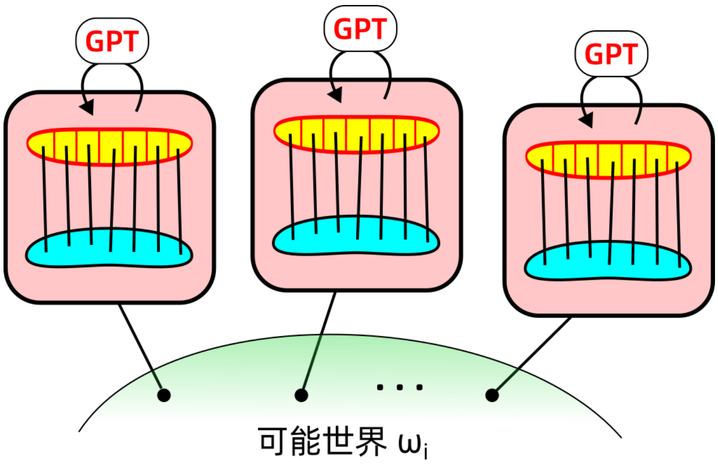
(8)

④

结合 modal 与 first-order 语义

所谓结合，似乎是一种乘积，或者更简单地就是 将纤维顺着方向并排起来，这是一个 加法:

构成一个 sheaf，而 sheaf 也可以看成是 topos. 整体的图像大概是这样的:



(9)

- 从 人脑 的角度看，它处理「可能世界」的能力是很有限的。
- 最经典的例子是 下棋 时，每个预测的棋步就是一个可能世界。在一般情况下，人们通常只能预测 3-5 步。
- 每个 可能世界 其实跟当前的世界 只相差一个命题，似乎在实践上不必把可能世界想象成「庞然大物」。
- 可能世界 是在思考时 动态地 (dynamically) 产生的，我们不可能快速地根据每个可能世界 训练一个 GPT，因此上面的 GPT's 是同一个训练结果的 拷贝。
- 如要实现 模态逻辑 推理，要将上面那个「小 GPT」的功能扩充，让它可以处理多个可能世界的推理。暂时我想到的方法，纯粹是沿用 经典逻辑 AI 的思路，例如将每个可能世界 tag 上特定的命题，然后再计算
- 当可能世界的个数很少时，拓扑 的 closure / interior 概念似乎没有太大的启发性。从 计算机 的角度看，连续空间是很「理想化」的东西，实际上很难实现。

这些都算颇直观的，我有空会详细一点看，但现在突然觉得这个方向未必太有用....

Some technical details about sheaves

5

What's the use of all these to AGI?