

现代数学基础丛书

# 光滑映射的奇点理论

李养成 著

科学出版社  
2002



Pao Yue-kong Library  
PolyU • Hong Kong

QA

614

·58

·L529

2002

## 内 容 简 介

本书主要介绍:函数芽在低余维下的分类与形变理论,除法定理与 Malgrange 预备定理,映射芽的开折理论,映射芽的有限决定性, Thom-Boardman 奇点集,稳定映射芽的分类以及奇点理论在分歧问题研究中的应用.本书比较全面地阐述基本理论与方法,并反映近 20 年来奇点理论的某些发展,其中包括作者及国内研究者的部分工作,试图将读者引导到现代研究前沿.

读者对象:高等院校数学系高年级学生、研究生、大学教师及有关的科技工作者.

### 图书在版编目(CIP)数据

光滑映射的奇点理论/李养成著. —北京:科学出版社,2002.1  
(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-009594-4

I. 光… II. 李… III. 映射(数学) - 奇点理论 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 042759 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002 年 1 月第一版 开本:850×1168 1/32

2002 年 1 月第一次印刷 印张:13

印数:1—2 000 字数:336 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(北燕))

YiXingLi  
科学出版社

## 序 言

奇点理论是分析学科中的一个新的分支,它是处在分析、微分拓扑、微分几何、交换代数与李群以及微分方程等数学学科交汇处的一门学问,又在诸多领域,如微分方程、振荡积分、动力系统、分歧理论、突变理论、几何光学与波动光学等学科中有广阔的应用.

E. Brieskorn 曾说:“在数学的许多领域以及许多应用中,都有反常现象,而‘正常与反常’这一对矛盾则是数学里最常见的矛盾……”. 这里所谓的反常就是指某种奇异性,也就是奇点的实质背景. 可以说奇异性具有普遍性,其实科学家早就观察到并认识到研究它们的重要性,但直到 20 世纪 50 年代 H. Whitney 做出开创性工作之前尚无人对此做过系统的研究,原因是当时数学的发展水平尚未能为其诞生提供思想和工具的准备. 我们回顾一下奇点理论发展的历史进程,最早有 20 世纪 30 年代 H. M. Morse 的临界点理论,40 年代 H. Whitney 的与微分流形嵌入、浸入有关的奇点工作,以及 L. Pontryagin 与 H. Whitney 研究的与示性类有关的奇点工作. 这一时期是个别成果积累与建立一般理论的酝酿阶段,也是奇点的萌芽时期. 1955 年 H. Whitney 发表了关于把平面映到平面的映射奇点工作,它标志着奇点理论作为一门独立的数学分支登上了数学的舞台. 1960 年 R. Thom 更进一步把奇点理论中的方法与结果纳入一个更为概括的理论框架中,经过 Thom 的提炼,奇点理论得到蓬勃的发展,出现了像 J. Mather, V. I. Arnold 等人的一系列重大成果和进展,至此呈现出一个繁荣的局面. 因此把这一有发展前景的理论介绍给我国读者是一件很有意义的工作,而李养成教授这本著作也就应运而生. 近二三十年来,国外在奇点理论方面陆续有几本著作面世,并各有其优点,但与国外的同类著作相比,本书有以下两个特点:

(1) 奇点理论发展至今其内容已如此丰富,因此在选材上就

必须周密考虑. 本书选材适当, 它既包含了近 20 年来发展迅速的一些重要论题(其中也含有作者本人的研究成果), 而又不是盲目地追求全面, 以免内容太多而增加读者的困难与负担, 这样既能使读者较为方便地进入这个领域, 并能较快地深入到这一领域的某些研究前沿, 又可以适合于不同目的的读者的要求.

(2) 可读性强. 奇点理论具有深厚的实际背景, 但需借助现代数学工具, 其研究的过程及结果的表达便显得相当的抽象, 掩盖了它的具体背景, 因此对读者来说在理解与掌握上都相当费时费力. 而本书在处理重要概念与理论上, 结合了许多具体的例子来讲述, 使读者能透过形式化的表达方式, 建立起直觉的感性认识, 这是符合认识论的, 无疑对读者在理解与掌握理论上会有极大的帮助.

由于本书具有上述特点, 相信它对读者学习奇点理论会有很大的用处. 我为它的出版而高兴, 所以应李养成同志所约写下上面一些话(也是我读此书时的一点感想)作为序言.

李培信

2000 年春于北京中关村

## 前　　言

V. I. Arnold 在《突变理论》中指出：“在 Whitney 的奠基性工作之后，奇点理论发展迅猛，现在已成为数学的最重要领域之一。”面对奇点理论如此丰富的内容，本书着重于局部理论，试图从中选取十分有意义的重要内容予以介绍，其中包括近 20 年来部分研究专题。下面简述本书的内容安排。

芽是奇点理论中最基本的概念。第一章分别就函数芽、映射芽以及微分同胚芽做了介绍。我们假定读者熟悉反函数定理，Taylor 公式和常微分方程的解的存在惟一性定理，由此可自然地建立芽的导网，局部微分同胚群的无穷小生成元（用向量场芽表达）以及具有常秩的映射芽的标准形式（即秩定理）等。而通过对芽取有限导网运算，光滑函数芽环及光滑映射芽所成之模都变为有限维实向量空间， $\mathbb{R}^n$  上的局部微分同胚群变为 Lie 群，这样有可能将无穷维问题化简为有限维来处理，这是奇点理论研究中一种重要手段。本章还讨论了一类重要的函数芽即 Morse 芽，证明了 Morse 引理，并初步探讨光滑函数芽的分类。第二章引入 R. Thom 的横截性概念，它是微分拓扑和奇点理论中的一个重要的基本概念。横截性是正则性概念的延伸，我们在证明 Sard 定理之后，建立了各种形式的横截性定理，包括参数横截性定理，导网形式的横截性定理，并应用于 Thom 的一阶奇点集的讨论，为进一步学习 Thom-Boardman 奇点（见第十一章）做准备。读者从 § 2.5 中的一些结果可看出横截性这一工具的威力。以上两章组成本书的预备知识。

第三章讨论余维数不大于 5 的函数芽的分类，给出了 Thom 分类定理，突变论中 7 种初等突变模型，它是奇点理论在 20 世纪 70 年代最重要的成果之一。由于一个函数芽余维数有限等价于该函数芽关于右等价群  $\mathcal{R}$  是有限决定的，这说明分类问题与函数芽的有限决定性有着密切的联系，因此在探讨函数芽在低余维下的

分类之前,我们讨论函数芽关于右等价群的有限决定性.这样做还有助于读者更好地理解映射芽有限决定性的一般理论(见第十章).本书第四、五两章分别介绍除法定理与 Malgrange 预备定理.对于一般的除法定理,首先证明它等价于多项式除法定理,然后采用 Nirenberg 方法证明多项式除法定理.第五章我们从除法定理推导 Malgrange 预备定理.事实上它们彼此是等价的,都表达了分析学中的一个深刻结果,但预备定理使用了更加代数化的语言来陈述.须知 Malgrange 预备定理是奇点理论的一个非常有用的工具,曾被 Thom 誉为局部分析的四大支柱之一.在第五章有一节介绍该定理的应用,以此为基础,第六章讨论函数芽的形变理论.如果一个函数芽  $f$  存在通用形变,那么对  $f$  做扰动产生的每一个形变都可由  $f$  的通用形变导出,这说明研究通用形变是很有意义的.本章的一个主要结果是通用形变定理,由它可推知函数芽  $f$  具有通用形变的充要条件是  $f$  具有有限余维,因而等价于它是有限  $\mathcal{R}$ -决定的.此外,通用形变还可用横截性来描述.利用形变理论继续对 Thom 的初等突变模型讨论,可看出它为突变理论的发展提供了理论依据.第七章介绍 Whitney 的著名工作,从平面到平面的光滑映射的奇点,证明了在一般状况下,这样的奇点只能是折叠或尖点.

第八章引入 J. N. Mather 提出的 5 类局部微分同胚群,讨论映射芽在这 5 类群(特别是左右等价群  $\mathcal{A}$  和接触等价群  $\mathcal{K}$ )作用下的切空间,为本书余下的几章做准备,这是因为映射芽的切空间的有关信息为研究映射芽本身提供了重要信息.第九章介绍映射芽的开折理论,主要结果是两个通用性定理.第一个对群  $\mathcal{A}$  作用下的开折而言,称为  $\mathcal{A}$ -通用开折定理,它曾被 Thom 猜测而由 Mather 所证明.第二个则在接触等价意义下以形变的形式表达,叫做  $\mathcal{K}$ -通用形变定理.作为它的一个应用,§ 9.3 介绍了 B. Morin 研究过的一类高阶奇点.第十章开展映射芽的有限决定性理论的讨论,这是自 20 世纪 70 年代以来非常活跃的研究课题.本章不仅比较简洁地全面描述了 Mather 的基本结果,而且反映了在该理论

发展中的一些有代表性的研究成果,介绍了基本的研究方法与技巧,以便于读者较快地进入该研究领域.第十一章讨论 Thom-Boardman 奇点,介绍了 Boardman 的基本理论.证明了映射芽的 Boardman 符号是接触等价不变量,因而可应用于映射芽  $\mathcal{M}$ -等价的判别.并且对映射芽的开折而言,它也是一个不变量,从而为研究稳定映射芽的分类做准备.第十二章在刻画了稳定映射芽的代数及几何特征后,证明了 Mather 关于稳定芽的基本分类定理,并且陈述了他关于稳定映射的一些深刻结果. Mather 对于稳定映射的一系列深入研究为奇点理论的发展做出了重要贡献.为理解 Mather 的工作,本章给出了稳定芽分类的几个典型实例,并讨论了某些稳定映射可能出现的奇点类型.第十三章讨论奇点在分歧理论中的应用,它是由 M. Golubitsky 和 D. G. Schaeffer 等所开创并且自 20 世纪 80 年代以来得到很大发展的研究领域.本章讨论的对象是以紧致 Lie 群为对称群的分歧问题,因此本章开头两节介绍紧致 Lie 群的有关知识,接着讨论与紧致 Lie 群可交换的光滑映射芽.在这一章中我们应用奇点理论方法与群论方法相结合研究静态分歧问题,主要考虑分歧问题的识别与开折两个方面,试图为读者继续深入研究创造条件.

本书力求用简明易懂的叙述方式,试图深入浅出地介绍基本概念与基本理论,以帮助读者掌握其要义,领悟基本思想与方法.同时希望本书能反映近 20 年来奇点理论的某些发展,以便读者能较快地进入现代研究的某些领域.本书包含了我国奇点理论工作者及作者本人的部分研究工作.在内容编排上,本书兼顾到读者的不同需求.全书可作为研究生教材,也可供大学教师和应用奇点理论的科技工作者阅读与参考.本书前 7 章还可供大学数学系高年级本科生选修课使用.阅读本书不要求读者具有奇点理论方面的初步知识,如果读者熟悉有关流形、李群及交换代数的初步知识则更方便.对于初学者,某些命题(例如 Sard 定理, Nirenberg 扩张引理等)的证明亦可略去不读.

本书第四、五两章由李兵博士撰写初稿,他还阅读过书稿的若

于章节,提出许多改进意见,感谢他为本书付出的辛勤工作.

本人特邀请我的老师李培信教授为本书作序并担任本书主审,整个写作过程包括酝酿写作大纲到成书出版一直得到他的关心与指教.李先生审阅全部书稿提出不少宝贵意见.作者在此对李培信先生的关心、鼓励与指导表示最诚挚的感谢.

作者非常感谢姜伯驹、刘应明院士为推荐本书出版给予的有力支持,十分感谢沈信耀、虞言林、陆洪文、陈志华、杨向群和唐梓洲教授对本书的关心、支持与真诚帮助.感谢余建明、邹建成博士的热忱支持.由于作者学识有限,书中难免有谬误之处,热诚欢迎读者批评指正.

本书得到国家自然科学基金委员会基金项目的部分资助,还得到中南大学和湖南师范大学的资助.作者借此机会一并表示感谢.作者感谢科学出版社特别是吕虹编审的辛勤劳动.

李养成

2001年1月于中南大学

## 目 录

第一章 芽与导网	1
§ 1.1 光滑函数芽环	1
§ 1.2 具有常秩的光滑映射芽	11
§ 1.3 $\mathbb{R}^n$ 的局部微分同胚群	21
§ 1.4 Morse 芽	30
第二章 横截性	37
§ 2.1 横截性概念	37
§ 2.2 Sard 定理	45
§ 2.3 基本横截性引理	53
§ 2.4 Thom 横截性定理	56
§ 2.5 光滑映射的秩的一般属性	63
第三章 余维数不超过 5 的实值函数芽的分类	68
§ 3.1 光滑函数芽环上的模	68
§ 3.2 光滑函数芽的切空间和余维数	72
§ 3.3 有限决定的函数芽	80
§ 3.4 余维数不大于 5 的函数芽的分类	84
第四章 除法定理	92
§ 4.1 除法定理与多项式除法定理	92
§ 4.2 多项式除法定理的证明	98
§ 4.3 Nirenberg 扩张引理的证明	104
第五章 Malgrange 预备定理	110
§ 5.1 预备定理的陈述	110
§ 5.2 预备定理的证明	113
§ 5.3 应用	118
第六章 实值函数芽的形变	125
§ 6.1 基本概念	125

§ 6.2 两个引理 .....	129
§ 6.3 通用形变定理 .....	132
§ 6.4 通用形变与横截性 .....	135
§ 6.5 位势芽的通用形变 .....	138
第七章 平面到平面的光滑映射的奇点 .....	145
§ 7.1 引言 .....	145
§ 7.2 折叠与尖点 .....	147
§ 7.3 在一般状况下平面到平面的映射的奇点 .....	154
第八章 光滑映射的局部研究:切空间 .....	159
§ 8.1 问题的提出 .....	159
§ 8.2 对应于群 $\mathcal{A}$ 的切空间 .....	161
§ 8.3 切空间计算举例 .....	170
§ 8.4 接触等价群与相应的切空间 .....	174
§ 8.5 映射芽的 $\mathcal{K}$ -余维数 .....	182
第九章 映射芽的通用开折 .....	188
§ 9.1 通用开折 .....	188
§ 9.2 通用开折定理的证明 .....	192
§ 9.3 应用:一类特殊的 $\Sigma^{1,\dots,1,0}$ 型奇点 .....	197
§ 9.4 在接触等价下的形变 .....	201
第十章 映射芽的有限决定性 .....	206
§ 10.1 引言 .....	206
§ 10.2 逼近引理 .....	207
§ 10.3 无穷小判别法 .....	212
§ 10.4 $\mathcal{A}_k$ -决定性 .....	221
§ 10.5 决定性阶数估计 .....	227
§ 10.6 $M$ -决定性的基本估计 .....	240
§ 10.7 $G_{q,k}$ -决定性 .....	257
第十一章 Thom-Boardman 奇点 .....	263
§ 11.1 Thom 和 Boardman 意义下的奇点集 .....	263
§ 11.2 Boardman 定理的陈述 .....	272

§ 11.3	Boardman 符号与开折	278
§ 11.4	应用: 映射芽 $\mathcal{K}$ -等价的判别	281
第十二章	稳定映射芽的分类	287
§ 12.1	稳定映射芽的特征	287
§ 12.2	稳定芽的基本分类定理	294
§ 12.3	定理 12.2.1 的证明	297
§ 12.4	稳定芽分类举例	307
§ 12.5	稳定映射的奇点	313
第十三章	在分歧问题研究中的应用	321
§ 13.1	紧致 Lie 群的 Haar 积分与线性表示	322
§ 13.2	Hilbert-Weyl 定理和 Schwarz 定理	331
§ 13.3	不变函数芽环上的有限生成模	338
§ 13.4	等变分歧问题	346
§ 13.5	等变分歧问题的识别	357
§ 13.6	等变分歧问题的开折	368
附录 A	Mather 的一条重要引理	385
附录 B	Hilbert 基定理	388
参考文献		391
索引		396

# 第一章 芽与导网

讨论光滑映射的局部性质,自然地引入芽的概念.本章前3节分别介绍函数芽、映射芽以及微分同胚芽的基本概念与基本性质.读者将会发现书中有时用代数的语言来表达几何与分析性质.而对芽取导网运算,将光滑函数芽(或映射芽)用它们的 Taylor 多项式(或 Taylor 多项式映射)来代替,有可能将无穷维问题简化为有限维来处理,这是奇点理论研究中一种重要手段.第四节介绍 Morse 芽,初步探讨光滑函数芽的分类,可看做是前3节的应用.

## § 1.1 光滑函数芽环

如果两个函数在一点的某个邻域内相一致,那么它们在该邻域内具有相同性质.我们在讨论函数的局部性质时,可以将它们归入同一类而不加区分.因此对在某点附近有定义的一族函数分类进行研究自然导致函数芽的概念.

### 1.1.1 $C^\infty$ 函数芽环

设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $n$  元实值函数  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  叫做无穷次可微的,如果对于  $U$  中的每一点  $x$ ,  $f$  的各阶偏导数在点  $x$  都连续.  $U$  上的无穷次可微函数又叫做光滑函数或  $C^\infty$  函数.

**定义 1.1.1**  $C^\infty$  函数在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽是  $C^\infty$  函数  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $U$  为点  $0$  的开邻域)的一个等价类,其等价关系规定如下:两个  $C^\infty$  函数  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$  和  $\tilde{g}: V \rightarrow \mathbb{R}$  是等价的,当且仅当存在点  $0$  的开邻域  $W \subset U \cap V$ ,使得  $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$ . 以上述  $\tilde{f}$ (或  $\tilde{g}$ )为代表的  $C^\infty$  函数芽记为  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $C^\infty$  函数芽又叫做光滑函数芽.

将  $C^\infty$  函数在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽组成之集记为  $\epsilon_{(\mathbb{R}^n, 0)}$  或简记为

$\epsilon_n$ . 我们可在  $\epsilon_n$  中引入代数运算. 设  $f, g \in \epsilon_n$ , 取它们的代表  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{g}: V \rightarrow \mathbb{R}$ . 按照函数的加法和乘法, 有

$$\tilde{f} + \tilde{g}: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\tilde{f} + \tilde{g})(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x).$$

$$\tilde{f} \cdot \tilde{g}: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\tilde{f} \cdot \tilde{g})(x) = \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x).$$

然后取  $\tilde{f} + \tilde{g}, \tilde{f} \cdot \tilde{g}$  在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽, 分别记为  $f + g, f \cdot g$ , 叫做函数芽  $f$  与  $g$  的和与积.

容易验证  $\epsilon_n$  对于加法与乘法做成一个具有单位元的可换环, 实际上它是一个实代数. 这是因为  $\mathbb{R}$  本身是一个实数域, 并且  $\epsilon_n$  中的加法、纯量乘法以及乘法是由  $\mathbb{R}$  上的运算诱导出来的.

类似地可以定义  $C^\infty$  函数在任意点  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽, 并记所有这样的芽组成之集为  $\epsilon_{(\mathbb{R}^n, x_0)}$ , 在该集中引入代数运算使它成为一个可换环.

本书中的函数芽指的是  $C^\infty$  函数芽, 若无其他声明的话.

### 1.1.2 极大理想及其幂

令  $\mathcal{M}_n = \{f \in \epsilon_n \mid f(0) = 0\}$ , 易见  $\mathcal{M}_n \subset \epsilon_n$  是极大理想且  $\epsilon_n / \mathcal{M}_n = \mathbb{R}$ . 事实上,  $\mathcal{M}_n$  是  $\epsilon_n$  中惟一的极大理想. 为证实这一点, 假设  $f \notin \mathcal{M}_n$ , 则  $f(0) \neq 0$ , 因而它的任意一个代表  $\tilde{f}$  在原点的某一邻域内的值不为 0,  $1/\tilde{f}$  在该邻域内有定义而且是  $C^\infty$  的, 这说明  $f$  是一个可逆芽并且不包含在  $\epsilon_n$  的任何真理想中.

设  $x_1, \dots, x_n$  是  $\mathbb{R}^n$  中的坐标函数, 则  $\mathcal{M}_n$  由  $x_1, \dots, x_n$  生成. 更一般地, 我们有下列结论.

**定理 1.1.1** 设  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$  的坐标为  $(t_1, \dots, t_k; x_1, \dots, x_n)$ , 简记为  $(t, x)$ . 令

$$\mathcal{I} = \{f: (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t, 0) = 0, t \text{ 与 } 0 \in \mathbb{R}^k \text{ 相邻近}\}. \quad (1)$$

则  $\mathcal{I}$  是  $\epsilon_{k+n}$  中的理想, 由坐标函数芽  $x_1, \dots, x_n$  所生成. 于是

$$f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f = \sum_{i=1}^n x_i f_i, f_i \in \epsilon_{k+n}, i = 1, \dots, n.$$

证 容易看出  $\mathcal{J}$  是  $\epsilon_{k+n}$  中的理想. 选取  $f \in \mathcal{J}$  的一个代表  $\tilde{f}: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  满足  $\tilde{f}|_{U \times \{0\}} = 0$ , 其中  $U$  为  $\mathbb{R}^k$  中原点的邻域,  $V$  为  $\mathbb{R}^n$  中原点的凸邻域. 取  $(t, x) \in U \times V$ , 连接点  $(t, 0)$  与点  $(t, x)$  的直线段  $\subset U \times V$ , 且  $\tilde{f}(t, 0) = 0$ . 由微积分中的牛顿-莱布尼兹公式, 有

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t, x) &= \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \tilde{f}(t, \lambda x) d\lambda \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t, \lambda x) \cdot x_i \right) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t, \lambda x) d\lambda.\end{aligned}$$

令

$$\tilde{f}_i(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t, \lambda x) d\lambda,$$

则  $\tilde{f}_i$  是  $C^\infty$  函数,  $i = 1, \dots, n$ , 并且

$$\tilde{f}(t, x) = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{f}_i(t, x),$$

取在  $0 \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$  处的芽, 得

$$f = \sum_{i=1}^n x_i f_i, \quad f_i \in \epsilon_{k+n}.$$

由此可知,  $\mathcal{J}$  由坐标函数芽  $x_1, \dots, x_n$  生成. 证毕.

注 将任意  $f \in \epsilon_n$  和由  $f'(t, x) = f(x)$  所定义的  $f' \in \epsilon_{k+n}$  等同, 从而将  $\epsilon_n$  等同于  $\epsilon_{k+n}$  的一子环. 理想  $\mathcal{J}$  可改写为  $\mathcal{M}_n \epsilon_{k+n}$  或  $\mathcal{M}_x \cdot \epsilon_{k+n}$ , (1) 式则写为

$$\mathcal{M}_n \cdot \epsilon_{k+n} = \{f \in \epsilon_{k+n} \mid f|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = 0\}. \quad (2)$$

现介绍本定理的一个应用.  $\epsilon_n$  的一个线性算子

$$X: \epsilon_n \rightarrow \mathbb{R}$$

叫做求导算子, 如果它满足莱布尼兹法则

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(0) + f(0) \cdot X(g), \quad f, g \in \epsilon_n.$$

特别,  $X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) + X(1)$ . 于是  $X(1) = 0$ . 并且  $X(c) = 0$ ,  $c$  为常值函数芽.

容易验证  $\epsilon_n$  的求导算子全体组成一个向量空间, 记为  $T_0 \mathbb{R}^n$ , 叫做  $\mathbb{R}^n$  在原点的切空间. 进而有

**定理 1.1.2**  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 : \epsilon_n \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) (i = 1, \dots, n)$  为向量

空间  $T_0 \mathbb{R}^n$  的一组基.

**证**  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$  是  $\epsilon_n$  的求导算子 ( $i = 1, \dots, n$ ). 为证它们是  $T_0 \mathbb{R}^n$  的基, 首先说明它们是线性无关的. 设

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

将它作用于坐标函数芽  $x_j$ , 得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \Big|_0 = \lambda_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

其次说明  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right\}$  是生成集. 设  $X$  是  $\epsilon_n$  的任意一个求导算子且  $X(x_i) = \mu_i (i = 1, \dots, n)$ , 则

$$Y = X - \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$$

也是求导算子且  $Y(x_i) = 0$ . 任取  $f \in \epsilon_n$ , 据定理 1.1.1, 有

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i f_i, \quad f_i \in \epsilon_n,$$

因此

$$\begin{aligned}
Y(f) &= Y(f(0)) + \sum_{i=1}^n Y(x_i f_i) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^n Y(x_i) \cdot f_i(0) + \sum_{i=1}^n x_i(0) \cdot Y(f_i) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

于是  $X = \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$ , 证毕.

为讨论方便起见, 引入下列记号: 设  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 其中  $\alpha_i$  为非负整数, 记

$$\begin{aligned}
\alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad 0! = 1, \\
|\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\
D^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f, \quad |\alpha| = D^\alpha \text{ 的阶数.}
\end{aligned}$$

对于  $(\lambda, \alpha) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 其中  $\lambda_i, \alpha_i$  为非负整数, 记

$$\begin{aligned}
(t, x)^{\lambda+\alpha} &= t_1^{\lambda_1} \cdots t_k^{\lambda_k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\
D^{\lambda+\alpha} f &= \frac{\partial^{|\lambda|+|\alpha|}}{\partial t_1^{\lambda_1} \cdots \partial t_k^{\lambda_k} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.
\end{aligned}$$

**定理 1.1.3** 设  $\epsilon_{k+n}$  中理想  $\mathcal{M}_n \cdot \epsilon_{k+n}$  如定理 1.1.1 中所述,  $r \geq 1$ , 则

$$\mathcal{M}_n^r \cdot \epsilon_{k+n} = \{f \in \epsilon_{k+n} \mid D^{\lambda+\alpha} f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$$

对所有  $\lambda$  及所有  $\alpha$ ,  $|\alpha| < r\}$ ,

并且这一理想由形如

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = r$$

的  $r$  次单项式芽生成.

证  $\mathcal{M}_n^r \cdot \epsilon_{k+n} = \{f \in \epsilon_{k+n} \mid f = \sum_i f_{i_1} \cdots f_{i_r}, f_{i_j} \in \mathcal{M}_n \cdot \epsilon_{k+n}\}$ ,

其中  $\sum_i$  为有限和. 据定理 1.1.1, 本定理的第二个断言明显成立.

至于第一个断言, 从乘积的求导法则可知,  $f \in \mathcal{M}_n^r \cdot \epsilon_{k+n} \Rightarrow D^{\lambda, \alpha} f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$  对所有  $\lambda$  及所有  $\alpha (|\alpha| < r)$  皆成立. 另一方面, 若对每一  $\alpha (|\alpha| < r)$  有  $D^0, \alpha f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$ , 则依归纳法,  $f \in \mathcal{M}_n^{r-1} \cdot \epsilon_{k+n}$  且  $f = \sum_{|\alpha|=r-1} f_\alpha \cdot x^\alpha$ . 欲证  $f \in \mathcal{M}_n^r \cdot \epsilon_{k+n}$ , 只需证对所有  $\alpha, |\alpha| = r-1, f_\alpha \in \mathcal{M}_n \cdot \epsilon_{k+n}$ , 即  $f_\alpha \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$  就行了. 倘若存在  $\alpha_0, |\alpha_0| = r-1$ , 使得  $f_{\alpha_0} \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} \neq 0$ , 则在  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  上,

$$D^{0, \alpha_0} f = \sum_a D^{0, \alpha_0} (f_\alpha \cdot x^\alpha) = \alpha_0! \cdot f_{\alpha_0} \neq 0,$$

这与  $D^{0, \alpha} f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$  对所有  $\alpha (|\alpha| < r)$  均成立相矛盾!

**推论 1.1.1** 设  $f \in \epsilon_n$ , 则  $f \in \mathcal{M}_n^{r+1} \Leftrightarrow f$  以及它的阶数不大于  $r$  的所有偏导数在  $0 \in \mathbb{R}^n$  的值均为零.

我们将属于  $\mathcal{M}_n^{r+1}$  中的函数芽叫做在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处  $r$ -平坦的函数芽.

### 1.1.3 导网(导网)空间 $J_n^r$

设  $f \in \epsilon_n$ . 依 Taylor 公式, 将  $f$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处做 Taylor 展开, 得

$$f(x) = f(0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + \epsilon(x), \quad (3)$$

其中余项  $\epsilon(x) \in \mathcal{M}_n^{r+1}$ .  $f \in \epsilon_n$  在  $\epsilon_n / \mathcal{M}_n^{r+1}$  中的像叫做  $f$  的  $r$ -导网, 记为  $j^r(f)$  或  $j^r f$ . 由上式知,  $j^r f$  可表示为  $f$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的  $r$  阶 Taylor 多项式. 因此  $\epsilon_n$  中二函数芽  $f$  和  $g$  具有相同的  $r$ -导网, 当且仅当  $f$  与  $g$  以及它们的阶数直到  $r$  的所有相应的偏导数在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的值均相等.

将商代数  $\epsilon_n / \mathcal{M}_n^{r+1}$  记作  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , 简记为  $J_n^r$ . 根据 Taylor 公式,  $J_n^r$  标准地同构于次数不大于  $r$  的  $n$  元多项式代数. 在这一多项式代数中的乘法是将两个次数不大于  $r$  的  $n$  元多项式按通常的方式相乘然后舍去次数大于  $r$  的所有各项.  $J_n^r$  还叫做  $\mathbb{R}^n$  上的  $C^\infty$  函数在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的  $r$ -导网组成的代数. 显然

$$\epsilon_n / \mathcal{M}_n^{r+1} \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{r+1},$$

其中  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  表示  $x_1, \dots, x_n$  的多项式环,  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{r+1}$  表示由  $x_1, \dots, x_n$  生成的理想  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  的  $(r+1)$  次幂.

商空间  $\mathcal{M}_n^r / \mathcal{M}_n^{r+1}$  可以标准地等同于  $n$  元  $r$  次齐次多项式所成的实向量空间.

#### 1.1.4 $\epsilon_n$ 中具有有限余维的理想

设  $I$  是  $\epsilon_n$  中的理想. 若  $\epsilon_n / I$  作为实向量空间是有限维的, 则  $I$  叫做  $\epsilon_n$  中余维有限的理想. 数  $\dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / I$ , 记为  $\text{Codim} I$ , 叫做  $I$  在  $\epsilon_n$  中的余维数. 例如,  $\mathcal{M}_n^r$  ( $r$  为自然数) 便是  $\epsilon_n$  中余维有限的理想.

**命题 1.1.1** 设  $I$  为  $\epsilon_n$  中理想,  $I$  在  $J_n^r$  中的投影记为  $\bar{I}$ , 则下列条件是等价的:

- (i)  $I \supset \mathcal{M}_n^r$ ,
- (ii)  $\bar{I} \supset \mathcal{M}_n^r / \mathcal{M}_n^{r+1}$ , 即  $I + \mathcal{M}_n^{r+1} \supset \mathcal{M}_n^r$ .

证 (i)  $\Rightarrow$  (ii) 显然.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $\{g_1, \dots, g_s\}$  是  $\mathcal{M}_n^r$  的一组生成元, 例如可取形如  $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha_i$  为非负整数且  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = r$  的  $r$  次单项式作为  $\mathcal{M}_n^r$  的生成元.

由条件  $\mathcal{M}_n^r \subset I + \mathcal{M}_n^{r+1}$ , 则对每一  $g_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), 可找到  $f_i \in I$ , 使得

$$g_i - f_i \in \mathcal{M}_n^{r+1},$$

而  $\mathcal{M}_n^{r+1} = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{M}_n^r$  的每一元素可表为  $\sum_{j=1}^s \lambda^j g_j$  ( $\lambda^j \in \mathcal{M}_n$ )，因此

$$g_i = f_i + \sum_{j=1}^s \lambda_i^j g_j, \quad \lambda_i^j \in \mathcal{M}_n, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

或

$$g_i - \sum_{j=1}^s \lambda_i^j g_j = f_i, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4)$$

用矩阵来表示方程组(4)，有

$$M \cdot g = f,$$

其中  $M = (\delta_i^j - \lambda_i^j)_{1 \leq i, j \leq s}$ ,  $\delta_i^j$  为 Kronecker 符号, 当  $i = j$  时值为 1, 否则为 0, 又  $g = (g_1, \dots, g_s)^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_s)^T$  为列向量.

因为  $\lambda_i^j \in \mathcal{M}_n$ ,  $M(0)$  为单位矩阵并且  $\det M(0) = 1$ , 所以  $\det M \in \epsilon_n$  是可逆的. 借助高等代数知识可求出逆矩阵  $M^{-1}$ , 其元素  $\in \epsilon_n$ , 于是

$$g = M^{-1} \cdot f.$$

该方程说明每一  $g_i$  可表为诸  $f_j$  的线性组合, 其系数取自  $\epsilon_n$ . 因诸  $f_j$  属于  $I$ , 故每一  $g_i$  属于  $I$ , 从而  $\mathcal{M}_n^r \subset I$ .

**推论 1.1.2** 设  $I$  是  $\epsilon_n$  中理想, 则下列条件等价:

- (i)  $I$  在  $\epsilon_n$  中具有有限余维,
- (ii) 存在正整数  $r$  使得  $I \supset \mathcal{M}_n^r$ .

**证** (ii)  $\Rightarrow$  (i) 因  $\mathcal{M}_n^r$  具有有限余维, 故

$$\dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / I \leq \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / \mathcal{M}_n^r < \infty.$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 因

$$I + \mathcal{M}_n \supset I + \mathcal{M}_n^2 \supset \dots \supset I + \mathcal{M}_n^r \supset I + \mathcal{M}_n^{r+1} \supset \dots \supset I,$$

我们有

$$\dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / (I + \mathcal{M}_n) \leq \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / (I + \mathcal{M}_n^2) \leq \cdots \leq \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / (I + \mathcal{M}_n^r) \\ \leq \cdots \leq \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / I < \infty,$$

因此必存在  $r_0$ , 使得

$$\dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / (I + \mathcal{M}_n^{r_0}) = \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / (I + \mathcal{M}_n^{r_0+1}),$$

于是

$$I + \mathcal{M}_n^{r_0} = I + \mathcal{M}_n^{r_0+1}.$$

将命题 1.1.1 应用于  $\mathcal{M}_n^{r_0} \subset I + \mathcal{M}_n^{r_0+1}$ , 得  $\mathcal{M}_n^{r_0} \subset I$ . 证毕.

为研究  $\epsilon_n$  中余维有限的理想  $I$ , 仿前考虑理想的序列套

$$\epsilon_n \supset_{c_1=1} \mathcal{M}_n \supset_{c_2} I + \mathcal{M}_n^2 \supset_{c_3} \cdots \supset_{c_{r-1}} I + \mathcal{M}_n^{r-1} \supset_{c_r} I + \mathcal{M}_n^r \supset \cdots,$$

其中  $c_1 = \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / \mathcal{M}_n = 1$ . 一般地, 令

$$c_r = \dim_{\mathbb{R}} \frac{I + \mathcal{M}_n^{r-1}}{I + \mathcal{M}_n^r}, \quad r = 2, 3, \dots,$$

它可以看做是  $I + \mathcal{M}_n^r$  在  $I + \mathcal{M}_n^{r-1}$  中的余维数. 如果对某一  $k$ , 有  $c_k = 0$ , 则

$$I + \mathcal{M}_n^{k-1} = I + \mathcal{M}_n^k,$$

因而  $I \supset \mathcal{M}_n^{k-1}$ . 此外, 当  $s \geq k$  时,  $c_s = 0$ . 容易验证

$$\text{Codim } I = c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1},$$

这说明有限序列  $\{c_1, c_2, \dots, c_{k-1}\}$  为理想  $I$  提供了重要信息.

**例 1** 在一元函数芽环  $\epsilon_1$  中, 余维为  $r$  的理想恰好是  $\mathcal{M}_1^r$ .

**例 2** 讨论  $\epsilon_2$  中余维为 3 的理想  $I$ , 此时只有两种可能情形:

(i)  $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 0$ ,

(ii)  $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 0$ .

对于情形(i). 因  $c_3 = 0$ , 故  $I \supset \mathcal{M}_2^2$ , 从而

$$\epsilon_2 \supset_{c_1=1} \mathcal{M}_2 \supset_{c_2=2} I \supset \mathcal{M}_2^2.$$

而  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2 / \mathcal{M}_2^2 = 2$ , 故  $I = \mathcal{M}_2^2$ .

对于情形(ii). 因  $c_4 = 0$ ,  $I \supset \mathcal{M}_2^3$ , 于是

$$\epsilon_2 \supset_{c_1=1} \mathcal{M}_2 \supset_{c_2=1} I + \mathcal{M}_2^2 \supset_{c_3=1} I \supset \mathcal{M}_2^3.$$

由于  $c_2 = 1$  且  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2 / \mathcal{M}_2^2 = 2$ , 因此  $I$  必含一函数芽  $f$ . 它在原点的一阶偏导数不全为 0, 不妨设  $\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$ . 在源平面  $\mathbb{R}^2$  上作一局部坐标变换, 令  $\phi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  定义为

$$(x, y) \mapsto (u = f(x, y), v = y),$$

$$D\phi(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det D\phi(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0.$$

据反函数定理,  $\phi$  有逆映射  $\phi^{-1}$ , 且  $\phi^{-1} \in C^\infty$ . 显然  $(f \cdot \phi^{-1})(u, v) = u$ , 这表明在源平面上选取适当的局部坐标系(不妨记作  $\{x, y\}$ ), 函数芽  $f$  可表示为坐标函数芽  $x$ .

因此我们可假定  $x \in I$ . 记  $\epsilon_2$  为  $\epsilon_{x,y}$ , 则由  $x$  生成的理想为  $\mathcal{M}_x \cdot \epsilon_{x,y}$  或写为  $\langle x \rangle \epsilon_{x,y}$ . 显然  $\mathcal{M}_x \cdot \epsilon_{x,y} \subset I$ , 又  $\epsilon_{x,y} / \mathcal{M}_x \cdot \epsilon_{x,y} \cong \epsilon_y$ . 令  $I$  在  $\epsilon_y$  中的投影为  $\bar{I}$ .

由于  $c_3 = 1$ , 所以  $y^2 \notin I$ ,  $I + \mathcal{M}_{x,y}^2 = \langle x, y^2 \rangle \epsilon_{x,y}$ .

$$\begin{aligned} 1 &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{I + \mathcal{M}_{x,y}^2}{I} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} (I + \mathcal{M}_{x,y}^2) / \mathcal{M}_x \cdot \epsilon_{x,y} / I / \mathcal{M}_x \cdot \epsilon_{x,y} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \langle y^2 \rangle \epsilon_y / \bar{I}, \end{aligned}$$

于是有  $\bar{I} = \langle y^3 \rangle \epsilon_y$ ,  $I = \langle x, y^3 \rangle \epsilon_{x,y}$ .

## § 1.2 具有常秩的光滑映射芽

### 1.2.1 $C^\infty$ 映射芽

设  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  为映射, 其中  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中的开子集,  $f$  可用它的分量函数表示为  $f = (f_1, \dots, f_p)$ . 如果每一个  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  都是  $U$  上的  $C^\infty$  函数 ( $i = 1, \dots, p$ ), 则称  $f$  为  $U$  上的  $C^\infty$  可微映射, 简称为  $C^\infty$  映射或光滑映射.

更为一般的情形. 设  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f: X \rightarrow Y$ . 如果对于每一个  $x \in X$ , 存在包含点  $x$  的开集  $U \subset \mathbb{R}^n$  以及  $C^\infty$  映射  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ , 使得  $F$  和  $f$  在  $U \cap X$  上是一致的, 则称  $f$  为光滑映射.

**定义 1.2.1**  $C^\infty$  映射芽  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  指的是  $C^\infty$  可微映射  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  的一个等价类, 这里  $U$  为点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的开邻域. 等价关系“ $\sim$ ”规定如下:  $(g: U \rightarrow \mathbb{R}^p) \sim (h: V \rightarrow \mathbb{R}^p) \Leftrightarrow$  存在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的开邻域  $W \subset U \cap V$ , 使得  $g|_W = h|_W$ . 等价类  $f$  所含的任意成员  $g$  叫做  $f$  的一个代表.

有关映射的许多标准概念可以用明显的方式延伸到映射芽. 例如, 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^q$  为映射芽, 则  $(f, g): (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  定义为

$$(\tilde{f}, \tilde{g}): U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, x \mapsto (\tilde{f}(x), \tilde{g}(x))$$

在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽, 其中  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\tilde{g}: U \rightarrow \mathbb{R}^q$  分别为  $f$  和  $g$  的代表.

若  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  与  $g: (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow \mathbb{R}^q$  为映射芽, 定义  $f \times g: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  为

$$\tilde{f} \times \tilde{g}: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, (x_1, x_2) \mapsto (\tilde{f}(x_1), \tilde{g}(x_2))$$

在点  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  处的芽, 其中  $\tilde{f}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\tilde{g}: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$  分别为  $f$  与  $g$  的代表.

假设  $0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ , 映射芽  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  在  $X$  上的限制(记为  $f|_X$ )定义为  $\tilde{f}|_{X \cap U}$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽, 其中  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $f$  的任意一个代表.

映射芽  $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$  (其中  $y = f(x)$ ) 与  $g: (\mathbb{R}^p, y) \rightarrow \mathbb{R}^q$  可以复合成映射芽  $g \circ f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^q$ . 设  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\tilde{g}: V \rightarrow \mathbb{R}^q$  分别为  $f$  与  $g$  的代表, 则  $\tilde{f}|_{U \cap \tilde{f}^{-1}(V)}$  也是  $f$  的一个代表. 通常的映射复合  $\tilde{g} \circ \tilde{f}: U \cap \tilde{f}^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^q$  便是  $g \circ f$  的一个代表.

**定义 1.2.2** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 定义  $f^*: \epsilon_p \rightarrow \epsilon_n$  为

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f, \quad \forall \alpha \in \epsilon_p,$$

易见  $f^*$  是一个环同态. 实际上  $f^*$  还是一个代数同态.  $f^*$  具有下列函子性质:

(i) 若  $\text{id}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  为恒同映射芽, 则  $\text{id}^*: \epsilon_n \rightarrow \epsilon_n$  为恒同同态.

(ii) 若  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  和  $g: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽, 则  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

此外,  $f^*(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_n$ .

作为简单练习题, 以上诸结论请读者验证.

**定义 1.2.3** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 我们用  $T_0 \mathbb{R}^n$  和  $T_0 \mathbb{R}^p$  分别表示  $\mathbb{R}^n$  与  $\mathbb{R}^p$  在原点处的切空间. 定义  $f$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的切映射(或微分)  $T_0 f$  如下.

$$T_0 f: T_0 \mathbb{R}^n \rightarrow T_0 \mathbb{R}^p,$$

$$X \mapsto T_0 f(X) = X \circ f^*,$$

易见  $T_0 f$  是一个线性映射, 并且对任意  $\alpha \in \epsilon_p$ ,

$$T_0 f(X)(\alpha) = X \circ f^*(\alpha) = X(\alpha \circ f). \quad (1)$$

假设  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_p\}$  分别为  $(\mathbb{R}^n, 0)$  与  $(\mathbb{R}^p, 0)$  的局部坐标系. 据定理 1.1.2,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 : i = 1, \dots, n \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0 : j = 1, \dots, p \right\}$  分别

为  $T_0 \mathbb{R}^n$  和  $T_0 \mathbb{R}^p$  的基. 由(1)式, 有

$$\begin{aligned} T_0 f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) (\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 (\alpha \circ f) \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} (0) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (0), \quad \forall \alpha \in \varepsilon_p, \end{aligned}$$

因此

$$T_0 f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (0) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0, \quad i = 1, \dots, n,$$

于是我们可用矩阵来表示  $f$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的微分: 设  $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$ , 则  $T_0 f(X) = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0$ , 其中  $b = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (0) \right) \cdot a$ , 且  $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$ ,  $b = (b_1, \dots, b_p)^\top$ .

记  $Df(0) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ , 叫做  $f$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的 Jacobi

矩阵.

现将上面所述概括为下面的

**定理 1.2.1** 设  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_p\}$  分别为  $(\mathbb{R}^n, 0)$  与  $(\mathbb{R}^p, 0)$  的坐标系, 则  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 : i = 1, \dots, n \right\}$  和  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0 : j = 1, \dots, p \right\}$  分别为切空间  $T_0 \mathbb{R}^n$  及  $T_0 \mathbb{R}^p$  的基.  $C^\infty$  映射芽  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  的切映射  $T_0 f$  关于这些基而言可用线性映射

$$Df(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

来表示.  $Df = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$  叫做  $f$  的 Jacobi 矩阵.

**定义 1.2.4**  $C^\infty$  映射芽  $\phi: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$  叫做微分同胚芽(或  $C^\infty$  可逆芽), 如果它的一个代表  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  ( $U$  为  $x \in \mathbb{R}^n$  的开邻域) 满足下列条件:

(i)  $\bar{\phi}(x) = y$ ,

(ii)  $\bar{\phi}$ 是从包含点  $x$  的开集  $U' \subset U$  到  $\bar{\phi}(U')$  上的( $C^\infty$ )微分同胚.

微积分中的反函数定理可叙述为

**定理 1.2.2**  $C^\infty$  映射芽  $\phi: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$  是微分同胚芽 当且仅当  $\phi$  的 Jacobi 矩阵  $D\phi(x)$  是可逆的.

### 1.2.2 具有常秩的芽

设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  的开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射, 则映射

$$Df: U \rightarrow \mathbb{R}^{pn} = \{p \times n \text{ 矩阵}\}, x \mapsto Df(x)$$

也是  $C^\infty$  映射.  $f$  在点  $x \in U$  的秩规定为矩阵  $Df(x)$  的秩, 记为  $rk_x f$ . 若  $rk_x f \geq s$ , 则存在  $Df(x)$  的某个  $s \times s$  子矩阵, 其行列式不为零. 这一行列式在点  $x$  的某一邻域内也不为零, 这是因为  $Df$  及行列式  $\det Df$  是连续的, 因此  $f$  的秩在  $x$  的一邻域内不小于  $s$ .  $f$  的秩局部不会减小说明映射  $U \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto rk_x f$  是下半连续的. 于是对任意  $C^\infty$  芽  $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$ , 对应一个下半连续函数芽  $rkf: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{Z}, y \mapsto rk_y f$ . 我们说  $f$  是一个具有常秩的映射芽是指芽  $rkf$  为常值函数芽.

从反函数定理 1.2.2 将导出一个重要结论, 这就是下面的秩定理(参看文献[8]或[9]).

**定理 1.2.3** 设  $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$  是具有常秩  $k$  的  $C^\infty$  映射芽, 则存在可逆芽  $\phi: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  和  $\psi: (\mathbb{R}^p, y) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 使得芽

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$$

可表示为

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{(p-k) \text{ 个}}).$$

**证** 不失一般性, 假定  $x = 0, y = 0$ . 选取  $f$  的一个代表  $\bar{f}$ , 它

具有常秩  $k$ , 因而  $D\tilde{f}$  有一个  $k \times k$  子矩阵在原点是非退化的. 对矩阵做初等变换, 相当于在  $\mathbb{R}^n$  与  $\mathbb{R}^p$  上分别做非退化线性坐标变换(因而是局部微分同胚), 可以假定子矩阵

$$\left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq k}$$

是非退化的, 因而在原点的某一邻域  $U$  内也是非退化的. 定义  $\tilde{\phi}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  为

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n),$$

这里  $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k)$  为  $\tilde{f}$  的  $k$  个分量. 由

$$D\tilde{\phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ddots & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n-k} \Bigg\}^k_{n-k},$$

$$\det(D\tilde{\phi}) = \det\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0 \quad \text{在 } U \text{ 上,}$$

说明以  $\tilde{\phi}$  为代表的映射芽  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  是一个可逆芽, 并且下列图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ \phi \searrow & \nearrow g = f \circ \phi^{-1} & \\ & (\mathbb{R}^n, 0) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{f} & (f_1, \dots, f_p) \\ \phi \searrow & & \nearrow g \\ (f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n) & & \\ & \parallel & \\ & (z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n) & \end{array}$$

说明芽  $g = f \circ \phi^{-1}$  可表示为

$$z = (z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{\bar{g}} (z_1, \dots, z_k, \tilde{g}_{k+1}(z), \dots, \tilde{g}_p(z)).$$

$$\hat{Dg} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & 0 \\ \ddots & \ddots & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & * & A(z) & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} k \\ \} p-k \end{array} \right\},$$

其中

$$A(z) = \left( \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial z_i} \right)_{\substack{k+1 \leq j \leq p \\ k+1 \leq i \leq n}},$$

因为在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的邻域  $\tilde{\phi}(U)$  内,  $rk(\tilde{g}) = rk(D\tilde{g}) = k$ , 所以在该邻域内, 矩阵  $A(z)$  必为零矩阵, 于是

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial z_i} = 0, \quad k+1 \leq j \leq p, \quad k+1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

现在值域  $\mathbb{R}^p$  中施行局部坐标变换,  $\psi: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  由下式给出

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} - \tilde{g}_{k+1}(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ y_p - \tilde{g}_p(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \end{bmatrix},$$

又

$$D\psi = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \\ \ddots & & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline * & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} k \\ p-k \end{array} \right\}$$

故  $\psi$  是可逆芽, 并且  $\psi \circ g$  可表示为下列映射的复合:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \tilde{g}_{k+1}(z) \\ \vdots \\ \tilde{g}_p(z) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \tilde{g}_{k+1}(z) - \tilde{g}_{k+1}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ \tilde{g}_p(z) - \tilde{g}_p(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \end{bmatrix}$$

由式(2)知, 这一复合的后  $(p-k)$  个分量

$$\tilde{g}_{k+j}(z_1, \dots, z_n) - \tilde{g}_{k+j}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$$

在一个  $n$  维方体  $|z_j| < \epsilon$  上为 0, 于是  $\psi \circ g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  可表示为

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0).$$

### 1.2.3 应用

**定义 1.2.5** 设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射.

- (i) 如果对每一  $x \in U$ ,  $rk_x f = p$ , 那么  $f$  叫做淹没(submersion),
- (ii) 如果对每一  $x \in U$ ,  $rk_x f = n$ , 那么  $f$  叫做浸入(immersion).

不论是哪种情形,  $rk_x f$  达到极大, 秩局部为常值. 应用秩定理, 在  $\mathbb{R}^n$  与  $\mathbb{R}^p$  中选取适当坐标系, 淹没芽具有下列形式:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p),$$

而浸入芽则表示为

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-n}).$$

从局部来看,淹没相当于投射,浸入则表示为包含映射,可看做是嵌入.

**定义 1.2.6**  $\mathbb{R}^n$  中的子集  $M$  叫做  $\mathbb{R}^n$  的  $m (\leq n)$  维  $C^\infty$  微分子流形,如果对每一  $x \in M$ , 存在  $C^\infty$  可逆芽  $\phi: (\mathbb{R}^m, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , 使得

$$\phi(M, x) = (\mathbb{R}^m, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0),$$

这里  $\mathbb{R}^m$  线性地嵌入  $\mathbb{R}^n$  中.

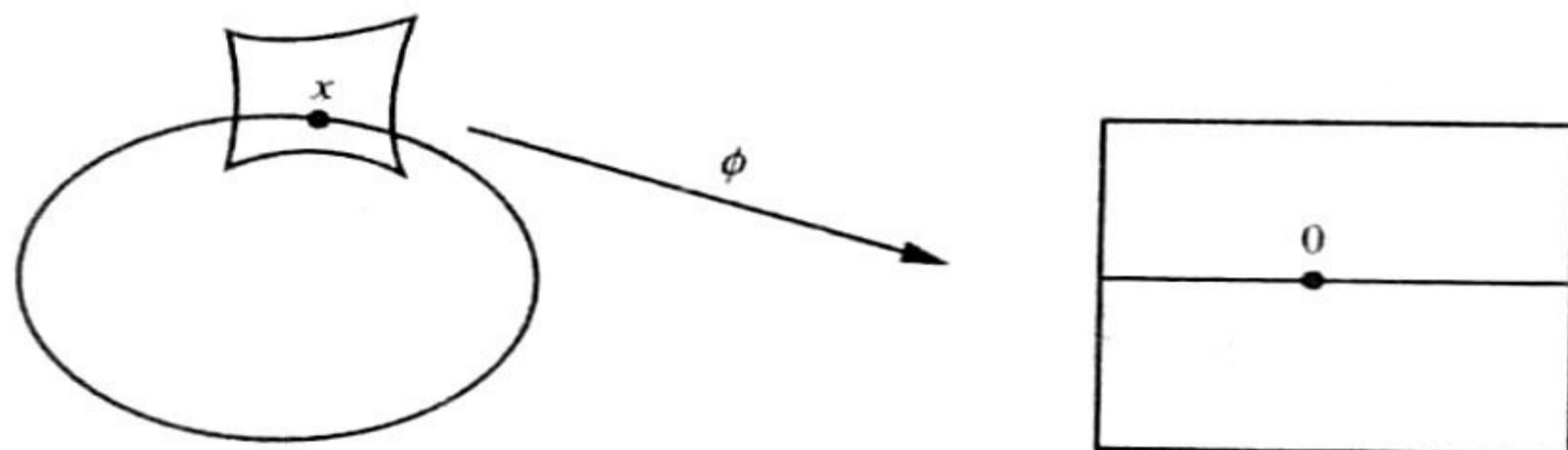


图 1.1

**例 1** (i)  $n$  维球面  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$  是  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的  $n$  维微分子流形.

(ii) 环面  $S^1 \times S^1$  是  $\mathbb{R}^3$  中的二维微分子流形.

**例 2** 将  $p \times n$  矩阵所成之集记为  $M(p, n)$ , 它可以等同于  $\mathbb{R}^{pn}$ . 因  $\mathbb{R}^{pn}$  是微分子流形, 因此可赋予  $M(p, n)$  以拓扑结构与微分结构, 使之成为一个微分子流形. 令  $M(p, n; k)$  表示秩为  $k$  的  $p \times n$  矩阵组成的集,

$$M(p, n; k) = \{E \in M(p, n) \mid \text{rank } E = k\}.$$

若  $p \geq n$ , 则  $M(p, n; n)$  为  $M(p, n)$  的开子集. 一般地, 我们有下

列结论:  $M(p, n; k)$  为  $M(p, n)$  的微分子流形, 维数为  $k(p + n - k)$ ,  $k \leq \min(p, n)$ .

设  $E_0 \in M(p, n; k)$ . 不失一般性, 假定

$$E_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix},$$

其中  $A_0$  为非退化  $k \times k$  矩阵. 将  $A_0$  的元素做微小变动得  $A$ , 使得  $\det A \neq 0$ . 换言之, 存在  $\epsilon > 0$ , 使得当  $A - A_0$  的所有元素都小于  $\epsilon$  时,  $A$  也是非退化的. 令

$$U = \left\{ E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in M(p, n) \mid A - A_0 \text{ 的所有元素都小于 } \epsilon \right\},$$

易见  $U$  是  $M(p, n)$  中开集, 且  $E_0 \in U$ . 因矩阵

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ X & I_{p-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{bmatrix}$$

的秩与  $E$  的秩相同, 取  $X = -CA^{-1}$ , 这个矩阵可写为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{bmatrix}.$$

若  $D = CA^{-1}B$ , 这一矩阵的秩为  $k$ , 反之也成立, 因而

$$U \cap M(p, n; k) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix} \mid A - A_0 \text{ 的所有元素 } < \epsilon \right\}$$

是  $E_0$  在  $M(p, n; k)$  中的邻域. 令

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \mid A - A_0 \text{ 的所有元素都小于 } \epsilon \right\},$$

它是  $pn - (p - k)(n - k) = k(p + n - k)$  维欧氏空间中的开集.

作映射

$$W \rightarrow U \cap M(p, n; k),$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

显然它是一个微分同胚.

**定义 1.2.7** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射.

(i) 点  $y \in f(\mathbb{R}^n) (\subset \mathbb{R}^p)$  叫做  $f$  的正则值, 如果对每一  $x \in f^{-1}(y)$ , 芽  $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$  为淹没芽 (即  $rk_x f = p$ ). 此时集  $f^{-1}(y) (\neq \emptyset)$  中的每一点叫做  $f$  的正则点. 倘若  $y \notin (\mathbb{R}^n)$ , 规定  $y$  为  $f$  的正则值.

若  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$  且含有  $f$  的非正则点, 则  $y$  称为  $f$  的临界值. 此外,  $f$  的非正则点又叫做临界点.

(ii) 点  $x \in \mathbb{R}^n$  叫做  $f$  的奇点, 若芽  $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$  为奇异芽, 即若  $rk_x f < \min(n, p)$ .

$f$  的所有奇点所成之集记为  $\Sigma f$ , 叫做  $f$  的奇点集.  $\Sigma f (\subset \mathbb{R}^n)$  在  $f$  下的像集叫做分歧集.

**例 3** 设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数, 则方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

的解集 (如果非空) 便是  $f$  的临界点集.

特别, 一元函数的极大值点、极小值点以及拐点等均为奇点.

**定理 1.2.4** 假设  $y$  是  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  的一个正则值, 则  $f^{-1}(y)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的  $(n - p)$  维微分子流形或为空集.

**证** 假定  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . 取  $x \in f^{-1}(y)$ , 则  $f(x) = y$  且  $rk_x f = p$ , 这说明  $f$  的秩在点  $x$  附近局部为常值, 据秩定理 1.2.3, 存在局部可逆变换  $\phi: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  和  $\psi: (\mathbb{R}^p, y) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 使得芽  $f_1 = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  具有下列形式:

$$f_1(x_1, \dots, x_p, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p),$$

因此芽  $f_1^{-1}(0) = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(0) = \phi \circ f^{-1}(y)$  是集  $\{(0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n)\}$  在原点处的芽. 依子流形定义,  $f^{-1}(y)$  是  $\mathbb{R}^n$  中维数为  $n - p$  的微分子流形.

### § 1.3 $\mathbb{R}^n$ 的局部微分同胚群

#### 1.3.1 群 $L_n$ 及其在 $\epsilon_n$ 上的作用

本节对微分同胚芽(见定义 1.2.4)做进一步讨论. 我们将所有的微分同胚芽  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  组成之集记为  $L_n$ , 用映射芽的复合作为群运算, 容易验证  $L_n$  形成一个群. 考虑群  $L_n$  在环  $\epsilon_n$  上的作用. 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数芽,  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  为可逆芽, 将  $\phi$  从右边与  $f$  复合得  $f \circ \phi$ , 这意味着对  $f$  的源空间  $\mathbb{R}^n$  施行一  $C^\infty$  局部坐标变换  $\phi$ , 因此群  $L_n$  在  $\epsilon_n$  上的作用  $\epsilon_n \times L_n \rightarrow \epsilon_n$  定义为

$$(f, \phi) \mapsto f \circ \phi.$$

设  $f, g \in \epsilon_n$ . 若存在  $\phi \in L_n$ , 使得  $g = f \circ \phi$ , 则  $f$  和  $g$  叫做同构的或依 Mather 的说法,  $f$  与  $g$  是右等价的, 记为  $f \sim g$ . 令

$$L_n \cdot f = \{f \circ \phi \mid \phi \in L_n\} \subset \epsilon_n,$$

它是在群  $L_n$  的作用下经过  $f$  的一条轨道.  $f \sim g$  表示  $f$  和  $g$  位于群  $L_n$  的同一条轨道中.

