$$(x^2,0) = x\frac{\partial f}{\partial y} - (0, bxy^{b-1})$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial y} - by^{b-2}(0,xy) \in T_e\mathscr{K}(f),$$

$$(y^2,0) = y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - (0, ax^{a-1}y)$$

$$= y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - ax^{a-2}(0,xy) \in T_e\mathscr{K}(f),$$

$$\lambda(0,x^a) + \mu(0,y^b) = \lambda(0,x^a+y^b) + \frac{\mu-\lambda}{b}y(x, by^{b-1})$$

$$+ \frac{\lambda-\mu}{b}(xy,0) \in T_e\mathscr{K}(f),$$

所以 $\mathscr{K}$-切空间 $T_e\mathscr{K}(f)$ 可由 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 以及 $(x^2,0)$, $(xy,0)$, $(y^2,0)$, $(0,x^a)$, $(0,xy)$, $(0,y^b)$ 生成.

现计算 c_k, $k\geqslant 1$. 理想 $\mathscr{M}_2^k$ 由单项式 x^iy^j 生成($i+j=k$), 因而子模 $\mathscr{M}_2^k\cdot\varepsilon(2,2)$ 由向量 $(x^iy^j,0)$, $(0,x^iy^j)$ 生成($i+j=k$). 显然当 $i\geqslant 1$ 且 $j\geqslant 1$ 时, 这些向量均属于 $T_e\mathscr{K}(f)$. 余下只需考虑 $(x^k,0)$, $(y^k,0)$, $(0,x^k)$, $(0,y^k)$. 我们断言前两个位于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^{k+1}\cdot\varepsilon(2,2)$ 中. 事实上, 当 $k=1$ 时, $(x,0)=\frac{\partial f}{\partial y}-(0,by^{b-1})$, 而 $b\geqslant 3$, $y^{b-1}\in\mathscr{M}_2^2$, 故 $(x,0)\in T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$. 类似地, $(y,0)=\frac{\partial f}{\partial x}-(0,ax^{a-1})\in T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$.

当 $k\geqslant 2$ 时, $(x^k,0)=x^{k-2}(x^2,0)\in T_e\mathscr{K}(f)$, $(y^k,0)=y^{k-2}(y^2,0)\in T_e\mathscr{K}(f)$.

最后讨论 $(0,x^k)$, $(0,y^k)$, 显然只有在 $k\geqslant a$ 时, $(0,x^k)\in T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^{k+1}\cdot\varepsilon(2,2)$, 而对于 $(0,y^k)$, 仅当 $k\geqslant b$ 时, 它才属于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^{k+1}\cdot\varepsilon(2,2)$.

综上所述，$(0,x^k)(1\leqslant k\leqslant a-1)$及$(0,y^k)(1\leqslant k\leqslant b-1)$形成 $T_e\mathscr{K}(f)$在 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基，因而

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})=2+(a-1)+(b-1)=a+b.$$

例 4 设映射芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$由 $f(x,y)=(x^2+y^2,x^a)$给定，这里整数 $a\geqslant 3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(2x,ax^{a-1}),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=(2y,0)$$

生成 Jacobi 模 $J(f)$. 理想 $I(f)$由 x^2+y^2,x^a 生成，因而子模 $I(f)\cdot\varepsilon(2,2)$由

$$(x^2+y^2,0),(x^a,0),(0,x^2+y^2),(0,x^a)$$

生成. 类似于上例中的计算，可找到 $\mathscr{K}$-切空间 $T_e\mathscr{K}(f)$在 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)$和$(0,x^{i-1}y)(1\leqslant i\leqslant a-1)$，于是

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})=2+(a-1)+(a-1)=2a.$$

命题 8.5.2 设 $f,g\in\varepsilon^0(n,p)$. 若 f 与 g 是 $\mathscr{K}$-等价的，则 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})=\mathrm{Codim}(g,\mathscr{K})$.

证明留作练习.

本命题说明一个映射芽的 $\mathscr{K}$-余维数是一个 $\mathscr{K}$-不变量.

第九章 映射芽的通用开折

英国数学家 C. T. C. Wall 曾经指出,奇点理论对数学最重要的贡献之一是 Thom 提出的通用开折,它是突变理论的核心.我们在第三章中曾对实值函数芽介绍过通用形变定理,本章将对映射芽介绍两个通用性定理.第一个是对群 $\mathscr{A}$ 作用下的开折而言,称为 $\mathscr{A}$-通用开折定理或简称为通用开折定理,它曾被 Thom 猜测而由 Mather 证明.第二个则在接触等价意义下以形变的形式来表达,叫做 $\mathscr{K}$-通用形变定理.由于这两个通用性定理证明方法类似,我们仅对通用开折定理给出详细证明.

§9.1 通用开折

§8.1 中已引入映射芽的开折概念.为定义通用开折,有必要再引入一些有关概念.

定义 9.1.1 设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$为 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的 r-参数开折,它由 $F(u,x)=(u,f(u,x))$给定,其中 $f(0,x)=f_0(x)$, $u=(u_1,\cdots,u_r)$为开折参数.假定

$$h:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0),\ v\ \mapsto u=h(v)$$

为 C^∞ 映射芽,定义 $h^*F:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^p,0)$为

$$h^*F(v,x)=(v,f(h(v),x)),$$

称为由 h 诱导的F 的拉回.易见 h^*F 是f_0 的 s-参数开折.

定义 9.1.2 设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$. f_0 的两个 r-参数开折F 和G 叫做等价的,如果存在 F 和G 的参数空间之间的微分同胚芽h:

$(\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$，使得 G $\mathscr{A}$-同构于 h^*F.

显然，开折的等价是一个等价关系.

定义 9.1.3 设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$.

(i) f_0 的开折 F 叫做通用开折，如果 f_0 的任意其他开折 G 皆 $\mathscr{A}$-同构于 F 的某一拉回 h^*F，其中 h 是从 G 的参数空间到 F 的参数空间的 C^∞ 映射在原点处的芽.

(ii) f_0 的通用开折 F 叫做万有开折，如果 F 所含的开折参数的数目最少.

C^∞ 芽 f_0 的开折有无穷多个. 若 f_0 存在通用开折，则 f_0 的每一开折均可由它的通用开折"诱导"出来，因此寻求一个映射芽具有通用开折的条件是很有意义的.

定理 9.1.1（$\mathscr{A}$-通用开折定理） 设 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽，$F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$，$(u,x)\mapsto F(u,x)=(u,f(u,x))$ 为 f_0 的 r-参数开折，因而 $f(0,x)=f_0(x)$. 那么 F 为 f_0 的通用开折的必要充分条件是 F 的初始速度 $\dot{F}_i\ (i=1,\cdots,r)$ 满足下列条件：

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon(n,p),\tag{1}$$

其中 $\dot{F}_i(x)=\dfrac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)\ (i=1,\cdots,r)$.

证 必要性. 任取 $g\in\varepsilon(n,p)$. 定义 f_0 的单参数线性开折 G 为

$$G(v,x)=(v,f_0(x)+vg(x)),\quad v\in\mathbb{R},$$

G 的初始速度 $\dot{G}=g$. 因假定 F 是通用开折，故 G 必 $\mathscr{A}$-同构于 h^*F，其中 $h:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^r,0)$，$v\mapsto h(v)=(h_1(v),\cdots,h_r(v))$ 为 C^∞ 芽. 记 $H=h^*F$，则

$$H(v,x)=(v,f(h(v),x)),$$

且 H 的初始速度

$$\dot{H}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}v}(0)\cdot\dot{F}_i\in\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}.$$

为证 $g\in T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}$，只需证 $g-\dot{H}\in T_e\mathscr{A}(f_0)$. 现 H 和 G 是 $\mathscr{A}$-同构的，这意指存在可逆芽 $\Phi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$，$\Phi(v,x)=(v,\phi(v,x))$ 及 $\Psi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$，$\Psi(v,y)=(v,\psi(v,y))$，使得

$$\Psi\circ G=H\circ\Phi,$$

或

$$(v,\psi(v,f_0(x)+vg(x)))=(v,f(h(v),\phi(v,x))),$$

其中 $(v,x)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$. 因为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\psi(v,f_0(x)+vg(x))\Big|_{(0,x)}\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,f_0(x))+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial\psi}{\partial y_i}(0,f_0(x))\cdot g_i(x)\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,f_0(x))+g(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}f(h(v),\phi(v,x))\Big|_{(0,x)}\\
&=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)\cdot\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}v}(0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(0,x)\cdot\frac{\partial\phi_j}{\partial v}(0,x)\\
&=\dot{H}(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial v}(0,x)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x),
\end{aligned}$$

所以

$$g(x)-\dot{H}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial v}(0,x)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,f_0(x)),$$

这说明 $g-\dot{H}\in T_e\mathscr{A}(f_0)$，因而 $g\in T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}$. 由于 $g\in\varepsilon(n,p)$是任取的，因此(1)式成立.

充分性的证明放在下一节.

由定理 9.1.1 立即可知：$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$具有有限 $\mathscr{A}$-余维当且仅当f_0 具有万有开折. 并且 f_0 的万有开折所含的开折参数个数等于 f_0 的 $\mathscr{A}$-余维数.

定理 9.1.2 设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$的 $\mathscr{A}$-余维数$\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{A})=r$，则

(i)f_0 的所有 r-参数万有开折皆等价，

(ii)若 G 为f_0 的 s-参数通用开折，$s>r$，则 G 等价于f_0 的万有开折的常值开折(含 $s-r$ 个参数).

证明提示 参照命题 6.1.3 的证法.

定理 9.1.3 无穷小稳定映射芽必为稳定芽.

证 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$是无穷小稳定芽，则 $T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon(n,p)$. 由定理 9.1.1 知，$f$ 是它自身的万有开折，因此 f 的任意开折必 $\mathscr{A}$-同构于f 的常值开折，f 是 $\mathscr{A}$-稳定的. 证毕.

假设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$具有有限 $\mathscr{A}$-余维. 如果能选取 $g_1,\cdots,g_r\in\varepsilon(n,p)$，使得$\{g_1,\cdots,g_r\}$是 $T_e\mathscr{A}(f_0)$在 $\varepsilon(n,p)$中的补空间的基，即

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{g_1,\cdots,g_r\}=\varepsilon(n,p),$$

其中 $r=\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{A})$. 令

$$F(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ig_i(x)),\ u=(u_1,\cdots,u_r),$$

则 F 是f_0 的万有开折.

例 1 设整数 $r\geqslant 3$，$f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$，$x\mapsto x^r$. 因有

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{x,x^2,\cdots,x^{r-2}\}=\varepsilon(1,1),$$

因此 f_0 的万有开折为

$$F:(\mathbb{R}^{r-2}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^{r-2}\times\mathbb{R},0),$$
$$(u,x)\mapsto(u,x^r+u_1x^{r-2}+\cdots+u_{r-2}x).$$

例 2 设 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$定义为 $f_0(x)=(x^2,x^3)$,这是§8.3 中例 2. 我们已证明

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\cdot g=\varepsilon(1,2),\ g=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},$$

所以 f_0 的万有开折为

$$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,0),\ (u,x)\mapsto(u,x^2,x^3+ux).$$

例 3 设 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x,y)\mapsto(x^2+y^3,y^2+x^3)$,这是§8.3 中例 4. 我们已证明 $\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{A})=2$,并且

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{h_1,h_2\}=\varepsilon(2,2),$$

其中 $h_1=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},h_2=\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}$,所以 f_0 的万有开折为

$$F:(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0),$$
$$(u,x,y)\mapsto(u,x^2+y^3+u_1y,y^2+x^3+u_2x),$$

这里 $u=(u_1,u_2)$.

§9.2 通用开折定理的证明

9.2.1 两个引理

如同在形变理论中讨论的那样,证明通用开折定理的充分性要用到两个引理,它们分别叫做开折理论中的几何引理与代数引

理.

设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$. 假定

$$F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),$$
$$(u,x)\mapsto(u,f(u,x)),\ f(0,x)=f_0(x)$$

为 f_0 的 r-参数开折,令

$$F_1:(\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{R}^p,0),$$
$$(u_2,\cdots,u_r,x)\mapsto(u_2,\cdots,u_r,f(0,u_2,\cdots,u_r,x)),$$

则 F_1 是 F 在子空间 $u_1=0$ 上的限制.

引理 9.2.1 设 f_0,F 及 F_1 如上所述. 如果在 $(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$ 及 $(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$ 上分别存在向量场芽

$$\overline{X}=\frac{\partial}{\partial u_1}+\sum_{i=2}^r\zeta_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^n X_j(u,x)\frac{\partial}{\partial x_j}\tag{1}$$

和

$$\overline{Y}=\frac{\partial}{\partial u_1}+\sum_{i=2}^r\zeta_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^p Y_j(u,y)\frac{\partial}{\partial y_j},\tag{2}$$

使得

$$\mathrm{D}F\cdot\overline{X}=\overline{Y}\circ F,\tag{3}$$

那么存在淹没芽 $h:(\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^{r-1},0)$,使得 F $\mathscr{A}$-同构于 h^*F_1.

证明提要 条件(1)和(2)说明 $\overline{X}$ 及 $\overline{Y}$ 均为 $(\mathbb{R}^r,0)$ 上的向量场芽

$$\zeta=\frac{\partial}{\partial u_1}+\sum_{i=2}^r\zeta_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

的提升. 而 ζ 的积分曲线乃是下列常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \zeta_2(u), \\ \quad \cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}t} = \zeta_r(u) \end{cases}$$

的解曲线，并且这些解曲线必横截于子空间 $u_1=0$. 沿这些积分曲线投影到子空间 $u_1=0$ 上，便得到所要求的淹没芽 h.

另外，F 是 F_1 的单参数开折，根据命题 8.2.1，条件(3)意指 F 是 F_1 的 $\mathscr{A}$-平凡开折. 又条件(3)等价于

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{r} \zeta_i(u) \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} X_j(u,x) \frac{\partial f}{\partial x_j} = Y \circ F, \tag{4}$$

其中 $Y:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0) \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 芽，其分量为 $Y_1, \cdots, Y_p$.

证明细节请读者补述.

现考虑代数引理. 设 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$. 假定

$$F:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$
$$(u,x) \mapsto (u, y = f(u,x))$$

为 f_0 的 r-参数开折. 我们知道，

$$T_e\mathscr{A}(f_0) = J(f_0) + \tau(f_0) \subset \varepsilon_x^{\times p},$$

其中 $J(f_0) = \varepsilon_x \left\{ \dfrac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f_0}{\partial x_n} \right\}$，$\tau(f_0) = \varepsilon_y\{e_1, \cdots, e_p\}$，因此形式地规定在 F 处的"垂直"切空间为

$$\tilde{T}_e\mathscr{A}(F) = \tilde{J}(F) + \tilde{\tau}(F) \subset (\varepsilon_{u,x})^{\times p},$$

其中

$$\tilde{J}(F) = \varepsilon_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \tilde{\tau}(F) = \varepsilon_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}.$$

引理 9.2.2 下列条件是等价的:

(i) $T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{g_{1,0},\cdots,g_{r,0}\}=(\varepsilon_x)^{\times p}$,

(ii) $\widetilde{T}_e\mathscr{A}(F)+\varepsilon_u\{g_1,\cdots,g_r\}=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$,

其中 $g_i\in(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$, $g_{i,0}\in\varepsilon_x^{\times p}$ 且 $g_{i,0}(x)=g_i(0,x)(i=1,\cdots,r)$.

证 将 $(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$ 中的成员限制在 $u=0$ 上,由(ii)可导出(i).下证(i)⇒(ii).

令 $M=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}/\tilde{J}(F)$,它是有限生成的 $\varepsilon_{u,x}$-模,因为秩有限的自由 $\varepsilon_{u,x}$-模的商模是有限生成的.简记 $\langle u\rangle=\mathscr{M}_u\cdot\varepsilon_{u,x}$,它是 $\varepsilon_{u,x}$ 中由 $u_1,\cdots,u_r$ 生成的理想.显然 $\varepsilon_{u,x}/\langle u\rangle=\varepsilon_x$.再令 $M_0=M/\langle u\rangle\cdot M$,则

$$\begin{aligned}M_0&\cong(\varepsilon_{u,x})^{\times p}/(\langle u\rangle\cdot(\varepsilon_{u,x})^{\times p}+\tilde{J}(F))\\&\cong(\varepsilon_x)^{\times p}/\varepsilon_x\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(0,x)\right\}\\&=(\varepsilon_x)^{\times p}/J(f_0).\end{aligned}$$

M_0 是 ε_x-模,借助环同态 f_0^*,它可看作 ε_y-模.类似地,借助环同态 F^*, $\varepsilon_{u,x}$-模 M 可视为 $\varepsilon_{u,y}$-模.而条件(i)蕴涵 M_0 是一个有限生成的 ε_y-模.据定理 5.3.3, M 为有限生成的 $\varepsilon_{u,y}$-模.此外,将条件(i)与(ii)分别改写为下面的条件(i)′和(ii)′.

(i)′ $\overline{N}+\mathbb{R}\{\bar{g}_{1,0},\cdots,\bar{g}_{r,0}\}=M_0$,

其中 $\overline{N}=\tau(f_0)/\tau(f_0)\cap J(f_0)\cong T_e\mathscr{A}(f_0)/J(f_0)$, $\bar{g}_{i,0}$ 是 $g_{i,0}$ 在 M_0 中的投影,

(ii)′ $N+\varepsilon_u\{\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_r\}=M$,

其中 $N=\tilde{\tau}(F)/\tilde{\tau}(F)\cap\tilde{J}(F)\cong\widetilde{T}_e\mathscr{A}(F)/\tilde{J}(F)$, $\bar{g}_i$ 是 g_i 在 M 中的投影.

易见 $\overline{N}$ 是 N 在 M_0 中的投影, $\bar{g}_{i,0}$ 是 $\bar{g}_i$ 在 M_0 中的投影.据定理 5.3.2,(i)′与(ii)′是等价的,因此(i)⇒(ii).

注 在上述证明中,通过相继使用定理 5.3.3 和 5.3.2,我们

两次应用了 Malgrange 预备定理.

9.2.2 定理 9.1.1 的充分性证明

证明思路与通用形变定理 6.3.1 相同. 设 F 是 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$ 的 r-参数开折,满足条件

$$T_e\mathscr{A}(f_0) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_r\} = \varepsilon(n,p), \tag{5}$$

需证 F 是通用开折. 假设 G 是 f_0 的任意开折,含有 s 个开折参数 $v_1, \cdots, v_s$,将 G 写为

$$G(v,x) = (v, f_0(x) + g(v,x)),\ g(0,x) = 0,$$

其中 $v = (v_1, \cdots, v_s)$. 构作 F 与 G 的"直和"H,令 $H:(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$定义为

$$H(v,u,x) = (v, u, f(u,x) + g(v,x)),$$

并记 $h(v,u,x) = f(u,x) + g(v,x)$. 显然 H 是 f_0 的一个$(s+r)$-参数开折. 将 H 在子空间 $v_1 = 0, v_1 = v_2 = 0, \cdots, v_1 = v_2 = \cdots = v_s = 0$ 上的限制依次记为 $H_1, H_2, \cdots, H_s$,显然 $H_s = F$. 又 H 在子空间 $u = 0$ 上的限制为 G.

断言:存在淹没芽 $A:(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$,使得 H $\mathscr{A}$-同构于$A^* F$.

对 s 使用归纳证明,关键的一步描述如下:假定存在淹没芽 $B:(\mathbb{R}^{s-1} \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$,使得 $B^* F$ 与 H_1 是 $\mathscr{A}$-同构的. 证明断言对 s 亦成立.

利用代数引理 9.2.2 及条件(5),得到

$$\widetilde{T}_e\mathscr{A}(H) + \varepsilon_{v,u}\left\{\frac{\partial h}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial h}{\partial u_r}\right\} = (\varepsilon_{v,u,x})^{\times p}.$$

而$\dfrac{\partial h}{\partial v_1} = \dfrac{\partial g}{\partial v_1} \in (\varepsilon_{v,u,x})^{\times p}$,由上式知,存在 $X_i(v,u,x) \in \varepsilon_{v,u,x}$ $(i = 1, \cdots, n)$, $Y_j(v,u,y) \in \varepsilon_{v,u,y}$ $(j = 1, \cdots, p)$及 $\zeta_k(v,u) \in \varepsilon_{v,u}$ $(k = 1, \cdots, r)$,使得

$$\frac{\partial h}{\partial v_1} = -\sum_{i=1}^{n} X_i(v,u,x)\frac{\partial h}{\partial x_i} + Y\circ H - \sum_{k=1}^{r}\zeta_k(v,u)\frac{\partial h}{\partial u_k},$$

这里 $Y=(Y_1,\cdots,Y_p)$. 将上式与几何引理 9.2.1 中的分析表达式(4)相比较,立即可知从引理 9.2.1 可推出 H $\mathscr{A}$-同构于 $C^* H_1$,其中 $C:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^{s-1}\times\mathbb{R}^r,0)$为淹没芽. 然后令 $A=B\circ C$,则 A 为淹没芽,并且 H 与 $A^* F$ 必 $\mathscr{A}$-同构. 因此断言成立.

令 $h:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$为 A 在子空间 $u=0$ 上的限制 $v\mapsto A(v,0)$. 因为 H 在 $u=0$ 上的限制为 G,因此 G $\mathscr{A}$-同构于 $h^* F$. 按照定义 9.1.3(i),F 是 f_0 的通用开折.

§9.3 应用:一类特殊的 $\Sigma^{1,\cdots,1,0}$型奇点

在§2.5 中引入了 Thom 一阶奇点集,而在第七章讨论平面到平面的 C^∞映射的奇点时,介绍了二阶奇点集. 作为折叠与尖点的自然推广,本节引入一类特殊的高阶奇点,为后面一般地讨论 Thom-Boardman 奇点提供具体范例.

设 $F:(\mathbb{R}^{n+1},0)\to(\mathbb{R}^{n+1},0)$为 C^∞ 映射芽,它在点 $0\in\mathbb{R}^{n+1}$的秩为 $n(n\geqslant 1)$. 选取源空间与靶空间的适当坐标系$(x_1,\cdots,x_n,y)$和$(X_1,\cdots,X_n,Y)$,使得这一映射芽表示为

$$F:\begin{cases} X_1 = x_1, \\ \quad\cdots\cdots \\ X_n = x_n, \\ Y = f(x_1,\cdots,x_n,y), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f(0)=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)=0$(请读者参照引理 7.1.1 补述理由). 以下假定 F 具有形式(1),此时 F 的一阶奇点集

$$\Sigma^1(F) = \{(x_1,\cdots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \dim\mathrm{Ker}\,DF(x_1,\cdots,x_n,y) = 1\}$$

$$= \{(x_1, \cdots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \cdots, x_n, y) = 0\}.$$

定义 9.3.1 原点叫做 F 的 $\Sigma^{1,\cdots,1,0}$ 型奇点(该符号包含 r 个 $1(1 \leqslant r \leqslant n+1)$,简记为 $\Sigma^{1_r,0}$),如果下列条件被满足:

(i) $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = \cdots = \frac{\partial^r f}{\partial y^r}(0) = 0$,

(ii) 函数 $\frac{\partial f}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^r f}{\partial y^r}$ 在点 0 处是独立的,

(iii) $\frac{\partial^{r+1} f}{\partial y^{r+1}}(0) \neq 0$.

取 $n=1$ 这一特殊情形,易见原点为折叠对应于 $r=1$,而当 $r=2$ 时,原点则为尖点,因此本定义是对平面到平面的映射的两种通有奇点(即折叠与尖点)的推广.在描述 B. Morin 的结果之前,先对该定义作简单的几何解释.

首先,$\Sigma^1(F)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中过原点的微分子流形,其余维数为 1. 事实上,由条件(ii),在原点处的微分 $\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 不为 0,根据隐函数定理,方程 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 可局部地解出某一个变量为其余 n 个变量的 C^∞ 函数,或说 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中余维数为 1 的超曲面,这张超曲面在原点处的法向量为 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y}(0), \cdots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y}(0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)\right)$.

其次,$\mathrm{D}F(0)$ 的核为直线,由 $\mathrm{d}x_1 = \cdots = \mathrm{d}x_n = 0$ 确定. 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0$,那么 $\mathrm{Ker}\, \mathrm{D}F(0)$ 包含于 $\Sigma^1(F)$ 在原点的切空间内,这说明 $F \mid \Sigma^1(F)$ 在原点的秩为 $n-1$,从而原点属于集 $\Sigma^{1,1}(F)$ 中,这里

$$\Sigma^{1,1}(F) = \{(x_1, \cdots, x_n, y) \in \Sigma^1(F) \mid \mathrm{rank}\, \mathrm{D}(F \mid \Sigma^1(F))(x_1, \cdots, x_n, y) = n-1\}$$

$$= \left\{(x_1, \cdots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\right\}.$$

由条件(ii)，$\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_0 \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_0 \neq 0$，根据隐函数定理可推出 $\Sigma^{1,1}(F)$是$\mathbb{R}^{n+1}$中过原点的微分子流形，其余维数为 2. 考虑 F 在 $\Sigma^{1,1}(F)$上的限制 $F|\Sigma^{1,1}(F)$，用类似的方法定义 $\Sigma^{1,1,1}(F)$等等.

现陈述 B. Morin 的一个结果[58]如下：

定理 9.3.1 设 $F:(\mathbb{R}^{n+1},0)\to(\mathbb{R}^{n+1},0)$为 C^∞ 映射芽，它在点 0 的秩为 n. 又原点为 F 的$\Sigma^{1_r,0}$型奇点，$1\leqslant r\leqslant n+1$，则 $F\mathscr{A}$-等价于下列C^∞ 芽：

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ \quad \cdots\cdots \\ X_n = x_n, \\ Y = y^{r+1} + x_1 y^{r-1} + \cdots + x_{r-1} y. \end{cases}$$

证 因 F 在点 0 的秩为 n，故 $F\mathscr{A}$-等价于形式(1)，即

$$X_i = x_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$Y = f(x_1, \cdots, x_n, y),$$

不妨仍将它记为 F，于是 F 可看作是

$$f_0:(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0), \ y \mapsto Y = f(0,y)$$

的 n-参数开折. 因原点是 F 的$\Sigma^{1_r,0}$型奇点，条件(i)和(iii)说明 f_0 作为 y 的一元函数，右等价于 y^{r+1}. 由§9.1 例 1 知，y^{r+1}的万有开折是

$$G:(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R},0),$$

$$(u, y) \mapsto (u, y^{r+1} + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_{r-1} y),$$

这里 $u=(u_1, \cdots, u_{r-1})\in\mathbb{R}^{r-1}$.

据通用开折定理，F 作为 f_0 的 n-参数开折 $\mathscr{A}$-同构于 h^*G，这里 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^{r-1},0)$，$x\mapsto h(x)=u$. 改记 $u_i=u_i(x)$ $(i=1,\cdots,r-1)$，有

$$H=h^*G:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^n\times R,0),$$

$$(x,y)\mapsto(x,y^{r+1}+u_1(x)y^{r-1}+\cdots+u_{r-1}(x)y).$$

令 $Y=y^{r+1}+u_1(x)y^{r-1}+\cdots+u_{r-1}(x)y$，则

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Big|_0=\{(r+1)\mathrm{d}y^r+(r-1)[y^{r-2}\mathrm{d}u_1+u_1\mathrm{d}y^{r-2}]+\cdots+\mathrm{d}u_{r-1}\}\Big|_0$$

$$=\mathrm{d}u_{r-1}.$$

一般地，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial^i Y}{\partial y^i}\right)\Big|_0=\mathrm{d}u_{r-i},\quad 1\leqslant i\leqslant r-1,$$

又

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial^r Y}{\partial y^r}\right)\Big|_0=(r+1)!\mathrm{d}y.$$

由定义 9.3.1 中条件(ii)，

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Big|_0\wedge\mathrm{d}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)\Big|_0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(\frac{\partial^r Y}{\partial y^r}\right)\Big|_0$$

$$=(r+1)!\mathrm{d}u_{r-1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}y\neq 0,$$

因此条件(ii)等价于微分 $\mathrm{d}u_1,\cdots,\mathrm{d}u_{r-1}$ 在点 0 处是线性无关的.

又

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}u_1\\ \mathrm{d}u_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}u_{r-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial u_{r-1}}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_{r-1}}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{bmatrix},$$

说明矩阵

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant r-1\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

在点 0 的秩为 $r-1$. 而

$$\dot{H}_j(y)=\frac{\partial Y}{\partial x_j}(0,y)=\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(0)\cdot y^{r-1}+\cdots+\frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_j}(0)\cdot y,$$

其中 $j=1,\cdots,n$,因此

$$\begin{bmatrix}\dot{H}_1\\ \vdots\\ \dot{H}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_1}(0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(0) & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}(0) & \cdots & \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_n}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^{r-1}\\ \vdots\\ y\end{bmatrix}.$$

上式中矩阵的秩为 $r-1$,不失一般性,假定由前 $r-1$ 行组成的 $(r-1)\times(r-1)$子矩阵是满秩的,那么$\dot{H}_1,\cdots,\dot{H}_{r-1}$是独立的. 由于 G 是y^{r+1}的万有开折,f_0 与 y^{r+1}右等价,因此可导出

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{H}_1,\cdots,\dot{H}_{r-1}\}=\varepsilon_y,$$

从而 H 是f_0 的通用开折. 再据定理 9.1.2,F 必 $\mathscr{A}$-等价于y^{r+1}的万有开折 G 的常值开折(含 $n-r+1$ 个参数),而这正是我们所要证的.

§9.4 在接触等价下的形变

9.4.1 $\mathscr{K}$-横截形变

设 $f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$是 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的 r-参数形变,因而 $f(0,x)=f_0(x)$. 将形变 f 设想为“芽”$\alpha:(\mathbb{R}^r,0)\to(\varepsilon(n,p),f_0)$, $u\mapsto f_u\ (f_u(x)=f(u,x))$,那么映射 α 在点

$0\in\mathbb{R}^r$和 $T_e\mathscr{K}(f_0)$(群 $\mathscr{K}$ 作用下于 f_0 处的切空间)相"横截"形式地描述为

$$T_0\alpha(\mathbb{R}^r)+T_e\mathscr{K}(f_0)=T_{f_0}\varepsilon(n,p),$$

其中 $T_o\alpha$ 表示映射 α 在点 $0\in\mathbb{R}^r$ 的"微分",我们把它理解为线性映射$\mathbb{R}^r\to\varepsilon(n,p)$,该映射将$\mathbb{R}^r$ 的标准基向量映为$\left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_{u=0},\cdots,\left.\frac{\partial f}{\partial u_r}\right|_{u=0}$,这里 $u_1,\cdots,u_r$ 为$\mathbb{R}^r$ 的坐标. 简记$\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_{u=0}$为$\dot{f}_i$,因而 $T_0\alpha(\mathbb{R}^r)=\mathbb{R}\{\dot{f}_1,\cdots,\dot{f}_r\}$为 $\varepsilon(n,p)$的实向量子空间. 这启发我们给出下列定义.

定义 9.4.1 设 $f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的 r-参数形变. 若

$$T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{f}_1,\cdots,\dot{f}_r\}=\varepsilon(n,p),$$

其中$\dot{f}_i(x)=\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)(i=1,\cdots,r)$,则 f 称为 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变.

由该定义立即得到:$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$容有 $\mathscr{K}$-横截形变当且仅当 f_0 具有有限 $\mathscr{K}$-余维.

设 $\operatorname{Codim}(f_0,\mathscr{K})=c$,并且 $f_1,\cdots,f_c$ 是$T_e\mathscr{K}(f_0)$在 $\varepsilon(n,p)$中的补空间的基,即

$$T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\{f_1,\cdots,f_c\}=\varepsilon(n,p),$$

那么

$$f(u,x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{c}u_if_i(x)$$

是 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变,带有 c 个参数$u_1,\cdots,u_c$.

实际上,人们感兴趣的是秩为 0 的映射芽 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变与开折(见第十二章). 将 $\varepsilon(n,p)$等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$,且 $\varepsilon_n^{\times p}=\mathbb{R}^p\oplus\mathscr{M}_n^{\times p}$.

当 $\gamma k_0 f_0=0$ 时，易见 $T_e\mathcal{K}(f_0)$ 是 $\mathcal{M}_n^{\times p}$ 的向量子空间. 设 $f_1,\cdots,f_r$ 为 $T_e\mathcal{K}(f_0)$ 在 $\mathcal{M}_n^{\times p}$ 中的补空间的基，并记$\mathbb{R}^p$ 的基为 $e_1,\cdots,e_p$，则 f_0 的 $\mathcal{K}$-横截形变 f 可写为

$$f(u,w,x)=-\sum_{i=1}^{p}w_ie_i+f_0(x)+\sum_{j=1}^{r}u_jf_j(x),$$

"$-$"号的选取出于几何考虑，待后说明.

寻求映射芽的 $\mathcal{K}$-横截形变与计算 $\mathcal{K}$-余维数关系密切. 我们在§8.5 中讨论了映射芽的 $\mathcal{K}$-余维数的计算，现就该节中的诸例给出它们的 $\mathcal{K}$-横截形变.

例 1 由 $f_0(x,y)=(x^2,y^2)$定义的芽 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 具有 $\mathcal{K}$-余维数 4. $T_e\mathcal{K}(f_0)$在 $\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(1,0)$，$(0,1)$，$(y,0)$和$(0,x)$，因此 f_0 的 $\mathcal{K}$-横截形变 $f:(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$的分量为

$$f_1=x^2+u_1y-w_1,\qquad f_2=y^2+u_2x-w_2.$$

例 2 设整数 $t\geqslant1$，C^∞ 映射芽

$$f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0),\ f_0(x)=(0,\cdots,0,x^{t+1})$$

的 $\mathcal{K}$-余维数$c=pt+p-1$，$T_e\mathcal{K}(f_0)$在 $\varepsilon(1,p)$中的补空间的基由诸$(0,\cdots,x^k,\cdots,0)$$(0\leqslant k\leqslant t)$组成，但除去$(0,\cdots,0,x^t)$. 于是 f_0 的 $\mathcal{K}$-横截形变 $f:(\mathbb{R}^c\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$用分量表示为

$$\begin{cases}f_1=-w_1+u_{11}x+\cdots+u_{1,t-1}x^{t-1}+u_{1,t}x^t,\\ f_2=-w_2+u_{21}x+\cdots+u_{2,t-1}x^{t-1}+u_{2,t}x^t,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_p=-w_p+u_{p1}x+\cdots+u_{p,t-1}x^{t-1}+x^{t+1}.\end{cases}$$

例 3 设 C^∞ 芽 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$定义为 $f_0(x,y)=(xy,x^a\pm y^b)$，其中整数 $a,b\geqslant3$，则 $\mathrm{Codim}(f_0,\mathcal{K})=a+b$，$T_e\mathcal{K}(f_0)$在

$\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)(1\leqslant i\leqslant a-1)$和$(0,y^j)(1\leqslant j\leqslant b-1)$，因此$\mathscr{K}$-横截形变$f:(\mathbb{R}^{a+b}\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$的分量为

$$f_1 = xy - w_1,$$

$$f_2 = x^a \pm y^b + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{j=1}^{b-1} v_j y^j - w_2.$$

例 4 芽$f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$，$(x,y)\mapsto(x^2+y^2,x^a)$的$\mathscr{K}$-余维数为$2a$，整数$a\geqslant 3$. $T_e\mathscr{K}(f_0)$在$\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)$和$(0,x^{i-1}y)(1\leqslant i\leqslant a-1)$. 因此$\mathscr{K}$-横截形变$f:(\mathbb{R}^{2a}\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$的分量为

$$f_1 = x^2 + y^2 - w_1,$$

$$f_2 = x^a + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{i=1}^{a-1} v_i x^{i-1} y - w_2.$$

9.4.2 $\mathscr{K}$-通用形变

对于映射芽的横截形变这一代数概念，我们希望用“通用性”几何概念来描述.

定义 9.4.2 设$f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$C^\infty$映射芽，$f,g:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$f_0$的$r$-参数形变. 如果存在$(\mathbb{R}^n,0)$上的恒同映射芽的$r$-参数开折$\phi:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$，使得

$$\phi^*(f^*\mathscr{M}_p) = g^*\mathscr{M}_p,$$

则称f与g是$\mathscr{K}$-同构的.

根据命题 8.4.1，若形变f与g是$\mathscr{K}$-同构的，则f和g作为映射芽必$\mathscr{K}$-等价.

定义 9.4.3 设$f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$的$r$-参数形变. 假定$h:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$为$C^\infty$芽，定义$h^*f:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为

$$h^*f(v,x) = f(h(v),x),$$

称为由 h 诱导的 f 的拉回，并且 h 叫做参数变换．显然 $h^* f$ 是 f_0 的 s-参数形变．

定义 9.4.4 设 $f_0 \in \varepsilon^0(n, p)$．$f_0$ 的形变 f 叫做 $\mathcal{K}$-通用形变，如果 f_0 的任意其他形变 g 皆 $\mathcal{K}$-同构于 f 的某一拉回 $h^* f$，其中 h 是从 g 的参数空间到 f 的参数空间的参数变换．

现在叙述 $\mathcal{K}$-通用形变定理如下：

定理 9.4.1 设 $f:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 $f_0 \in \varepsilon^0(n, p)$ 的 r-参数形变，则 f 是 $\mathcal{K}$-通用形变当且仅当 f 为 $\mathcal{K}$-横截形变．

定理 9.1.1 和 9.4.1 统称为通用性定理．前者是在群 $\mathcal{A}$ 作用意义下讨论映射芽的开折，后者是就接触等价即在群 $\mathcal{K}$ 作用意义下，对映射芽的形变而言．并且映射芽的形变与开折有着紧密联系．事实上，定理 9.1.1 可改用形变的方式来叙述，定理 9.4.1 也可代之以开折的语言来表达．不仅如此，这两个定理的证明方法也完全类似，因此我们省去定理 9.4.1 的证明而留给读者练习．此外，读者可参照定理 9.1.2 写出 $\mathcal{K}$-通用形变的相应结论并加以证明．

第十章　映射芽的有限决定性

§10.1　引　　言

奇点理论中的一种基本思想是"较好"的光滑映射芽的局部拓扑性质由它们的 Taylor 级数中的有限多个项所决定. 说得确切些,在光滑映射芽$(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$所成之集 $\varepsilon^0(n, p)$中引入等价关系 E,我们说 $f\in\varepsilon^0(n, p)$是 r-E-决定的(r 为正整数),是指对任意的 $g\in\varepsilon^0(n, p)$,如果 g 和 f 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处具有相同的 r 阶 Taylor 多项式,那么 g 和 f 是 E-等价的. 假若对某一 $r<\infty$,f 是 r-E-决定的. 那么 f 叫做有限 E-决定的. 这样的 r 如果存在,显然有无限多个,它们中的最小者叫做 f 的决定性阶数.

分析光滑映射芽在什么条件下是有限决定的,并且对其决定性阶数进行估计关系到奇点理论中最重要的局部特性. 而最具研究意义的等价关系是通过下列五类群对 $\varepsilon^0(n, p)$的作用来定义的,这五类局部微分同胚群曾在第八章讨论过,它们是右等价群 $\mathscr{R}$,左等价群 $\mathscr{L}$,左右等价群 $\mathscr{A}$ 以及接触等价群 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{K}$. Mather 就这 5 类群给出了光滑映射芽有限决定的必要充分条件,刻画了有限决定性的特征. 他的系列论文为映射芽的有限决定性理论的深入发展奠定了理论基础,使之成为奇点理论中十分活跃的研究专题.

回忆第三章我们曾对函数芽研究了 $\mathscr{R}$-决定性. 定理 3.3.1 告诉我们,经过 $f\in\varepsilon_n$ 的 $\mathscr{R}$-轨道 $\mathscr{R}\cdot f$ 在 f 处的切空间 $\mathscr{M}_n\cdot J(f)$若在 ε_n 中的余维有限,则 f 是 $\mathscr{R}$-决定的. 这正好反映了映射芽有限决定的特征. §10.3 将对上述 5 类群并且就一般的映射芽进行讨论,在这一节里将证明 Mather 关于有限决定性的著名结果,并且是它的一个改进形式. 为此需作一些准备. §10.2 对彼此相接近

的映射芽，比较它们相应的切空间，所得的诸结果称为逼近引理. 然而人们对映射芽有限决定性的研究，更感兴趣的是 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{K}$ 决定性，§10.4 讨论了 $\mathscr{A}_k$-决定性，它是 $\mathscr{A}$-决定性的一种自然推广. 由于对非稳定的有限决定的映射芽的阶数，按照 Mather 的方法进行估计，有时很不理想，因此 §10.5 提供的一些方法便于有效地估计决定性阶数. 作为决定性阶数的推广，还考虑了决定性范围，在 §10.6 中对决定性范围给出了基本估计. 最后指出，在 $\varepsilon^0(n, p)$ 中引入等价关系不只限于前面所说的 5 种，§10.7 介绍了一种新的等价关系，并讨论了有限决定性问题.

§10.2　逼近引理

本节的目的是说明 $\varepsilon^0(n, p)$ 中的二映射芽 f 和 g 如果彼此相差的只是"高阶"项，则其相应的切空间具有相同的接近程度. 为表达这一事实，我们将秩为 p 的自由 ε_n-模 $V(f)$ 与 $V(g)$ 等同，这只要通过将它们的自由基 $\left\{wf\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$，$\left\{wg\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ 等同而将 $V(f)$ 和 $V(g)$ 作为 $\varepsilon_n^{\times p}$ 来等同.

引理 10.2.1　设 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为二映射芽，具有相同的 l-导网，则

(i) $f^*\phi - g^*\phi\in \mathscr{M}_n^{l+1}$，　$\forall \phi\in\varepsilon_p$，

(ii) $tf(\xi)-tg(\xi)\in\mathscr{M}_n^l\cdot V(f)$，　$\forall \xi\in V(\mathbb{R}^n)$，

(iii) $wf(\eta)-wg(\eta)\in\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)$，　$\forall \eta\in V(\mathbb{R}^p)$.

证　(i) 由推论 1.1.1 可推得.

(ii) 设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，$\{y_1, \cdots, y_p\}$ 分别为 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 和 $(\mathbb{R}^p, 0)$ 的局部坐标系. 因为 tf 和 tg 均为 ε_n-模同态，因此只需对 $\xi=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1, \cdots, n)$ 证明 (ii) 即可.

对 $i=1, \cdots, n$，有

$$tf\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-tg\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial(y_j\circ f-y_j\circ g)}{\partial x_i}\cdot wf\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

依假设，$(y_j\circ f-y_j\circ g)\in\mathcal{M}_n^{l+1}(j=1,\cdots,p)$，因此

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j\circ f-y_j\circ g)\in\mathcal{M}_n^{l},\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,p$$

并且

$$tf\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-tg\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\in\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(f),\ i=1,\cdots,n.$$

(iii) 设 $\eta\in V(\mathbb{R}^p)$，则 η 可表为 $\eta=\sum_{j=1}^{p}\eta_j\frac{\partial}{\partial y_j}$ $(\eta_j\in\varepsilon_p,\ j=1,\cdots,p)$，有

$$wf(\eta)-wg(\eta)=\sum_{j=1}^{p}(f^*\eta_j-g^*\eta_j)\cdot wf\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

据(i)，$f^*\eta_j-g^*\eta_j\in\mathcal{M}_n^{l+1}$，故

$$wf(\eta)-wg(\eta)\in\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f).$$

注 本引理还可推广，例如(ii)可换为

(ii)′ $tf(\xi)-tg(\xi)\in R\cdot\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(f)$，$\forall\xi\in R\cdot V(\mathbb{R}^n)$，且 R 为 ε_n 的任意子环.

引理 10.2.2 在引理 10.2.1 的条件下，有

(i) $T_e\mathcal{R}(f)+\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(f)=T_e\mathcal{R}(g)+\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(g)$，

$$T\mathcal{R}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathcal{R}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g).$$

(ii) $T\mathcal{C}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathcal{C}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g)$.

(iii) $T_e\mathcal{L}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T_e\mathcal{L}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g)$，

$$T\mathcal{L}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathcal{L}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g).$$

(iv) 用 $\mathcal{G}$ 表 5 类群 $\mathcal{R}$，$\mathcal{C}$，$\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{A}$ 中任意一类，则有

$$T\mathscr{G}(f)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(g),$$

这里 $T\mathscr{G}(f)$表轨道 $\mathscr{G}\cdot f$ 在 f 处的切空间.

证 据引理 10.2.1 细节由读者补述.

现在对单参数族映射芽,讨论类似的逼近引理. 设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$是一个$\mathbb{R}$-水平保持的 C^∞ 映射芽,$\{t,x_1,\cdots,x_n\}$和$\{t,y_1,\cdots,y_p\}$分别为$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$与$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$上的局部坐标系. 我们可引入沿 F 的向量场芽$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to T(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$的概念,但更感兴趣的是沿 F 的"$\mathbb{R}$-水平保持"的向量场芽,即要求沿 F 的向量场芽在 $T(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)=T\mathbb{R}\oplus T\mathbb{R}^p$ 中沿$\mathbb{R}(t)$的分量为 0. 将沿 F 的$\mathbb{R}$-水平保持的向量场芽全体记作 $\psi(F)$, 它是一个秩为 p 的自由$\varepsilon_{t,x}$-模,$\dfrac{\partial}{\partial y_1}\circ F,\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y_p}\circ F$ 为$\psi(F)$的一组 $\varepsilon_{t,x}$-基. 借助这组基,将 $\psi(F)$等同于 $\varepsilon_{t,x}^{\times p}$. 特别,$\psi(1_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)})$和$\psi(1_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)})$分别简记为 $\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$与 $\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$.

对于$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 F,依定义 8.2.6,有 tF 与 wF,将其源空间与靶空间作限制,可给出 $\varepsilon_{t,x}$-同态 $tF:\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\to\psi(F)$和关于 F^* 的同态 $wF:\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\to\psi(F)$.

令

$$\begin{aligned}
T\mathscr{R}(F)&=tF(\mathscr{M}_n\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)),\\
T\mathscr{L}(F)&=wF(\mathscr{M}_p\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),\\
T\mathscr{C}(F)&=F^*\mathscr{M}_p\cdot\psi(F),\\
T\mathscr{A}(F)&=T\mathscr{R}(F)+T\mathscr{L}(F),\\
T\mathscr{K}(F)&=T\mathscr{R}(F)+T\mathscr{C}(F).
\end{aligned}$$

定义 10.2.1 设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$为$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽,因而 F 可表示为$F(t,x)=(t,f_t(x))$, $(t,x)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$.

(i) 定义 $\partial\cdot F\in\psi(F)$为$(1,\partial\cdot F)=tF\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial t},0\right)\right)$. 显然它对

应于$\frac{\partial}{\partial t}f_t$.

(ii) 若 F 为过 f 的光滑道路芽(此时 $f_0=f$),规定 $\partial_0 F\in V(f)$为 $\partial_0 F(x)=\partial\cdot F(0,x)$, $x\in(\mathbb{R}^n,0)$. 因而它对应于$\left.\frac{\partial}{\partial t}f_t\right|_{t=0}$.

用坐标来表示,设$\{y_1,\cdots,y_p\}$为$(\mathbb{R}^p,0)$上的局部坐标系,则

$$\partial\cdot F=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial(y_i\circ F)}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\circ F.$$

引理 10.2.3 设 $F,G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$为$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽,满足条件 $G-F\in\mathcal{M}_n^l\psi(F)$, $l\geqslant 1$,则

(i) $F^*\phi-G^*\phi\in\mathcal{M}_n^l\varepsilon_{1+n}\quad\forall\phi\in\varepsilon_{1+p}$,

(ii) $tF(\xi)-tG(\xi)\in\mathcal{M}_n^{l-1}\cdot\psi(F)\quad\forall\xi\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

(iii) $wF(\eta)-wG(\eta)\in\mathcal{M}_n^l\cdot\psi(F)\quad\forall\eta\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$,

(iv) 对每一 $\mathcal{G}$, $T\mathcal{G}(F)+\mathcal{M}_n^l\cdot\psi(F)=T\mathcal{G}(G)+\mathcal{M}_n^l\cdot\psi(G)$.

注 为使上列诸式有意义,故将 $\psi(F)$与 $\psi(G)$的自由基$\left\{wF\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$, $\left\{wG\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$等同而将$\psi(F)$和 $\psi(G)$作为 $\varepsilon_{1+n}^{\times p}$等同.

证 (i) $G-F=(0,\ y_1\circ G-y_1\circ F,\ \cdots,\ y_p\circ G-y_p\circ F)$. 由假设 $G-F\in\mathcal{M}_n^l\psi(F)$, 有 $y_j\circ G-y_j\circ F\in\mathcal{M}_n^l\cdot\varepsilon_{1+n}$ $(j=1,\cdots,p)$. 据定理 1.1.3, $y_j\circ G-y_j\circ F$ 在点$(t,0)$($\forall t\in(\mathbb{R},0)$)处关于 x 的阶数小于l 的所有偏导数均为0. 由此可推出:对于任意的$\phi\in\varepsilon_{1+p}$, $G^*\phi-F^*\phi=\phi\circ G-\phi\circ F$ 在点$(t,0)$(对任意 $t\in(\mathbb{R},0)$)处关于 x 的阶数小于l 的所有偏导数均为0. 再一次应用定理1.1.3,便得到 $G^*\phi-F^*\phi\in\mathcal{M}_n^l\cdot\varepsilon_{1+n}$.

(ii)与(iii)的证明类似于引理 10.2.1 中的(ii)和(iii),并且(iv)的证明与引理 10.2.2 相似,请读者自己验证.

该引理的更一般形式是

引理 10.2.4 在引理 10.2.3 的条件下，有

(i) $F^*\phi - G^*\phi \in \mathcal{M}_n^{l+k}\cdot\varepsilon_{1+n}\quad \forall\,\phi\in\mathcal{M}_p^k\cdot\varepsilon_{1+p},\ k\geqslant 0$,

(ii) $tF(\xi)-tG(\xi)\in R\cdot\mathcal{M}_n^{l-1}\cdot\psi(F)\quad \forall\,\xi\in R\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, R 为 ε_{1+n} 的任意子环，

(iii) $wF(\eta)-wG(\eta)\in\mathcal{M}_n^{l+k}\cdot\psi(F)\quad \forall\,\eta\in\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$, $k\geqslant 1$.

$$F_0:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0),$$

$$(t,x)\mapsto F_0(t,x)=(t,f(x))$$

是$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽的最简单例子，其中 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽.

引理 10.2.5 对每一个 $\mathscr{G}$,

$$T\mathscr{G}(F_0)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F_0)\Leftrightarrow T\mathscr{G}(f)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot V(f).$$

证 $\Rightarrow$ 易见 $\psi(F_0)/\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)$同构于 $V(f)$，且在这同构对应下，$T\mathscr{G}(f)\cong T\mathscr{G}(F_0)/T\mathscr{G}(F_0)\cap\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)$. 而 $T\mathscr{G}(F_0)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F_0)$，故

$$T\mathscr{G}(f)\cong\frac{T\mathscr{G}(F_0)+\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}{\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}\supset\frac{\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F_0)+\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}{\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}$$

$$\cong\mathcal{M}_n^r\cdot\left(\psi(F_0)\Big/\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)\right)\cong\mathcal{M}_n^r\cdot V(f).$$

$\Leftarrow$ 反之，若 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot V(f)$，则 $V(f)\Big/T\mathscr{G}(f)$是一个有限维实向量空间. 选取有限个 $g_i\in V(f)\,(i=1,\cdots,s)$作为 $V(f)\Big/T\mathscr{G}(f)$的一组生成元. 将诸 g_i 扩张，使之与 t 无关而成为 $\psi(F_0)$中的成员，这是可能的. 因为我们可以将 $V(f)=\varepsilon_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_j}\circ f\right\}$等同于$\varepsilon_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_j}\circ F_0\right\}$，且 ε_x 等同于$\varepsilon_{t,x}$中的一子环(为

此将 $\alpha\in\varepsilon_x$ 等同于 $\alpha\in\varepsilon_{t,x}$，后者定义为 $\alpha(t,x)=\alpha(x)$)．因为

$$V(f)\Big/T\mathscr{G}(f)\cong\psi(F_0)\Big/(\mathscr{M}_t\cdot\psi(F_0)+T\mathscr{G}(F_0)),$$

因此上式右边作为实向量空间由诸 g_i 生成．令 $A=\psi(F_0)\Big/T\mathscr{G}(F_0)$，则

$$A\Big/\mathscr{M}_t\cdot A\cong\psi(F_0)\Big/(\mathscr{M}_t\cdot\psi(F_0)+T\mathscr{G}(F_0)).$$

据 Malgrange 预备定理，A 作为 ε_t-模是有限生成的，从而由 Nakayama 引理，$A=\varepsilon_t\{g_1,\cdots,g_s\}$．注意到

$$\mathscr{M}_x^r\cdot\left(V(f)\Big/T\mathscr{G}(f)\right)=\frac{\mathscr{M}_x^r\cdot V(f)+T\mathscr{G}(f)}{T\mathscr{G}(f)}=0,$$

因此

$$\mathscr{M}_x^r\cdot\left(A\Big/\mathscr{M}_t\cdot A\right)=0,$$

从而有 $\mathscr{M}_x^r\cdot A\subset\mathscr{M}_t\cdot A$ 及 $\mathscr{M}_x^r\cdot A=0$，于是 $\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F_0)\subset T\mathscr{G}(F_0)$．

§10.3　无穷小判别法

本节仍用 $\mathscr{G}$ 表示群 $\mathscr{R},\mathscr{C},\mathscr{K},\mathscr{L}$ 及 $\mathscr{A}$ 中的任意一个．

定义 10.3.1　设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽，r 为正整数．如果 $\varepsilon^0(n,p)$ 中与 f 具有相同 r-导网的芽 g 必 $\mathscr{G}$-等价于 f，那么 f 叫做 r-$\mathscr{G}$-决定的．

具有上述性质的正整数 r 中的最小者叫做 f 的决定性阶数．

10.3.1　Mather 著名结果的陈述

我们陈述 Mather 关于 C^∞ 映射芽有限决定性的无穷小判别法，下面的定理是 Gaffney 提供的一个改进形式（见文献[19]或[65]）．

定理 10.3.1 对每一个 $f,\mathscr{G}$,下列诸断言是等价的:

(b) f 是有限 $\mathscr{G}$-决定的,

(t) 对某一自然数 k, $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^k\cdot V(f)$,

(d) $\mathrm{d}(f,\mathscr{G})=\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{M}_n\cdot V(f)\big/T\mathscr{G}(f)<\infty$,

(d′) $\mathrm{d}_e(f,\mathscr{G})=\dim_{\mathbb{R}}V(f)\big/T_e\mathscr{G}(f)<\infty$.

更确切地,

(i) 若 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的,则 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$,

(ii) 若 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$, 则 f 是$(\varepsilon r+1)$-$\mathscr{G}$-决定的,

(iii) 若 $\mathrm{d}(f,\mathscr{G})=d<\infty$,则 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{(d+1)^\varepsilon}\cdot V(f)$, 其中当 $\mathscr{G}=\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$ 时,$\varepsilon=1$;当 $\mathscr{G}=\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{A}$ 时,$\varepsilon=2$.

值得注意的是,(i)、(ii)、(iii)分别导出蕴涵关系(b)⇒(t),(t)⇒(b),(d)⇒(t). 而(t)⇒(d)是平凡的,因为 $\mathscr{M}_n^k\cdot V(f)$具有有限余维,即 $\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{M}_n\cdot V(f)\big/\mathscr{M}_n^k\cdot V(f)<\infty$.

10.3.2 几个引理

为证明定理 10.3.1,首先证明下列几个引理.

引理 10.3.1 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞映射芽,C 为有限生成的ϵ_n-模,A 为有限生成的ϵ_p-模.

(1) 若 B 是C 的有限生成ϵ_n-子模,合于 $A+f^*\mathscr{M}_p\cdot B\supset B$,则 $A\supset B$.

(2) 若 M 是ϵ_n 中的有限生成理想,$A\subset f^*\mathscr{M}_p\cdot C$,且 $M\cdot C\subset A+M^2\cdot C$,则 $M\cdot C\subset A$.

(3) 若 $\dim_{\mathbb{R}}(C\big/A+\mathscr{M}_n^{d^2+d}\cdot C)\leqslant d$ 且 $A\subset f^*\mathscr{M}_p\cdot C$,则 $\mathscr{M}_n^{d^2}\cdot C\subset A$.

证 (1) 因 A 为有限生成的ϵ_p-模,$\dim_{\mathbb{R}}A\big/\mathscr{M}_p\cdot A<\infty$. 而 $B\big/f^*\mathscr{M}_p\cdot B$ 可表为$A\big/f^*\mathscr{M}_p\cdot A$ 的商,因此 $\dim_{\mathbb{R}}B\big/f^*\mathscr{M}_p\cdot B<$

∞. 依 Malgrange 预备定理, B 作为 ε_p- 模是有限生成的.

由条件 $A + f^* \mathcal{M}_p \cdot B \supset B$ 可导出 $f^* \mathcal{M}_p \cdot \dfrac{B}{A \cap B} \supset \dfrac{B}{A \cap B}$, 据 Nakayama 引理, $B \big/ A \cap B = 0$, $B \subset A$.

(2) 将 Nakayama 引理应用于

$$M^2 \cdot C \subset M \cdot A + M^3 \cdot C,$$

可得到 $M^2 \cdot C \subset M \cdot A$(注意 $M^2 \cdot C \big/ M^2 \cdot C \cap M \cdot A$ 是 ε_n 上的有限生成模), 于是

$$M^2 \cdot C \subset M \cdot f^* \mathcal{M}_p \cdot C,$$

将它代入 $M \cdot C \subset A + M^2 \cdot C$, 得

$$M \cdot C \subset A + f^* \mathcal{M}_p \cdot (M \cdot C),$$

据(1), $M \cdot C \subset A$.

(3) 用 ε_n- 模 $\varepsilon_n \cdot A$ 代替 A 不影响假设条件. 又

$$\dim_{\mathbb{R}} C \big/ (A + \mathcal{M}_n^{d+1} \cdot C) \leqslant \dim_{\mathbb{R}} C \big/ (A + \mathcal{M}_n^{d^2+d} \cdot C) \leqslant d,$$

据推论 3.1.2,

$$\mathcal{M}_n^d \cdot C \subset \varepsilon_n \cdot A \subset f^* \mathcal{M}_p \cdot C$$

(后一包含关系用到假设条件). 令 $B_k = A + \mathcal{M}_n^{kd} \cdot C$, $1 \leqslant k \leqslant d+1$. 由假设, 诸子模 B_k 不可能全不同. 若对某一 $k \leqslant d$, $B_k = B_{k+1}$, 则

$$\mathcal{M}_n^{kd} \cdot C \subset A + \mathcal{M}_n^{(k+1)d} \cdot C \subset A + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^{kd} \cdot C,$$

据(1), $\mathcal{M}_n^{kd} \cdot C \subset A$, $k \leqslant d$, 故结论成立.