取  $\phi \in L_n$ , 依定义 1.2.2, 有环  $\epsilon_n$  的自同态

$$\phi^*: \epsilon_n \rightarrow \epsilon_n, f \mapsto f \circ \phi,$$

利用函子性质可证明  $\phi^*$  是环  $\epsilon_n$  的自同构.

#### 1.3.2 Lie 群 $L_n^r$ 在 $J_n^r$ 上的作用

设  $r$  为自然数. 根据 Taylor 公式,  $\phi \in L_n$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的  $r$

阶 Taylor 展式可写为

$$\phi(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_r(x) + \delta(x), \quad (1)$$

其中  $P_1 = D\phi(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为线性自同构,  $P_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $k$  次齐次多项式映射,  $k = 2, \dots, r$ . 余项  $\delta(x) = (\delta_1(x), \dots, \delta_n(x))$ , 每一分量  $\delta_i \in \mathcal{M}_n^{r+1}$ .

特别, 若  $\phi(x) = x + \delta(x)$ , 此时  $P_1$  为  $\mathbb{R}^n$  上的恒同映射  $I$ ,  $P_2 = \cdots = P_r = 0$  (这里 0 表零映射), 这说明  $\phi - I$  的每一分量都属于  $\mathcal{M}_n^{r+1}$ . 我们称这样的  $\phi$  关于恒同映射是  $r$ -平坦的. 所有的  $r$ -平坦芽组成  $L_n$  的一个正规子群(请读者验证), 记为  $L_n^{(r)}$ .

令  $L_n^r = L_n / L_n^{(r)}$ , 并用

$$j^r : L_n \rightarrow L_n^r$$

表标准投影.  $j^r \phi$  为  $\phi \in L_n$  在  $L_n^r$  中的像, 叫做  $\phi$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的  $r$ -导网.  $L_n^r$  称为由  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的  $C^\infty$  可逆芽的  $r$ -导网所成的群.

对任意  $\phi \in L_n$ , 据公式(1),  $j^r \phi$  可表示为

$$x \mapsto j^r \phi(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_r(x), \quad (2)$$

其中诸  $P_k$  如式(1)中所述, 因此  $L_n^r$  可以和形如式(2)的多项式映射所成的实向量空间等同. 特别地, 群  $L_n^1$  可等同于  $\mathbb{R}^n$  的自同构群  $GL(n, \mathbb{R})$ , 这是大家熟悉的实一般线性群.

$L_n^r$  中的群运算是代数运算. 设  $P, Q \in L_n^r$ ,  $P \cdot Q$  是指将  $P$  与  $Q$  复合得到次数不大于  $r^2$  的多项式映射  $P \circ Q$ , 然后舍去  $P \circ Q$  中次数大于  $r$  的各项.

**命题 1.3.1** 群  $L_n^r$  可赋予 Lie 群结构.

**证** (i) 赋予  $L_n^r$  以  $C^\infty$  微分流形结构. 我们用  $L_n^r$  表示从  $\mathbb{R}^n$  到自身的多项式映射

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_r(x)$$

所成的实向量空间, 其中  $P_k$  为  $k$  次齐次多项式映射 ( $k = 1, 2, \dots$ ,

$r$ ). 显然

$$L_n^r = \{P \in L_n^r \mid \det P_1 \neq 0\}$$

是  $L_n^r$  的开子集, 因此可赋予  $L_n^r$  以拓扑结构及微分结构, 使之成为一个  $C^\infty$  流形. 因为上述多项式映射  $P$  含有  $n \binom{n+r}{n}$  个实系数, 这  $n \binom{n+r}{n}$  个系数组成  $L_n^r$  的一个整体坐标系,  $L_n^r$  是一个维数为  $n \binom{n+r}{n}$  的  $C^\infty$  流形.

(ii) 群运算  $L_n^r \times L_n^r \rightarrow L_n^r, (P, Q) \mapsto P \cdot Q$  是代数运算因而是  $C^\infty$  映射. 余下只需证明取逆运算  $L_n^r \rightarrow L_n^r, P \mapsto P^{-1}$  是  $C^\infty$  映射.

对任意取定的  $P \in L_n^r$ , 定义向量空间  $L_n^r$  到自身的实线性映射

$$\alpha: L_n^r \rightarrow L_n^r, \quad Q \mapsto Q \cdot P,$$

该线性映射是满射. 事实上, 任取  $R \in L_n^r$ , 因  $P \in L_n^r$ , 故  $P \in L_n^r$ . 令  $Q = R \cdot j^r P^{-1}$ , 则  $Q \cdot P = R$ . 由于实线性映射  $\alpha$  为满射, 所以  $\alpha$  是  $L_n^r$  的自同构. 这一事实告诉我们, 如果考虑映射

$$L_n^r \times L_n^r \rightarrow L_n^r, \quad (Q, P) \mapsto Q \cdot P,$$

那么它关于  $Q$  求偏导数运算(作为实线性映射)应是  $L_n^r$  的一个自同构, 因此将隐函数定理应用于方程

$$Q \cdot P = I$$

便可推出  $P \mapsto P^{-1}$  为  $C^\infty$  映射. 证毕.

设  $s \geq r$ . 定义标准投影  $L_n^s \rightarrow L_n^r$  为舍去次数大于  $r$  的各项, 这一映射是 Lie 群同态.

现考虑 Lie 群  $L_n^r$  在导网空间  $J_n^r$  上的作用. 注意  $J_n^r$  同构于次数不大于  $r$  的  $n$  元多项式代数, 因而可视为  $C^\infty$  流形.  $L_n^r$  在  $J_n^r$  上

的作用规定如下:设  $f \in J_n^r, P \in L_n^r$ . 将多项式映射  $P$  与  $f$  做复合, 然后再舍去  $f \circ P$  中次数大于  $r$  的各项, 记为  $f \cdot P$ . 显然

$$J_n^r \times L_n^r \rightarrow J_n^r, (f, P) \mapsto f \cdot P$$

表示 Lie 群  $L_n^r$  在代数  $J_n^r$  上的代数作用, 叫做 Lie 群  $L_n^r$  的线性表示.

现在我们已规定了群  $L_n$  在环  $\epsilon_n$  上的作用, 又定义了 Lie 群  $L_n^r$  在代数  $J_n^r$  上的作用, 这两种作用与标准投影  $j^r: L_n \rightarrow L_n^r$  及  $j^r: \epsilon_n \rightarrow J_n^r$  是相容的, 即下图可换:

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_n \times L_n & \longrightarrow & \epsilon_n \\ j^r \times j^r \downarrow & & \downarrow j^r \\ J_n^r \times L_n^r & \longrightarrow & J_n^r \end{array}$$

事实上, 设  $f \in \epsilon_n, \phi \in L_n$ . 根据 Taylor 公式,

$$\phi = j^r \phi + \delta, \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i \in \mathcal{M}_n^{r+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$f = j^r f + \eta, \quad \eta \in \mathcal{M}_n^{r+1},$$

所以

$$f \circ \phi = j^r f \circ j^r \phi + \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{M}_n^{r+1},$$

$$j^r(f \circ \phi) = j^r f \circ j^r \phi \text{ 再舍去次数大于 } r \text{ 的所有项}$$

$$= j^r f \cdot j^r \phi.$$

正因为有上述关系, 我们说群  $L_n$  在  $\epsilon_n$  上的作用诱导出 Lie 群  $L_n^r$  在  $J_n^r$  上的(商)作用.

显然,  $L_n$  在  $\mathcal{M}_n^r / \mathcal{M}_n^{r+1}$  ( $n$  元  $r$  次齐次多项式组成的向量空间)上的作用与  $GL(n, \mathbb{R})$  在该空间上的作用相一致.

### 1.3.3 $L_n$ 及 $L_n^r$ 的无穷小生成元

记空间  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的坐标为  $t, x_1, \dots, x_n$ . 假设在  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  中包含  $\mathbb{R}$

$\times \{0\}$  的一个开邻域上定义了  $C^\infty$  向量场  $X$ , 具有如下形式:

$$X(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中诸函数  $X_i$  均满足

$$X_i(t, 0) = 0 \quad \forall t,$$

那么向量场  $X$  的轨道是下列一阶常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x) \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

的积分曲线. 显然  $\mathbb{R} \times \{0\}$  是  $X$  的一条轨道.

我们用  $\phi(t, x)$  表示方程组(3)满足初始条件  $\phi(0, x) = x$  的解. 根据一阶常微分方程组的基本定理, 存在  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  中的开集  $U$ , 它包含  $[0, 1] \times \{0\}$ , 使得

1)  $U$  是  $X$  的通过点  $(0, x) \in U$  的轨道的并, 并且  $U$  中的每一条轨道的定义域是区间  $[0, 1]$  在  $\mathbb{R}$  中的一邻域,

2) 对每一  $t \in [0, 1]$ , 令  $U_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in U\}$ , 则映射

$$\phi_t : U_0 \rightarrow U_t, \quad x \mapsto \phi_t(x) = \phi(t, x)$$

是一个微分同胚, 且  $\phi_t(0) = 0$ . 特别,  $\phi_0$  为恒同映射.

由此我们可得出下面的

**命题 1.3.2** 对于定义在  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, [0, 1] \times \{0\})$  上的每一个向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (4)$$

其中  $X_i(t, 0) = 0 (t \in \mathbb{R}, [0, 1]), i = 1, \dots, n$ . 通过积分向量场  $X$  可得到  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的微分同胚芽, 即  $L_n$  的一元.

事实上, 将  $X$  对应于映射  $\phi_1 : U_0 \rightarrow U_1$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽(仍记为  $\phi_1$ ), 则  $\phi_1 \in L_n$ .

**定理 1.3.1** 若映射芽  $\phi \in L_n$  的 Jacobi 矩阵  $D\phi(0)$  具有正值行列式, 则存在形如式(4)的向量场芽  $X$ , 使得微分同胚芽  $\phi$  由积分向量场芽  $X$  而得到.

证 将  $\phi$  表为

$$\phi(x) = Ax + \psi(x),$$

其中  $A = D\phi(0)$ ,  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ , 每一分量  $\psi_i \in \mathcal{M}_n^2$ . 由于一般线性群  $GL(n, \mathbb{R})$  有二连通分支, 其中一个分支是由具有正值行列式的  $n \times n$  矩阵组成. 因此可在  $GL(n, \mathbb{R})$  中选取一条  $C^\infty$  道路  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ,  $t \mapsto \alpha(t)$ , 使得  $\alpha(0) = I$  (单位矩阵),  $\alpha(1) = A$ . 令

$$\Phi(t, x) = \alpha(t) \cdot x + t\psi(x),$$

易见对每一固定的  $t$ , 映射  $x \mapsto \Phi_t(x) = \Phi(t, x)$  在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽是微分同胚芽, 且  $\Phi_0 = \text{恒同}$ ,  $\Phi_1 = \phi$ . 记  $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$ , 这里  $\Phi^i$  表  $\Phi$  的第  $i$  个分量. 令

$$X(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

应用命题 1.3.2, 通过积分  $X$  便得到上述微分同胚芽  $\phi$ . 证毕.

值得注意的是式(4)中的所有  $X_i(t, x)$  均与  $t$  无关这种情形. 我们将向量场芽

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_i \in \mathcal{M}_n \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

所成之空间等同于  $C^\infty$  映射芽

$$X: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

所成的空间, 并将这一实向量空间记为  $\mathcal{L}_n$ .

对任意  $X \in \mathcal{L}_n$ , 令  $\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X$ , 此时方程组(3)变为

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

它是自治的. 如前所述, 通过求解上述方程组可得到单参数微分同胚芽群  $\{\phi_t \in L_n\}$ , 称为  $L_n$  的单参数子群, 且  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t \Big|_{t=0} = X$ .

现将上述事实概括为下列

**定理 1.3.2** 对于  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的具有形如式(5)的每一向量场芽  $X$ , 通过积分可得到  $L_n$  的单参数子群  $\{\phi_t\}$  满足  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t \Big|_{t=0} = X$ .

$X$  叫做  $\{\phi_t \in L_n\}$  的无穷小生成元, 映射

$$l_n \rightarrow L_n, \quad X \mapsto \phi_1$$

称为指数映射, 记为  $\phi_1 = \exp X$ .

由于方程(6)是线性的, 因此  $\phi_t = \exp tX$ .

本书中多次用到上面 3 个结果, 读者应熟练掌握. 下面通过对  $l_n$  与  $L_n$  取  $r$ -导网来考察指数映射  $\exp: l_n \rightarrow L_n$ .

对  $l_n$  中的任意  $X$  取  $r$ -导网, 它就是  $X$  在  $0 \in \mathbb{R}^n$  的  $r$  阶 Taylor 多项式. 记  $l_n^r = \{j^r X \mid X \in l_n\}$ , 并用  $j^r: l_n \rightarrow l_n^r$  表标准投影. 显然  $L_n^r$  是  $l_n^r$  的开子集, 因此  $l_n^r$  可等同于 Lie 群  $L_n^r$  在单位元处的切空间, 并且  $l_n^r$  还可以赋予 Lie 代数结构. 从而定义 Lie 群  $L_n^r$  的指数映射

$$\exp: l_n^r \rightarrow L_n^r.$$

关于 Lie 代数  $l_n^r$  说明如下: 首先向量空间  $l_n$  可赋予 Lie 代数结构, 这是因为  $l_n$  中的成员是  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的  $C^\infty$  向量场芽, 因此对任意的  $X, Y \in l_n$ , 可形成 Lie 括号积  $[X, Y] \in l_n$ . 其次, 对  $l_n^r$  中的  $X, Y$ , 将它们视为  $l_n$  中成员, 作  $[X, Y] \in l_n$ , 然后取  $r$ -导网,  $j^r[X, Y] \in l_n^r$ . 即规定  $l_n^r$  中的 Lie 括号积  $\widetilde{[ , ]}: l_n^r \times l_n^r \rightarrow l_n^r$  为  $\widetilde{[X, Y]} = j^r[X, Y]$ . 读者可以验证  $\widetilde{[ , ]}$  是双线性算子, 满足反交换

律和 Jacobi 恒等式.

**命题 1.3.3** 下列图表可换, 即  $j^r \circ \exp = \exp \circ j^r$ .

$$\begin{array}{ccc} l_n & \xrightarrow{\exp} & L_n \\ j^r \downarrow & & \downarrow j^r \\ l_n^r & \xrightarrow{\exp} & L_n^r \end{array}$$

**证** 任取  $X \in l_n$ . 据定理 1.3.2, 有  $L_n$  的单参数子群  $\{\phi_t\}$ , 使得  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t \Big|_{t=0} = X$ . 令  $\phi_t = \exp tX$  及  $\phi_t^r = j^r(\exp tX) \in L_n^r$ . 显然  $\{\phi_t^r\}$  是  $L_n^r$  的单参数子群且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_t^r \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} (j^r \phi_t) \Big|_{t=0} \\ &= j^r \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_t \right) \Big|_{t=0} \quad \left( \text{因 } \frac{\partial}{\partial t} \text{ 与 } j^r \text{ 可换} \right) \\ &= j^r X \in l_n^r. \end{aligned}$$

记  $j^r X = \zeta$ . 上式表明,  $\zeta$  是单参数子群  $\{\phi_t^r \in L_n^r\}$  的无穷小生成元, 因而

$$\phi_t^r = \exp t \zeta.$$

#### 1.3.4 在群作用下的轨道切空间

设  $f \in \epsilon_n$ ,  $X \in l_n$ , 且  $X$  具有下列形式

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_i \in \mathcal{M}_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

据定理 1.3.2, 积分向量场  $X$  可得到  $L_n$  的单参数子群  $\{\phi_t\}$ , 其中  $\phi_0$  为恒同映射芽, 且  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t \Big|_{t=0} = X$ . 令

$$f_t = f \circ \phi_t,$$

它表示  $\epsilon_n$  中一条经过  $f (= f_0)$  的  $C^\infty$  道路. 计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_t \Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial (\phi_t)_i}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i},\end{aligned}$$

它可以看做是过  $f \in \epsilon_n$  的  $C^\infty$  道路  $t \mapsto f_t$  在  $f$  处的切向量, 称为向量场芽  $X$  对  $f \in \epsilon_n$  的无穷小作用.

又  $t \mapsto j^r f_t$  表示  $J_n^r$  中经过  $j^r f$  的一条  $C^\infty$  道路, 并且是在 Lie 群  $L_n^r$  作用下经过  $j^r f$  的一条道路, 这是因为

$$j^r f_t = j^r (f \circ \phi_t) = j^r f \cdot j^r \phi_t$$

及  $\{j^r \phi_t\}$  是  $L_n^r$  的单参数子群.  $\frac{\partial}{\partial t} (j^r f_t) \Big|_{t=0}$  表示上述道路在  $j^r f$  处的切向量, 且

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (j^r f_t) \Big|_{t=0} &= j^r \left( \frac{\partial}{\partial t} f_t \right) \Big|_{t=0} \\ &= j^r \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).\end{aligned}$$

从上面的分析, 自然引入下列定义

**定义 1.3.1** 设  $f \in \epsilon_n$ .

(i) 在群  $L_n$  作用下经过  $f$  的轨道  $L_n \cdot f$  在  $f$  处的切空间  $T_f(L_n \cdot f)$  定义为

$$T_f(L_n \cdot f) = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid X_i \in \mathcal{M}_n, i = 1, \dots, n \right\}.$$

(ii) 在 Lie 群  $L_n^r$  作用下经过  $j^r f$  的轨道  $L_n^r \cdot j^r f$  在  $j^r f$  处的切空间  $T_{j^r f}(L_n^r \cdot j^r f)$  定义为

$$T_{j^r f}(L_n^r \cdot j^r f) = \left\{ j^r \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \mid X_i \in \mathcal{M}_n, i = 1, \dots, n \right\}.$$

**定义 1.3.2** 设  $f \in \varepsilon_n \cdot \varepsilon_n$  中由  $f$  的一阶偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 生成的理想记为  $J(f)$ ,

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \varepsilon_n$$

叫做  $f$  的 Jacobi 理想.

这样一来, 轨道  $L_n \cdot f$  在  $f$  处的切空间可表为

$$T_f(L_n \cdot f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f), \quad (7)$$

而轨道  $L_n^r \cdot j^r f$  在  $j^r f$  处的切空间则写成

$$T_{j^r f}(L_n^r \cdot j^r f) = j^r(\mathcal{M}_n \cdot J(f)). \quad (8)$$

## § 1.4 Morse 芽

本节初步探讨函数芽在同构(即 Mather 的右等价)意义下的分类, 主要讨论的是 Morse 芽.

**命题 1.4.1** 设  $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  一元函数芽. 假定  $f \in \mathcal{M}_1^k$  且  $f \notin \mathcal{M}_1^{k+1}$ , 那么

- (i) 当  $k$  为奇数时,  $f$  同构于芽  $x \mapsto x^k$ ,
- (ii) 当  $k$  为偶数时,  $f$  同构于芽  $x \mapsto x^k$  或  $x \mapsto -x^k$ .

**证** 由条件, 根据推论 1.1.1, 有

$$f(0) = \frac{df}{dx}(0) = \dots = \frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}(0) = 0, \frac{d^k f}{dx^k}(0) \neq 0,$$

因此

$$f(x) = x^k g(x), g(0) \neq 0.$$

(i)  $k$  为奇数, 令

$$\phi(x) = x(g(x))^{1/k},$$

显然  $\phi'(0) \neq 0$ ,  $\phi \in L_1$ . 令  $y = \phi(x)$ , 则

$$(f \circ \phi^{-1})(y) = y^k.$$

(ii)  $k$  为偶数, 令

$$y = \phi(x) = x + g(x)^{1/k},$$

则  $(f \circ \phi^{-1})(y) = +y^k$  或  $-y^k$ , 其中当  $g(0) > 0$  时, 取“+”号; 当  $g(0) < 0$  时, 取“-”号. 此外,  $x^{2p}$  与  $-x^{2p}$  不同构. 证毕.

若  $f \in \epsilon_1$  在原点的各阶导数都为 0, 则不能使用该命题. 该命题为非无穷次平坦的一元函数芽的分类提供一个判别法, 并且依同构关系分类所得到的等价类有可数多个.

下面考虑多元函数芽, 就两种情形进行讨论.

**命题 1.4.2** 设  $f \in \epsilon_n$ . 若  $f \in \mathcal{M}_n$  且  $f \notin \mathcal{M}_n^2$ , 则  $f$  同构于一坐标函数芽. 譬如  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ .

**证** 据推论 1.1.1,  $f$  至少有一偏导数在原点的值不为 0, 不妨设  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \neq 0$ . 定义  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  如下:

$$z_1 = f(x_1, \dots, x_n),$$

$$z_i = x_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$D\phi(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) & * \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}_{n-1},$$

$\det D\phi(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \neq 0$ , 故  $\phi \in L_n$ , 并且

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = z_1.$$

**定义 1.4.1** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  芽. 若  $f \in \mathcal{M}_n^2$  且  $f$  在  $\mathcal{M}_n^2 / \mathcal{M}_n^3$  中的投影是一个非退化的二次型, 则称  $f$  为 Morse 芽, 点  $0 \in \mathbb{R}^n$  为  $f$  的非退化临界点.

下面介绍 Morse 引理, 我们采用 Milnor 的证法, 见文献[57].

**定理 1.4.1** (Morse 引理) 若  $f \in \mathcal{M}_n^2$  为 Morse 芽, 则  $f$  同构于下列形式的芽:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2, \quad (1)$$

其中  $\lambda$  叫做  $f$  的指标.

**证** 由定理 1.1.3,  $f$  可表为

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j q_{ij}(x), \quad q_{ij} \in \varepsilon_n.$$

可以假定  $q_{ij} = q_{ji}$ , 因为  $f$  可写为

$$f = \sum_{i,j} x_i x_j \tilde{q}_{ij}, \quad \tilde{q}_{ij} = \frac{1}{2}(q_{ij} + q_{ji}),$$

又  $(\tilde{q}_{ij}(0)) = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$  是非退化的. 我们要证明存在  $\mathbb{R}^n$  上保原点的局部微分同胚  $\phi$ , 使得  $f \circ \phi$  可表为式(1). 为此参照高等代数中化二次型为标准型的对角线化证明方法, 关键的一步描述如下.

使用归纳法, 假设在原点的某一邻域  $U_1$  内, 存在坐标函数  $u_1, \dots, u_n$ , 使得  $f$  可表示为

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j Q_{ij}(u_1, \dots, u_n),$$

其中  $(Q_{ij}(u))$  为对称矩阵. 对后  $n-r+1$  个坐标施行非退化线性

变换(如有必要的话),可假定  $Q_{rr}(0) \neq 0$ . 令

$$g(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{+Q_{rr}(u_1, \dots, u_n)+},$$

它在原点的某一较小邻域  $U_2 \subset U_1$  内是一个非零的  $C^\infty$  函数, 现引入新坐标  $v_1, \dots, v_n$ , 规定

$$v_i = u_i, \quad i \neq r,$$

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[ u_r + \sum_{i>r} u_i Q_{ir}(u) / Q_{rr}(u) \right].$$

据反函数定理, 在原点的某一更小的邻域  $U_3 \subset U_2$  内,  $v_1, \dots, v_n$  可取做坐标函数, 并且容易验证  $f$  可表示为

$$f = \sum_{i \leq r} \pm v_i^2 + \sum_{i,j > r} v_i v_j \tilde{Q}_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

依归纳法, 定理得证.

对于 Morse 芽  $f \in \mathcal{M}_n$ , 它的 2-导网  $j^2 f$  叫做  $f$  的 Hessian, 是一个双线性对称函数. 应指出的是, Morse 芽在群  $L_n$  作用下的分类可以归结为非退化二次型在一般线性群  $GL(n, \mathbb{R})$  作用下的分类. 后者由 Morse 芽的指标  $\lambda$  完全确定, 其中  $\lambda = 0, 1, \dots, n$ , 因此 Morse 芽按同构关系分为  $n+1$  个等价类.

**推论 1.4.1** 非退化临界点是孤立临界点.

孤立临界点的含义为: 设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中的开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数. 我们知道点  $x_0 \in U$  为  $f$  的临界点, 如果  $f$  的所有一阶偏导数在点  $x_0$  的值均为 0. 而  $x_0$  为  $f$  的孤立临界点是指存在点  $x_0$  的开邻域  $U' \subset U$ , 使得对每一  $x \in U' - \{x_0\}$ , 至少有某个偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  在点  $x$  的值不为 0.

**命题 1.4.3**  $f \in \mathcal{M}_n^2$  为 Morse 芽当且仅当  $f$  的 Jacobi 理想  $J(f) = \mathcal{M}_n$ .

证  $f$  为 Morse 芽  $\Leftrightarrow f$  的 Hessian  $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}(0) x_i x_j$  为非退化二次型. 而

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2(q_{ij}(0)) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

因此  $Q$  为非退化二次型  $\Leftrightarrow \mathcal{M}_n = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_n$ . 因为  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \bmod \mathcal{M}_n^2$ , 据命题 1.1.1,

$$\mathcal{M}_n = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_n \Leftrightarrow \mathcal{M}_n = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_n,$$

因此  $f$  为 Morse 芽  $\Leftrightarrow \mathcal{M}_n = J(f)$ . 证毕.

下面给出几个退化临界点的例子, 并绘出它们的草图. 由此可见, 函数在退化临界点附近, 形态多姿多采、千变万化, 对它们进行研究是奇点理论的任务.

(a)  $f(x) = x^3$ . 原点为退化临界点.

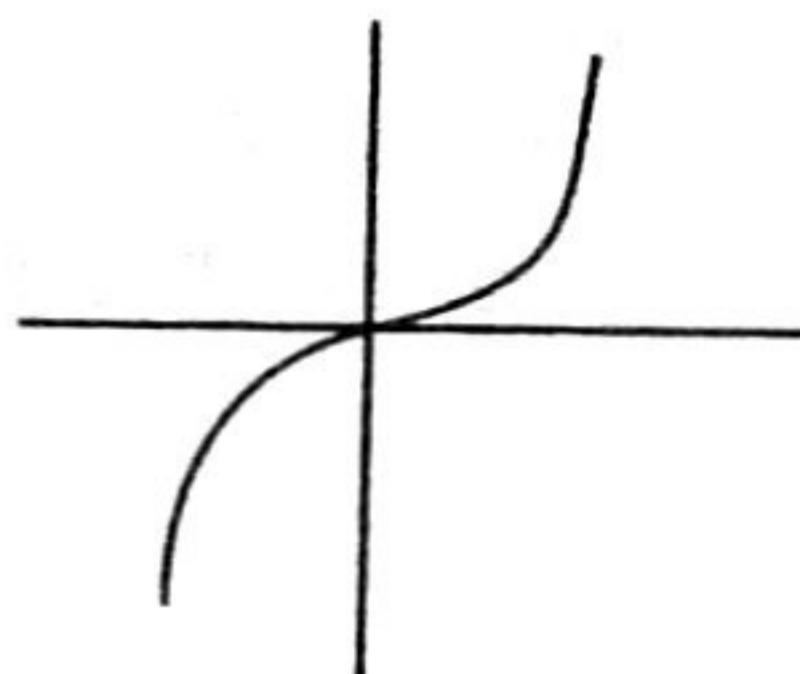


图 1.2

(b)  $f(x) = e^{-1/x^2} \sin^2 \frac{1}{x}$ . 原点是退化临界点, 而且是非孤立的.

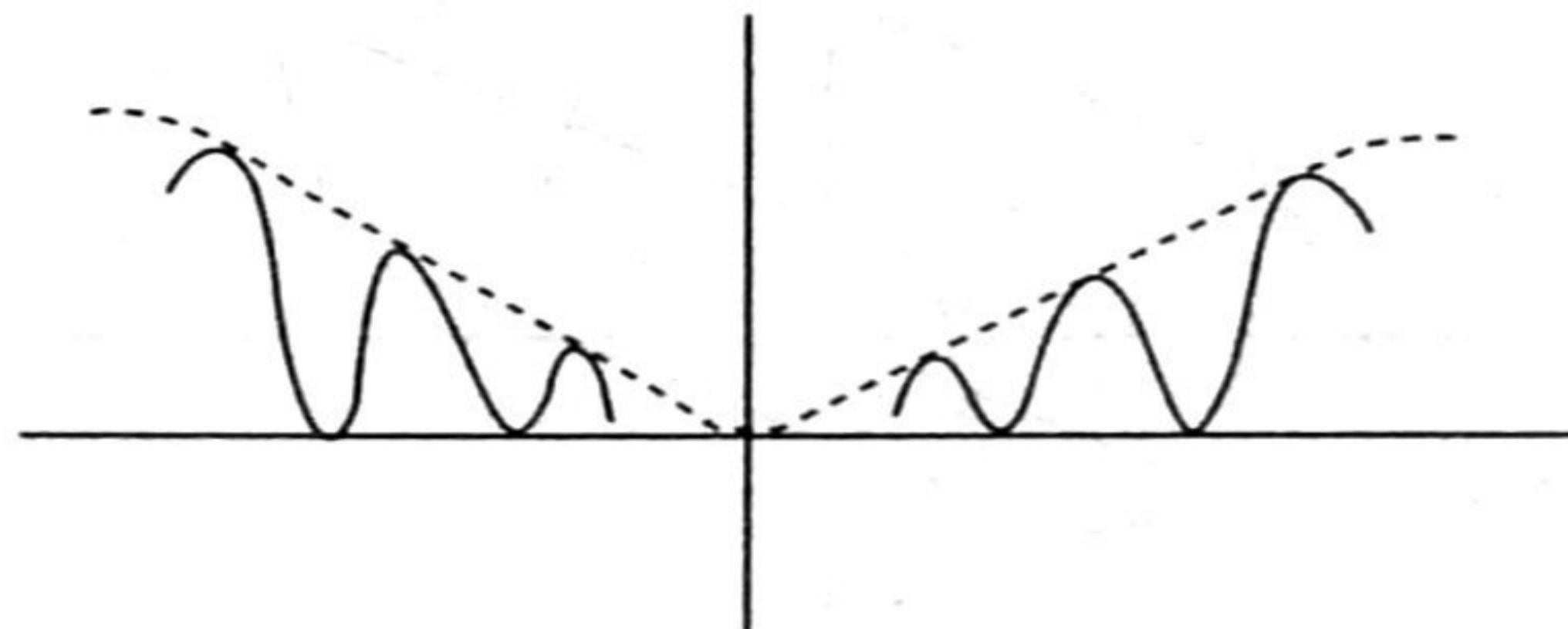


图 1.3

(c)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $(0, 0)$  为退化临界点(猴鞍形).

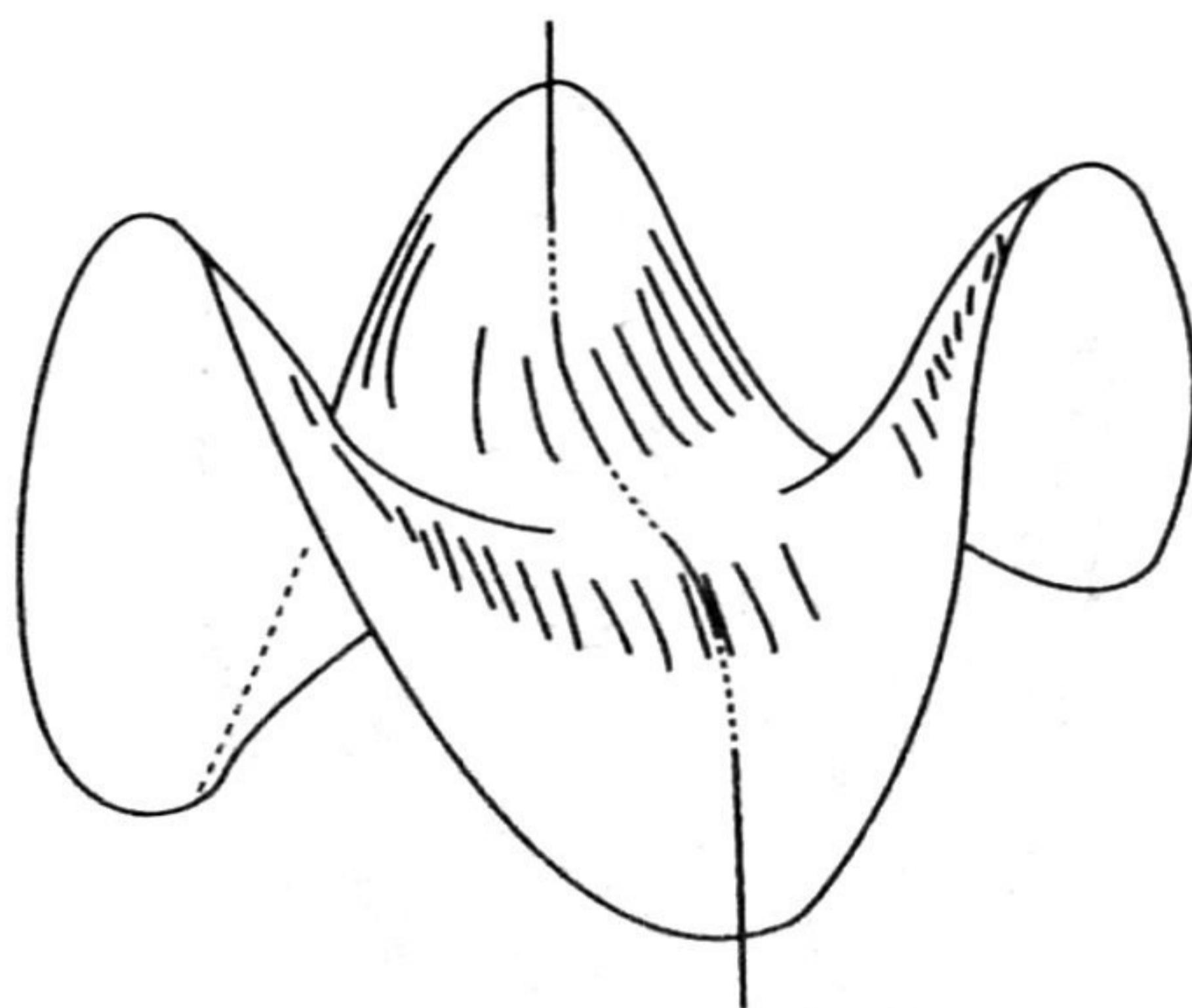


图 1.4

(d)  $f(x, y) = x^2$ , 退化临界点集为  $x$  轴, 它是  $\mathbb{R}^2$  中的子流形.

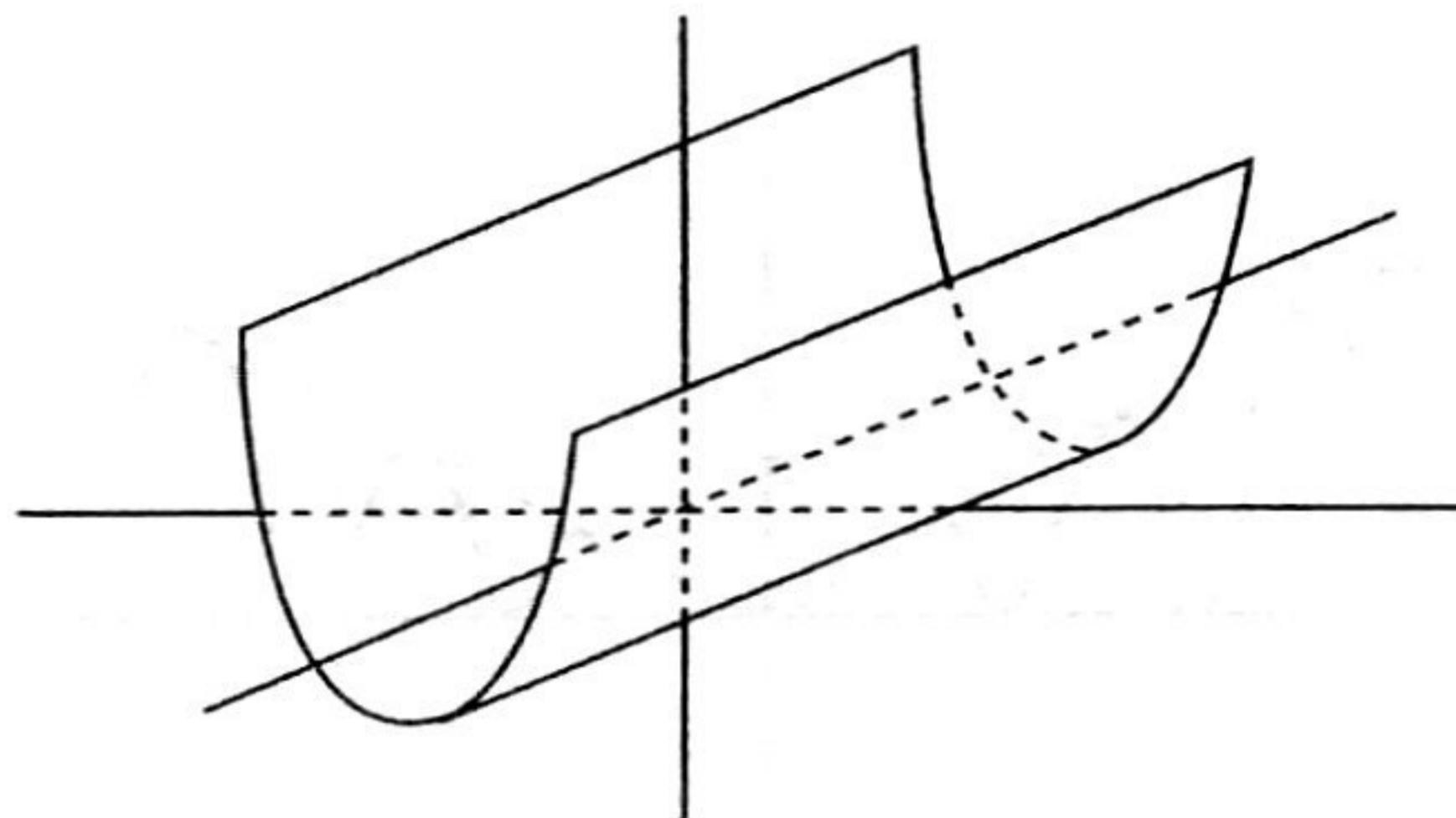


图 1.5

(e)  $f(x, y) = x^2 y^2$ , 退化临界点集由  $x$  轴与  $y$  轴的并组成, 它不是  $\mathbb{R}^2$  中的子流形.

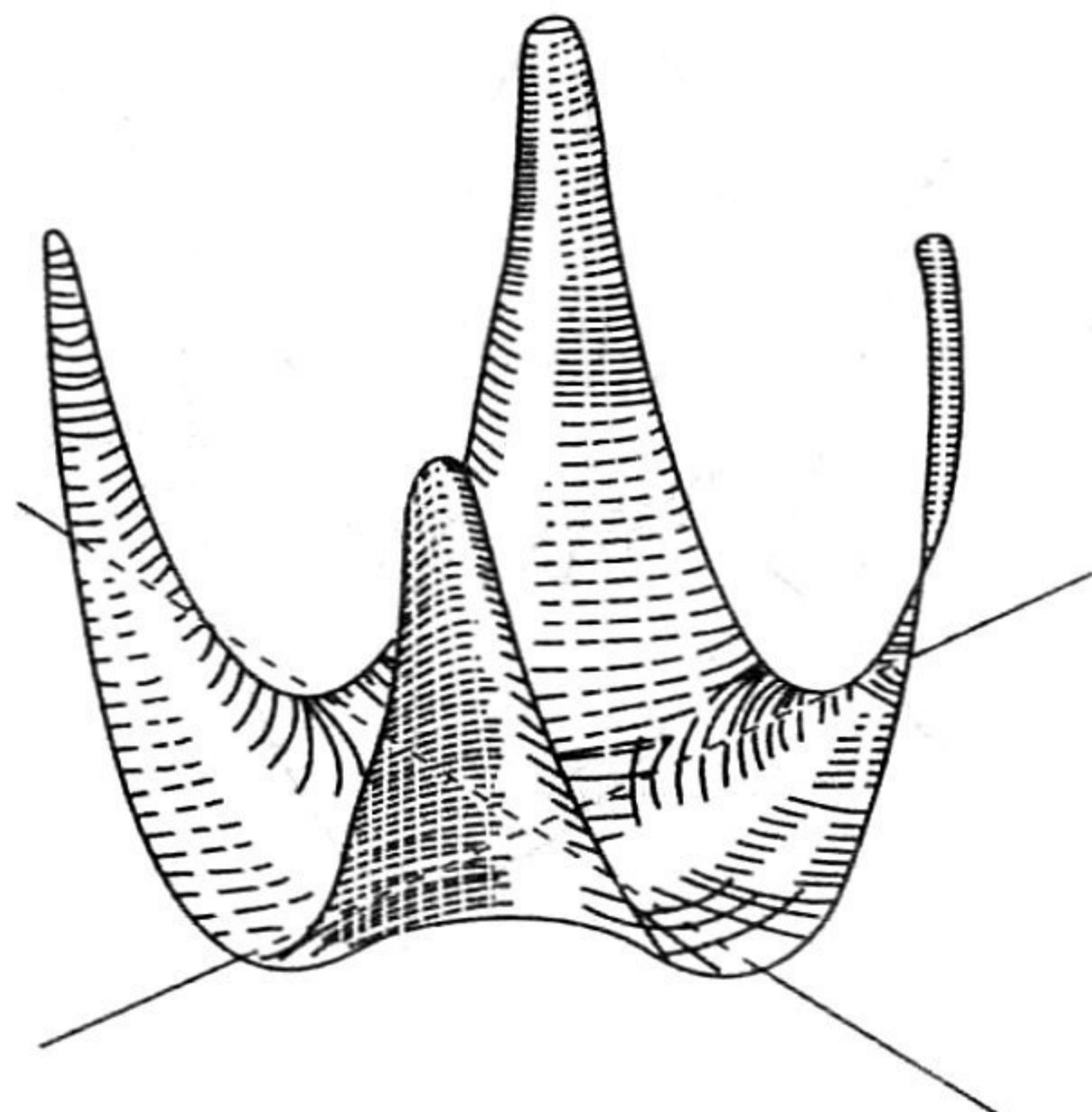


图 1.6

## 第二章 横截性

在奇点理论研究中,横截性是重要的基本概念,横截性定理则是非常有力的研究工具.在§2.1中我们从几何直观入手引入横截性,包括二子流形横截相交以及光滑映射与一子流形横截,建立了它们之间的内在联系.由于横截性是正则性概念的延伸,§2.2介绍了著名的Sard定理.以此为基础,§2.3和§2.4两节讨论了各种形式的横截性定理,包括参数横截性定理,导网形式的横截性定理等.最后一节应用横截性讨论了Thom一阶奇点集,为进一步学习Thom-Boardman奇点打下基础.读者从§2.5中的一些结果可以看到横截性这一工具的威力.

### §2.1 横截性概念

反映所研究的对象横截相交或者说处于一般位置的概念在奇点理论中是非常重要的.最简单的情形是观察向量空间  $V$  的两个子空间  $V_1$  与  $V_2$ ,我们说  $V_1$  和  $V_2$  横截相交,如果它们的向量和为整个空间  $V$ ,即  $V_1 + V_2 = V$ .

由于微分流形的切空间是向量空间,切映射为切空间之间的线性映射,所以可以定义两个子流形的横截性以及微分流形之间的可微映射与像空间中一子流形的横截性.

**定义 2.1.1** 设  $M_1, M_2$  是  $\mathbb{R}^n$  中的两个微分子流形.  $M_1$  与  $M_2$  在点  $x \in M_1 \cap M_2$  横截相交,如果它们在点  $x$  处的切空间  $T_x M_1$  和  $T_x M_2$  在  $\mathbb{R}^n$  中横截相交,即

$$T_x M_1 + T_x M_2 = \mathbb{R}^n.$$

子流形  $M_1$  和  $M_2$  在  $\mathbb{R}^n$  中横截相交是指  $M_1$  与  $M_2$  在  $M_1 \cap M_2$

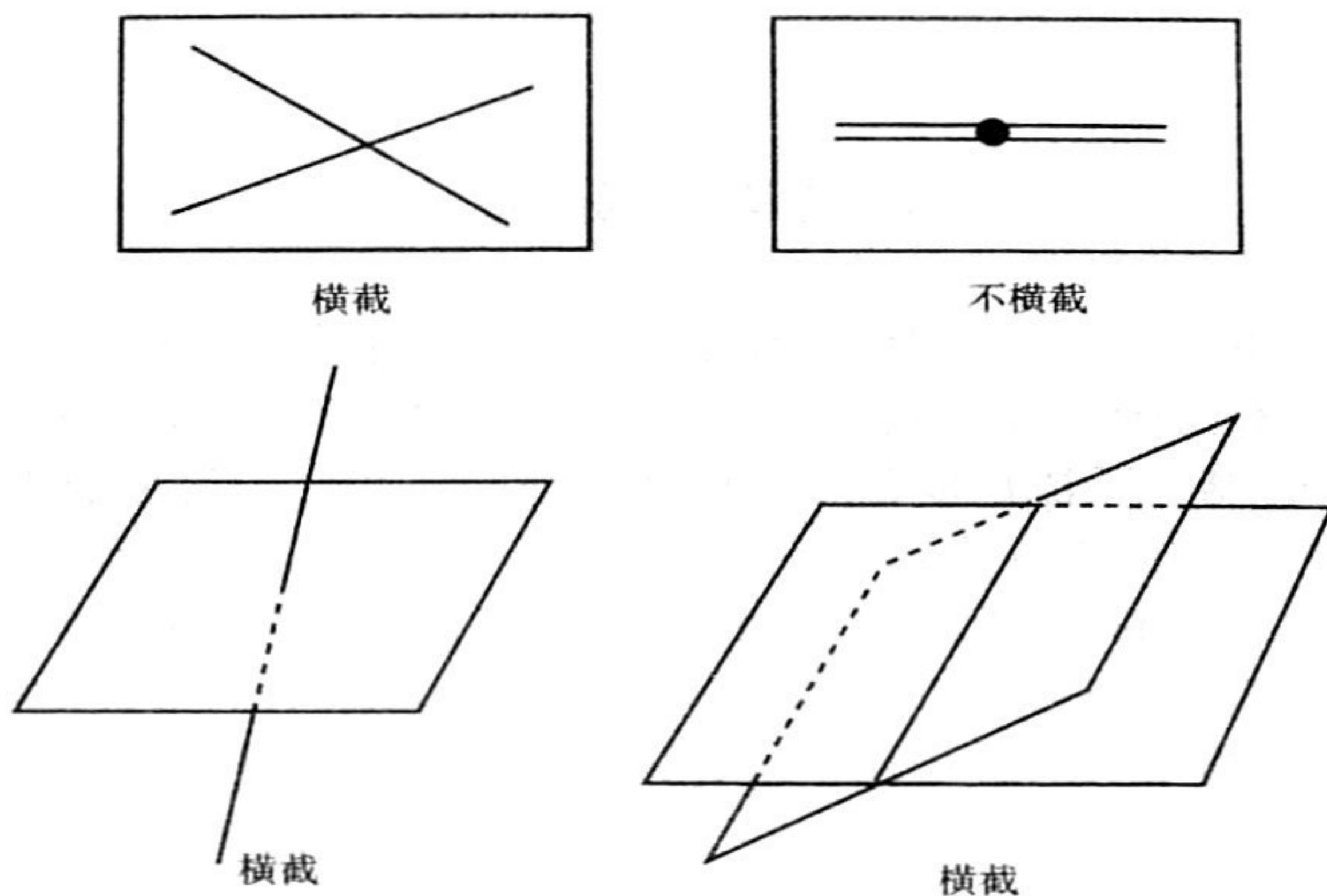


图 2.1

中的每一点处均横截相交.

对于  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  的情形, 约定  $M_1$  和  $M_2$  是横截的.

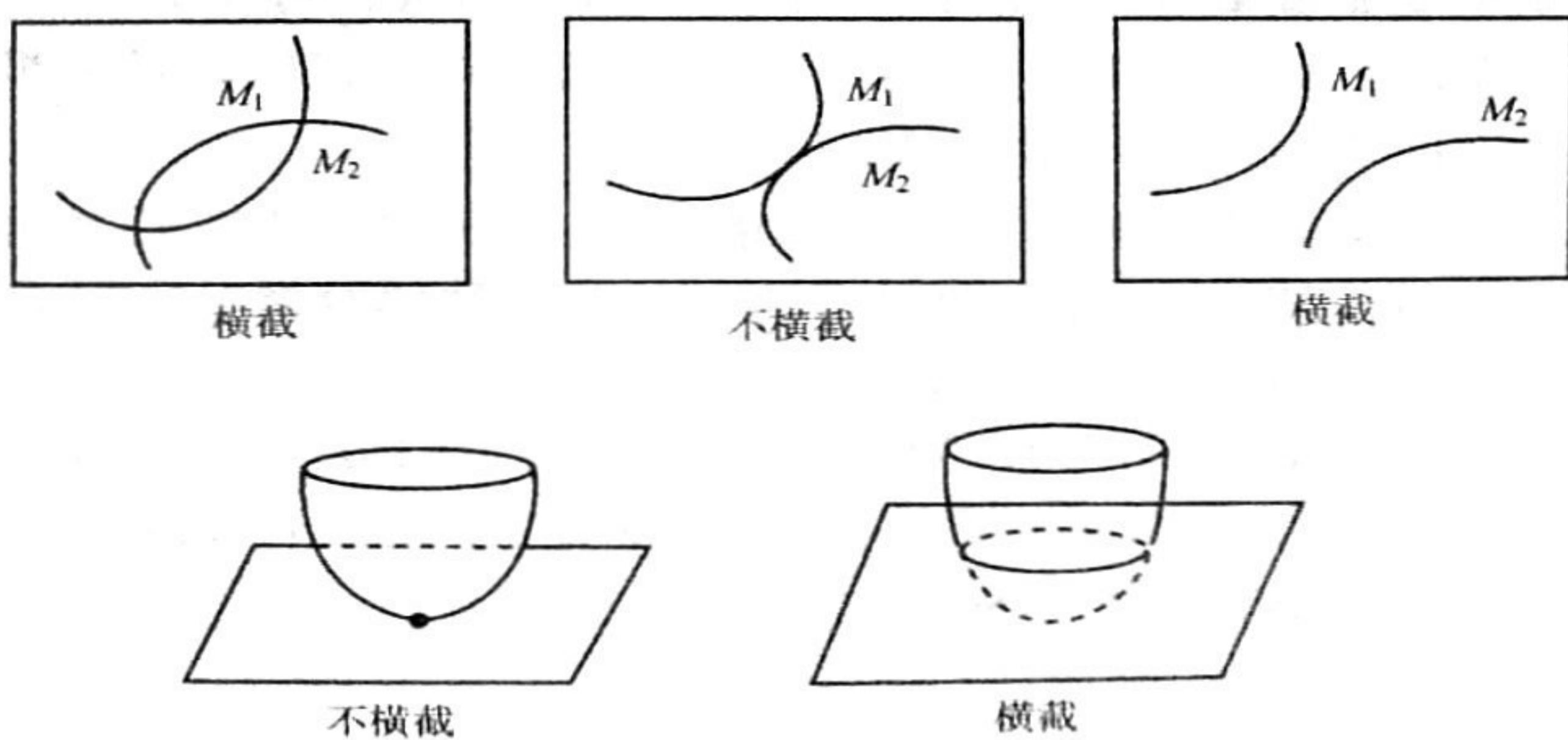


图 2.2

**定义 2.1.2** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射,  $S$  为  $\mathbb{R}^p$  的子流形. 我们说  $f$  在点  $x \in \mathbb{R}^n$  与  $S$  横截, 如果  $f(x) \notin S$ , 或  $f(x) \in S$  且满足下列条件:

$$Df(x)(\mathbb{R}^n) + T_{f(x)}S = \mathbb{R}^p,$$

其中  $Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  表  $f$  在点  $x$  的微分, 它是线性映射.  $T_{f(x)}S$  表示子流形  $S$  在点  $f(x)$  处的切空间.

若映射  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  的每一点均与  $S$  横截, 则称  $f$  与  $S$  横截, 记为  $f \pitchfork S$ . 而把  $f$  在点  $x$  与  $S$  横截记为  $f \pitchfork S$ .

两种特殊情形:

情形 1  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为淹没, 于是对每一  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为满射, 那么  $f$  与  $\mathbb{R}^p$  中的任意子流形  $S$  都横截.

情形 2  $\mathbb{R}^p$  中子流形  $S$  仅由一点  $y$  组成, 那么  $f \pitchfork \{y\}$  当且仅当  $y$  为  $f$  的正则值.

“ $C^\infty$  映射与一子流形横截”和“二子流形相横截”之间有着密切联系.

**命题 2.1.1** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射,  $S$  为  $\mathbb{R}^p$  的子流形.  $f \pitchfork S$  当且仅当  $\text{graph } f$  和  $\mathbb{R}^n \times S$  在  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  中相横截.

**证** 首先说明

$$\text{graph } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid y = f(x)\}$$

是  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  中的一个  $n$  维微分子流形. 事实上, 定义映射

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{graph } f, \quad x \mapsto (x, f(x)),$$

易见  $F$  是  $C^\infty$  的.  $F^{-1} = \pi|_{\text{graph } f}$ , 其中  $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  为自然投影, 因而  $F^{-1}$  也是  $C^\infty$  的. 这说明  $F$  是一个微分同胚. 又

$$DF(x) = (1, Df(x)),$$

因此  $\text{graph } f$  在任意点  $(x, f(x))$  处的切空间恰好是  $\text{graph } Df(x)$ .

按照定义,  $\text{graph } f$  和  $\mathbb{R}^n \times S$  在  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  中相横截是指对所有点  $z = (x, y)$ , 其中  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = f(x) \in S$ , 有

$$T_z(\text{graph } f) + T_z(\mathbb{R}^n \times S) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

即

$$\text{graph } Df(x) + \mathbb{R}^n \times T_{f(x)} S = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

显然它等价于

$$Df(x)(\mathbb{R}^n) + T_{f(x)} S = \mathbb{R}^p.$$

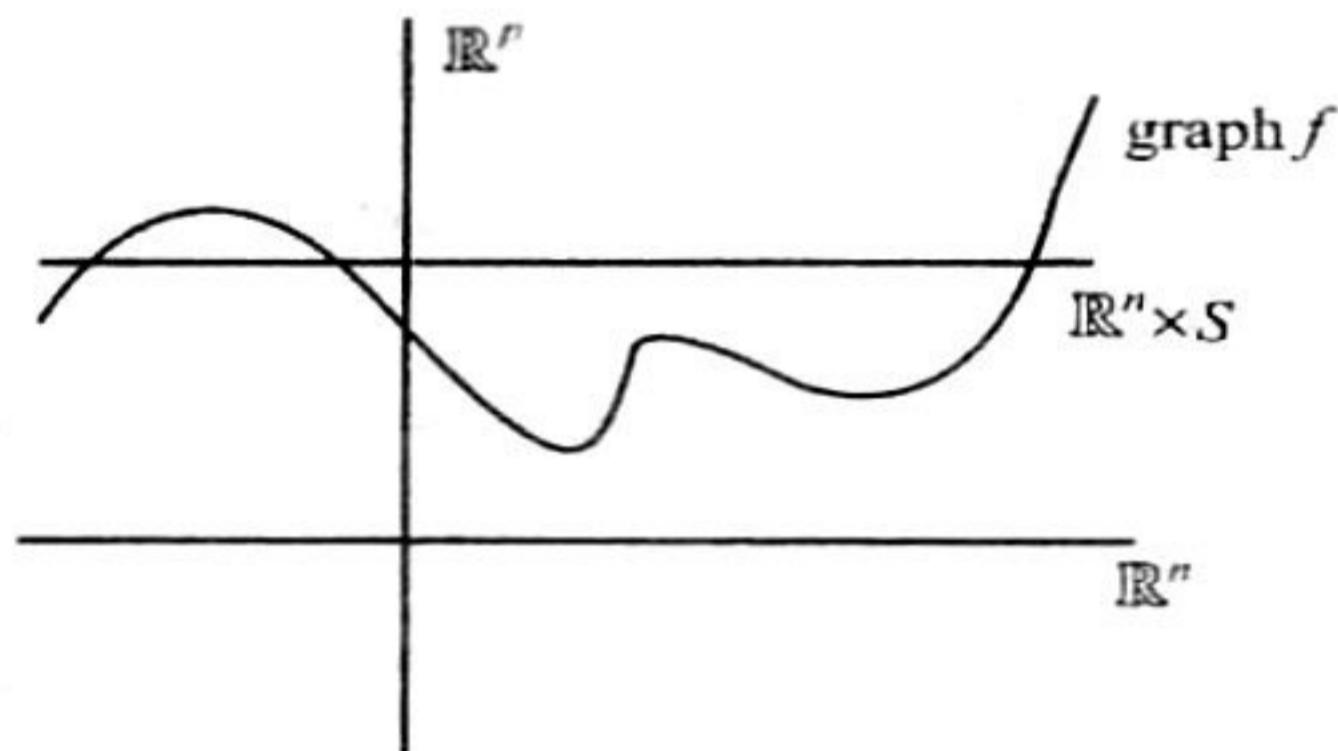


图 2.3

**定理 2.1.1** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射,  $S$  为  $\mathbb{R}^p$  中余维为  $q$  的子流形(因而  $S$  的维数是  $p - q$ ). 如果  $f$  与  $S$  横截, 那么  $M = f^{-1}(S)$  是  $\mathbb{R}^n$  中余维为  $q$  的子流形或为空集. 此外, 在  $\mathbb{R}^n$  中任取点  $x$ , 若  $y = f(x) \in S$ , 则有  $T_x M = (Df(x))^{-1}(T_y S)$ .

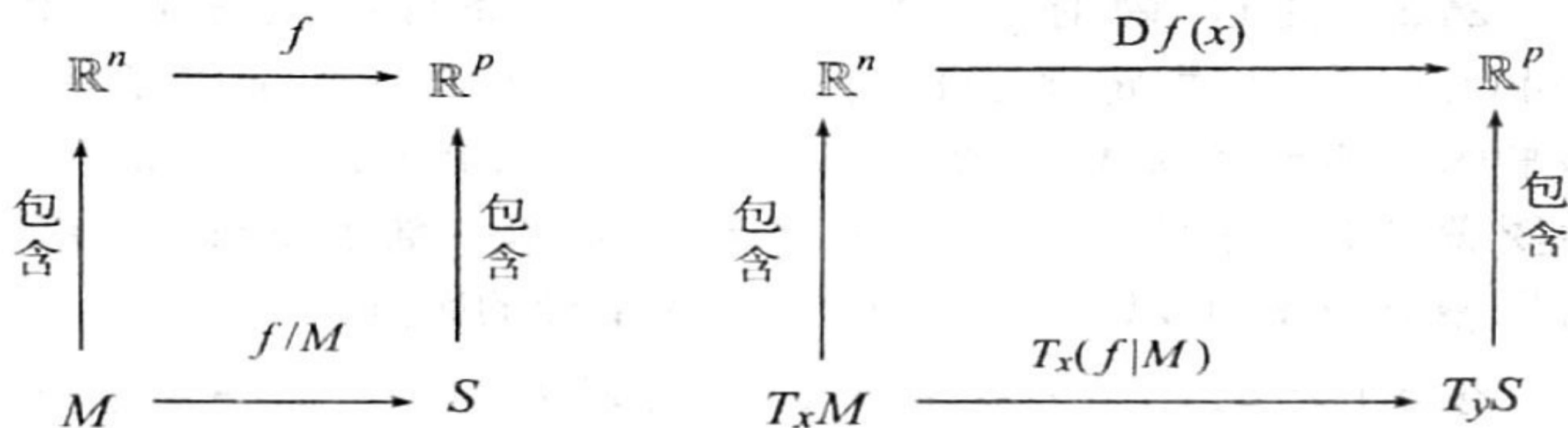
**证** 假定  $f^{-1}(S) \neq \emptyset$ . 取  $x \in f^{-1}(S)$ , 则  $f(x) = y \in S$ . 因  $S$  是  $(p - q)$  维子流形, 故存在  $y$  在  $\mathbb{R}^p$  中的开邻域  $V$  以及微分同胚  $\phi$ , 使得

$$\phi(V \cap S) = \phi(V) \cap \mathbb{R}^{p-q},$$

这里  $\mathbb{R}^{p-q}$  看做是  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q} = \mathbb{R}^p$  的子空间  $\{0\} \times \mathbb{R}^{p-q}$ . 记  $(V, \phi)$  的

坐标函数为  $v_1, \dots, v_p$ , 并设  $\pi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  将  $\mathbb{R}^p$  中的点投影到它的前  $q$  个分量上, 则  $V \cap S = \phi^{-1} \circ \pi^{-1}(0)$ , 这里  $0$  表  $\mathbb{R}^q$  的原点, 并且  $f^{-1}(V \cap S) = (\pi \circ \phi \circ f)^{-1}(0)$ . 因  $f$  与  $S$  在点  $x \in f^{-1}(S)$  横截, 故  $\pi \circ \phi \circ f$  在点  $x$  处的秩为  $q$ , 这说明  $\mathbb{R}^q$  中的原点是  $\pi \circ \phi \circ f$  的正则值. 据定理 1.2.4,  $(\pi \circ \phi \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(V \cap S)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的  $(n-q)$  维子流形. 由于点  $x \in f^{-1}(S)$  是任取的, 所以  $f^{-1}(S)$  是  $\mathbb{R}^n$  中余维为  $q$  的子流形.

现证定理中第二个断言.



由左上图可换性可导出右上图的可换性, 因此  $T_x M \subset (Df(x))^{-1}(T_y S)$ . 要证明这两个向量空间相等, 只需证明它们的维数相等. 为此考虑线性映射

$$\alpha = Df(x)|_{(Df(x))^{-1}(T_y S)}: (Df(x))^{-1}(T_y S) \rightarrow T_y S,$$

易见  $\text{Ker} \alpha = \text{Ker} Df(x)$ ,  $\text{Im} \alpha = T_y S \cap Df(x)(\mathbb{R}^n)$ . 因为线性映射的定义域的维数等于核空间维数与像空间维数之和, 再利用横截性定义便可导出所要求的维数等式(留作简单练习).

**例 1** 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶可逆对称矩阵. 考虑  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ , 其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表  $\mathbb{R}^n$  上的通常内积.  $f$  在点  $x \in \mathbb{R}^n$  处的微分是线性映射  $v \mapsto 2\langle Ax, v \rangle$ , 因而 1 是  $f$  的一个正则值并且  $f^{-1}(1)$  或为空集或为  $\mathbb{R}^n$  中的  $(n-1)$  维微分子流形. 当  $f^{-1}(1)$

$\neq \emptyset$  时,  $f^{-1}(1)$  是有心二次曲面  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = 1$ , 这个二次曲面在点  $x$  处的切空间就是  $f$  在点  $x$  的微分的核, 即与向量  $Ax$  垂直且通过原点的超平面.

特例. 1)  $A$  为  $n$  阶单位矩阵, 则  $f^{-1}(1)$  为  $(n-1)$  维球面  $S^{n-1}$ , 它是  $\mathbb{R}^n$  中的  $(n-1)$  维光滑子流形, 该球面在点  $x \in S^{n-1}$  处的切空间是过原点且垂直于向量  $x$  的超平面.

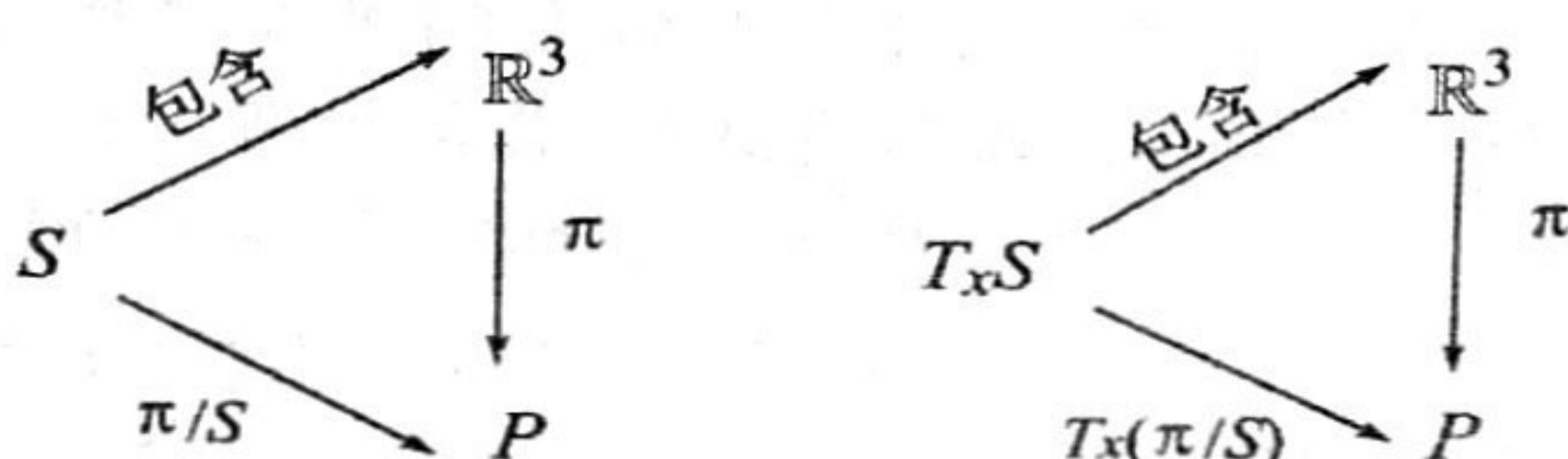
2) 取  $n=3$ , 则椭球面、椭圆柱面、双曲柱面及双曲面均为二维微分子流形.

**例 2** 设  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  满足下列条件:  $\forall x \in f^{-1}(0)$ ,  $\text{rank}Df(x) = 1$ . 据定理 2.1.1,  $f^{-1}(0)$  为  $\mathbb{R}^2$  中的一维光滑子流形, 即平面上的光滑曲线. 例如,  $f(y, z) = (y - a)^2 + z^2 - b^2$  ( $a > b > 0$ ) 便满足上述条件.  $(y - a)^2 + z^2 = b^2$  表示一维子流形  $f^{-1}(0)$ , 它是  $yOz$  平面上以  $(a, 0)$  为圆心,  $b$  为半径的圆周.

令  $F(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ , 则  $F: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  也具有类似性质:  $F$  的微分在  $F^{-1}(0)$  的每一点处的秩等于 1, 因而  $F^{-1}(0)$  是  $\mathbb{R}^3$  中的二维光滑子流形, 它是由上述圆周绕  $z$  轴旋转所得到的旋转曲面, 即环面, 它的方程是

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

现插入一段曲面在一平面上投影的知识, 因它有助于对本节余下部分的直观理解. 取定一光滑曲面  $S \subset \mathbb{R}^3$  (即  $\mathbb{R}^3$  中的二维微分子流形) 及过原点的平面  $P$ , 设  $\pi$  表示到平面  $P$  上的正投影, 考



虑  $\pi|S$  的奇点集. 不妨将  $P$  设想成水平的, 与  $P$  正交的直线则是垂直的.

任取  $x \in S$ . 由上述左图的可换性导致右图也是可换的, 这里  $T_x(\pi|S)$  表示  $\pi|S$  在点  $x$  处的切映射. 若  $x$  是  $\pi|S$  的奇点, 则  $\pi$  必将  $T_x S$  映为  $P$  的一个真子空间, 因而切平面  $T_x S$  应该是“垂直”的. 一般来说,  $\pi|S$  的奇点集为  $S$  的一条曲线, 它被投影成  $P$  内的一条曲线, 即分歧集.

例 3 设  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u = x, v = y^3 - xy)$  为 Whitney 尖点映射, 则  $f$  的奇点集

$$\begin{aligned}\Sigma f &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 3y^2 - x \end{bmatrix} \text{ 的秩} < 2 \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3y^2\},\end{aligned}$$

它是  $xOy$  平面上的抛物线. 这条抛物线在  $f$  下的像是分歧集, 方程为  $4u^3 - 27v^2 = 0$ , 称为尖点三次线.

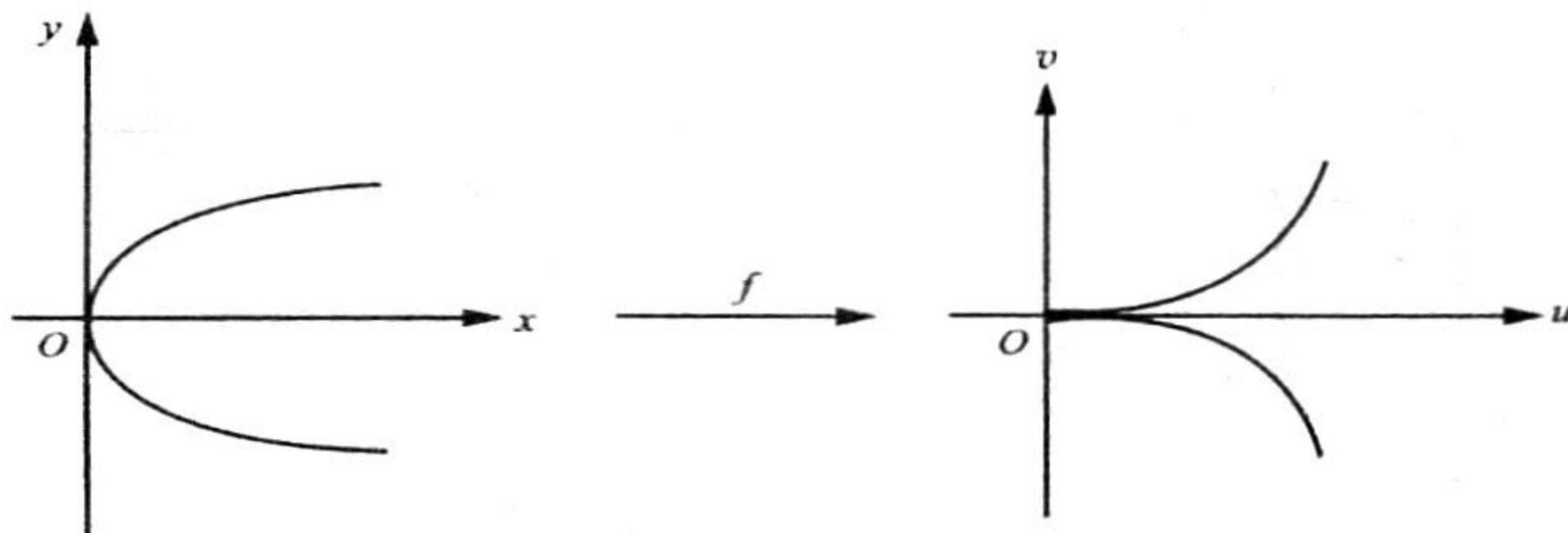


图 2.4

从几何直观来看, 最好将 Whitney 尖点映射看做下面两个映射  $g$  和  $\pi$  的复合, 其中

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (u, v, w),$$

$$\text{这里 } u = x, \quad v = y^3 - xy, \quad w = y,$$

$$\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v, w) \mapsto (u, v).$$

$g$  的像是曲面  $S$ , 它由方程  $F = v - w^3 + uw = 0$  所确定. 据定理 2.1.1,  $S$  是  $\mathbb{R}^3$  中二维光滑子流形. 将折叠曲面  $S$  到平面  $w = 0$  上的投影记为  $\pi$ .

$S$  的切平面是  $F$  的微分的核, 因而垂直于向量  $\left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}\right) = (w, 1, u - 3w^2)$ . 当这一向量位于平面  $w = 0$  时, 切平面是垂直的, 也就是当  $u = 3w^2, v = -2w^3$  时, 切平面垂直于平面  $w = 0$ . 于是  $\pi|_S$  的奇点集是“折叠曲线”, 其参数方程为  $u = 3t^2, v = -2t^3, w = t$ , 该曲线是三次挠线, 经  $\pi$  投影变为尖点三次线.

**例 4** 考虑例 2 中的环面  $S$  到平面  $y = z$  上的投影  $\pi$ , 其中  $S$  由方程

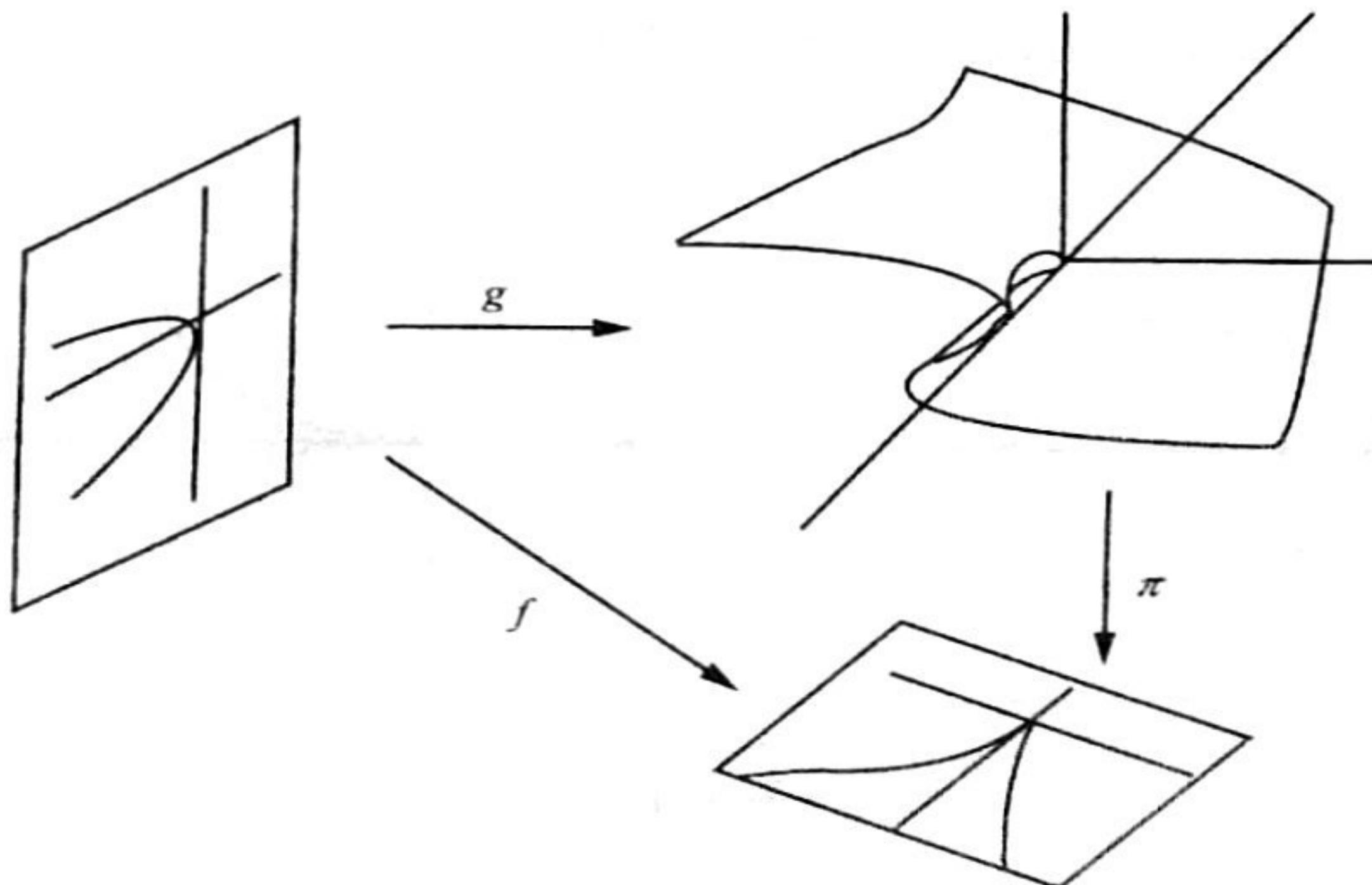


图 2.5

$$G = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (1)$$

给定  $S$  的切平面是微分  $DG$  的核, 即与向量  $\left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$  相垂直的平面.  $S$  中的点为  $\pi|S$  的奇点的条件是向量  $\left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$ , 位于平面  $y = z$ , 因而  $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z}$ . 经计算得

$$(z - y)(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2) + 2a^2 y = 0, \quad (2)$$

因此奇点集  $\Sigma(\pi|S)$  由方程(1)和(2)确定, 它是次数分别为 4 和 3 的两张代数曲面的交, 因而是一条次数为 12 的空间代数曲线, 该曲线在平面  $y = z$  上的投影便是分歧集. 如果环面是透明的(例如用玻璃制成的), 将它投影到平面上便看到图 2.6 所绘的可见轮廓, 它有 4 个尖点型奇点.

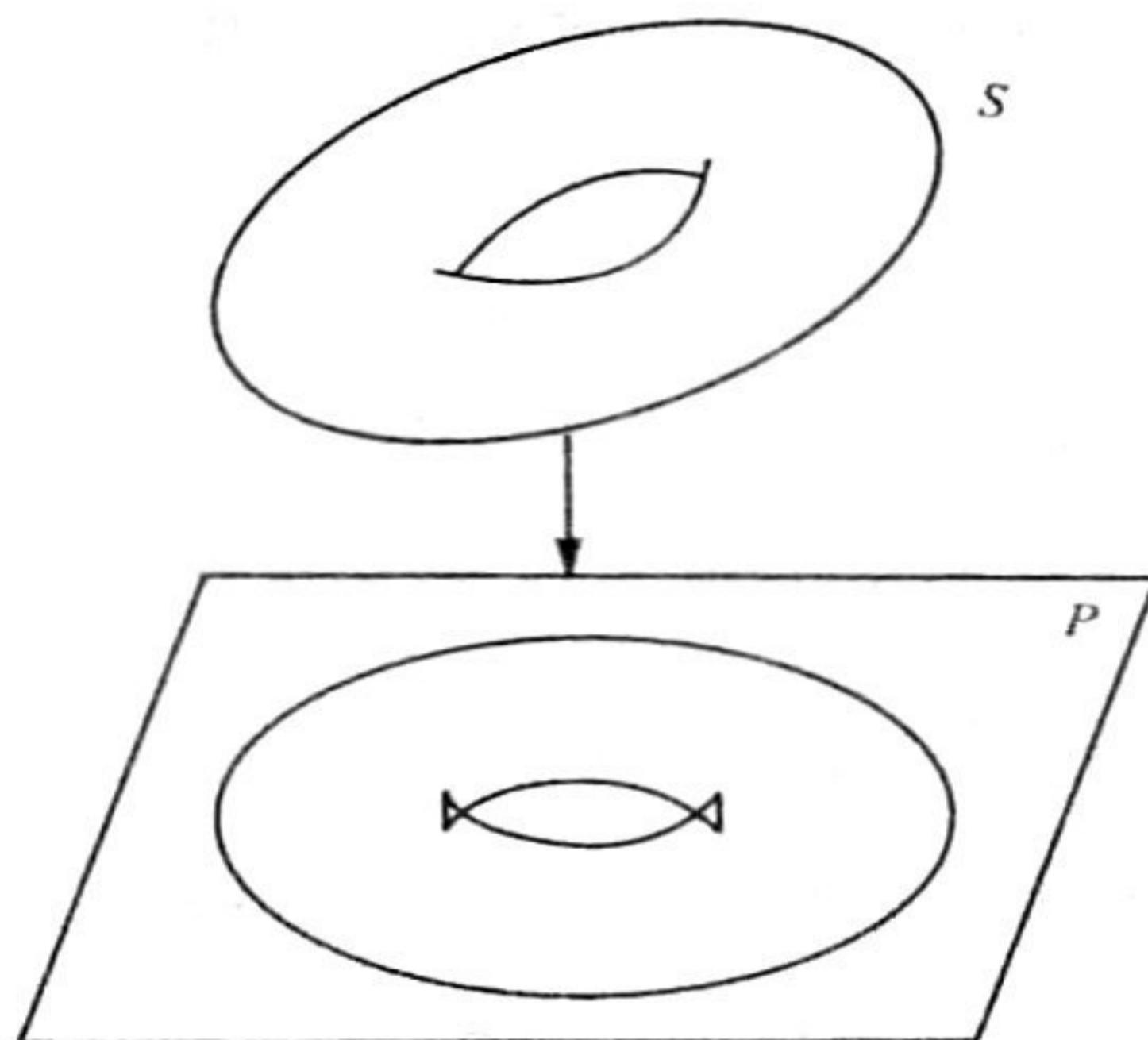


图 2.6

## § 2.2 Sard 定理

长期以来, 人们关心由各种方程表示的曲线和曲面. 设  $U$  为

$\mathbb{R}^n$  中的开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射. 那么对任意  $b \in \mathbb{R}^p$ , 方程

$$f(x) = b$$

的解集  $f^{-1}(b)$  为  $\mathbb{R}^n$  中的闭集, 一般来说可能相当复杂. 进而问: 如果  $f^{-1}(b)$  非空, 那么哪些  $b$  能保证  $f^{-1}(b)$  为  $C^\infty$  流形呢? Sard 定理给出了满意的回答. 该定理可以简洁地叙述为: 光滑映射的临界值集是一个零测度集. 作为 Sard 定理的一个应用, 上述问题的结论是, 对于几乎所有的  $b_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) (这意指  $b = (b_1, \dots, b_p)$  取自  $\mathbb{R}^p$  中除去一个零测度集以外的所有点), 非线性方程

$$f_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, p$$

如果有解, 则它的解集为  $\mathbb{R}^n$  中一个  $(n - p)$  维微分子流形.

本节主要证明 Sard 定理.

### 2.2.1 零测度集与 Fubini 定理

**定义 2.2.1** 设  $C$  为  $\mathbb{R}^n$  的子集. 若对任给的  $\epsilon > 0$ , 存在可数个  $n$  维方体  $\{W_i\}$ , 使得  $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ , 且  $\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \epsilon$ , 则称集  $C$  的测度为 0. 这里  $|W|$  表方体  $W$  的体积, 即若  $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, b_i - a_i = l, i = 1, \dots, n\}$ , 则  $|W| = l^n$ .

**断言** 若  $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ , 且每一  $C_i$  的测度为 0, 则  $C$  的测度亦为 0. 事实上, 由  $C_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j^i$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} |W_j^i| < \frac{\epsilon}{2^i}$ , 有  $C \subset \bigcup_{i,j} W_j^i$  且  $\sum_{i,j} |W_j^i| < \sum_i \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$ . 因此可数个零测度集的并仍为零测度集.

**引理 2.2.1** 设  $U$  为  $\mathbb{R}^n$  中开集,  $C \subset U$  为零测度集. 若  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $C^\infty$  映射, 则  $f(C)$  的测度为 0.

**证** 因  $U$  可表为可数个有界闭球的并, 故可假定  $C$  包含在一个有界闭球即紧致球内. 并且由  $n$  维方体构成的  $C$  的覆盖包含在稍为大一点的紧致球  $K$  内, 且  $K \subset U$ .

由微积分学的中值定理知, 对任意  $x, x + h \in K$ , 存在常数  $c$ ,

使得

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c|h|.$$

当边长为  $a$  的方体  $W \subset K$  时, 对  $x, x^0 \in W$ , 有  $|x - x^0| \leq \sqrt{n}a$ , 因此

$$|f(x) - f(x^0)| \leq c \cdot \sqrt{n}a,$$

从而  $f(W)$  位于体积为  $(2\sqrt{n}c)^n |W|$  的  $n$  维方体内, 而常数  $(2\sqrt{n} \cdot c)^n$  与  $W$  无关. 因此, 若  $C \subset \bigcup_i W_i \subset K$  且  $\sum_i |W_i| < \epsilon / (2\sqrt{n} \cdot c)^n$ , 则  $f(C) \subset \bigcup_i f(W_i)$  包含在总体积小于  $\epsilon$  的  $n$  维方体的并之中, 这说明  $f(C)$  的测度为 0.

**推论 2.2.1** 若  $C$  为  $\mathbb{R}^n$  中的零测度集,  $\Phi: U \rightarrow V$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集  $U$  与  $V$  之间的微分同胚, 且  $C \subset U$ , 则  $\Phi(C)$  也是零测度集.

现在叙述 Fubini 定理的一个特殊情形.

**定理 2.2.1** 设  $C$  为  $\mathbb{R}^n$  中的紧致子集. 令  $\mathbb{R}_t^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\}$ ,  $C_t = C \cap \mathbb{R}_t^{n-1}$ . 若对所有的  $t \in \mathbb{R}$ ,  $C_t$  在  $\mathbb{R}_t^{n-1} \approx \mathbb{R}^{n-1}$  中具有零测度, 则  $C$  在  $\mathbb{R}^n$  中也具有零测度.

本定理是说一个可测集

$$C \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},$$

如果与每一个超平面  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{\text{常数}\}$  的交是一个  $(n-1)$  维零测度集, 则  $C$  的测度为 0.

定理的证明用到下面的初等引理.

**引理 2.2.2** 由开区间组成的闭区间  $[0, 1]$  的开覆盖包含有限子覆盖  $\{I_j \mid j = 1, \dots, k\}$  合于  $\sum_{j=1}^k |I_j| \leq 2$ .

**证** 选取一个有限子覆盖, 使得不能从该子覆盖中删去任何一个开区间(否则便不是  $[0, 1]$  的覆盖), 记这一子覆盖为  $\{I_j \mid j = 1, \dots, k\}$ . 设  $I_j$  的端点为  $a_j, b_j$ , 且编号按左端点  $a_j$  的大小而定.

易见当  $i \neq j$  时,  $a_i \neq a_j$ , 因此编号是惟一的. 另外, 假定  $k \geq 3$ . 我们有

$$a_i < a_{i+1} < b_i \leq a_{i+2}.$$

倘若第二个不等式不成立, 覆盖中将出现一段空隙. 至于第三个, 因  $b_i < b_{i+1}$  (否则  $(a_i, b_i) \supset (a_{i+1}, b_{i+1})$ ), 倘若  $a_{i+2} < b_i$ , 那么  $(a_i, b_i) \cup (a_{i+2}, b_{i+2}) \supset (a_{i+1}, b_{i+1})$ . 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^{k-2} (b_i - a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k-2} (a_{i+1} - a_i) + (b_{k-1} - a_{k-1}) \\ &\quad + (b_k - a_k) \leq \sum_{i=1}^{k-2} (a_{i+2} - a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k-2} (a_{i+1} - a_i) \\ &\quad + (b_{k-1} - a_{k-1}) + (b_k - a_k) \\ &= b_{k-1} - a_1 + b_k - a_2 \leq 2. \end{aligned}$$

**定理 2.2.1 的证明** 不失一般性, 假定  $C \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$ . 依假设, 对每一  $t \in [0, 1]$ ,  $C_t$  在  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$  中具有零测度. 任给  $\varepsilon > 0$ , 可找到  $C_t$  的开覆盖  $\{W_t^i\}$   $W_t^i$  是  $\mathbb{R}_t^{n-1}$  中开方体,  $i \in \mathbb{N}\}$ , 使得  $\sum_i |W_t^i| < \varepsilon$ . 设  $\bigcup_i W_t^i \subset \mathbb{R}_t^{n-1}$  在  $\mathbb{R}^{n-1}$  上投影为  $W_t$ . 显然,  $W_t$  是  $\mathbb{R}^{n-1}$  中的开集.

因  $x_n$  是最后一个坐标, 对固定的  $t$ ,  $|x_n - t|$  是  $C$  上的连续函数, 且在  $C_t$  上取值为 0, 而  $C - (W_t \times [0, 1])$  是  $C$  的闭子集因而是紧致子集. 将函数  $|x_n - t|$  限制在  $C - (W_t \times [0, 1])$  上必取得极小值, 设为  $\alpha$ , 记  $I_t^\alpha = (t - \alpha, t + \alpha)$ , 则

$$C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_n - t| < \alpha\} \subset W_t \times I_t^\alpha.$$

区间族  $\{I_t^\alpha\}$  覆盖  $[0, 1]$ , 由引理 2.2.2, 存在有限子覆盖, 设为  $\{I_j\mid j = 1, \dots, k\}$  (这里  $I_j = I_{t_j}^\alpha$ ), 使得  $\sum_j |I_j| \leq 2$ , 从而由长方体组成的可数族  $\{W_{t_j}^i \times I_j \mid j = 1, \dots, k, i \in \mathbb{N}\}$  覆盖  $C$  并且总体积小于

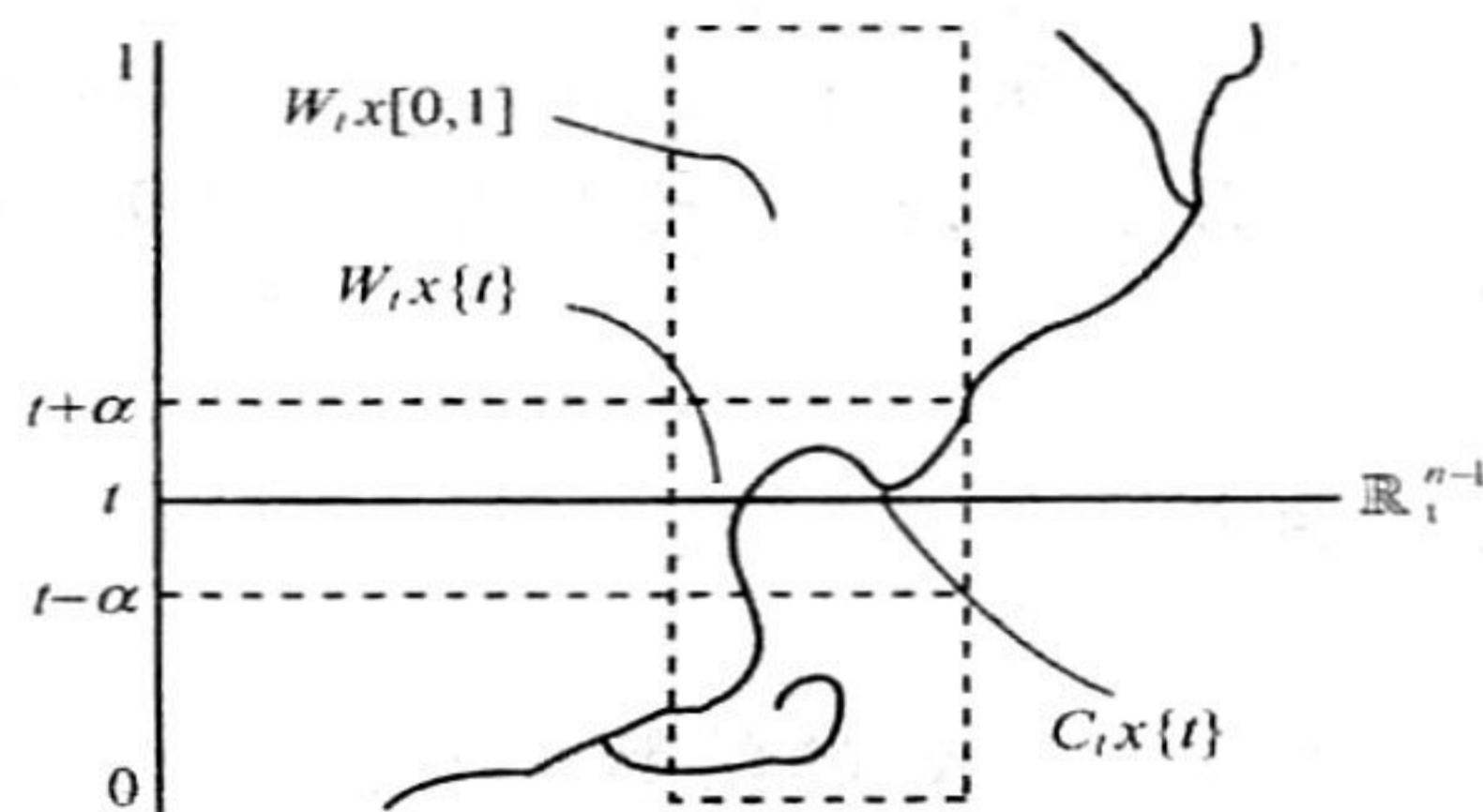


图 2.7

注 在上述 Fubini 定理中, 要求  $C$  是紧致集. 然而我们可将该条件削弱, 换成  $C$  为可数个紧致集的并. 满足后一条件的集包括以下几种:

- (i) 闭集  $D$ , 因它可表为  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D \cap \{ \|x\| \leq n \}$ ,
- (ii) 开集, 它可写成可数个闭球的并,
- (iii) 这些集在连续映射  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  下的像(因为紧致集的连续映射像仍为紧致的),
- (iv) 以上类型的集的有限交再做可数并.

下面采用 Milnor 的证法给出 Sard 定理的证明, 见文献[56].

### 2.2.2 Sard 定理的证明

先看一种特殊情形. 设  $S$  为  $\mathbb{R}^n$  中的  $s$  维微分子流形,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射, 又  $s < p$ , 则  $f(S)$  是  $\mathbb{R}^p$  的零测度集(留作练习). 显然,  $S$  本身是  $f$  的临界点集. 更一般地, 有下面的 Sard 定理.

**定理 2.2.2** 设  $S$  为  $\mathbb{R}^n$  中的微分子流形,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射,  $p \geq 1$ . 令  $C$  为  $f$  的临界点集, 则  $f(C) \subset \mathbb{R}^p$  为零测度集.

**证** 对  $S$  的维数  $s$  使用归纳证明. 当  $s = 0$  时结论显然成立. 假定当流形  $s$  的维数不大于  $s - 1$  时结论成立, 证明当  $S$  的维数为  $s$  时结论亦真.

因为流形具有可数拓扑基, 又一个集具有零测度的性质在微分同胚下保持不变(据推论 2.2.1)并且可数个零测度集的并仍为零测度集, 因此只需就下列局部形式的结论予以证明:

若  $S$  是  $\mathbb{R}^s$  中的开子集,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射. 假定

$$C = \{x \in S \mid rk_x f < p\},$$

那么  $f(C)$  的测度为 0.

对  $k \geq 1$ , 令

$C_k = \{x \in S \mid f$  在点  $x$  处的阶数  $\leq k$  的各阶偏导数均为 0\},  
显然  $C_k$  为闭集, 且

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots.$$

证明分以下 3 步:

第 1 步  $f(C - C_1)$  有零测度;

第 2 步 当  $i \geq 1$  时,  $f(C_i - C_{i+1})$  有零测度;

第 3 步 当  $k$  足够大时,  $f(C_k)$  有零测度,

于是

$$f(C) = f(C - C_1) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} f(C_i - C_{i+1}) \cup f(C_k)$$

有零测度.

第 1 步的证明. 当  $p = 1$  时,  $C = C_1$ , 因此假定  $p \geq 2$ . 对于每一  $x \in C - C_1$ , 若能找点  $x$  的一个开邻域  $V$ , 使得  $f(V \cap C)$  具有零测度. 那么  $f(C - C_1)$  的测度为 0, 这是因为  $C - C_1$  可以被可数个这样的  $V$  所覆盖.

因  $x \notin C_1$ , 存在一阶偏导数在点  $x$  的值不为 0, 不妨设  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$ , 于是映射

$$h: S \rightarrow \mathbb{R}^s, (x_1, \dots, x_s) \mapsto (f_1(x), x_2, \dots, x_s)$$

在点  $x$  非奇异. 据反函数定理,  $h$  将点  $x$  的某一开邻域  $V$  微分同

胚地映到一个开集  $V'$  上. 复合映射  $g = f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$  具有下列形式:

$$g : (z_1, \dots, z_s) \mapsto (z_1, g_2(z), \dots, g_p(z)).$$

注意  $g$  的临界点集  $C' = h(V \cap C)$ , 因此  $g$  的临界值集  $g(C') = f(V \cap C)$ . 因为对每一个  $(t, z_2, \dots, z_s) \in V'$ ,  $g(t, z_2, \dots, z_s) \in \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$ , 所以  $g$  将超平面  $\{z \mid z_1 = t\}$  映入超平面  $\{y \mid y_1 = t\}$ . 令

$$g' = g|_{(\{t\} \times \mathbb{R}^{s-1}) \cap V} : (\{t\} \times \mathbb{R}^{s-1}) \cap V \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}.$$

点  $z = (t, z_2, \dots, z_s) \in (\{t\} \times \mathbb{R}^{s-1}) \cap V$  为  $g'$  的临界点当且仅当它是  $g$  的临界点, 因为  $g$  的 Jacobi 矩阵为

$$\left( \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right) = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & (\partial g'_i / \partial z_j) \end{array} \right].$$

根据归纳假设,  $g'$  的临界值集在  $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$  中有零测度, 因此  $g$  的临界值集与每一超平面  $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$  交于一个零测度集. 据 Fubini 定理及其注,

$$g(C') = f(V \cap C)$$

有零测度.

第 2 步的证明. 对于每一  $x_0 \in C_k - C_{k+1}$ , 存在某个  $k+1$  阶偏导数在点  $x_0$  的值不为 0, 不妨设

$$\partial^{k+1} f_1 / \partial x_1 \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} (x_0) \neq 0.$$

令函数  $W : S \rightarrow \mathbb{R}$  定义为  $W(x) = \partial^k f_1 / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} (x)$ , 则  $W(x_0) = 0$ ,  $\partial W / \partial x_1 (x_0) \neq 0$ , 于是由

$$h(x) = (W(x), x_2, \dots, x_s)$$

定义的映射  $h: S \rightarrow \mathbb{R}^s$  将点  $x_0$  的某一开邻域  $V$  微分同胚地映成开集  $V'$  上, 且  $h(C_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{s-1}$ . 令  $g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^p$  及  $g^0 = g|(\{0\} \times \mathbb{R}^{s-1}) \cap V'$ . 依归纳假设,  $g^0$  的临界值集在  $\mathbb{R}^p$  中有零测度. 然而  $h(C_k \cap V)$  中的每一点必为  $g^0$  的临界点(因为所有阶数不大于  $k$  的偏导数均为 0), 故

$$g^0(h(C_k \cap V)) = f(C_k \cap V)$$

有零测度. 由于  $C_k - C_{k+1}$  被可数多个这样的  $V$  所覆盖, 因此  $f(C_k - C_{k+1})$  有零测度.

第 3 步的证明. 设  $W \subset S$  是边长为  $a$  的  $s$  维闭方体. 若  $k$  足够大, 例如取  $k > s/p - 1$ , 我们将证明  $f(W \cap C_k)$  有零测度. 因为  $C_k$  可以被可数多个这种  $s$  维方体所覆盖, 因而  $f(C_k)$  的测度也为零.

据 Taylor 公式和  $W$  的紧致性以及  $C_k$  的定义, 有

$$f(x + \delta) = f(x) + R(x, \delta), \quad |R(x, \delta)| \leq c \cdot |\delta|^{k+1}, \quad (*)$$

其中  $x \in C_k \cap W$ ,  $x + \delta \in W$  并且对于取定的  $f$  与  $W$  来说,  $c$  为常数.

将  $W$  割分成边长为  $a/r$  的小方体, 这样的  $s$  维方体共有  $r^s$  个. 设  $W_1$  为其中的一个. 它包含  $C_k$  中的一点  $x$ .  $W_1$  中的每一点可写为  $x + \delta$ , 其中  $|\delta| \leq \frac{\sqrt{sa}}{r}$ . 由式(\*)知,  $f(W_1)$  位于边长为

$$2c \cdot \frac{(\sqrt{sa})^{k+1}}{r^{k+1}} = \frac{b}{r^{k+1}}$$

的  $p$  维方体中, 因此  $f(C_k \cap W)$  包含在最多  $r^s$  个这样的  $p$  维方体的并之中. 这些方体的总体积

$$\sum \leq r^s \cdot \left( \frac{b}{r^{k+1}} \right)^p = b^p \cdot r^{s-(k+1)p}.$$

因假定  $p(k+1) > s$ , 故当  $r \rightarrow \infty$  时,  $\sum$  趋近于 0, 所以  $f(W \cap C_k)$  必定有零测度.

**推论 2.2.2**  $C^\infty$  映射  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^p$  的正则值集是  $\mathbb{R}^p$  中的稠密子集.

**证** 据定理 2.2.2,  $f$  的临界值集是  $\mathbb{R}^p$  中的零测度集. 而零测度集不能包含  $\mathbb{R}^p$  中任何非空开集, 因此它的补集即  $f$  的正则值集在  $\mathbb{R}^p$  中处处稠密.

最后指出, Sard 定理是微分拓扑中的一个基本结果. 下一节介绍基本横截性引理, 证明的关键工具便是 Sard 定理. 事实上, Sard 定理是微分拓扑中许多重要的存在性定理的基础.

### § 2.3 基本横截性引理

设  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射. 对每一  $\lambda \in \mathbb{R}^r$ , 定义映射  $F_\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为

$$F_\lambda(x) = F(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

因而  $F$  可看做是由  $C^\infty$  映射  $F_\lambda$  组成的光滑映射族  $\{F_\lambda\}$ , 它以  $\lambda \in \mathbb{R}^r$  为参数. 现假定  $S$  是  $\mathbb{R}^p$  中的微分子流形, 我们问: 如果  $F \pitchfork S$ , 是否对所有的参数  $\lambda \in \mathbb{R}^r$ ,  $F_\lambda$  横截  $S$  呢?

**例 1** 取  $n=2, r=1, p=3$ . 令映射

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad ((x, y), \lambda) \mapsto (x, y, \lambda).$$

易见对每一  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $F_\lambda$  将  $\mathbb{R}^2$  映成  $\mathbb{R}^3$  中的水平面  $z = \lambda$ . 取  $S$  为  $\mathbb{R}^3$  中的二维球面  $S^2$ . 因为  $F$  是一个微分同胚, 自然有  $F \pitchfork S^2$ .

另一方面, 当  $\lambda \neq \pm 1$  时,  $F_\lambda \pitchfork S^2$ . 而当  $\lambda = \pm 1$  时, 平面  $z = \pm 1$  与球面  $S^2$  相切, 这说明  $F_1$  及  $F_{-1}$  均不与  $S^2$  横截. 尽管如此, 参数  $\lambda$  的任意值总可以用使得  $F_\lambda \pitchfork S^2$  的  $\lambda$  的值来逼近, 而这正是基本横截性引理(又叫参数横截性引理)的内容. 证明该引理用到的一个重要工具便是 Sard 定理. 由于技术上的理由, 我们将

用有限个光滑流形  $S_1, \dots, S_l$  来代替单个的流形  $S$ .

**引理 2.3.1(基本横截性引理)** 设  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射,  $S_1, \dots, S_l$  为  $\mathbb{R}^p$  中的微分子流形. 若  $F \pitchfork S_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ), 则存在  $\mathbb{R}^r$  的一个稠密子集  $A$ , 使得当  $\lambda \in A$  时,

$$F_\lambda \pitchfork S_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

**证** 由定理 2.1.1,

$$M_i = F^{-1}(S_i), \quad i = 1, \dots, l$$

是  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  中的微分子流形(若  $M_i$  非空). 令  $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  为标准投影. 如果能证明

$$\pi|_{M_i \pitchfork \{\lambda\}} \Leftrightarrow F_\lambda \pitchfork S_i, \quad i = 1, \dots, l,$$

那么由 Sard 定理, 本引理得证. 而证上式成立, 下面分为两步来做. 为简单起见, 我们省去下标  $i$ .

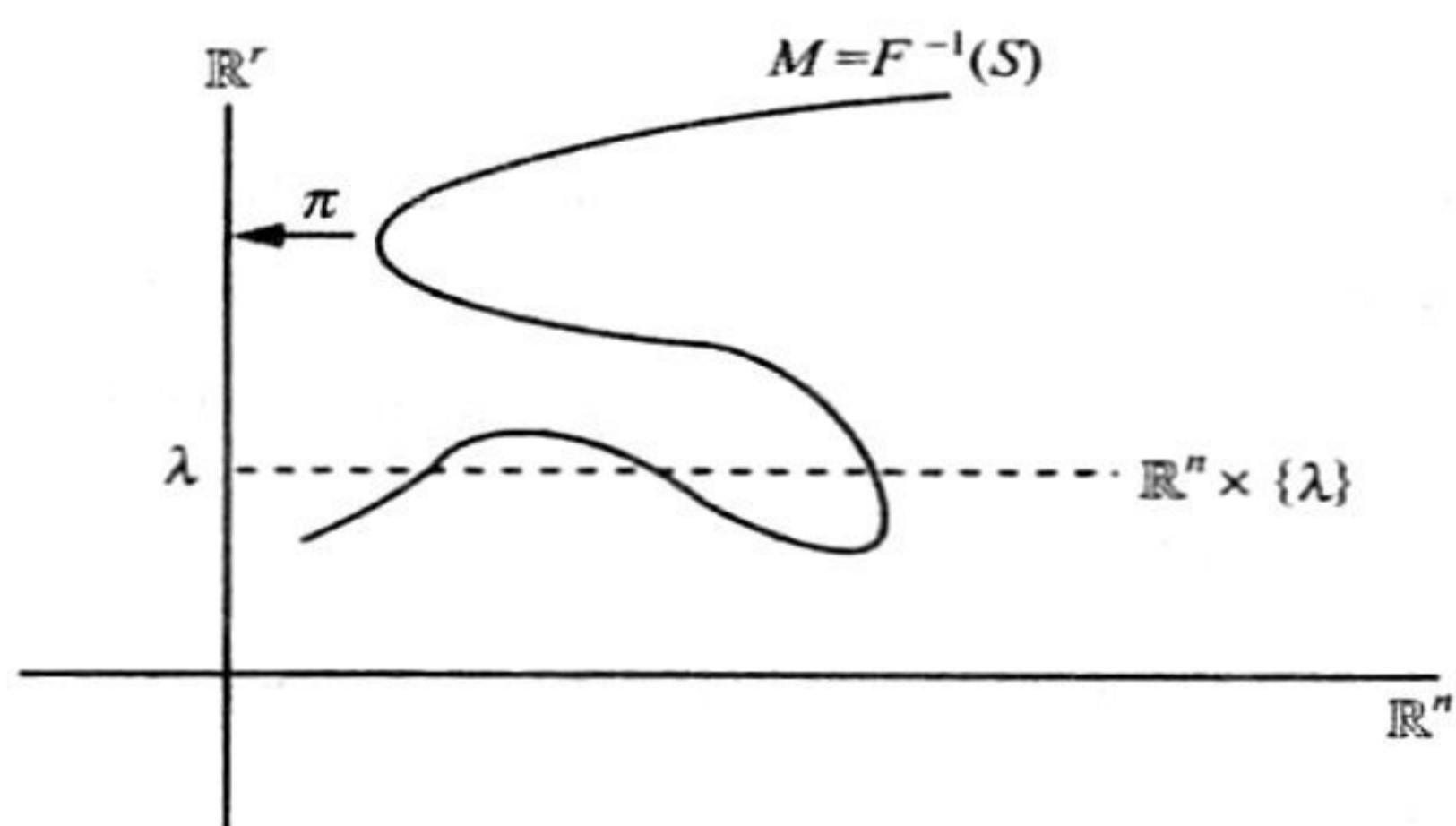


图 2.8

**第 1 步**  $F_\lambda \pitchfork S \Leftrightarrow$  水平空间  $\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}$  与  $M$  横截.

由条件  $F \pitchfork S$  知, 对每一  $z = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ , 若  $F(z) \in S$ , 则有

$$DF(z)(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) + T_{F(z)}S = \mathbb{R}^p, \quad (1)$$

而  $F_\lambda \pitchfork S$  的条件是: 对于式(1)中的  $x \in \mathbb{R}^n$  (即选取的  $x \in \mathbb{R}^n$  合于  $(x, \lambda) = z$ ), 有

$$DF(z)(\mathbb{R}^n \times \{0\}) + T_{F(z)}S = \mathbb{R}^p. \quad (2)$$

再有  $\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}$  与  $M$  相横截的条件是: 对于式(1)中的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\mathbb{R}^n \times \{0\} + T_z M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \quad (3)$$

其中  $T_z M = (DF(z))^{-1}(T_{F(z)}S)$  (根据定理 2.1.1).

假定式(3)成立, 应用  $DF(z)$  作用于式(3)的两边, 并利用式(1)便得到式(2). 反之, 由式(2)导出式(3)则是线性代数中的一个简单练习, 留给读者补述.

第 2 步  $\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}$  与  $M$  横截  $\Leftrightarrow \pi|_M \pitchfork \{\lambda\}$ .

$\pi|_M \pitchfork \{\lambda\}$  是指对于式(1)中的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$D\pi(z)(T_z M) = \mathbb{R}^r, \quad (4)$$

即  $\lambda$  是  $\pi|_M$  的正则值, 显然  $(3) \Leftrightarrow (4)$ . 例如将  $D\pi(z)$  作用在式(3)的两边便得到式(4). 证毕.

几何直观告诉我们, 若欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中的两个子流形  $M$  与  $N$  不横截相交, 有可能将其中一个, 例如  $M$  沿某一方向做微小平移便与  $N$  横截相交. 现将它精确描述如下.

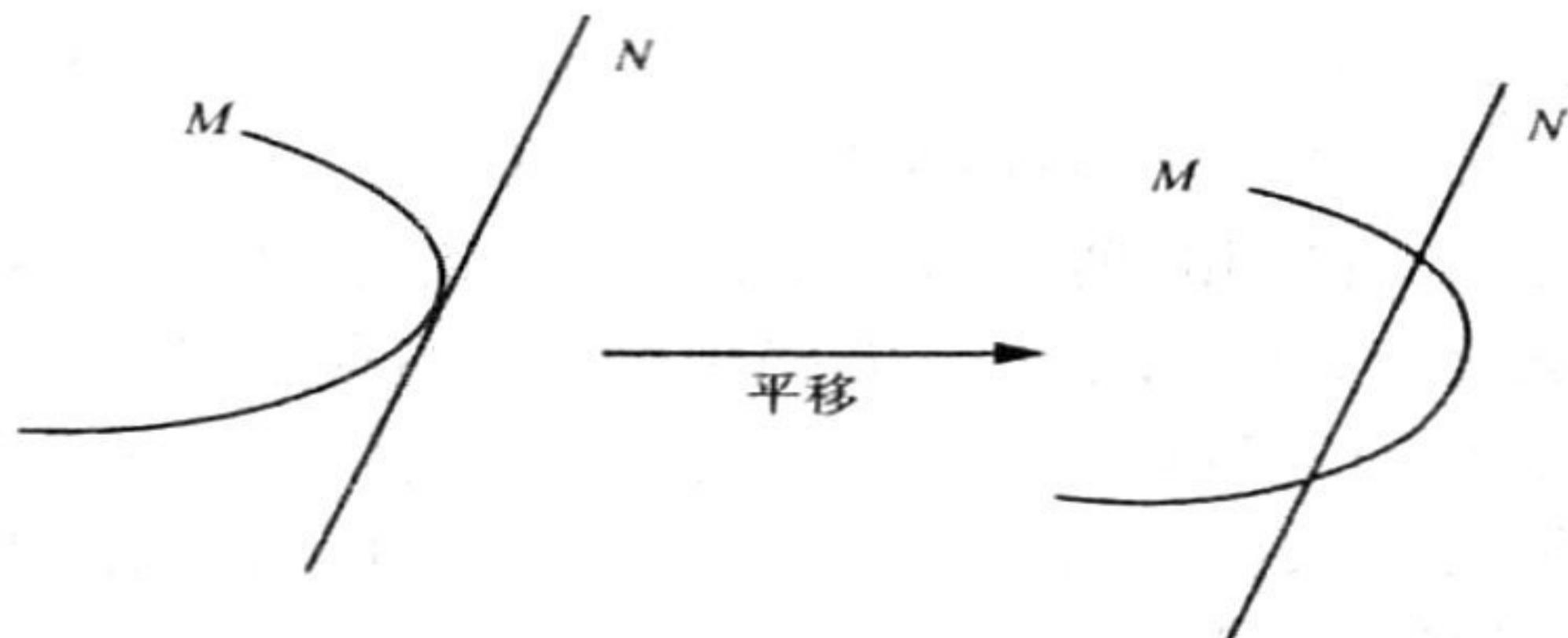


图 2.9

设  $a \in \mathbb{R}^n$ , 令  $L_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为沿方向  $a$  的平移, 定义为  $L_a(x) = x + a$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . 记  $M$  在平移  $L_a$  下的像为  $M_a$ ,  $M_a = L_a(M)$ .

**断言** 集  $\{a \in \mathbb{R}^n \mid M_a$  与  $N$  横截相交  $\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的稠密子集.

为证明该断言, 定义  $F: M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $F(x, a) = x + a$ , 显然  $F$  是一个淹没, 故  $F \pitchfork N$ . 注意到引理 2.3.1 中的  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^r$  及  $\mathbb{R}^p$  可用一般的微分流形来代替, 结论仍然成立. 因此存在  $\mathbb{R}^n$  的一个稠密子集  $A$ , 使得当  $a \in A$  时,  $F_a \pitchfork N$ . 然而  $F_a \pitchfork N$  当且仅当  $M_a$  与  $N$  横截(读者补述理由), 因此断言成立.

进而考察  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  与  $\mathbb{R}^p$  中子流形  $S$  横截的问题. 据命题 2.1.1,  $f$  是否与  $S$  横截等价于  $\text{graph } f$  是否与  $\mathbb{R}^n \times S$  横截相交. 而对于后者, 上一段已做讨论. 因此自然会猜想: 倘若  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  不与  $\mathbb{R}^p$  中子流形  $S$  横截, 我们可以对  $f$  作微小扰动, 使之与  $S$  横截. 将这一直观想法精确化, 可引导到许多深刻结果, 它们称之为横截性定理. 下一节将介绍本书要用到的一些结果.

## § 2.4 Thom 横截性定理

### 2.4.1 映射空间的拓扑

对于给定的  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  和  $\mathbb{R}^p$  中的子流形  $S$ , 本节将证明可以找到一个  $C^\infty$  映射  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  与  $S$  相横截, 并且  $g$  与  $f$  相“接近”. 而描述  $g$  与  $f$  相接近需要在由  $C^\infty$  映射  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  组成的集  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中引入拓扑结构. 粗略地讲,  $g$  与  $f$  相“接近”应该对任意  $x \in \mathbb{R}^n$ , 它们的值  $f(x)$  与  $g(x)$  彼此“接近”, 即在  $C^0$  意义下  $g$  任意逼近  $f$ . 还可以进一步提出要求, 不仅要它们的值接近, 而且要求它们的一阶导数值彼此也接近, 甚至要求  $g$  与  $f$  的从一阶直至  $r$  阶的导数值也彼此接近, 等等. 为此我们首先引入  $C^\infty$  映射  $f$  的  $r$ -导网映射.

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射,  $f = (f_1, \dots, f_p)$ , 其中  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  表  $f$  的第  $i$  个分量函数. 将映射  $f$  在点  $x \in \mathbb{R}^n$  处的芽  $(\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$

取  $r$ -导网, 记为  $j^r f(x)$ , 定义为

$$j^r f(x) = (j^r f_1(x), \dots, j^r f_p(x)),$$

其中  $j^r f_i(x)$  表示  $f$  的第  $i$  个分量  $f_i$  在点  $x$  处的芽的  $r$ -导网(见 §1.1). 据 Taylor 公式,  $f$  在点  $x$  处的  $r$ -导网  $j^r f(x)$  可用  $f$  在点  $x$  处的  $r$  阶 Taylor 多项式作为其自然表示.

对于  $x \in \mathbb{R}^n$ , 令

$$J_x^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \{j^r f(x) \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)\}.$$

易见  $J_x^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  可以与向量空间  $P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  等同, 其中  $P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  表示从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的次数不大于  $r$  的多项式映射所成的向量空间, 并且该空间可分解为

$$P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p \times \prod_{k=1}^r \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p),$$

其中  $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  表示从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的  $k$  重对称线性映射所成的向量空间或者说从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的  $k$  次齐次多项式映射空间.  $J_x^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  具有向量空间结构, 因而是一个有限维  $C^\infty$  流形. 令

$$J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} J_x^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p),$$

从而有下面的等同关系:

$$J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), \quad (1)$$

它可以看做以  $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  为底空间的向量丛, 称为从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的  $C^\infty$  映射的  $r$ -导网丛.

**定义 2.4.1** 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  为开集,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射.  $f$  在点  $x \in U$  的  $r$ -导网扩张记为  $j_x^r f$ , 定义为有序对  $(x, j^r f(x))$ , 其中  $j^r f(x)$  是  $f$  在点  $x$  处的  $r$  阶 Taylor 多项式(为其代表). 于是有  $C^\infty$  映射

$$j^r f: U \rightarrow J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p),$$

$$x \mapsto j_x^r f = (x, j^r f(x)),$$

它叫做  $f$  的  $r$ -导网扩张. 又  $j_x^r f$  可写为

$$j_x^r f = (x, f(x), Df(x), \dots, D^r f(x)), \quad (2)$$

其中  $D^k f(x)$  表示  $f$  在点  $x$  处的  $k$  阶导数, 它是一个从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的  $k$  重对称线性映射 ( $k = 1, \dots, r$ ).