引理 10.3.2 设 $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$ 是 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽, 因而可表示为 $F(t, x) = (t, f_t(x))$, 则每一 f_t ($t \in (\mathbb{R}, 0)$) 具有相同的 r-导网 $\Leftrightarrow \partial \cdot F \in \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \psi(F)$.

证 设$\{t, y_1, \cdots, y_p\}$是$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, 0)$上的局部坐标系，则

$$\partial \cdot F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \circ F,$$

于是

$$\partial \cdot F \in \mathscr{M}_n^{r+1} \cdot \psi(F) \Leftrightarrow \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial t} \in \mathscr{M}_n^{r+1} \cdot \varepsilon_{1+n},\ i = 1, \cdots, p$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^j (y_i \circ F)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}\right] = 0,\ \forall j \leqslant r,$$

$$1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^j (y_i \circ F)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} \text{ 与 } t \text{ 无关}, t \in (\mathbb{R}, 0),$$

$$\forall j \leqslant r, 1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant n$$

$\Leftrightarrow$ 每一 $f_t(t \in (\mathbb{R}, 0))$ 的 r-导网都相同.

引理 10.3.3 设 $f\in \varepsilon^0(n, p)$. $\varepsilon^0(n, p)$中与 f 具有相同 r-导网的映射芽所成之集在 f 处的切空间为 $\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$.

证 设过 f 的光滑道路芽F 如引理 10.3.2 中所示，且 F 满足条件：每一 f_t 具有与f 相同的 r-导网. 据引理 10.3.2，$\partial\cdot F\in \mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(F)$，因而 $\partial_0 F\in\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$.

反之，任取 $\sigma\in\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$. 设 $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{p}\sigma_i\cdot\dfrac{\partial}{\partial y_i}\circ f$，依下法构作一条过 f 的光滑道路芽F. 令 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, 0)$ 定义为

$$F(t, x) = (t, f_t(x)),$$

$$y_i \circ f_t(x) = y_i \circ f(x) + t \cdot \sigma_i(x),$$

易见每一 f_t 具有与f 相同的 r-导网，$t\in(\mathbb{R},0)$，并且 $\partial_0 F=\sigma$.

特别，它可应用于 $r=0$ 的情形，因而 $\varepsilon^0(n, p)$在 f 处的切空间为 $\mathscr{M}_n\cdot V(f)$.

注 从上述证明可知，$V(f)$的成员和过 f 的光滑道路芽的等价类成一一对应，后者的等价关系定义为：$F\sim G\Leftrightarrow\partial_0 F=\partial_0 G$.

最后概述有关导网空间的某些事实. 映射芽空间 $\varepsilon(n, p)$作为实向量空间是无穷维的，可以赋予 Fréchet 流形结构. 然而对于有限维流形成立的许多重要定理，例如反函数定理及隐函数定理，在 $\varepsilon(n, p)$中一般不成立. 为了把无穷维问题化简为有限维来处理，利用某些标准映射，例如导网运算，可将 $\varepsilon(n, p)$及群 $\mathscr{G}$ 映成有限维空间.

令 $J^l(n, p)$表 $\varepsilon^0(n, p)$中的映射芽取 l-导网所成之集. 在不引起混淆时，简记 $J^l(n, p)$为 J^l. 显然，J^l 与次数不大于 l 的多项式映射$(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$所组成的实向量空间可建立双射. 或者等价地，将每一 $z\in J^l$ 对应于它的 l 阶 Taylor 多项式所含的 $q=p\left[\binom{n+l}{l}-1\right]$个系数，这样确定的映射 $J^l\to\mathbb{R}^q$ 是一个双射. 由此可赋予 J^l 拓扑结构与微分结构，使 J^l 成为一个 C^∞ 流形，并且这 q 个系数组成J^l 的一个整体坐标系. 如果变换$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^p$ 上的坐标系，将得到 J^l 的一个新坐标系，它的每一个分量可表为原有坐标的有理函数，因此 J^l 的C^∞ 流形结构与$\mathbb{R}^n$ 及$\mathbb{R}^p$ 上的坐标选取无关.

按照上述方式，对每一群 $\mathscr{G}$ 可定义 $\mathscr{G}^l$ 并赋予它以C^∞ 流形结构，从而使 $\mathscr{G}^l$ 为 Lie 群，$\mathscr{G}^l$ 中的乘法运算由 $\mathscr{G}$ 中的乘法所诱导. $\mathscr{G}$ 在 $\varepsilon^0(n, p)$上的作用诱导出 $\mathscr{G}^l$ 在$J^l(n, p)$上的作用，并且这一作用是 C^∞ 的，实际上是一个代数群作用. 于是过 $f\in\varepsilon^0(n, p)$的 $\mathscr{G}$-轨道 $\mathscr{G}\cdot f$ 映成过$j^lf\in J^l(n, p)$的 $\mathscr{G}^l$ -轨道 $\mathscr{G}^l\cdot j^lf$. 考虑到切空间(注意 $\varepsilon^0(n, p)$在 f 处的切空间为 $\mathscr{M}_n\cdot V(f)$)，定义

$$\pi^l:\mathscr{M}_n\cdot V(f)\to T_{j^lf}J^l(n, p)$$

为 $\pi^l\left(\frac{\partial}{\partial t}f_t\Big|_{t=0}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(j^l f_t)|_{t=0}$.

显然,π^l 是实线性映射,且为满射. 据引理 10.3.3,$\mathrm{Ker}\pi^l=\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)$. 由命题 8.2.2 与 8.4.4,可进一步得出

$$T_{j^l f}(\mathcal{G}^l\cdot j^l f)=\pi^l(T\mathcal{G}(f)).$$

10.3.3 定理 10.3.1 的证明

(i) 假定 f 是 r-$\mathcal{G}$-决定的,那么对每一 $g\in\varepsilon^0(n,p)$, 若 g 与 f 具有相同的 r-导网,则 g 与 f 是 $\mathcal{G}$-等价的,于是有

$$\{g\in\varepsilon^0(n,p)\,|\,j^r g=j^r f\}\subset\{g\in\varepsilon^0(n,p)\,|\,g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f\}.$$

取 l-导网($l>r$),

$$\{j^l g\in J^l\,|\,j^r g=j^r f\}\subset\{j^l g\in J^l\,|\,g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f\},$$

再在 $j^l f$ 处取切空间,得

$$T_{j^l f}\{j^l g\in J^l\,|\,j^r g=j^r f\}\subset T_{j^l f}\{j^l g\in J^l\,|\,g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f\}.$$

而

$$T_{j^l f}\{j^l g\in J^l\,|\,j^r g=j^r f\}=\pi^l(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)),$$

$$\begin{aligned}T_{j^l f}\{j^l g\in J^l\,|\,g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f\}&=T_{j^l f}(\mathcal{G}^l\cdot j^l f)\\&=\pi^l(T\mathcal{G}(f)),\end{aligned}$$

于是

$$\pi^l(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f))\subset\pi^l(T\mathcal{G}(f)).$$

因为 $\mathrm{Ker}\pi^l=\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)$,所以

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathcal{G}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f).\tag{1}$$

i) 当 $\mathcal{G}=\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{K}$ 时,取 $l=r+1$. 由 Nakayama 引理,有

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{G}(f). \tag{2}$$

ii) 当 $\mathscr{G}=\mathscr{L}$ 时，应用引理 10.3.1，令 $C=V(f)$，$A=T\mathscr{L}(f)$，$M=\mathscr{M}_n^{r+1}$，并取 $l=2r+1$. 此时 $A=wf(\mathscr{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p))=f^*\mathscr{M}_p\cdot wf(V(\mathbb{R}^p))\subset f^*\mathscr{M}_p\cdot V(f)=f^*\mathscr{M}_p\cdot C$，而 $M\cdot C\subset A+M^2\cdot C$ 正好是

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{L}(f)+\mathscr{M}_n^{2(r+1)}\cdot V(f),$$

据引理 10.3.1(2)，

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{L}(f). \tag{3}$$

iii) 当 $\mathscr{G}=\mathscr{A}$ 时，仍应用引理 10.3.1(2). 令 $C=V(f)\big/T\mathscr{R}(f)$，显然它是有限生成的 ε_n-模. $A=T\mathscr{L}(f)\big/T\mathscr{L}(f)\cap T\mathscr{R}(f)$ 为有限生成的 ε_p-模，它是 $T\mathscr{L}(f)$ 在 C 中的像. 令 $M=\mathscr{M}_n^{r+1}$，并取 $l=2r+1$. 注意 $A\subset\dfrac{f^*\mathscr{M}_p\cdot V(f)+T\mathscr{R}(f)}{T\mathscr{R}(f)}\cong f^*\mathscr{M}_p\cdot C$，又(1)式可写为

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{R}(f)+T\mathscr{L}(f)+\mathscr{M}_n^{2(r+1)}\cdot V(f),$$

或

$$M\cdot C\subset A+M^2\cdot C.$$

据引理 10.3.1(2)，$M\cdot C\subset A$，即

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\left(V(f)\big/T\mathscr{R}(f)\right)\subset\frac{T\mathscr{L}(f)}{T\mathscr{L}(f)\cap T\mathscr{R}(f)}\cong\frac{T\mathscr{A}(f)}{T\mathscr{R}(f)},$$

于是

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f). \tag{4}$$

(2)～(4)式合起来便是所要证的结论.

(ii) 假定 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$. 设 $g\in\varepsilon^0(n,p)$ 与 f 具有

相同的 l-导网,这里 $l=\varepsilon r+1$, 需证 g 与 f 是 $\mathscr{G}$-等价的.

依引理 10.2.2(iv),有

$$T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(g)=T\mathscr{G}(f)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f),$$

将 $V(g)$与 $V(f)$等同,有

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(g),$$

然后利用(i)中相同的论证可得到

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathscr{G}(g).\tag{5}$$

其次在 f 和 g 之间作线性插值,定义$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $H:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\ [0,\ 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,\ [0,\ 1]\times 0)$为

$$H(t,\ x)=(t,\ h_t(x)),$$

$$h_t(x)=h(t,\ x)=(1-t)f(x)+tg(x).$$

任取 $a\in[0,\ 1]$, 在点$(a,\ 0)$处有芽 $h_a\in\varepsilon^0(n,\ p)$, $h_a(x)=(1-a)f(x)+ag(x)$, $x\in(\mathbb{R}^n,\ 0)$. 显然 h_a 和 f(及 g)具有相同的 l-导网,因而由(5)式,有

$$T\mathscr{G}(h_a)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(h_a).$$

令 $F=1_{(\mathbb{R},\ a)}\times h_a$,其中 $1_{(\mathbb{R},\ a)}$为$(\mathbb{R},\ a)$上的恒同映射芽. 据引理 10.2.5,

$$T\mathscr{G}(F)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(F).$$

再令 G 为H 在点$(a,\ 0)$处的芽限制,$G=H|(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\ (a,\ 0))$. 易见 $F,G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\ (a,\ 0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,\ (a,\ 0))$均为$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽,且

$$G(t,\ x)-F(t,\ x)=(0,\ (t-a)(g(x)-f(x))),$$

因而 $G-F\in\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(F)$. 据引理 10.2.3(iv),

$$T\mathscr{G}(G)+\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(G)=T\mathscr{G}(F)+\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(F)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(F),$$

将 $\psi(G)$等同于 $\psi(F)$. 得

$$T\mathscr{G}(G) + \mathscr{M}_n^l \cdot \psi(G) \supset \mathscr{M}_n^{r+1} \cdot \psi(G).$$

类似于(i)中使用的证法,可推得

$$T\mathscr{G}(G) \supset \mathscr{M}_n^{r+1} \cdot \psi(G),$$

应用引理 10.3.2 于 G,有

$$\alpha \cdot G \in \mathscr{M}_n^l \cdot \psi(G).$$

下面着重对 $\mathscr{G} = \mathscr{A}$ 这一情形进行讨论. 由上面二式,可找到向量场芽 $\xi \in \mathscr{M}_n \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\eta \in \mathscr{M}_p \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$, 使得

$$\partial \cdot G = tG(\xi) + wG(\eta), \tag{6}$$

用坐标表示,令

$$-\xi(t, x) = -\xi_t(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\eta(t, y) = \eta_t(y) = \sum_{j=1}^{p} Y_j(t, y) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

则(6)式可写为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\mathrm{D}h_t \cdot \xi_t + \eta_t \circ h_t,$$

从而由命题 8.2.1, G 是 $\mathscr{A}$-平凡的. 这就是说,积分向量场 ξ 与 η 分别得到$(\mathbb{R}^n, 0)$和$(\mathbb{R}^p, 0)$上的局部微分同胚的 1-参数族 Φ 与 Ψ,使得

$$\Psi \circ (1_{(\mathbb{R}, a)} \times h_a) \circ \Phi^{-1} = G,$$

因而对于点 a 的邻域内的诸 t 值,所有 h_t 都是 $\mathscr{A}$-等价的. 又因为 $a \in [0, 1]$是任取的,$[0, 1]$是紧致的,所以 $f = h_0$ 与 $g = h_1$ 必 $\mathscr{A}$-等价. 根据上面的分析,f 是$(2r+1)-\mathscr{A}$-决定的.

至于 $\mathscr{G} = \mathscr{R}, \mathscr{C}, \mathscr{K}$ 或 $\mathscr{L}$ 这 4 种情形的论证,请读者补述.

(iii) 对于 $\mathscr{G}=\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$,令

$$b_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathscr{M}_n \cdot V(f)}{T\mathscr{G}(f) + \mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f)}, \ k = 0, 1, \cdots, d+1,$$

则 $0=b_0\leqslant\cdots\leqslant b_k\leqslant\cdots\leqslant b_{d+1}\leqslant d$,于是存在 $k\leqslant d$,使得 $b_k = b_{k+1}$,从而有

$$\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{G}(f) + \mathscr{M}_n \cdot \mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f).$$

据 Nakayama 引理,有

$$\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{G}(f), \quad k \leqslant d,$$

更不待说有 $\mathscr{M}_n^{d+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{G}(f)$.

对于 $\mathscr{G}=\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{A}$,证明留作练习.

§ 10.4 $\mathscr{A}_k$-决定性

本节讨论 $\mathscr{G}_k$-决定性,它是 $\mathscr{G}$-决定性的自然推广. 设 k 为非负整数,定义 $\mathscr{G}$ 的子群 $\mathscr{G}_k$ 如下:

$\mathscr{G}_k=\{\phi\in\mathscr{G}\mid\phi$ 与恒同映射芽具有相同的 k-导网$\}$

说得具体些,

$$\mathscr{R}_k = \{\phi:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \in \mathscr{R} \mid j^k\phi = j^k 1_{(\mathbb{R}^n, 0)}\},$$

$$\mathscr{L}_k = \{\psi:(\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \in \mathscr{L} \mid j^k\psi = j^k 1_{(\mathbb{R}^p, 0)}\},$$

$$\mathscr{K}_k = \{\phi:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \in \mathscr{K} \mid j^k\phi = j^k 1_{(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p, 0)}\},$$

$$\mathscr{A}_k = \mathscr{R}_k \times \mathscr{L}_k, \quad \mathscr{C}_k = \mathscr{C} \cap \mathscr{K}_k.$$

或者利用群 $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{A}$ 等同于 $\mathscr{K}$ 的子群这一事实,有 $\mathscr{R}_k=\mathscr{R}\cap\mathscr{K}_k$, $\mathscr{L}_k=\mathscr{L}\cap\mathscr{K}_k$ 和 $\mathscr{A}_k=\mathscr{A}\cap\mathscr{K}_k$. 容易验证,$\mathscr{G}_k$ 是 $\mathscr{G}$ 的正规子群,且 $\mathscr{G}_0=\mathscr{G}$.

对应于这些子群的轨道,切空间分别为

$$T\mathscr{R}_k(f) = tf(\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)),$$

$$T\mathscr{L}_k(f) = wf(\mathscr{M}_p^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^p)),$$

$$T\mathscr{C}_k(f) = f^* \mathscr{M}_p \cdot \mathscr{M}_n^k \cdot V(f),$$

$$T\mathscr{A}_k(f) = T\mathscr{R}_k(f) + T\mathscr{L}_k(f),$$

$$T\mathscr{K}_k(f) = T\mathscr{R}_k(f) + T\mathscr{C}_k(f).$$

定义 10.4.1 设 $f \in \varepsilon^0(n, p)$. 若 $g \in \varepsilon^0(n, p)$ 满足 $j^r g = j^r f$, 则 $g \underset{\mathscr{G}_k}{\sim} f$. 则说 f 是 r-$\mathscr{G}_k$-决定的.

换言之,如果 $\varepsilon^0(n, p)$ 中与 f 具有相同 r-导网的映射芽所成之集包含在过 f 的轨道 $\mathscr{G}_k \cdot f$ 中,那么 f 是 r-$\mathscr{G}_k$-决定的.

上一节刻画了映射芽有限 $\mathscr{G}$-决定的特征,但人们更感兴趣的是映射芽的 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{K}$ 决定性,对函数芽则考虑 $\mathscr{R}$ 决定性. 本节余下部分集中讨论 $\mathscr{A}_k$-决定性.

如定义 8.2.1 那样,可引入一个$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $F:(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$是 $\mathscr{A}_k$-平凡的概念,并且有下列

命题 10.4.1 F 是 $\mathscr{A}_k$-平凡的当且仅当

$$\partial \cdot F \in tF(\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)) + wF(\mathscr{M}_p^{k+1} \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)).$$

证明提示 读者在证明时可利用下列事实:若一个向量场芽在某点处,其阶数不大于 k 的所有导数均为 0,则由它的积分流组成的微分同胚芽在该点具有与恒同映射芽相同的 k-导网.

命题 10.4.2 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$是 r-$\mathscr{A}_k$-决定的($0 \leqslant k < r$), 则

$$\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathscr{M}_p^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathscr{M}_n^{2(r+1)} \cdot V(f),$$

进而有

$$\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{A}_k(f).$$

证明留作练习.

下面的定理引自 A. du Plessis 的一个结果[16],它提供了 $\mathscr{A}_k$-决定性阶数的"基本估计".

定理 10.4.1 设 $1\leqslant k\leqslant r$, f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 C^∞ 映射芽,使得

$$\mathscr{M}_n^r \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_n^k \cdot V(\mathbb{R}^n)) + \omega f(\mathscr{M}_p^k \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathscr{M}_n^{2r-k+1} \cdot V(f),$$

则

(i) f 是 $\max\{r-1, 2r-2k+1\}$-$\mathscr{A}_{k-1}$-决定的,

(ii) f 是$(2r-k)$-$\mathscr{A}_k$-决定的.

证 (i) 令 $s=\max\{r-1, 2r-2k+1\}$. 设 $g\in\varepsilon^0(n, p)$合于 $j^sg=j^sf$, 定义$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 F:$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, [0, 1]\times 0)$如下:

$$F(t, x) = (t, f_t(x)),$$

$$f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x),$$

显然每一 f_t 具有与 f 相同的 s-导网. 任取 $a\in[0, 1]$,令 F^a 为 F 在点$(a, 0)$处的芽限制,据引理 10.3.2,$\partial\cdot F^a\in\mathscr{M}_n^{s+1}\cdot\psi(F^a)\subset\mathscr{M}_n^r\psi(F^a)$. 若能证明

$$\mathscr{M}_n^r \cdot \psi(F^a) \subset tF^a(\mathscr{M}_n^k \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + \omega F^a(\mathscr{M}_p^k \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),$$

$$\forall a \in [0, 1]. \qquad (*)$$

由命题 10.4.1 知,F^a 是 $\mathscr{A}_{k-1}$-平凡的,因而对于点 a 的邻域内的 t 值,所有 f_t 均 $\mathscr{A}_{k-1}$-等价. 而 $a\in[0, 1]$是任取的,并且$[0,1]$是紧致的,所以 $f=f_0$ 与 $g=f_1$ 必 $\mathscr{A}_{k-1}$-等价. 为此先证

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_n^r\psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a \subset\, & t(1_{\mathbb{R}}\times f)^a(\mathscr{M}_n^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) \\ & + \omega(1_{\mathbb{R}}\times f)^a(\mathscr{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)) \\ & + (t^a\cdot\mathscr{M}_n^r + \mathscr{M}_n^{2r-k+1})\psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a, \qquad (1)\end{aligned}$$

其中 $t^a \in \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)}$ 定义为 $t^a(t, x) = t - a$.

为证(1)式,首先注意到

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)} = \varepsilon_n + t^a \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)},$$

它可由 Taylor 定理推出:若 $\phi \in \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)}$, 则 $\phi(t, x) = \phi(a, x) + (t - a)\cdot R(t, x)$. 简记 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)}$ 为 ε_{1+n}, 有

$$\mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{1+n} = \mathcal{M}_n^r + t^a \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{1+n}.$$

因 $\psi(1_{\mathbb{R}} \times f)^a$ 是自由 ε_{1+n}-模,将 $V(f) = \varepsilon_n \left\{\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f\right\}$ 等同于 $\varepsilon_n \left\{\frac{\partial}{\partial y_i} \circ (1_{\mathbb{R}} \times f)^a\right\}$, 则

$$\mathcal{M}_n^r \cdot \psi(1_{\mathbb{R}} \times f)^a \subset \mathcal{M}_n^r \cdot V(f) + t^a \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot \psi(1_{\mathbb{R}} \times f)^a,$$

$$tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n)) \subset t(1_{\mathbb{R}} \times f)^a(\mathcal{M}_n^k \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)),$$

$$wf(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p)) \subset w(1_{\mathbb{R}} \times f)^a(\mathcal{M}_p^k \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)),$$

$$\mathcal{M}_n^{2r-k+1} \cdot V(f) \subset \mathcal{M}_n^{2r-k+1} \psi(1_{\mathbb{R}} \times f)^a,$$

然后由定理假设条件可导出(1)式.

因为对所构作的 F,每一 f_t 具有与 f 相同的 $(2r - 2k + 1)$-导网. 现应用逼近引理 10.2.4,令 $l = 2r - 2k + 2$, $R = \mathcal{M}_n^k$, 将(1)式中的 $1_{\mathbb{R}} \times f$ 代之以 F,下列包含关系成立:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^r \psi(F^a) \subset & tF^a(\mathcal{M}_n^k \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)) + wF^a(\mathcal{M}_p^k \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)) \\ & + (t^a \cdot \mathcal{M}_n^r + \mathcal{M}_n^{2r-k+1})\psi(F^a), \end{aligned} \tag{2}$$

余下说明 $(t^a \cdot \mathcal{M}_n^r + \mathcal{M}_n^{2r-k+1})\psi(F^a)$ 是多余的.

用 $\mathcal{M}_n^{r-k+1}$ 乘(2)式两边,并注意

$$\mathcal{M}_n^{r-k+1} \cdot wF^a(\mathcal{M}_p^k \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)) \subset (F^a)^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot \psi(F^a),$$

得到

$$\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$$
$$+(t^a+\mathcal{M}_n^{r-k+1})\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a). \qquad (3)$$

令

$$E=\frac{tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)+\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)}{tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)},$$

这是一个有限生成的 ε_{1+n}-模,因为它同构于有限生成的 ε_{1+n}-模 $\mathcal{M}_n^{2r-k+1}.\psi(F^a)$的商. 由(3)式可推出 $E=(t^a+\mathcal{M}_n^{r-k+1})E$,更有 $E=\mathcal{M}_{1+n}\cdot E$,据 Nakayama 引理,$E=0$,因而

$$\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$$
$$+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a), \qquad (4)$$

将它代入(2)式中,得

$$\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))$$
$$+(t^a+(F^a)^*\mathcal{M}_p)\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a). \qquad (5)$$

令

$$E'=\frac{tF^a(\mathcal{M}_n^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^r\psi(F^a)}{tF^a(\mathcal{M}_n^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))},$$

它是一个$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模,由(5)式可导出 $E'=(t^a+(F^a)^*\mathcal{M}_p)\cdot E'$. 又因 t^a, $(F^a)^*\mathcal{M}_p\subset(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}$, 故

$$E'=(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot E'. \qquad (6)$$

为应用 Nakayama 引理,需证 E'是有限生成的. 为此考虑有限生成的 ε_{1+n}-模

$$E''=\frac{tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}{tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))},$$

它也是$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模．依 Malgrange 预备定理，它是有限生成的当且仅当 $\dim_{\mathbb{R}} E''\Big/(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot E''<\infty$．而

$$\frac{E''}{(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot E''}$$

$$\cong\frac{\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}{\{tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\}\cap\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)},\tag{7}$$

又由(5)式可导出

$$\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot\psi(F^a),$$

以及

$$\mathcal{M}_n^{2r}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^{r+k}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a),$$

于是(7)式右边的分母包含 $\mathcal{M}_n^{2r}\cdot\psi(F^a)$，并且它还包含 $t^a\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$(因 $t^a\in(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}$)，因而包含 $\mathcal{M}_{1+n}^r\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$(因 $\mathcal{M}_{1+n}^r\subset\mathcal{M}_n^r+t^a\cdot\varepsilon_{1+n}$)．又 $\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$是有限生成的 ε_{1+n}-模，因此

$$\dim_{\mathbb{R}}\frac{E''}{(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot E''}\leqslant\dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}{\mathcal{M}_{1+n}^r\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}<\infty,$$

据 Malgrange 预备定理，E''是有限生成的$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模．

注意下列包含关系

$$tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$$

$$\subset tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$$

诱导出$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模之间满同态 $E''\to E'$，因此 E'也是有限生成的$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模．由(6)式，依 Nakayama 引理得出 $E'=0$，因此(*)式成立．据前面分析，(i)得证．

(ii) 将(*)式代入(4)式中,得

$$\mathscr{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathscr{M}_n^{r+1}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathscr{M}_p$$
$$\cdot\{tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathscr{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))\}$$
$$\subset tF^a(\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathscr{M}_p^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)).$$

因(i)中构作的 F 满足下列条件:每一 f_t 与 f 具有相同的$(2r-k)$-导网,据引理 10.3.2,$\partial\cdot F^a\in\mathscr{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)$,因此

$$\partial\cdot F^a\in tF^a(\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$$
$$+wF^a(\mathscr{M}_p^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),\ \forall a\in[0,1].$$

这说明对每一 $a\in[0,1]$,F^a 是 $\mathscr{A}_k$-平凡的. 再按照(i)中的分析,(ii)亦真.

§10.5 决定性阶数估计

如何对有限决定的映射芽的阶数进行估计呢? 定理 10.3.1 本身提供了一种估计方式,但是按照 Mather 的方法对非稳定的有限决定的映射芽进行阶数估计有时很不理想, 例如 T. Gaffney 曾给出下面例子:

$$f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),\ (x,y)\mapsto(x,y^3+x^2y),$$

按照 Mather 的方法估计,f 是 10^{24}-$\mathscr{A}$-决定的. 因此寻找一些有效的方法与技巧用来估计决定性阶数是有意义的. 对于上例来说,按照 Gaffney 的方法,f 是 6-$\mathscr{A}$-决定的,而按照 du Plessis 的方法. 则为 3-$\mathscr{A}$-决定的(见例 2). 本节就 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{A}_k$ 情形予以讨论. 值得指出的是,Mather 提供的下列引理及其推论将使讨论变得简洁(见文献[49]).

引理 10.5.1 设 G 为 Lie 群,M 为 C^∞ 流形,$\alpha:G\times M\to M$ 是一个 C^∞ 群作用. 又假设 V 是 M 的 C^∞ 连通子流形,那么 V 包

含在 α 的一条轨道中的必要充分条件是

(a) 对于所有 $v\in V, T_v(G\cdot v)\supset T_vV$,

(b) $\dim T_v(G\cdot v)$不依赖于 $v\in V$ 的选取.

注 对于充分性而言,仅条件(a)还不够. 例如,设 $M=\mathbb{R}^2$, G 为 $GL(2,\mathbb{R})$的子群,由上三角矩阵组成,α 为 G 在 M 上的通常作用,则存在 3 条轨道:原点, x 轴除去原点,平面$\mathbb{R}^2$ 除去 x 轴. 由 $y=(x-1)^2$ 定义的抛物线 V 满足条件(a)但不位于上述单独一条轨道中.

下面的推论说明应用引理 10.5.1 可不必验证条件(b). 首先介绍有关术语.

一个 C^∞ 流形 M 连同 Lie 群 G 在M 上的作用称为一个G-空间. 假设 M, M'为G-空间. 若 $\pi: M\to M'$是一个C^∞ 淹没且使得

$$\pi(gx)=g\pi(x),\quad g\in G,\quad x\in M,$$

则 π 叫做 G-淹没.

推论 10.5.1 设 M, M'为 G-空间,$\pi: M\to M'$为 G-淹没, $V=\pi^{-1}(x'), x'\in M'$. 假定 V 是连通的,那么 V 包含在G 的一条轨道中的必要充分条件是引理 10.5.1 中的条件(a)被满足.

上述引理及推论的证明见附录 A.