现在用邻域的语言来描述  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  的拓扑.  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  的基本邻域系由下列形式的集组成:

$$V_{K, r, \epsilon} = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \mid \sup_{x \in K} \|j_x^r g(x) - j_x^r f(x)\| < \epsilon\},$$

其中  $K$  为  $\mathbb{R}^n$  中的任意紧致子集 (例如  $K$  可取为闭球  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq s, s \text{ 为正实数}\}$ ),  $r$  为非负整数,  $\epsilon$  为正实数. 由定义 2.4.1,  $V_{K, r, \epsilon}$  可表示为

$$V_{K, r, \epsilon} = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \mid \sup_{x \in K, 0 \leq k \leq r} \|D^k g(x) - D^k f(x)\| < \epsilon\},$$

这里  $\|D^0 f(x)\| = |f(x)|$ ; 对于  $k > 0$ ,  $\|D^k f(x)\|$  表示  $f$  在点  $x$  的  $k$  阶导数的范数 ( $k$  重线性映射  $L: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ 个}} \rightarrow \mathbb{R}^p$  的范数

$\|L\|$  定义为  $\|L\| = \max\{|L(x_1, \dots, x_k)| : \text{向量 } x_1, \dots, x_k \text{ 位于 } \mathbb{R}^n \text{ 的单位球面上}\}$ ).

$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的子集  $X$  叫做稠密子集, 如果对任意  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  以及  $f$  的任意一个基本邻域  $V$ , 可找到  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , 使得  $g \in X \cap V$ . 这说明  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的每一映射可用  $X$  中的映射来任意逼近.

**命题 2.4.1**  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  带有上述拓扑是一个 Baire 空间.

这意思是说  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的可数个开的稠密子集的交是处处稠密的.

关于映射空间拓扑的更详细论述, 请参看文献 [33].

## 2.4.2 横截性定理

**定理 2.4.1** 设  $Q_1, \dots, Q_l$  是  $\mathbb{R}^p$  中的微分子流形, 则集

$$\{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid f \pitchfork Q_i, i = 1, \dots, l\}$$

是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的稠密子集.

证 任取  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , 需证可用与子流形  $Q_1, \dots, Q_l$  相横截的  $C^\infty$  映射来任意逼近  $f$ . 为此我们试图构作一光滑映射族  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$ , 使得  $F$  包含  $f$  且  $F$  与诸  $Q_i$  相横截 ( $i = 1, \dots, l$ ), 然后应用基本横截性引理. 此外, 假如构作的  $F$  是一个淹没, 那么  $F \pitchfork Q_i (i = 1, \dots, l)$ .

为构作  $F$ , 先回忆下列事实. 命题 2.1.1 告诉我们,  $C^\infty$  映射  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  与  $\mathbb{R}^p$  中子流形  $Q$  横截的必要充分条件是  $\text{graph } g$  与  $\mathbb{R}^n \times Q$  在  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  中相横截. 如果  $\text{graph } g$  不与  $\mathbb{R}^n \times Q$  横截, 据上一节所述, 将  $\text{graph } g$  沿某一方向做微小平移便和  $\mathbb{R}^n \times Q$  横截相交. 因此取  $\mathbb{R}^r = \mathbb{R}^p$ , 定义

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$(x, \lambda) \mapsto F(x, \lambda) = f(x) + \lambda.$$

因为  $DF(x, \lambda) = (Df(x) \mid I_p)$ , 其中  $I_p$  为  $p \times p$  单位矩阵, 所以  $F$  是淹没, 从而

$$F \pitchfork Q_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

根据基本横截性引理, 存在  $\mathbb{R}^p$  的一个稠密子集  $A$ , 使得当  $\lambda \in A$  时,  $F_\lambda \pitchfork Q_i (i = 1, \dots, l)$ . 此外  $F_0 = f$ .

任给  $f$  的一个基本邻域  $V$ , 可选取  $\lambda_0 \in A$ , 使得  $\lambda_0$  与  $0 \in \mathbb{R}^p$  非常接近, 此时  $F_{\lambda_0}(x) = f(x) + \lambda_0$ . 显然  $F_{\lambda_0} \in V$ , 并且  $F_{\lambda_0} \pitchfork Q_i (i = 1, \dots, l)$ . 证毕.

由定义 2.4.1 知,  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  可诱导另一个  $C^\infty$  映射  $j^r f: \mathbb{R}^n \rightarrow J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , 称为  $f$  的  $r$ -导网扩张. 考虑  $j^r f$  与  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中子流形相横截, 下面介绍 Thom 横截性定理的导网形式(见文献[35]).

**定理 2.4.2** 设  $Q_1, \dots, Q_l$  是导网空间  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的微分

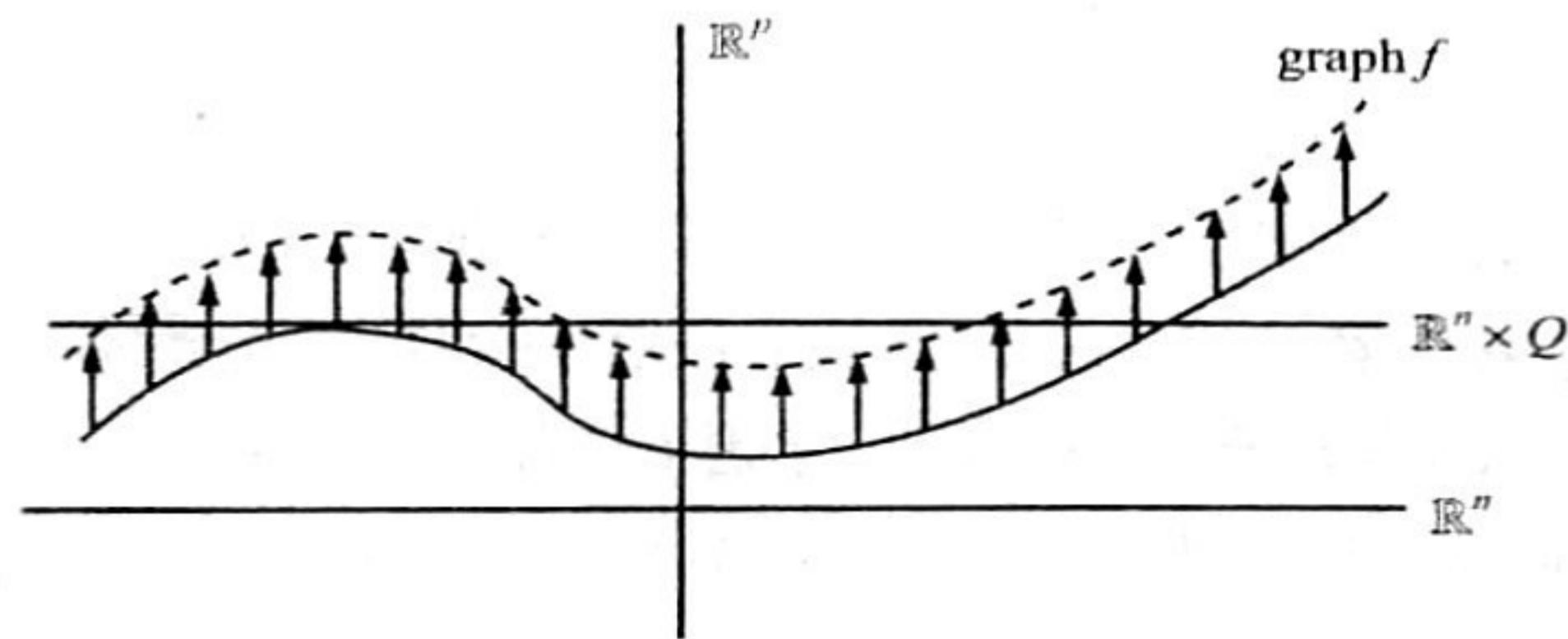


图 2.10

子流形，则集

$$\{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j^r f \pitchfork Q_i, i = 1, \dots, l\}$$

是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的稠密子集。

证 任给  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ，需证可用  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  来任意逼近  $f$ ，且  $g$  的  $r$ -导网扩张  $j^r g$  横截  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, l$ )。

由关系式(1)，

$$J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p).$$

因  $P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  是从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的次数不大于  $r$  的多项式映射所成的向量空间，故可等同于一个欧氏空间。记  $S = P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ，构造光滑映射

$$F: \mathbb{R}^n \times S \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$(x, s) \mapsto F(x, s) = f(x) + s(x)$$

及

$$G: \mathbb{R}^n \times S \rightarrow J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p),$$

$$(x, s) \mapsto G(x, s) = j_x^r F_s = (x, j^r(f + s)(x)).$$

因为  $G$  的前  $n$  个坐标恰为  $x$ ，而对于给定的  $x$ ， $G$  的余下坐标则

表示  $S$  上的一个平移, 它是由  $f$  在点  $x$  的  $r$  阶 Taylor 多项式  $j^r f(x)$  所决定的  $S$  上的平移, 因而是  $S = P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  到自身的一个仿射同构. 于是  $G$  是淹没, 且  $G \pitchfork Q_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ).

根据基本横截性引理, 存在  $S$  的稠密子集  $S_0$ , 使得对每一  $s \in S_0$ ,

$$G_s = j^r F_s = j^r(f + s)$$

横截于  $Q_1, \dots, Q_l$ .

任给  $f$  的一个基本邻域  $V$ , 可选取多项式  $s \in S_0$  足够小, 使得  $f + s$  与  $f$  非常接近, 即  $f + s \in V$ , 并且  $j^r(f + s) \pitchfork Q_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ).

**注** 定理 2.4.1 和 2.4.2 的证明都使用了基本横截性引理, 而且证明中对映射做微小变动. 具体来说, 在定理 2.4.1 证明中是对  $f$  做常值形变, 将  $f$  变为  $f + \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ), 使得与  $\mathbb{R}^p$  中诸子流形  $Q_i$  横截. 在定理 2.4.2 证明中对  $f$  不是做常值形变, 因为它不能改变  $f$  的导数值, 做的是多项式形变, 将  $f$  变为  $f + s$  ( $s \in P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ), 再对  $f + s$  取  $r$ -导网扩张得  $j^r(f + s)$ , 进而考虑它与  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中诸子流形  $Q_i$  横截.

定理 2.4.2 提供了 Thom 横截性定理的导网形式的一种表达方式, 下面我们再介绍一种, 它更多地应用于奇点理论研究中.

将  $P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  记为  $J^r(n, p)$  或  $J_{n, p}^r$ . 特别, 令  $J_{n, p}^{r, 0}$  为  $J_{n, p}^r$  的子集, 要求多项式的常数项为 0, 即  $J_{n, p}^{r, 0}$  是由  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的次数不大于  $r$  且常数项为 0 的多项式映射组成. 在  $J_{n, p}^{r, 0}$  中取定范数  $\|\cdot\|$  (如可用多项式映射的各个分量的诸系数的绝对值的最大者作为范数).

给定  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , 考察  $f$  的  $r$ -导网映射

$$j^r f: \mathbb{R}^n \rightarrow J_{n, p}^r,$$

$$x \mapsto j^r f(x) = f$$

在点  $x$  的  $\gamma$  阶 Taylor 多项式与  $J_{n,p}^{r,0}$  中子流形相横截的问题. 更确切地说, 对于  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  以及每一整数  $r \geq 1$ , 定义映射  $j_0^r f: \mathbb{R}^n \rightarrow J_{n,p}^{r,0}$  为  $j_0^r f(x) = (f - f(x))$  的  $r$  阶 Taylor 多项式. 设  $Q$  为  $J_{n,p}^{r,0}$  中子流形, 记

$$T(Q) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j_0^r f \pitchfork Q\}$$

**定理 2.4.3** 设  $f$  和  $Q$  及  $T(Q)$  如上所述. 任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $P \in J_{n,p}^{r,0}$ , 使得

$$\|P\| < \epsilon, \quad f + P \in T(Q).$$

**证明提要** 证明方法与定理 2.4.2 相同. 令映射

$$F: \mathbb{R}^n \times J_{n,p}^{r,0} \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$(x, p) \mapsto f(x) + p(x)$$

并且

$$G: \mathbb{R}^n \times J_{n,p}^{r,0} \rightarrow J_{n,p}^{r,0},$$

$$(x, p) \mapsto j_0^r F_p(x) = j_0^r f(x) + j^r p(x),$$

其中  $F_p(x) = F(x, p)$ .

定理 2.4.3 还可以用另外一种表达形式来描述.

我们说性质  $P$  对于  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  而言是通有的(generic)或一般的, 如果由性质  $P$  确定的集是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的剩余集, 即它是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中可数个开的稠密子集的交集.

定理 2.4.3 说明  $T(Q)$  是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的稠密子集. 而  $T(Q)$  可表为  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中可数个开子集的交(留作练习). 直观上看, 与一子流形不横截的映射可以在任意小的扰动下成为横截, 而原来横截的映射仍可保持横截, 因此有下列

**定理 2.4.4** 性质  $j_0^r f \pitchfork Q$  (即  $f \in T(Q)$ ) 对于  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  而言具有通有性, 其中  $Q$  为  $J_{n,p}^{r,0}$  中任意子流形.

**注** 用  $J_{n,p}^{r,0}$  中的有限个子流形  $Q_1, \dots, Q_l$  代替单个的子流形

$Q$ , 相应的通有性质仍然成立.

## § 2.5 光滑映射的秩的一般属性

我们知道, 点  $x \in \mathbb{R}^n$  为  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  的奇点是指  $f$  在点  $x$  的秩  $rk_x f$  (即  $f$  在点  $x$  的微分  $Df(x)$  的秩) 小于  $\min(n, p)$ , 因此很自然地利用  $\text{rank}Df(x)$  来区分奇点类型.

**定义 2.5.1** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射, 点  $x \in \mathbb{R}^n$ . 若微分  $Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  的核空间具有维数  $i$ , 则说点  $x$  位于集  $\Sigma^i(f)$  中, 并说  $f$  在点  $x$  具有  $\Sigma^i$  类奇点. 集

$$\Sigma^i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dim(\text{Ker}Df(x)) = i\}$$

称为 Thom 的一阶奇点集. 于是  $\mathbb{R}^n$  被分划为有限个一阶奇点集的并, 并且在每一个奇点集  $\Sigma^i(f)$  上,  $f$  具有常秩.

**例 1** 考虑 Whitney 尖点映射  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, xy - \frac{1}{3}y^3)$ , 有

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & x - y^2 \end{bmatrix},$$

$$\dim \text{Ker}Df(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \neq y^2, \\ 1, & \text{若 } x = y^2. \end{cases}$$

于是  $\Sigma^0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y^2\}$  是整个平面除去抛物线  $x = y^2$ ,  $\Sigma^1(f)$  则为该抛物线. 又当  $i \geq 2$  时,  $\Sigma^i(f) = \emptyset$ .

显然,  $\Sigma^0(f)$  和  $\Sigma^1(f)$  都是  $\mathbb{R}^2$  的子流形.

**例 2** 设  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x^2 + y, y^2)$ , 则

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

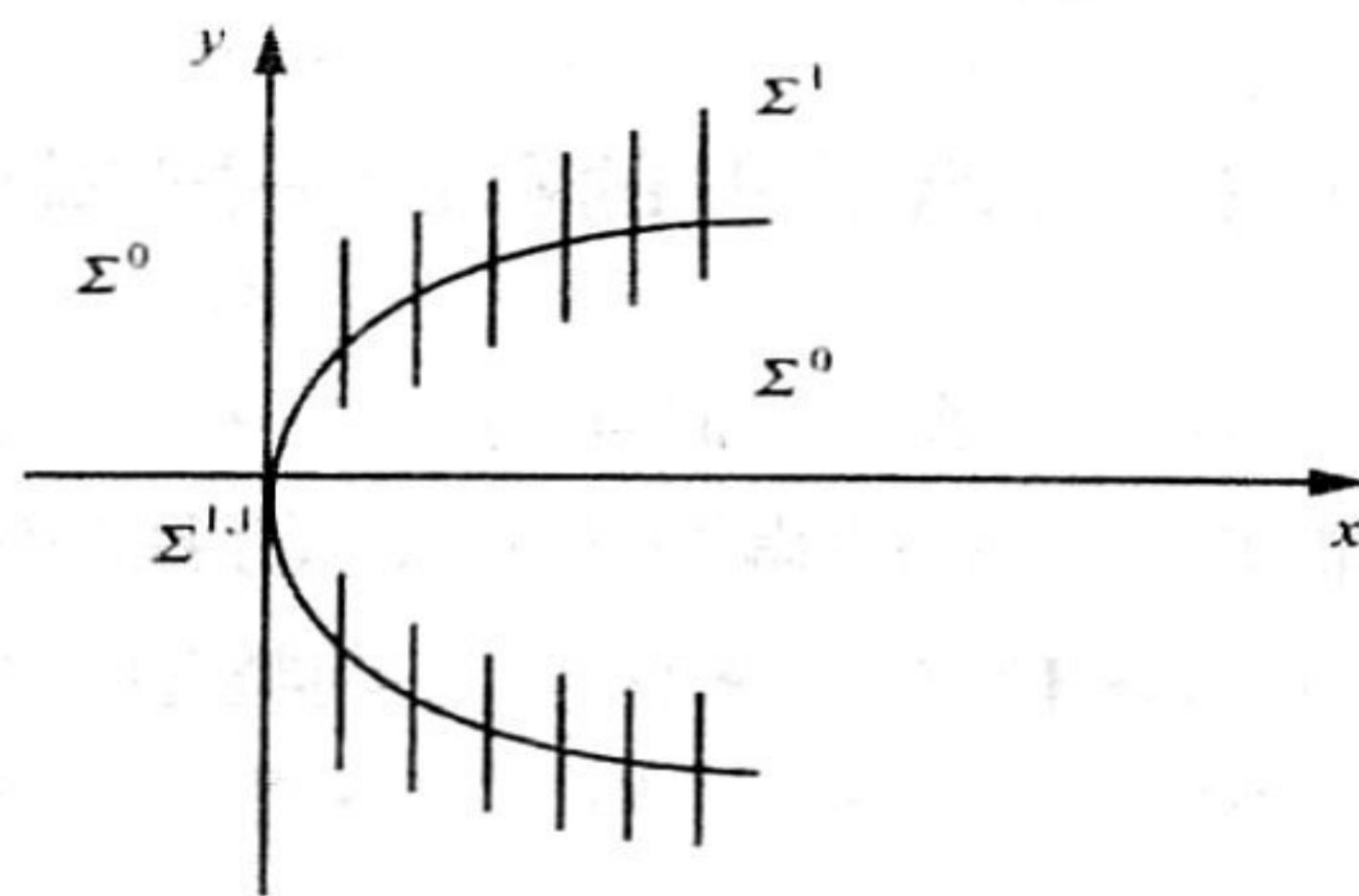


图 2.11

易见  $\Sigma^1(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ,  $\Sigma^0(f) = \mathbb{R}^2 - \Sigma^1(f)$ . 当  $i \geq 2$  时,  $\Sigma^i(f) = \emptyset$ . 显然  $\Sigma^1(f)$  不是  $\mathbb{R}^2$  的子流形, 因为它是两条坐标轴的并. 但是值得注意的是, 只要将  $f$  稍做形变, 则相应的  $\Sigma^1$  类的奇点可组成一个子流形. 由于对  $f$  做常值形变不影响 Jacobi 矩阵, 因此考虑线性形变, 例如, 令

$$f_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y, y^2 + 4\lambda x),$$

其中  $\lambda$  为非零实数. 此时

$$Df_\lambda(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 4\lambda & 2y \end{bmatrix},$$

$$\Sigma^1(f_\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \lambda\}.$$

双曲线  $\Sigma^1(f_\lambda)$  是  $\mathbb{R}^2$  的子流形. 当  $\lambda$  与 0 很接近时,  $f_\lambda$  与  $f$  也很接近.

上述两例给我们的启示: 一个  $C^\infty$  映射  $f$  的一阶奇点集  $\Sigma^i(f)$  在一般状况下为微分子流形, 否则只需对  $f$  稍作形变. 而要严格地证明, 需要利用横截性定理.

现回到例 1, Whitney 映射的奇点集  $\Sigma f$  恰为 Thom 一阶奇点集  $\Sigma^1(f)$ . 进一步观察, 抛物线上包含的原点与其他点不同之处是  $\text{Ker}Df(0,0)$  和  $\Sigma^1(f)$  在原点相切, 而  $f|_{\Sigma^1(f)}$  在  $\Sigma^1(f) - \{(0,0)\}$  的所有点均具有秩 1. 因此原点位于集  $\Sigma^1(f|_{\Sigma^1(f)})$  中, 而抛物线上其他点位于  $\Sigma^0(f|_{\Sigma^1(f)})$  中. 简记

$$\Sigma^{i_2}(f|_{\Sigma^{i_1}(f)}) = \Sigma^{i_1+i_2}(f),$$

则上述事实可以写为: Whitney 尖点(即原点)位于  $\Sigma^{1,1}(f)$  中, 抛物线上其他点位于  $\Sigma^{1,0}(f)$  中, 又

$$\Sigma^1(f) = \Sigma^{1,0}(f) \cup \Sigma^{1,1}(f).$$

$\Sigma^{i_1+i_2}(f)$  ( $i_1 \geq i_2$ ) 称为 Thom 的二阶奇点集, 还可以归纳地定义高阶奇点集. 但是按照 Thom 的方法定义高阶奇点集, 例如  $\Sigma^{i_1+i_2}(f)$ , 首先要求  $\Sigma^{i_1}(f)$  是微分流形. 其次, 用这种方法定义高阶奇点集讨论起来不方便. Boardman 利用导网空间对 Thom 奇点集重新定义, 这里仅考虑特殊情形.

我们用  $L(n, p)$  表示从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的线性映射所成的向量空间. 对照  $\Sigma^i(f)$  的定义, 相应地在  $L(n, p)$  中引入子集  $\Sigma^i$ , 令

$$\Sigma^i = \{A \in L(n, p) \mid \dim \text{Ker} A = i\},$$

其中  $n - \min(n, p) \leq i \leq n$ . 显然

$$\Sigma^i = \{A \in L(n, p) \mid \text{rank} A = r = n - i\},$$

这里  $0 \leq r \leq \min(n, p)$ .

在  $\mathbb{R}^n$  与  $\mathbb{R}^p$  上分别取定基, 则  $L(n, p)$  等同于  $p \times n$  矩阵所成之向量空间  $M(p, n)$ , 并且  $\Sigma^i$  等同于  $M(p, n; n - i) = \{E \in M(p, n) \mid \text{rank} E = n - i\}$ . 由 §1.2 中的例 2,  $\Sigma^i$  是  $L(n, p)$  中余维数为  $i$  ( $p - n + i$ ) 的微分子流形.

**定义 2.5.2** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射, 定义  $C^\infty$  映射

$$Df: \mathbb{R}^n \rightarrow L(n, p), \quad x \mapsto Df(x).$$

如果  $Df$  横截于  $L(n, p)$  中的所有子流形  $\Sigma^i$ , 那么  $f$  叫做好 (good) 映射.

**注** 按照  $J_{n,p}^{r,0}$  的定义,  $L(n, p)$  就是  $J_{n,p}^{1,0}$ , 并且  $Df$  的定义可改写为

$$j_0^1 f: \mathbb{R}^n \rightarrow J_{n,p}^{1,0}, \quad x \mapsto j_0^1 f(x) = Df(x),$$

因此作为定理 2.4.3 的特殊情形, 立即得到

**定理 2.5.1** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为任意  $C^\infty$  映射, 则对每一  $\epsilon > 0$ , 存在  $A \in L(n, p)$ , 使得  $\|A\| < \epsilon$  并且

$$f + A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto f(x) + A \cdot x$$

是一个好映射.

该定理说明任意一个  $C^\infty$  映射经线性扰动(如有必要)便是一个好映射.

**推论 2.5.1**  $\{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ 为好映射}\}$  是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的稠密子集. 并且当  $f$  是好映射时, 每一个  $\Sigma^i(f)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的微分子流形, 其余维数为  $i(p - n + i)$ .

**证** 第一断言显然. 第二断言是因为当  $f$  为好映射时,

$$\Sigma^i(f) = (Df)^{-1}(\Sigma^i),$$

据定理 2.1.1 便可获得.

最后将定理 2.5.1 和推论 2.5.1 应用于两种特殊情形.

(i) 设  $p = 1$ , 此时  $L(n, 1) = \Sigma^{n-1} \cup \Sigma^n$ , 其中  $\Sigma^n = \{0\}$ , 这里  $0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  表零映射. 又  $\Sigma^{n-1} = (\mathbb{R}^n)^* - \{0\}$ , 其中  $(\mathbb{R}^n)^*$  为  $\mathbb{R}^n$  的对偶空间.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为好映射  $\Leftrightarrow$  “ $Df(x) = 0$ ”蕴涵“ $Df$  在点  $x$  横截  $\{0\} = \Sigma^n$ .” 而这意味着  $f$  在每一奇点  $x$ , 芽  $Df: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow ((\mathbb{R}^n)^*, 0)$  具有极大秩  $n$ , 因此  $f$  在点  $x$  的 Hessian 矩阵

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$$

是满秩的,即  $f$  在点  $x$  处的芽是 Morse 芽,  $x$  为  $f$  的非退化临界点. 于是定理 2.5.1 可表示成:

**命题 2.5.1** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为任意  $C^\infty$  函数, 则对每一  $\epsilon > 0$ , 存在  $\mathbb{R}^n$  上的线性函数  $A$ , 使得  $\|A\| < \epsilon$ , 并且  $f + A$  在它的每一奇点处的芽为 Morse 的.

(ii) 设  $p \geq 2n$ . 若  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为好映射, 则依推论 2.5.1, 每一个  $\Sigma^i(f)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的微分子流形, 其余维数为  $i(p - n + i) \geq i(n + i) > n$  ( $i \neq 0$ ). 因此当  $i > 0$  时,  $\Sigma^i(f) = \emptyset$ , 这说明  $f$  是浸入, 由此我们得到著名的 Whitney 浸入定理的局部形式.

**定理 2.5.2** 设  $p \geq 2n$ .

(i) 若  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射, 则对每一  $\epsilon > 0$ , 存在  $A \in L(n, p)$ , 使得  $\|A\| < \epsilon$  并且  $f + A$  是一个浸入.

(ii) 集  $\{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ 为浸入}\}$  是  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  中的稠密子集.

**例 3** 尖点三次线  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  定义为  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ , 它不是浸入. 设  $\lambda$  为较小的正数. 令曲线  $\alpha_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  定义为  $\alpha_\lambda(t) = (t^2, t^3 - \lambda t)$ , 易见  $\alpha_\lambda$  是一个浸入, 它是由  $\alpha$  通过线性形变得到的.

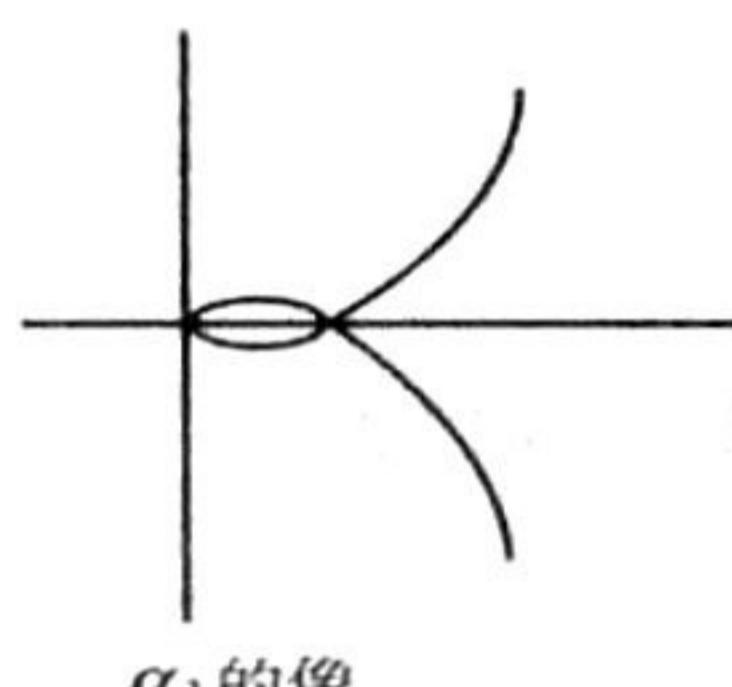
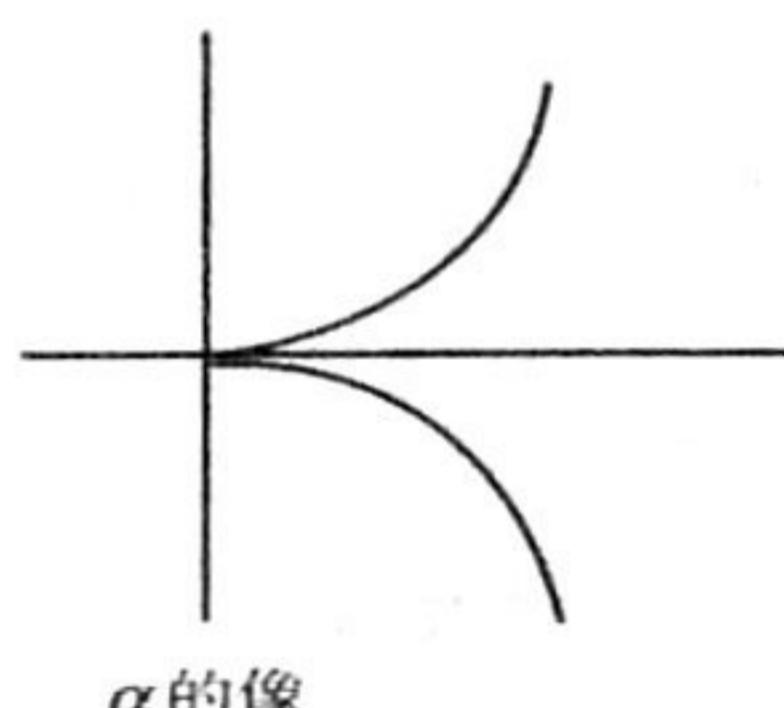


图 2.12

### 第三章 余维数不超过 5 的实值函数芽的分类

本章中心议题是对余维数 $\leq 5$  的实值函数芽进行分类, 给出著名的 Thom 分类定理. 由于一个函数芽余维数有限等价于该函数芽关于右等价群是有限决定的, 因此对分类问题的研究可限于多项式芽讨论. 并且有限决定性本身也是奇点理论中十分活跃的研究专题, § 3.3 对函数芽有限决定性的初步探讨有助于读者更好地理解映射芽有限决定性的一般理论. 为此需要包括代数与几何两个方面的准备, § 3.1 讨论了函数芽环上的模, § 3.2 从介绍单参数形变入手, 建立了切空间概念.

#### § 3.1 光滑函数芽环上的模

本节假定读者熟悉模论的初步知识, 其实在前两章已接触了模的一些例子.

**例 1** 环  $\epsilon_n$  的每个理想是  $\epsilon_n$ -模, 实向量空间则是模的特殊情形.

**例 2** 考察  $C^\infty$  映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽, 其分量  $f_i: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $\epsilon_n$  中一元 ( $i = 1, \dots, p$ ), 因此  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  属于  $\epsilon_n \times \dots \times \epsilon_n$  ( $p$  个  $\epsilon_n$  的直积). 记

$$\epsilon(n, p) = \{(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射芽}\},$$

则它可等同于  $\epsilon_n^{\times p}$ , 这是秩为  $p$  的自由  $\epsilon_n$ -模.

**例 3** 在 § 1.3 中曾引入  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的  $C^\infty$  向量场芽

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_i \in \epsilon_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

将  $\mathbb{R}^n$  上的  $C^\infty$  向量场在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽所成之集记为  $V(\mathbb{R}^n)$ , 则它是一个秩为  $n$  的自由  $\epsilon_n$ -模. 借助于  $V(\mathbb{R}^n)$  的自由基  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ , 将  $V(\mathbb{R}^n)$  等同于  $\epsilon_n^{\times n} = \underbrace{\epsilon_n \oplus \dots \oplus \epsilon_n}_{n \text{ 个}}. V(\mathbb{R}^n)$  的子模

$$\{X \in V(\mathbb{R}^n) \mid X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X_i \in \mathcal{M}_n, i = 1, \dots, n\}$$

简记为  $\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)$ , 它可等同于  $\mathcal{M}_n \cdot \epsilon_n^{\times n}$ .

现结合本章内容, 介绍模论的有关知识. 首先陈述本书常常常用到的一个漂亮结果, 称之为 Nakayama 引理.

**引理 3.1.1** 设  $A$  是一个具有幺元素(记为 1)的交换环,  $I$  为  $A$  中的理想具有下列性质: 对每一  $\alpha \in I$ ,  $1 + \alpha$  是  $A$  中的可逆元. 假设  $M, N$  为  $A$ -模  $P$  的子模, 且  $M$  是有限生成的. 若  $M \subset N + I \cdot M$ , 则  $M \subset N$ .

**证** 设  $m_1, \dots, m_k$  为  $M$  的一组生成元. 如果我们能证明每一个  $m_i \in N$ , 那么引理得证. 依条件  $M \subset N + I \cdot M$ , 对每一  $m_i$ , 可找到  $n_i \in N$  和  $\alpha'_i \in I$  ( $1 \leq j \leq k$ ), 使得

$$m_i = n_i + \sum_{j=1}^k \alpha'_i m_j,$$

或写为

$$\sum_{j=1}^k (\delta_i^j - \alpha'_i) \cdot m_j = n_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

其中  $\delta_i^j$  为 Kronecker 符号. 令  $m = (m_1, \dots, m_k)$ ,  $n = (n_1, \dots, n_k)$ ,  $\Lambda = (\delta_i^j - \alpha'_i)$  为  $A$  上的  $k \times k$  矩阵, 则(1)式可写为

$$\Lambda \cdot m = n.$$

如果能证明  $\Lambda$  是可逆矩阵, 那么可以求解关于  $m_1, \dots, m_k$  的线性方程组(1), 使得每一  $m_i$  可表为诸  $n_j$  的线性组合, 其系数取自  $A$ , 从而每一  $m_i \in N$ .

因  $A$  是有幺元素的交换环,  $\Lambda$  是  $A$  上的矩阵. 由线性代数

知,  $\Lambda$  是可逆方阵当且仅当它的行列式  $\det\Lambda$  是  $A$  中可逆元. 而

$$\det\Lambda = 1 + \alpha, \quad \alpha \in I,$$

依假设,  $1 + \alpha$  是  $A$  中可逆元. 根据上面的分析, 本引理得证.

本引理的一个特殊情形为命题 1.1.1. 应用该引理, 有下列两个推论:

**推论 3.1.1** 设  $M$  为有限生成的  $\epsilon_n$ -模, 则下列条件等价:

(a)  $M$  由  $a_1, \dots, a_k$  生成.

(b) 实向量空间  $M/\mathcal{M}_n \cdot M$  由诸  $a_i$  的投影  $\bar{a}_i$  生成.

**证** (a)  $\Rightarrow$  (b) 显然.

(b)  $\Rightarrow$  (a) 令  $N = \epsilon_n \cdot a_1 + \dots + \epsilon_n \cdot a_k$ , 它是  $M$  的  $\epsilon_n$ -子模. 条件 b) 恰好表示

$$N + \mathcal{M}_n \cdot M = M,$$

据引理 3.1.1,  $M \subset N$  从而有  $N = M$ .

**注** 若  $M$  是有限生成的  $\epsilon_n$ -模, 则  $M/\mathcal{M}_n \cdot M$  是有限维实向量空间, 但其逆不真. 例如, 设  $I$  为  $\epsilon_1$  中理想, 它由在  $0 \in \mathbb{R}$  处(无穷次)平坦的函数芽组成(函数芽  $f$  为平坦芽是指  $f$  以及它的各阶导数在原点的值都为 0).  $I$  可看成  $\epsilon_1$ -模, 并且  $I = \mathcal{M}_1 \cdot I$ , 于是  $I/\mathcal{M}_1 \cdot I = 0$ . 但是  $I$  不是有限生成的, 否则按上述推论,  $I = 0$ . 然而由  $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ , ( $x \neq 0$ ) 和  $f(0) = 0$  定义的函数芽  $f \in \epsilon_1$  是平坦的, 因而  $I \neq 0$ .

**推论 3.1.2** 条件如引理 3.1.1 所述. 若  $A$  为  $\mathbb{R}$ -代数, 且

$$\dim_{\mathbb{R}} M / (N + I^{d+1} \cdot M) \leq d, \quad (2)$$

则  $I^d \cdot M \subset N$ .

**证** 令

$$B_r = N + I^r \cdot M, \quad 0 \leq r \leq d + 1,$$

并规定  $I^0 = A$ . 由(2)式知, 诸子模  $B_r$  不可能全不同. 若  $B_r = B_s$ ,

$r < s$ , 则

$$I^r \cdot M \subset N + I^{r+1} \cdot M.$$

据引理 3.1.1,  $I^r \cdot M \subset N$ ,  $r < d + 1$ . 特别,  $I^d \cdot M \subset N$ .

**定义 3.1.1** 设  $M$  是一个具有有限基的自由  $\epsilon_n$ -模. 若商模  $M/N$  作为实向量空间是有限维的, 则说  $N$  在  $M$  中具有有限余维. 在这种情形下, 将商空间  $M/N$  的维数定义为  $N$  在  $M$  中的余维数, 记为  $\text{Codim}N$ .

类似于推论 1.1.2, 下面的命题为判断  $N$  在  $M$  中具有有限余维提供了一个有用的代数判别法.

**命题 3.1.1** 设  $M$  为自由  $\epsilon_n$ -模, 具有有限基,  $N \subset M$  为  $\epsilon_n$ -子模, 则  $N$  在  $M$  中具有有限余维的充要条件是存在正整数  $k$ , 使得

$$\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset N.$$

**证** 充分性. 假设存在  $k \geq 1$  使得  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset N$ , 那么

$$\dim_{\mathbb{R}} M/N \leq \dim_{\mathbb{R}} M/\mathcal{M}_n^k \cdot M.$$

下证  $\dim_{\mathbb{R}} M/\mathcal{M}_n^k \cdot M < \infty$ . 因为  $M$  是秩有限的自由  $\epsilon_n$ -模, 可以假定  $M = \epsilon_n^{\times s}$ ,  $s$  为正整数. 而

$$\epsilon_n^{\times s} / \mathcal{M}_n^k \cdot \epsilon_n^{\times s} \cong \epsilon_n / \mathcal{M}_n^k \times \cdots \times \epsilon_n / \mathcal{M}_n^k \text{ (带有 } s \text{ 个因式),}$$

并且每一个因式  $\epsilon_n / \mathcal{M}_n^k$  是有限维实向量空间, 因而积也是有限维的, 于是  $\dim_{\mathbb{R}} M/N < \infty$ .

必要性. 假定  $N$  在  $M$  中的余维有限. 考察  $\epsilon_n$ -子模的下降序列

$$M \supset N + \mathcal{M}_n \cdot M \supset N + \mathcal{M}_n^2 \cdot M \supset \cdots \supset N,$$

易见从上述序列的某一项开始, 往后的所有包含关系都变成相等

关系. 特别, 存在  $k \geq 1$ , 使得

$$N + \mathcal{M}_n^k \cdot M = N + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M.$$

因  $\mathcal{M}_n^k \cdot M$  是有限生成的, 应用 Nakayama 引理于

$$\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset N + \mathcal{M}_n \cdot (\mathcal{M}_n^k \cdot M),$$

便得出  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset N$ . 证毕.

为计算  $N$  在  $M$  中的余维数  $\text{Codim}N$ , 令

$$c_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{N + \mathcal{M}_n^k \cdot M}{N + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$c_k$  表示  $N + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M$  在  $N + \mathcal{M}_n^k \cdot M$  中的余维数.

**推论 3.1.3** 在命题 3.1.1 的条件下,  $N$  在  $M$  中具有有限余维当且仅当除了有限个外, 所有的  $c_k$  均为 0. 并且在这种情形下,

$$\text{Codim}N = \text{有限和} \sum_k c_k.$$

**证** 设  $N$  在  $M$  中具有有限余维, 据命题 3.1.1, 存在正整数  $k$ , 使得  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset N$ , 于是对所有  $j \geq k$ ,  $c_j = 0$ .

反之, 若  $c_k = 0$ , 则  $N + \mathcal{M}_n^k \cdot M = N + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M$ , 从而  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset N$ . 再次应用命题 3.1.1, 可见  $N$  在  $M$  中余维有限.

本推论中的第二个断言直接由命题 3.1.1 的证明得到.

## § 3.2 光滑函数芽的切空间和余维数

### 3.2.1 切空间

$\epsilon_n$  作为实向量空间是无限维的. 如何在函数芽空间  $\epsilon_n$  中定义在  $f \in \epsilon_n$  处的“切空间”呢? 类似于有限维情形那样, 将  $f$  处的“切向量”理解为  $\epsilon_n$  中过  $f$  的“光滑道路” $t \mapsto f_t \in \epsilon_n$  的等价类, 其中  $f_0 = f$ , 而所说的切空间正是由所有这样的切向量组成. 现在我们对上述直观描述给予精确定义.

**定义 3.2.1** 设  $f \in \epsilon_n$  是  $n$  个变量  $x_1, \dots, x_n$  的函数芽. 如果  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (坐标为  $t, x_1, \dots, x_n$ ) 上的  $C^\infty$  函数在原点处的芽  $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  满足条件

$$F_0(x) = F(0, x) = f(x),$$

那么  $F$  叫做  $f$  的 1-参数形变.

对形变  $F$ , 选取它的一个代表, 仍记为  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , 这里  $U$  为  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  中原点的开邻域. 定义  $F_t: U_t \rightarrow \mathbb{R}$ , 其中

$$U_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in U\},$$

$$F_t(x) = F(t, x), \quad x \in U_t,$$

那么  $F$  可解释为  $n$  元函数  $F_t: U_t \rightarrow \mathbb{R}$  的 1-参数族,  $t$  为参数. 值得注意的是, 除  $F_0 = f$  外, 当  $t \neq 0$  时,  $F_t$  不能看作  $\epsilon_n$  的元素.

**定义 3.2.2**  $f \in \epsilon_n$  的两个 1-参数形变  $F$  和  $G$  是同构的, 如果存在微分同胚芽  $\Phi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$ , 使得

- (i)  $\Phi(t, x) = (t, \Phi(t, x)), \Phi(0, x) = (0, x),$
- (ii)  $G = F \circ \Phi.$

令  $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为标准投影, 则

$$\pi \circ \Phi = \pi,$$

说明  $\Phi$  将纤维  $\{t\} \times \mathbb{R}^n$  映为自身, 因此说  $\Phi$  是一个  $\mathbb{R}$ -水平保持的微分同胚芽. 而  $\Phi(0, x) = (0, x)$  说明  $\Phi$  在纤维  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  上的限制是一个恒同映射芽, 因此  $\Phi$  又叫做  $L_n$  中的恒同映射芽的 1-参数开折.

具有性质(i)的微分同胚芽  $\Phi$  的全体形成群  $L_{1+n}$  的一个子群, 记为  $L_{n,1}$ . 下面给出群  $L_{n,1}$  的无穷小描述. 设  $\Phi(t, x) = (t, \Phi(t, x)) \in L_{n,1}$ , 定义向量场芽  $X_\Phi$  为

$$(t, x) \mapsto X_\Phi(t, x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x).$$

换言之,

$$X_\Phi = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1)$$

其中  $\Psi_i$  为  $\Psi$  的第  $i$  个分量.  $X_\Phi$  正是在 § 1.3 中讨论过的. 映射  $\Phi \mapsto X_\Phi$  是从群  $L_{n,1}$  到形如

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

的向量场芽所成集上的双射.  $\Phi \in L_{n,1}$  可用下列几何性质来刻画: 它将直线族  $\mathbb{R} \times \{x\}$  变换为向量场  $X = X_\Phi$  的一族积分曲线.

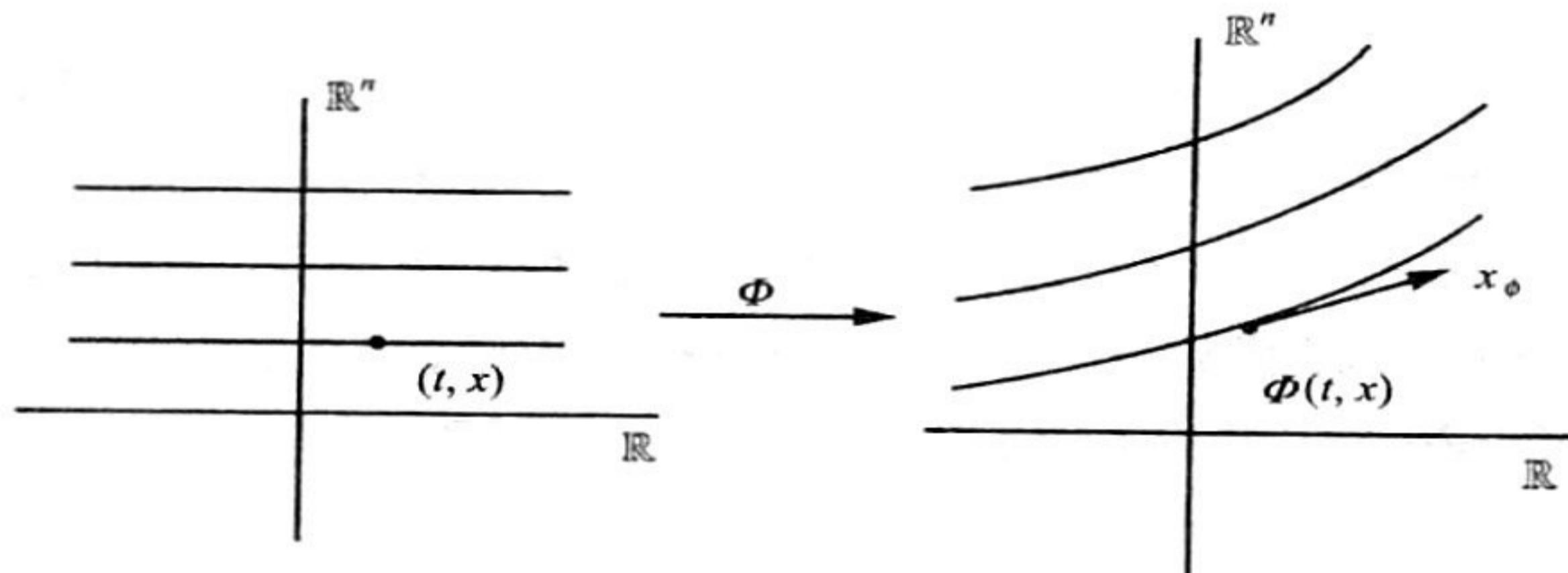


图 3.1

**定义 3.2.3**  $f \in \epsilon_n$  的 1-参数形变  $F$  叫做平凡的, 如果它同构于常值形变  $(t, x) \mapsto f(x)$ .

**命题 3.2.1**  $f \in \epsilon_n$  的 1-参数形变  $F$  是平凡的当且仅当存在  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$  上的向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

使得

$$X \cdot F = 0.$$

证  $\Rightarrow$   $f$  的 1-参数形变  $F$  是平凡的, 则存在  $\Phi \in L_{n,1}$ , 使得  

$$F(\Phi(t, x)) = f(x),$$

对  $t$  求导, 得

$$X_\Phi \cdot F = 0,$$

其中  $X_\Phi$  如(1)式所述.

$\Leftarrow$  通过积分向量场  $X$  便得到  $\Phi \in L_{n,1}$ , 并且有  $X_\Phi = X$ . 条件  $X \cdot F = 0$  说明  $F$  在  $X$  的每一条轨道上为常值,

$$F(\Phi(t, x)) = F(\Phi(0, x)), \quad \forall t \in (\mathbb{R}, 0)$$

即

$$F(\Phi(t, x)) = F(0, x) = f(x),$$

而这正说明  $F$  是平凡的.

平凡性条件  $X \cdot F = 0$  可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (2)$$

如前所述,  $F$  看做  $n$  元函数  $F_t: U_t \rightarrow \mathbb{R}$  的 1-参数族, 其中  $U_t$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开子集. 令

$$X_t(x) = \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

它是定义在  $U_t$  上的向量场. 式(2)现可写成

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = - X_t \circ F_t.$$

当  $t = 0$  时, 上式变为

$$\left. \frac{\partial F_t}{\partial t} \right|_{t=0} = - X_0 \circ f$$

$$= - \sum_{i=1}^n X_i(0, x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

上式右边的诸  $X_i(0, x)$  及  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  均属于  $\epsilon_n$ . 而  $\frac{\partial F_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  理解为在  $f$  处的一个切向量, 这个切向量属于  $f$  的 Jacobi 理想. 反过来, 若  $\frac{\partial F_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \in J(f)$ , 可以证明形变  $F$  是平凡的(留作练习).

基于上述考虑, 我们有下列

**定义 3.2.4** 设  $f \in \epsilon_n$ .  $f$  的 Jacobi 理想  $J(f)$  叫做  $f$  的切空间.  $f$  的余维数定义为  $f$  的切空间  $J(f)$  在  $\epsilon_n$  中的余维数, 即

$$\text{Codim } f = \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / J(f).$$

若  $\text{Codim } f$  是有限数, 称  $f$  为具有有限余维的函数芽, 否则说  $f$  的余维无限.

### 3.2.2 余维数

**命题 3.2.2** 设  $f, g \in \epsilon_n$ . 若  $f$  与  $g$  同构, 则  $\text{Codim } f = \text{Codim } g$ .

**证** 若  $f$  与  $g$  同构, 则存在  $\Phi \in L_n$ , 使得  $g = f \circ \Phi$ . 而可逆芽  $\Phi$  诱导环的自同构  $\Phi^* : \epsilon_n \rightarrow \epsilon_n$ . 如果断言

$$\Phi^*(J(f)) = J(g)$$

成立, 可导出商空间  $\epsilon_n / J(f)$  与  $\epsilon_n / J(g)$  是同构的, 因而结论成立, 余下证明断言. 依链法则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \Phi \right) \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{j=1}^n \Phi^* \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

因此  $J(g) \subset \Phi^*(J(f))$ .

同理可证  $J(f) \subset (\Phi^{-1})^*(J(g)) = (\Phi^*)^{-1}(J(g))$ , 因而  $\Phi^*(J(f)) \subset J(g)$ .

据 § 1.3 中公式(7),  $\mathcal{M}_n \cdot J(f)$  表示轨道  $L_n \cdot f$  在  $f$  处的切空间, 因此将理想  $J(f)$  和  $\mathcal{M}_n \cdot J(f)$  作比较是有意义的. 显然  $J(f) \supset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$ . 若  $f \in \mathcal{M}_n$  是非奇异的, 即假定  $f \in \mathcal{M}_n$  且  $f \notin \mathcal{M}_n^2$ , 据命题 1.4.2,  $f$  同构于一坐标函数芽, 因此  $J(f) = \varepsilon_n$  且  $J(f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f) + \mathbb{R}$ , 此时  $\text{Codim} f = 0$ .

**命题 3.2.3** 设  $f \in \mathcal{M}_n^2$  且  $\text{Codim} f < \infty$ , 则

$$J(f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f) \oplus \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\},$$

并且

$$\text{Codim} \mathcal{M}_n \cdot J(f) = \text{Codim} J(f) + n.$$

**证** 设  $\lambda \in J(f)$ , 则

$$\lambda = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad u_i \in \varepsilon_n.$$

又  $u_i(x) = u_i(0) + v_i(x)$ , 其中  $v_i \in \mathcal{M}_n$ , 因此

$$\lambda = \sum_{i=1}^n u_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

这说明

$$J(f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\},$$

其中  $\mathbb{R} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$  表示由  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  生成的实向量空间. 如果

能证明  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  在  $\mathbb{R}$  上线性无关, 并且  $\mathcal{M}_n \cdot J(f) \cap$

$\mathbb{R} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} = \{0\}$ , 这里 0 为  $\varepsilon_n$  中的零函数, 那么本命题结论

得证.

反设存在不全为 0 的实数  $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$  以及函数芽  $\gamma_i \in \mathcal{M}_n (i = 1, \dots, n)$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

则

$$X \cdot f = 0,$$

其中向量场  $X = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \gamma_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的值不为 0.

做坐标变换, 令

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \gamma_i) x_i,$$

这里假设  $\alpha_n \neq 0$ . 易见

$$X = \frac{\partial}{\partial y_n},$$

且由  $X \cdot f = 0$  知,  $f$  同构于这样一个芽, 它不依赖于最后一个坐标.

由于  $f \in \mathcal{M}_n^2$ , 所以  $J(f) \subset I$ , 其中  $I = \{g \in \epsilon_n \mid g(0, \dots, 0, x_n) = 0\}$  为  $\epsilon_n$  中理想. 显然

$$\epsilon_n / I \cong \epsilon_{x_n},$$

而  $\epsilon_{x_n}$  作为实向量空间是无限维的, 因此  $J(f)$  在  $\epsilon_n$  中的余维无限, 与  $\text{Codim } f < \infty$  矛盾.

**命题 3.2.4** 若  $f \in \mathcal{M}_n^3$  具有有限余维, 则

$$1 + n + \frac{n(n+1)}{2} \leq \text{codim } \mathcal{M}_n \cdot J(f) = n + \text{Codim } J(f).$$

**证** 为简便起见, 省去  $\mathcal{M}_n$  的下标  $n$ . 由  $f \in \mathcal{M}^3$  可得  $\mathcal{M} \cdot J(f)$

$\subset \mathcal{M}^3$ .

考虑理想的下降序列

$$\varepsilon_n \supseteq_{c_0} \mathcal{M} \supseteq_{c_1} \mathcal{M}^2 \supseteq_{c_2} \mathcal{M}^3 \supseteq_{c_3} \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot J(f) \supseteq \cdots,$$

这里  $c_0 = 1, c_1 = n, c_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ , 于是

$$\text{Codim } \mathcal{M} \cdot J(f) \geq 1 + n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

**例 1** 求芽  $f(x) = x^{s+1}$  的余维数, 这里  $s$  为正整数.

**解**  $J(f) = \langle x^s \rangle_{\varepsilon_1}$ . 对  $0 \leq k \leq s-1, x^k \notin J(f) + \mathcal{M}^{k+1}$ , 但  $x^s \in J(f)$ , 所以  $\text{Codim } f = s$ .

利用推论 3.1.3 来计算  $f \in \varepsilon_n$  的余维数, 必须依次算出  $c_0, c_1, \dots$ , 直到出现零为止, 这里  $c_0 = \dim \varepsilon_n / \mathcal{M}_n = 1$ , 而对于  $k \geq 1$ ,

$$c_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{J(f) + \mathcal{M}_n^k}{J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}}.$$

若能找出  $J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$  在  $J(f) + \mathcal{M}_n^k$  中的补空间的基, 则易求出  $c_k$ . 为此对于每一个  $n$  元  $k$  次单项式, 考察它是否位于  $J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$  中. 下面通过例 2 来介绍具体计算过程.

**例 2** 计算芽  $f(x, y) = x^2 y + y^4$  的余维数, 这里

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle_{\varepsilon_2} = \langle 2xy, x^2 + 4y^3 \rangle_{\varepsilon_2}.$$

列出下表

	$x$	$y$			
	$\underline{x^2}$	$\underline{xy}$	$y^2$		
	$\underline{x^3}$	$\underline{x^2y}$	$\underline{xy^2}$	$y^3$	
	$\underline{x^4}$	$\underline{x^3y}$	$\underline{x^2y^2}$	$\underline{xy^3}$	$y^4$
	$\underline{x^5}$	$\underline{x^4y}$	$\underline{x^3y^2}$	$\underline{x^2y^3}$	$\underline{xy^4}$
					$y^5$

先看表中第 1 行. 易见  $x, y \in J(f) + \mathcal{M}^2$ . 表中第 2 行  $x^2, xy, y^2$  中的前两个位于  $J(f) + \mathcal{M}^3$ , 因

$$x^2 = \frac{\partial f}{\partial y} - 4y^3, \quad xy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x},$$

在  $x^2, xy$  的下方划上横线. 但  $y^2 \notin J(f) + \mathcal{M}^3$ . 接着在第 3 行的  $x^3, x^2y, xy^2$  的下方, 第 4 行的  $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3$  的下方, 第 5 行的  $x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4$  的下方都划上横线, 等等.

三次单项式中仅  $y^3$  需讨论, 我们有  $y^3 \notin J(f) + \mathcal{M}^4$ . 然后四次单项式中仅需考虑  $y^4$ . 因

$$y^4 = \frac{1}{4}y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{8}x \frac{\partial f}{\partial x},$$

从而所有的四次单项式都位于  $J(f) + \mathcal{M}^4$ , 并且在  $y^4, y^5$  的下方划上横线.

在上述表中到第 4 行为止未划横线的单项式是  $x, y, y^2, y^3$ , 因此  $f$  的余维数等于未划横线的单项式个数加 1, 即

$$\text{Codim } f = 5.$$

顺便我们证明了  $\mathcal{M}^4 \subset J(f) + \mathcal{M}^5$ , 因而  $\mathcal{M}^4 \subset J(f)$ .

作为练习, 计算芽  $f(x, y) = x^3 + xy^3$  的余维数(答案:  $\text{Codim } f = 7$ ).

**命题 3.2.5** 若函数芽  $f \in \epsilon_n$  的余维数为正整数, 则  $0 \in \mathbb{R}^n$  为孤立奇点.

证明留作练习.

该命题提供了一个简单方法用以识别具有无限余维的函数芽. 例如由  $f_1(x, y) = x^2$  及  $f_2(x, y) = x^2y^2$  定义的函数芽均无有限余维, 因为原点是这两个芽的非孤立奇点.

### § 3.3 有限决定的函数芽

从本节开始, 我们将讨论  $\epsilon_n$  中具有低余维的函数芽的分类问

题. 为了与后面的术语相一致, 将函数芽按同构关系分类改说为按右等价关系分类.

众所周知, 分类问题一直是数学中最基本也是最重要问题. 由于  $\epsilon_n$  是无限维实向量空间, 对函数芽进行分类, 一个基本想法是将无限维化简为有限维来处理, 为此要求考虑的函数芽余维数较小. 我们先看看一些特殊情形.

若  $f \in \mathcal{M}_n$  是非奇异芽, 命题 1.4.2 告诉我们,  $f$  右等价于一坐标函数芽, 此时  $\text{Codim}f = 0$ . 定理 1.4.1 则指出, 若  $f \in \epsilon_n$  为 Morse 芽(此时  $\text{Codim}f = 1$ ), 则  $f$  与它的 Hessian 右等价, 并且 Morse 芽在右等价群  $\mathcal{R} (= L_n)$  作用下的分类归结为非退化二次型在一般线性群  $GL(n, \mathbb{R})$  作用下的分类问题. 因此人们自然会猜想: 对“足够好”的  $f \in \epsilon_n$ , 通过取导网,  $f$  有可能与它的某一 Taylor 多项式右等价. 这样一来, 对满足一定条件的函数芽进行分类可归结为由多项式组成的有限维向量空间中的分类问题. 现在引入下面的定义.

**定义 3.3.1** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数芽,  $k$  为非负整数. 如果  $\epsilon_n$  中与  $f$  具有相同  $k$ -导网的芽  $g$  皆右等价于  $f$ , 则说  $f$  关于群  $\mathcal{R}$  是  $k$ -决定的, 记作  $f$  是  $k$ - $\mathcal{R}$  决定的. 本章简记  $f$  是  $k$ -决定的.

由此可见,  $k$ -决定的函数芽由它以及它的阶数不大于  $k$  的所有偏导数在原点的值完全决定, 至多相差一右等价.

本节的基本结果是关于  $k$ -决定性的下列充分条件.

**定理 3.3.1** 设  $f \in \epsilon_n$ . 若  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$ , 则  $f$  是  $k$ -决定的.

**证** 设  $g \in \epsilon_n$  具有与  $f$  相同的  $k$ -导网, 需证  $g$  与  $f$  右等价. 将  $f$  和  $g$  设想为实向量空间  $\epsilon_n$  中的两“点”, 用一条“直线”连接它们, 定义函数芽  $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, [0, 1] \times 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$F(t, x) = f_t(x) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

把  $\{f_t\}$  看做是  $n$  元函数的 1-参数族, 其中  $f_0 = f, f_1 = g$ . 如果能够证明在这一族中的任意两个芽是右等价的, 结果自然得到. 因为

$[0,1]$  是紧的, 只需证明: 对任意  $a \in [0,1]$ , 当  $t$  与  $a$  相邻近时,  $f_t$  与  $f_a$  右等价. 令  $F^a$  表示  $F$  在点  $(a, 0)$  处的芽限制, 下面只需证明  $F^a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (a, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$  是平凡芽.

$F^a$  为平凡的是指存在  $\mathbb{R}$ -水平保持的  $C^\infty$  映射芽  $\Phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (a, 0)) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (a, 0))$ , 它可表示为

$$\Phi(t, x) = (t, \Psi(t, x)),$$

且满足下列条件:

- (a)  $\Phi(a, x) = (a, x)$ ,
- (b)  $F(\Phi(t, x)) = F(a, x)$ .

此外还附上条件

- (c)  $\Psi(t, 0) = 0$ .

记  $\Phi_t(x) = \Psi(t, x)$ . 条件(a)表示  $\Phi_a =$  恒同. 因  $\Phi_t$  的 Jacobi 矩阵的行列式在原点的值  $\det D\Phi_t(0)$  连续地依赖于  $t$ , 又  $\det D\Phi_a(0) = 1$ , 所以当  $t$  与  $a$  靠得近时,  $\Phi_t$  是可逆的. 由此还说明  $\Phi$  是微分同胚芽. 条件(b)可写为  $f_t \circ \Phi_t = f_a$ , 因此当  $t$  接近于  $a$  时,  $f_t$  与  $f_a$  右等价.

$F^a$  视为  $f_a$  的 1-参数形变, 据命题 3.2.1,  $F^a$  是平凡的  $\Leftrightarrow$  存在向量场芽  $X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , 使得

$$(d) \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial F^a}{\partial x_i} = - \frac{\partial F^a}{\partial t}.$$

考虑到条件(c), 还要求  $X_i$  满足

$$(e) X_i(t, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

也就是

$$(e') X_i \in \mathcal{M}_n \cdot \epsilon_{1+n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

因此对任意  $a \in [0, 1]$ , 证明  $F^a$  是平凡芽归结为构造满足条件(d), (e') 的向量场芽  $X$ . 因下面的论证不依赖于  $a$  的值的具体选取, 不妨取  $a = 0$ . 而对于上标  $a$  则省去.

由于  $j^k g = j^k f$ , 所以  $g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ . 又

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[(1-t)f + tg] = g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(g - f) \in \mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{M}_{1+n},$$

从而由条件  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$  可推出

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \subset \mathcal{M}_n$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_{1+n} + \mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{M}_{1+n},$$

据 Nakayama 引理,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_{1+n}.$$

于是

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{M}_n \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_{1+n}$$

说明存在  $X_i \in \mathcal{M}_n \cdot \epsilon_{1+n}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 使得

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

令  $X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , 可见条件(d)和(e')被满足. 按照前面约定, 对任意  $a \in [0, 1]$ , 已构造了符合条件(d)和(e')的向量场芽  $X$ , 因而  $F^a$  是平凡的. 根据上面的分析, 定理得证.

据 Nakayama 引理, 定理中的条件  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$  等价于条件  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$ . 前者说明在  $f$  处的轨道切空间  $T\mathbb{R}(f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f)$  在  $\epsilon_n$  中具有有限余维, 后者便于实际计算与论证推导.

**例 1** 芽  $f(x, y) = x^3 + y^3$  是 3-决定的, 因为  $J(f) = \langle x^2, y^2 \rangle \epsilon_2$ ,  $\mathcal{M}_2 \cdot J(f) = \langle x^3, x^2 y, x y^2, y^3 \rangle \epsilon_2 = \mathcal{M}_2^3$ .

$f \in \epsilon_n$  为  $k$ -决定的另一充分条件是

**定理 3.3.2** 设  $f \in \epsilon_n$ . 若  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot J(f)$ , 则  $f$  是  $k$ -决定的.

证明提示与定理 3.3.1 的证明几乎相同, 只需对证明过程中的最后部分进行验证.

**例 2** 设芽  $f(x, y) = x^4 + y^4$ , 则

$$J(f) = \langle x^3, y^3 \rangle \epsilon_2,$$

$$\mathcal{M}_2 \cdot J(f) = \langle x^4, x^3 y, x y^3, y^4 \rangle \epsilon_2.$$

显然  $\mathcal{M}_2^4 \subset \mathcal{M}_2 \cdot J(f)$  不成立, 不能直接应用定理 3.3.1 推出  $f$  是 4-决定的. 但是

$$\mathcal{M}_2^2 \cdot J(f) = \langle x^5, x^4 y, x^3 y^2, x^2 y^3, x y^4, y^5 \rangle \epsilon_2 = \mathcal{M}_2^5,$$

据定理 3.3.2,  $f$  是 4-决定的.

本例表明, 条件  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 \cdot J(f)$  弱于条件  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$ , 因此定理 3.3.2 是定理 3.3.1 的一种改进形式.

**定义 3.3.2** 设  $f \in \epsilon_n$ .  $f$  是有限决定的是指对某一正整数  $k$ ,  $f$  是  $k$ -决定的.

**命题 3.3.1** 设  $f \in \epsilon_n$  是  $k$ -决定的, 则

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$$

证明留作练习.

由定理 3.3.1 和命题 3.3.1, 容易推得  $f \in \epsilon_n$  是有限决定的  $\Leftrightarrow f$  具有有限余维, 因此对  $\epsilon_n$  中具有有限余维的函数芽的研究化简为对  $\epsilon_n$  中多项式芽的研究, 从而余维数较小的函数芽的分类问题只需就多项式芽来讨论.

## § 3.4 余维数不大于 5 的函数芽的分类

本节对余维数不超过 5 的光滑函数芽依右等价关系进行分

类. 当余维数为 0 或 1 时, 我们已经讨论过. 下面对余维数不小于 2 的函数芽  $f \in \epsilon_n$  进行探讨, 易见  $f \in \mathcal{M}_n^2$ , 且  $0 \in \mathbb{R}^n$  是  $f$  的退化临界点, 因而  $f$  的 Hessian 矩阵

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right)$$

的秩  $r < n$ . 整数  $c = n - r$  叫做  $f$  的余秩, 记为  $\text{Corank } f$ .

当  $f$  为 Morse 芽时,  $\text{Corank } f = 0$ . 另外约定非奇异芽的余秩为 0.

### 3.4.1 分裂引理

**命题 3.4.1** 设  $f \in \mathcal{M}_n^2$  是一个有限决定的函数芽, 其余秩为  $c$ , 则  $f$  右等价于下列函数芽:

$$g(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2, \quad (1)$$

其中  $g \in \mathcal{M}_c^3$ ,  $\delta_i = \pm 1$  ( $i = c+1, \dots, n$ ).

**证** 给定两个芽  $g, h \in \epsilon_n$ . 如果存在可逆芽  $\Phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , 使得  $g \circ \Phi$  和  $h$  具有相同的  $k$ -导网, 记为  $g \underset{k}{\sim} h$ , 易见 “ $\sim_k$ ” 是一个等价关系.

应用归纳法, 我们试图证明: 存在芽  $g_k \in \mathcal{M}_c^3$ , 其中  $g_k$  是一个次数不大于  $k$  的多项式, 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) \underset{k}{\sim} g_k(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} \cdot x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2, \quad (2)$$

由此可证明本命题结论成立. 事实上, 因为  $f$  是有限决定的, 必存在正整数  $k_0$ , 使得  $f$  右等价于它的  $k_0$  阶 Taylor 多项式.

归纳证明从  $k = 2$  开始.  $f$  的 2-导网是一个含有  $n$  个变量  $x_1, \dots, x_n$  的二次型, 它的秩  $r = n - c$ . 由高等代数知识, 只需做一非退化线性坐标变换, 该二次型右等价于

$$\delta_{c+1} \cdot x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2,$$

其中  $\delta_i = \pm 1$  ( $i = c+1, \dots, n$ ), 因此取  $g_2 = 0$ .

现归纳假定(2)式成立,有

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\underset{k+1}{\sim} g_k(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2 \\ &+ H(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $H$  是一个  $(k+1)$  次齐次多项式. 将  $H$  写为下列形式:

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n) &= h(x_1, \dots, x_c) + x_{c+1} H_{c+1}(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \dots + x_n H_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

其中  $h$  是一个  $(k+1)$  次齐次多项式,  $H_{c+1}, \dots, H_n$  为  $k$  次齐次多项式. 定义映射  $\Phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  为

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_1, \dots, x_n) &= x_i, \quad i = 1, \dots, c, \\ \Phi_j(x_1, \dots, x_n) &= x_j + \frac{1}{2\delta_j} H_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = c+1, \dots, n. \end{aligned}$$

$\Phi$  的 Jacobi 矩阵在  $0 \in \mathbb{R}^n$  的值是单位矩阵, 因而  $\Phi$  是可逆的. 在(3)式右边用  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  代替  $x_1, \dots, x_n$ , 得到

$$f(x_1, \dots, x_n) \underset{k+1}{\sim} g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2,$$

其中  $g_{k+1} = g_k + h$ . 这样便完成了归纳证明, 本命题得证.

本命题称为分裂引理, 在下面的讨论中, 常用到这一技巧.

**命题 3.4.2** 设  $f \in \mathcal{M}_n^2$  具有形式(1), 则  $f$  在  $\epsilon_n$  中的余维数等于  $g$  在  $\epsilon_c$  中的余维数.

证明留作练习

**命题 3.4.3** 设  $f \in \epsilon_n$ . 若  $f$  的余维数不大于 6, 则  $f$  (在点 0) 的余秩小于或等于 2.

**证** 若  $\text{Codim } f \leq 1$ , 则  $\text{Corank } f = 0$ . 现假定  $2 \leq \text{Codim } f \leq 6$ . 由分裂引理,  $f$  右等价于

$$g(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2,$$

其中  $c = \text{Corank } f$ ,  $g \in \mathcal{M}_c^3$ . 据命题 3.4.2,

$$\text{Codim } f = \text{Codim } g,$$

再依命题 3.2.4,

$$\text{Codim } g = \text{Codim } J(g) \geq 1 + \frac{c(c+1)}{2},$$

因此由  $\text{Codim } g \leq 6$  得  $c \leq 2$ . 证毕.

下面分别就余秩为 1 或 2 讨论函数芽的分类.

### 3.4.2 余秩为 1 的函数芽的分类

**定理 3.4.1** 在  $\epsilon_n$  中, 每一个余秩为 1 且余维数  $k \geq 2$  的函数芽  $f$  右等价于下列函数芽之一:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + x_n^{k+1}, \quad \delta_i = \pm 1, \quad k \text{ 为偶数},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 \pm x_n^{k+1}, \quad \delta_i = \pm 1, \quad k \text{ 为奇数}.$$

**证** 因  $f$  具有有限余维, 必为有限决定的. 据分裂引理,  $f$  右等价于

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + g(x_n),$$

其中  $g \in \mathcal{M}_1^3$  且具有余维数  $k$ . 将  $x_n$  改写为  $x$ .

断言: 存在最小整数  $j$ , 使得  $g \in \mathcal{M}_1^j$  且  $g \notin \mathcal{M}_1^{j+1}$ . 若不然, 则对所有  $j$ , 皆有  $J(g) \subset \mathcal{M}_1^j$ , 因而  $\text{Codim } g \geq \text{Codim } \mathcal{M}_1^j = j$ , 这说明  $g$  无有限余维数. 于是由断言可推知

$$g(x) = x^j h(x), \quad h(0) \neq 0.$$

通过计算,  $\text{Codim } g = j - 1$ , 从而  $j = k + 1$ .

现在  $g \in \mathcal{M}_1^{k+1}$  且  $g \notin \mathcal{M}_1^{k+2}$ , 据命题 1.4.1 便得到  $g$  或右等价于  $x^{k+1}$  或右等价于  $\pm x^{k+1}$ , 这要视  $k$  为偶数或奇数而定. 因而对  $f \in \epsilon_n$  来说, 本定理结论为真.

特别, 有下表:

余秩	余维数	芽	名称
1	2	$x^3$	折叠
	3	$\pm x^4$	尖点
	4	$x^5$	燕尾
	5	$\pm x^6$	蝴蝶

### 3.4.3 余秩为 2、余维数不大于 5 的函数芽的分类

设  $f \in \epsilon_n$  的余秩为 2, 且  $\text{Codim}f \leq 5$ . 由分裂引理,  $f$  右等价于下列芽:

$$\sum_{i=1}^{n-2} \delta_i x_i^2 + g(x_{n-1}, x_n),$$

其中  $g \in \mathcal{M}_2^3$ . 据命题 3.4.2 和 3.2.4,

$$\text{Codim}J(f) = \text{Codim}J(g) \geq 4,$$

因此在余秩等于 2、余维数不大于 5 的条件下, 对函数芽  $f \in \epsilon_n$  分类简化为对函数芽  $g \in \mathcal{M}_2^3$  在余维数等于 4 或 5 时的分类. 改记  $x_{n-1}, x_n$  为  $x$  和  $y$ .

**定理 3.4.2** 在  $\epsilon_2$  中, 每一个余维数为 4 的函数芽  $g \in \mathcal{M}_2^3$  右等价于下列芽之一:

$$x^3 \pm xy^2.$$

**证** 将  $\mathcal{M}_2$  写为  $\mathcal{M}$ , 由  $g \in \mathcal{M}^3$  知

$$\mathcal{M} \cdot J(g) \subset \mathcal{M}^3.$$

考虑理想的下降序列

$$\epsilon_2 \supseteq \mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}^2 \supseteq \mathcal{M}^3 \supseteq \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot J(g) \supseteq \cdots,$$

据命题 3.2.3,  $\text{Codim}(\mathcal{M} \cdot J(g)) = 6$ , 因而  $c_3 = 0$  (依推论 3.1.3). 利用 Nakayama 引理, 有

$$\mathcal{M}^3 \subset \mathcal{M} \cdot J(g).$$

定理 3.3.1 告诉我们,  $g$  是 3-决定的, 必右等价于它的三阶 Taylor 多项式. 由于  $g \in \mathcal{M}^3$ , 它的三阶 Taylor 多项式是三次齐次多项式. 这样一来, 余维数为 4 的函数芽  $g \in \mathcal{M}^3$  的分类便化简为二个变量  $x, y$  的三次齐次多项式在一般线性群  $GL(2, \mathbb{R})$  作用下的分类, 并且要求它们的标准形(即每一等价类的代表)满足下列等式:

$$\mathcal{M} \cdot J(g) = \mathcal{M}^3. \quad (4)$$

易见每一个非零三次齐次多项式恰好右等价于下列标准形之一(这里所说的右等价是指在群  $GL(2, \mathbb{R})$  作用的意义下):

(a)  $P(x, y) = x^3 - xy^2 = x(x - y)(x + y)$ , 其特征是方程  $P(x, y) = 0$  确定 3 条相异实直线;

(b)  $P_1(x, y) = x^3 + xy^2 = x(x^2 + y^2)$ , 方程  $P_1(x, y) = 0$  确定一条实直线和两条复共轭直线;

(c)  $P_2(x, y) = x^2y$ , 方程  $P_2(x, y) = 0$  确定一条实直线和另一条二重实直线;

(d)  $P_3(x, y) = x^3$ ,  $P_3 = 0$  确定一条三重实直线.

然后逐一验证, 仅(a)和(b)(非退化情形)满足等式(4).

**定理 3.4.3** 在  $\epsilon_2$  中, 每一个余维数为 5 的函数芽  $g \in \mathcal{M}^3$ , 右等价于下列芽之一:

$$x^2y \pm y^4.$$

**证** 显然  $\mathcal{M} \cdot J(g) \subset \mathcal{M}^3$ . 考虑理想的下降序列

$$\epsilon_2 \supseteq_1 \mathcal{M} \supseteq_2 \mathcal{M}^2 \supseteq_3 \mathcal{M}^3 \supseteq_{c_3} \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot J(g) \supseteq_{c_4} \mathcal{M}^5 + \mathcal{M} \cdot J(g) \supseteq \cdots,$$

因  $\text{Codim } \mathcal{M} \cdot J(g) = 7$ , 故  $c_3 = 1, c_4 = 0$ . 而

$$c_3 = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{M}^3}{\mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot J(g)} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{P_2^3}{P_2^3 \cap j^3(\mathcal{M} \cdot J(g))},$$

其中  $P_2^3$  表示变量  $x, y$  的三次齐次多项式所成之向量空间, 交  $P_2^3$

$\cap j^3(\mathcal{M} \cdot J(g))$  仅依赖于  $g$  在原点的三次 Hessian. 容易验证: 由  $c_3 = 1$  可推出  $g$  的三次 Hessian 右等价(在群  $GL(2, \mathbb{R})$  作用意义下)于“抛物型”  $x^2 y$ .

由  $c_4 = 0$  导出  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \cdot J(g)$ , 因而  $g$  是 4-决定的, 它右等价于  $j^4 g$ . 而  $g$  的四阶 Taylor 多项式具有形式

$$x^2 y + P_4(x, y), \quad (5)$$

其中  $P_4$  是  $x, y$  的四次齐次多项式. 我们将(5)式写为

$$x^2 y + \{ay^4 + by^3 x + x^2 P_2(x, y)\},$$

这里  $P_2$  是  $x, y$  的二次型.

对上式中的  $x, y$  做可逆坐标变换, 将所得的结果取 4-导网必与原来的芽右等价, 这是因为 4-决定性在右等价作用下保持不变. 特别, 用  $x - \frac{b}{2}y^2$  代替  $x$ , 用  $y - P_2(x, y)$  代替  $y$ , 将所得结果取 4-导网, 可得到与  $g$  右等价的芽

$$x^2 y + ay^4,$$

这里  $a \neq 0$ . 否则  $0 \in \mathbb{R}^2$  是芽  $x^2 y$  的非孤立奇点, 据命题 3.2.5, 芽  $x^2 y$  因而  $g$  均具有无限余维, 与  $\text{Codim} g = 5$  矛盾!

最后用  $px$  代  $x$ , 用  $qy$  代  $y$ , 并选取适当的常数  $p$  和  $q$ , 便得到与  $g$  右等价的芽

$$x^2 y \pm y^4,$$

这里“ $\pm$ ”号依赖于  $a$  的符号. 此外,  $x^2 y + y^4$  和  $x^2 y - y^4$  不是右等价的(留作练习).

由分裂引理以及定理 3.4.2 和 3.4.3, 我们有

**定理 3.4.4** 在  $\epsilon_n$  中, 每一个余秩为 2, 余维数不大于 5 的函数芽  $f \in \mathcal{M}_n^2$  右等价于下列芽之一:

$$\sum_{i=1}^{n-2} \delta_i x_i^2 + x_{n-1}^3 \pm x_{n-1} x_n^2, \quad \delta_i = \pm 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \delta_i x_i^2 + x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^4, \quad \delta_i = \pm 1.$$

特别,有下表:

余秩	余维数	芽	名称
2	4	$x^3 - xy^2$	椭圆脐点
	4	$x^3 + xy^2$	双曲脐点
	5	$x^2 y \pm y^4$	抛物脐点

余维数不大于 5 的函数芽依右等价关系分类,定理 3.4.1 和 3.4.4 连同命题 1.4.2,定理 1.4.1 给出了完整的描述,它是著名的 Thom 分类定理所包含的内容,本书第六章还将继续深入介绍.

例 设  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  定义为  $f(x, y) = x^4 + x^2 y^2 - 2x^2 y - xy^2 + y^2$ . 经计算, 得

$$\text{Codim } f = 4, \quad \text{Corank } f = 1,$$

于是原点是燕尾型奇点.

方程  $f=0$  定义的实代数曲线如图 3.2 所示.

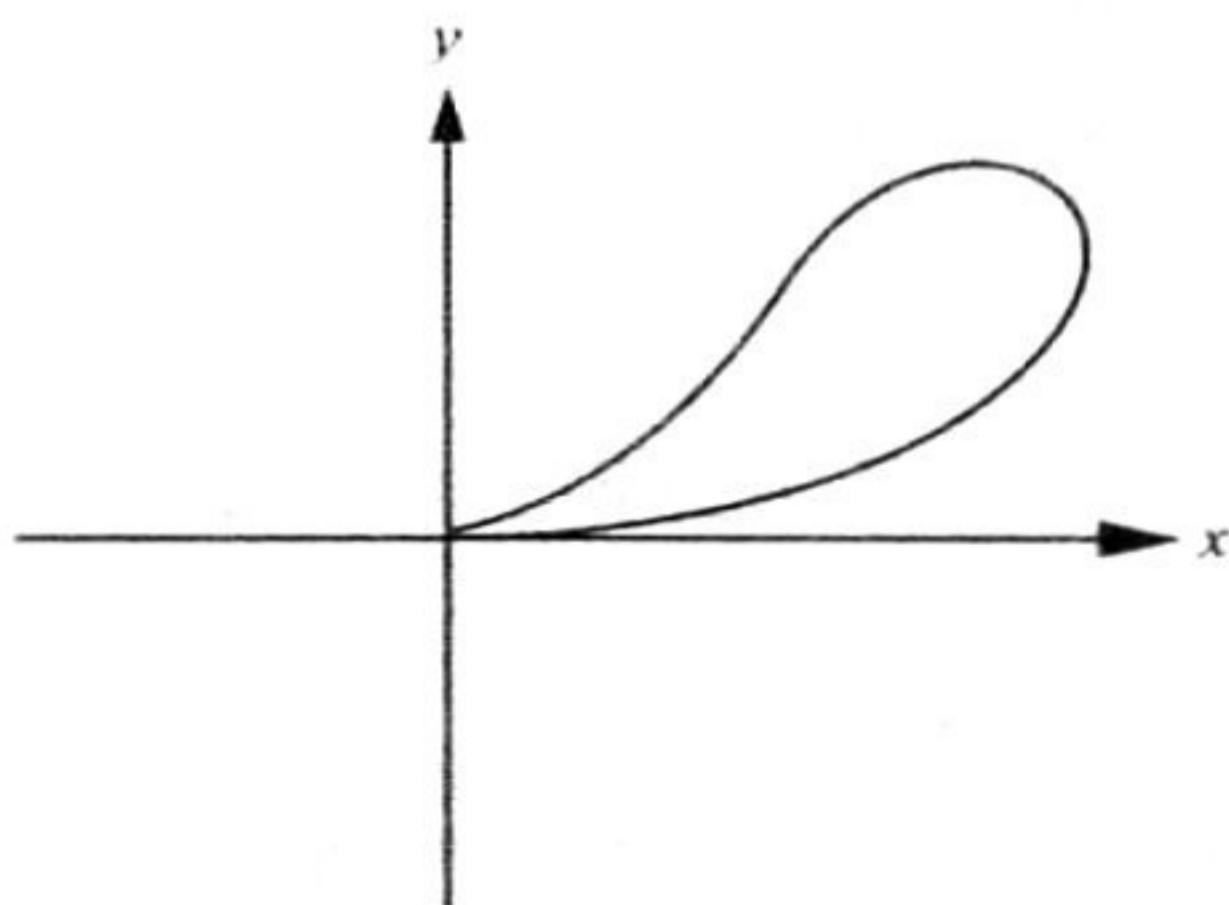


图 3.2

## 第四章 除法定理

对于域  $\mathbb{F}$  上的一元多项式环  $\mathbb{F}[x]$  已经建立了整除性理论, 它与整数的整除理论完全平行. 该理论的一个基本结果现陈述如下: 设  $f(x)$  与  $g(x)$  是  $\mathbb{F}[x]$  中的任意两个多项式, 且  $g(x) \neq 0$ , 那么在  $\mathbb{F}[x]$  中可以找到惟一的多项式  $q(x)$  和  $r(x)$ , 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

并且或者  $r(x) = 0$ , 或者  $r(x)$  的次数小于  $g(x)$  的次数. 现考虑光滑实值函数芽环, 自然问: 在该环中是否有类似的结果呢? 本章的目的是推导实光滑函数芽的除法定理. 下一章将利用它来证明 Malgrange 预备定理.

本章安排如下. 在 § 4.1 中介绍一般的除法定理及多项式除法定理, 证明它们二者是等价的. 接着在 § 4.2 中讨论多项式除法定理. 为帮助读者理解, 首先对复变量的解析函数进行讨论, 然后讨论实变量的光滑函数. 对于后者, 我们采用 Nirenberg 的方法来证明多项式除法定理, 而把要用到的 Nirenberg 扩张引理放在 § 4.3 中予以讨论.

### § 4.1 除法定理与多项式除法定理

#### 4.1.1 定理的陈述

在叙述除法定理之前, 先看一个例子.

**例 1** 设  $F(t, x)$  是定义在原点  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的某一邻域  $U$  内的光滑函数. 对函数  $F$  做 Taylor 展开, 记  $r(t, x)$  为  $F(t, x)$  在点  $(0, x) \in U$  关于  $t$  的  $(k-1)$  阶 Taylor 多项式, 则

$$r(t, x) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x) t^j,$$

其中  $r_j(x) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j F}{\partial t^j}(0, x)$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ). 于是函数  $F(t, x) - r(t, x)$  在  $(\{0\} \times \mathbb{R}^n) \cap U$  的每一点关于  $t$  是  $(k-1)$ -平坦的. 由定理 1.1.3 知, 存在定义在点  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的邻域  $V \subset U$  上的光滑函数  $q(t, x)$ , 使得

$$F(t, x) - r(t, x) = t^k q(t, x),$$

或

$$F(t, x) = t^k q(t, x) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x) \cdot t^j. \quad (1)$$

从这个例子可见, 单项式  $t^k$  具有除法性质, 用芽的语言可表示为: 对任意  $F \in \epsilon_{t, x}$ , 存在  $q \in \epsilon_{t, x}$  及  $r_j \in \epsilon_x$  ( $0 \leq j \leq k-1$ ), 使得 (1) 式成立. 进而问: 比单项式芽  $t^k$  更一般的函数芽是否也具有上述除法性质呢?

**定义 4.1.1** 如果光滑函数芽  $P: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$  满足下列条件:

- (i)  $P(t, 0) = t^k p(t)$ ,  $p \in \epsilon_t$ ,  $k$  为自然数,
- (ii)  $p(0) \neq 0$ ,

则称  $P$  关于  $t$  是  $k$  阶正则的.

换言之,  $P \in \epsilon_{t, x}$  关于  $t$  是  $k$  阶正则的, 若  $P(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial^j P}{\partial t^j}(0, 0) = 0$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , 且  $\frac{\partial^k P}{\partial t^k}(0, 0) \neq 0$ .

**定理 4.1.1** (Mather 的除法定理) 设  $P \in \epsilon_{t, x}$  关于  $t$  是  $k$  阶正则的, 则对每一  $F \in \epsilon_{t, x}$ , 存在  $Q \in \epsilon_{t, x}$  及  $r_j \in \epsilon_x$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , 使得

$$F(t, x) = P(t, x) \cdot Q(t, x) + r(t, x),$$

$$r(t, x) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x) t^j,$$

其中  $(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$ .

**注** 由 J. N. Mather 给出的除法定理证明(见文献[46])可导出比上述定理更一般的结论. 不仅如此, 他还证明了整体的除法定理.

**例 2** 设  $P, F \in \varepsilon_2$  定义为  $P(t, x) = t^2 - x, F(t, x) \equiv 0$ , 则  $P$  关于  $t$  是 2 阶正则的. 令  $Q_1(t, x) = r_1(t_1, x) \equiv 0$ , 有

$$F(t, x) = P(t, x)Q_1(t, x) + r_1(t, x).$$

又令

$$r_2(t, x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

则  $r_2 \in \varepsilon_2$ , 并且可以取  $Q_2 \in \varepsilon_2$ , 使得  $P(t, x)Q_2(t, x) = -r_2(t, x)$ , 于是又有

$$F(t, x) = P(t, x)Q_2(t, x) + r_2(t, x),$$

这说明在除法定理中,  $Q$  与  $r$  的选取不是惟一的.

**推论 4.1.1** 设  $P \in \varepsilon_{t, x}$  关于  $t$  是  $k$  阶正则的, 则存在  $Q \in \varepsilon_{t, x}$  及  $a_j \in \varepsilon_x$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ), 使得

$$P(t, x)Q(t, x) = t^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x) t^j, \quad (2)$$

并且

$$Q(0, 0) \neq 0, a_j(0) = 0, 0 \leq j \leq k-1. \quad (3)$$

**证** 取  $F(t, x) = t^k$ ,  $F$  可视为  $\varepsilon_{t, x}$  中成员. 由除法定理, 存在  $Q \in \varepsilon_{t, x}$  及  $r_j \in \varepsilon_x$  ( $0 \leq j \leq k-1$ ), 使得

$$t^k = P(t, x)Q(t, x) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x) t^j.$$

令  $a_j(x) = -r_j(x)$  ( $0 \leq j \leq k-1$ ), 代入上式即得(2)式. 在(2)式中令  $x=0$  便可知(3)式成立.

应指出的是, 若  $\tilde{P}(t, x) = t^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x) t^j$  满足条件  $a_j \in \mathcal{M}_x$  ( $0 \leq j \leq k-1$ ), 则  $\tilde{P} \in \epsilon_{t, x}$  关于  $t$  也是  $k$  阶正则的, 并且它是  $t$  的  $k$  次多项式, 其最高项系数为 1. 本推论说明, 任意一个关于  $t$  是  $k$  阶正则的函数芽  $P \in \epsilon_{t, x}$  与上述  $\tilde{P}$  仅相差一个非零因子, 即  $P$  乘上一个恰当的非零因子  $Q \in \epsilon_{t, x}$  后, 便具有最简形式  $\tilde{P}$ . 此外, 利用下面的定理 4.1.2(多项式除法定理)也可得到该推论(见命题 4.1.1 证明中第一步).

令  $P_k: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  为多项式, 定义为

$$P_k(t, \lambda) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i t^i, \quad (4)$$

这里  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ .

**定理 4.1.2(多项式除法定理)** 设  $F(t, x) \in \epsilon_{t, x}$  为任意光滑函数芽, 则存在  $Q(t, x, \lambda), r(t, x, \lambda) \in \epsilon_{t, x, \lambda}$ , 使得

$$F(t, x) = P_k(t, \lambda) \cdot Q(t, x, \lambda) + r(t, x, \lambda),$$

$$r(t, x, \lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x, \lambda) t^i, \quad r_i \in \epsilon_{x, \lambda}, \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

#### 4.1.2 除法定理与多项式除法定理的等价性

由定理 4.1.1 易导出定理 4.1.2. 事实上, 将  $F, P_k$  视为  $\epsilon_{t, x, \lambda}$  中的成员,  $P_k$  在  $\epsilon_{t, x, \lambda}$  中关于  $t$  是  $k$  阶正则的, 应用除法定理可知定理 4.1.2 的结论真. 然而我们更感兴趣的是其逆命题, 这就是

**命题 4.1.1 多项式除法定理  $\Rightarrow$  除法定理.**

**证** 我们把证明分为两步:

**第一步** 设  $P \in \epsilon_{t, x}$  关于  $t$  是  $k$  阶正则的. 用  $P_k$  除  $P$ , 据定理 4.1.2, 得

$$P(t, x) = (t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i t^i) Q(t, x, \lambda) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x, \lambda) t^i. \quad (5)$$

在上式中, 令  $x=0, \lambda=0$ , 得

$$P(t, 0) = t^k Q(t, 0, 0) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(0, 0) t^i,$$

而  $P(t, 0) = t^k p(t)$ , 其中  $p \in \epsilon_t$  且  $p(0) \neq 0$ . 根据 Taylor 展开式的惟一性, 有

$$r_i(0, 0) = 0 (0 \leq i \leq k-1), \quad Q(0, 0, 0) = p(0) \neq 0. \quad (6)$$

注意到函数  $P$  的变化只依赖于  $t$  和  $x$ , 而与  $\lambda$  无关. 将(5)式两边对  $\lambda_j$  求导, 并令  $x=0, \lambda=0$ , 得

$$0 = t^j Q(t, 0, 0) + t^k \frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}(t, 0, 0) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) t^i,$$

对  $Q(t, 0, 0)$  及  $\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}(t, 0, 0)$  做 Taylor 展开, 再一次应用 Taylor 展开式的惟一性, 由上式可推出

$$\frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) = \begin{cases} 0, & i < j, \\ -Q(0, 0, 0), & i = j, \end{cases} \quad (7)$$

从而  $k \times k$  矩阵  $\left( \frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) \right)$  是下三角矩阵, 对角线上的元素均为  $-Q(0, 0, 0)$ , 因此是可逆的. 由隐函数定理, 方程组

$$\begin{cases} r_0(x, \lambda) = 0, \\ \dots \\ r_{k-1}(x, \lambda) = 0, \end{cases}$$

有且仅有一个局部解  $\lambda = \lambda(x)$  满足  $\lambda(0) = 0$  (据(6)式), 并且

$\lambda(x)$  是  $C^\infty$  的. 令  $\lambda = \lambda(x) = (\lambda_0(x), \dots, \lambda_{k-1}(x))$ , 将它代入 (5) 式得

$$P(t, x) = \left( t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x) t^i \right) Q(t, x, \lambda(x)). \quad (8)$$

因为  $Q(0, 0, 0) \neq 0$ ,  $\frac{1}{Q(t, x, \lambda(x))} \in \epsilon_{t, x}$ , 所以

$$t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x) t^i = \frac{P(t, x)}{Q(t, x, \lambda(x))}. \quad (9)$$

第二步 任取  $F \in \epsilon_{t, x}$ . 用  $P_k$  除  $F$ , 据定理 4.1.2,

$$F(t, x) = P_k(t, \lambda) \cdot S(t, x, \lambda) + \sum_{i=0}^{k-1} s_i(x, \lambda) t^i,$$

将  $\lambda$  用第一步得到的  $\lambda(x)$  代替, 得

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \left( t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x) t^i \right) S(t, x, \lambda(x)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} s_i(x, \lambda(x)) t^i, \end{aligned}$$

再将 (9) 式代入上式, 得

$$F(t, x) = P(t, x) \cdot \frac{S(t, x, \lambda(x))}{Q(t, x, \lambda(x))} + \sum_{i=0}^{k-1} s_i(x, \lambda(x)) t^i.$$

令  $q(t, x) = \frac{S(t, x, \lambda(x))}{Q(t, x, \lambda(x))}$ ,  $\bar{s}_i(x) = s_i(x, \lambda(x))$ , 则  $q \in \epsilon_{t, x}$ ,  $\bar{s}_i \in \epsilon_x$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ), 上式可写为

$$F(t, x) = P(t, x) q(t, x) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{s}_i(x) t^i.$$

这正是我们所要证的.

由多项式除法定理很容易得到 Whitney 关于偶函数的一个结论, 通常称为 Whitney 引理, 见文献 [69].

例 3 设  $F \in \epsilon_{t, x}$ , 则存在光滑函数芽  $s_1, s_2 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0,$

$0) \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$F(t, x) = ts_1(t^2, x) + s_2(t^2, x).$$

特别, 当  $F$  是  $t$  的偶函数, 即  $F(t, x) = F(-t, x)$  时,

$$F(t, x) = s_2(t^2, x).$$

证 取  $P_2(t, \lambda) = t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0$ , 应用定理 4.1.2 于  $F$ , 则存在  $q, r: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (0, 0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$\begin{aligned} F(t, x) &= (t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0)q(t, x, \lambda_0, \lambda_1) \\ &\quad + r(t, x, \lambda_0, \lambda_1), \end{aligned}$$

$$r(t, x, \lambda_0, \lambda_1) = r_0(x, \lambda_0, \lambda_1) + r_1(x, \lambda_0, \lambda_1)t.$$

在上式中取  $\lambda_0 = -t^2, \lambda_1 = 0$ , 得

$$F(t, x) = r_0(x, -t^2, 0) + r_1(x, -t^2, 0)t.$$

令  $s_1(u, x) = r_1(x, -u, 0), s_2(u, x) = r_0(x, -u, 0)$ , 则

$$F(t, x) = ts_1(t^2, x) + s_2(t^2, x).$$

特别地, 若  $F(-t, x) = F(t, x)$ , 由上式立即可推出  $F(t, x) = s_2(t^2, x)$ .

## § 4.2 多项式除法定理的证明

本节证明实光滑函数芽的多项式除法定理. 为帮助读者理解该定理的证明要领, 先就复变量的解析函数予以讨论, 给出复解析情形下多项式除法定理的证明, 然后再转到实光滑情形.

### 4.2.1 复解析情形

令  $P_k^{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$  为复变量  $w$  的复系数多项式, 定义为  $P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda) = w^k + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j w^j$ , 其中  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ .

**定理 4.2.1** 设  $F(w, z)$  是定义在点  $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  的一邻域内的复解析函数, 则存在点  $(0, 0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$  的某邻域上的复解析函数  $q(w, z, \lambda)$  和  $r(w, z, \lambda)$ , 使得

$$F(w, z) = P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)q(w, z, \lambda) + r(w, z, \lambda),$$

$$r(w, z, \lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(z, \lambda) w^j,$$

其中每一  $r_j$  是定义在点  $(0, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$  的一邻域上的解析函数.

**证** 在复平面  $\mathbb{C}$  上选取原点的“足够小”邻域, 并且在该邻域上取一条简单闭曲线  $\gamma$ , 使得原点落在  $\gamma$  的内部. 由 Cauchy 积分公式, 若  $w$  位于曲线  $\gamma$  内, 则

$$F(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{\eta - w} d\eta.$$

容易验证  $P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda) - P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)$  可以表为

$$P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda) - P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda) = (\eta - w) \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda) w^j,$$

其中  $s_j$  是解析的 ( $j = 0, \dots, k-1$ ), 因此

$$\frac{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)}{\eta - w} = \frac{P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)}{\eta - w} + \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda) w^j.$$

此外, 要求当  $\lambda$  与  $0 \in \mathbb{C}^k$  充分接近时,  $P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)$  的零点均不位于曲线  $\gamma$  上, 显然满足这一要求的  $\gamma$  是容易选取的, 于是

$$\begin{aligned} F(w, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{\eta - w} \cdot \frac{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)} \cdot \left[ \frac{P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)}{\eta - w} + \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda) w^j \right] d\eta \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)(\eta - w)} d\eta \right] P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)} \cdot s_j(\eta, \lambda) d\eta \right] \cdot w^j,$$

令

$$q(w, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)(\eta - w)} d\eta,$$

$$r_j(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)} \cdot s_j(\eta, \lambda) d\eta, \quad j = 0, \dots, k-1,$$

$$r(w, z, \lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(z, \lambda) w^j,$$

则  $q, r$  为所求.

#### 4.2.2 实光滑情形

我们采用 Nirenberg 的方法来证明实光滑函数芽的多项式除法定理. 从定理 4.2.1 的证明中可见, Cauchy 积分公式是主要工具, 现在转到定理 4.1.2 的证明, 相应地需要一个类似的公式, 这正是下面引理 4.2.1 所述. 其次, 还需要一个扩张引理, 即 Nirenberg 扩张引理. 在叙述这两个引理之前, 先做一点准备.

将  $\mathbb{C}$  等同于  $\mathbb{R}^2$ , 复数  $z = x + iy$  对应于有序实数对  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 并且  $x$  和  $y$  可以用  $z$  及  $\bar{z}$  ( $= x - iy$ ) 表示, 即  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$ . 现假设  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  为光滑函数, 规定  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  要求满足求导链法则, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

若  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  由  $F = f + ig$  所给定, 其中  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数, 则

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right], \quad (1)$$

于是  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$  当且仅当  $F$  是解析的.

**引理 4.2.1** 设  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  为  $C^\infty$  函数(视为  $\mathbb{R}^2$  到自身的  $C^\infty$  映射),  $\gamma$  为  $\mathbb{C}$  中简单闭曲线, 其内部记为  $D$ , 则对  $w \in D$ ,

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z-w} dz + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-w}. \quad (2)$$

特别, 当  $F$  在区域  $D$  中解析时, 上述公式便变为 Cauchy 积分公式.

**证** 设  $F$  由  $f + ig$  给出. 对  $w \in D$ , 取  $\epsilon (> 0)$  小于点  $w$  到曲线  $\gamma$  的距离. 从  $D$  中挖去以点  $w$  为心、以  $\epsilon$  为半径的圆盘, 余下部分记为  $D_\epsilon$ ,  $D_\epsilon$  的边界  $\gamma_\epsilon$  是  $\gamma$  与上述小圆盘的边界圆  $S_\epsilon$  之并. 应用 Green 公式及(1)式于  $F = f + ig$ , 得

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\epsilon} F dz &= \int_{\gamma_\epsilon} (f + ig)(dx + i dy) \\ &= 2i \iint_{D_\epsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy = - \iint_{D_\epsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}, \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为  $dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$ .

用  $\frac{F(z)}{z-w}$  代替上式中  $F(z)$ , 并注意  $\frac{1}{z-w}$  在  $D_\epsilon$  上解析及

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{F(z)}{z-w} \right) = \frac{1}{z-w} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z),$$

因而

$$\begin{aligned} - \iint_{D_\epsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-w} &= \int_{\gamma_\epsilon} \frac{F(z)}{z-w} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z-w} dz - \int_{S_\epsilon} \frac{F(z)}{z-w} dz, \end{aligned} \quad (3)$$

又

$$\int_{S_\epsilon} \frac{F(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{F(w + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} d(\epsilon e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} i F(w + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , (3) 式左边趋于  $-\iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-w}$ , 右边趋于  $\int_{\gamma} \frac{F(z)}{z-w} dz - 2\pi i F(w)$ , 从而(2)式成立.

**引理 4.2.2** (Nirenberg 扩张引理) 设  $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{C}$  为  $C^\infty$  复值函数芽, 则存在  $C^\infty$  函数芽  $G: (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k, (0, 0, 0)) \rightarrow \mathbb{C}$ , 使得

(i)  $G(t, x, \lambda) = F(t, x)$ ,  $(t, x, \lambda) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k, (0, 0, 0))$ ,

(ii)  $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$  的各阶导数在  $\{\operatorname{Im} z = 0\}$  上为零,

(iii)  $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$  的各阶导数在  $\{P_k^C(z, \lambda) = 0\}$  上为零, 其中  $P_k^C(z, \lambda) = z^k + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j z^j$ .

由于这个引理证明太长, 我们把它安排在 § 4.3. 下面给出多项式除法定理的另一形式.

**定理 4.2.2** 设  $F(t, x)$  是定义在点  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的一邻域内的光滑复值函数, 则存在点  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  的某一邻域上的光滑复值函数  $Q(t, x, \lambda)$  和  $r(t, x, \lambda)$ , 使得

(i)  $F(t, x) = P_k(t, \lambda)Q(t, x, \lambda) + r(t, x, \lambda)$ ,

(ii)  $r(t, x, \lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x, \lambda) t^j$ , 其中每一  $r_j$  是定义在点  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  的一邻域上的光滑复值函数.

此外, 若  $F$  是实值的, 则  $Q$  和  $r$  可选取为实值的.

**注** “此外”部分可以通过令方程(i)两边的实部相等得到(注意  $P_k$  是实值的).

**证** 设  $F(t, x)$  如定理中所述, 依引理 4.2.2, 存在光滑复值函数  $G(z, x, \lambda)$ , 它定义在点  $(0, 0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$  的某一邻域

上, 满足该引理的条件(i)~(iii). 再由引理 4.2.1, 有

$$\begin{aligned}
 & G(z, x, \lambda) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, x, \lambda)}{\eta - z} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\partial G}{\partial \bar{\eta}}(\eta, x, \lambda) \frac{d\eta \wedge d\bar{\eta}}{\eta - z} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, x, \lambda) P_k^C(\eta, \lambda)}{P_k^C(\eta, \lambda)(\eta - z)} d\eta \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{(\partial G / \partial \bar{\eta})(\eta, x, \lambda) P_k^C(\eta, \lambda)}{P_k^C(\eta, \lambda)(\eta - z)} d\eta \wedge d\bar{\eta}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

又

$$P_k^C(\eta, \lambda) = P_k^C(z, \lambda) + \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda) z^j (\eta - z),$$

代入(4)式, 得

$$G(z, x, \lambda) = P_k^C(z, \lambda) Q(z, x, \lambda) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x, \lambda) z^j, \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
 Q(z, x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, x, \lambda)}{P_k^C(\eta, \lambda)} \cdot \frac{d\eta}{(\eta - z)} \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{(\partial G / \partial \bar{\eta})(\eta, x, \lambda)}{P_k^C(\eta, \lambda)} \cdot \frac{d\eta \wedge d\bar{\eta}}{\eta - z}, \\
 r_j(x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\eta, x, \lambda)}{P_k^C(\eta, \lambda)} \cdot s_j(\eta, \lambda) d\eta \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{(\partial G / \partial \bar{\eta})(\eta, x, \lambda)}{P_k^C(\eta, \lambda)} s_j(\eta, \lambda) d\eta \wedge d\bar{\eta},
 \end{aligned}$$



其中  $j = 0, \dots, k-1$ . 取  $z = t \in \mathbb{R}$ ,  $G(t, x, \lambda) = F(t, x)$ , 又当  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  时,  $P_k^C(t, \lambda) = P_k(t, \lambda)$ , 所以由(5)式推得本定理结论成立(请读者补述省去的一些证明细节).

### § 4.3 Nirenberg 扩张引理的证明

为证明 Nirenberg 扩张引理, 先证 3 个引理以作准备. 本节材料主要取自文献[27].

**引理 4.3.1**(Borel 引理) 设  $f_0(x), f_1(x), \dots$  是定义在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的一邻域  $U$  上的一列  $C^\infty$  函数, 则存在定义在点  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的某个邻域上的  $C^\infty$  函数  $F(t, x)$ , 使得

$$\frac{\partial^l F}{\partial t^l}(0, x) = f_l(x) \quad \forall l.$$

**证** 取  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数, 使得

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

注意可找到常数  $C_r > 0$ , 使得  $\rho(t)$  的  $r$  阶导数满足  $\rho^{(r)}(t) \leq C_r \rho(t)$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ), 并且  $\rho^{(0)}(t) = \rho(t)$ .

令

$$F(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \rho(\mu_l t) f_l(x) t^l, \quad (1)$$

其中  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_l, \dots$  为正实数的递增序列, 并且当  $l \rightarrow +\infty$  时,  $\mu_l \rightarrow +\infty$ . 因为当  $|t| > \frac{1}{\mu_l}$  时,  $\rho(\mu_l t) = 0$ , 因此(1)式右边只有有限个项不为 0,  $F(t, x)$  的定义对所有  $t$  均有意义, 并且当  $t \neq 0$  时  $F$  是光滑的.

由于  $\mathbb{R}^n$  是局部紧致的, 故存在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的紧致邻域  $K$ , 使得

$K \subset U$ . 以下将所有的  $f_l$  限制在  $K$  上, 并且在  $\mathbb{R} \times K$  上讨论  $F$ . 我们将通过选取适当的正数列  $\{\mu_l\}$ , 使由(1)式定义的  $F$  满足引理要求.

现对(1)式右边的通项求导数. 设  $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . 当  $s < l$  时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{s+|\alpha|}}{\partial t^s \partial x^\alpha} \left( \frac{1}{l!} \rho(\mu_l t) f_l(x) t^l \right) \right| \\ & \leq \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f_l(x) \right| \cdot \sum_{r=0}^s \frac{s! C_{s-r}}{r!(s-r)!(l-r)!} \rho(\mu_l t) \mu_l^{s-r} |t|^{l-r}, \end{aligned} \quad (2)$$

注意到当  $|t| > \mu_l^{-1}$  时,  $\rho(\mu_l t) = 0$ , 因此存在常数  $M_l \geq 1$ , 使得(2)式右边不超过  $M_l / \mu_l^{l-s}$ . 现取  $\mu_l > 2^l M_l$ , 则  $M_l / \mu_l^{l-s} \leq M_l / \mu_l < \frac{1}{2^l}$ . 从而可推知, 对(1)式右边逐项求导所得的级数在  $\mathbb{R} \times K$  上一致收敛, 因此  $F$  是  $\mathbb{R} \times K$  上的  $C^\infty$  函数. 此外, 容易验证  $\frac{\partial^l F}{\partial t^l}(0, x) = f_l(x)$ .

**引理 4.3.2** 设  $V$  和  $W$  是  $\mathbb{R}^n$  的子空间满足  $V + W = \mathbb{R}^n$ , 又设  $g$  与  $h$  是定义在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的一邻域上的  $C^\infty$  函数. 如果对每一多重指标  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 以及  $V \cap W$  中的所有  $x$ , 有

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} h(x),$$

则存在定义在  $0 \in \mathbb{R}^n$  的某一邻域上的  $C^\infty$  函数  $F$ , 使得对所有  $\alpha$ ,

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} F(x) = \begin{cases} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g(x), & \text{若 } x \in V, \\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} h(x), & \text{若 } x \in W. \end{cases}$$

证 只需就  $h \equiv 0$  证明该引理就行了. 事实上, 若  $F_1$  是  $g - h$  和零函数的扩张, 则  $F = F_1 + h$  便是  $g$  与  $h$  的扩张. 因此下面假定  $h \equiv 0$ .

在  $\mathbb{R}^n$  上选取坐标  $y_1, \dots, y_n$ , 使得  $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = \dots = y_j = 0\}$ ,  $W = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{j+1} = \dots = y_k = 0\}$ . 令

$$F(y) = \sum_{\substack{|\alpha|=0 \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_j, 0, \dots, 0)}}^{\infty} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}(0, \dots, 0, y_{j+1}, \dots, y_n) \rho(\mu_{|\alpha|} \sum_{i=1}^j y_i^2), \quad (3)$$

其中  $\rho$  如引理 4.3.1 的证明中所述, 且正数序列  $\{\mu_{|\alpha|}\}$  递增地趋于  $\infty$ . 如同上一引理那样选取诸  $\mu_{|\alpha|}$ , 要求它们快速递增以保证由(3)式定义的  $F$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的某一邻域内是  $C^\infty$  的.

余下验证  $F$  具有所要求的性质. 若  $y = (y_1, \dots, y_n) \in W$ , 则  $y_{j+1} = \dots = y_k = 0$ . 这时  $\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial y^\beta}(y)$  中的每一项必包含形如

$$\frac{\partial^{|\gamma|} g}{\partial y^\gamma}(0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

的因子. 因  $(0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n) \in V \cap W$ , 该因子等于 0 (依假设), 于是  $\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial y^\beta}(y) = 0$ . 另一方面, 若  $y \in V$ , 则  $y_1 = \dots = y_j = 0$ .

又

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma} \rho(\mu_{|\alpha|} \sum_{i=1}^j y_i^2) \Big|_{y_1 = \dots = y_j = 0} = \begin{cases} 1, & \gamma = 0, \\ 0, & \gamma \neq 0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial y^\beta}(y) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^\beta} \left( \frac{y^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}(y) \right) \Big|_{y_1 = \dots = y_j = 0}.$$

设  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , 易见若  $\beta_i \neq \alpha_i$  对某一  $i \leq j$ , 则在上述级数中

的相应项为 0. 实际上, 非零项仅为  $\frac{\partial^{|B|} g}{\partial y^B}(y)$ , 因此  $F$  是所要求的扩张. 证毕.

前两个引理都是扩张引理, 第三个引理涉及到解某种偏微分方程的“初值问题”.

**引理 4.3.3** 设  $f(x)$  是定义在  $0 \in \mathbb{R}^n$  的某邻域上的  $C^\infty$  复值函数,  $X$  为  $\mathbb{R}^n$  上的一个复系数  $C^\infty$  向量场,

$$X(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

其中  $X_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), 则存在定义在  $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的一邻域上的  $C^\infty$  复值函数  $F(t, x)$ , 使得

- (a)  $F(0, x) = f(x)$  对所有  $x$ ,
- (b)  $\frac{\partial F}{\partial t}$  和  $XF = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial F}{\partial X_j}$  在点  $(0, x)$  处的各阶导数相等.

**证** 依引理 4.3.1, 可以选取一个定义在点  $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的一邻域上的  $C^\infty$  复值函数  $F$ , 它具有下列形式:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \rho(\mu_k t) X^k f, \quad (4)$$

易见  $F$  满足(a)与(b).

**引理 4.2.2 的证明** 对  $k$  使用归纳法. 当  $k=0$  时,  $P_k^C(z) \equiv 1$ . 设  $z = t + is$ , 则

$$i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

取  $X = i \frac{\partial}{\partial t}$ . 由引理 4.3.3, 对  $C^\infty$  函数  $F(t, x)$ , 存在  $C^\infty$  函数  $G(z, x)$ , 使得  $G(t, x) = F(t, x)$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , 并且  $\partial G / \partial s$  与  $XG = i \frac{\partial}{\partial t} G$  在  $s=0$  处的各阶导数相等, 因而  $\partial G / \partial \bar{z}$  在

$\{\operatorname{Im}z=0\}$  上的各阶导数均为零. 这说明引理在  $k=0$  时是对的.

现假定  $k-1$  时结论成立, 下面证明本引理对  $k$  也是正确的. 我们证明存在  $C^\infty$  函数  $g(z, x, \lambda)$  和  $h(z, x, \lambda)$  ( $(z, x, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$ ), 满足

- (i)  $g$  和  $h$  在集  $\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda) = 0\}$  上的各阶导数均相等;
- (ii)  $h$  是  $F$  的扩张, 即  $h(t, x, \lambda) = F(t, x)$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $\partial h / \partial \bar{z}$  在  $\{\operatorname{Im}z=0\}$  上各阶导数为零;
- (iv) 令  $M = h \mid \{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda) = 0\}$ , 则  $\partial M / \partial \bar{z}$  在  $\left\{ \frac{\partial P_k^{\mathbb{C}}}{\partial z}(z, \lambda) = 0 \right\}$  上各阶导数为零;
- (v)  $\partial g / \partial \bar{z}$  在  $\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda) = 0\}$  上各阶导数为零.

倘若这样的  $g$  和  $h$  存在, 我们立即可推出本引理结论. 令  $u = P(z, \lambda) \equiv P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)$ , 这里  $P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda) = z^k + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j z^j$ , 又令  $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$ . 在  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{k-1}$  上作坐标变换  $(z, \lambda_0, \lambda') \mapsto (z, u, \lambda')$ . 在新坐标系下, 超曲面  $\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda) = 0\}$  由方程  $u = 0$  给出. 根据引理 4.3.2, 存在  $C^\infty$  函数  $G(z, u, \lambda')$ , 使  $G$  与  $g$  在  $u = 0$  上各阶导数相等, 并且  $G$  与  $h$  在  $\operatorname{Im}z = 0$  上各阶导数也相等(注意  $u = 0$  和  $\operatorname{Im}z = 0$  视为  $\mathbb{R}^{2k+2}$  的子空间, 它们横截相交). 再由 (ii), (iii) 及 (v) 可知  $G$  即为所求.

余下证明  $g$  和  $h$  的存在性. 在新坐标系  $(z, u, \lambda')$  下, 向量场  $\partial / \partial z + (\partial P / \partial z) \partial / \partial u$  及  $\partial / \partial \bar{z} + (\overline{\partial P} / \partial z) \partial / \partial \bar{u}$  分别为原坐标系  $(z, \lambda)$  下的  $\partial / \partial z$  与  $\partial / \partial \bar{z}$ . 令  $X = -\left(\frac{\overline{\partial P}}{\partial z}\right)^{-1} \partial / \partial \bar{z}$ . 在坐标系  $(z, x, u, \lambda')$  下,  $C^\infty$  函数  $h$  所满足的条件可写为

$$(\text{ii})' h(t, x, u, \lambda') = F(t, x), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(\text{iii})' \partial h / \partial \bar{z} \text{ 与 } Xh \text{ 在 } \{\operatorname{Im}z=0\} \text{ 上的各阶导数相等,}$$

(iv)' 令  $M = h \mid \{u=0\}$ , 则  $\partial M / \partial \bar{z}$  在  $\{\partial P_k^{\mathbb{C}} / \partial z = 0\}$  上各阶导数为零.

现限制在超平面  $u = 0$  上, 并做坐标变换  $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$

$\mapsto \left( \frac{\lambda_1}{k}, \dots, \frac{(k-1)\lambda_{k-1}}{k} \right) = \lambda''$ , 那么对  $h$  的上述条件转变为寻找  $C^\infty$  函数  $M(z, x, \lambda'')$  满足

- (1)  $M(t, x, \lambda'') = F(t, x), t \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $\partial M / \partial \bar{z}$  在  $\{\operatorname{Im} z = 0\}$  上各阶导数为零,
- (3)  $\partial M / \partial \bar{z}$  在  $\{P_{k-1}^C(z, \lambda'') = 0\}$  上各阶导数为零.

按照归纳假设, 满足条件(1)~(3)的  $C^\infty$  函数  $M(z, x, \lambda'')$  存在, 并且可将  $M$  看做  $z, x, \lambda'$  的  $C^\infty$  函数, 因而  $\{X^l M\}$  是  $C^\infty$  函数列. 令

$$h(z, x, u, \lambda') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\bar{u})^l}{l!} \rho(\mu_l + |\bar{u}|^2) X^l M(z, x, \lambda'). \quad (5)$$

选取诸  $\mu_l$ , 要求它们快速递增以保证由上式定义的  $h$  (在  $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$  的邻域内) 是  $C^\infty$  函数, 并且使得  $h$  满足条件(ii)' 和 (iii)' . 易见  $h$  满足条件(iv)' .