命题 10.5.1 设 $f\in\varepsilon^0(n, p)$,则 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的当且仅当对于 $\varepsilon^0(n, p)$中与 f 具有相同 r-导网的每一 g,有

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{\varepsilon r+2}\cdot V(g),\tag{1}$$

其中当 $\mathscr{G}=\mathscr{R},\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$时,$\varepsilon=1$,当 $\mathscr{G}=\mathscr{A}$或 $\mathscr{L}$时,$\varepsilon=2$.

证 $\Rightarrow$设 $g\in\varepsilon^0(n, p)$合于 $j^rg=j^rf$. 因 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的,故 g 也是. 据定理 10.3.1(i), (1)式成立.

$\Leftarrow$ 应用推论 10.5.1 来证. 记 $l=\varepsilon r+1$, 取 $M=J^l$, $G=\mathscr{G}^l$, $V=\{j^lg\in J^l\mid j^rg=j^rf\}$,则 G 是 Lie 群,M 为 C^∞ 流形并且具有向量空间结构. V 对于这一空间结构而言是M 的子空间,因而是连通子流形.

假定条件(1)可改写为

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathcal{G}(g)\quad \text{modulo}\ \mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g),$$

因此

$$\pi^l(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(g))\subset \pi^l(T\mathcal{G}(g)). \tag{2}$$

而

$$\pi^l(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(g))=T_{j^lg}V,\quad \pi^l(T\mathcal{G}(g))=T_{j^lg}(\mathcal{G}^l\cdot j^lg),$$

故(2)式写为

$$T_{j^lg}V\subset T_{j^lg}(\mathcal{G}^l\cdot j^lg),\ 对每一\ j^lg\in V.$$

令 $\pi^{l,r}:J^l\to J^r$ 为自然投影,它将次数不大于 l 的多项式映射截断至 r 次. 显然 $\pi^{l,r}$是一个 $\mathcal{G}^l$ -淹没,其中 $\mathcal{G}^l$ 在J^r 上的作用借助于投影 $\mathcal{G}^l\to\mathcal{G}^r$. 此外,$V=(\pi^{l,r})^{-1}j^rf$, 根据推论 10.5.1, V 包含在单独一条 $\mathcal{G}^l$-轨道中,这意思是说对于和 f 具有相同 r-导网的任意 g,存在 $\phi\in\mathcal{G}$,使得 $j^l(\phi\cdot g)=j^lf$. 由假设条件(1)(取 $g=f$),依定理 10.3.1,(i)中证明可得到 $\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathcal{G}(f)$,再根据定理 10.3.1(ii),$f$ 是 l-$\mathcal{G}$-决定的,因而 $\phi\cdot g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f$,且$g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f$. 以上事实说明对于具有和 f 相同 r-导网的任意 g,有 $g\underset{\mathcal{G}}{\sim}f$. 因此 f 是r-$\mathcal{G}$-决定的.

利用上述证法以及定理 10.4.1,可证明

命题 10.5.2 设$0\leqslant k<r$, $f\in\varepsilon^0(n,p)$,则 f 是r-$\mathcal{A}_k$-决定的当且仅当存在整数 $l(2r-k+1\leqslant l\leqslant 2r+1)$,使得

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathcal{A}_k(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g)$$

对于 $\varepsilon^0(n,p)$中具有与 f 相同r-导网的任意 g 均成立.

因为当 $\mathcal{G}=\mathcal{R},\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{K}$ 时,切空间 $T\mathcal{G}_k(f)$均为 ε_n-模,因此较之上一命题,容易证明下面的

命题 10.5.3 对于 $\mathcal{G}=\mathcal{R},\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{K}$, $k\geqslant1$, f 是 r-$\mathcal{G}_k$-决定的当

且仅当

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathcal{G}_k(f).$$

注 该命题可视为定理 10.3.1 的一种改进形式,曾由 W. Kucharz(对于 $p=1$ 情形)和 J. J. Gervais(对于一般情形)研究过(见文献[22]和[37]).

以上二命题留给读者证明. 下面将提供几个判别法,以便对 $\mathcal{A}_k$-决定的映射芽的阶数进行有效估计(见文献[39]).

定理 10.5.1 设 $0 \leqslant k < r$, $f \in \varepsilon^0(n, p)$. 假设存在 ε_n-模 D,使得

(a) $D \subset tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^r \cdot V(f)$,

(b) $\mathcal{M}_n^r \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{k+1} V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f)$, 则 f 是 r-$\mathcal{A}_k$-决定的.

证 设 $g \in \varepsilon^0(n, p)$满足 $j^r g = j^r f$, 据逼近引理 10.2.1 及其注,有

$$D \subset tg(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n)) + wg(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \quad (3)$$

和

$$\mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset tg(\mathcal{M}_n^{k+1} V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(g). \quad (4)$$

考虑 ε_n-模

$$E = \frac{tg(\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^r \cdot V(g)}{tg(\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g)},$$

由(4)式,

$$tg(\mathcal{M}_n^{k+1} V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset tg(\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(g),$$

据此可推出 $E = \mathcal{M}_n \cdot E$. 此外,$\mathcal{M}_n^{r+2} \cdot E = 0$, 于是 $E = 0$, 并且

$$\mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset tg(\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g),$$

将上式中的 D 用(3)式右边代替,得

$$\mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset T\mathcal{A}_k(g) + g^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot V(g) + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g). \tag{5}$$

令

$$E' = \frac{T\mathcal{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^r \cdot V(g)}{T\mathcal{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{2r+2} V(g)},$$

这是一个 $g^* \varepsilon_p$-模. 据(5)式,$E' = Z \cdot E'$,其中 $Z = g^* \varepsilon_p \cap \mathcal{M}_n$. 此外,$Z^{r+2} \cdot E' = 0$,于是 $E' = 0$, 且有

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(g) \subset \mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset T\mathcal{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g).$$

因为上式对具有和 f 相同 r-导网的任意 g 均成立,据命题 10.5.2,f 是 r-$\mathcal{A}_k$-决定的.

推论 10.5.2 设 l, l_1 和 k 为非负整数满足 $l + l_1 > k \geqslant 0$. 若 $f \in \varepsilon^0(n, p)$使得

$$\mathcal{M}_n^l \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f) + \mathcal{M}_n^{l+1} \cdot V(f) \tag{6}$$

和

$$\mathcal{M}_n^{l_1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n) + wf(\mathcal{M}_p^k \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^{l+r} \cdot V(f), \tag{7}$$

其中 $r = \max\{l_1, k\}$,则 f 是$(l+r)-\mathcal{A}_k$-决定的.

证 (i) 若 $l_1 \geqslant k$, 则 $r = l_1$. (6)式两边同乘以 $\mathcal{M}_n^{l_1}$, 得

$$\mathcal{M}_n^{l+l_1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{l_1+1} V(\mathbb{R}^n))$$
$$+ f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^{l_1} \cdot V(f) + \mathcal{M}_n^{l+l_1+1} \cdot V(f),$$

又 $l_1 \geqslant k$，更有

$$\mathcal{M}_n^{l+l_1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^{l_1} \cdot V(f) \\ + \mathcal{M}_n^{l+l_1+1} \cdot V(f). \tag{8}$$

取 $D = \mathcal{M}_n^{l_1} \cdot V(f)$. 由(7)与(8)式，据定理 10.5.1，$f$ 是$(l+l_1)$-$\mathcal{A}_k$-决定的.

(ii) 若 $l_1 < k$，则 $r = k$. 由(7)式有

$$\mathcal{M}_n^k \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^{l+k} \cdot V(f). \tag{9}$$

将(6)式两边同乘以 $\mathcal{M}_n^k$，得

$$\mathcal{M}_n^{l+k} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^k \cdot V(f) \\ + \mathcal{M}_n^{l+k+1} \cdot V(f). \tag{10}$$

取 $D = \mathcal{M}_n^k \cdot V(f)$. 由(9)和(10)式，据定理 10.5.1，$f$ 是$(l+k)$-$\mathcal{A}_k$-决定的.

综上，f 是$(l+r)$-$\mathcal{A}_k$-决定的. 证毕.

回忆一个映射芽 $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$是无穷小 $\mathcal{A}$-稳定的是指 $T_e\mathcal{A}(f) = V(f)$. Mather 证明了无穷小 $\mathcal{A}$-稳定的映射芽必为有限决定的，并且对决定性阶数给出了较好的一致估计. 下面介绍一个简洁的证明.

定理 10.5.2 若 $f \in \varepsilon^0(n, p)$为无穷小 $\mathcal{A}$-稳定芽，则 f 是$(p+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

证 因 $tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f) \supset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p))$，后者在 $T_e\mathcal{A}(f) = V(f)$中的余维数最多为 p，因此更有

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{V(f)}{tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^{p+1} \cdot V(f)} \leqslant p.$$

令 $B_i = tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^i \cdot V(f)$ $(0 \leqslant i \leqslant p+1)$.

诸子模 B_i 不可能全不同. 若对某一 $i_0 \leqslant p$, 有 $B_{i_0} = B_{i_0+1}$, 则

$$\mathcal{M}_n^{i_0} \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^{i_0+1} \cdot V(f),$$

从而

$$\mathcal{M}_n^{i_0} \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f) + \mathcal{M}_n^{i_0+1} \cdot V(f).$$

由 Nakayama 引理,

$$\mathcal{M}_n^p \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f). \tag{11}$$

此外,

$$\mathcal{M}_n \cdot V(f) \subset T_e \mathscr{A}(f) = tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p)). \tag{12}$$

现应用定理 10.5.1. 取 $k=0, D = \mathcal{M}_n \cdot V(f)$. 将(11)式两边同乘以 $\mathcal{M}_n$, 得

$$\mathcal{M}_n^{p+1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot D.$$

由上式及(12)式知, f 是$(p+1)$-$\mathscr{A}$-决定的.

例 1 设 $f_i: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$定义如下:

当 $n \geqslant p$ 时, $f_1(x) = (x_1, \cdots, x_{p-1}, \sum_{i=p}^{n} \pm x_i^2)$,

当 $2n-1 \geqslant p \geqslant n$ 时, $f_2(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 x_n, \cdots, x_{p-n} x_n, x_n^2)$,

当 $p \geqslant 2n$ 时, $f_3(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 x_n, \cdots, x_{n-1} x_n, x_n^2, 0, \cdots, 0)$.

经计算, 有

$$tf_1(V(\mathbb{R}^n)) + wf_1(V(\mathbb{R}^p)) = V(f_1),$$

$$tf_1(V(\mathbb{R}^n)) + f_1^* \mathcal{M}_p \cdot V(f_1) \supset \mathcal{M}_n \cdot V(f_1),$$

因此 f_1 是 $\mathscr{A}$-稳定的, 并且是 2-$\mathscr{A}$-决定的. 通常 f_1 叫做折叠. 其次

$$tf_2(V(\mathbb{R}^n)) + wf_2(V(\mathbb{R}^p)) = V(f_2),$$

$$tf_2(\mathscr{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f_2^* \mathscr{M}_p \cdot V(f_2) \supset \mathscr{M}_n^2 \cdot V(f_2),$$

所以 f_2 也是 $\mathscr{A}$-稳定的，并且是 2-$\mathscr{A}$-决定的. 但是 $T\mathscr{A}(f_3)$具有无限余维，因而不是有限决定的.

在讨论下面例子之前，先引入一些记号以便描述 $V(f)$的子空间. 设$\{x_1, \cdots, x_n\}$及$\{y_1, \cdots, y_p\}$分别为 f 的源空间和靶空间的坐标系，则$\left\{wf\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$是自由 ε_n-模 $V(f)$的自由基，并且借助于这组基，将 $V(f)$等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$. 又 ε_n 可写为

$$\varepsilon_n = \mathbb{R}\{\text{所有单项式 } x_{i_1}\cdots x_{i_j} : 1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant n, j < \infty\} + \mathscr{M}_n^\infty,$$

其中 $\mathscr{M}_n^\infty = \bigcap_{l\geqslant 1}\mathscr{M}_n^l$. 若 $a_1, \cdots, a_q$ 是$x_1, \cdots, x_n$ 的单项式，规定

$$\varepsilon_n \div \{a_1, \cdots, a_q\} = \mathbb{R}\{\text{除 } a_1, \cdots, a_q \text{ 之外的所有单项式}\} + \mathscr{M}_n^\infty.$$

例 2 设 $n = p = 2$, $f:(\mathbb{R}^2, 0)\to(\mathbb{R}^2, 0)$定义为

$$f(x, y) = (x, y^3 \pm x^t y), \quad t \geqslant 1,$$

容易算出

$$\mathscr{M}_n^2 \cdot V(f) \subset \begin{cases} tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathscr{M}_p \cdot V(f), & t = 1, \\ tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathscr{M}_p \cdot \mathscr{M}_n \cdot V(f), & t \geqslant 2 \end{cases} \tag{1}$$

和

$$tf(V\mathbb{R}^n) + wf(V(\mathbb{R}^p)) = \begin{cases} V(f), & t = 1, \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_n \div \{y, \cdots, x^{t-2}y\}), & t \geqslant 2. \end{cases} \tag{2}$$

(i) $t = 1$. 用 $\mathscr{M}_n$ 的元素乘(1)式，得

$$\mathcal{M}_n^3 \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n \cdot V(f).$$

由(2)式知，f 是 $\mathcal{A}$-稳定的，故

$$\mathcal{M}_n \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p)),$$

应用定理 10.5.1，取 $k=0, D=\mathcal{M}_n \cdot V(f)$，易见 f 是 3-$\mathcal{A}$-决定的.

(ii) $t \geqslant 2$. 用 $\mathcal{M}_n^{t-1}$ 的元素乘(1)式，得

$$\mathcal{M}_n^{t+1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{t-1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^t \cdot V(f),$$

又由(2)式，$\mathcal{M}_n^t \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p))$. 据定理 10.5.1，$f$ 是 $(t+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

注意，这些决定性阶数均为精确的，因映射芽 $(x, y) \mapsto (x, y^3)$ 不是有限 $\mathcal{A}$-决定的.

例 3 设 $f: (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ 定义为

$$f(x, y) = (x, y^2, x^r y + y^{2i+1}), \ i \geqslant 1, \ r \geqslant 2.$$

经计算得

$$\begin{aligned} & tf(V(\mathbb{R}^2)) + wf(V(\mathbb{R}^3)) \\ & = (\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_2 \div \{x^k y^{2s+1} : 0 \leqslant k \leqslant r-2, 0 \leqslant s \leqslant i-1\}), \end{aligned}$$

因此 ε_2-模

$$D = (\varepsilon_2, \varepsilon_2, \{x^{r-1}, y^{2i}\} \cdot \varepsilon_2) \subset tf(V(\mathbb{R}^2)) + wf(V(\mathbb{R}^3)),$$

又

$$\begin{aligned} f^* \mathcal{M}_3 \cdot D = (&\{x, y^2\} \cdot \varepsilon_2, \{x, y^2\} \cdot \varepsilon_2, \\ &\{x^r, xy^{2i}, x^{r-1} y^2, y^{2i+2}\} \cdot \varepsilon_2). \end{aligned}$$

(a) $i=1, r \geqslant 3$: $\mathcal{M}_2^{r+1} \cdot V(f) \subset f^* \mathcal{M}_3 \cdot D$，据定理 10.5.1，$f$ 是 $(r+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

(b) $i>1, r=2, 3$: $\mathcal{M}_2^{2i+1} \cdot V(f) \subset f^* \mathcal{M}_3 \cdot D + \mathbb{R}(0,0,y^{2i+1})$.

又因

$$tf\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)=(0,\ 2y^2,\ x^r y+(2i+1)y^{2i+1}),$$

$$(0,\ y^2,\ 0),\ (0,\ 0,\ x^r y)\in f^*\mathcal{M}_3\cdot D,$$

故

$$\mathcal{M}_2^{2i+1}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+f^*\mathcal{M}_3\cdot D.$$

据定理 10.5.1，f 是$(2i+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

以上决定性阶数都是精确的，因为$(x,\ y)\mapsto(x,\ y^2,\ y^3)$，$(x,\ y)\mapsto(x,\ y^2,\ x^r y)$ 都非有限 $\mathcal{A}$-决定的.

对于其他情形(参看例 4)，定理 10.5.1 也能给出阶数估计，但不是精确的. 为此需要另外的判别方法，下面再介绍两个.

定理 10.5.3 设 $0\leqslant k<s$. 若 ε_n-模 D 满足

$$D\subset\{tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p))\}\cap\mathcal{M}_n\cdot V(f)+\mathcal{M}_n^s\cdot V(f),$$

又假定

$$\mathcal{M}_n^s\cdot V(f)\subset T\mathcal{A}_k(f)+\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(f),$$

$$\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{k+2}\cdot V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{s+2}\cdot V(f),$$

那么 f 是 s-$\mathcal{A}_k$-决定的.

证 设 g 与 f 具有相同的 s-导网. 依逼近引理 10.2.1 及其注，

$$D\subset\{tg(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n))+wg(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p))\}\cap\mathcal{M}_n\cdot V(g)+\mathcal{M}_n^s\cdot V(g),\tag{1}$$

$$\mathcal{M}_n^s\cdot V(g)\subset T\mathcal{A}_k(g)+\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(g),\tag{2}$$

$$\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(g)\subset tg(\mathcal{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{s+2}\cdot V(g).\tag{3}$$

对 ε_n-模

$$\frac{tg(\mathcal{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n)) + g^*\mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{s+1} \cdot V(g)}{tg(\mathcal{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n)) + g^*\mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{2s+2} \cdot V(g)},$$

应用 Nakayama 引理的平凡变形(参看定理 10.5.1 的证明),并利用(3)式可导出

$$\mathcal{M}_n^{s+1} \cdot V(g) \subset tg(\mathcal{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n)) + g^*\mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{2s+2} \cdot V(g),$$

将它代入(2)式中的 $\mathcal{M}_n^{s+1} \cdot V(g)$,得

$$\mathcal{M}_n^{s} \cdot V(g) \subset T\mathcal{A}_k(g) + g^*\mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{2s+2} \cdot V(g),$$

将上式中的 D 用(1)式右边代替,得

$$\mathcal{M}_n^{s} \cdot V(g) \subset T\mathcal{A}_k(g) + g^*\mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^{s} \cdot V(g) + \mathcal{M}_n^{2s+2} \cdot V(g). \tag{4}$$

再一次应用 Nakayama 引理的平凡变形于 $g^*\varepsilon_p$-模

$$\frac{T\mathcal{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{s} \cdot V(g)}{T\mathcal{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{2s+2} \cdot V(g)},$$

并利用(4)式可导出

$$\mathcal{M}_n^{s+1} \cdot V(g) \subset T\mathcal{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{2s+2} \cdot V(g).$$

因为上式对所有与 f 具有相同 s-导网的 g 皆成立,据命题 10.5.2,f 是 s-$\mathcal{A}_k$-决定的.

定理 10.5.4 设 $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant s-1$. 若 ε_n-模 D 满足

$$D \subset \{tf(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathcal{M}_p^{k}V(\mathbb{R}^p))\} \cap \mathcal{M}_n^{l+1} \cdot V(f) + \mathcal{M}_n^{s} \cdot V(f), \tag{1}$$

又

$$\mathcal{M}_n^{s} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{l+1}V(\mathbb{R}^n)) + f^*\mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{s+l} \cdot V(f), \tag{2}$$

$$\mathscr{M}_n^{s+l}\cdot V(f)\subset tf(\mathscr{M}_n^{l+2}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathscr{M}_p\cdot D+\mathscr{M}_n^{s+l+1}\cdot V(f), \tag{3}$$

则 f 是 $(s-1)$-$\mathscr{A}_k$-决定的.

证明方法与上一定理类似,留作练习.

注 若条件(2)用

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_n^s\cdot V(f)\subset & tf(\mathscr{M}_n^{l+1}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathscr{M}_p\cdot\{(tf(\mathscr{M}_n^kV(\mathbb{R}^n))\\ &+wf(\mathscr{M}_p^kV(\mathbb{R}^p)))\cap\mathscr{M}_n^l\cdot V(f)+\mathscr{M}_n^sV(f)\}\\ &+\mathscr{M}_n^{s+l}\cdot V(f)\end{aligned} \tag{2'}$$

来代替,结论依然成立.

例 4 继续例 3 的讨论

(c) 当 $i=1,r=2$ 时,令 $D'=D\cap\mathscr{M}_2V(f)=(\mathscr{M}_2,\mathscr{M}_2,\{x,y^2\}\cdot\varepsilon_2)$, 则 $f^*\mathscr{M}_3\cdot D'=(\{x,y^2\}\mathscr{M}_2,\{x,y^2\}\mathscr{M}_2,\{x,y^2\}^2\cdot\varepsilon_2)\supset\mathscr{M}_2^4\cdot V(f)$. 容易验证

$$\mathscr{M}_2^3\cdot V(f)\subset tf(\mathscr{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+wf(\mathscr{M}_3V(\mathbb{R}^3)),$$

据定理 10.5.3,f 是 3-$\mathscr{A}$-决定的,这里 $f(x,y)=(x,y^2,x^2y+y^3)$. 又决定性阶数是精确的,因 $(x,y)\mapsto(x,y^2,0)$ 非有限决定.

(d) 当 $i>2,r\geqslant4$ 时,令

$$D''=(\mathscr{M}_2,\{x,y^2\}\cdot\varepsilon_2,\{x^r,x^{r-1}y^2,xy^{2i},y^{2i+1}\}\cdot\varepsilon_2),$$

则

$$D''\subset tf(\mathscr{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+wf(\mathscr{M}_3\cdot V(\mathbb{R}^3)),$$

$$\begin{aligned}f^*\mathscr{M}_3\cdot D''=\Big(&\{x,y^2\}\cdot\mathscr{M}_2,\{x,y^2\}^2\cdot\varepsilon_2,\{x^{r+1},\\ &x^ry^2,x^{r-1}y^4,x^2y^{2i},xy^{2i+1},y^{2i+3}\}\cdot\varepsilon_2\Big).\end{aligned}$$

1）对于 $r>4$，易见

$$\mathcal{M}_2^{2i+r-2}\cdot V(f)\subset f^*\mathcal{M}_3\cdot D'',$$

据定理 10.5.4，f 是$(2i+r-3)-\mathcal{A}$-决定的.

2）对于 $r=4$，令

$$D'''=D''\cap\mathcal{M}_2^2\cdot V(f),\qquad(\underline{1})$$

易见

$$\mathcal{M}_2^{2i+2}\cdot V(f)\subset f^*\mathcal{M}_3\cdot D'''+\mathbb{R}(0,\ 0,\ y^{2i+2}),$$

而 $y^{2i+2}\in(f^*\mathcal{M}_3)^{i+1}$，因此

$$\mathcal{M}_2^{2i+2}\cdot V(f)\subset f^*\mathcal{M}_3\cdot(D'''+wf(\mathcal{M}_3^i\cdot V(\mathbb{R}^3))),\qquad(\underline{2})$$

又

$$\mathcal{M}_2^{2i+3}\cdot V(f)\subset f^*\mathcal{M}_3\cdot D''',\qquad(\underline{3})$$

现应用定理 10.5.4，取 $k=0$，$l=1$，将$(\underline{1})$和$(\underline{2})$及$(\underline{3})$式对照条件(1)和(2′)与(3)式，则断言 f 是$(2i+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

这些结果是精确的，因为下列包含关系

$$\mathcal{M}_2^q\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+wf(\mathcal{M}_3\cdot V(\mathbb{R}^3))$$

成立的最小整数 $q=2i+r-2$.

若 $i=2$，$r\geqslant4$，读者可参看文献[16].

例 5 设 $f:(\mathbb{R}^3,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$定义为

$$f(x,\ y,\ z)=(x^2+y^2+x^3+z^3,\ x^2+z^2+y^3).$$

经计算，有

$$\mathcal{M}_3^4\cdot V(f)\subset tf(V(\mathbb{R}^3))+f^*\mathcal{M}_2\cdot V(f)+\mathcal{M}_3^5\cdot V(f),\ (1)$$

及

$$\mathcal{M}_3^4 \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^3)) + wf(V(\mathbb{R}^2)) + \mathcal{M}_3^8 \cdot V(f). \quad (2)$$

将(1)式乘以 $\mathcal{M}_3$，得

$$\mathcal{M}_3^5 \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_3 \cdot V(\mathbb{R}^3)) + f^* \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_3 \cdot V(f) + \mathcal{M}_3^6 \cdot V(f), \quad (3)$$

据推论 10.5.2，由(2)和(3)式可知 f 是 9-$\mathcal{A}$-决定的.

而通过计算进一步发现(2)式可改进为

$$\mathcal{M}_3^4 \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_3^3 V(\mathbb{R}^3)) + wf(\mathcal{M}_2^2 V(\mathbb{R}^2)) + \mathcal{M}_3^8 \cdot V(f), \quad (4)$$

按照定理 10.4.1(取 $k=2$, $r=4$)，f 是 5-$\mathcal{A}_1$-决定的或 6-$\mathcal{A}_2$-决定的.

又由(4)式，有

$$\mathcal{M}_3^4 \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_3^3 V(\mathbb{R}^3)) + wf(\mathcal{M}_2^2 V(\mathbb{R}^2)) + \mathcal{M}_3^6 \cdot V(f), \quad (5)$$

用 $\mathcal{M}_3^2$ 乘上式两边，可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_3^6 \cdot V(f) &\subset tf(\mathcal{M}_3^5 V(\mathbb{R}^3)) + (f^* \mathcal{M}_2)^2 \cdot \mathcal{M}_3^2 \cdot V(f) + \mathcal{M}_3^8 \cdot V(f) \\ &\subset tf(\mathcal{M}_3^5 V(\mathbb{R}^3)) + f^* \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_3^4 \cdot V(f) + \mathcal{M}_3^8 \cdot V(f),\end{aligned} \quad (6)$$

因为 $wf(\mathcal{M}_2^2 V(\mathbb{R}^2)) \subset (f^* \mathcal{M}_2)^2 \cdot V(f)$, $f^* \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3^2$.

现应用定理 10.5.4，取 $D=\mathcal{M}_3^4 \cdot V(f)$，$s=4$, $l=2$ 和 $k=1$. 从(5)和(6)式可见定理 10.5.4 中的条件(2′)和(3)被满足，因此 f 是 3-$\mathcal{A}_1$-决定的.

§10.6　M-决定性的基本估计

10.6.1　M-$\mathcal{A}$-决定性是有限$\mathcal{A}$-决定性的推广

回忆光滑映射芽有限决定的定义，$f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$是 r-

$\mathscr{A}$-决定的，是指对于具有与 f 相同 r-导网的任意 $g:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$，$g$ 和 f 必 $\mathscr{A}$-等价，这里 $j^r g = j^r f$ 意味着

$$(y_1 \circ g - y_1 \circ f, \cdots, y_p \circ g - y_p \circ f) \in (\mathscr{M}_n^{r+1})^{\times p},$$

其中 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 为 $(\mathbb{R}^p, 0)$ 的局部坐标系. 现在将决定性概念推广，引入所谓 M-$\mathscr{A}$-决定性. 这一概念首先由 A. du Plessis 提出[16]. 本节材料主要取自文献[21].

定义 10.6.1 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，$\{y_1, \cdots, y_p\}$ 为 $(\mathbb{R}^p, 0)$ 的局部坐标系. 假定 M 是 $\epsilon_n^{\times p}$ 的 $\mathbb{R}$-子空间.

1) 若 C^∞ 芽 $g:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 满足下列条件:

$$(y_1 \circ g - y_1 \circ f, \cdots, y_p \circ g - y_p \circ f) \in M,$$

则 g 叫做 f 的一个 M-逼近（对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言），此时也说 g M-等价于 f.

显然，“M-等价”是一个等价关系.

2) 若 f 的每一个 M-逼近 g 必 $\mathscr{A}$-等价于 f，则说 f 是 M-$\mathscr{A}$-决定的（对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言），并且 M 叫做 f 的决定性范围.

注 一般来说，上述概念依赖于坐标系 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 的选取. 然而当 $M=(I)^{\times p}$（I 为 ϵ_n 中理想）时，却与坐标系的选取无关，见推论 10.6.2. 在这种情形下，$(I)^{\times p}$-逼近及 $(I)^{\times p}$-$\mathscr{A}$-决定性简记为 I-逼近和 I-$\mathscr{A}$-决定性. 特别，若 $M=(\mathscr{M}_n^{r+1})^{\times p}$，$M$-$\mathscr{A}$-决定性就是 r-$\mathscr{A}$-决定性.

M-决定性问题可以按照前面几节中所述的方法来处理. 例如

引理 10.6.1 若 f 是 M-$\mathscr{A}$-决定的（对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言），则

$$M \subset T\mathscr{A}(f) + \mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f), \qquad \forall\, l \geqslant 0,$$

这里 $V(f)$ 等同于 $\epsilon_n^{\times p}$（借助局部坐标系 $\{y_1, \cdots, y_p\}$）.

引理 10.6.2 设 g 是 f 的 M-逼近（对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言），

则

(i) $f^* y_i - g^* y_i \in M_i\ (i=1, \cdots, p)$，其中 $M_i = \{\phi \in \mathscr{M}_n \mid \exists (\phi_1, \cdots, \phi_p) \in M\ s.\ t.\ \phi_i = \phi\}$.

(ii) $tf(\xi) - tg(\xi) \in \xi \cdot M\ (\xi \in V(\mathbb{R}^n))$，其中 $\xi \cdot M$ 规定如下：设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 的局部坐标系，若 $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，则

$$\xi \cdot M = \{(a_1, \cdots, a_p) \in \varepsilon_n^{\times p} \mid \exists (\phi_1, \cdots, \phi_p) \in M \text{ 使得 }$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = a_j,\ j = 1, \cdots, p\}.$$

上述二引理的证明留作练习.

例 1 设 f: $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$定义为

$$f(x, y) = (x, y^4 + xy^2 + x^2 y).$$

假定 $M = (\{x^2, xy^2, y^4\} \cdot \varepsilon_n, \{x^3, x^2y^2, xy^4, y^6\} \cdot \varepsilon_n)$，这里 $n = p = 2$. 断言：f 是 M-$\mathscr{A}$-决定的.

经计算，

$$tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p)) = (\varepsilon_n \div \{y\}, \varepsilon_n \div \{y, xy, y^2, y^3\} + \mathbb{R} \cdot (4y^3 + 2xy + x^2)) + \varepsilon_n \cdot (1, y^2 + 2xy).$$

令

$$D = (\{x, y^2\} \cdot \varepsilon_n, \{x^2, xy^2, y^4\} \cdot \varepsilon_n),$$

不难验证

$$D \subset tf\left((\mathbb{R} \cdot x + \mathscr{M}_n^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \mathscr{M}_n \frac{\partial}{\partial y}\right) + \{(f_1^{i+1}, 0), (0, f_1^{j+2}), (0, f_2 f_1^k) : 0 \leqslant i, j, k\}, \quad (1)$$

其中 f_1, f_2 为 f 的分量函数. 又

$$M \subset tf(\mathcal{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot D. \tag{2}$$

现设 g 为 f 的任意M-逼近. 利用引理 10.6.2,并通过计算可以证明

$$D \subset tg\left((\mathbb{R} \cdot x + \mathcal{M}_n^2) \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{M}_n \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$+ \{(g_1^{i+1}, 0), (0, g_1^{j+2}), (0, g_2 g_1^k) : 0 \leqslant i, j, k\} + M, \tag{3}$$

$$M \subset tg(\mathcal{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n \cdot M, \tag{4}$$

(4)式说明 ε_n-模

$$E = \frac{tg(\mathcal{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + M}{tg(\mathcal{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{11} \cdot V(g)}$$

满足 $E = \mathcal{M}_n \cdot E$,据 Nakayama 引理,$E = 0$,从而

$$M \subset tg(\mathcal{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{11} \cdot V(g),$$

将上式中的 D 用(3)式右边代替,得

$$M \subset tg(\mathcal{M}_n^2 V(\mathbb{R}^n)) + wg(\mathcal{M}_p^2 V(\mathbb{R}^p)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot M + \mathcal{M}_n^{11} \cdot V(g).$$

作 $g^* \varepsilon_p$-模

$$E' = \frac{T\mathcal{A}_1(g) + M}{T\mathcal{A}_1(g) + \mathcal{M}_n^{11} V(g)},$$

易见有 $E' = g^* \mathcal{M}_p \cdot E'$. 据 Nakayama 引理,$E' = 0$,于是

$$M \subset T\mathcal{A}_1(g) + \mathcal{M}_n^{11} \cdot V(g). \tag{5}$$

再由引理 10.6.2,可导出

$$T\mathcal{A}_1(f) + M = T\mathcal{A}_1(g) + M.$$

利用(5)式,可得到

$$T\mathcal{A}_1(f) + \mathcal{M}_n^{11} V(f) = T\mathcal{A}_1(g) + \mathcal{M}_n^{11} V(g), \tag{6}$$

于是由引理 10.5.1 知，f 的任意 M-逼近 g 的 10-导网位于 f 的 $\mathscr{A}_1^{10}$-轨道中．

因为 $\mathscr{M}_n^6 V(f) \subset M$，由(5)和(6)式，有

$$\mathscr{M}_n^6 \cdot V(f) \subset T\mathscr{A}_1(f) + \mathscr{M}_n^{11} V(f).$$

据定理 10.4.1(i)，f 是 9-$\mathscr{A}_1$-决定的．

由上面的论证知道，f 的任意 M-逼近实际上必 $\mathscr{A}_1$-等价于 f，因此 f 是 M-$\mathscr{A}_1$-决定的．

决定性范围提供了一种方式用以描述什么样的映射芽可等价于一已知的映射芽或给定的标准形式．并且对于有限 $\mathscr{A}$-决定的映射芽来说，决定性范围也是可以计算的．然而决定性范围的研究不只限于有限 $\mathscr{A}$-决定的芽，它可以对一类称之为有限奇点型的映射芽来讨论．

下面的定理刻画了有限奇点型的映射芽的特征（参看文献[48]和[49]）．

定理 10.6.1 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，则下列诸断言是等价的：

(i) f 是有限奇点型的（简记为 FST），

(ii) $\mathscr{M}_n^r \cdot V(f) \subset T_e\mathscr{K}(f)$ 对某一 $r < \infty$，

(ii)′ $\mathscr{M}_n^{r'} \cdot V(f) \subset T\mathscr{K}(f)$ 对某一 $r' < \infty$，

(iii) $\mathscr{M}_n^s \subset J_f + f^* \mathscr{M}_p \cdot \varepsilon_n$ 对某一 $s < \infty$，

这里 J_f 为 ε_n 中的理想，它由 f 的 Jacobi 矩阵 $\left[\dfrac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ 的 $p \times p$ 子式的行列式生成．当 $n < p$ 时，$J_f = 0$．

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 映射芽 f 为 FST 是指存在 $g_1, \cdots, g_q \in V(f)$，使得

$$T_e\mathscr{A}(f) + f^* \varepsilon_p \{g_1, \cdots, g_q\} = V(f),$$

或

$$tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \varepsilon_p \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f, g_1, \cdots, g_q \right\} = V(f). \tag{1}$$

将 Malgrange 预备定理应用于有限生成的 ε_n-模 $V(f) \big/ tf(V(\mathbb{R}^n))$，便可推出(1)式等价于

$$tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f)$$

$$+ \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f, g_1, \cdots, g_q \right\} = V(f),$$

或简写为

$$T_e \mathcal{K}(f) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f, g_1, \cdots, g_q \right\} = V(f). \tag{2}$$

而(2)式意指 $d_e(f, \mathcal{K}) = \dim_{\mathbb{R}} V(f) \big/ T_e \mathcal{K}(f) < \infty$，$f$ 是有限 $\mathcal{K}$-决定的. 据定理 10.3.1，(i)$\Leftrightarrow$(ii) (及(ii)′).

(ii)$\Rightarrow$(iii) 设 $u = u_1 \cdots u_p$，其中每一 $u_i \in \mathcal{M}_n^r$. 据(ii)，存在 $a_{ik} \in \varepsilon_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} = u_k \delta_{jk} \quad \mathrm{mod} f^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon_n, \quad j, k = 1, \cdots, p.$$

因为 $p \times p$ 矩阵 $(u_k \delta_{jk})$ 的行列式等于 u，所以 u 和矩阵 $\left[\frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\right]$ 的诸 $p \times p$ 子式的行列式的线性组合(其系数取自 ε_n) $\mathrm{mod} f^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon_n$ 相等. 于是

$$\mathcal{M}_n^{rp} \subset J_f + f^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon_n.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii) 应用克莱姆法则，细节留给读者.

10.6.2 决定性范围的基本估计

本节的主要结果是

定理 10.6.2 设 C^∞ 映射芽 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$是有限奇点型的，$I$ 为 ε_n 中的理想. 若

$$I\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f),$$

则 f 是 I^3-$\mathscr{A}$-决定的.

注 当 $I=\mathscr{M}_n^r$ 时，本定理给出的决定性阶数估计弱于定理 10.4.1 所给的估计，其原因是一般情形下的逼近引理(例如引理 10.6.2 和 10.6.3)弱于§ 10.2 中的逼近引理.

一个有趣的特殊情形是取理想 $I=\mathscr{M}_n^\infty$. 由于$(\mathscr{M}_n^\infty)^3=\mathscr{M}_n^\infty$，因此有下面的

推论 10.6.1 设 C^∞ 芽 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 FST，满足

$$\mathscr{M}_n^\infty\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f),$$

则 f 是 $\mathscr{M}_n^\infty$-$\mathscr{A}$-决定的. 或者按照通常的记法，简记 f 为∞-$\mathscr{A}$-决定的.

10.6.3 证明定理 10.6.2 前的准备

设 M 为$\varepsilon_n^{\times p}$ 的$\mathbb{R}$-子空间，f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 C^∞ 映射芽. 一个$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 G:$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, J\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, J\times 0)$(其中 J 为$\mathbb{R}$ 的连通子集)叫做由 f 的 M-逼近(对于$\{y_1, \cdots, y_p\}$而言)组成的$(\mathbb{R},J)$-族，如果

$$(y_1\circ G^a-y_1\circ f,\cdots,y_p\circ G^a-y_p\circ f)\in M\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0},\ \forall a\in J.$$

对 t 求导，得

$$\partial\cdot G^a\in M\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0},\qquad \forall a\in J,$$

如以前所说，ε_n 视为 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,a\times 0}$ 的子环，因而 M 可等同于$(\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0})^{\times p}$的一个$\mathbb{R}$-子空间. 借助于这一等同，将 $\partial\cdot G^a$ 视为$(\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0})^{\times p}$中的一元.

引理 10.6.3 设 G 是由 f 的 M-逼近(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言)组成的 $(\mathbb{R}, a)$-族. 借助于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 作适当的等同,则有

1) $tG(\xi) - t(1_{(\mathbb{R}, a)} \times f)(\xi) \in \xi \cdot (M \cdot \varepsilon_{1+n})$, $\forall \xi \in \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$,

2) (a) $G^* y_i - (1_{(\mathbb{R}, a)} \times f)^* y_i \in M_i \cdot \varepsilon_{1+n}$, $i = 1, \cdots, p$,

(b) $G^* \phi - (1_{(\mathbb{R}, a)} \times f)^* \phi \in (\bigcup_{i=1}^{p} M_i) \cdot \varepsilon_{1+n}$, $\forall \phi \in \varepsilon_{1+p}$,

(c) $wG(\eta) - w(1_{(\mathbb{R}, a)} \times f)(\eta) \in (\bigcup_{i=1}^{p} M_i) \cdot (\varepsilon_{1+n})^{\times p}$, $\forall \eta \in \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$.

证 1) $tG(\xi) - t(1_{(\mathbb{R}, a)} \times f)(\xi) = \xi \cdot (y_1 \circ G - y_1 \circ f, \cdots, y_p \circ G - y_p \circ f)$, 上式右边理解为 $(\xi \cdot (y_1 \circ G - y_1 \circ f), \cdots, \xi \cdot (y_p \circ G - y_p \circ f))$, 并且 $\xi \cdot (y_j \circ G - y_j \circ f)$ 表示函数 $y_j \circ G - y_j \circ f$ 关于 ξ 的导数($j = 1, \cdots, p$). 而 $(y_1 \circ G - y_1 \circ f, \cdots, y_p \circ G - y_p \circ f) \in M \cdot \varepsilon_{1+n}$, 故结论真.

2) (a) 由定义可得. 对于(c),因 $wG(\eta) = \sum_{j=1}^{p} G^* \eta_i \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \circ G$, 其中 $\eta = \sum_{j=1}^{p} \eta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$, 故(c) 可由(b) 导出. 而(b) 由下面的推论 10.6.2 得到.

定义 10.6.2 (i) 设 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽, 定义映射芽 $(f, g): (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ 为

$$(f, g)(x) = (f(x), g(x)), \ x \in (\mathbb{R}^n, 0).$$

(ii) 设 $S \subset \varepsilon_n$, $f \in \varepsilon^0(n, p)$. 定义 $(f, S)^* \varepsilon_{p+p}$ (对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言)为诸子环 $(f, g)^* \varepsilon_{p+p}$ 的并,其中 $g \in \varepsilon^0(n, p)$ 合于 $y_j \circ g \in S (j = 1, \cdots, p)$. 用式子表示,

$$(f, S)^* \varepsilon_{p+p} = \bigcup \{(f, g)^* \varepsilon_{p+p} \mid g \in \varepsilon^0(n, p) s.t.$$
$$y_j \circ g \in S, j = 1, \cdots, p\}.$$

引理 10.6.4 设 $S\subset\varepsilon_n$，$f\in\varepsilon^0(n,p)$. 若 $g\in\varepsilon^0(n,p)$使得 $y_i\circ g-y_i\circ f\in S$ $(i=1,\cdots,p)$，则对任意 $\phi\in\varepsilon_{p+p}$，有

$$(f,g)^*\phi-(f,f)^*\phi\in S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p},\tag{3}$$

进而有

$$(f;g)^*\varepsilon_{p+p}\subset f^*\varepsilon_p+S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p}.\tag{4}$$

证 若 $\phi\in\varepsilon_{p+p}$，则

$$\phi\circ(f,g)=\phi\circ\delta\circ(f,k),$$

其中 $k\in\varepsilon^0(n,p)$定义为 $y_i\circ k=y_i\circ f-y_i\circ g$ $(i=1,\cdots,p)$，并且 $\delta:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p,(0,0))\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p,(0,0))$定义为

$$\delta(y_1,\cdots,y_p;z_1,\cdots,z_p)=(y_1,\cdots,y_p;y_1-z_1,\cdots,y_p-z_p),$$

这里$\{z_1,\cdots,z_p\}$是第二个$(\mathbb{R}^p,0)$上所选取的坐标系.

由 Taylor 定理，每一 $\phi'\in\varepsilon_{p+p}$可写为

$$\phi'(y_1,\cdots,y_p;z_1,\cdots,z_p)=\phi'(y_1,\cdots,y_p,0)+\sum_{i=1}^{p}z_i\psi_i(y,z),$$

其中每一 $\psi_i\in\varepsilon_{p+p}$. 现令 $\phi\circ\delta=\phi'$，则

$$\begin{aligned}(f,g)^*\phi&=(f,k)^*\phi'\\&=(f,0)^*\phi'+\sum_{i=1}^{p}(z_i\circ k)\cdot(f,k)^*\psi_i\\&=(f,f)^*\phi+\sum_{i=1}^{p}(z_i\circ k)\cdot(f,k)^*\psi_i,\end{aligned}$$

故

$$(f,g)^*\phi-(f,f)^*\phi\in S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p}.$$

为证引理中的第二个式子，令 $\Delta:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p,(0,0))$定义为$\Delta(y_1,\cdots,y_p)=(y_1,\cdots,y_p;y_1,\cdots,y_p)$，则 $\Delta^*:\varepsilon_{p+p}\to\varepsilon_p$

为环同态，并且对任意 $\phi\in\varepsilon_{p+p}$，

$$(f,f)^*\phi=\phi\circ(f,f)=\phi\circ\Delta\circ f=f^*\Delta^*\phi\in f^*\varepsilon_p,$$

从而(4)式成立.

推论 10.6.2 设 S，f 及 g 如引理 10.6.4 中所述，则对任意 $\phi\in\varepsilon_p$，

$$g^*\phi-f^*\phi\in S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p}.$$

特别，若 S 为 ε_n 中理想，则 $g^*\phi-f^*\phi\in S$.

证 $g^*\phi-f^*\phi=(f,g)^*\tilde{\phi}-(f,f)^*\tilde{\phi}$，其中 $\tilde{\phi}\in\varepsilon_{p+p}$ 定义为 $\tilde{\phi}(y,z)=\phi(z)$. 证毕.

T. Gaffney 曾考虑过 Malgrange 预备定理的一种较为奇特的表达形式，现陈述如下：

定理 10.6.3 设 $f,g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽. 假设 A 是有限生成的 $(f,g)^*\varepsilon_{p+p}$-模，那么 A 的有限子集 S 是 A 的一个 $g^*\varepsilon_p$-生成集当且仅当 S 的元素经投影组成实向量空间 $A\big/g^*\mathscr{M}_p\cdot A$ 的生成集.

证 A 作为 $(f,g)^*\varepsilon_{p+p}$-模是有限生成的，也就是说借助于 $(f,g)^*$ 所诱导的作用(该作用记为 *)，A 是有限生成的 ε_{p+p}-模.

令 $\pi_2:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ 表到第二个因子上的投影. 由

$$\varepsilon_p\xrightarrow{\pi_2^*}\varepsilon_{p+p}\xrightarrow{(f,g)^*}\varepsilon_n,$$

有 $(\pi_2^*\mathscr{M}_p)^*\cdot A=(f,g)^*\pi_2^*\mathscr{M}_p\cdot A=(\pi_2\circ(f,g))^*\mathscr{M}_p\cdot A=g^*\mathscr{M}_p\cdot A$，因此

$$A\big/(\pi_2^*\mathscr{M}_p)^*\cdot A=A\big/g^*\mathscr{M}_p\cdot A.$$

根据 Malgrange 预备定理，S 是 $\pi_2^*\varepsilon_p$-模 A 的生成集当且仅当 S

的元素经投影形成实向量空间$A\big/(\pi_2^*\mathcal{M}_p)^*\cdot A$，即$A\big/g^*\mathcal{M}_p\cdot A$的生成集．然而$A$作为$\pi_2^*\varepsilon_p$-模由$S$所生成当且仅当$A$作为$g^*\varepsilon_p$-模由$S$所生成，这是因为$(\pi_2^*\phi)^*\cdot a=(f,\ g)^*\pi_2^*\phi\cdot a=g^*\phi\cdot a$，$\forall\phi\in\varepsilon_p$，$\forall a\in A$，于是$S$是$A$的一个$g^*\varepsilon_p$-生成集当且仅当$S$经投影组成实向量空间$A\big/g^*\mathcal{M}_p\cdot A$的生成集．

命题 10.6.1 设C^∞映射芽$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为FST，则对所有非负整数$k$并且对任意实数$a$，

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0}=\mathcal{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0}+(1_{(\mathbb{R},\,a)}\times f)^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,\,a\times 0}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}^n}.$$

证 存在满同态

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\Big/(\mathcal{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n})$$

$$\to\varepsilon_n\Big/(\mathcal{M}_n^k\cdot J_f+f^*\mathcal{M}_p\cdot\varepsilon_n),\qquad(5)$$

它由在$a\times\mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^n$上的限制所给出．事实上它还是一个同构，因为限制映射$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\to\varepsilon_{\mathbb{R}^n}$的核为$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$，且$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}\subset(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$．

因f为FST，据定理10.6.1(i)⇒(iii)，(5)式右边的维数有限．设$\phi_1,\cdots,\phi_q\in\varepsilon_n$在

$$\varepsilon_n\Big/(\mathcal{M}_n^k\cdot J_f+f^*\mathcal{M}_p\cdot\varepsilon_n)$$

中的投影组成它的基．另外，由(5)式的左边，考虑$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$-模$A=\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\Big/\mathcal{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$，它是有限生成的．借助于$(1_{\mathbb{R}}\times f)^*$，可以看作$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模．因为

$$A\Big/(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot A\cong$$

$$\frac{\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}}{(\mathcal{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n})}$$

据 Malgrange 预备定理，A 是有限生成的$(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模，并且从上述讨论知，$\phi_1,\cdots,\phi_q$ 可视为 A 的$(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-基，从而

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}=\mathcal{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\{\phi_1,\cdots,\phi_q\},$$

更不待说，有

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}=\mathcal{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}^n}.$$

引理 10.6.5 设 C^∞ 芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 FST. 若$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,(a,0))$使得

$$T\mathcal{K}(G)=T\mathcal{K}(F),$$

其中 $F=1_{(\mathbb{R},a)}\times f$，则 G 为 FST.

证 因 f 为 FST，据定理 10.6.1，

$$\mathcal{M}_n^r\cdot V(f)\subset T\mathcal{K}(f)\quad 对某个\ r<\infty,$$

用 ε_{1+n} 中的元素乘上式两边，可导出

$$\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F)\subset T\mathcal{K}(F).$$

将 $\psi(G)$与 $\psi(F)$等同，又因 $T\mathcal{K}(G)=T\mathcal{K}(F)$，故

$$\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(G)\subset T\mathcal{K}(G).$$

由于 G 是$\mathbb{R}$-水平保持的，$G(t,x)=(t,g(t,x))$，即 $t=t\circ G$，其中 t 表投影. 又 $wF\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)-tF\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\in\psi(F)$，故可推出

$$(\mathcal{M}_n^r+t)\cdot V(G)\subset T_e\mathcal{K}(G),$$

据定理 10.6.1，G 为 FST.

定理 10.6.4 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 FST，并且 ε_n 中的理想 I 使得

$$I\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f).\tag{6}$$

假定 G 是由 f 的 I-逼近组成的($\mathbb{R}$,[0,1])-族,且使得

$$
\begin{aligned}
T\mathscr{A}(G^a) &\subset T\mathscr{A}(F^a) \\
&\subset T\mathscr{A}(G^a) \\
&\quad + (G^a)^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot T\mathscr{A}(F^a), \ \forall a \in [0,1],
\end{aligned} \tag{7}
$$

这里 $F^a = 1_{(\mathbb{R},a)} \times f$,那么 G 是 $\mathscr{A}$-平凡的.

证 设 $a\in[0,1]$. 下面的论证仅涉及在 $(a,0)$ 处的芽,为简单起见. 凡上标 a 皆省去.

易见 $J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} = J_F$,并且依克莱姆法则,$J_F\cdot\psi(F)\subset tF(\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$,所以

$$
\{J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\} \cdot T\mathscr{A}(f) = T\mathscr{A}(F).
$$

另外,有

$$
\begin{aligned}
&\{J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\} \cdot I \cdot V(f) \\
&= \{J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}^n}\} \cdot I \cdot V(f) \\
&= \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \cdot I \cdot V(f) \\
&= I \cdot \psi(F).
\end{aligned}
$$

用 $J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$ 乘(6)式得

$$
I \cdot \psi(F) \subset T\mathscr{A}(F). \tag{8}
$$

如果能证明

$$
T\mathscr{A}(F) = T\mathscr{A}(G), \tag{9}
$$

则 $I\cdot\psi(G)\subset T\mathscr{A}(G)$. 由于 G 是由 f 的 I-逼近组成的($\mathbb{R}$,[0,1])-族,因此对任意 $a\in[0,1]$,$\partial\cdot G^a\in I\cdot\psi(G^a)$. 因前面的论证省去上标 a,所以由 $I\cdot\psi(G^a)\subset T\mathscr{A}(G^a)$得到

$$
\partial \cdot G^a \in T\mathscr{A}(G^a), \quad \forall a \in [0,1],
$$

从而 G 是 $\mathscr{A}$-平凡的. 余下证明(9)式成立.

对任意 $a\in[0,1]$，

$$(y_1\circ G^a - y_1\circ F^a,\cdots,y_p\circ G^a - y_p\circ F^a)\in(I)^{\times p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0}.$$

以下略去上标 a. 据引理 10.6.4,

$$(F,G)^*\varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}\subset F^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}+I\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n},$$

因而

$$\begin{aligned}(F,G)^*\varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}\cdot T\mathscr{A}(F)&\subset T\mathscr{A}(F)+I\cdot\psi(F)\\&\subset T\mathscr{A}(F),\qquad\text{(据(8)式)}\end{aligned}$$

这说明 $T\mathscr{A}(F)$是一个$(F,G)^*\varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}$-模,并且还是一个 $G^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模.

令 $E=T\mathscr{A}(F)\big/T\mathscr{A}(G)$, 它是一个 $G^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模,并且从(7)式可推出

$$E=G^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot E.$$

若 E 是有限生成的,据 Nakayama 引理, $E=0$,从而 $T\mathscr{A}(F)=T\mathscr{A}(G)$,这正是所要证明的. 因此余下的任务便是证明 $G^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模 E 是有限生成的.

用 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$ 乘(7)式,得

$$T\mathscr{K}(G)\subset T\mathscr{K}(F)\subset T\mathscr{K}(G)+G^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot T\mathscr{K}(F),$$

应用 Nakayama 引理可导出

$$T\mathscr{K}(F)=T\mathscr{K}(G),$$

依引理 10.6.5, G 为 FST,再据定理 10.6.1, (i)⇒(iii),存在 $r<\infty$,使得

$$\mathscr{M}^r_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\subset J_G+G^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}.$$

又因 $\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}=(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n}+\langle t\rangle)\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$,故

$$\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}^{r+1} \subset \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n},$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}}{(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n})} < \infty. \tag{10}$$

而 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \Big/ \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G$ 是有限生成的 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$-模，根据 Malgrange 预备定理，由(10)式可得出 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \Big/ \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G$ 作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模也是有限生成的. 设 $h_1, \cdots, h_q \in \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$ 在 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \Big/ \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G$ 中的投影形成它的生成集.

令 $E' = T\mathscr{A}(F) \Big/ tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$，它是一个 $(F,G)^* \varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}$-模，由

$$tF\left(h_i \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \cdots, q, \ j = 1, \cdots, n.$$

$$wF\left(y_k \frac{\partial}{\partial y_l}\right), \quad k, l = 1, \cdots, p$$

所生成，这是因为

$$\begin{aligned} tF(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) &\subset \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G \cdot \psi(F) \\ &\subset \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot tG(\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) \\ &= tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)), \end{aligned}$$

于是 E' 是有限生成的 $(F,G)^* \varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}$-模. 据定理 10.6.3，$E'$ 作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模是有限生成的当且仅当向量空间 $E' \Big/ G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot E'$ 的维数有限. 而

$$\frac{E'}{G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot E'} \cong \frac{T\mathscr{A}(F)}{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot T\mathscr{A}(F)}$$

$$= \frac{T\mathscr{A}(G) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot T\mathscr{A}(F)}{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}(T\mathscr{A}(F) + T\mathscr{A}(G))}$$

$$= \frac{wG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)) + \{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} T\mathscr{A}(F)\}}{wG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p} \cdot \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)) + \{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} T\mathscr{A}(F)\}}$$

(第二个等式是根据(7)式及 $T\mathscr{A}(F)$ 为 $G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模这一事实),从而

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{E'}{G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot E'}$$

$$\leqslant \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}{\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p} \cdot \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)} = p^2,$$

由此可知,E'作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模是有限生成的.

因为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-同态 $E' \to E$ 是满的,所以 E 作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模也是有限生成的. 根据前面的分析,定理得证.

10.6.4 定理 10.6.2 的证明

本段将证明一个比定理 10.6.2 更一般的结果.

定理 10.6.5 设 C^∞ 芽 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 FST, I 为 ε_n 中的理想. 若

$$I^k V(f) \subset T\mathscr{A}(f), \quad k \geqslant 1,$$

则 f 是 I^{2k+1}-$\mathscr{A}$-决定的.

注 当 $k = 1$ 时,它就是定理 10.6.2.

证 关键是证明 f 的 I^{2k+1}-逼近组成的任意$(\mathbb{R}, [0, 1])$-族必是 $\mathscr{A}$-平凡的,由此可推得本定理成立. 事实上,假设 g 是 f 的 I^{2k+1}-逼近,则 f 的 I^{2k+1}-逼近组成的$(\mathbb{R}, [0, 1])$-族 G 可构作如下:令

$$y_i \circ G = (1 - t) \cdot y_i \circ f + t \cdot y_i \circ g,$$

$$i = 1, \cdots, p, \ t \circ G = t,$$

其中$\{y_1, \cdots, y_p\}$为$(\mathbb{R}^p, 0)$的局部坐标系, t 为$\mathbb{R}$ 上的标准坐标函数.

若上述 G 是 $\mathscr{A}$-平凡的，则 $f=G_0$ 必 $\mathscr{A}$-等价于 $g=G_1$.

设 $a\in[0, 1]$. 下面的论证只涉及在$(a, 0)$处的芽，为简单起见，将上标 a 省去.

如定理 10.6.4 证明开始部分那样，首先有

$$I^k\cdot\psi(F)\subset T\mathscr{A}(F),\tag{11}$$

这里 $F=1_{(\mathbb{R}, a)}\times f$.

假设 G 是由 f 的 I^{2k+1}-逼近组成的任意$(\mathbb{R}, [0, 1])$-族. 依引理 10.6.3，并注意到当 $\xi\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$时，$\xi\cdot(I^{2k+1})^{\times p}\cdot\varepsilon_{1+n}\subset(I^{2k})^{\times p}\cdot\varepsilon_{1+n}$，因而有

$$T\mathscr{A}(G)\subset T\mathscr{A}(F)+I^{2k}\cdot\psi(F),\tag{12}$$

$$T\mathscr{A}(F)\subset T\mathscr{A}(G)+I^{2k}\cdot\psi(G).\tag{13}$$

由(11)与(12)式可得出

$$T\mathscr{A}(G)\subset T\mathscr{A}(F),\tag{14}$$

将(11)式乘以 I^k，得

$$I^{2k}\cdot\psi(F)\subset I^k\cdot T\mathscr{K}(F).$$

据引理 10.6.3，

$$\begin{aligned}T\mathscr{K}(F)&\subset T\mathscr{K}(G)+I^{2k}\cdot\psi(F)\\&\subset T\mathscr{K}(G)+\mathscr{M}_nT\mathscr{K}(F),\end{aligned}$$

使用 Nakayama 引理可得到

$$T\mathscr{K}(F)\subset T\mathscr{K}(G),$$

于是有

$$
\begin{aligned}
I^{2k}\cdot\psi(G) &\subset I^k\cdot T\mathscr{K}(G)\\
&\subset tG(\mathscr{M}_n\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^*\mathscr{M}_p\cdot(I^k\cdot\psi(G)),
\end{aligned}
$$

将(13)式中的 $I^{2k}\psi(G)$ 用上式右边代替，并利用(11)式，得

$$
\begin{aligned}
T\mathscr{A}(F) &\subset T\mathscr{A}(G) + G^*\mathscr{M}_p\cdot(I^k\cdot\psi(G))\\
&\subset T\mathscr{A}(G) + G^*\mathscr{M}_p\cdot T\mathscr{A}(F).
\end{aligned}
$$

由上式及(14)式，并将略去的上标 a 重新写上，有

$$
\begin{aligned}
T\mathscr{A}(G^a) &\subset T\mathscr{A}(F^a)\\
&\subset T\mathscr{A}(G^a) + (G^a)^*\mathscr{M}_p\cdot T\mathscr{A}(F^a)\quad \forall a\in[0,1].
\end{aligned}
$$

根据定理 10.6.4，G 是 $\mathscr{A}$-平凡的. 按照前面的分析，本定理获证.