最后构造符合条件(i)和(v)的  $C^\infty$  函数  $g$ . 在新坐标系  $(z, x, u, \lambda')$  下, 它表示成寻找  $C^\infty$  函数  $g(z, x, u, \lambda')$ , 满足

- (a)  $g$  和  $h$  在  $\{u = 0\}$  上的各阶导数相等,
- (b)  $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$  与  $Xg$  在  $\{u = 0\}$  上的各阶导数相等,

它可以看成求一类偏微分方程的初值问题的解. 不难看出, 所求的解  $g$  与引理 4.3.3 中的形式解(4)具有相同类型, 正如(5)式表示的那样.

## 第五章 Malgrange 预备定理

Malgrange 预备定理是非常重要的局部分析工具, 曾被 R. Thom 誉为局部分析的四大支柱之一, 它也是奇点理论的一个基本工具. J. Martinet<sup>[45]</sup> 指出, 预备定理是除法定理的一种代数形式. 事实上, 它们二者是等价的, 都表达了分析中的一个深刻结果, 但预备定理采用了更加代数化的语言.

本章第一节是对 Malgrange 预备定理的引入, 并介绍了必须的一些代数记号和结果. 第二节从除法定理推导 Malgrange 预备定理. 为便于读者理解, 将定理的证明分为几步来完成. 第三节给出了预备定理在函数芽的形变理论和映射芽的开折理论以及对称光滑函数芽的刻画方面的应用. 当然预备定理在奇点理论中的应用远不止这些, 例如在第十章将看到它在映射芽的有限决定性理论中的应用.

### § 5.1 预备定理的陈述

在叙述 Malgrange 预备定理前, 先介绍有关的代数记号与结论, 以方便读者阅读.

设  $A$  是一个具有幺元素的交换环,  $M$  是环  $A$  上的模. 若  $I$  为  $A$  中理想, 那么

$$I \cdot M = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M, r \text{ 为自然数} \right\}$$

是  $M$  的子模.

特别, 当  $I \cdot M = (0)$  (零模, 只有一个元素 0 的  $A$ -模) 时, 可以对于  $\bar{a} \in A/I$  ( $a \in A$ ) 及  $m \in M$ , 定义运算  $\bar{a}m = am$ , 容易验证该

定义与  $\bar{a}$  中代表元  $a$  的选取无关, 由此使  $M$  成为环  $A/I$  上的模.

例 1 设  $M$  是  $A$ -模, 令

$$Ann(M) = \{a \in A \mid aM = (0)\},$$

则它是环  $A$  的理想, 叫做模  $M$  的零化理想. 显然  $Ann(M) \cdot M = (0)$ , 因此  $M$  可看做  $A/Ann(M)$ -模.

设  $M$  为  $A$ -模,  $N$  为  $M$  的  $A$ -子模. 根据定义,  $N$  是 Abel 群  $M$  的子群, 从而有加法商群  $M/N$ , 它的元素具有形式  $x + N$  ( $x \in M$ ), 记为  $\bar{x}$ , 其加法为  $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ . 现在对于  $a \in A$ , 定义  $a\bar{x} = \overline{ax}$ , 因而  $M/N$  成为  $A$ -模, 叫做  $M$  对于子模  $N$  的  $A$ -商模.

例 2 设  $M$  为  $A$ -模,  $I$  为  $A$  中理想, 则商模  $M/I \cdot M$  是  $A$ -模. 又  $I \cdot M / I \cdot M = (0)$ , 故  $M/I \cdot M$  又可看做是环  $A/I$  上的模. 易见  $M/I \cdot M$  作为  $A$ -模, 它的模结构可以等同于商环  $A/I$  上的模结构.

特别, 取环  $A = \epsilon_n = \{(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为 } C^\infty \text{ 函数芽}\}$ ,  $I = \mathcal{M}_n$  (环  $\epsilon_n$  的极大理想), 则  $\epsilon_n / \mathcal{M}_n \cong \mathbb{R}$ . 现假定  $M$  是  $\epsilon_n$ -模, 则  $M / \mathcal{M}_n \cdot M$  是实向量空间.

设  $A, B$  为环,  $f: A \rightarrow B$  为环同态. 假定  $M$  为  $B$ -模. 对于  $a \in A, m \in M$ , 定义  $am = f(a)m$ , 容易验证  $M$  由此成为  $A$ -模. 这是改变系数环的常用手法.

例 3 设  $\phi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$  定义为  $\phi(x, y) = (x^2, y)$ . 记  $\phi$  的源空间与靶空间上的  $C^\infty$  函数芽环分别为  $\epsilon_s$  和  $\epsilon_t$ , 则  $C^\infty$  芽  $\phi$  诱导环同态

$$\phi^*: \epsilon_t \rightarrow \epsilon_s,$$

$$\lambda \mapsto \phi^* \lambda = \lambda \circ \phi.$$

借助于  $\phi^*$ ,  $\epsilon_s$  可视为  $\epsilon_t$ -模, 其纯量乘法定义为: 对每一  $g \in \epsilon_s$ ,  $\lambda \in \epsilon_t$ ,  $\lambda g = (\phi^* \lambda) \cdot g$ . 据 §4.1 例 3, 对任意  $g \in \epsilon_s$ , 存在  $s_1, s_2 \in \epsilon_t$ , 使得

$$g(x, y) = xs_1(x^2, y) + s_2(x^2, y),$$

或

$$g = x\phi^*s_1 + \phi^*s_2,$$

这说明  $\epsilon_s$  作为  $\epsilon_t$ -模是有限生成的, 生成元为 1 和  $x$ .

一般来说, 若  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为任意  $C^\infty$  映射芽, 则  $f$  诱导环同态

$$f^*: \epsilon_p \rightarrow \epsilon_n, \lambda \mapsto \lambda \circ f = f^* \lambda.$$

假定  $M$  是一个  $\epsilon_n$ -模, 借助于环同态  $f^*$  可赋予  $M$  以  $\epsilon_p$ -模结构, 规定  $\lambda \cdot m = (f^* \lambda) \cdot m, \lambda \in \epsilon_p, m \in M$ . 易见

$$\mathcal{M}_p \cdot M = f^* \mathcal{M}_p \cdot M, \quad (1)$$

其中  $f^* \mathcal{M}_p = \langle f_1, \dots, f_p \rangle \epsilon_n$ , 它是由  $f$  的分量函数  $f_1, \dots, f_p$  生成的  $\epsilon_n$  中理想. 注意等式(1)左边视为  $\epsilon_p$ -子模, 因它用到  $\epsilon_p$ -模结构, 而等式(1)右边为  $\epsilon_n$ -子模. 另外,  $f^* \mathcal{M}_p$  与  $f^*(\mathcal{M}_p)$  也不同,  $f^* \mathcal{M}_p$  为  $\epsilon_n$  的理想, 但  $f^*(\mathcal{M}_p)$  指的是  $\mathcal{M}_p$  在  $f^*$  下的像, 它是  $\epsilon_n$  的一个子环, 一般来说不是  $\epsilon_n$  的理想.

**例 4** 设  $\pi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), (x, y) \mapsto y$  为投射芽, 则  $\pi$  诱导环同态  $\pi^*: \epsilon_y \rightarrow \epsilon_{x, y}$ , 可将  $\epsilon_y$  等同于  $\epsilon_{x, y}$  的子环  $\pi^* \epsilon_y$ . 令  $M = \epsilon_{x, y}$ , 它自然是有限生成的  $\epsilon_{x, y}$ -模, 但  $M$  作为  $\epsilon_y$ -模不是有限生成的. 因为

$$M/\mathcal{M}_y \cdot M = \epsilon_{x, y}/\pi^* \mathcal{M}_y \cdot \epsilon_{x, y} \cong \epsilon_x,$$

并且  $\epsilon_x$  作为实向量空间是无穷维的, 应用推论 3.1.1 可知  $M$  不是有限生成的  $\epsilon_y$ -模.

在奇点理论中, 一个重要的问题是: 给定  $C^\infty$  芽  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 并假定  $M$  是一个  $\epsilon_n$ -模, 问在什么条件下可保证  $M$  作为  $\epsilon_p$ -模是有限生成的呢? 易见此时  $M$  必为有限生成的  $\epsilon_n$ -模, 并且

依推论 3.1.1,  $M/\mathcal{M}_p \cdot M$  必为有限维实向量空间. Malgrange 预备定理告诉我们, 上述必要条件也是充分条件.

**定理 5.1.1** (Malgrange 预备定理) 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽,  $M$  为有限生成的  $\epsilon_p$ -模, 则下列条件是等价的:

- (a)  $M$  作为  $\epsilon_p$ -模是有限生成的,
- (b)  $M/f^* \mathcal{M}_p \cdot M$  是有限维实向量空间.

利用推论 3.1.1, 还可以更精确地叙述, 即下列诸条件等价:

(a<sub>1</sub>) 作为  $\epsilon_p$ -模,  $M$  由  $m_1, \dots, m_k$  生成, 即  $M = \epsilon_p \{m_1, \dots, m_k\}$ ,

(b<sub>1</sub>) 实向量空间  $M/f^* \mathcal{M}_p \cdot M$  由诸  $m_i$  的投影  $\bar{m}_i$  生成, 即  $M/f^* \mathcal{M}_p \cdot M = \mathbb{R}\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k\}$ ,

并且条件(b<sub>1</sub>)可改写为

(c<sub>1</sub>)  $\mathbb{R}\{m_1, \dots, m_k\} + f^* \mathcal{M}_p \cdot M = M$ .

## § 5.2 预备定理的证明

本节将预备定理的证明分为 3 步来完成, 以便于读者理解. 我们将由除法定理来推导 Malgrange 预备定理, 但本质上说, 这两个定理是等价的. 首先考察一个特殊情形.

**命题 5.2.1** 设  $\pi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto y = (y_1, \dots, y_n)$  为标准投影芽, 记  $\langle P \rangle_{\epsilon_{x,y}}$  为由  $P \in \epsilon_{x,y}$  生成的  $\epsilon_{x,y}$  中理想. 令  $M = \epsilon_{x,y} / \langle P \rangle_{\epsilon_{x,y}}$ , 则下列条件等价:

- (i)  $M$  是有限生成的  $\epsilon_y$ -模,
- (ii)  $M/\mathcal{M}_y \cdot M$  为有限维实向量空间,
- (iii) 函数芽  $P$  关于  $x$  是有限阶正则的.

**证**  $M$  是有限生成的  $\epsilon_{x,y}$ -模, 因为有限生成模的商模是有限生成的.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 据推论 3.1.1.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) 因

$$\mathcal{M}_y \cdot M \cong (\mathcal{M}_y \cdot \epsilon_{x,y} + \langle P \rangle_{\epsilon_{x,y}}) / \langle P \rangle_{\epsilon_{x,y}},$$

$$M / \mathcal{M}_y \cdot M \cong \epsilon_{x,y} / \langle P, y_1, \dots, y_n \rangle_{\epsilon_{x,y}} \cong \epsilon_x / \langle P(x, 0) \rangle_{\epsilon_x},$$

由(ii),  $\dim_{\mathbb{R}} \epsilon_x / \langle P(x, 0) \rangle_{\epsilon_x} < +\infty$ , 这说明理想  $\langle P(x, 0) \rangle_{\epsilon_x}$  在  $\epsilon_x$  中具有有限余维. 据推论 1.1.2, 存在正整数  $r$ , 使得

$$\langle P(x, 0) \rangle_{\epsilon_x} \supset \mathcal{M}_x^r.$$

记使上述包含关系成立的最小整数为  $k$ , 即  $\langle P(x, 0) \rangle_{\epsilon_x} \supset \mathcal{M}_x^k$ , 但  $\langle P(x, 0) \rangle_{\epsilon_x} \supset \mathcal{M}_x^{k-1}$ , 由此立即可推得

$$P(x, 0) = x^k p(x),$$

其中  $p \in \epsilon_x$  且  $p(0) \neq 0$ , 于是  $P$  关于  $x$  是  $k$  阶正则的.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) 假定  $P \in \epsilon_{x,y}$  关于  $x$  是  $k$  阶正则的. 设  $\bar{f} \in M$ , 其代表为  $f \in \epsilon_{x,y}$ . 用  $P$  除  $f$ , 根据除法定理, 有

$$f(x, y) = P(x, y)Q(x, y) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(y)x^j,$$

投影到  $M$  中, 因  $P \cdot Q \in \langle P \rangle_{\epsilon_{x,y}}$ , 故

$$\bar{f} = \sum_{j=0}^{k-1} r_j \cdot \bar{x}^j, \quad r_j \in \epsilon_y,$$

这说明  $\bar{x}^j \in M (j = 0, \dots, k-1)$  是  $\epsilon_y$ -模  $M$  的一组生成元.

**注** 我们利用除法定理证明了预备定理的一种特殊情形. 值得指出的是, 这一特殊情形实际上可推出除法定理. 留作读者练习.

**命题 5.2.2** 设  $\pi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto y$  为投影芽,  $M$  为有限生成的  $\epsilon_{x,y}$ -模, 则下列条件等价:

(i) 借助于  $\pi^*$ ,  $M$  作为  $\epsilon_y$ -模是有限生成的,

(ii)  $M/\mathcal{M}_y \cdot M = M/\pi^* \mathcal{M}_y \cdot M$  是有限维实向量空间.

证 只需证(ii)  $\Rightarrow$  (i). 选取  $\epsilon_{x, y}$ -模  $M$  的一组生成元  $\{m_1, \dots, m_k\}$ , 使得诸  $m_i$  在  $M/\mathcal{M}_y \cdot M$  中的投影  $\bar{m}_i$  生成这一实向量空间, 即

$$M/\mathcal{M}_y \cdot M = \mathbb{R}\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k\}.$$

显然该式等价于

$$M = \mathbb{R}\{m_1, \dots, m_k\} + \pi^* \mathcal{M}_y \cdot M,$$

因而每一  $xm_i \in M$  ( $x \in \epsilon_{x, y}$  为坐标函数芽) 可写为

$$xm_i = \sum_{j=1}^k c_i^j m_j + \sum_{j=1}^k \lambda_i^j m_j, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

其中  $c_i^j \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i^j \in \pi^* \mathcal{M}_y$  (即  $\lambda_i^j(x, 0) = 0$  对每一  $x \in (\mathbb{R}, 0)$ ). 方程组(1)可用矩阵形式表示成

$$T(m_1, \dots, m_k)^t = 0, \quad (2)$$

其中  $T = (\delta_i^j x - c_i^j - \lambda_i^j)$  为  $k \times k$  矩阵且每一  $\delta_i^j x - c_i^j - \lambda_i^j \in \epsilon_{x, y}$ , 这里  $\delta_i^j$  为 Kronecker 符号. 用  $T$  的伴随矩阵左乘方程(2)的两边可导出

$$\det T \cdot m_i = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3)$$

令  $P(x, y) = \det T$ . 因  $T(x, 0) = (\delta_i^j x - c_i^j)$ , 故  $P(x, 0) = \det T(x, 0)$  是  $x$  的实系数  $k$  次多项式, 并且最高项系数为 1, 因此  $P(x, y)$  关于  $x$  是  $r (\leq k)$  阶正则的.

任取  $m \in M$ , 则

$$m = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_i, \quad \alpha_i \in \epsilon_{x, y}.$$

应用除法定理,

$$\alpha_i = P \cdot Q_i + \sum_{j=0}^{r-1} h_{ij} x^j,$$

其中  $h_{ij} \in \epsilon_y$  ( $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 0, \dots, r-1$ ), 于是

$$m = \sum_{i=1}^k (P \cdot Q_i) m_i + \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=0}^{r-1} h_{ij} x^j \right) m_i,$$

并且依(3)式, 上式化简为

$$m = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{r-1} h_{ij} x^j m_i,$$

这说明  $M$  作为  $\epsilon_y$ -模由

$$m_{ij} = x^j m_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, r-1$$

生成. 证毕.

命题 5.2.1 是命题 5.2.2 的特殊情形. 现在再将命题 5.2.2 推广, 得

**命题 5.2.3** 设  $\pi: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto y$  为投影芽, 这里  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . 假定  $M$  为有限生成的  $\epsilon_{x, y}$ -模, 那么下列条件等价:

- (i)  $M$  作为  $\epsilon_y$ -模是有限生成的,
- (ii) 实向量空间  $M/\pi^* \mathcal{M}_y \cdot M$  是有限维的.

**证** 只需证 (ii)  $\Rightarrow$  (i), 我们对维数  $p$  使用归纳法. 当  $p = 1$  时, 这就是命题 5.2.2. 假定在维数为  $p-1$  时结论成立. 考虑投影

$$(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\pi_1} (\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^n,$$

$$(x_1, \dots, x_p, y) \mapsto (x_2, \dots, x_p, y) \mapsto y,$$

记  $x' = (x_2, \dots, x_p)$ . 显然  $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ ,  $\pi^* = \pi_1^* \circ \pi_2^*$ , 这里

$$\epsilon_y \xrightarrow{\pi_2^*} \epsilon_{x', y} \xrightarrow{\pi_1^*} \epsilon_{x, y}.$$

$\epsilon_{x, y}$ -模  $M$  借助于  $\pi_1^*$  看做  $\epsilon_{x', y}$ -模, 再借助于  $\pi_2^*$  视为  $\epsilon_y$ -模, 并且将  $\mathcal{M}_y$  等同于  $\pi_2^* \mathcal{M}_y \subset \mathcal{M}_{x', y}$ . 现在由条件 (ii) 可推出  $M/\mathcal{M}_{x', y} \cdot M$

为有限维实向量空间. 应用命题 5.2.2 于  $\pi_1$ , 说明  $M$  作为  $\epsilon_{x,y}$ -模是有限生成的. 然后应用归纳假设于  $\pi_2$ ,  $M$  应为有限生成的  $\epsilon_y$ -模.

**定理 5.1.1 的证明** 只要证  $(b) \Rightarrow (a)$ . 运用对  $\text{graph } f$  (的图) 所使用的技巧, 将  $f$  分解为一个单射  $i$  接上一个投射  $\pi$  的复合:

$$(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{i} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^p, 0),$$

$$x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x).$$

因  $i$  是浸入芽, 故  $i^* : \epsilon_{x,y} \rightarrow \epsilon_x$  为满同态. 今假定  $M$  是有限生成的  $\epsilon_x$ -模, 借助于  $i^*$ ,  $M$  作为  $\epsilon_{x,y}$ -模必然是有限生成的. 注意到

$$M/f^* \mathcal{M}_y \cdot M = M/\pi^* \mathcal{M}_y \cdot M,$$

由定理条件(b)及命题 5.2.3 可推出  $M$  是有限生成的  $\epsilon_y$ -模.

**例 1** 设  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  定义为  $f(x_1, x_2) = (y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2)$ , 则

$$f^* \mathcal{M}_y = \langle x_1^2, x_2^2 \rangle \subset \epsilon_x.$$

容易验证  $\mathcal{M}_x^3 \subset f^* \mathcal{M}_y$ , 并且

$$f^* \mathcal{M}_y + \mathbb{R}\{1, x_1, x_2, x_1 x_2\} = \epsilon_x.$$

令  $M = \epsilon_x$ , 则  $M$  是有限生成的  $\epsilon_x$ -模, 上式相当于定理 5.1.1 中条件(c<sub>1</sub>), 因此  $M$  作为  $\epsilon_y$ -模是有限生成的, 以  $1, x_1, x_2, x_1 x_2$  为生成元. 于是对任意  $g \in \epsilon_x$ ,  $g$  可表为

$$g = f^* \alpha + f^* \beta \cdot x_1 + f^* \gamma \cdot x_2 + f^* \delta \cdot x_1 x_2,$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \epsilon_y$ , 或

$$g(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2, x_2^2) + \beta(x_1^2, x_2^2)x_1 + \gamma(x_1^2, x_2^2)x_2 + \delta(x_1^2, x_2^2)x_1 x_2.$$

**例 2** 设  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  定义为  $f(x_1, x_2) = (y_1 = x_1^2 - x_2^2, y_2 = 2x_1 x_2)$ , 此时

$$f^* \mathcal{M}_y = \langle x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2 \rangle \subset \epsilon_x.$$

容易验证

$$f^* \mathcal{M}_y + \mathbb{R}\{1, x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2\} = \epsilon_x,$$

由定理 5.1.1,  $\epsilon_x$  作为环  $\epsilon_y$  上的模是有限生成的, 以  $1, x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2$  为一组生成元.

### § 5.3 应用

#### 5.3.1 应用于函数芽的形变理论

记  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  中的点为  $(t, x)$ . 设  $i: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0)$ ,  $i(x) = (0, x)$  为包含映射芽, 则  $i$  诱导环同态  $i^*: \epsilon_{t, x} \rightarrow \epsilon_x$ ,  $\lambda \mapsto i^* \lambda = \lambda \circ i$ , 它是满同态. 简记  $i^* \lambda = \lambda_0$ , 则  $\lambda_0(x) = \lambda(0, x)$ , 即  $\lambda_0 = \lambda|_{t=0}$ , 因此  $i^*$  是限制同态. 若  $I$  为  $\epsilon_{t, x}$  中理想, 将  $I$  中的成员在  $t=0$  上的限制所成之集记为  $I_0$ , 易见  $I_0$  为  $\epsilon_x$  中理想.

**定理 5.3.1** 设  $I$  为  $\epsilon_{t, x}$  中理想,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \epsilon_{t, x}$ , 则下列条件等价:

- (i)  $I_0 + \mathbb{R}\{\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{r,0}\} = \epsilon_x$ , 其中  $\lambda_{i,0} = (\lambda_i)_0$ ,
- (ii)  $I + \mathcal{M}_t \cdot \epsilon_{t, x} + \mathbb{R}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \epsilon_{t, x}$ ,
- (iii)  $I + \epsilon_t\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \epsilon_{t, x}$ .

**证** 令  $M = \epsilon_{t, x}/I$ , 则  $M$  是有限生成的  $\epsilon_{t, x}$ -模. 记  $\pi: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  为标准投影. 借助于  $\pi^*$ ,  $M$  可看做  $\epsilon_t$ -模. 因

$$M/\pi^* \mathcal{M}_t \cdot M = M/\mathcal{M}_t \cdot M \cong \epsilon_{t, x}/(I + \mathcal{M}_t \cdot \epsilon_{t, x}) \cong \epsilon_x/I_0,$$

故条件(i)和(ii)均等价于(a)实向量空间  $M/\mathcal{M}_t \cdot M$  由诸  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) 在该空间中的投影所生成. 而条件(iii)等价于(b)  $M$  作为

$\epsilon_t$ -模是有限生成的,生成元为诸  $\lambda_i (i=1, \dots, r)$  在  $M$  中的投影. 据定理 5.1.1(或由命题 5.2.3 及推论 3.1.1), (a) 与 (b) 等价.

**注** 本定理结果在讨论具有有限余维的实值函数芽的通用形变时发挥作用.

**例 1** 记  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  中的点为  $(t, x)$ . 设  $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  满足  $f(0, x) = x^p$ , 即  $f_0(x) = x^p$ , 这里  $p > 1$  为自然数,  $f$  叫做  $f_0$  的  $n$ -参数形变(见定义 6.1.1). 设  $I$  为  $\epsilon_{t, x}$  中理想, 由  $\frac{\partial f}{\partial x}$  生成, 则  $I_0 (\subset \epsilon_x)$  由  $(\frac{\partial f}{\partial x})_0 = px^{p-1}$  生成, 并且

$$I_0 + \mathbb{R}\{1, x, \dots, x^{p-2}\} = \epsilon_x.$$

由定理 5.3.1 知,

$$I + \epsilon_t \{1, x, \dots, x^{p-2}\} = \epsilon_{t, x}.$$

**例 2** 记  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$  中的点为  $(t, x)$ , 其中  $x = (x_1, x_2)$ . 设  $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  满足  $f(0, x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1 x_2^2$ ,  $f$  叫做  $f_0$  的  $n$ -参数形变. 令

$$I = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle \epsilon_{t, x},$$

请读者验证

$$I_0 + \mathbb{R}\{1, x_1, x_2, x_1^2\} = \epsilon_x,$$

于是有

$$I + \epsilon_t \{1, x_1, x_2, x_1^2\} = \epsilon_{t, x}.$$

### 5.3.2 在映射芽的开折理论中的应用

记  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  中的点为  $(t, x)$ , 其中  $t = (t_1, \dots, t_p)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . 假定  $M$  是有限生成的  $\epsilon_{t, x}$ -模, 则商模  $M_0 = M/\mathcal{M}_t \epsilon_{t, x} \cdot M$  是一个  $\epsilon_x$ -模(因  $\epsilon_{t, x}/\mathcal{M}_t \cdot \epsilon_{t, x} = \epsilon_x$ ), 称为由  $M$  中的

成员在  $t = 0$  上的限制所成之模.

**定理 5.3.2** 设  $M$  是有限生成的  $\epsilon_{u, x}$ -模,  $N$  为  $M$  的子模, 又  $m_1, \dots, m_k \in M$ , 则下列条件等价:

$$(i) N + \epsilon_t \{m_1, \dots, m_k\} = M,$$

(ii)  $N_0 + \mathbb{R}\{m_{1,0}, \dots, m_{k,0}\} = M_0$ , 其中  $N_0$  是  $N$  在  $M_0$  中的投影,  $m_{i,0}$  为  $m_i$  在  $M_0$  中投影.

证明提示: 与定理 5.3.1 的证法相同.

下面介绍预备定理的一个重要应用, 它在映射芽的开折理论研究中常常用到.

设  $f_0: (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0)$  为  $C^\infty$  芽. 如果  $F: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ ,  $(u, x) \mapsto (u, f(u, x))$  使得  $f(0, x) = f_0(x)$ , 那么  $F$  叫做  $f_0$  的  $p$ -参数开折(见定义 8.1.1). 令  $i_s: (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0)$ ,  $x \mapsto (0, x)$  和  $i_t: (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0)$ ,  $y \mapsto (0, y)$  为包含映射芽, 则

$$F \circ i_s = i_t \circ f_0, \quad i_s^* \circ F^* = f_0^* \circ i_t^*.$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0) \\ \uparrow i_s & & \uparrow i_t \\ (\mathbb{R}^s, 0) & \xrightarrow{f_0} & (\mathbb{R}^t, 0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \epsilon_{u, x} & \xleftarrow{F^*} & \epsilon_{u, y} \\ \downarrow i_s^* & & \downarrow i_t^* \\ \epsilon_x & \xleftarrow{f_0^*} & \epsilon_y \end{array}$$

此外,  $\text{Ker } i_s^* = \mathcal{M}_u \cdot \epsilon_{u, x}$ ,  $\text{Ker } i_t^* = \mathcal{M}_u \cdot \epsilon_{u, y}$ .

假设  $M$  是有限生成的  $\epsilon_{u, x}$ -模. 令  $M_0 = M / \mathcal{M}_u \cdot \epsilon_{u, x} \cdot M$ , 则  $M_0$  是环  $\epsilon_{u, x} / \mathcal{M}_u \cdot \epsilon_{u, x} = \epsilon_x$  上的模(由  $M$  中的成员在  $u = 0$  上的限制所成之模). 借助于  $F^*$ ,  $M$  可看做  $\epsilon_{u, y}$ -模. 而借助于  $f_0^*$ ,  $M_0$  可视为  $\epsilon_y$ -模.

**定理 5.3.3**  $M, M_0$  如上所述, 则下列条件是等价的:

(i)  $M$  是有限生成的  $\epsilon_{u, y}$ -模,

(ii)  $M_0$  是有限生成的  $\epsilon_y$ -模.

更确切地,  $M$  作为  $\epsilon_{u,y}$ -模由  $m_1, \dots, m_k$  生成, 即  $M = \epsilon_{u,y} \{m_1, \dots, m_k\} \Leftrightarrow M_0 = \epsilon_y \{m_{1,0}, \dots, m_{k,0}\}$ , 即  $M_0$  作为  $\epsilon_y$ -模由诸  $m_i$  在  $M_0$  中的投影  $m_{i,0}$  生成 ( $i = 1, \dots, k$ ).

**证明概要**  $\epsilon_{u,x}$  中的理想  $F^* \mathcal{M}_{u,y}$  由  $u_1, \dots, u_p$  及  $f$  的分量  $f_1, \dots, f_t$  所生成. 容易验证

$$\begin{aligned} M/F^* \mathcal{M}_{u,y} \cdot M &\cong M_0/\langle f_1(0, x), \dots, f_t(0, x) \rangle_{\epsilon_x} \cdot M_0 \\ &= M_0/f_0^* \mathcal{M}_y \cdot M_0, \end{aligned}$$

然后利用 Malgrange 预备定理.

### 5.3.3 用于对称函数芽的刻画

在高等代数中, 有一个关于对称多项式的基本定理, 即: 每一个对称多项式都可以惟一地表为初等对称多项式的多项式. 说得详细些, 将不定元  $x_1, \dots, x_n$  的下列多项式:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \dots + x_n, \\ \sigma_2(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ &\dots \\ \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_n \\ &\quad + \cdots + x_2 x_3 \cdots x_n, \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned} \tag{1}$$

统称为  $x_1, \dots, x_n$  的初等对称多项式, 其中  $\sigma_k$  是从  $x_1, \dots, x_n$  中取  $k$  个的一切可能乘积的和. 那么该定理说, 域  $\mathbb{F}$  上的每一个对称多项式  $P(x_1, \dots, x_n)$  可以惟一地表成初等对称多项式  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  的系数在  $\mathbb{F}$  中的多项式, 即

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)),$$

其中  $Q$  为  $\mathbb{F}$  上  $n$  个不定元的多项式. 本段试图将该结果从对称多项式推广到对称的  $C^\infty$  函数芽, 为此需要用到 Malgrange 预备定理.

记  $\mathbb{R}^n$  中点  $x$  的坐标为  $x_1, \dots, x_n$ . 将由(1)式定义的函数  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  的芽仍记为  $\sigma_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ . 此外, 用  $S_n$  表示  $\{1, \dots, n\}$  的置换群.

**定义 5.3.1** 设  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数芽. 如果对任意  $\pi \in S_n$ , 有

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}),$$

则称  $f$  为对称的  $C^\infty$  函数芽.

显然, 诸  $\sigma_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  均为对称的光滑函数芽. 令  $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  定义为

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)),$$

并记  $\sigma$  的源空间与靶空间点的坐标分别为  $x = (x_1, \dots, x_n)$  和  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

**引理 5.3.1**  $\epsilon_x$  作为环  $\sigma^* \epsilon_y$  上的模是有限生成的, 并且由坐标函数芽  $x_1, \dots, x_n$  ( $\in \epsilon_x$ ) 的次数小于  $n^n$  的所有单项式构成它的一组生成元.

证 因

$$\prod_{i=1}^n (t - x_i) = t^n - \sigma_1(x) t^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(x),$$

令  $t = x_i$ , 则

$$0 = x_i^n - \sigma_1(x) x_i^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(x),$$

因此

$$x_i^n = \sigma_1(x) x_i^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_n(x),$$

这说明  $x_i^n \in \sigma^* \mathcal{M}_y \cdot \epsilon_x$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 从而

$$\mathcal{M}_x^k \subset \sigma^* \mathcal{M}_y \cdot \epsilon_x, \quad k \geq n^n,$$

于是有

$$\dim_{\mathbb{R}} \epsilon_x / \sigma^* \mathcal{M}_y \cdot \epsilon_x \leq \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_x / \mathcal{M}_x^k < +\infty,$$

并且次数小于  $n^n$  的所有单项式生成实向量空间  $\epsilon_x / \mathcal{M}_x^k$ . 由 Malgrange 预备定理知本引理成立.

G. Glaeser<sup>[24]</sup> 曾经证明对称的光滑函数芽可表示为初等对称函数的光滑函数芽, 这就是下面的

**定理 5.3.4**  $f \in \epsilon_n$  是对称的当且仅当存在  $g \in \epsilon_n$ , 使得  $f = \sigma^* g$ .

**证** 充分性显然, 下证必要性.

记  $\{\phi_1(x), \dots, \phi_r(x)\}$  为由  $x_1, \dots, x_n$  的次数小于  $n^n$  的单项式组成的集. 设  $f \in \epsilon_n$  是对称芽, 据引理 5.3.1, 存在  $g_i \in \epsilon_n$  ( $i = 1, \dots, r$ ), 使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^r (\sigma^* g_i)(x) \phi_i(x) = \sum_{i=1}^r g_i(\sigma(x)) \phi_i(x).$$

注意到  $f$  和  $\sigma_i$  都是对称的, 又置换群  $S_n$  含有  $n!$  个元素, 故由上式得

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^r \left( \sum_{\pi \in S_n} \phi_i(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \right) g_i(\sigma(x)). \quad (2)$$

而多项式

$$p_i(x) = \sum_{\pi \in S_n} \phi_i(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

显然是对称的. 由对称多项式的基本定理, 对每个  $i = 1, \dots, r$ , 存在唯一的多项式  $Q_i$ , 使得

$$p_i(x) = Q_i(\sigma(x)),$$

代入(2)式,得

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^r Q_i(\sigma(x)) g_i(\sigma(x)).$$

令  $g(y) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^r Q_i(y) g_i(y)$ , 则  $g \in \epsilon_y$  且  $f = g \circ \sigma$ .

## 第六章 实值函数芽的形变

第三章介绍了光滑函数芽的单参数形变,初步了解到它在描述可微函数奇点方面所起的作用.本章不只限于单参数形变,对函数芽多参数形变的探讨,给出了奇点理论中一个重要结果,即通用形变定理.该定理告诉我们,一个函数芽具有通用形变,可用该函数芽具有有限余维来刻画,因此又与函数芽的有限决定性密切相关.此外,通用形变还可用横截性来描述.由此可见,形变概念在奇点理论研究中是重要的.本章还将简短地介绍它在突变理论中的应用.

### § 6.1 基本概念

**定义 6.1.1** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数芽. 若  $C^\infty$  函数芽  $F: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  在  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  上的限制为  $f$ , 则  $F$  叫做  $f$  的  $p$ -参数形变.

记  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  的点为  $(t, x)$ , 其中  $t = (t_1, \dots, t_p)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , 那么  $F|_{\{0\} \times \mathbb{R}^n} = f$  意指  $F(0, x) = f(x)$ .

对于芽  $f \in \epsilon_n$  的两个  $p$ -参数形变, 有可能在源空间  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  上施行局部坐标变换, 将其中的一个形变变为另一个, 并且要求上述坐标变换保持参数  $t \in \mathbb{R}^p$  不变, 因此引入下列

**定义 6.1.2** 设  $\phi: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0)$  为微分同胚芽, 满足下列条件:

$$\phi(t, x) = (t, \phi(t, x)), \quad \phi(0, x) = (0, x), \quad (1)$$

则  $\phi$  叫做  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的恒同映射芽的  $p$ -参数开折.

显然  $\pi \circ \phi = \pi$ , 其中  $\pi: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  为标准投影. 这说明  $\phi$

将“纤维” $\{t\} \times \mathbb{R}^n$  映为自身, 因而是保纤维的. 而  $\phi(0, x) = (0, x)$  说明  $\phi$  在纤维  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  上的限制是一个恒同映射芽.

满足条件(1)的微分同胚芽  $\phi \in L_{p+n}$  的全体组成  $L_{p+n}$  的一个子群, 记为  $L_{n, p}$ .

**定义 6.1.3** 设  $f \in \varepsilon_n$ .

(i)  $f$  的两个  $p$ -参数形变  $F$  和  $G$  是同构的, 如果存在  $\phi \in L_{n, p}$ , 使得  $F = G \circ \phi$ .

(ii)  $f$  的形变  $F$  叫做平凡的, 若它同构于常值形变  $(t, x) \mapsto f(x)$ .

对于  $f \in \varepsilon_n$  的任意两个形变, 其参数空间可能不一样. 为便于研究不同形变之间的相互联系, 有必要对参数空间实施变换, 使具有不同参数的形变具有相同参数.

**定义 6.1.4** 设  $F$  是  $f \in \varepsilon_n$  的  $p$ -参数形变. 假定

$$h : (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0), s \mapsto h(s) = t$$

是一个  $C^\infty$  映射芽, 定义  $h^* F : (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$h^* F(s, x) = F(h(s), x),$$

它叫做由  $h$  诱导的  $F$  的拉回. 显然,  $h^* F$  是  $f$  的  $q$ -参数形变, 可表为

$$h^* F = F \circ (h \times 1_{(\mathbb{R}^n, 0)}),$$

其中  $1_{(\mathbb{R}^n, 0)}$  表示  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的恒同映射芽.

设  $f \in \varepsilon_n$  的  $p$ -参数形变  $F$  含有  $p$  个参数  $t_1, \dots, t_p$ , 令

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial F}{\partial t_i}(0, x), \quad i = 1, \dots, p,$$

则  $\dot{F}_i \in \varepsilon_n$  叫做  $F$  关于参数  $t_i$  的初始速度.

若  $G = h^* F$ , 其中  $h : (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽, 则依链法则, 有

$$\dot{G}_i = \sum_{j=1}^p \dot{F}_j \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s_i}(0), \quad i = 1, \dots, q,$$

这说明  $G$  的初始速度属于由诸  $\dot{F}_j$  ( $F$  的初始速度) 生成的实向量空间, 即

$$\dot{G}_i \in \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\}, \quad i = 1, \dots, q.$$

更一般地, 有下列

**命题 6.1.1** 若  $F, G$  分别为  $f \in \epsilon_n$  的  $p$  参数与  $q$  参数形变, 且  $G$  同构于  $h^* F$ , 其中  $h: (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  芽, 则  $\dot{G}_i$  在商空间  $\epsilon_n/J(f)$  中的投影属于由诸  $\dot{F}_j$  在  $\epsilon_n/J(f)$  中的投影生成的实向量空间, 这里  $J(f)$  表  $f$  的 Jacobi 理想.

**证**  $G$  同构于  $h^* F$ , 则存在  $\phi \in L_{n, q}$ , 使得

$$G = h^* F \circ \phi.$$

设  $\phi(s, x) = (s, \psi(s, x))$  且  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ , 则

$$G(s, x) = F(h(s), \psi(h(s), x)).$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_i(x) &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial F}{\partial t_j}(0, x) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s_i}(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(0, x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial s_i}(0, x) \\ &= \sum_{j=1}^p \dot{F}_j(x) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s_i}(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial s_i}(0, x), \end{aligned}$$

因此

$$\dot{G}_i \in J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\}, \quad i = 1, \dots, q.$$

**定义 6.1.5** 设  $f \in \epsilon_n$ .  $f$  的两个  $p$ -参数形变  $F$  和  $G$  叫做等价的, 如果存在微分同胚芽  $h: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 使得  $G$  同构于  $h^* F$ .

形变的等价是一个等价关系, 并且它比形变的同构概念稍为广泛些.

**定义 6.1.6** 设  $f \in \epsilon_n$ .  $f$  的形变  $F$  叫做通用形变, 如果  $f$  的任何其他形变  $G$  同构于  $F$  的某一拉回, 该拉回由参数空间之间的某一适当的  $C^\infty$  映射所诱导.

函数芽  $f$  的形变有无限多个. 如果  $f$  有通用形变, 那么  $f$  的每一个形变都可以由它的通用形变按照某一适当的方式产生出来. 因此寻求一个函数芽具有通用形变的条件是一件很有意义的工作. 首先我们从定义得到下面一些简单事实.

**命题 6.1.2** 若  $f \in \epsilon_n$  容有  $p$ -参数通用形变  $F$ , 则  $f$  的余维数有限, 并且  $\epsilon_n/J(f)$  作为实向量空间由  $F$  的初始速度  $\dot{F}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) 生成,

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\} = \epsilon_n. \quad (2)$$

**证** 任取  $g \in \epsilon_n$ . 考虑  $f$  的 1-参数形变  $G$ ,  $G(s, x) = f(x) + sg(x)$ . 因为  $F$  是通用形变, 因此  $G$  同构于  $h^* F$ , 其中  $h: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 根据命题 6.1.1,

$$g = \dot{G} \in J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\}.$$

由于  $g \in \epsilon_n$  是任取的, 因此(2)式成立.

**命题 6.1.3** 设  $F$  和  $G$  同为  $f \in \epsilon_n$  的  $p$ -参数通用形变, 且  $p = \text{Codim } f$ , 则  $F$  和  $G$  是等价的.

**证** 因  $F$  是通用形变, 故存在  $h: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $v \mapsto h(v) = u$ , 使得  $G$  同构于  $h^* F = H$ . 如果能证明  $h$  是可逆芽, 那么  $F$  与  $G$  等价.

据假设, 形变  $G$  是通用的, 故  $H$  也必为通用的. 此外,

$$\dot{H}_i = \sum_{j=1}^p \frac{\partial h_j}{\partial v_i}(0) \cdot \dot{F}_j, \quad i = 1, \dots, p.$$

由于  $\text{Codim } f = p$ , 根据命题 6.1.2,  $\{\dot{H}_1, \dots, \dot{H}_p\}$  及  $\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\}$  均为实线性无关组, 从而矩阵  $Dh(0) = \left( \frac{\partial h_j}{\partial v_i}(0) \right)$  是可逆的,  $h$  为

微分同胚芽.

**命题 6.1.4** 设  $F$  为  $f \in \varepsilon_n$  的  $p$ -参数通用形变, 其中  $p = \text{Codim } f$ . 又假定  $G$  是  $f$  的  $q$ -参数通用形变,  $q > p$ . 那么存在一个淹没芽  $h: (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 使得  $G$  同构于  $h^* F$ . 于是  $G$  等价于  $F$  的一个常值形变.

**证明提示** 与命题 6.1.3 的证法相同. 留给读者练习.

命题 6.1.2 告诉我们: 若  $f$  容有  $p$ -参数通用形变, 则  $f$  是一个具有有限余维的函数芽, 并且关系式(2)成立. 令人高兴的是其逆亦真, 这就是通用形变定理. 为证明它, 下一节介绍两个引理以做准备.

## § 6.2 两个引理

### 6.2.1 几何引理

设  $F$  为  $f \in \varepsilon_n$  的  $p$ -参数形变,  $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$  为参数. 将  $F$  在子空间  $t_1 = 0$  上的限制记为  $F_1$ , 即  $F_1: (\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  作为  $f$  的  $(p-1)$ -参数形变, 定义为

$$F_1(t_2, \dots, t_p, x) = F(0, t_2, \dots, t_p, x),$$

显然  $F$  是  $F_1$  的 1-参数形变.  $f$  的两个形变  $F$  和  $F_1$  之间的关系由下列引理给出.

**引理 6.2.1** 设  $F$  为  $f \in \varepsilon_n$  的  $p$ -参数形变. 假设在  $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0)$  上存在  $C^\infty$  向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=2}^p \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1)$$

使得

$$X \cdot F = 0, \quad (2)$$

则存在淹没芽  $h: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ , 使得  $F$  同构于  $h^* F_1$ .

证 令向量场

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=2}^p \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i},$$

它定义在  $0 \in \mathbb{R}^p$  的一邻域上, 可看做是  $\mathbb{R}$  上的向量场  $\frac{\partial}{\partial t_1}$  的“提升”. 通过积分向量场  $\xi$  可得到一局部微分同胚

$$\psi: (t_1, \dots, t_p) \mapsto (t_1, \psi_{t_1}(t_2, \dots, t_p)),$$

$\psi \in L_{p-1,1}$ . 令  $h: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$  定义为

$$h(t_1, \dots, t_p) = \psi_{t_1}^{-1}(t_2, \dots, t_p),$$

易见  $h$  是一个淹没芽, 且

$$\begin{aligned} h^* F_1(t_1, \dots, t_p, x) &= F_1(h(t_1, \dots, t_p), x) \\ &= F_1(\psi_{t_1}^{-1}(t_2, \dots, t_p), x) \\ &= F(0, \psi_{t_1}^{-1}(t_2, \dots, t_p), x). \end{aligned}$$

向量场  $X$  是向量场  $\frac{\partial}{\partial t_1}$  的提升, 由条件(1)和(2), 根据命题3.2.1,  $F$  作为  $F_1$  的 1-参数形变是平凡的. 又因为向量场  $X$  是向量场  $\xi$  的提升, 积分向量场  $X$  得到的局部微分同胚具有下列形式:

$$\phi: (t_1, \dots, t_p, x) \mapsto (t_1, \psi_{t_1}(t_2, \dots, t_p), \chi(t, x)),$$

$\phi \in L_{p+n-1,1}$ . 条件(2)是指  $F$  沿  $X$  的积分曲线为常值, 因而

$$F_1 = F|_{t_1=0} = F_{t_1} \circ \phi_{t_1}, \quad \forall t_1 \in (\mathbb{R}, 0),$$

即

$$F(t_1, \psi_{t_1}(t_2, \dots, t_p), \chi(t, x)) = F(0, t_2, \dots, t_p, x).$$

定义  $\Phi: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0)$  为  $\Phi(t, x) = (t, \chi_t^{-1}(x))$ . 易见  $\Phi \in L_{n, p}$ , 并且  $h^* F_1 \circ \Phi = F$ , 即  $F$  同构于  $h^* F_1$ .

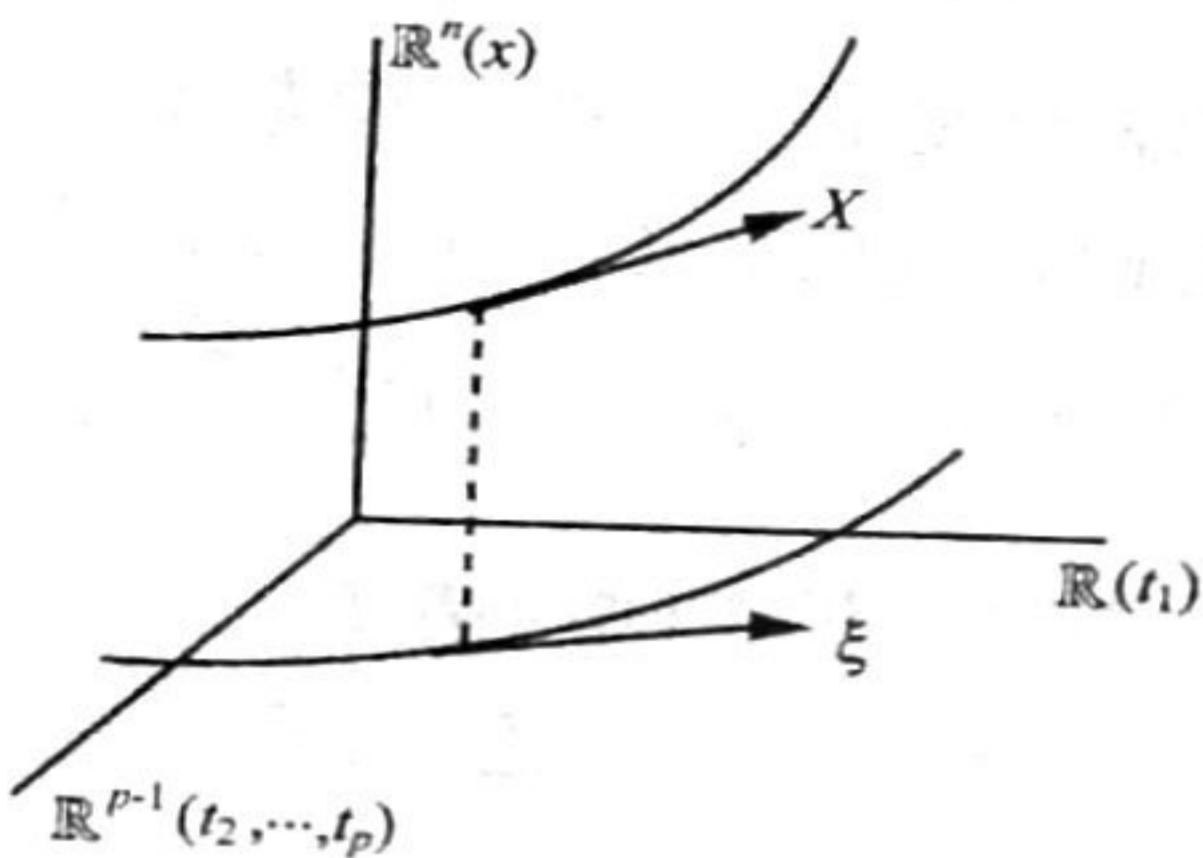


图 6.1

注 本引理的逆命题亦真, 留作读者练习.

### 6.2.2 代数引理

记  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  中的点为  $(t, x)$ , 其中  $t = (t_1, \dots, t_p)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . 设  $F \in \epsilon_{t, x}$  为  $f \in \epsilon_x$  的  $p$ -参数形变, 这里  $\epsilon_x$  表示变量  $x$  的  $n$  元函数芽环,  $\epsilon_{t, x}$  为变量  $t$  与  $x$  的  $(p+n)$  元函数芽环. 记  $J(f)$  为  $f$  的 Jacobi 理想. 形式上定义  $\epsilon_{t, x}$  中理想  $J(F) = \langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle \epsilon_{t, x}$ .

**引理 6.2.2** 设  $F \in \epsilon_{t, x}$  为  $f \in \epsilon_x$  的  $p$ -参数形变,  $J(f)$  与  $J(F)$  如上所述, 则下列条件是等价的:

- (a)  $J(f) + \mathbb{R}\{\lambda_{1, 0}, \dots, \lambda_{r, 0}\} = \epsilon_x$ ,
- (b)  $J(F) + \epsilon_t\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \epsilon_{t, x}$ ,

其中  $\lambda_i \in \epsilon_{t, x}$ ,  $\lambda_{i, 0} \in \epsilon_x$  是  $\lambda_i$  在子空间  $t = 0$  上的限制, 即  $\lambda_{i, 0}(x) = \lambda_i(0, x)$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

**证** 由定理 5.3.1 直接得到, 只要令  $I = J(F)$ . 易见  $I_0 = J(f)$ .

### § 6.3 通用形变定理

**定理 6.3.1** 设  $F$  是  $f \in \epsilon_n$  的  $p$ -参数形变, 则  $F$  是  $f$  的通用形变当且仅当  $F$  的初始速度  $\dot{F}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) 满足下列关系式:

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\} = \epsilon_n. \quad (1)$$

换言之,  $\epsilon_n/J(f)$  作为实向量空间由诸  $\dot{F}_i$  生成.

**证** 必要性已由命题 6.1.2 建立, 现证充分性. 将  $f$  的  $p$ -参数形变  $F$  写为

$$F(u, x) = f(x) + \bar{f}(u, x), \quad \bar{f}(0, x) = 0,$$

其中  $u = (u_1, \dots, u_p)$ . 假设

$$G: (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(v, x) \mapsto f(x) + g(v, x), \quad g(0, x) = 0$$

为  $f$  的任意形变, 且带有  $q$  个参数  $v_1, \dots, v_q$ . 欲证  $F$  是  $f$  的通用形变, 需证  $G$  同构于某一  $h^* F$ , 其中  $h: (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽.

为便于研究, 将  $F$  与  $G$  并成一个“更大”的形变, 做  $F$  与  $G$  的“直和”. 令

$$H: (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(v, u, x) \mapsto f(x) + g(v, x) + \bar{f}(u, x),$$

它是  $f$  的一个  $(p+q)$ -参数形变. 将  $H$  在子空间  $v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_1 = v_2 = \dots = v_q = 0$  上的限制分别记为  $H_1, H_2, \dots, H_q$ , 显然  $H_q = F$ . 又  $H$  在子空间  $u = 0$  上的限制是  $G$ .

断言: 存在淹没芽  $A: (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 使得  $H$  同构于  $A^* F$ . (2)

对  $q$  使用归纳法, 证明存在满足断言的淹没芽  $A$ . 当  $q = 0$

时,  $H(0, u, x) = F(u, x)$ . 令  $A = \text{id} : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为恒同映射芽, 显然  $H$  与  $(\text{id})^* F = F$  是同构的. 假定结论在  $q-1$  时成立, 将  $\mathbb{R}^{q-1}$  嵌入到  $\mathbb{R}^q$  中, 令  $(v_2, \dots, v_q) \mapsto (0, v_2, \dots, v_q)$ , 并令

$$H_1(v_2, \dots, v_q, u, x) = H(0, v_2, \dots, v_q, u, x).$$

依归纳假设, 存在淹没芽  $B : (\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  使得  $B^* F$  与  $H_1$  是同构的, 现证明断言对  $q$  亦成立.

将  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  及  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$  上的  $C^\infty$  函数在原点处的芽所成之环分别记为  $\epsilon_{v, u, x}$  和  $\epsilon_{v, u}$ . 设  $\epsilon_{v, u, x}$  中的理想  $J(H)$  由偏导数  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$  生成 ( $i = 1, \dots, n$ ), 即

$$J(H) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right\rangle \epsilon_{v, u, x}.$$

据代数引理 6.2.2,

$$J(H) + \epsilon_{v, u} \left\{ \frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_p} \right\} = \epsilon_{v, u, x}, \quad (3)$$

事实上, 当  $u = v = 0$  时,

$$J(H)|_{u=v=0} = J(f),$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u_i} \right|_{u=v=0} = F_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

因此由(1)式可推出(3)式.

因为  $\frac{\partial H}{\partial v_1} \in \epsilon_{v, u, x}$ , 由(3)式知, 存在  $X_i(v, u, x) \in \epsilon_{v, u, x}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 以及  $\xi_j(v, u) \in \epsilon_{v, u}$  ( $j = 1, \dots, p$ ), 使得

$$-\frac{\partial H}{\partial v_1} = \sum_{i=1}^n X_i(v, u, x) \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p \xi_j(v, u) \frac{\partial H}{\partial u_j},$$

于是向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial v_1} + \sum_{j=1}^p \xi_j(v, u) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^n X_i(v, u, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

使得

$$X \cdot H = 0,$$

根据几何引理 6.2.1, 存在淹没芽  $C: (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^p, 0)$ , 使得  $H$  同构于  $C^* H_1$ . 然后令  $A = B \circ C$ , 则  $H$  同构于  $A^* F$ , 其中  $A: (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为淹没芽, 断言(2)成立.

令  $h: (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $A$  在子空间  $u=0$  上的限制,  $v \mapsto A(v, 0)$ . 注意到  $H$  在  $u=0$  上的限制为  $G$ , 从而  $G$  同构于  $h^* F$ .

由于所取的  $G$  是  $f$  的任意形变, 依定义,  $F$  是  $f$  的通用形变.

**推论 6.3.1**  $f \in \epsilon_n$  有通用形变当且仅当  $f$  的余维数有限.

**定义 6.3.1** 设  $f \in \epsilon_n$  具有有限余维.  $f$  的通用形变  $F$  叫做万有形变, 如果  $F$  所含的参数数目最少.

易见  $f$  的万有形变所含的参数个数等于  $f$  的余维数. 下面提供一种方式来构作  $f$  的万有形变.

在  $\epsilon_n$  中选取函数  $g_1, \dots, g_p$ , 使得它们在  $\epsilon_n/J(f)$  中的投影形成这一实向量空间的基, 这意思是说  $\mathbb{R}\{g_1, \dots, g_p\} \subset \epsilon_n$  是  $J(f)$  在  $\epsilon_n$  中的补空间, 并且  $p = \text{Codim } f$ , 于是

$$F(t, x) = f(x) + \sum_{i=1}^p t_i g_i(x)$$

便是  $f$  的万有形变.

**例 1** 设  $f$  为 Morse 芽, 则  $J(f) = \mathcal{M}$ , 因此  $f$  的万有形变为  $F(t, x) = f(x) + t$ .

**例 2** 在讨论余维数不大于 5 的函数芽的分类时, 已给出 7 种标准形(见定理 3.4.1 和 3.4.4). 例如尖点的万有形变为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 \pm x^4 + t_1 x^2 + t_2 x + t_3,$$

其他 6 种标准形的万有形变由读者补述.

最后,将命题 6.1.3 与 6.1.4 改述为

**定理 6.3.2** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  是余维数为  $p$  的函数芽, 则

- (i)  $f$  的所有  $p$ -参数万有形变都是等价的,
- (ii) 若  $G$  为  $f$  的任意通用形变, 带有  $q (> p)$  个参数, 则  $G$  等价于万有形变的常值形变(含有  $q - p$  个参数).

## § 6.4 通用形变与横截性

本节讨论通用形变与横截性之间的关系. 首先复述某些有关知识.

设  $f \in \mathcal{E}_n$  具有有限余维, 因而存在正整数  $k$ , 使得

$$\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f).$$

将  $f$  在  $j^k: \mathcal{E}_n \rightarrow J_n^k = \mathcal{E}_n / \mathcal{M}_n^{k+1}$  下的像记为  $j^k f$ , 它表示为  $f$  在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的  $k$  阶 Taylor 多项式. 群  $L_n$  在  $\mathcal{E}_n$  上的作用诱导出 Lie 群  $L_n^k$  在有限维  $C^\infty$  流形  $J_n^k$  上的作用, 并且下列图表可换:

$$\begin{array}{ccc} L_n \times \mathcal{E}_n & \longrightarrow & \mathcal{E}_n \\ j^k \times j^k \downarrow & & \downarrow j^k \\ L_n^k \times J_n^k & \longrightarrow & J_n^k \end{array}$$

因此有  $j^k(L_n \cdot f) = L_n^k \cdot j^k f$ . 据 § 1.3 中公式(7)和(8), 轨道  $L_n \cdot f$  在  $f$  处的切空间及轨道  $L_n^k \cdot j^k f$  在  $j^k f$  处的切空间分别表为

$$T_f(L_n \cdot f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f)$$

和

$$T_{j^k f}(L_n^k \cdot j^k f) = j^k(\mathcal{M}_n \cdot J(f)).$$

一般来说, 有

$$L_n \cdot f \subset (j^k)^{-1}(L_n^k \cdot j^k f),$$

然而我们有下列

**命题 6.4.1** 设  $f \in \epsilon_n$ . 若存在正整数  $k$ , 使得  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$ , 则

$$L_n \cdot f = (j^k)^{-1}(L_n^k \cdot j^k f).$$

证明留作练习.