§10.7　$G_{q,k}$-决定性

本节将在 $\varepsilon^0(n,p)$ 中建立一种新的等价关系，它是通过引入群 $G_{q,k}$ 对 $\varepsilon^0(n,p)$ 的作用来定义的. 这一节的主要目标是给出 $G_{q,k}$-决定性的基本结果，见文献[40].

10.7.1　群 $G_{q,k}$ 及在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用

设 G^q 为一般线性群 $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})$ 的 q 维 Lie 子群，e 为单位元. 把从 $\mathbb{R}^n$ 到 G^q 的 C^∞ 映射 τ（合于 $\tau(0)=e$）在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽所成之群记为 G_q，即 $G_q=\{\tau:(\mathbb{R}^n,0)\to(G^q,e)\}$. 令集

$$
G_{q,k} = G_q\times\mathscr{R}_k,
$$

这里 $\mathscr{R}_k$ 为右等价群 $\mathscr{R}$ 的正规子群，其定义见 §10.4. 群 $G_{q,k}$ 的乘法运算规定如下：设 $(\tau_1,h_1),(\tau_2,h_2)\in G_{q,k}$，令

$$
(\tau_1,h_1)\cdot(\tau_2,h_2) = (\tau_1\cdot(\tau_2\circ h_1^{-1}),\ h_1\circ h_2).
$$

群 $G_{q,k}$ 在 $\varepsilon^0(n, p)$ 上的作用定义为：若 $(\tau, h)\in G_{q,k}$，$f\in \varepsilon^0(n, p)$，则 $(\tau, h)\cdot f=\tau\cdot(f\circ h^{-1})$.

现设 $f, g\in\varepsilon^0(n, p)$. 若存在 $(\tau, h)\in G_{q,k}$，使得 $g=(\tau, h)\cdot f$，则称 g $G_{q,k}$-等价于 f. 易见它是 $\varepsilon^0(n, p)$ 中的一种等价关系.

特别，当 $q=0$ 因而 $G^0=\{e\}$ 时，$G_{0,k}$ 就是群 $\mathscr{R}_k$；而当 $k=0$ 且 $q=p^2$ 因而 $G^{p^2}=\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ 时，根据命题 8.4.1 和推论 8.4.1，$G_{p^2,0}$ 为接触等价群 $\mathscr{K}$.

10.7.2　C^∞ 芽的 $G_{q,k}$-决定性

定义 10.7.1　设 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，I 为 ε_n 中理想. 如果对于 f 的任意一个 I-逼近 $g\in\varepsilon^0(n, p)$，存在 $(\tau, h)\in G_{q,k}$，使得 $(\tau, h)\cdot g=f$，则说 f 是 I-$G_{q,k}$-决定的.

注　$\mathscr{M}_n^{r+1}$-$G_{q,0}$-决定（此时 $k=0$，$I=\mathscr{M}_n^{r+1}$）就是文献[12]中所研究的 r-V_q-决定.

对给定的 $f\in\varepsilon^0(n, p)$，用 $J(f)$ 表示由 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ 生成的 ε_n-模. 又 ε_n-模 $\tau_q(f)$ 定义如下：当 $1\leqslant q\leqslant p^2$ 时，令

$$\tau_q(f)=\varepsilon_n\{A_1 f,\cdots, A_q f\},$$

其中 $p\times p$ 实矩阵 A_i $(i=1, \cdots, q)$ 为群 G^q 的 Lie 代数 T_eG^q 的基；而当 $q=0$ 时，约定 A_0 为零矩阵，$\tau_0(f)$ 为零模.

读者不难看出

$$\mathscr{M}_n^{k+1}J(f)+\mathscr{M}_n\tau_q(f)$$

是群 $G_{q,k}$-轨道 $G_{q,k}\cdot f$ 在 f 处的切空间.

现设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (a, 0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, (a, 0))$ $(a\in\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽，因而 F 可表示为 $F(t, x)=(t, f_t(x))$，$(t, x)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (a, 0))$. 记 $\pi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, (a, 0))\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为自然投影. 我们形式上规定

$$\overline{J}(F)=\varepsilon_{n+1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\pi\circ F),\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}(\pi\circ F)\right\},$$

$$\overline{\tau}_q(F)=\begin{cases}\varepsilon_{n+1}\{A_1(\pi\circ F),\ \cdots,\ A_q(\pi\circ F)\},\ 1\leqslant q\leqslant p^2,\\ 0,\ q=0,\end{cases}$$

这里 $A_1, \cdots, A_q$ 为 Lie 代数 T_eG^q 的基.

定义 10.7.2 一个$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, [0, 1]\times 0)$称为 $G_{q,k}$-平凡的,如果存在

(i) $\mathbb{R}$-水平保持的微分同胚芽 $H:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)$, $H(t, x)=(t, h_t(x))$合于 $h_t\in\mathscr{R}_k$, $t\in[0, 1]$,以及

(ii) $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $T:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times G^q, [0, 1]\times e)$, $T(t, x)=(t, \tau_t(x))$, 使得

$$T\cdot(F\circ H)=1_{(\mathbb{R}, [0, 1])}\times f,$$

其中 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为某一 C^∞ 芽.

引理 10.7.1 芽 F 是$G_{q,k}$-平凡的当且仅当对每一 $a\in[0, 1]$,有

$$\partial\cdot F^a\in\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F^a)+\mathscr{M}_n\cdot\overline{\tau}_q(F^a),$$

其中 F^a 为F 在$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (a, 0))$上的限制.

证明留作练习.

定理 10.7.1 设 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 C^∞ 芽, I 为ε_n 中理想. 若

$$I^r\cdot V(f)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot J(f)+\mathscr{M}_n\cdot\tau_q(f),\ r\geqslant 1,\qquad(1)$$

则 f 是I^{r+2}-$G_{q,k}$-决定的.

特别,当理想 $I=\mathscr{M}_n^{r+1}$ 时,有

定理 10.7.2 设 $0\leqslant k\leqslant r$, $r>0$. 若 C^∞ 芽 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$,使得

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}J(f)+\mathscr{M}_n\tau_q(f)+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot V(f),$$

则 (i)当 $k\geqslant 1$ 时,f 是 r-$G_{q,k}$-决定的,

(ii) 当 $k=0$ 时,f 是$(r+1)$-V_q-决定的.

注 当 I 为 $\mathscr{M}_n$ 的某次幂时,最好使用定理 10.7.2,因就决定性阶数估计而言,用定理 10.7.2 比定理 10.7.1 要精细些.

下面证明定理 10.7.1,而将定理 10.7.2 的证明留给读者练习.

定理 10.7.1 的证 设 $g\in\varepsilon^0(n,p)$为 f 的一个 I^{r+2}-逼近.令 $F=1_{(\mathbb{R},[0,1])}\times f$, S:$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,[0,1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,[0,1]\times 0)$定义为

$$S(t,x)=(t,s_t(x)),$$

$$y_i\circ s_t(x)=(1-t)\cdot y_i\circ f(x)+t\cdot y_i\circ g(x),$$

$$i=1,\cdots,p,\ t\in[0,1].$$

如果能证明 S 是 $G_{q,k}$-平凡的,则 $f=s_0$ 与 $g=s_1$ 是 $G_{q,k}$-等价的,因此 f 是 I^{r+2}-$G_{q,k}$-决定的. 下面利用引理 10.7.1 来证 S 的 $G_{q,k}$-平凡性.

任取 $a\in[0,1]$. 因余下的论证只涉及在点$(a,0)$处的映射芽,为简便计,将上标 a 全删去.

用 ε_{n+1}中的元素乘(1)式,得

$$I^r\psi(F)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F)+\mathscr{M}_n\cdot\overline{\tau}_q(F).\tag{2}$$

由引理 10.6.3,

$$\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(S)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F)+I^{r+1}\cdot\psi(F),\tag{3}$$

$$\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(S)+I^{r+1}\cdot\psi(S).\tag{4}$$

直接计算,有

$$\overline{\tau}_q(S)\subset\overline{\tau}_q(F)+I^{r+2}\cdot\psi(F),\tag{5}$$

$$\overline{\tau}_q(F) \subset \overline{\tau}_q(S) + I^{r+2} \cdot \psi(S). \tag{6}$$

由(2)和(3)及(5)式可推出

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S) \subset \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F).$$

令

$$E = \frac{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F)}{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S)},$$

它是一个有限生成的 ε_{n+1}-模. 由(2)、(4)、(6)式及 $I \subset \mathcal{M}_n$ 可得

$$\mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(F) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(F) \subset \mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(S) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(S) + \mathcal{M}_n \cdot (\mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(F) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(F)),$$

于是有 $E = \mathcal{M}_n \cdot E$. 据 Nakayama 引理, $E=0$, 从而

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F) = \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S).$$

以上的论证均省去上标 a, 因此上式为

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F^a) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F^a) = \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S^a) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S^a), \quad \forall a \in [0, 1]. \tag{7}$$

因为 S 是由 f 的 I^{r+2}-逼近组成的 $(\mathbb{R}, [0, 1])$-族, 因此对任意 $a \in [0,1]$,

$$\partial \cdot S^a \in I^{r+2}\psi(S^a) = I^{r+2}\psi(F^a),$$

从而由(2)和(7)式得到

$$\partial \cdot S^a \in \mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(S^a) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(S^a).$$

根据引理 10.7.1, S 是 $G_{q,k}$-平凡的.

10.7.3 几个推论

推论 10.7.1 若 $f \in \varepsilon^0(n, p)$ 使得

$$\mathcal{M}_n^{\infty} \cdot V(f) \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f) + \mathcal{M}_n\tau_q(f),$$

则 f 是 $\mathscr{M}_n^\infty$-$G_{q,0}$-决定的，即 f 是∞-V_q-决定的.

证 在定理 10.7.1 中取 $I=\mathscr{M}_n^\infty$ 及 $k=0$，由(1)式及$(\mathscr{M}_n^\infty)^3=\mathscr{M}_n^\infty$ 即得.

注意到 $G_{0,k}$-决定性就是 $\mathscr{R}_k$-决定性，因此由定理 10.7.1 与定理 10.7.2 立即得到下面的

推论 10.7.2 设 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}, 0)$为 C^∞ 函数芽.

(i) 若 $I^r\cdot V(f)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}J(f)$，则 f 是 I^{r+2}-$\mathscr{R}_k$-决定的，

(ii) 若 $\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot J(f)+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot V(f)$，则(a)当 $k\geqslant1$时，f 是 r-$\mathscr{R}_k$-决定的；(b) 当 $k=0$ 时，f 是$(r+1)$-$\mathscr{R}$-决定的.

注 上述结论(i)与文献[74]中定理 B 相一致. 结论(ii)中(b)就是文献[22]中定理 2.

因为 $G_{p^2,0}$-决定性就是 $\mathscr{K}$-决定性，由定理 10.7.1 与 10.7.2 自然可导出 $\mathscr{K}$-决定性的相应结论. 留给读者补述.

第十一章　Thom-Boardman 奇点

在 §2.5 中曾对 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 引入 Thom 一阶奇点集 $\Sigma^i(f)$，它使我们可以利用 f 的微分的秩来区分奇点类型. $x\in\Sigma^i(f)$说明 f 在点 x 有 Σ^i 类奇点. 但是仅仅使用 Σ^i 来区分奇点是不够的，例如余维不小于 1 的光滑函数$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的每一个奇点(即临界点)都属于 Σ^n 类，至于临界点是非退化的还是退化的尚不能区分. 又如 Whitney 映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto\left(x,xy-\frac{1}{3}y^3\right)$的奇点集 $\Sigma^1(f)$是平面上抛物线 $x=y^2$，它包含折叠点与尖点. 利用二阶奇点集，尖点属于 $\Sigma^{1,1}$类，而折叠则属于 $\Sigma^{1,0}$类. 因此有必要将 Σ^i 再作分解以得到更精细的不变量.

本章在引入 Thom 和 Boardman 意义下的奇点集之后，介绍了 Boardman 关于 Thom-Boardman 奇点的几个主要结果，并且联系映射芽的开折，为进一步讨论稳定映射芽的分类作准备. 本章第 4 节说明应用映射芽的 Boardman 符号可对映射芽的 $\mathscr{K}$-等价提供有效判断.

§11.1　Thom 和 Boardman 意义下的奇点集

11.1.1　$\Sigma^I(f)$的 Thom 定义

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，若一阶奇点集 $\Sigma^i(f)$为$\mathbb{R}^n$ 的子流形，则可引入二阶奇点集 $\Sigma^{i,j}(f)=\Sigma^j(f|\Sigma^i(f))$. 并且这一过程可以继续，假若二阶奇点集 $\Sigma^{i,j}(f)$是子流形，则引入三阶奇点集 $\Sigma^{i,j,k}(f)=\Sigma^k(f|\Sigma^{i,j}(f))$，等等. 一般地，对于任意一组非负整数 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，归纳定义 Thom 高阶奇点集 $\Sigma^I(f)$如下：

定义 11.1.1　设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，$I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$为

任意一组非负整数. 若 $\Sigma^I(f)=\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(f)$为$\mathbb{R}^n$ 中光滑子流形，则集

$$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k,i_{k+1}}(f) = \Sigma^{i_{k+1}}(f\big|\Sigma^I(f))$$

由满足下列条件的点 $x\in\mathbb{R}^n$ 组成，其中 $f|\Sigma^I(f)$在点 x 的微分的核具有维数 i_{k+1}.

依 Thom 的方法定义的奇点集 $\Sigma^I(f)$不必为流形(见 §2.5 中例 2)，因此不能期望对所有 f，都可以定义 $\Sigma^I(f)$. 其实 Thom 在引入这些集时已经注意到这一令人不悦的现象. 克服这一困难的办法曾在 §2.5 中就特殊情形作过介绍：在 $J^{1,0}_{n,p}\equiv L(n,p)$中定义子流形 Σ^i，其余维数为 $i(p-n+i)$，它不依赖于任何 f. 如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 是好映射，即 $j^1_0f:\mathbb{R}^n\to J^{1,0}_{n,p}$与所有子流形 Σ^i 相横截，那么 $\Sigma^i(f)=(j^1_0f)^{-1}(\Sigma^i)$，并且它是$\mathbb{R}^n$ 中余维为 $i(p-n+i)$的子流形. Thom 曾建议对于 k 阶奇点集$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f)$，也仿照上述过程来作，即在导网空间 $J^{k,0}_{n,p}$中定义子流形$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$，使得当 f 为好映射(或说“generic”映射)时，有

$$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f) = (j^k_0f)^{-1}(\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}),$$

它是$\mathbb{R}^n$ 中微分子流形. 当 $k=2$ 时曾被 Levine 解决[38]. 而对于一般情形，则由 Boardman 所解决[6]. Boardman 使用了导网空间的语言给 $\Sigma^I(f)$以另一定义. 对任意一组非负整数 $I=(i_1,\cdots,i_k)$，他在 $J^{k,0}_{n,p}$中定义了子集Σ^I 而不依赖于任何映射f，采用的方法是理想的 Jacobi 扩张.

11.1.2 Σ^I 的 Boardman 定义

定义 11.1.2 设 $y_1,\cdots,y_n$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的坐标系，$\mathscr{I}$为代数 ϵ_n 中的一个有限生成理想，生成元为 $f_1,\cdots,f_p$. 对于整数 $s\geqslant 1$，定义 $\Delta_s\mathscr{I}$为理想 $\mathscr{I}+\mathscr{I}'$，其中 $\mathscr{I}'$是由 Jacobi 矩阵

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n}
\end{bmatrix} \tag{1}
$$

的所有 s 阶子式(意指矩阵(1)的 $s\times s$ 子矩阵的行列式)生成的理想. $\Delta_s\mathscr{I}$称为理想 $\mathscr{I}$的 Jacobi 扩张.

命题 11.1.1 理想 $\Delta_s\mathscr{I}$既不依赖于 $\mathscr{I}$的生成元的选取,又不依赖于$\mathbb{R}^n$中的坐标系的选取. 即若 $g_1,\cdots,g_q$ 为 $\mathscr{I}$的另一组生成元,$z_1,\cdots,z_n$ 为另一坐标系,则由 $\mathscr{I}$以及 Jacobi 矩阵

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial g_q}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial z_n}
\end{bmatrix} \tag{2}
$$

的 $s\times s$ 子式生成的理想和$\Delta_s\mathscr{I}$相一致.

证 显然只须证明(2)式的任意 $s\times s$ 子式位于$\Delta_s\mathscr{I}$之中. 因为每一 g_i 可以写作诸 f_k 的线性组合,系数取自 ϵ_n,所以每一$\frac{\partial g_i}{\partial z_j}$可写为诸$\frac{\partial f_k}{\partial z_j}$(与 f_k 相同)的线性组合再加上 $\mathscr{I}$的一个元素. 利用行列式的重线性性质,可知(2)式的任意 $s\times s$ 子式位于由 $\mathscr{I}$和 Jacobi 矩阵

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n}
\end{bmatrix} \tag{3}
$$

的 $s\times s$ 子式生成的理想中，于是只要证明(3)式的任意 $s\times s$ 子式位于 $\Delta_s\mathscr{I}$ 中就行了. 应用链法则，每一 $\frac{\partial}{\partial z_j}$ 可写为诸 $\frac{\partial}{\partial y_k}$ 的线性组合，系数取自 ε_n. 再一次应用行列式的重线性性质便得到所要求的结论. 证毕.

当 $s>n$ 时，$\Delta_s\mathscr{I}=\mathscr{I}$. 又存在下列理想的包含关系：

$$\Delta_{k+1}\mathscr{I}\subset\Delta_k\mathscr{I},\quad k=1,2,\cdots,$$

这只要对行列式按行展开便可导出. 从而有

$$\mathscr{I}\subset\Delta_n\mathscr{I}\subset\Delta_{n-1}\mathscr{I}\subset\cdots\subset\Delta_1\mathscr{I}. \tag{4}$$

例 1 设 ε_1 中的理想 $\mathscr{I}=\langle x^k\rangle,k\geqslant 1$，则 $\Delta_1\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 及 Jacobi 矩阵 (kx^{k-1}) 的一阶子式生成，因而 $\Delta_1\mathscr{I}=\langle x^{k-1}\rangle$，并且当 $s\geqslant 2$ 时，$\Delta_s\mathscr{I}=\langle x^k\rangle$.

例 2 设 $\mathscr{I}=\langle x^2-y^2,xy\rangle$ 为 ε_2 中理想，则 $\Delta_1\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 及 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{bmatrix}$$

的一阶子式生成，因此 $\Delta_1\mathscr{I}=\langle x,y\rangle$. $\Delta_2\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 及 $\det\begin{bmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{bmatrix}=2(x^2+y^2)$ 生成，显然 $\Delta_2\mathscr{I}=\langle x^2,xy,y^2\rangle$. 又当 $s\geqslant 3$ 时，$\Delta_s\mathscr{I}=\mathscr{I}$.

对于 ε_n 中理想 $\mathscr{I}$，令

$$\Delta^s\mathscr{I}=\Delta_{n-s+1}\mathscr{I}.$$

由理想的上升序列(4)知，$\mathscr{I}$ 的相继 Jacobi 扩张 $\Delta^1\mathscr{I},\Delta^2\mathscr{I},\cdots,\Delta^n\mathscr{I}$ 满足下列包含关系：

$$\mathscr{I}=\Delta^0\mathscr{I}\subset\Delta^1\mathscr{I}\subset\Delta^2\mathscr{I}\subset\cdots\subset\Delta^n\mathscr{I}. \tag{5}$$

定义 11.1.3 设 $\mathscr{I}$ 为 ε_n 中真理想，$\mathscr{I}$ 的 Jacobi 扩张 $\Delta^k\mathscr{I}$ 叫做临界的，如果 $\Delta^k\mathscr{I}\neq\varepsilon_n$ 且 $\Delta^{k+1}\mathscr{I}=\varepsilon_n$. 特别，若 $\Delta^n\mathscr{I}\neq\varepsilon_n$，则 $\Delta^n\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张.

换言之，$\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张是指在序列(5)中，按从左到右的顺序排在最右边的真理想.

假定 $\Delta^{i_1}\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张. 重复上述过程得到它的相继 Jacobi 扩张以及临界 Jacobi 扩张 $\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}\mathscr{I}$. 如此继续下去，可获得 $\mathscr{I}$ 的相继临界 Jacobi 扩张的上升序列

$$\Delta^{i_1}\mathscr{I}\subset\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}\mathscr{I}\subset\Delta^{i_3}\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}\mathscr{I}\subset\cdots,$$

则称理想 $\mathscr{I}$ 具有 Boardman 符号$(i_1,i_2,i_3,\cdots)$.

例 3 例 1 中的理想 $\mathscr{I}=\langle x^k\rangle\subset\varepsilon_1$ 的相继临界 Jacobi 扩张为

$$\begin{aligned}&\Delta^1\mathscr{I}=\langle x^{k-1}\rangle,\Delta^1\Delta^1\mathscr{I}=\langle x^{k-2}\rangle,\cdots,\underbrace{\Delta^1\Delta^1\cdots\Delta^1}_{(k-1)\text{个}}\mathscr{I}\\&=\langle x\rangle,\Delta^0\underbrace{\Delta^1\cdots\Delta^1}_{(k-1)\text{个}}\mathscr{I}=\underbrace{\Delta^1\cdots\Delta^1}_{(k-1)\text{个}}\mathscr{I},\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{I}$ 的 Boardman 符号为$(\underbrace{1,1,\cdots,}_{(k-1)\text{个}}1,0,\cdots)$.

例 4 设 ε_4 中的理想 $\mathscr{I}$ 由 x_1,x_2,x_3^2,x_4^2 生成，这 4 个生成元的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2x_3&0\\0&0&0&2x_4\end{bmatrix},$$

易见 $\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张为 $\Delta^2\mathscr{I}=\Delta_3\mathscr{I}=\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle=\mathscr{M}_4$. 又 $\Delta^0\Delta^2\mathscr{I}=\Delta_5\Delta_3\mathscr{I}=\Delta_3\mathscr{I}$，故 $\mathscr{I}$ 的 Boardman 符号为$(2,0,0,\cdots)$.

定义 11.1.4 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽. f 的 Boardman 符号定义为理想 $I(f)$ 的 Boardman 符号,其中 ϵ_n 中的理想 $I(f)$ 由 f 的分量 $f_1,\cdots,f_p$ 生成.

命题 11.1.2 映射芽 $(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 的 Boardman 符号是一个接触等价不变量. 即若二映射芽是 $\mathscr{K}$-等价的,则它们具有相同的 Boardman 符号.

证 设 $f,g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为二 C^∞ 映射芽, $f=(f_1,\cdots,f_p)$, $g=(g_1,\cdots,g_p)$.

(i) 若 $f\underset{\mathscr{C}}{\sim}g$, 据推论 8.4.1, $I(f)=I(g)$, 因而由命题 11.1.1 可得到 f 和 g 有相同的 Boardman 符号.

(ii)若 $f\underset{\mathscr{R}}{\sim}g$, 则存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 使得 $g=f\circ h$. 显然 h 的分量 $h_1,\cdots,h_n$ 可取做 $(\mathbb{R}^n,0)$ 的一个局部坐标系. 计算 $f_1,\cdots,f_p$ 关于 $h_1,\cdots,h_n$ 的 Jacobi 矩阵与计算 $g_1,\cdots,g_p$ 关于标准坐标系 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Jacobi 矩阵,易见将得到相同的 Jacobi 扩张(据命题 11.1.1),因而 f 与 g 具有相同的 Boardman 符号.

(iii) 设 $f\underset{\mathscr{K}}{\sim}g$, 据命题 8.4.1, 存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$, 使得 $f\circ h\underset{\mathscr{C}}{\sim}g$. 然后由(i)与(ii)可知, f 与 g 必有相同的 Boardman 符号.

定义 11.1.5 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,又 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 为一组非负整数. 如果 f 的 Boardman 符号为 $(i_1,\cdots,i_k,\cdots)$, 则说 f 在点 0 具有 Σ^I 类奇点.

等价地,设 $f=(f_1,\cdots,f_p)$, $I(f)=\langle f_1,\cdots,f_p\rangle\epsilon_n$. 若理想 $I(f)$ 的相继临界 Jacobi 扩张为

$$\Delta^{i_1}(I(f)),\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}(I(f)),\cdots,\Delta^{i_k}\Delta^{i_{k-1}}\cdots,\Delta^{i_1}(I(f)),$$

则 f 在点 O 具有 Σ^I 类奇点.

例 5 函数 $y=x^3$ 在点 O 的芽具有 $\Sigma^{1,1,0}$ 类奇点, $y=x^k$ 在点 O 的芽属于 $\Sigma^{\overbrace{1,\cdots,1}^{k-1},0}$ 类. 芽

$$f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x,y)\mapsto(x^2-y^2,xy)$$

和

$$g:(\mathbb{R}^4,0)\to(\mathbb{R}^4,0),(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(x_1,x_2,x_3^2,x_4^2)$$

均属于 $\Sigma^{2,0}$类.

定义 11.1.6 设 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$为 C^∞ 映射芽,它 $\mathscr{K}$-等价于 C^∞ 芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$. 定义 f 的 Boardman 符号为 f_0 的 Boardman 符号.

据命题 11.1.2,这一定义是合理的.

命题 11.1.3 设 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$为 C^∞ 映射芽,则 f 的 Boardman 符号中的前 k 个整数仅依赖于f 的k-导网.

证 可假设 $x=0,y=0$. 由 f 的分量 $f_1,\cdots,f_p$ 生成的理想记为 $\mathscr{I}$,并令$(i_1,i_2,\cdots)$为 $\mathscr{I}$的 Boardman 符号. 对 k 使用归纳法,理想

$$\Delta^s\Delta^{i_{k-1}}\cdots\Delta^{i_1}\mathscr{I}$$

显然由 $f_1,\cdots,f_p$ 的阶数不大于k 的偏导数所生成,并且这一理想是不是真理想仅依赖于所有这些偏导数在点 $O\in\mathbb{R}^n$ 的值,于是 i_k 仅依赖于f 的k-导网.

定义 11.1.7 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$为一组非负整数. 如果 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$的 Boardman 符号具有形式$(i_1,\cdots,i_k,\cdots)$,则称 f 属于类Σ^I.

在导网空间 $J^{k,0}_{n,p}$中定义的子集 Σ^I 由满足下列条件的k-导网所组成,要求它们中的每一个有一个代表(为 C^∞ 映射芽)属于类 Σ^I.

依命题 11.1.3,子集 Σ^I 的定义是合理的.

例 6 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为$(x,y)\mapsto(u,v)$,其中

$$u=x^2-y^2+2\varepsilon x,v=2xy-2\varepsilon y,\varepsilon>0,$$

计算 f 在任意点$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 的芽的二阶 Boardman 符号(i,j). 假定 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$与 f 在点(x_0,y_0)处的芽 $\mathscr{K}$-等价,依定

义，只需计算芽 f_0 的二阶 Boardman 符号(i,j). 现选取芽 f_0 如下：设$(x,y)\mapsto(u_0,v_0)$，其中

$$u_0(x,y)=u(x+x_0,y+y_0)-u(x_0,y_0)$$
$$=x^2-y^2+2(x_0+\varepsilon)x-2y_0y,$$
$$v_0(x,y)=v(x+x_0,y+y_0)-v(x_0,y_0)$$
$$=2xy+2y_0x+2(x_0-\varepsilon)y.$$

设 $\mathscr{I}=\langle u_0,v_0\rangle\varepsilon_2$，则 $\Delta^i\mathscr{I}$ 由 u_0,v_0 及它们的 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y}\\ \frac{\partial v_0}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(x+x_0+\varepsilon) & -2(y+y_0)\\ 2(y+y_0) & 2(x+x_0-\varepsilon)\end{bmatrix}$$

的$(3-i)$阶子式所生成.

理想 $\Delta^2\mathscr{I}$不是真理想，因为它由 u_0,v_0 及上述矩阵的诸元素所生成，而生成元$\frac{\partial u_0}{\partial x}$与$\frac{\partial v_0}{\partial y}$含有非零常数项.

理想 $\Delta^1\mathscr{I}$由 u_0,v_0 及 $D=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y}\\ \frac{\partial v_0}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial y}\end{bmatrix}=4[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2-\varepsilon^2]$生成. 当常数项 $x_0^2+y_0^2-\varepsilon^2=0$ 时，$\Delta^1\mathscr{I}$是真理想因而是临界理想. 圆周 $x_0^2+y_0^2=\varepsilon^2$ 为 f 的一阶奇点集$\Sigma^1(f)$或者说 f 在该圆周上的每一点处的芽具有 Σ^1 类奇点.

理想 $\Delta^1\Delta^1\mathscr{I}$由 u_0,v_0,D 以及它们的 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y}\\ \frac{\partial v_0}{\partial x} & \frac{\partial v_0}{\partial y}\\ \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(x+x_0+\varepsilon) & -2(y+y_0)\\ 2(y+y_0) & 2(x+x_0-\varepsilon)\\ 8(x+x_0) & 8(y+y_0)\end{bmatrix}$$

的 2 阶子式所生成. 稍做计算便知，这些生成元所含的常数项分别是

$$4(x_0^2+y_0^2-\varepsilon^2),16y_0(2x_0+\varepsilon),16(y_0^2-x_0^2+x_0\varepsilon).$$

当

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2-\varepsilon^2=0,\\ y_0(2x_0+\varepsilon)=0,\\ y_0^2-x_0^2+x_0\varepsilon=0,\end{cases}$$

即 (x_0,y_0) 为 ε^3 的 3 个复立方根 $(\varepsilon,0)$，$\left(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)$，$\left(-\frac{\varepsilon}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)$时，$\Delta^1\Delta^1\mathscr{I}$为临界理想，因此 f 在这 3 个点处的芽具有 $\Sigma^{1,1}$类奇点. f 在圆周$\Sigma^1(f)$的其他点处的芽属于类 $\Sigma^{1,0}$. 此外，f 在除去圆周$\Sigma^1(f)$的平面上任意点的芽属于 Σ^0 类，因而是非奇异芽.

将奇点集 $\Sigma^1(f)$用参数方程表示为

$$x_0=\varepsilon\cos\theta,\quad y_0=\varepsilon\sin\theta,$$

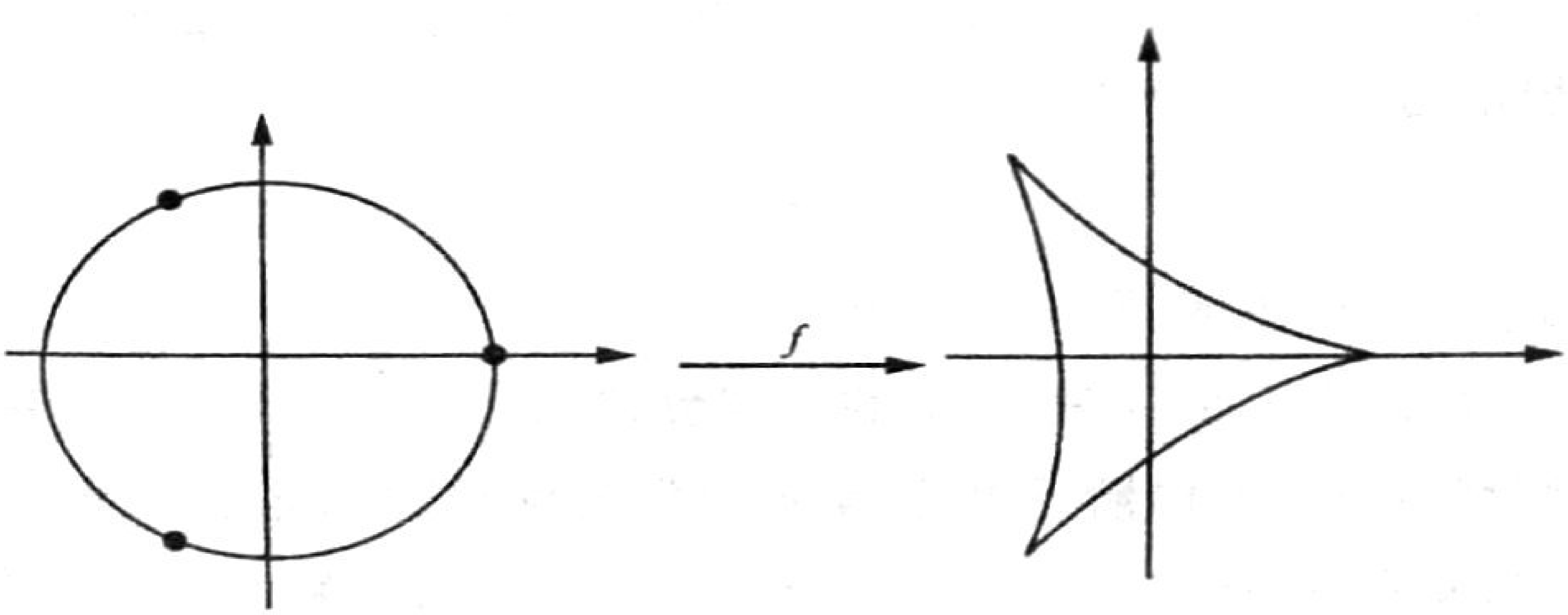

图 11.1

则分歧集 $f(\Sigma^1(f))$ 的参数方程为

$$u = \varepsilon^2(\cos 2\theta + 2\cos\theta), v = \varepsilon^2(\sin 2\theta - 2\sin\theta),$$

该曲线是三尖内摆线，可看作是一小圆在另一大圆(半径为小圆半径的 3 倍)内做无滑滚动，小圆上一定点的运动轨迹. 圆周 $x_0^2 + y_0^2 = \varepsilon^2$ 上的 3 个点(对应于 ε^3 的立方根)被 f 映为内摆线上的 3 个尖点，这一事实正好由上述二阶 Boardman 符号所反映. 它们是 $f|\Sigma^1(f)$ 的 Σ^1 点，而圆周上的其他点则为 $f|\Sigma^1(f)$ 的 Σ^0 点.

§11.2 Boardman 定理的陈述

引理 11.2.1 导网空间 $J_{n,p}^{k,0}$ 中的子集 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 为非空集当且仅当下列条件成立:

(i) $n \geqslant i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots \geqslant i_k \geqslant 0$,

(ii) $i_1 \geqslant n - p$,

(iii) 若 $i_1 = n - p$, 则 $i_1 = i_2 = \cdots = i_k$.

证 只需考虑源与靶均为 0 的导网，先证必要性.

(i) 由定义直接得到 $n \geqslant i_1$ 且所有的 $i_1, \cdots, i_k \geqslant 0$. 下证 $i_j \geqslant i_{j+1}$.

在 $\Sigma^{i_1\cdots,i_k}$ 中取一个导网，将它的一个代表芽的分量所生成的理想记为 $\mathscr{I}(\subset \varepsilon_n)$. 假定

$$\Delta^{i_l} \cdots \Delta^{i_1} \mathscr{I}$$

由 $g_1, \cdots, g_{\sigma_l}$ 生成，其中 $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \cdots$.

设 $\Delta^s \Delta^{i_j} \cdots \Delta^{i_1} \mathscr{I}$ 为 ε_n 中的真理想，则 $g_1, \cdots, g_{\sigma_j}$ 的 Jacobi 矩阵的所有$(n - s + 1)$阶子式不含非零常数项. 特别，$g_1, \cdots, g_{\sigma_{j-1}}$ 的 Jacobi 矩阵的所有$(n - s + 1)$阶子式所含的常数项为 0, 因而 $\Delta^s \Delta^{i_{j-1}} \cdots \Delta^{i_1} \mathscr{I}$ 是真理想，于是 $s \leqslant i_j$. 取 $s = i_{j+1}$, 则 $i_{j+1} \leqslant i_j$.

(ii) 在 $\Sigma^1(\subset J_{n,p}^{1,0})$ 中取一个导网，不妨设它的代表芽为

$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，令 $\mathscr{I}=\langle f_1,\cdots,f_p\rangle\epsilon_n$，其中 $f_1,\cdots,f_p$ 为 f 的分量. 依定义，$\Delta^s\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 以及 $f_1,\cdots,f_p$ 的 Jacobi 矩阵的 $(n-s+1)$ 阶子式所生成.

$\Delta^s\mathscr{I}$ 为真理想 $\Leftrightarrow \mathrm{D}f(0)$ 的所有 $(n-s+1)$ 阶子式全为 0

$$\Leftrightarrow \mathrm{D}f(0)\text{ 的核的维数}\geqslant s,$$

从而

$$\Delta^s\mathscr{I}\text{ 为临界理想}\Leftrightarrow \dim\mathrm{Ker}\mathrm{D}f(0)=s,$$

这说明按 Boardman 定义的 Σ^{i_1} 和 §2.5 中 Σ^{i_1} 的定义相一致，从而 $i_1\geqslant n-p$.

(iii) 若 $i_1=n-p$，则 $\Delta^{i_1}\mathscr{I}=\Delta_{p+1}\mathscr{I}=\mathscr{I}$，因而立即可推出 $i_1=i_2=\cdots=i_k$.

再证充分性. 假定引理中条件 (i)～(iii) 被满足，构作一芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 带有分量 $f_1,\cdots,f_p$，使得 f 属于 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 类. 下分两种情形：

1) $i_1=n-p$. 取 $f_1=x_1,\cdots,f_p=x_p$.

2) $i_1>n-p$. 令

$$\begin{cases} f_i = x_i, & 1\leqslant i\leqslant n-i_1,\\ f_{n-i_1+1}=\displaystyle\sum_{j=n-i_1+1}^{n-i_2}x_j^2+\sum_{j=n-i_2+1}^{n-i_3}x_j^3+\cdots, & \\ f_i=0, & n-i_1+2\leqslant i\leqslant p,\end{cases}$$

则 f 具有 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 类奇点(留作练习).

本引理告诉我们，$J^{k,0}_{n,p}$ 可以分解为有限个形如 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 的非空子集的并. 例如 $J^{2,0}_{2,2}$ 中的非空奇点集为 $\Sigma^{2,2},\Sigma^{2,1},\Sigma^{2,0},\Sigma^{1,1},\Sigma^{1,0}$ 和 Σ^0.

定理 11.2.1 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 满足引理 11.2.1 中条件 (i)～(iii)，则 $J^{k,0}_{n,p}$ 中的 k 阶奇点集 Σ^I 是余维为 $\nu_I(n,p)$ 的微分子

流形，其中 $\nu_I(n,p)=(p-n+i_1)\mu(i_1,i_2,\cdots,i_k)-(i_1-i_2)\mu(i_2,\cdots,i_k)-\cdots-(i_{k-1}-i_k)\mu(i_k)$，并且 $\mu(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 表示满足下列条件的整数序列 $(j_1,j_2,\cdots,j_k)$ 的总数：

(i) $j_1\geqslant j_2\geqslant\cdots\geqslant j_k\geqslant 0$，

(ii) 对于每一 $s(1\leqslant s\leqslant k)$，$i_s\geqslant j_s$ 且 $j_1>0$.

Σ^I 叫做 $J_{n,p}^{k,0}$ 中的 Boardman 子流形，Mather 称它为 Thom-Boardman 奇点集.

例 1 对于 $k=1$，有 $\mu(i)=i$，于是 Σ^i 在 $J_{n,p}^{1,0}$ 中的余维数 $\nu_i(n,p)=i(p-n+i)$，与 §2.5 中的公式相同.

对于 $k=2$，设 $I=(i,j)$，则有 $\mu(i,j)=i(j+1)-\dfrac{j(j-1)}{2}$，因而 $\Sigma^{i,j}$ 在 $J_{n,p}^{2,0}$ 中的余维数

$$\begin{aligned}\nu_{i,j}(n,p)&=(p-n+i)i\\&\quad+\frac{j}{2}[(p-n+i)(2i-j+1)-2i+2j],\end{aligned}$$

该公式曾由 Levine 获得. 特别当 $n=p$ 时，

$$\nu_{i,j}(n,n)=i^2+\frac{j}{2}(2i^2-ij+2j-i). \tag{1}$$

例 2 设 $I=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k})$. 显然有 $\mu(1,\cdots,1)=k$，因而 $\Sigma^{\underbrace{1,\cdots,1}_{k}}$（简记为 Σ^{1_k}）在 $J_{n,p}^{k,0}$ 中的余维数为 $(p-n+1)k$. 特别当 $p=n$ 时，$\nu_I(n,n)=k$.

定义 11.2.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射. 如果 f 的 k-导网映射

$$j_0^k f:\mathbb{R}^n\to J_{n,p}^{k,0},$$

$x\mapsto j_0^k f(x)=(f-f(x))$ 的 k 阶 Taylor 多项式

横截于所有的 Boardman 子流形 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$，那么 f 叫做好映射.

根据定理 2.1.1，

$$(j_0^k f)^{-1}(\Sigma^{i_1,\cdots,i_k})$$

是$\mathbb{R}^n$ 中的微分子流形，并且具有与 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 相同的余维数. 不仅如此，Boardman 还证明了

$$(j_0^k f)^{-1}(\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}) = \Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f),$$

它就是 Thom 的 k 阶奇点集，并且

$$\Sigma^{i_1,\cdots,i_{k-1},i_k}(f) = \Sigma^{i_k}(f\,|\,\Sigma^{i_1,\cdots,i_{k-1}}(f)).$$

现将上述结果概述为

定理 11.2.2 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为好映射，$I=(i_1,\cdots,i_k)$，则 $\Sigma^I(f)=(j_0^k f)^{-1}(\Sigma^I)$或为空集或为$\mathbb{R}^n$ 中的微分子流形，其余维数为 $\nu_I(n,p)$. 又 $x\in\Sigma^I(f)$当且仅当 f 在点 x 处的 k-导网 $j_0^k f(x)\in\Sigma^I$.

定理 11.2.3 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$为一组整数，合于引理 11.2.1 中条件(i)～(iii)，则集

$$\{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j_0^k f \pitchfork \Sigma^I\}$$

为 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集.

证 据定理 11.2.1 和定理 2.4.4 及其注.

本定理说每一个光滑映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 连同它的任意个数导数可用好映射来任意逼近.

现对好映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，考虑可能出现的 Thom 奇点集. 因 $\Sigma^i(f)$在$\mathbb{R}^n$ 中的余维数为 i^2，因此对于平面到平面的光滑映射，一般不会出现 Σ^2 类奇点. 当 $n\geqslant 4$ 时，好映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可能有 Σ^2 类奇点.

而对于好映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，最先出现 $\Sigma^{i,j}$ 类奇点应要求 $\nu_{i,j}(n,n)=n$. 由计算余维数的 Levine 公式(1)，得到下表：

i,j	1,0	1,1	2,0	2,1	2,2	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
$\nu_{i,j}=n$	1	2	4	7	10	9	16	22	27	16	29	40	49	56

当 $n=p\leqslant 16$ 时，对于好映射来说下列类型的奇点必然出现：

$n=\nu_I$	n	4	7	9	10	13	15	16
I	1_n	2	2,1	3	2,2 $2,1_2$	$2,1_3$	2,2,1	3,1 4 $2,1_4$

其中 1_n 指的是$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n}$.

现在来看一个具体例子.

例 3 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为好映射，可能出现的 Thom 奇点集只能是 $\Sigma^1(f)$. 它可分裂为 $\Sigma^{1,0}(f)$和 $\Sigma^{1,1}(f)$，其余维数分别为 1 和 2. 又 $\Sigma^{1,1}(f)$可分裂为 $\Sigma^{1,1,0}(f)$与 $\Sigma^{1,1,1}(f)$，余维数分别为 2 和 3. 不可能将 $\Sigma^{1,1,1}(f)$再分裂，因为 k 阶 Thom 奇点集 $\Sigma^{1_k}(f)$的余维数为 k(见例 2)，当 $k\geqslant 4$ 时便不再出现. 现在进一步讨论广义 Whitney 映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，定义为

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_2,$$

$$y_3 = x_3^4 + x_1x_3^2 + x_2x_3.$$

容易验证可能出现的 Thom 奇点集由下列方程给定：

$$\Sigma^1(f):\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\Sigma^{1,1}(f):\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0 \text{ 与} \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\Sigma^{1,1,1}(f):\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2} = 0 \text{ 与} \frac{\partial^3 y_3}{\partial x_3^3} = 0.$$

$\Sigma^1(f)$为折叠曲面，$\Sigma^{1,1}(f)$为折叠曲线，$\Sigma^{1,1,1}(f)$则为原点，见图 11.2 所示.

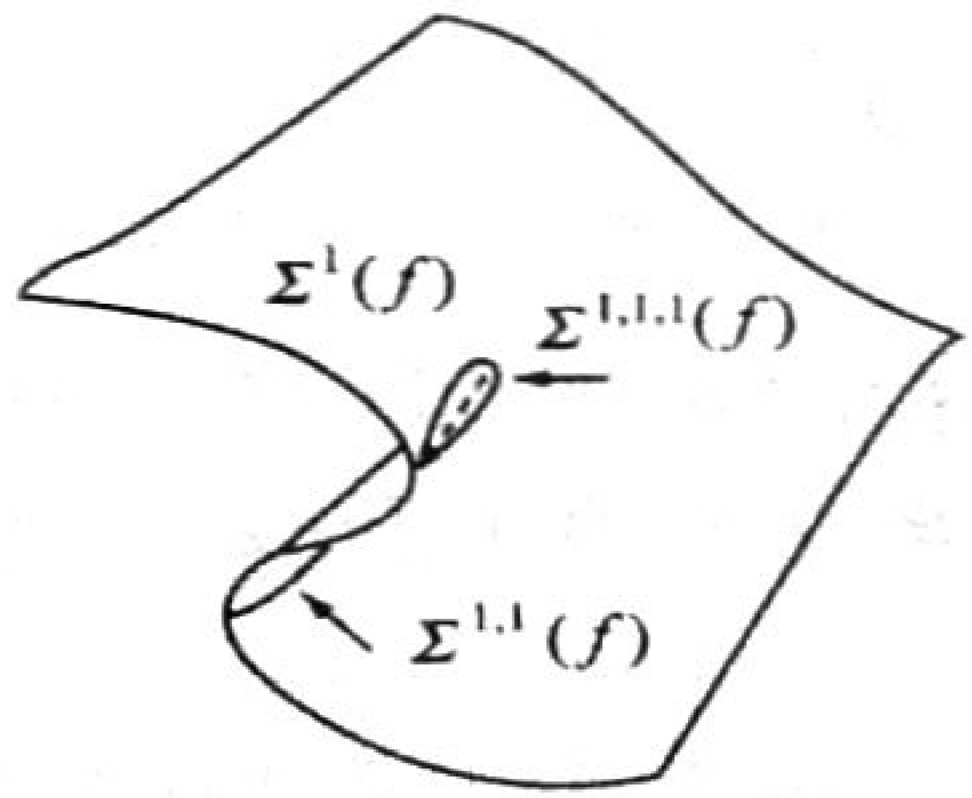

图 11.2

f 的临界值所成曲面叫做燕尾面，如图 11.3 所示. 这一燕尾面可表示为由形如 x^4+ax^2+bx+c 的多项式所组成的三维空间中的曲面 S，该曲面由点(a,b,c)组成，并且要求这些点对应于带有重根的多项式 x^4+ax^2+bx+c. 曲面 S 分多项式空间$\mathbb{R}^3$ 为 3 个区域：在其中一个具有棱锥形状的区域里，多项式有 4 个实根. 而在它下方的区域里只有 2 个实根. 在余下的区域中则无实根. 相应地，在由临界值所界定的区域中，Whitney 映射的原像数目分别为 4,2 和 0.

为了得到燕尾面的图形，我们用平面 $a=$常数来截割它，看看截线是什么曲线.

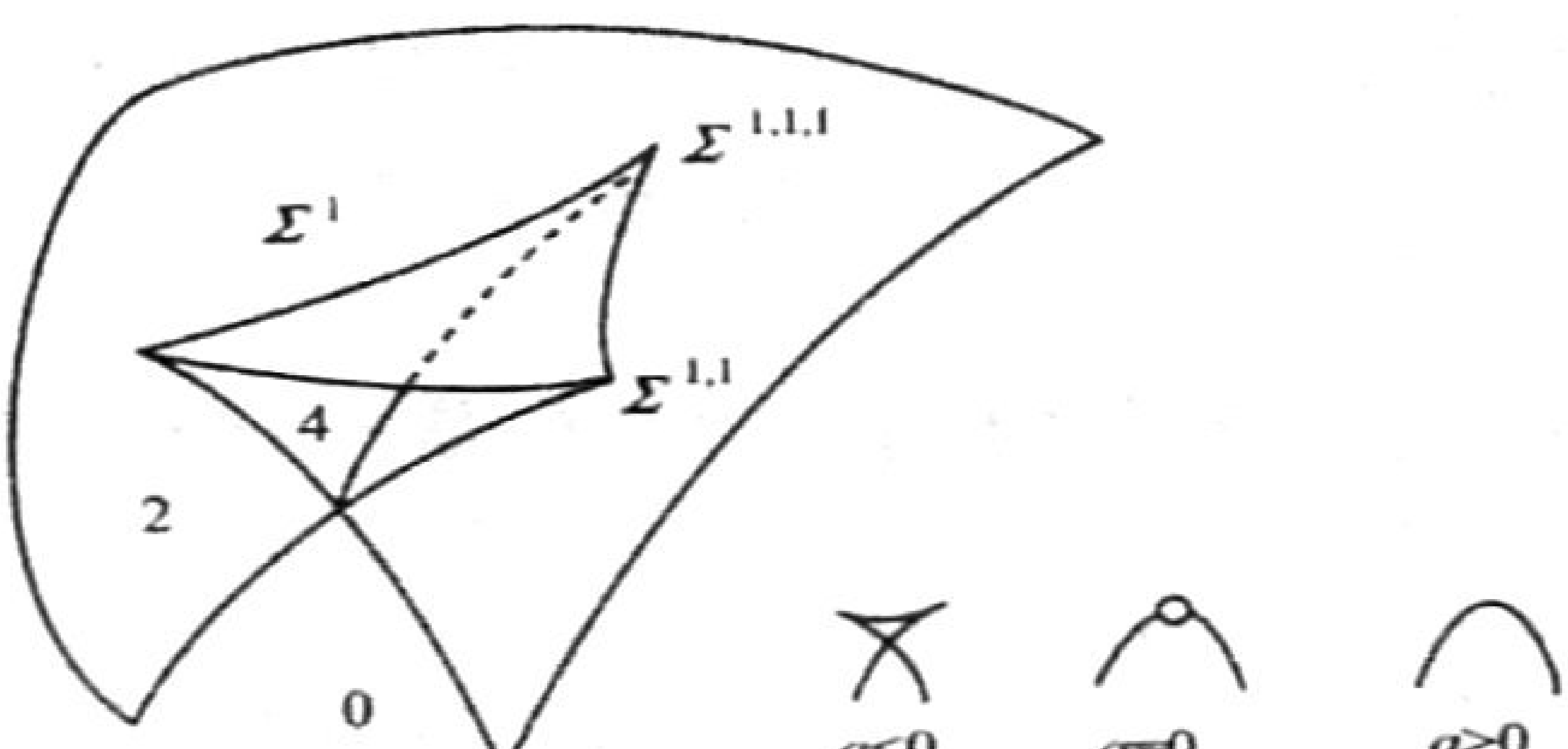

图 11.3

若 t 为多项式的重根，则 $c=-t^4-at^2-bt$，$b=-4t^3-2at$，于是得到截线的参数方程为

$$\begin{cases} c = 3t^4 + at^2 \\ b = -4t^3 - 2at, \end{cases}$$

当 $a=0$ 时，截线为 4/3 次"抛物线"，当 $a>0$ 时则为光滑曲线，而当 $a<0$ 时，它有两个半立方退化点(对应于 $\Sigma^{1,1}$ 类奇点)和一个自相交点.

每一个光滑映射$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 可以用只有 Whitney 奇点 Σ^1(折叠)和 $\Sigma^{1,1}$(尖点)及 $\Sigma^{1,1,1}$(燕尾)的 C^∞ 映射来逼近.

§11.3 Boardman 符号与开折

命题 11.1.2 告诉我们，Boardman 符号是一个接触等价不变量，即接触等价的二映射芽有相同的 Boardman 符号. 本节考虑一映射芽与它的开折的 Boardman 符号之间的关系.

命题 11.3.1 设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$是芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的 r-参数开折，则 f 和 F 具有相同的 Boardman 符号.

证 设 $u_1,\cdots,u_r$ 与 $x_1,\cdots,x_n$ 分别为$\mathbb{R}^r$ 与$\mathbb{R}^n$ 的坐标系. 定义 $G:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$为 $G=1_{(\mathbb{R}^r,0)}\times f$，其中 $1_{(\mathbb{R}^r,0)}$为$(\mathbb{R}^r,0)$上的恒同映射芽. 说得详细些，芽 G 的分量为 $u_1,\cdots,u_r$，$f_1,\cdots,f_p$，其中 $f_1,\cdots,f_p$ 为 f 的分量. 显然 G 是 f 的常值开折. 我们首先证明

1) F 与 G 是 $\mathscr{C}$-等价的. 事实上，F 是 f 的 γ-参数开折，其分量为 $u_1,\cdots,u_r,F_1,\cdots,F_p$，并且

$$F_i(0,\cdots,0,x_1,\cdots,x_n) = f_i(x_1,\cdots,x_n), 1\leqslant i\leqslant p.$$

据定理 1.1.1，

$$F_i = f_i + \sum_{j=1}^{r} u_j h_j, \quad h_j \in \varepsilon_{r+n},$$

由此可知

$$\langle u_1, \cdots, u_r, F_1, \cdots, F_p \rangle \varepsilon_{r+n} = \langle u_1, \cdots, u_r, f_1, \cdots, f_p \rangle \varepsilon_{r+n},$$

即 $I(F)=I(G)$,据推论 8.4.1,$F \underset{\mathscr{C}}{\sim} G$. 依命题 11.1.2,$F$ 与 G 具有相同的 Boardman 符号. 其次证明

2) G 与 f 具有相同的 Boardman 符号. 设 f 的 Boardman 符号为 $(i_1, i_2, \cdots)$. 断言:

(*) 理想 $\Delta^s \Delta^{i_{k-1}} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$ 是由 $u_1, \cdots, u_r$ 和 $\Delta^s \Delta^{i_{k-1}} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$ 生成.

为方便起见,这里令 $i_0 = 0$. 由此立即可推出 $\Delta^{i_k} \Delta^{i_{k-1}} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$ 为临界理想,并且 G 与 f 具有相同的 Boardman 符号. 下证断言 (*).

显然当 $k=0$ 时结论真. 假定对 k,(*)成立. 选取理想 $\Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$ 的一组生成元,将这组生成元关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 Jacobi 矩阵记为 J. 添加 $u_1, \cdots, u_r$ 于取定的这组生成元,将它们关于 $u_1, \cdots, u_r, x_1, \cdots, x_n$ 的 Jacobi 矩阵记为 J^1. 考虑理想 $\Delta^s \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$,它由 $u_1, \cdots, u_r, \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$ 的生成元以及 J^1 的 $(r+n-s+1)$ 阶子式所生成. 由于 J^1 是 r 阶单位矩阵与 J 的直和,因而由 J^1 的 $(r+n-s+1)$ 阶子式生成的理想和 J 的 $(n-s+1)$ 阶子式生成的理想相同. 于是 $\Delta^s \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$ 由 $u_1, \cdots, u_r$, $\Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$ 的生成元以及 J 的 $(n-s+1)$ 阶子式所生成,即它由 $u_1, \cdots, u_r$ 及 $\Delta^s \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$ 所生成.

由 1)和 2),本命题得证.

在本命题意义下,Boardman 符号对映射芽的开折而言是一个不变量.

例 1 设有两个好映射 $F_{\pm}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,定义为

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4, \\ y_4 = x_3 x_4, \end{cases}$$

它们在点 $0 \in \mathbb{R}^4$ 处的芽属于 $\Sigma^{2,0}$类,因为芽 $F_\pm:(\mathbb{R}^4,0)\to(\mathbb{R}^4,0)$ 是芽 $f_\pm:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x_3,x_4)\mapsto(x_3^2\pm x_4^2,x_3x_4)$的 2-参数开折,且 $f_\pm$ 具有 $\Sigma^{2,0}$类奇点(参看§11.1 中例 2).但是芽 F_+ 和 F_- 不是 $\mathscr{A}$-等价的,这说明仅用类 Σ^I 来区分奇点是不够的.

例 2 设芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$带有分量 $F_1,\cdots,F_n$,其中

$$F_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$F_n = x_n^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n^i,$$

它是函数芽 $f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0),x_n \mapsto f(x_n)=x_n^{n+1}$ 的$(n-1)$-参数开折,且芽 f 属于 $\Sigma^{1_n,0}$类,因而 $0\in\Sigma^{1_n,0}(F)$.映射芽 F 叫做广义 Whitney 映射芽.

回忆定理 9.3.1,Morin 的一个结果[58]可陈述为

定理 11.3.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为好映射,则下列断语是等价的:

(i) $x\in\Sigma^{1_n,0}(f)$,

(ii) f 在点 x 处的芽 $\mathscr{A}$-等价于广义 Whitney 映射在点 0 处的芽:

$$y_i = x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$y_n = x_n^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n^i.$$

证明留作练习

定理 11.3.1 说明对于属于类 $\Sigma^{1_n,0}$ 的好映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$,可以用

类 $\Sigma^{1_n,0}$ 来完全刻画(仅相差 $\mathscr{A}$-等价).上节中例 3 给出了它的一个特殊情形.

§11.4 应用:映射芽 $\mathscr{K}$-等价的判别

我们知道命题 8.4.1 及推论 8.4.1 提供了代数判别法用以判断二光滑映射芽是否接触等价,本节的讨论说明使用映射芽的 Boardman 符号也是有效的.