**注** 本命题实际上是  $f$  为  $k$ - $\mathcal{R}$ -决定的另一表述形式.

现假定  $F: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $f \in \epsilon_n$  的任意形变, 带有  $p$  个参数. 选取  $F$  的一个代表, 仍记为  $F$ , 它定义在点  $0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  的开邻域  $U$  上,

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}, (u, x) \mapsto F(u, x) = F_u(x),$$

$F$  看做是  $n$  元函数  $F_u$  的  $p$  参数族. 对于  $U$  中的每一点  $(u, x)$ , 可考虑  $F_u$  在点  $x$  处的  $k$  阶 Taylor 多项式, 并将它等同于  $J_n^k$  中的元, 于是定义  $C^\infty$  映射芽  $j^k F$  如下.

$$j^k F: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow J_n^k,$$

$$(u, x) \mapsto j^k F_u(x) = F_u \text{ 在点 } x \text{ 处的 } k \text{-导网.}$$

显然

$$j^k F(0, 0) = j^k F_0(0) = j^k f.$$

**定理 6.4.1** 设  $f \in \epsilon_n$  使得

$$\mathcal{M}^{k+1} \subset J(f),$$

其中  $\mathcal{M}$  为  $\epsilon_n$  的极大理想. 假设  $F$  是  $f$  的  $p$ -参数形变, 那么下列条件等价:

- (a)  $F$  是  $f$  的通用形变,
- (b)  $j^k F$  在点  $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  处横截于  $L_n^k \cdot j^k f \subset J_n^k$ .

**证** 据定理 6.3.1, 条件(a)等价于

$$J(f) + \mathbb{R}\{F_1, \dots, F_p\} = \epsilon_n, \quad (1)$$

条件(b)是指

$$Dj^k F(0, 0)(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n) + T_{j^k f}(L_n^k \cdot j^k f) = J_n^k.$$

而

$$Dj^k F(0, 0)(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial j^k F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial j^k F}{\partial x_n}, \frac{\partial j^k F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial j^k F}{\partial u_p} \right\},$$

其中括号内的所有导数均在原点处取值. 又

$$T_{j^k f}(L_n^k \cdot j^k f) = j^k(\mathcal{M} \cdot J(f)),$$

所以条件(b)等价于

$$j^k(\mathcal{M} \cdot J(f)) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial j^k F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial j^k F}{\partial x_n}, \frac{\partial j^k F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial j^k F}{\partial u_p} \right\} = J_n^k. \quad (2)$$

注意到

$$\frac{\partial j^k F}{\partial x_i}(0, 0) = j^k \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

及

$$j^k(\mathcal{M} \cdot J(f)) + \mathbb{R} \left\{ j^k \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, j^k \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} = j^k(J(f)),$$

因而(2)式等价于

$$j^k(J(f)) + \mathbb{R} \left\{ j^k \frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, j^k \frac{\partial F}{\partial u_p} \right\} = J_n^k,$$

或

$$j^k(J(f)) + \mathbb{R} \{ j^k F_1, \dots, j^k F_p \} = J_n^k. \quad (3)$$

在(1)式两边取  $k$ -导网得(3)式. 又(3)式可写为

$$j^k(J(f) + \mathbb{R} \{ F_1, \dots, F_p \}) = j^k \epsilon_n,$$

依假设,  $J(f) \supseteq \mathcal{M}^{k+1}$ , 故由上式可推出

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p\} = \epsilon_n$$

即由(3)式推得(1)式. 从而(a)  $\Leftrightarrow$  (b).

## § 6.5 位势芽的通用形变

### 6.5.1 位势芽的形变

设  $f \in \epsilon_n$ . 将群  $L_n$  作用下过  $f$  的轨道  $L_n f$  记为  $\Gamma f$ , 并将 Lie 群  $L_n^k$  的一条过  $j^k f$  的轨道  $L_n^k \cdot j^k f$  记作  $\Gamma^k f$ , 显然  $j^k(\Gamma f) = \Gamma^k f$ . 令

$$\bar{\Gamma} f = \Gamma f + \mathbb{R}.$$

设  $g \in \bar{\Gamma} f$ , 则  $g$  与某一  $h \in \Gamma f$  相差一常数. 因  $h(0) = f(0)$ , 所以该常数  $= g(0) - h(0) = g(0) - f(0)$ , 于是

$$\bar{\Gamma} f = \{g \in \epsilon_n \mid g - g(0) + f(0) \in \Gamma f\}.$$

$\bar{\Gamma} f$  在  $j^k: \epsilon_n \rightarrow J_n^k$  下的像

$$j^k(\bar{\Gamma} f) = j^k(\Gamma f + \mathbb{R}) = \Gamma^k f + \mathbb{R},$$

因此规定  $\bar{\Gamma}^k f = \Gamma^k f + \mathbb{R}$ .

现给出一些术语如下. 将  $\epsilon_n / \mathbb{R}$  的成员叫做在  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的位势芽. 两个函数芽  $f, g \in \epsilon_n$  确定相同的位势, 如果它们只相差一常数;  $f$  与  $g$  确定同构的位势, 若  $g \in \bar{\Gamma} f$  或  $\bar{\Gamma} f = \bar{\Gamma} g$ . 由于  $\epsilon_n / \mathbb{R} \cong \mathcal{M}_n$ , 因此极大理想  $\mathcal{M}_n$  中的每一成员均可作为位势芽的代表, 或简称为位势芽.

以  $f \in \epsilon_n$  为代表的位势芽的  $p$ -参数形变可用  $f$  的  $p$ -参数形变  $F (\in \epsilon_{p+n})$  作为代表. 如果函数芽  $G (\in \epsilon_{p+n})$  使得  $G - F = C$ , 其中  $C$  是一个仅依赖于参数  $u \in (\mathbb{R}^p, 0)$  的函数芽, 则说  $G$  和  $F$  确定(以  $f$  为代表的)位势芽的相同形变; 如果  $G$  同构于  $h^* F + C$ , 其中  $h$  是参数空间之间的局部微分同胚,  $C$  如上所述, 则说  $F$  与  $G$  作为位势芽的形变是等价的.

现假定  $f \in \mathcal{M}_n^2$  具有有限余维. 若  $g_1, \dots, g_r \in \epsilon_n$  使得

$$J(f) \oplus \mathbb{R}\{g_1, \dots, g_r\} = \mathcal{M}_n,$$

其中  $g_1, \dots, g_r$  组成  $J(f)$  在  $\mathcal{M}_n$  中的补空间的基,  $\oplus$  表直和. 对任意  $p \geq r$ , 令  $F_p$  为  $f$  的  $p$ -参数形变, 定义为

$$F_p(u_1, \dots, u_p, x) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i g_i(x),$$

显然  $F_p + t$  ( $t \in \mathbb{R}$  为添加的参数) 是  $f$  的万有形变.

由于  $f$  具有有限余维, 故存在正整数  $k$ , 使得  $\mathcal{M}_n \cdot J(f) \supset \mathcal{M}_n^{k+1}$ , 应用定理 6.4.1 可得到

**命题 6.5.1** 设  $G$  为  $f \in \mathcal{M}_n^2$  的  $p$ -参数形变, 又  $J(f) \supset \mathcal{M}_n^{k+1}$ . 若  $j^k G: (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow J_n^k$  在点  $0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$  横截于  $\bar{f}^k$ , 则  $G$  和  $F_p$  作为位势芽的形变是等价的.

证明是容易的, 留作练习.

我们将满足上述横截性条件的形变(例如  $G$  和  $F_p$ ) 叫做位势芽  $f$  的  $p$ -参数万有形变.

**例 1** 设  $f \in \epsilon_n$  为 Morse 芽, 则  $f$  的任意一个常值形变均表示位势芽的万有形变.

**例 2** 设芽  $f(x, y) = x^3 + y^3$ , 则

$$J(f) \oplus \mathbb{R}\{x, y, xy\} = \mathcal{M}_2,$$

因此位势芽  $f$  的万有形变为

$$F(u_1, u_2, u_3, x, y) = x^3 + y^3 + u_1 xy + u_2 x + u_3 y.$$

**例 3** 将余维数不大于 5 的函数芽  $f \in \mathcal{M}_n^2$  视为位势芽, 它们的万有形变等价于下列芽之一.

**注** 关于奇点  $f \in \mathcal{M}_n^2$  的余维数, 有些作者采用另外的定义. 例如 Th. Bröcker 和 L. Lander 在他们的著作<sup>[9]</sup> 中, 将

$$c(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n / J(f) < +\infty$$

编号	名称	$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n / J(f)$	余秩	万有形变( $\delta_i = \pm 1$ )
(0)	Morse 芽	0	0	$\sum_{i=1}^n \delta_i x_i^2$
(1)	折叠	1	1	$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + x^3 + u_1 x$
(2)	尖点	2	1	$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 \pm x^4 + u_1 x^2 + u_2 x$
(3)	燕尾	3	1	$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + x^5 + u_1 x^3 + u_2 x^2 + u_3 x$
(4)	蝴蝶	4	1	$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 \pm x^6 + u_1 x^4 + u_2 x^3 + u_3 x^2 + u_4 x$
(5)	椭圆脐点	3	2	$\sum_{i=1}^{n-2} \delta_i x_i^2 + x^3 - xy^2 + u_1 (x^2 + y^2) + u_2 x + u_3 y$
(6)	双曲脐点	3	2	$\sum_{i=1}^{n-2} \delta_i x_i^2 + x^3 + xy^2 + u_1 (x^2 - y^2) + u_2 x + u_3 y$
(7)	抛物脐点	4	2	$\sum_{i=1}^{n-2} \delta_i x_i^2 + x^2 y \pm y^4 + u_1 y^3 + u_2 y^2 + u_3 x + u_4 y$

称为  $f$  的余维数. Thom 在他的早期研究中, 曾用上述  $c(f)$  作为奇点  $f$  的余维数. 从上表可见,  $c(f)$  与表中奇点  $f$  的万有形变所含的形变参数个数相同, 或说与 Thom 初等突变模型(参看本节第三段)的控制参数(亦称外参数)个数相一致. 易见,  $c(f)$  和  $\text{Codim } f$ (见定义 3.2.4)相差 1, 即  $\text{Codim } f = c(f) + 1$ .

### 6.5.2 $C^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 中的一个通有性质

设  $F: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, x) \mapsto F(u, x) = F_u(x)$  为  $C^\infty$  函数, 它可以看做变量  $x$  的  $n$  元实值函数  $F_u$  的 4-参数族,  $u \in \mathbb{R}^4$  为参数. 设想  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  表示四维时空空间中的点(例如  $u_1$  表时间,  $(u_2, u_3, u_4)$  代表生活的三维空间中点的位置),  $x \in \mathbb{R}^n$  为描述系统的状态变量,  $F$  表示系统的位能. 显然考虑这样的函数具有实际意义, 并且立即可看到它与 Thom 的初等突变

模型有关联. 本段讨论所有的  $C^\infty$  函数  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  组成之集  $C^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , 并赋予了拓扑结构(见 § 2.4).

**定理 6.5.1** 对于  $C^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  而言, 下列性质是通有的: 设  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , 则

- (i) 对每一  $(u_0, x_0) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n$ ,  $F_{u_0}$  在点  $x_0$  处的芽(看做  $\epsilon_n$  中一元)的余维数不大于 5,
- (ii)  $F$  在点  $(u_0, x_0)$  处的芽是以  $F_{u_0}$  所确定的位势芽的通用形变.

**证** 首先注意到余维数不大于 5 的函数芽  $f \in \epsilon_n$  必满足

$$\mathcal{M} \cdot J(f) \supset \mathcal{M}^6,$$

据定理 3.3.1,  $f$  是 6-决定的. 这样可限制在  $J_{n,1}^6$  中讨论. 其次, 在这一向量空间中考察轨道  $\Gamma^6 f_i$ , 这里  $f_i$  为例 3 中的 8 种标准形连同非奇异芽(它右等价于坐标函数芽), 显然  $\text{Codim } f_i \leq 5$ . 将  $J_{n,1}^6$  简记为  $J_n^6$ .

$\Gamma^6 f_i$  是  $J_n^6$  中的子流形, 现计算它们的余维数.

$$\begin{aligned} \text{Codim } \Gamma^6 f_i &= \dim_{\mathbb{R}} J_n^6 / T_{f_i} \Gamma^6 f_i = \dim_{\mathbb{R}} j^6(\epsilon_n) / j^6(\mathcal{M} \cdot J(f_i)) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \epsilon_n / \mathcal{M} \cdot J(f_i) = \text{Codim } \Gamma f_i. \end{aligned}$$

当  $\text{Codim } f_i \geq 1$  (此时  $f_i \in \mathcal{M}^2$ ) 时, 据命题 3.2.3,

$$\begin{aligned} \text{Codim } \mathcal{M} \cdot J(f_i) &= n + \text{Codim } J(f_i) \\ &= n + \text{Codim } f_i, \end{aligned}$$

因此

$$\text{Codim } \Gamma^6 f_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \text{Codim } f_i = 0, \\ n + 1, & \text{若 } \text{Codim } f_i = 1, \\ n + r, & \text{若 } \text{Codim } f_i = r, \quad 2 \leq r \leq 5. \end{cases}$$

由于子流形  $\bar{\Gamma}^6 f_i = \Gamma^6 f_i + \mathbb{R}$ , 因此

$$\text{Codim } \bar{\Gamma}^6 f_i = \begin{cases} 0, & \text{若 } \text{Codim } f_i = 0, \\ n, & \text{若 } \text{Codim } f_i = 1, \\ n + r - 1, & \text{若 } \text{Codim } f_i = r, \quad 2 \leq r \leq 5. \end{cases}$$

另一方面, 若  $f \in \epsilon_n$  使得  $j^6 f \notin \bigcup_i \bar{\Gamma}^6 f_i$ , 则  $\text{Codim } f > 5$ . 进而有下面的

断言: 令  $\Sigma = J_n^6 - \bigcup_i \bar{\Gamma}^6 f_i$ , 则  $\Sigma$  是有限个子流形的并, 且这些子流形的余维数不小于  $n + 5$ .

然后应用命题 6.5.1 及定理 2.4.4 便可推出本定理. 最后给出断言的证明概要.

将  $J_n^6$  中余秩为  $c$  的导网所成之集记为  $S_c$ , 可以证明它是  $J_n^6$  中余维为  $n + \frac{c(c+1)}{2}$  的子流形. 若  $c \geq 3$ , 则  $S_c$  位于  $\bigcup_i \bar{\Gamma}^6 f_i$  的补空间内, 并且它是余维数不小于  $n + 6$  的子流形. 下面仅对  $S_1 \cap \Sigma$  及  $S_2 \cap \Sigma$  讨论. 利用分裂引理容易证明  $S_1 \cap \Sigma$  是  $S_1$  中的子流形, 其余维数为 4, 因而  $S_1 \cap \Sigma$  是  $J_n^6$  中余维为  $n + 5$  的子流形. 而对于  $S_2 \cap \Sigma$ , 可将它分解为 3 个子流形的并, 这 3 个子流形的余维数分别为  $n + 5, n + 5$  和  $n + 7$ .

### 6.5.3 初等突变浅介

设  $F: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为  $C^\infty$  函数, 如第二段所述, 它表示系统的位能,  $u \in \mathbb{R}^4$  为时空空间中的点,  $x \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态变量. 令  $\pi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^4$  表标准投影.

对于取定的  $u \in \mathbb{R}^4$ , 系统在  $u$  的“稳定”状态用  $\pi^{-1}(u)$  中的点  $x$  来表示, 并且要求  $F$  在  $\pi^{-1}(u)$  上的限制  $F_u$  在点  $x$  取得局部极小值, 于是自然研究下列子集:

$$\Sigma = \{(u, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \mid x \text{ 为 } F_u \text{ 的临界点}\}$$

$$= \{(u, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n\},$$

该子集包含所有局部稳定状态. 方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

叫做系统的状态方程组.

**例 4** 取  $n = 1$ ,  $F = x^4 + u_1 x^2 + u_2 x$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ . 该函数表示位势  $x^4$  的万有形变, 其状态方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2u_1 x + u_2 = 0, \quad (1)$$

它确定  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$  中的超曲面  $\Sigma$ , 其方程为

$$u_2 = -2u_1 x - 4x^3.$$

考虑投影  $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $(u, x) \mapsto u$ , 它是标准投影  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  在  $\Sigma$  上的限制. 以下用  $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$  来代替  $\mathbb{R}^4$ .  $\pi$  的奇点集由下列方程确定:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 + 2u_1 = 0, \quad (2)$$

由(1)和(2)式解得

$$S: \begin{cases} u_1 = -6x^2, \\ u_2 = 8x^3. \end{cases}$$

$S$  是  $\pi$  的奇点集( $\subset \Sigma$ )在  $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$  上的投影, 这是一条带尖点的半立方抛物线. 它将平面分为两部分: 较大部分  $\Omega_1$  和较小部分  $\Omega_2$ . 若  $u \in \Omega_1$ ,  $\pi^{-1}(u) \subset \Sigma$  仅由一点组成, 它是  $F_u$  的极小值点. 若  $u \in \Omega_2$ ,  $\pi^{-1}(u)$  由 3 个点组成, 其中两个为极小值点, 另一个为极大值点(非稳定状态), 当  $u \in \Omega_1$  时, 观测的系统状态完全由状态方程决定, 并且随  $u$  而连续变化. 反之, 若  $u \in \Omega_2$ , 存在两种可

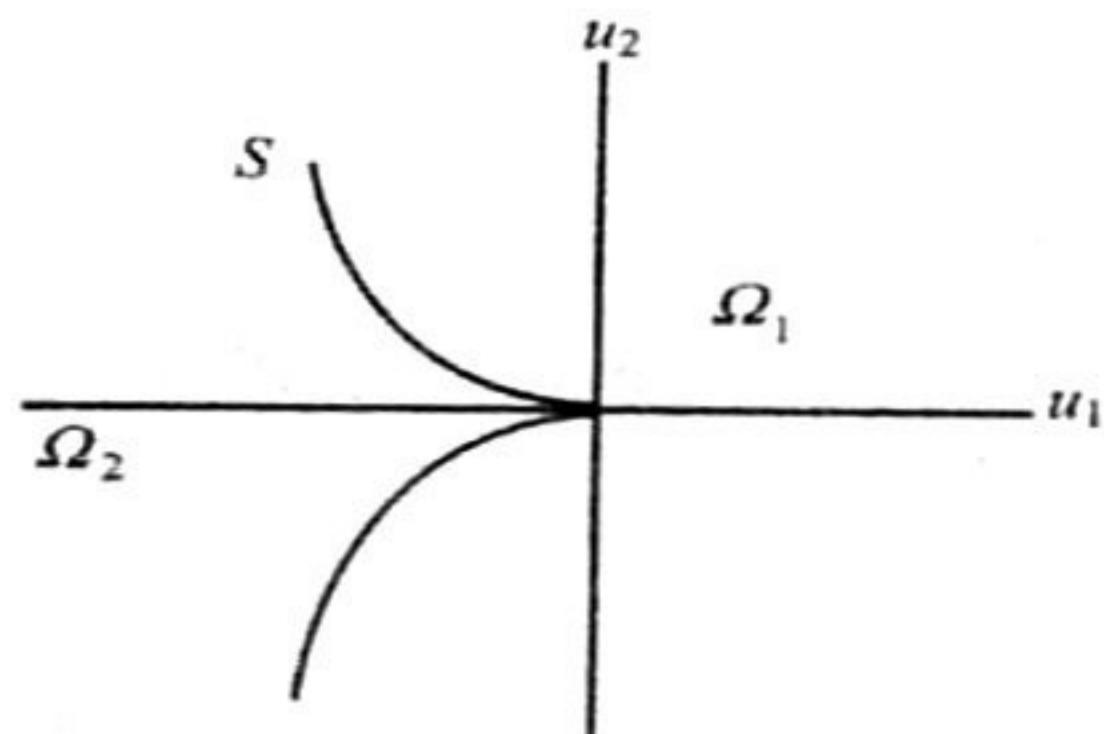


图 6.2

能的状态,并且观测的状态需要用附加的信息来确定. 例如,“Maxwell 约定”认为总应该选取局部极小值中的最小者. 另一方面,“延滞规则”则叙述为当  $u$  从  $\Omega_1$  越过  $S$  到达  $\Omega_2$  并且出现新增的局部极小值时, 观测到的状态由  $\Omega_2$  上的局部极小值来确定. 而这一极小值则由  $\Omega_1$  上的惟一极小

值连续演变过来, 直到它消失为止. 而一旦它消失, 若状态由另一极小值来确定, 则系统的状态出现突变. 因为曲线  $S$  是点  $u$  的轨迹, 它使得  $F_u$  的极小值数目发生变化, 因此在  $S$  上的点的附近, 人们观测到系统的状态可能发生突变现象. 曲线  $S$  叫做突变集或分歧集.

现回到一般情形, 并作如下假定:

(H) 函数  $F$  满足定理 6.5.1 的通有性质, (等价于物理规律中的“稳定性”假设).

在假定(H)下,  $F$  作为位势芽的形变在集  $\Sigma$  的每一点处, 恰好同构于例 3 中列举的 8 种芽之一. 借助于这些模型, 有可能在集  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n$  的每一点处, 描述投影  $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$  的局部结构, 并且把系统的稳定状态看做是点  $u \in \mathbb{R}^4$  的函数. 正如例 4 中所讨论的, 集  $S \subset \mathbb{R}^4$  是  $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$  在  $\mathbb{R}^4$  中的奇点集或者说是这一投影下的可见轮廓.  $S$  也叫做系统的突变集. 正因为例 3 中的模型(1)至(7)(模型(0)对应于投影  $\pi$  的非奇异点)能描述  $S$  在每一点处的局部结构(仅相差一微分同胚), 因此这 7 种模型统称为 Thom 的初等突变模型. 对于突变理论感兴趣的读者可参看文献[2].

# 第七章 平面到平面的光滑映射的奇点

## § 7.1 引言

H. Whitney 在 1955 年发表的论文《平面到平面的映射》开创了光滑映射的奇点理论这一门新的数学分支的研究。

一个曲面到平面的映射将曲面上的每一个点对应于平面上的一个点。在我们周围，光滑曲面到平面上的光滑映射处处可见。事实上，我们周围大多数物体的边界都是光滑曲面，物体的可见轮廓就是其边界曲面在眼睛的视网膜上的投影。通过考察四周的物体，譬如人的面部，我们就可以发现可见轮廓的奇点。Whitney 发现，在一般状况下，只会碰到两类奇点，这就是折叠与尖点。这两类奇点是稳定的，即每个相邻近的映射都在一适当的邻近点上仍有这种奇点。例如从下图中的奶瓶可以看到两个尖点。我们稍许挪动一下瓶子，就可推出尖点是稳定的结论。

值得指出的是，这两类奇点在适当的坐标系下都可以表示为最简洁的形式，即所谓标准形。所需实施的坐标变换不仅限于映射的源空间，还需要在靶空间进行。现引入一般的

**定义 7.1.1** 设有两个  $C^\infty$  映射芽  $f$ ,  $g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ 。如果存在微分同胚芽  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  和  $\psi: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ，使得

$$g = \psi \circ f \circ \phi^{-1},$$

则说  $f$  与  $g$  是左右等价的或依 Mather 的说法， $f$  与  $g$  是  $\mathcal{A}$ -等价

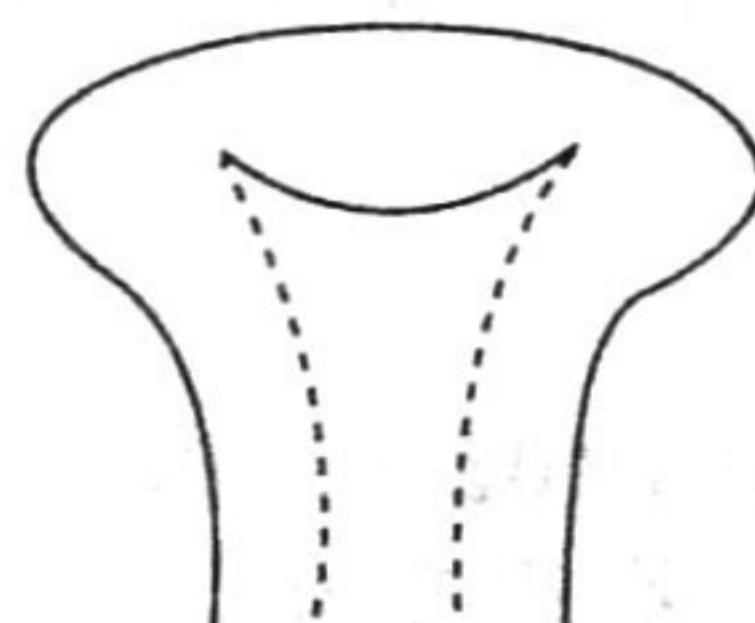


图 7.1

的,记为  $f \tilde{\mathcal{A}} g$ . 显然“ $\tilde{\mathcal{A}}$ ”是一个等价关系. 令

$$\mathcal{R} = \{ \phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 可逆芽} \},$$

$$\mathcal{L} = \{ \psi: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 可逆芽} \},$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L},$$

以映射芽的复合作为群运算,  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{L}$  因而  $\mathcal{A}$  均为群. 分别叫做右等价群和左等价群及左右等价群. 记

$$\epsilon^0(n, p) = \{ f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射芽} \},$$

群  $\mathcal{A}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用定义为

$$(\phi, \psi) \cdot f = \psi \circ f \circ \phi^{-1}, (\phi, \psi) \in \mathcal{A}, f \in \epsilon^0(n, p).$$

当  $p=1$  时,  $\epsilon^0(n, 1) = \mathcal{M}_n$ . 前面几章讨论函数芽已得到一些颇为满意的结果, 但使用的局部坐标变换限于函数芽的源空间. 然而当  $p > 1$  时, 研究的对象是  $C^\infty$  映射芽, 仅使用源空间的微分同胚芽群难以获得有意义的结果, 本章的研究表明需要考虑左右等价群.

设  $F: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 将源空间的坐标标记为  $(x, y)$ , 靶空间的坐标标记为  $(u, v)$ , 则  $F$  可写为

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

并且  $u(0, 0) = 0, v(0, 0) = 0$ .

若  $F$  在  $0 \in \mathbb{R}^2$  具有极大秩 2, 则  $F$  在原点的 Jacobi 矩阵  $DF(0)$  为可逆矩阵. 依反函数定理,  $F$  是一个微分同胚芽, 因而  $\mathcal{A}$ -等价于映射

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y, \end{cases}$$

原点是  $F$  的正常点, 注意, 上述映射不是恒同映射, 因源平面与靶

平面应看成两个不同的平面.

若  $F$  在  $0 \in \mathbb{R}^2$  的秩小于 2, 则原点是  $F$  的奇点. 特别考虑  $DF(0)$  的秩为 1 的情形, 有

**引理 7.1.1** 设  $F: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 若  $F$  在点  $0 \in \mathbb{R}^2$  的秩为 1, 则  $F$  左右等价于下列映射芽

$$\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ .

**证** 在  $F$  的源平面与靶平面上分别作非退化线性坐标变换  $A$  和  $B$ , 使得

$$B \circ DF(0) \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设  $\tilde{F} = B \circ F \circ A$  的坐标函数为  $(\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y))$ , 则

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0) = 1, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(0) = 0.$$

然后令

$$\begin{aligned} \phi: (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, 0), \\ (x, y) &\mapsto (\tilde{u}(x, y), y), \end{aligned}$$

则  $D\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\phi \in \mathcal{R}$ . 易见  $\tilde{F} \circ \phi^{-1}$  具有形式(1). 证毕.

从现在起, 假定  $F$  具有形式(1). 此外, 下面讨论中叙述的性质或条件应理解为局部的, 即在原点的足够小邻域内才成立.

## § 7.2 折叠与尖点

### 7.2.1 两类奇点的定义

假设

$$F: \begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

那么  $F$  的 Thom 一阶奇点集

$$\begin{aligned} \Sigma^1(F) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dim(\text{Ker}DF(x, y)) = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\}, \end{aligned}$$

显然  $\Sigma^1(F)$  包含原点. 方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (2)$$

表示一条过原点的平面曲线. 进而假定

( $H_1$ ) 微分  $d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  在原点处不为零.

因为

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy,$$

所以假定( $H_1$ )意指  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)$  不全为 0. 据隐函数定理, 由方程(2)确定的隐函数在  $0 \in \mathbb{R}$  附近存在导数, 或者说曲线  $\Sigma^1(F)$  在平面上原点附近有切线, 并且切线由下列线性方程确定:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy = 0. \quad (3)$$

另一方面,  $F$  的微分  $DF$  是一线性映射, 因此在曲线  $\Sigma^1(F)$  的每一点上, 自然考虑  $DF$  的核. 因为当  $(x, y) \in \Sigma^1(F)$  时,

$$\text{rank}DF(x, y) = 1,$$

所以  $\text{Ker}(DF(x, y))$  为直线, 它由方程

$$dx = 0 \quad (4)$$

确定.

这样一来,  $\Sigma^1(F)$  在原点处的切线和  $DF(0)$  的核或者相交或者重合, 下面分别讨论.

第一种情形:  $\Sigma^1(F)$  在原点的切线和  $\text{Ker}DF(0)$  相交. 根据上述方程(3)和(4), 它可以用

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \neq 0 \quad (5)$$

来描述, 并且(5)式蕴涵假定  $(H_1)$  成立. 应用隐函数定理于方程(2)可确定隐函数  $y = h(x)$ , 并且曲线  $\Sigma^1(F)$  为函数  $y = h(x)$  的图像.  $F$  在  $\Sigma^1(F)$  上的限制

$$F|_{\Sigma^1(F)}: (\Sigma^1(F), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

显然是一个浸入.

**定义 7.2.1** 每一个满足条件(1)和(2)及(5)的映射芽称为折叠.

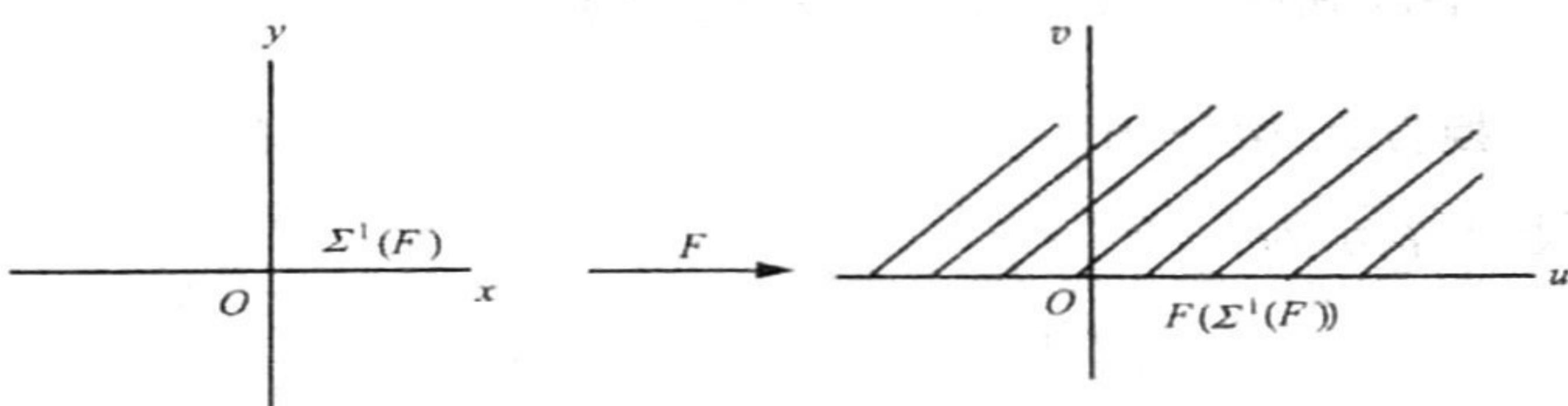


图 7.2

**例 1** 设芽  $F: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  定义为

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^2, \end{cases}$$

显然  $F$  是一个折叠,  $\Sigma^1(F)$  为  $x$  轴,  $F(\Sigma^1(F))$  为  $u$  轴,  $F$  将源平

面映成靶平面的上半平面(包括  $u$  轴). 点  $(u, v)$  (其中  $v > 0$ ) 是源平面中两个点的像.

第二种情形:  $\Sigma^1(F)$  在原点的切线与  $DF(0)$  的核相重合. 在分析上它表示为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0, \quad (6)$$

在几何上则表示  $F$  在曲线  $\Sigma^1(F)$  上的限制  $F|_{\Sigma^1(F)}$  在原点的秩为 0. 令

$$\Sigma^{1,1}(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0\}.$$

在假定  $(H_1)$  下, 由方程(3)与(4)可见,  $\Sigma^{1,1}(F)$  中的点具有下述性质:  $\Sigma^1(F)$  在该点的切线和  $DF$  在该点的核相重. 原点属于  $\Sigma^{1,1}(F)$ . 进而假定  $\Sigma^{1,1}(F)$  是平面上的子流形, 其余维数为 2, 因而它由一些孤立点组成. 更精确地说, 假定

$(H_2)$  函数  $\frac{\partial f}{\partial y}$  与  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  在原点是独立的.

换言之, 微分  $d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  和  $d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$  在原点处是线性独立的, 这在

分析上表示为

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)|_0 \wedge d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)|_0 \neq 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)dx \wedge \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0)dx + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0)dy \right) \neq 0,$$

从而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0 \text{ 且 } \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) \neq 0. \quad (7)$$

显然  $(H_2) \Rightarrow (H_1)$ .

**定义 7.2.2** 每一个满足条件(1),(2),(6)及(7)的映射芽称为尖点.

**例 2** 设  $F: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  定义为

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^3 - xy, \end{cases}$$

它是一个尖点, 这是 § 2.1 中的例 3, 并且 § 2.5 中的例 1 也对此讨论过.

最后就  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  的秩为 0 的情形讨论. 设  $F$  的坐标表示为

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

使  $F$  的秩为 0 的点  $(x, y)$  由下列 4 个方程决定:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

一般来说, 两个变量的 4 个方程无解, 因此要求  $F$  的秩不小于 1 似乎是合理的.

### 7.2.2 标准形

本段讨论折叠和尖点这两类奇点的标准形. 为了更好地理解下面的 Whitney 定理的证明, 我们从分析  $F$  入手, 对所要施行的坐标变换作进一步的认识.

假设  $F: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  具有形式(1), 即

$$F: \begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

在几何上它可描述为

$$\pi_t \circ F = \pi_s,$$

其中  $\pi_s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$  表源平面到  $\mathbb{R}$  上的投影,  $\pi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u$  为靶平面到  $\mathbb{R}$  上的投影. 将源平面与靶平面看作

$\mathbb{R}$  上的纤维空间,  $F$  将源平面上的每一条纤维送至靶平面的一条纤维, 因此说  $F$  是它在纤维  $\pi_s^{-1}(0)$  上的限制  $v = f(0, y)$  的单参数开折, 参数为  $x$ .

考虑到  $F$  可看作是以  $x$  为参数的单参数开折这一特点, 引入下面的等价关系.

**定义 7.2.3** 设  $F, G$  均具有形式(1). 说  $F$  与  $G$  是等价的, 如果存在  $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}$  以及参数空间之间的微分同胚芽  $\theta: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ , 使得

- (i)  $\pi_s \circ \phi = \theta \circ \pi_s, \quad \pi_t \circ \phi = \theta \circ \pi_t,$
- (ii)  $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}.$

特别, 当  $\theta$  为恒同映射芽时, 称  $F$  与  $G$  是  $\mathcal{A}$ -同构的.

**定理 7.2.1** (Whitney 定理) (i) 每一个折叠  $\mathcal{A}$ -等价于下列形式给出的芽

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^2, \end{cases}$$

- (ii) 每一个尖点  $\mathcal{A}$ -等价于下列形式的芽

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^3 - xy. \end{cases}$$

**证** 设  $F: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  具有形式(1).

(i) 假定  $F$  为折叠, 那么

$$f(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \neq 0.$$

因而  $f(0, y)$  作为  $y$  的函数芽是 Morse 芽,  $f(x, y)$  可视为  $f(0, y)$  的 1-参数形变, 参数为  $x$ . 根据命题 1.4.1,  $f(0, y)$  右等价于芽  $g(y) = \pm y^2$ . 而  $g$  的万有形变为  $g(y) + t$ , 因此  $f(x, y)$  同构于  $\pm y^2 + h(x)$ ,  $F$  作为  $f(0, y)$  的单参数开折同构于

$$G: \begin{cases} u = x, \\ v = \pm y^2 + h(x), \quad h(0) = 0, \end{cases}$$

这里只用到源平面的微分同胚芽  $\phi \in \mathcal{R}$ , 且有  $\pi_s = \pi_s \circ \phi$ . 然后定义  $\psi \in \mathcal{L}$  为

$$\psi(u, v) = (u, \pm v - h(u)),$$

显然  $\pi_t = \pi_t \circ \psi$ , 且  $\psi \circ G$  具有定理(i)中的形式.

(ii) 设  $F$  为尖点. 按定义,  $F$  具有形式

$$\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases}$$

其中  $f(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) \neq 0$  且  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0$ .

据命题 1.4.1,  $f(0, y)$  作为  $y$  的函数芽右等价于  $y^3$ , 而  $y^3$  的万有形变为  $g(t_0, t_1, y) = y^3 + t_0 y + t_1$ . 又  $f(x, y)$  视为  $f(0, y)$  的 1-参数形变, 参数为  $x$ , 因此  $f(x, y)$  同构于  $h^* g$ , 其中

$$h: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0),$$

$$x \mapsto (-h_0(x), h_1(x)), \quad h_0(0) = 0, \quad h_1(0) = 0,$$

于是  $F$  作为  $f(0, y)$  的 1-参数开折同构于

$$G: \begin{cases} u = x, \\ v = y^3 - h_0(x)y + h_1(x), \end{cases}$$

这里仅使用源平面的局部微分同胚  $\phi \in \mathcal{R}$ , 且  $\pi_s = \pi_s \circ \phi$ . 为消去  $h_1(x)$ , 令  $\psi \in \mathcal{L}$  为

$$\psi(u, v) = (u, v - h_1(u)),$$

显然  $\pi_t = \pi_t \circ \psi$ . 将  $\psi$  与  $G$  复合, 得

$$\psi \circ G(x, y) = (x, y^3 - h_0(x)y).$$

以上暂未用到条件  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0$ , 然而这一不等式所反映的性质被上述各种坐标变换保留下, 并且它表示

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(y^3 - h_0(x)y) \Big|_{(0,0)} \neq 0,$$

因而  $\frac{dh_0}{dx}(0) \neq 0$ , 于是  $h_0$  是参数空间  $\mathbb{R}(x)$  上的局部微分同胚. 最后, 令

$$\tilde{\phi}(x, y) = (h_0(x), y),$$

$$\tilde{\psi}(u, v) = (h_0(u), v),$$

易见

$$\tilde{\phi} \in \mathcal{R}, \pi_s \circ \tilde{\phi} = h_0 \circ \pi_s,$$

$$\tilde{\psi} \in \mathcal{L}, \pi_t \circ \tilde{\psi} = h_0 \circ \pi_t.$$

记  $\tilde{F} = \psi \circ G$ , 则  $\tilde{F}(x, y) = (x, y^3 - h_0(x)y)$ . 并且为方便起见, 令  $\tilde{G}(x, y) = (x, y^3 - xy)$ , 则有

$$\tilde{G} \circ \tilde{\phi}(x, y) = (h_0(x), y^3 - h_0(x)y),$$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{F}(x, y) = (h_0(x), y^3 - h_0(x)y),$$

从而  $\tilde{\psi} \circ \tilde{F} \circ \tilde{\phi}^{-1} = \tilde{G}$ , 正是我们所希望的.

### § 7.3 在一般状况下平面到平面的映射的奇点

#### 7.3.1 空间 $J_{2,2}^{2,0}$ 及其分解

设  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为  $C^\infty$  映射,  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . 依 Taylor 公式,

$$F(x) - F(x_0) = P_1(\xi) + P_2(\xi) + R(\xi), \quad \xi = x - x_0,$$

其中  $P_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为线性映射,  $P_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为二次齐次多项式映

射,余项  $R$  的分量属于  $\mathcal{M}^3$ . 将  $F - F(x_0)$  在点  $x_0$  处的 2- 导网记为  $j_0^2 F(x_0)$  (见 § 2.4), 则

$$j_0^2 F(x_0) = (P_1, P_2) \in J_{2,2}^{2,0},$$

这是因为  $J_{2,2}^{2,0}$  表示从  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}^2$  的次数不大于 2 且常数项为 0 的多项式映射所成的向量空间, 因此  $J_{2,2}^{2,0}$  中的成员可表为  $(A, B)$ , 其中  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为线性映射,  $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为二次齐次多项式映射. 设源平面的坐标为  $x, y$ , 则

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{bmatrix},$$

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \\ \alpha'x^2 + 2\beta'xy + \gamma'y^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

实数  $a, b, a', b', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  形成  $J_{2,2}^{2,0}$  的坐标系,  $J_{2,2}^{2,0}$  可等同于欧氏空间  $\mathbb{R}^{10}$ . 群  $\mathcal{A}$  在  $J_{2,2}^{2,0}$  上的作用是通过对群  $\mathcal{A}$  的元素取 2- 导网来作用的.

令  $\pi: J_{2,2}^{2,0} \rightarrow L(2,2)$  为  $\pi(A, B) = A$ , 其中  $L(2,2)$  表  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}^2$  的线性映射所成之空间. 在 § 2.5 中曾对  $L(n, p)$  定义了子集  $\Sigma^i$ , 现在  $n = p = 2$ , 有

$$\Sigma^i = \{A \in L(2, 2) \mid \dim \text{Ker} A = i\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

它是  $L(2,2)$  中余维为  $i^2$  的微分子流形. 令

$$\tilde{\Sigma}^i = \pi^{-1}(\Sigma^i),$$

则  $\tilde{\Sigma}^i$  是  $J_{2,2}^{2,0}$  中余维数也是  $i^2$  的微分子流形, 并且  $J_{2,2}^{2,0}$  可分解为

$$J_{2,2}^{2,0} = \tilde{\Sigma}^0 \cup \tilde{\Sigma}^1 \cup \tilde{\Sigma}^2.$$

下面对  $\tilde{\Sigma}^1$  再作分解. 令  $\Sigma^{1,1} \subset \tilde{\Sigma}^1$  定义为

$$\Sigma^{1,1} = \{(A, B) \in J_{2,2}^{2,0} \mid A \in \Sigma^1 \text{ 且 } B(\text{Ker} A) \subset \text{Im} A\}.$$

**命题 7.3.1** 集  $\Sigma^{1,1}$  是  $J_{2,2}^{2,0}$  中余维数为 2 的子流形, 该子流形在群  $\mathcal{A}$  的作用下不变.

**证** 设  $(A, B) \in J_{2,2}^{2,0}$ , 用源平面的坐标  $x, y$  来表示, 如(1)式所述. 不失一般性, 假设  $a \neq 0$ .

$(A, B) \in \Sigma^{1,1}$  等价于下列条件成立:

(i)  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b = 0$  或  $b' = \frac{a'}{a}b$ , 这是因为  $A$  的秩为 1.

(ii)  $B(b, -a)$  与向量  $(a, a')$  成比例. 事实上,  $\text{Ker}A$  是源平面的一维向量空间, 它是一条过原点的直线, 点  $(b, -a)$  在该直线上, 或说向量  $(b, -a)$  生成直线  $\text{Ker}A$ . 显然点  $(1, 0)$  不在这条直线上. 而像  $\text{Im}A$  是靶平面的一条直线(因  $\text{rank}A = 1$ ), 它由向量  $A(1, 0) = (a, a')$  生成. 由  $\Sigma^{1,1}$  的定义知,  $B(b, -a)$  与向量  $(a, a')$  成比例.

此外, (ii) 等价于

$$(iii) \det \begin{pmatrix} ab^2 - 2\beta ab + \gamma a^2 & a \\ a'b^2 - 2\beta' ab + \gamma' a^2 & a' \end{pmatrix} = 0.$$

因  $a \neq 0$ , 由上面方程可解出  $\gamma'$ . 于是  $\Sigma^{1,1}$  由(i)与(iii)中的方程所确定. 进而可得出  $\Sigma^{1,1}$  为  $J_{2,2}^{2,0}$  中余维为 2 的子流形.

命题的第二部分的证明简单, 留给读者.

令  $\Sigma^{1,0} = \tilde{\Sigma}^1 - \Sigma^{1,1}$ , 则它是  $J_{2,2}^{2,0}$  中余维数为 1 的子流形.

### 7.3.2 折叠与尖点的通有性

**命题 7.3.2** 设  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为  $C^\infty$  映射,  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , 则

- (i)  $j_0^2 F(x_0) \in \Sigma^{1,0}$  当且仅当  $F$  在点  $x_0$  处的芽是折叠,
- (ii)  $j_0^2 F(x_0) \in \Sigma^{1,1}$  且  $j_0^2 F$  与  $\Sigma^{1,1}$  在点  $x_0$  处横截当且仅当  $F$  在点  $x_0$  处的芽为尖点.

**证**  $\Rightarrow$  不妨假定  $x_0 = 0, F(x_0) = 0$ . 因为  $\tilde{\Sigma}^1 = \Sigma^{1,0} \cup \Sigma^{1,1}$ , 不论是情形(i)或(ii), 均有  $j_0^2 F(0) \in \tilde{\Sigma}^1$ , 因此  $F$  在  $0 \in \mathbb{R}^2$  的秩为 1. 据引理 7.1.1,  $F$  左右等价于

$$\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases}$$

其中  $f(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ . 为简单起见, 仍将它记为  $F$ . 命题 7.3.1 告诉我们,  $\Sigma^{1,0}$  与  $\Sigma^{1,1}$  在群  $\mathcal{A}$  作用下不变, 因此本命题中有关  $j_0^2 F$  的条件不需作任何变动.

现设  $j_0^2 F(0) = (A, B)$ , 其中  $A$  和  $B$  如(1)式所述, 那么

$$\alpha = 1, b = 0, \alpha' = \frac{\partial f}{\partial x}(0), b' = \frac{\partial f}{\partial y}(0),$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \alpha' = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0), \beta' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0),$$

$$\gamma' = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0).$$

下面分为两种情形讨论:

(1)  $j_0^2 F(0) \in \Sigma^{1,0}$ , 则命题 7.3.1 证明中的(i)成立, (iii)不成立, 因而

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \neq 0,$$

由定义 7.2.1 知,  $F$  在原点的芽是一折叠.

(2)  $j_0^2 F(0) \in \Sigma^{1,1}$  且  $j_0^2 F$  与  $\Sigma^{1,1}$  在点 0 处横截. 由条件  $j_0^2 F(0) \in \Sigma^{1,1}$  知, 命题 7.3.1 证明中的(i)与(iii)均成立, 因此

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0.$$

而  $j_0^2 F$  与  $\Sigma^{1,1}$  在点 0 横截说明函数  $\frac{\partial f}{\partial y}$  与  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  在点  $0 \in \mathbb{R}^2$  是独立的, 即它们在点 0 的微分  $d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  和  $d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$  是线性独立的, 因而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) \neq 0,$$

依定义 7.2.2,  $F$  在原点的芽是尖点.

≤ 显然.

**定理 7.3.1** 一般情形下, 平面到平面的光滑映射的奇点是折叠或尖点.

**证** 据定理 2.4.4 及其注, 下列性质对于  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  而言是通有的: 映射  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  使得它的 2-导网  $j_0^2 F: \mathbb{R}^2 \rightarrow J_{2,2}^{2,0}$  横截子流形  $\tilde{\Sigma}^0, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,1}$  和  $\tilde{\Sigma}^2$ .

而  $\tilde{\Sigma}^0$  对应于  $F$  的正常点全体, 又  $\text{Codim} \tilde{\Sigma}^2 = 4 > 2$ , 因此命题 7.3.2 证明了  $F$  的奇点只能是折叠和尖点.

## 第八章 光滑映射的局部研究: 切空间

### § 8.1 问题的提出

在第七章中, 我们研究了平面到平面的光滑映射. 在一般状况下, 它在每一点处的芽为下列 3 种类型中之一: 正常点、折叠或尖点. 这意思是说在  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  中存在一个剩余集, 使得每一个属于该剩余集的映射  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  在任意点  $x \in \mathbb{R}^2$  处的芽, 按左右等价关系分类, 等价于上面 3 种类型中的一种.

现考虑一般情形. 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽, 这里  $n, p$  为任意正整数. 我们已在集  $\epsilon^0(n, p) = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射芽}\}$  上引入了左右等价(即  $\mathcal{A}$ -等价)关系(见定义 7.1.1), 那么将  $\epsilon^0(n, p)$  中的映射芽按  $\mathcal{A}$ -等价分类的问题恰是对  $\epsilon^0(n, p)$  在群  $\mathcal{A}$  作用下的轨道进行分类的问题. 回忆  $p = 1$  这一特殊情形, 在第三章中对于余维数不超过 5 的函数芽按右等价关系给出了完全分类, 这里一个函数芽  $f \in \epsilon_n$  的余维数是用  $f$  的 Jacobi 理想  $J(f)$  在  $\epsilon_n$  中的余维数来定义的, 并且  $J(f)$  表示  $f$  的切空间. 当  $J(f)$  在  $\epsilon_n$  中具有有限余维时,  $f$  具有很好的性质. 例如它是有限  $\mathcal{R}$ -决定的,  $f$  与它的某一个, 譬如说  $k$  阶 Taylor 多项式右等价; 又如  $f$  存在万有形变, 因此对  $f$  作扰动产生的每一个形变都可由  $f$  的通用形变“诱导”出来. 回顾这些事实给我们的启示是: 函数芽  $f$  的切空间  $J(f)$  的有关信息为我们研究函数芽  $f$  本身提供了重要信息. 因此对一般的映射芽进行研究, 有必要对映射芽  $f \in \epsilon^0(n, p)$  的切空间以及群  $\mathcal{A}$  的轨道  $\mathcal{A} \cdot f$  在  $f$  处的切空间予以讨论. 而这正是本章着重考虑的内容.

研究光滑映射的奇点, 基本的几何思想类似于函数情形, 但两

者有重要的差别. 例如对余维数很小的光滑映射芽进行分类, 限制为具有最低余维数的映射芽即所谓稳定映射芽. 对于函数芽来说, 这一概念指的是非奇异芽, 并且当考虑位势芽时为 Morse 芽. 然而对一般的映射芽而言, 存有许多种稳定芽, 并且稳定映射芽的分类决非易事.

下面用开折的语言来叙述稳定芽的概念.  $f_0: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  的一个  $r$ -参数“开折”可想象为“芽” $(\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\epsilon(n, p), f_0)$ ,  $u \mapsto f_u$ , 由此自然引入  $f: (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $(u, x) \mapsto f_u(x)$  以及  $F: (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ ,  $(u, x) \mapsto (u, f(u, x))$ , 于是引入下面正式的定义.

**定义 8.1.1** 设  $f_0: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 若  $C^\infty$  映射芽  $f: (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , 使得  $f(0, x) = f_0(x)$ , 则  $f$  叫做  $f_0$  的  $r$ -参数形变, 并且  $f_0$  的  $r$ -参数开折指的是芽  $F: (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ , 它由  $F(u, x) = (u, f(u, x))$  给定.

显然,  $\pi \circ F = \pi$ , 其中  $\pi: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ , 及  $\pi: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$  均为标准投影.

比较上述两个概念,  $f_0$  的开折是将  $f_0$  的形变  $\{f_u\}$  按  $u$ -水平“分开”.

**定义 8.1.2**  $C^\infty$  映射芽  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  的两个  $r$ -参数开折  $F_1, F_2: (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$  称为  $\mathcal{A}$ -同构的, 如果存在  $(\mathbb{R}^n, 0)$  及  $(\mathbb{R}^p, 0)$  上的恒同映射芽的  $r$ -参数开折  $\Phi$  与  $\Psi$ , 使得下列图表可换:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) & \xrightarrow{F_1} & (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) & \xrightarrow{F_2} & (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \end{array}$$

易见,  $\Phi$  与  $\Psi$  为可逆芽且  $\Phi \in L_{n, r}$ ,  $\Psi \in L_{p, r}$ .

**定义 8.1.3** (i)  $f \in \epsilon^0(n, p)$  的  $r$ -参数开折  $F$  叫做  $\mathcal{A}$ -平凡的, 如果它  $\mathcal{A}$ -同构于  $f$  的  $r$ -参数常值开折  $(u, x) \mapsto (u, f(x))$ .

(ii)  $f \in \epsilon^0(n, p)$  叫做  $\mathcal{A}$ -稳定的, 若它的每一个开折是  $\mathcal{A}$ -平凡的.

在  $\epsilon^0(n, p)$  上除了左右等价以及与之相联系的右等价、左等价这些等价关系外, 还有一种值得研究的等价关系, 叫做接触等价. 因此本章的安排如下: § 8.2 讨论对应于群  $\mathcal{A}$  作用的切空间与轨道切空间. 由于群  $\mathcal{A}$  为群  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{L}$  的直积, 顺便还得到了相应于群  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{L}$  的切空间与轨道切空间. § 8.4 在  $\epsilon^0(n, p)$  上引入一种新的等价关系, 称为接触等价或  $\mathcal{K}$ -等价.  $\mathcal{K}$ -等价粗于  $\mathcal{A}$ -等价, 但便于计算. 对于稳定映射芽来说, 按  $\mathcal{A}$ -等价分类与按  $\mathcal{K}$ -等价分类是一致的. 因此在 § 8.4 中介绍  $\mathcal{K}$ -等价的特征, 讨论对应于群  $\mathcal{K}$  的切空间与轨道切空间, 顺便对  $\mathcal{K}$  的正规子群  $\mathcal{C}$  作相应的介绍. § 8.3 通过举例说明如何计算群  $\mathcal{A}$  作用下的切空间. § 8.5 讨论了映射芽的  $\mathcal{K}$ -余维数的计算.

## § 8.2 对应于群 $\mathcal{A}$ 的切空间

类似于有限维流形, 在映射芽空间  $\epsilon(n, p)$  中考察在  $f_0 \in \epsilon^0(n, p)$  处的切空间, 把它看成是在  $f_0$  处的全体“切向量”组成的空间. 而将  $f_0$  处的切向量理解为  $\epsilon(n, p)$  中过  $f_0$  的光滑道路的等价类, 并且过  $f_0$  的光滑道路指的是  $f_0$  的 1-参数开折  $F$ :  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$ , 它可表示为

$$F(t, x) = (t, f(t, x)), \quad (1)$$

其中  $t \in (\mathbb{R}, 0)$ ,  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . 令  $f_t(x) = f(t, x)$ , 则  $f_0(x) = f(0, x)$ . 并且很自然地, 把  $\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  看作是在  $f_0$  处的一个切向量. 因为  $F$  具有形式(1), 所以又叫做  $\mathbb{R}$ -水平保持的映射芽.

### 8.2.1 $\mathbb{R}$ -水平保持的映射芽的平凡性判别法

依照 1-参数开折是  $\mathcal{A}$ -平凡的定义, 可写出下列的

**定义 8.2.1** 一个  $\mathbb{R}$ -水平保持的映射芽  $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$  叫做  $\mathcal{A}$ -平凡的, 如果存在  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$  及  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$  上的  $\mathbb{R}$ -水平保持的微分同胚芽  $\Phi$  和  $\Psi$ , 使得

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi = 1_{(\mathbb{R}, 0)} \times f,$$

其中  $1_{(\mathbb{R}, 0)}$  为  $(\mathbb{R}, 0)$  上的恒同映射芽,  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽.

**命题 8.2.1**  $\mathbb{R}$ -水平保持的映射芽  $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$  是  $\mathcal{A}$ -平凡的, 当且仅当存在两个  $C^\infty$  向量场芽  $X$  和  $Y$ , 它们分别定义在  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$  和  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$  上, 且具有下列形式:

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad t \in (\mathbb{R}, 0), \quad x \in (\mathbb{R}^n, 0),$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^p Y_j(t, y) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (t, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0),$$

使得

$$DF \cdot X = Y \circ F. \quad (2)$$

**证** 充分性. 积分向量场  $X$  和  $Y$  分别得到  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$  及  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$  上的  $\mathbb{R}$ -水平保持的微分同胚芽  $\Phi(t, x) = (t, \phi(t, x))$  与  $\Psi(t, y) = (t, \psi(t, y))$ , 它们分别是  $(\mathbb{R}^n, 0)$  和  $(\mathbb{R}^p, 0)$  上的恒同映射芽的单参数开折.  $\Phi$  将一族水平直线 (即  $\frac{\partial}{\partial t}$  的一族积分曲线) 变换为向量场  $X$  的一族积分曲线. 对  $\Psi$  和  $Y$  也有类似的描述. 而方程(2)是说  $F$  将向量场  $X$  的经过点  $(t, x)$  的积分曲线变为向量场  $Y$  的经过点  $F(t, x)$  的积分曲线 (见图 8.1).

令  $G = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ , 则  $G$  将  $\frac{\partial}{\partial t}$  的积分曲线变换为  $\frac{\partial}{\partial t}$  的积分曲线, 即

$$DG \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \circ G.$$

若记  $G(t, x) = (t, g(t, x))$ , 上式说明  $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ , 因此  $G$  是 1-参数常值开折,  $F$  是  $\mathcal{A}$ -平凡的.

必要性留作练习.

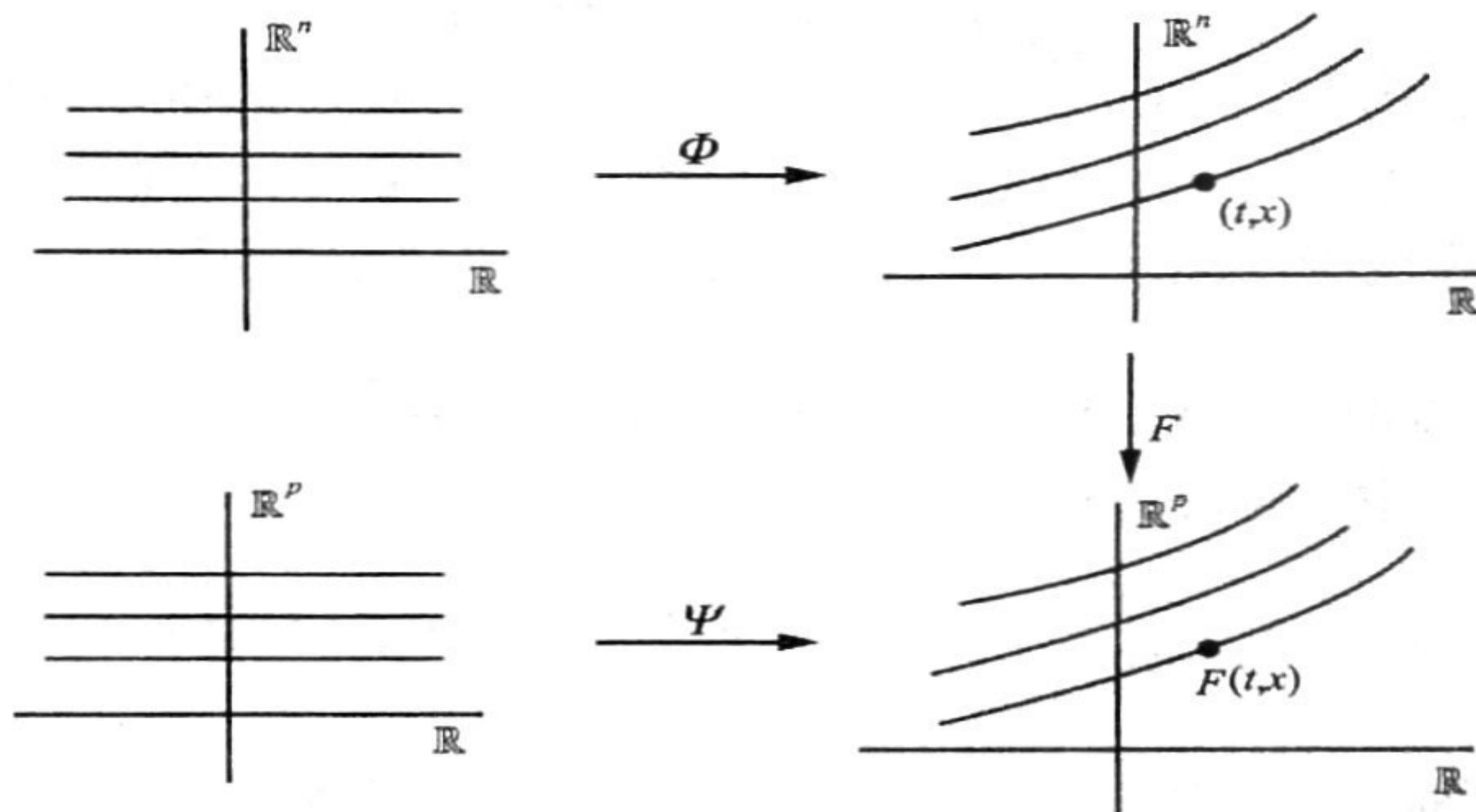


图 8.1

### 8.2.2 切空间和轨道切空间

分析平凡性条件(2), 我们将给出切空间的定义. 令

$$F(t, x) = (t, f(t, x)), \quad f_t(x) = f(t, x),$$

$$X_t(x) = \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$Y_t(y) = \sum_{j=1}^p Y_j(t, y) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

条件(2)可写为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} & Df_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ Y_t \circ f_t \end{bmatrix},$$

其中  $Df_t(x)$  表示  $f_t$  关于  $x$  的 Jacobi 矩阵, 即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Df_t \cdot X_t = Y_t \circ f_t,$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - Df_t \cdot X_t + Y_t \circ f_t. \quad (3)$$

当  $t \neq 0$  时,  $f_t, X_t, Y_t$  及  $\partial f / \partial t$  不能看作是映射芽或向量场芽. 但当  $t = 0$  时, 等式(3)给出

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} = - Df_0 \cdot X_0 + Y_0 \circ f_0, \quad (4)$$

此时  $X_0, Y_0$  分别是  $(\mathbb{R}^n, 0)$  与  $(\mathbb{R}^p, 0)$  上的向量场芽,  $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0}$  视为  $\epsilon(n, p)$  中在  $f_0$  处的一个切向量.

将  $\mathbb{R}^n$  上的向量场在点  $0 \in \mathbb{R}^n$  处的芽所成的空间记为  $V(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbb{R}^p$  上的向量场在点  $0 \in \mathbb{R}^p$  处的芽组成的空间记为  $V(\mathbb{R}^p)$ , (4) 式启示我们给出切空间的下列定义.

**定义 8.2.2** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 集

$$T_e \mathcal{A}(f) = \{Df \cdot X + Y \circ f \mid X \in V(\mathbb{R}^n), Y \in V(\mathbb{R}^p)\}$$

定义为在群  $\mathcal{A}$  作用下于  $f$  处的切空间.

对于  $\mathbb{R}^n$  上保原点的局部微分同胚, 对应的向量场在原点的值必为零向量, 因此代替  $V(\mathbb{R}^n)$  考虑  $\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)$ . 设

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n),$$

因而  $X_i \in \mathcal{M}_n$  ( $i = 1, \dots, n$ ). 利用  $\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X$ , 通过积分可得到单参数局部微分同胚群  $\{\phi_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)\}$  满足  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t \Big|_{t=0} = X$  (根据定理 1.3.2). 类似地, 假定

$$Y = \sum_{j=1}^p Y_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p),$$

相应地有单参数局部微分同胚群  $\{\psi_t : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)\}$ , 从而  $\{(\phi_t, \psi_t)\}$  是  $\mathcal{A}$  中的单参数子群. 令  $f_t = \psi_t \circ f_0 \circ \phi_t^{-1}$ , 其中  $f_0 \in \epsilon^0(n, p)$ , 则可想象  $t \mapsto f_t \in \epsilon^0(n, p)$  为位于轨道  $\mathcal{A} \cdot f_0 \subset \epsilon^0(n, p)$  中的一条  $C^\infty$  道路, 该道路经过  $f_0$ . 可以证明

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) \Big|_{t=0} = -Df_0(x) \cdot X(x) + Y(f_0(x))$$

(留给读者补述), 它对应于道路  $\{f_t\}$  ( $t \in (\mathbb{R}, 0)$ ) 在  $f_0$  处的切向量.

**定义 8.2.3** 设  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽, 轨道  $\mathcal{A} \cdot f$  在  $f$  处的切空间  $T\mathcal{A}(f)$  定义为

$$T\mathcal{A}(f) = \{Df \cdot X + Y \circ f \mid X \in \mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n), Y \in \mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)\}.$$

**例 1** 计算稳定映射芽  $f \in \epsilon^0(n, p)$  的切空间.

任取  $g \in \epsilon(n, p)$ . 过  $f$  的光滑道路芽由  $\mathbb{R}$ -水平保持的  $C^\infty$  映射芽  $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$  给出, 这里  $F(t, x) = (t, f_t(x))$ ,  $f_t(x) = f(x) + tg(x)$ . 显然

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = g.$$

因  $f$  是稳定的,  $F$  作为  $f$  的 1-参数开折是  $\mathcal{A}$ -平凡的, 故  $g \in T_f \mathcal{A}(f)$ . 由于  $g \in \epsilon(n, p)$  是任取的, 所以  $T_f \mathcal{A}(f) = \epsilon(n, p)$ .

本例给出一个映射芽  $f \in \epsilon^0(n, p)$  为稳定芽的必要条件:

$$T_e \mathcal{A}(f) = \epsilon(n, p).$$

**定义 8.2.4** 若  $f \in \epsilon^0(n, p)$  满足条件  $T_e \mathcal{A}(f) = \epsilon(n, p)$ , 则  $f$  叫做无穷小稳定芽.

下一章将证明无穷小稳定芽必为稳定芽, 因此无穷小稳定性  $\Leftrightarrow$  稳定性. 更一般地, 我们有下述

**定义 8.2.5** 设  $f \in \epsilon^0(n, p)$ . 说  $f$  是一个具有有限  $\mathcal{A}$ -余维的映射芽, 如果商空间

$$\epsilon(n, p) / T_e \mathcal{A}(f)$$

是一个有限维实向量空间. 在这种情形下, 将商空间  $\epsilon(n, p) / T_e \mathcal{A}(f)$  的维数定义为  $f$  的  $\mathcal{A}$ -余维数, 记为  $\text{Codim}(f, \mathcal{A})$ , 即

$$\text{Codim}(f, \mathcal{A}) = \dim_{\mathbb{R}} \epsilon(n, p) / T_e \mathcal{A}(f).$$

由例 1 知, 稳定芽的  $\mathcal{A}$ -余维数为 0.

### 8.2.3 切空间的代数描述

设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽. 若  $C^\infty$  映射芽  $\sigma: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow T(\mathbb{R}^p)$  满足条件  $\pi_p \circ \sigma = f$ , 其中  $\pi_p: T(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  为自然投影, 则称  $\sigma$  为沿  $f$  的向量场芽.

沿  $f$  的向量场芽所成之集记为  $V(f)$ , 它是一个秩为  $p$  的自由  $\epsilon_n$ -模. 事实上, 设  $\{y_1, \dots, y_p\}$  为  $(\mathbb{R}^p, 0)$  的局部坐标系, 则沿  $f$  的向量场芽  $\frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f$  组成  $V(f)$  的一组自由基. 借助于这组基, 将  $V(f)$  等同于  $\epsilon_n^{\times p}$ .

特别, 若  $f$  为  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的恒同映射芽, 则  $V(f)$  就是前面所说的  $V(\mathbb{R}^n)$ , 它是一个秩为  $n$  的自由  $\epsilon_n$ -模. 借助于  $V(\mathbb{R}^n)$  的自由基  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ,  $V(\mathbb{R}^n)$  等同于  $\epsilon_n^{\times n}$ . 如果  $f$  为  $(\mathbb{R}^p, 0)$  上的恒同映射芽, 此时的  $V(f)$  就是  $V(\mathbb{R}^p)$ , 它是秩为  $p$  的自由  $\epsilon_p$ -模. 借助于  $V(\mathbb{R}^p)$  的自由基  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p}$ ,  $V(\mathbb{R}^p)$  等同于  $\epsilon_p^{\times p}$ .

与上述模相联系的有两个重要同态.

**定义 8.2.6** 设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽.

(i)  $tf: V(\mathbb{R}^n) \rightarrow V(f)$  定义为  $tf(X)(x) = Df(x)(X(x))$ ,  $X \in V(\mathbb{R}^n)$ ,  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . 它是两个自由  $\epsilon_n$ -模之间的线性映射, 其矩阵为  $f$  的 Jacobi 矩阵.

(ii)  $wf: V(\mathbb{R}^p) \rightarrow V(f)$  定义为  $wf(Y)(x) = Y \circ f(x)$ ,  $Y \in V(\mathbb{R}^p)$ ,  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . 这是关于  $f^*$  的同态.

**注** 设  $A$  是一个  $R$ -模,  $B$  是一个  $S$ -模,  $\phi: R \rightarrow S$  为环同态. 我们说  $\Phi: A \rightarrow B$  是一个关于  $\phi$  的同态, 如果对所有  $\alpha, \beta \in R$ ,  $a, b \in A$ , 有  $\Phi(\alpha a + \beta b) = \phi(\alpha)\Phi(a) + \phi(\beta)\Phi(b)$ .

利用上面定义的同态, 我们将  $f \in \epsilon^0(n, p)$  的切空间与轨道切空间分别写为

$$T_e \mathcal{A}(f) = tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p))$$

和

$$T \mathcal{A}(f) = tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)).$$

上面二等式右边和式中的第一项为  $\epsilon_n$ -模, 对应于群  $\mathcal{R}$  的作用, 第二项则为  $f^* \epsilon_p$ -模, 或说借助于环同态  $f^*: \epsilon_p \rightarrow \epsilon_n$ , 视为  $\epsilon_p$ -模, 显然它对应于群  $\mathcal{L}$  的作用. 因此自然地定义

$$T_e \mathcal{R}(f) = tf(V(\mathbb{R}^n)), \quad T \mathcal{R}(f) = tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)),$$

它们分别叫做对应于群  $\mathcal{R}$  的作用在  $f$  处的切空间及轨道  $\mathcal{R} \cdot f$  在  $f$  处的切空间. 又令

$$T_e \mathcal{L}(f) = wf(V(\mathbb{R}^p)), \quad T \mathcal{L}(f) = wf(\mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)),$$

它们分别叫做对应于群  $\mathcal{L}$  的作用在  $f$  处的切空间及轨道  $\mathcal{L} \cdot f$  在  $f$  处的切空间. 又

$$T_e \mathcal{A}(f) = T_e \mathcal{R}(f) + T_e \mathcal{L}(f),$$

$$T \mathcal{A}(f) = T \mathcal{R}(f) + T \mathcal{L}(f).$$

现在回到切空间  $T_e \mathcal{A}(f) \subset V(f)$  的定义, 这里  $f \in \epsilon^0(n, p)$ . 设  $e_1, \dots, e_p$  为向量空间  $\mathbb{R}^p$  的标准基, 将这些向量视为常值映射芽, 看作  $\epsilon(n, p)$  中的元素, 因而它们组成  $\epsilon_n$ -模  $\epsilon(n, p) = \epsilon_n^{\times p}$  的生成元组,

$$\epsilon(n, p) = \epsilon_n \{e_1, \dots, e_p\}.$$

类似地, 有

$$\epsilon^0(n, p) = \mathcal{M}_n \{e_1, \dots, e_p\}.$$

设  $X = (X_1, \dots, X_n) \in V(\mathbb{R}^n)$ ,  $X_i \in \epsilon_n$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 则

$$Df \cdot X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

又设  $Y = (Y_1, \dots, Y_p) \in V(\mathbb{R}^p)$ ,  $Y_j \in \epsilon_p$  ( $j = 1, \dots, p$ ), 则有

$$Y \circ f = \sum_{j=1}^p (Y_j \circ f) \cdot e_j,$$

从而

$$T_e \mathcal{A}(f) = \epsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} + f^*(\epsilon_p) \{e_1, \dots, e_p\}.$$

将  $f^*(\epsilon_p) \{e_1, \dots, e_p\}$  简记为  $\epsilon_p \{e_1, \dots, e_p\}$ , 于是

$$T_e \mathcal{A}(f) = \epsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} + \epsilon_p \{e_1, \dots, e_p\}.$$

类似地, 有

$$T \mathcal{A}(f) = \mathcal{M}_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} + \mathcal{M}_p \{e_1, \dots, e_p\}.$$

显然  $T_e \mathcal{R}(f) = \epsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$  与  $T \mathcal{R}(f) = \mathcal{M}_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$  均为有限生成的  $\epsilon_n$ -模, 但是  $T_e \mathcal{A}(f)$  与  $T \mathcal{A}(f)$  是  $\epsilon_n$ -模与  $\epsilon_p$ -模之

和,研究中常常需要考虑它们作为  $\epsilon_p$ -模是否有限生成,为此应用 Malgrange 预备定理作为研究工具.

注  $\epsilon_n$ -模  $\epsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$  叫做  $f$  的 Jacobi 模, 有时记为

$J(f)$ , 它是函数芽的 Jacobi 理想的推广.

**定义 8.2.7**  $f \in \epsilon^0(n, p)$  叫做有限奇点型 (finite singularity type) 的映射芽, 若商空间  $V(f)/T_e \mathcal{A}(f)$  作为  $\epsilon_p$ -模 (借助于环同态  $f^*$ ) 是有限生成的.

这意指存在有限个  $\sigma_1, \dots, \sigma_q \in V(f)$ , 使得

$$T_e \mathcal{A}(f) + \epsilon_p \{ \sigma_1, \dots, \sigma_q \} = V(f).$$

显然, 具有有限  $\mathcal{A}$ -余维的映射芽是有限奇点型的 (或简称为有限型的). 但反过来不真, 见 §8.3 中例.

#### 8.2.4 在导网空间中的轨道切空间

设  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  为  $C^\infty$  映射芽. 对任意整数  $r \geq 1$ ,  $f$  取  $r$ -导网得  $j^r f$ , 它可表示为  $f$  的  $r$  阶 Taylor 多项式映射. 显然  $j^r f \in \epsilon(n, p) / \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \epsilon(n, p) = J_{n, p}^r$ , 其中  $\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \epsilon(n, p)$  是  $\epsilon_n$ -子模, 它由  $r$ -平坦的映射芽组成 (即这样的映射芽的每一分量均属于  $\mathcal{M}_n^{r+1}$ ). 令  $j^r: \epsilon(n, p) \rightarrow J_{n, p}^r$  为标准投影, 则  $j^r(\epsilon^0(n, p)) = \mathcal{M}_n \epsilon(n, p) / \mathcal{M}_n^{r+1} \epsilon(n, p) = J_{n, p}^{r, 0}$ , 它等同于从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^p$  的次数不大于  $r$  且常数项为 0 的多项式映射所组成的向量空间, 因而是一个有限维  $C^\infty$  流形.

假定  $f \in \epsilon^0(n, p)$ , 则过  $f$  的轨道  $\mathcal{A} \cdot f \subset \epsilon^0(n, p)$ . 利用 §1.3 中使用的记号, 则  $\mathcal{A} = L_n \times L_p$ , 且对任意  $r \geq 1$ ,  $L_n^r$  及  $L_p^r$  均为 Lie 群 (据命题 1.3.1), 分别记为  $\mathcal{R}^r$  和  $\mathcal{L}^r$ , 因而  $\mathcal{A}^r = \mathcal{R}^r \times \mathcal{L}^r$  也是 Lie 群.

因为对群  $\mathcal{A}$  中的任意  $(\phi, \psi)$ , 有

$$\psi \circ (\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \epsilon(n, p)) \circ \phi^{-1} = \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \epsilon(n, p), \quad r \geq 1,$$

所以群  $\mathcal{A}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用  $\mathcal{A} \times \epsilon^0(n, p) \rightarrow \epsilon^0(n, p)$  诱导出

Lie 群  $\mathcal{A}^r$  在  $C^\infty$  流形  $J_{n,p}^{r,0}$  上的商作用  $\mathcal{A}^r \times J_{n,p}^{r,0} \rightarrow J_{n,p}^{r,0}$ , 从而轨道  $\mathcal{A}^r \cdot f$  在  $j^r$  下的像

$$j^r(\mathcal{A}^r \cdot f) = \mathcal{A}^r \cdot j^r f$$

是  $J_{n,p}^{r,0}$  中的一条经过  $j^r f$  的  $\mathcal{A}^r$ -轨道, 它是  $J_{n,p}^{r,0}$  中的子流形.

**命题 8.2.2** 设  $f_0 \in \epsilon^0(n, p)$ , 则对任意的整数  $r \geq 1$ , 轨道  $\mathcal{A}^r \cdot j^r f_0$  在  $j^r f_0$  处的切空间  $T\mathcal{A}^r \cdot j^r f_0$  是  $J_{n,p}^r$  的子空间  $j^r(T\mathcal{A}(f_0))$ , 即

$$T\mathcal{A}^r \cdot j^r f_0 = j^r(T\mathcal{A}(f_0)).$$

**证** 设  $\{(\phi_t, \psi_t) \in \mathcal{A} \mid t \in (\mathbb{R}, 0)\}$  为  $\mathcal{A}$  中的单参数子群, 令

$$f_t = \psi_t \circ f_0 \circ \phi_t^{-1},$$

则  $t \mapsto f_t$  是位于轨道  $\mathcal{A} \cdot f_0 \subset \epsilon^0(n, p)$  中的一条  $C^\infty$  道路, 该道路经过  $f_0$ . 如前所述,  $\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \in T\mathcal{A}(f_0)$ , 又

$$j^r \left( \frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (j^r f_t) \Big|_{t=0}. \quad (5)$$

因  $f_t \in \mathcal{A} \cdot f_0$ , 故  $j^r f_t \in j^r(\mathcal{A} \cdot f_0) = \mathcal{A}^r \cdot j^r f_0$ , 并且

$$\frac{\partial}{\partial t} (j^r f_t) \Big|_{t=0} \in T\mathcal{A}^r \cdot j^r f_0,$$

所以由等式(5)可推得本命题成立.

### § 8.3 切空间计算举例

**例 1** 设  $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $x \mapsto (x^2, 0)$ , 这里  $n = 1, p = 2$ . 我们有  $f^* \mathcal{M}_p = \mathcal{M}_n^2$ , 据 Malgrange 预备定理,

$$\epsilon_n = \epsilon_p \{1, x\}, \quad (1)$$

这说明  $\epsilon_n$  作为  $\epsilon_p$ -模是有限生成的, 生成元为 1 和  $x$ , 因此

$$\epsilon(n, p) = \epsilon_n \oplus \epsilon_n = \epsilon_p \{e_1, e_2, g_1, g_2\}, \quad (2)$$

其中  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $g_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ . 显然  $e_1, e_2 \in T_e \mathcal{A}(f)$ ,  $g_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} Df \in J(f)$ , 但是  $g_2 \notin T_e \mathcal{A}(f)$ , 因此

$$T_e \mathcal{A}(f) + \epsilon_p \cdot g_2 = \epsilon(n, p), \quad (3)$$

据定义 8.2.7,  $f$  是有限型的. 但  $f$  不是有限  $\mathcal{A}$ -余维的映射芽. 可以验证, 若  $(\xi_1, \xi_2) \in \epsilon_n \oplus \epsilon_n$ , 则  $(\xi_1, \xi_2) \in T_e \mathcal{A}(f)$  的充要条件是  $\xi_2$  为  $x$  的偶函数(留作练习).

**例 2** 设  $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $x \mapsto (x^2, x^3)$ . 同上例一样,  $f^* \mathcal{M}_p = \mathcal{M}_n^2$ , 因此上例中的(1)~(3)式均成立. 然而有

$$\mathcal{M}_p \cdot g_2 \subset T_e \mathcal{A}(f), \quad (4)$$

事实上,  $\mathcal{M}_p$  由靶空间  $\mathbb{R}^2$  的坐标函数  $y_1, y_2$  生成,  $\mathcal{M}_p \cdot g_2$  作为  $\epsilon_p$ -模由  $f^* y_1 \cdot g_2$  和  $f^* y_2 \cdot g_2$  生成, 即

$$\mathcal{M}_p \cdot g_2 = \epsilon_p \{h_1, h_2\},$$

其中

$$h_1 = f^* y_1 \cdot g_2 = x^2 \cdot g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix} = f^* y_2 \cdot e_2,$$

$$h_2 = f^* y_2 \cdot g_2 = x^3 \cdot g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x^4 \end{bmatrix} = (f^* y_1)^2 \cdot e_2.$$

由(3)和(4)式, 得到

$$T_e \mathcal{A}(f) + \mathbb{R} \cdot g_2 = \epsilon(n, p),$$

并且容易验证  $g_2 \notin T_e \mathcal{A}(f)$ .

由此可见,  $f$  是一个具有有限  $\mathcal{A}$ -余维的映射芽, 并且  $\text{Codim}(f, \mathcal{A}) = 1$ .

**例 3** 考虑折叠手帕 (folded handkerchief) 映射芽  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , 它定义为  $f(x, y) = (x^2, y^2)$ . 这里  $n = p = 2$ .

$$f^* \mathcal{M}_p = \langle x^2, y^2 \rangle_{\epsilon_n} \supset \mathcal{M}_n^3,$$

这里  $\langle x^2, y^2 \rangle_{\epsilon_n}$  表示  $\epsilon_n$  中由  $x^2, y^2$  生成的理想. 由 Malgrange 预备定理, 有

$$\epsilon_n = \epsilon_p \{1, x, y, xy\}. \quad (1')$$

$\epsilon(n, p) = \epsilon_n \oplus \epsilon_p$  作为  $\epsilon_p$ -模是有限生成的, 它有 8 个生成元:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} xy \\ 0 \end{bmatrix}$  及  $\begin{bmatrix} 0 \\ xy \end{bmatrix}$ . 又

$$Df = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix},$$

因此  $f$  的 Jacobi 模  $J(f) = \epsilon_n \left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2y \end{bmatrix} \right\}$ . 这一事实连同 (1') 式便可以证明

$$T_e \mathcal{A}(f) + \epsilon_p \{h_1, h_2\} = \epsilon(n, p),$$

其中  $h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$  不属于  $T_e \mathcal{A}(f)$ , 因此  $f$  是有限奇点型的, 但  $f$  不具有有限  $\mathcal{A}$ -余维.

事实上, 设  $(\xi_1, \xi_2) \in \epsilon(n, p)$ , 那么  $(\xi_1, \xi_2) \in T_e \mathcal{A}(f)$  是指存在  $\eta, \zeta \in \epsilon_n$  及  $Y_1, Y_2 \in \epsilon_p$ , 使得

$$x \cdot \eta + f^* Y_1 = \xi_1, \quad y \cdot \zeta + f^* Y_2 = \xi_2.$$

第一个方程有解  $\eta$  和  $Y_1$  当且仅当存在  $Y_1 \in \epsilon_p$ , 使得对于  $x = 0$ ,

$$\xi_1 - f^* Y_1 = 0,$$

即

$$\xi_1(0, y) = Y_1(0, y^2),$$

因此  $\xi_1(0, y)$  是  $y$  的偶函数. 类似地可以证明第二个方程有解  $\xi$  和  $Y_2$  的充要条件是  $\xi_2(x, 0)$  是  $x$  的偶函数. 于是  $f$  的  $\mathcal{A}$ -余维数是无限的.

例 4 设  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $(x, y) \mapsto (x^2 + y^3, y^2 + x^3)$ ,

它可以看作对例 3 的映射作扰动而得到的.

$$f^* \mathcal{M}_p = \langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle_{\epsilon_n} = \langle x^2, y^2 \rangle_{\epsilon_n},$$

$$Df = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 \\ 3x^2 & 2y \end{bmatrix},$$

$f$  的 Jacobi 模

$$J(f) = \epsilon_n \left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3y^2 \\ 2y \end{bmatrix} \right\}.$$

如例 3 所述,

$$\epsilon_n = \epsilon_p \{1, x, y, xy\}, \quad \epsilon(n, p) = \epsilon_n \oplus \epsilon_n,$$

并且

$$T_e \mathcal{A}(f) + \epsilon_p \{h_1, h_2\} = \epsilon(n, p),$$

其中  $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ ,  $h_2 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$  不属于  $T_e \mathcal{A}(f)$ . 下面证明

$$\mathcal{M}_p \cdot \{h_1, h_2\} \subset T_e \mathcal{A}(f). \quad (1)$$

因  $\epsilon_p$ -模  $\mathcal{M}_p \cdot \{h_1, h_2\}$  由  $f^* y_i \cdot h_j$  生成 ( $i, j = 1, 2$ ), 其中  $y_1, y_2$  为靶空间  $\mathbb{R}^2$  的坐标函数. 欲证 (1) 式成立, 只需证明这些生成元  $f^* y_i \cdot h_j$  属于  $T_e \mathcal{A}(f)$ , 例如考虑  $f^* y_1 \cdot h_1$ , 其他情形的证明类似.

$$f^* y_1 \cdot h_1 = (x^2 + y^3) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x(x^2 + y^3) \end{bmatrix},$$

我们必须解下列方程组

$$\begin{cases} 2x \cdot \xi + 3y^2 \cdot \eta + f^* Y_1 = 0, \\ 3x^2 \cdot \xi + 2y \cdot \eta + f^* Y_2 = x(x^2 + y^3), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\xi, \eta \in \epsilon_n$ ,  $Y_1, Y_2 \in \epsilon_p$ . 方程组(2)等价于下列方程组

$$\begin{cases} x(4 - 9xy)\xi = -2f^* Y_1 - 3y[x(x^2 + y^3) - f^* Y_2], \\ y(4 - 9xy)\eta = 2[x(x^2 + y^3) - f^* Y_2] + 3xf^* Y_1. \end{cases} \quad (3)$$

因芽  $4 - 9xy$  在  $\epsilon_n$  中是可逆的, 为解方程组(3), 只需求  $Y_1$  和  $Y_2$ , 使得上述方程组的右边分别属于由  $x$  及  $y$  所生成的理想. 为此, 对(3)式中第一个方程, 令  $x = 0$ ; 而对第二个方程令  $y = 0$ , 得

$$\begin{cases} -2Y_1(y^3, y^2) + 3yY_2(y^3, y^2) = 0, \\ 2x^3 - 2Y_2(x^2, x^3) + 3xY_1(x^2, x^3) = 0, \end{cases}$$

$Y_1 = -\frac{6}{5}y_1$ ,  $Y_2 = -\frac{4}{5}y_2$  为其解.

综合上面的分析, 我们有

$$T_e \mathcal{A}(f) + \mathbb{R}\{h_1, h_2\} = \epsilon(n, p),$$

因此  $\text{Codim}(f, \mathcal{A}) = 2$ .

## § 8.4 接触等价群与相应的切空间

设  $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽, 取它们的代表并作

其图形,这两个图形都是  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  的子流形. 如何描述  $\text{graph } f$  及  $\text{graph } g$  与子空间  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  有相同的“接触”呢? 直观的想法是在  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  内引入一个保原点的  $C^\infty$  局部坐标变换  $\phi$ , 要求  $\phi$  保持子空间  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ , 并把  $\text{graph } f$  映成  $\text{graph } g$ . 下面来建立接触等价概念.

### 8.4.1 接触等价

设  $\phi: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  为微分同胚芽, 满足下列条件: 存在映射芽  $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , 使得下列图表可换:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & \phi \downarrow & & h \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array} \quad (1)$$

其中  $i: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ ,  $x \mapsto (x, 0)$  与  $\pi: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $(x, y) \mapsto x$  分别为包含映射芽和标准投射芽. 不难看出  $h$  由  $\phi$  惟一确定并且  $h$  是  $C^\infty$  可逆芽.

将满足上述条件的所有  $\phi$  组成的群记为  $\mathcal{K}(n, p)$  或简记为  $\mathcal{K}$ , 取映射的复合作为群运算. 由  $\phi \circ i = i \circ h$  知,  $\phi$  保持子空间  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . 又由  $\pi \circ \phi = h \circ \pi$  知,  $\phi$  将底空间  $\mathbb{R}^n$  中的点  $x$  处的纤维  $\{x\} \times \mathbb{R}^p$  映为点  $h(x)$  处的纤维  $\{h(x)\} \times \mathbb{R}^p$ , 因此  $\mathcal{K}$  中的任意  $\phi$  可表示为

$$\phi(x, y) = (h(x), \psi(x, y)), \quad (2)$$

其中  $\psi: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  为  $C^\infty$  映射芽, 且

$$\psi(x, 0) = 0, \quad x \in (\mathbb{R}^n, 0). \quad (3)$$

特别, 考虑群  $\mathcal{K}$  中这样一些成员, 它们在  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  上的限制为  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的恒同映射芽. 具有这一性质的所有  $\phi \in \mathcal{K}$  组成  $\mathcal{K}$  的子群, 按照 Mather 使用的符号, 记为  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{C} = \{\phi \in \mathcal{K} \mid \phi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 1_{(\mathbb{R}^n, 0)}\},$$

因此  $\mathcal{C}$  中的  $\phi$  将图表(1)简化为下列可换图表:

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & & \\ & \nearrow i & & \searrow \pi & \\ (\mathbb{R}^n, 0) & & \downarrow \phi & & (\mathbb{R}^n, 0) \\ & \searrow i & & \nearrow \pi & \\ & & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & & \end{array}$$

于是  $\mathcal{C}$  中的任意  $\phi$  可表为

$$\phi(x, y) = (x, \phi(x, y)),$$

其中  $\phi$  如(3)式中所述. 读者可以验证  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{K}$  的正规子群.

现在定义群  $\mathcal{K}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用. 设  $\phi \in \mathcal{K}, f \in \epsilon^0(n, p)$ , 则  $\phi \cdot f \in \epsilon^0(n, p)$  依下列公式给出:

$$(1, \phi \cdot f) = \phi \circ (1, f) \circ h^{-1}, \quad (4)$$

其中  $1: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  为恒同映射芽,  $h$  使图表(1)可换.

容易看出

$$\phi(\text{graph } f) = \text{graph}(\phi \cdot f). \quad (5)$$

若  $\phi(x, y) = (h(x), \phi(x, y))$ , 且令  $g = \phi \cdot f$ , 则由(4)式可得

$$g \circ h(x) = \phi(x, f(x)). \quad (6)$$

(4)~(6)式描述了群  $\mathcal{K}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用. (6)式说明集  $\{f = 0\} \subset \mathbb{R}^n$  经微分同胚  $h$  变换为集  $\{g = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ , 因此  $\text{graph } f$  与  $\text{graph } g$  同  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  有相同的接触. 不仅如此, (5)式说明  $\phi$  将  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  的  $n$  维子流形  $\text{graph } f$  变换为另一子流形, 该子流形是  $g = \phi \cdot f$  的图. 正因为这样, 把群  $\mathcal{K}$  叫做接触等价群,  $\mathcal{K} \cdot f$  叫做  $\epsilon^0(n, p)$  中经过  $f$  的接触轨道或  $\mathcal{K}$ -轨道. 属于同一  $\mathcal{K}$ -轨道的二映射芽称为接触等价的或  $\mathcal{K}$ -等价的.

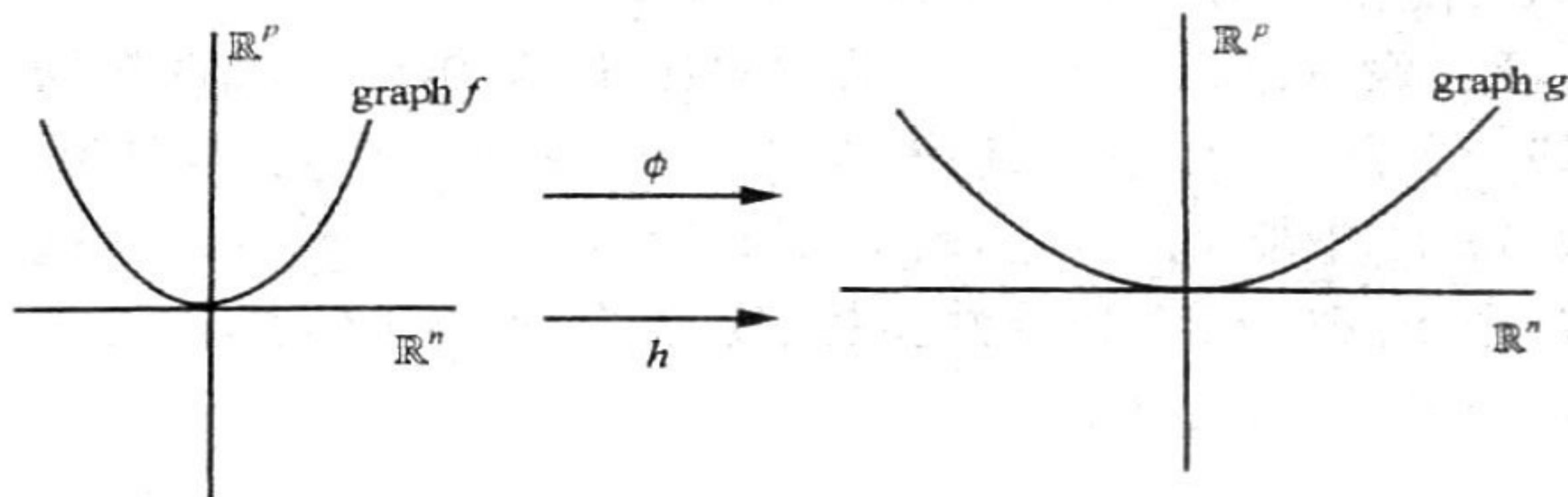


图 8.2

**命题 8.4.1** 二映射芽  $f, g \in \epsilon^0(n, p)$  属于同一条  $\mathcal{K}$ -轨道当且仅当存在微分同胚芽  $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , 使得

$$h^*(g^* \mathcal{M}_p) = f^* \mathcal{M}_p.$$

**注**  $\epsilon_n$  中理想  $f^* \mathcal{M}_p$  和  $g^* \mathcal{M}_p$  分别由  $f$  的  $p$  个分量  $f_1, \dots, f_p$  及  $g$  的  $p$  个分量  $g_1, \dots, g_p$  所生成. 因  $h$  是可逆芽,  $h^*: \epsilon_n \rightarrow \epsilon_n$  为环同构. 命题条件说明理想  $f^* \mathcal{M}_p$  和  $g^* \mathcal{M}_p$  是同构的.

**证**  $\Rightarrow$  假设  $g = \phi \cdot f$ , 其中  $\phi: (x, y) \mapsto (h(x), \psi(x, y))$  为  $\mathcal{K}$  中的成员. 依(6)式,  $g \circ h(x) = \psi(x, f(x))$ , 再据(3)式,  $\psi(x, 0) = 0$ , 因此  $\psi$  的每一分量  $\psi_i$  可写为

$$\psi_i(x, y) = \sum_{j=1}^p \psi_i^j(x, y) \cdot y_j, \quad i = 1, \dots, p,$$

$g \circ h$  的分量可写为

$$g_i \circ h(x) = \sum_{j=1}^p \psi_i^j(x, f(x)) \cdot f_j(x), \quad i = 1, \dots, p.$$

因  $\phi$  是局部微分同胚, 故  $p \times p$  矩阵  $(\psi_i^j(0, 0))$  是可逆的, 从而有  $h^*(g^* \mathcal{M}_p) = f^* \mathcal{M}_p$ .

$\Leftarrow$  为证充分性, 先证下面的

**引理 8.4.1** 设  $A, B$  为  $p \times p$  实矩阵, 则存在一个  $p \times p$  实

矩阵  $C$ , 使得  $C(I - AB) + B$  是可逆矩阵.

证 设  $\alpha, \beta: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  分别为对应于  $A$  和  $B$  的线性变换. 选取  $\mathbb{R}^p$  的一个基  $e_1, \dots, e_p$ , 使得  $\beta e_i = 0$  ( $i = r+1, \dots, p$ ), 这里  $r$  为  $\beta$  的秩. 在  $\mathbb{R}^p$  中取  $e'_1, \dots, e'_p$ , 使得  $\beta e_1, \dots, \beta e_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p$  为  $\mathbb{R}^p$  的基. 令  $\gamma: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  为线性变换, 定义为  $\gamma e_i = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $\gamma e_i = e'_i$  ( $r+1 \leq i \leq p$ ), 那么

$$(\gamma(I - \alpha\beta) + \beta)(e_i) = \begin{cases} \beta e_i + \sum_{j=r+1}^p C_{ij} e'_j, & \text{若 } 1 \leq i \leq r, \\ e'_i, & \text{若 } r+1 \leq i \leq p, \end{cases}$$

因而  $\gamma(I - \alpha\beta) + \beta$  是可逆线性变换. 将对应于  $\gamma$  的矩阵记为  $C$ , 本引理得证.

现证充分性. 假定存在  $(\mathbb{R}^n, 0)$  上的可逆芽  $h$ , 使得  $h^*(g^* \mathcal{M}_p) = f^* \mathcal{M}_p$ . 欲证  $g$  与  $f$  等价, 只需证  $g \circ h$  与  $f$  是  $\mathcal{C}$ -等价的. 为简便起见, 将  $g \circ h$  仍记为  $g$ , 假设条件则变为  $g^* \mathcal{M}_p = f^* \mathcal{M}_p$ , 由此有

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^p \phi_i^j(x) \cdot f_j(x), \quad \phi_i^j \in \varepsilon_n, \quad i = 1, \dots, p,$$

和

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^p \psi_i^j(x) \cdot g_j(x), \quad \psi_i^j \in \varepsilon_n, \quad i = 1, \dots, p,$$

用矩阵来表示,

$$g = \phi \cdot f, \quad f = \psi \cdot g,$$

其中  $\phi = (\phi_i^j)_{1 \leq i, j \leq p}$ ,  $\psi = (\psi_i^j)_{1 \leq i, j \leq p}$ , 因此

$$g = [\phi + C(I - \psi \cdot \phi)] \cdot f$$

对任意矩阵  $C$  皆成立. 按照上述引理, 可选取  $C$ , 使得  $\phi(0) + C(I - \psi(0) \cdot \phi(0))$  为可逆矩阵. 记  $\phi' = \phi + C(I - \psi \cdot \phi)$ , 令

$$\tilde{\phi}: (x, y) \mapsto (x, \phi'(x) \cdot y),$$

易见  $\phi \in \mathcal{C}$  且  $g = \phi \cdot f$ . 证毕.

记  $I(f) = f^* \mathcal{M}_p$ . 由命题 8.4.1, 可得到

**推论 8.4.1** 设  $f, g \in \epsilon^0(n, p)$ , 则下列诸断言是等价的:

- (i)  $f$  与  $g$  属于同一条  $\mathcal{C}$ -轨道, 即  $f$  和  $g$  是  $\mathcal{C}$ -等价的,
- (ii) 存在  $\phi \in \mathcal{C}$ , 使得  $\phi(\text{graph } f) = \text{graph } g$ ,
- (iii)  $I(f) = I(g)$ ,
- (iv) 存在可逆  $p \times p$  矩阵  $(u_{ij})$ , ( $u_{ij} \in \epsilon_n$ ), 使得

$$f_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} g_j, \quad i = 1, \dots, p.$$

至此, 我们已介绍了 Mather 的 5 类微分同胚芽群. 右等价群可看作  $\mathcal{K}$  的子群. 事实上, 将每一  $h \in \mathcal{R}$  等同于  $h \times 1_{(\mathbb{R}^p, 0)} \in \mathcal{K}$ , 其中  $1_{(\mathbb{R}^p, 0)}$  表  $(\mathbb{R}^p, 0)$  上的恒同映射芽, 又  $\mathcal{R}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用是  $\mathcal{K}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用的限制. 类似地, 左等价群  $\mathcal{L}$  也可以看成  $\mathcal{K}$  的子群. 另一方面,  $\mathcal{K}$  是  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{C}$  的半直积, 这是因为  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{K}$  的正规子群, 且  $\mathcal{K}$  中的每一元素可惟一地表为积  $rc$ , 这里  $r \in \mathcal{R}, c \in \mathcal{C}$ . 此外, 群  $\mathcal{A}$  可以用明显的方式等同于  $\mathcal{K}$  的子群,  $\mathcal{A}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用是  $\mathcal{K}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用的限制. 又群  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{R}$  与  $\mathcal{L}$  的直积, 群  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{L}$  均可看作  $\mathcal{A}$  的子群.

下面说明  $\mathcal{A}$ -等价细于  $\mathcal{K}$ -等价. 设  $f, g \in \epsilon^0(n, p)$  使得  $f \sim_{\mathcal{A}} g$ , 于是存在  $(h, k) \in \mathcal{A}$ , 使得  $f \circ h = k \circ g$ . 令  $\phi = h \times k$ , 有

$$\begin{aligned} \phi \circ (1, g)(x) &= (h \times k)(x, g(x)) = (h(x), k(g(x))) \\ &= (h(x), f(h(x))) = (1, f) \circ h(x), \quad \forall x \in (\mathbb{R}^n, 0), \end{aligned}$$

从而

$$\phi \circ (1, g) = (1, f) \circ h,$$

这说明  $f$  与  $g$  是  $\mathcal{K}$ -等价的. 但反过来不真, 见下例.

**例 1** 设  $f, g: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  的定义如下:

$$f(x) = (x^2, 0), \quad g(x) = (x^2, x^3).$$

因为  $I(f) = \langle x^2 \rangle \epsilon_1$ ,  $I(g) = \langle x^2, x^3 \rangle \epsilon_1 = I(f)$ , 所以  $f \sim g$ , 更不待说  $f \sim g$ . 另一方面,  $f$  与  $g$  不是  $\mathcal{A}$ -等价的. 若不然, 则存在  $(h, k) \in \mathcal{A}$ , 使得  $g \circ h = k \circ f$ , 取其代表, 易见  $k$  将  $\text{Im}f - \{0\}$  映为  $\text{Im}g - \{0\}$ . 但这是不可能的, 因  $\text{Im}f - \{0\}$  连通,  $\text{Im}g - \{0\}$  不连通.

### 8.4.2 对应于群 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{C}$ 的切空间及轨道切空间

群  $\mathcal{C}$  的成员  $\phi$  可表示为  $\phi(x, y) = (x, \phi(x, y))$ , 因此只考虑了  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  中的“垂直”形变, 用向量场的语言来描述, 可以用  $V(\pi_2)$  中的成员来表达, 其中  $\pi_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  为标准投射. 又因  $\phi$  保持子空间  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  不动, 即对于与  $0 \in \mathbb{R}^n$  相邻近的点  $x$ , 均有  $\phi(x, 0) = 0$ , 所以只需考虑  $\mathcal{M}_p \cdot V(\pi_2)$ , 用坐标表示, 则为  $\mathcal{M}_p \cdot \underbrace{\epsilon_{n+p} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{n+p}}_{p \text{ 个}} = \mathcal{M}_p \cdot (\epsilon_{n+p})^{\times p}$ . 而群  $\mathcal{K}$  是  $\mathcal{R}$  与  $\mathcal{C}$  的半直积, 相应地考虑  $\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n) + \mathcal{M}_p \cdot V(\pi_2)$ , 其成员  $V$  具有下列形式:

$$V = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p Y_j(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

其中  $X_i \in \mathcal{M}_n$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $Y_j \in \mathcal{M}_p \cdot \epsilon_{n+p}$  ( $j = 1, \dots, p$ ). 据定理 1.3.2, 通过积分可得到单参数局部微分同胚群  $\{\phi_t: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)\}$ , 其中每一  $\phi_t \in \mathcal{K}$  ( $t \in (\mathbb{R}, 0)$ ), 且  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = V$ . 进而考虑  $\mathcal{K}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的无穷小作用, 有下列

**命题 8.4.2** 设  $f \in \epsilon^0(n, p)$ ,  $V$  为  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  上的  $C^\infty$  向量场芽, 具有下列形式:

$$V = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p Y_j(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

其中  $X_i \in \mathcal{M}_n$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $Y_j \in \mathcal{M}_p \cdot \epsilon_{n+p}$  ( $j = 1, \dots, p$ ). 由  $V$  所确定的  $\mathcal{K}$  中单参数子群记为  $\{\phi_t\}$ . 令  $f_t = \phi_t \cdot f$ , 则

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Y(x, f(x)), \quad (7)$$

其中  $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ .

证明留作练习.

记  $\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  为  $V \cdot f$ , 规定  $\epsilon^0(n, p)$  的向量子空间  $T\mathcal{K}(f)$  如下:

$$T\mathcal{K}(f) = \{V \cdot f \mid V \in \mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n) + \mathcal{M}_p \cdot V(\pi_2)\},$$

它叫做过  $f$  的接触轨道  $\mathcal{K} \cdot f$  在  $f$  处的切空间.

**命题 8.4.3** 设  $f \in \epsilon^0(n, p)$ , 则

$$T\mathcal{K}(f) = tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f).$$

**证** 取  $V \cdot f \in T\mathcal{K}(f)$ . 由表达式(7)及  $Y(x, 0) = 0$ ,  $Y$  的每一分量  $Y_i (i = 1, \dots, p)$  可表为

$$Y_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j Y^j(x, y), \quad Y^j \in \epsilon_{n+p}, \quad j = 1, \dots, p.$$

令  $\alpha: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$ , 显然  $\alpha$  是一个浸入芽, 它是从  $(\mathbb{R}^n, 0)$  到  $\text{graph } f$  的局部微分同胚, 且  $\text{graph } f$  是  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  中的一个  $n$  维微分子流形芽, 因而借助于  $\text{graph } f$  拉回,  $\epsilon_{n+p}$  映成  $\epsilon_n$ , 于是

$$Y_i(x, f(x)) = \sum_{j=1}^p f_j(x) Y^j(x, f(x)) \in f^* \mathcal{M}_p \cdot \epsilon_n,$$

并且  $Y(x, f(x)) \in f^* \mathcal{M}_p \cdot \epsilon_n^{\times p}$  或  $Y(x, f(x)) \in f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f)$  ( $V(f)$  等同于  $\epsilon_n^{\times p}$ ). 由于  $Y_i$  是任取的, 所以可得到  $f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f)$  的所有成员. 此外,

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid X_i \in \mathcal{M}_n, i = 1, \dots, n \right\} &= \mathcal{M}_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \\ &= tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)), \end{aligned}$$

于是命题得证.

由上述命题, 自然引入下面的

**定义 8.4.1** 设  $f \in \epsilon^0(n, p)$ . 令

(i)  $T_e \mathcal{C}(f) = T \mathcal{C}(f) = f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f)$ , 称为在群  $\mathcal{C}$  作用下于  $f$  处的切空间.

(ii)  $T_e \mathcal{K}(f) = T_e \mathcal{R}(f) + T_e \mathcal{C}(f)$ , 称为在群  $\mathcal{K}$  作用下于  $f$  处的切空间.

又轨道切空间  $T \mathcal{K}(f)$  可写为

$$T \mathcal{K}(f) = T \mathcal{R}(f) + T \mathcal{C}(f).$$

易见这些切空间均为  $\epsilon_n$ -模, 而且都是有限生成的, 计算起来较为方便.

### 8.4.3 $\mathcal{K}$ -轨道在导网空间中的投影

群  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(n, p)$  是群  $L_{n+p}$  的子群, 这里  $L_{n+p}$  是由  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  上的微分同胚芽组成的群. 将  $\mathcal{K}$  中的成员  $\phi$  取  $r$ -导网 ( $r \geq 1$ ), 记为  $j^r \phi$ , 令

$$\mathcal{K}^r = \{j^r \phi \mid \phi \in \mathcal{K}\},$$

则  $\mathcal{K}^r$  是  $L_{n+p}^r$  的 Lie 子群(留作练习).  $J^r : \epsilon(n, p) \rightarrow J_{n+p}^r$  为标准投影(见 §8.2 中第四段). 可以证明群  $\mathcal{K}$  在  $\epsilon^0(n, p)$  上的作用诱导出 Lie 群  $\mathcal{K}^r$  在  $C^\infty$  流形  $J_{n+p}^{r,0}$  上的作用, 并且轨道  $\mathcal{K} \cdot f$  ( $f \in \epsilon^0(n, p)$ ) 在  $j^r$  下的像  $j^r(\mathcal{K} \cdot f) = \mathcal{K}^r \cdot j^r f$  是  $J_{n+p}^{r,0}$  中的一条经过  $j^r f$  的  $\mathcal{K}^r$ -轨道, 它是  $J_{n+p}^{r,0}$  中的子流形.

**命题 8.4.4** 设  $f \in \epsilon^0(n, p)$ , 则对任意正整数  $r$ , 轨道  $\mathcal{K}^r \cdot j^r f$  在  $j^r f$  处的切空间  $T \mathcal{K}^r \cdot j^r f$  是  $J_{n+p}^r$  中的子空间  $j^r(T \mathcal{K}(f))$ , 即

$$T \mathcal{K}^r \cdot j^r f = j^r(T \mathcal{K}(f)).$$

证明留作练习.

## § 8.5 映射芽的 $\mathcal{K}$ -余维数

**定义 8.5.1** 设  $f \in \epsilon^0(n, p)$ . 若  $T_e \mathcal{K}(f)$  在  $V(f)$  中具有有

限余维,则称  $f$  是一个具有有限  $\mathcal{K}$ -余维的映射芽.在这种情形下,将商空间  $V(f)/T_e\mathcal{K}(f)$  的维数定义为  $f$  的  $\mathcal{K}$ -余维数,记为  $\text{Codim}(f, \mathcal{K})$ .

等价地,若  $f$  具有有限  $\mathcal{K}$ -余维,则

$$\text{Codim}(f, \mathcal{K}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon(n, p)}{\varepsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} + I(f) \cdot \varepsilon(n, p)}.$$

根据命题 3.1.1,有下列判别法.

**命题 8.5.1** 映射芽  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  具有有限  $\mathcal{K}$ -余维的必要充分条件是存在正整数  $k$ , 使得  $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon(n, p) \subset \varepsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} + I(f) \cdot \varepsilon(n, p)$ .

将  $f$  的分量记为  $f_1, \dots, f_p$ , 又  $\varepsilon(n, p) = \underbrace{\varepsilon_n \oplus \dots \oplus \varepsilon_n}_{p \uparrow}$ , 故  $I(f) \cdot \varepsilon(n, p)$  由所有的  $p$ -联组  $(0, \dots, f_i, \dots, 0)$  所生成, 其中  $f_i$  在  $p$ -联组中取任意位置, 因此  $\mathcal{K}$ -切空间  $T_e\mathcal{K}(f)$  作为有限生成的  $\varepsilon_n$ -模, 由诸  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  及  $(0, \dots, f_i, \dots, 0)$  所生成. 而  $\mathcal{M}_n^k$  由  $x_1, \dots, x_n$  的  $k$  次单项式全体作为其生成元, 因此  $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon(n, p)$  由形如  $(0, \dots, m, \dots, 0)$  的所有  $p$ -联组生成, 其中  $m$  为  $x_1, \dots, x_n$  的  $k$  次单项式. 欲证  $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon(n, p) \subset \varepsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} + I(f) \cdot \varepsilon(n, p)$ , 只需验证每一  $(0, \dots, m, \dots, 0)$  可以写为  $T_e\mathcal{K}(f)$  的生成元的线性组合, 其系数取自  $\varepsilon_n$ . 具体验证时, 从  $k=1$  作起, 依次令  $k=1, 2, 3, \dots$ . 存在两种可能性, 或找到  $k$ , 使得条件  $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon(n, p) \subset T_e\mathcal{K}(f)$  成立, 或对任意  $k$ , 条件不可能被满足.

**例 1** § 8.3, 例 3 讨论的映射芽  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  不具有有限  $\mathcal{A}$ -余维, 现说明它有有限  $\mathcal{K}$ -余维. 这里  $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = (0, 2y)$ , 又  $I(f) \cdot \varepsilon(2, 2)$  由  $(x^2, 0)$ ,  $(y^2, 0)$ ,  $(0, x^2)$ ,  $(0, y^2)$  生成, 所

以  $T_e \mathcal{K}(f)$  作为  $\epsilon(2,2)$  中的  $\epsilon_2$ -子模, 由  $(x,0), (y^2,0), (0,x^2), (0,y)$  生成.

现验证条件  $\mathcal{M}_2^k \cdot \epsilon(2,2) \subset T_e \mathcal{K}(f)$ . 首先令  $k=1$ , 此时  $\mathcal{M}_2 \cdot \epsilon(2,2)$  由  $(x,0), (y,0), (0,x), (0,y)$  生成, 显然  $(x,0), (0,y) \in T_e \mathcal{K}(f)$ , 但  $(y,0), (0,x) \notin T_e \mathcal{K}(f)$ , 因它们不能表示为  $T_e \mathcal{K}(f)$  的 4 个生成元的线性组合. 然后令  $k=2$ , 此时  $\mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2)$  作为  $\epsilon_2$ -子模由  $(x^2,0), (xy,0), (y^2,0), (0,x^2), (0,xy), (0,y^2)$  生成, 显然有  $\mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2) \subset T_e \mathcal{K}(f)$ , 所以  $f$  具有有限  $\mathcal{K}$ -余维.

为计算  $f$  的  $\mathcal{K}$ -余维数, 令

$$c_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^k \cdot \epsilon(n,p)}{T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \epsilon(n,p)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

这里  $c_k$  表示  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \epsilon(n,p)$  在  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^k \cdot \epsilon(n,p)$  中的余维数. 基于推论 3.1.3, 有

**推论 8.5.1**  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  具有有限  $\mathcal{K}$ -余维当且仅当除有限个外, 所有的  $c_k$  均为零. 并且在这种情形下,

$$\text{Codim}(f, \mathcal{K}) = \text{有限和} \sum_k c_k.$$

为求  $\text{Codim}(f, \mathcal{K})$ , 依次计算  $c_0, c_1, c_2, \dots$ . 而在求  $c_k$  时, 首先对  $\mathcal{M}_n^k \cdot \epsilon(n,p)$  的生成元  $(0, \dots, m, \dots, 0)$  (这里  $m$  为  $x_1, \dots, x_n$  的  $k$  次单项式), 检验它们是否位于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \epsilon(n,p)$  中, 然后将不属于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \epsilon(n,p)$  的所有生成元挑选出来, 从中找出一个基. 即  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \epsilon(n,p)$  在  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_n^k \cdot \epsilon(n,p)$  中的补空间的基, 这个基所含的成员个数便是所求的  $c_k$ .

我们对例 1 继续讨论. 由前面的计算可知,  $T_e \mathcal{K}(f) \subset \mathcal{M}_2 \cdot \epsilon(2,2)$ , 所以  $c_0 = 2$ . 为计算  $c_1$ , 首先确定  $\mathcal{M}_2 \cdot \epsilon(2,2)$  中哪些生成元位于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2)$  中.  $\mathcal{M}_2 \cdot \epsilon(2,2)$  的生成元为  $(x,0), (y,0), (0,x), (0,y)$ , 其中  $(x,0), (0,y) \in T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2)$ , 而  $(y,0), (0,x)$  不属于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2)$ , 它们正好组成

$T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2)$  在  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2 \cdot \epsilon(2,2)$  中的补空间的基, 因此  $c_1 = 2$ . 此外,  $\mathcal{M}_2^2 \cdot \epsilon(2,2) \subset T_e \mathcal{K}(f)$  于是

$$\text{Codim}(f, \mathcal{K}) = c_0 + c_1 = 2 + 2 = 4.$$

**例 2** 设映射芽  $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  定义为  $f(x) = (0, \dots, 0, x^{t+1})$ , 其中整数  $t \geq 1$ . 容易验证  $T_e \mathcal{K}(f)$  作为  $\epsilon_1$ -模, 由  $(x^{t+1}, 0, \dots, 0), (0, x^{t+1}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, x^{t+1}, 0)$  及  $(0, \dots, 0, x^t)$  生成.

现计算  $c_k$ . 因理想  $\mathcal{M}_1^k$  由  $x^k$  生成, 故子模  $\mathcal{M}_1^k \cdot \epsilon(1, p)$  由诸向量  $(0, \dots, x^k, \dots, 0)$  所生成, 这样的生成元共有  $p$  个. 要判断它们是否属于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \epsilon(1, p)$ , 分 3 种情形讨论:

(i)  $k < t$ , 此时  $\mathcal{M}_1^k \cdot \epsilon(1, p)$  的所有生成元均不属于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \epsilon(1, p)$ , 并且这样的生成元共  $p$  个, 它们形成补空间的基, 故  $c_k = p$ .

(ii)  $k = t$ .  $\mathcal{M}_1^t \cdot \epsilon(1, p)$  的生成元中除  $(0, \dots, 0, x^t) \in T_e \mathcal{K}(f)$  外, 其余  $p-1$  个均不属于  $T_e \mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_1^{t+1} \cdot \epsilon(1, p)$ , 这  $p-1$  个生成元形成补空间的基, 故  $c_t = p-1$ .

(iii)  $k > t$ .  $\mathcal{M}_1^k \cdot \epsilon(1, p)$  的所有生成元均位于  $T_e \mathcal{K}(f)$  中, 故  $c_k = 0$ .

$$\text{于是 } \text{Codim}(f, \mathcal{K}) = \sum_{k=0}^{t-1} c_k + c_t = pt + p - 1.$$

**例 3** 设  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  定义为  $f(x, y) = (xy, x^a + y^b)$ , 其中整数  $a, b \geq 3$ . 计算  $\text{Codim}(f, x)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y, ax^{a-1}), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x, by^{b-1})$$

生成 Jacobi 模  $J(f)$ . 理想  $I(f)$  由  $xy, x^a + y^b$  生成, 因而子模  $I(f) \cdot \epsilon(2, 2)$  由

$$(xy, 0), (x^a + y^b, 0), (0, xy), (0, x^a + y^b)$$

生成. 又