命题 11.4.1 设 C^∞ 芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 具有有限 $\mathscr{K}$-余维,则它的 Boardman 符号必具有形式 $(i_1,\cdots,i_k,0,0,\cdots)$,其中 k 为某一正整数.

证 由假设,f 必为有限 $\mathscr{K}$-决定的映射芽,因而 $\mathscr{K}$-等价于这样一个多项式映射芽 $g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,它的每一分量为次数不大于 k 的多项式,这里 k 为某一正整数.显然,g 的 Boardman 符号具有所要求的形式 $(i_1,\cdots,i_k,0,\cdots,0)$.又因为 Boardman 符号在接触等价下保持不变,故 f 具有与 g 相同的 Boardman 符号.证毕.

命题 11.4.2 设 C^∞ 映射芽 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 属于 Σ^{n-r} 类,$0<r<\min(n,p)$,则存在 $\mathscr{A}$-等价于 G 的 C^∞ 映射芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,使得 F 是某一秩为 0 的芽 $f_0:(\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^{p-r},0)$ 的 r-参数开折.

证 由假设知 G 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 r,即 G 在点 0 的 Jacobi 矩阵

$$\mathrm{D}G(0)=\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(0)\right)$$

的秩为 r.通过对矩阵施行初等变换,这相当于在 G 的源空间与靶空间进行非退化线性坐标变换,使得上述矩阵的左上角 $r\times r$ 子矩阵满秩.把相应于上述坐标变换后的 G 的前 r 个分量仍记为 $G_1,\cdots,G_r$.令 $g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$ 为

$$g(x)=(G_1(x),\cdots,G_r(x)),$$

显然 g 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 r，因而是淹没芽. 根据秩定理，存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$，使得 $g\circ h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$ 为投影 $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n)$. 然后令 $F=G\circ h$. 显然 F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的，并且 F 可写为

$$F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{p-r},0),$$

$$(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_r,f_{r+1}(x_1,\cdots,x_n),\cdots,$$

$$f_p(x_1,\cdots,x_n)).$$

令 $f_0:(\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^{n-p},0)$ 为 F 在 $\{0\}\times\mathbb{R}^{n-r}$ 上的限制，$f_0(x_{r+1},\cdots,x_n)=(f_{r+1}(0,\cdots,0,x_{r+1},\cdots,x_n),\cdots,f_p(0,\cdots,0,x_{r+1},\cdots,x_n))$，则 F 是 f_0 的 r-参数开折，且 f_0 在点 $0\in\mathbb{R}^{n-r}$ 的秩为 0. 证毕.

以下假定映射芽 $(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 具有有限 $\mathscr{K}$-余维. 我们将对几种简单情形进行讨论. 首先考虑 $n=1$, $p\geqslant 2$，此时它的一阶 Boardman 符号为 Σ^0 或 Σ^1. 对于前者，芽是非奇异的并且是浸入芽，其标准形为 $x\mapsto(x,\underbrace{0,\cdots,0}_{p-1})$. 现假定芽属于 Σ^1 类.

命题 11.4.3 设芽 $f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 属 Σ^1 类且具有有限 $\mathscr{K}$-余维，则 f 必为 $\Sigma^{1_k,0}$ 类奇点（k 为某一正整数），并且 $\mathscr{K}$-等价于芽 $(0,\cdots,0,x^{k+1})$.

证 据命题 11.4.1 和引理 11.2.1，f 具有所述的奇点类型. 将 f 的分量 $f_1,\cdots,f_p$ 所生成的理想记为 $I(f)$. 对 k 使用归纳法，容易验证 $\underbrace{\Delta^1,\cdots,\Delta^1}_{k\text{个}}I(f)$ 由 $I(f)$ 及诸导数 $\dfrac{d^jf_i}{\partial x^j}$ 所生成，这里 $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant k$. 由此立即推出 f 属于 $\Sigma^{1_k,0}$ 类当且仅当

1) $\dfrac{\partial^j f_1}{\partial x^j}(0)=0,\cdots,\dfrac{\partial^j f_p}{\partial x^j}(0)=0,\quad j\leqslant k,$

2) 对某一 i, $\dfrac{\partial^{k+1}f_i}{\partial x^{k+1}}(0)\neq 0.$

而条件 1)和 2)等价于 $I(f)=\langle x^{k+1}\rangle$. 此外,由 $g(x)=(0,\cdots,0,x^{k+1})$定义的 $g:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$也有 $I(g)=\langle x^{k+1}\rangle$. 据推论 8.4.1,$f$ 与 g 是 $\mathscr{C}$-等价的. 证毕.

现假定 n 和 p 均不小于 2,那么最简单情形是考察映射芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$,此时可能出现的一阶 Boardman 符号是 Σ^0 和 Σ^1 及 Σ^2. 在第一种情形下,芽是非奇异的. 对于 Σ^1 类的芽,有下列结果.

命题 11.4.4 设芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$属于 Σ^1 类并具有有限 $\mathscr{K}$-余维,则 f 必为$\Sigma^{1_k,0}$类奇点(k 为某一正整数),并且 $\mathscr{K}$-等价于芽(x,y^{k+1}).

证 同上一命题的证明,f 具有所述的奇点类型. 据命题 11.4.2,f $\mathscr{A}$-等价于芽 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$的 1-参数开折 g,并且 f_0 在点 $0\in\mathbb{R}$ 的秩为 0,而命题 11.3.1 说明 f_0 与 g,因而 f_0 与 f 具有相同的 Boardman 符号,因此 f_0 为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点. 此外不难验证 $f_0(y)$ $\mathscr{K}$-等价于 y^{k+1},又 f 显然 $\mathscr{K}$-等价于$(x,f_0(y))$,于是 $\mathscr{K}$-等价于(x,y^{k+1}). 证毕.

接下来考虑属于 Σ^2 类的芽$(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$,可能的二阶 Boardman 符号为 $\Sigma^{2,0}$ 和 $\Sigma^{2,1}$ 及 $\Sigma^{2,2}$,这里只介绍 Mather 关于 $\Sigma^{2,0}$类奇点的完美结果.

定理 11.4.1 设芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$属于 $\Sigma^{2,0}$类,并且它的 $\mathscr{K}$-余维数有限,则它 $\mathscr{K}$-等价于下列芽之一:

$$\mathrm{I}_{a,b}:(xy,x^a+y^b),\ b\geqslant a\geqslant 2,$$

$$\mathrm{II}_{a,b}:(xy,x^a-y^b),\ b\geqslant a\geqslant 2 \text{ 且 } a,b \text{ 为偶数},$$

$$\mathrm{IV}_a:(x^2+y^2,x^a),\ a\geqslant 3.$$

注 我们采用了 Mather 的记号 $I_{a,b}$和 $\mathrm{II}_{a,b}$及 IV_a. 由于他是在更一般的情形下进行讨论,因而在他所列的一览表中还包含了另外的芽,记之为 $\mathrm{III}_{a,b}$和 V_a.

证 因 f 属于$\Sigma^{2,0}$类,f 的分量不含线性项,因此 f 的 2-导网

由一对二元二次型

$$(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2, a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2)$$

组成. 在源平面与靶平面上实施线性坐标变换,可以假定 f 的 2-导网具有下表所列的标准形之一

标准形	$(xy, x^2\pm y^2)$	(xy, x^2)	$(xy, 0)$	$(x^2+y^2, 0)$	$(x^2, 0)$	$(0,0)$
Boardman 符号	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,1}$	$\Sigma^{2,2}$

而 Boardman 符号是 $\mathscr{K}$-不变量,故可以除去表中最后两个标准形,因 f 的第一个分量取 2-导网或为 xy 或为 x^2+y^2,现分别讨论如下:

(i) xy 情形. f 的第一个分量是余秩为 0 的光滑函数芽$(\mathbb{R}^2, 0)\to(\mathbb{R}, 0)$. 由 Morse 引理,这一函数芽 $\mathscr{R}$-等价于 xy. 应用相同的坐标变换于 f,易见 f $\mathscr{K}$-等价于芽$(xy, \zeta(x,y))$,其中 ζ 不含线性项. 据假设 f 具有有限 $\mathscr{K}$-余维,因而是有限 $\mathscr{K}$-决定的,所以可假定 $\zeta(x,y)$是多项式. 由推论 8.4.1 知,$(xy, \zeta(x,y))$和$(xy, \zeta(x,y)-\xi\cdot xy)$是 $\mathscr{C}$-等价的,其中 ξ 为多项式,因此可假定芽具有下列形式:

$$(xy, \alpha(x)+\beta(y)), \tag{1}$$

其中 α, β 为多项式。

假设 $\alpha\neq0$ 含最低次 $a\geqslant2$(即 x^a 是α 中的最低次幂),那么构作坐标变换 $x\mapsto X$,使得 α 变为 $\pm x^a$. 类似地,若 $\beta\neq0$ 含最低次 $b\geqslant2$,则可找到坐标变换$y\mapsto Y$将 β 变为 $\pm y^b$. 注意 x 和 X 生成 ε_1 中相同理想,y 和 Y 也生成 ε_1 中相同理想. 现考虑 α 与 β 的各种可能情形.

i) α, β 同时为 0. 此时(1)式为芽$(xy, 0)$,它的 $\mathscr{K}$-余维数非有限,故删去.

ii) α, β 中只有 1 个为 0. 不妨设 $\alpha\neq0$. 坐标变换 $x\mapsto X$,

$y \mapsto y$使得芽(1)变为$(Xy, \pm x^a)$. 因为 Xy 和 xy 生成相同理想，由推论 8.4.1，$(Xy, \pm x^a)$和(xy, x^a)是 $\mathscr{C}$-等价的，但是芽(xy, x^a)的 $\mathscr{K}$-余维数也不是有限的，因此这一情形可排除掉.

iii) α, β 两者均不为 0. 做坐标变换 $x \mapsto X, y \mapsto Y$ 将(1)式变为$(XY, \pm x^a \pm y^b)$. 因 xy, XY 生成相同理想，据推论 8.4.1，$(XY, \pm x^a \pm y^b)$与$(xy, \pm x^a \pm y^b)$是 $\mathscr{K}$-等价的. 不妨假定 $a \leqslant b$，并且还可用 -1 乘任意一个分量. 此外，若 a 为奇数，做坐标变换 $x \mapsto -x, , y \mapsto y$ 可改变 x^a 的系数符号. 类似地，若 b 为奇数，也可通过坐标变换改变 y^b 的系数符号. 于是除了 x^a 和 y^b 的系数符号相异并且 a, b 两者均为偶数的情形外，得到一个 $\mathrm{I}_{a,b}$ 型的映射芽，否则便得到 $\mathrm{II}_{a,b}$ 型的映射芽.

(ii) $x^2 + y^2$ 情形　基于和情形(i)相同的理由，f 可 $\mathscr{K}$-等价于芽$(x^2 + y^2, \zeta(x, y))$，其中 ζ 为多项式且不含次数不大于 2 的项. 由推论 8.4.1，$(x^2 + y^2, \zeta(x, y))$与$(x^2 + y^2, \zeta(x, y) - \xi \cdot (x^2 + y^2))$是 $\mathscr{C}$-等价的，其中 ξ 为多项式. 特别选取 ξ，使得 $\zeta(x, y) - \xi \cdot (x^2 + y^2)$不含带有因式 y^2 的项，于是可假定 f 具有下列形式：

$$(x^2 + y^2, \alpha(x) + y \cdot \beta(x)), \tag{2}$$

其中 α, β 为多项式. 注意(2)式中的第二个分量不能恒为 0，因$(x^2 + y^2, 0)$的 $\mathscr{K}$-余维数为无穷. 用 $a(\geqslant 3)$表 $\alpha(x) + y \cdot \beta(x)$中的最低次数，因而最低次项为 $px^a + qyx^{a-1}$，其中 p, q 中至少有一个不为 0. 可以假定 $p \neq 0, q = 0$，为此考虑线性坐标变换

$$\begin{cases} X = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

显然 $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$. 利用

$$Y^{2j} \equiv (-1)^j X^{2j} \bmod X^2 + Y^2,$$

直接计算可得到

$$px^a + q \cdot yx^{a-1} \equiv PX^a + QYX^{a-1} \bmod X^2 + Y^2,$$

其中

$$\begin{cases} P = p\cos a\theta + q\sin a\theta, \\ Q = -p\sin a\theta + q\cos a\theta. \end{cases}$$

选取 θ,使得 $P\neq 0, Q=0$,于是芽(2)$\mathscr{K}$-等价于(x^2+y^2, x^a),而这正是所要求的IV_a 型标准形.

第十二章　稳定映射芽的分类

Whitney 曾经证明：$\mathbb{R}^n$ 中的任意闭子集都可以是某个 C^∞ 函数$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的零点集．而将$\mathbb{R}^n$ 映入$\mathbb{R}^p$ 的 C^∞ 映射如果等价，必然具有微分同胚的奇点集，依上述 Whitnty 定理可以推出$\mathbb{R}^n$ 中的任意闭子集可以是某个 C^∞ 映射的奇点集，因此 C^∞ 映射的分类比起$\mathbb{R}^n$ 的所有闭集的分类还要广泛．显然这样的分类难以解决．事实上，人们并不是对所有映射都有兴趣，重要的是稳定的映射及稳定的映射芽．本章着重讨论稳定映射芽．§12.1 刻画稳定映射芽的代数及几何特征，§12.2 陈述了稳定芽的基本分类定理，证明放在§12.3．该定理告诉我们，稳定芽按 $\mathscr{A}$-等价分类可归结为按 $\mathscr{K}$-等价分类．而稳定芽的基本代数分类定理则指出还可以用某种实代数来进行分类．应用稳定芽分类的基本理论以及映射芽的 Boardman 符号，在§12.4 中给出了稳定芽分类的几个具体例子．最后一节介绍稳定映射，具体讨论了某些稳定映射可能出现的各种奇点类型．

§12.1　稳定映射芽的特征

我们知道 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$是稳定的当且仅当它是无穷小稳定的，即

$$T_e\mathscr{A}(f) = \varepsilon(n,p),$$

其中 $T_e\mathscr{A}(f)$表示 $\varepsilon(n,p)$在群 $\mathscr{A}$ 作用下于 f 处的切空间．本节将介绍一些有效的方法来检验这一条件，描述稳定映射芽的特征．

12.1.1　稳定映射芽的秩

命题 12.1.1　设稳定映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$在点 $0\in\mathbb{R}^n$

的秩为 r，则映射 $j_0^1 f:(\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{1,0}$, $x\mapsto j_0^1 f(x)=\mathrm{D}f(x)$ 在点 0 横截于子流形 $\Sigma^{n-r}\subset J_{n,p}^{1,0}$.

证明留作练习.

推论 12.1.1 设 $f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$ 为稳定芽，其秩为 r，则

$$(n-r)(p-r)\leqslant n. \tag{1}$$

证 由命题 12.1.1，$\mathrm{Codim}\Sigma^{n-r}\leqslant n$，即 $(n-r)\cdot(p-r)\leqslant n$.

例 1 若稳定芽 $f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$ 的秩 $r=0$，则由不等式(1)知，$p=1$. 此时 f 必为 Morse 芽(见 §2.5).

例 2 不等式(1)对稳定芽 f 的秩 r 给出了较强的限制，例如

1) 若 $n=p=2$，则 $r\geqslant 1$.

2) 若 $n=p=3$ 或 $n=p=4$，则 $r\geqslant 2$.

3) 若 $n=2$，$p=3$，则 $r\geqslant 1$.

命题 11.4.2 告诉我们，秩为 r 的映射芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 可看作是秩为 0 的映射芽 $f_0:(\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^{p-r},0)$ 的 r-参数开折(严格地说，相差一 $\mathscr{A}$-等价)，因此自然考虑下面的问题：F 的稳定性能否用 f_0 以及 F 的初始速度所具有的性质来予以描述呢?

12.1.2 稳定映射芽的判别

定理 12.1.1 设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$, $(u,x)\mapsto(u,f(u,x))$ 是芽

$$f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),\quad f_0(x)=f(0,x)$$

的 r-参数开折，则 F 为稳定芽当且仅当

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\varepsilon_p\{\dot F_1,\cdots,\dot F_r\}=\varepsilon(n,p), \tag{2}$$

这里 $\dot F_i(x)=\dfrac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)$ 表 F 的初始速度($i=1,\cdots,r$).

证 我们知道 F 的稳定性等价于它的无穷小稳定性，即

$$T_e\mathscr{A}(F)=(\varepsilon_{u,x})^{\times(r+p)}, \tag{3}$$

其中 $\varepsilon_{u,x}$(及 $\varepsilon_{u,y}$)表示$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$(及$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$)上的函数芽

环.

将$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$上的向量场芽 $\overline{X}$ 记为

$$\overline{X}=\begin{bmatrix}\xi\\ X\end{bmatrix},$$

其中 ξ 为 $\overline{X}$ 在参数空间$\mathbb{R}^r$ 中的分量,X 为 $\overline{X}$ 在$\mathbb{R}^n$ 中的分量.类似地,$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$上的向量场芽 $\overline{Y}$ 写为

$$\overline{Y}=\begin{bmatrix}\eta\\ Y\end{bmatrix},$$

其中 η 和 Y 分别为 $\overline{Y}$ 在$\mathbb{R}^r$ 和$\mathbb{R}^p$ 中的分量.

条件(3)意指对任意 $\bar{Z}=\begin{bmatrix}\zeta\\ Z\end{bmatrix}\in(\varepsilon_{u,x})^{\times(r+p)}$,其中 ζ、Z 分别为$\bar{Z}$ 在$\mathbb{R}^r$ 和$\mathbb{R}^p$ 中的分量,下列方程

$$\mathrm{D}F\cdot\hat{\overline{X}}+\overline{Y}\circ F=\bar{Z}\tag{4}$$

有解 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$,该方程可写成下列形式:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}&I&&&0&\\ \hdashline \dfrac{\partial f}{\partial u_1}&\cdots&\dfrac{\partial f}{\partial u_r}&\dfrac{\partial f}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\xi\\ X\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta\circ F\\ Y\circ F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\zeta\\ Z\end{bmatrix},$$

或

$$\begin{cases}\xi+\eta\circ F=\zeta,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\xi_i\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\xi=\zeta-\eta\circ F,\\ \displaystyle-\sum_{i=1}^{r}(\eta_i\circ F)\cdot\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z-\sum_{i=1}^{r}\zeta_i\frac{\partial f}{\partial u_i},\end{cases}$$

其中 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\in(\varepsilon_{u,x})^{\times r}$，$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_r)\in(\varepsilon_{u,y})^{\times r}$，$X=(X_1,\cdots,X_n)\in(\varepsilon_{u,x})^{\times n}$.

由上可见，方程(4)对任意 $\bar{Z}$ 有解 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 当且仅当下列方程

$$-\sum_{i=1}^{r}(\eta_i\circ F)\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z \tag{5}$$

对任意 $Z\in(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$ 有解 (X,Y,η). 而集

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F\,\middle|\,X_j\in\varepsilon_{u,x},Y\in(\varepsilon_{u,y})^{\times p}\right\}=\widetilde{T_e}\mathscr{A}(F)$$

(参看§9.2)，于是条件(5)指的是商

$$M=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}\Big/\widetilde{T_e}\mathscr{A}(F)$$

作为 $\varepsilon_{u,y}$-模是有限生成的，生成元为 $\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}$. 利用定理 5.3.3，它等价于

$$M_0=M\Big/\mathscr{M}_u\cdot M\cong(\varepsilon_x)^{\times p}\Big/T_e\mathscr{A}(f_0)$$

作为 ε_y-模是有限生成的，生成元为 $\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)=\dot{F}_i(x)(i=1,\cdots,r)$，而这恰好是条件(2).

注 依定义 8.2.7，条件(2)说明 $f_0\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$ 是一个有限奇点型的映射芽.

例 3 设 $f_0\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$ 具有有限 $\mathscr{A}$-余维. 据 $\mathscr{A}$-通用开折定理 9.1.1，f_0 有 $\mathscr{A}$-通用开折 F，设 F 带有 r 个参数，于是有

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon(n,p).$$

据定理 12.1.1，F 是稳定芽. 这说明 f_0 的每一个 $\mathscr{A}$-通用开折均为稳定映射芽.

例 4 设 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$，$x\mapsto(x^2,0)$，它是§8.3 中例

1. 我们已证明

$$T_e\mathscr{A}(f_0) + \varepsilon_2 \cdot h = \varepsilon(1,2), \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix},$$

它说明 f_0 是 FST. 据定理 12.1.1, f_0 的 1-参数开折

$$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,0),(u,x)\mapsto(u,x^2,ux)$$

是一个稳定芽,称为"Whitney 伞".

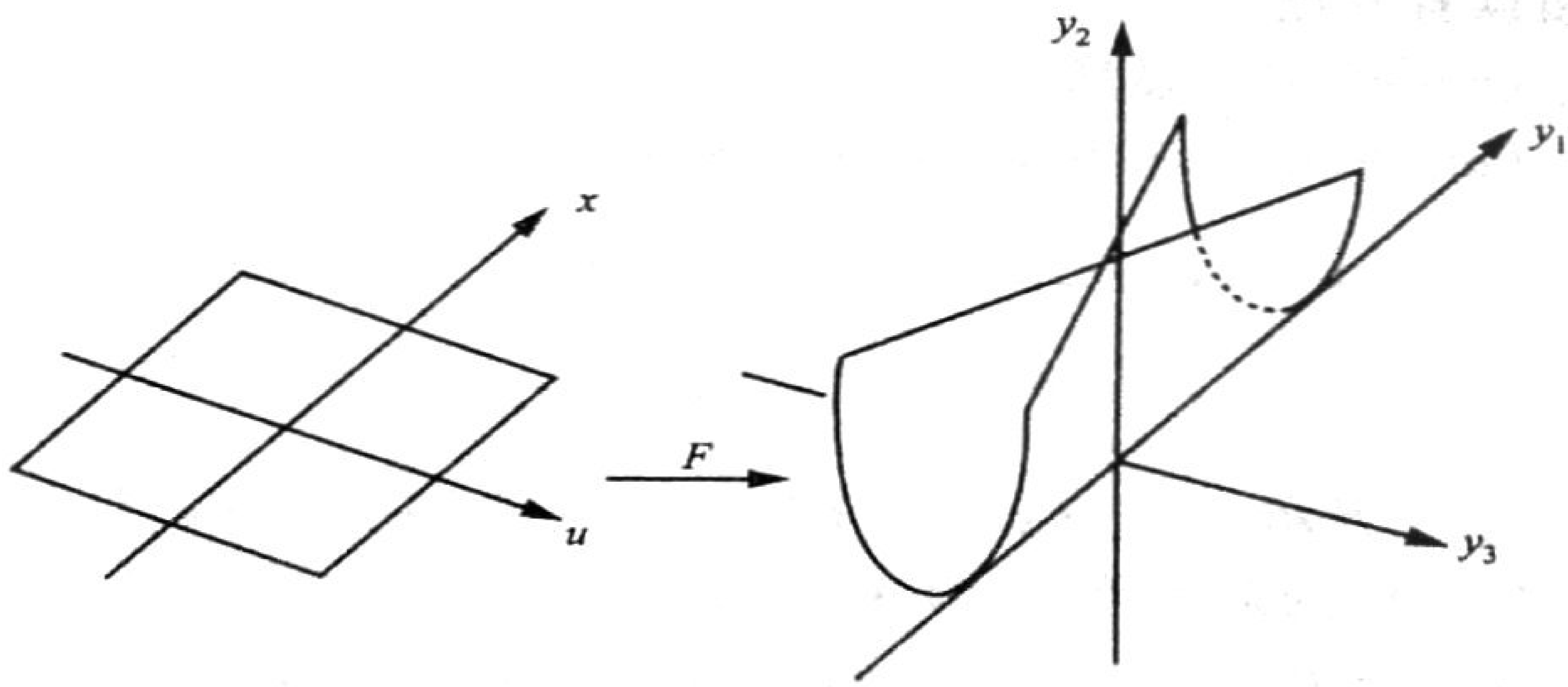

图 12.1

例 5 设 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 定义为 $f_0(x,y)=(x^2,y^2)$,这是 §8.3 中例 3,已证明

$$T_e\mathscr{A}(f_0) + \varepsilon_2\{h_1,h_2\} = \varepsilon(2,2),$$

其中 $h_1=\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, h_2=\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$. 据定理 12.1.1, f_0 的 2-参数开折

$$F:(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0),$$

$$(u,v,x,y)\mapsto(u,v,x^2+uy,y^2+vx)$$

是稳定芽.

定理 12.1.2 设 $F(u,x)=(u,f(u,x))$是 $f_0(x)\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$的 r-参数开折,又 f_0 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 0 并且 $\dot{F}_i(0)=0(i=1,\cdots,r)$,则下列条件是等价的:

(i) F 是稳定芽,

(ii) $T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^{\circ}(n,p)$,

(iii) $T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^{\circ}(n,p)$.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 据定理 12.1.1 和定理 10.6.1(i)$\Leftrightarrow$(ii),细节留给读者补述.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 显然.

(iii)$\Rightarrow$(ii) 考虑 ε_n-模的下降序列

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\circ}(n,p)\underset{c_1}{\supset}\mathscr{M}_n\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)+T_e\mathscr{K}(f_0)\underset{c_2}{\supset}\cdots\\ \underset{c_{r+1}}{\supset}\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)+T_e\mathscr{K}(f_0)\end{aligned}$$

其中 c_{i+1} 表示 $\mathscr{M}_n^{i+1}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)+T_e\mathscr{K}(f_0)$在 $\mathscr{M}_n^{i}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)+T_e\mathscr{K}(f_0)$中的余维数($i=0,1,\cdots,r$).

a) $c_i=0$,据 Nakayama 引理,有 $T_e\mathscr{K}(f_0)\supset\mathscr{M}_n^{i-1}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)$,因而 $c_{i+1}=c_{i+2}=\cdots=0$.

b) $\operatorname{Codim}(\mathscr{M}_n^{i}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)+T_e\mathscr{K}(f_0))=c_1+\cdots+c_i$.

现在依条件(iii)可推得 $\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)+T_e\mathscr{K}(f_0)$具有余维数不大于 r,所以按照 b)应有 $c_1+\cdots+c_{r+1}\leqslant r$.再根据 a)必有 $c_{r+1}=0$,于是 $T_e\mathscr{K}(f_0)\supset\mathscr{M}_n^{r}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)$,并且(iii)$\Rightarrow$(ii).

由上述定理中(iii)容易得到下面的

推论 12.1.2 设稳定芽 F 在点 $0\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 的秩为 r,则满足 $j^{r+2}G=j^{r+2}F$ 的每一芽 G 都是稳定的.

证明留作练习.

12.1.3 稳定映射芽的几何特征

设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,f_u(x)=f(u,x))$是芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),f_0(x)=f(0,x)$的 r-参数开

析，f_0 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 0，又 $\dot{F}_i(0)=0(i=1,\cdots,r)$.

对任意正整数 s，定义 $j_0^s f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{s,0}$ 为

$$j_0^s f(u,x) = (f_u - f_u(x)) \text{ 的 } s \text{ 阶 Taylor 多项式}.$$

定理 12.1.3 设 F,f_0 如上所述，则 F 是稳定芽当且仅当 $j_0^{r+1}f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{r+1,0}$ 在 $\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 的原点横截于接触轨道 $\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0\subset J_{n,p}^{r+1,0}$.

证 据定理 12.1.2，F 是稳定芽当且仅当

$$T\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\}+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)=\varepsilon^\circ(n,p). \tag{6}$$

$j_0^{r+1}f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{r+1,0}$ 在点 $(0,0)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 横截于 $\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0$ 是指

$$\mathrm{D}j_0^{r+1}f(0,0)(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n)+T_{j^{r+1}f_0}(\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0)=J_{n,p}^{r+1,0}, \tag{7}$$

而

$$\mathrm{D}j_0^{r+1}f(0,0)(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}\left\{\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_r},\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_n}\right\},$$

其中括号内的所有导数均在点 $(0,0)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 取值. 注意到

$$\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_i}(0,0)=j^{r+1}\dot{F}_i,\quad i=1,\cdots,r,$$

$$\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_j}(0,0)=j^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_j},\quad j=1,\cdots,n,$$

又据命题 8.4.4，

$$T_{j^{r+1}f_0}(\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0)=j^{r+1}(T\mathscr{K}(f_0)),$$

所以条件(7)等价于

$$j^{r+1}(T\mathscr{K}(f_0)) + \mathbb{R}\left\{j^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, j^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_n}, j^{r+1}\dot{F}_1, \cdots, j^{r+1}\dot{F}_r\right\} = J_{n,p}^{r+1,0}. \tag{8}$$

在(6)式两边取$(r+1)$-导网得(8)式. 又(8)式可写为

$$j^{r+1}\left(T\mathscr{K}(f_0) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}, \dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_r\right\}\right) = j^{r+1}(\varepsilon^\circ(n,p))$$

故由(8)式可得到(6)式,从而(6)$\Leftrightarrow$(7).

§12.2　稳定芽的基本分类定理

设 $F,G:(\mathbb{R}^{r+n},0)\to(\mathbb{R}^{r+p},0)$是两个稳定芽,如果它们在原点的秩不相等,显然不可能 $\mathscr{A}$-等价,因此利用秩可以区分稳定芽. 以下假定稳定芽 $F,G\in\varepsilon^\circ(r+n,r+p)$在原点具有相同的秩 $r\geqslant 0$. 问:在什么条件下,F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价呢? 为寻求有效的判别法,首先将 F 和 G 看成是$\varepsilon^\circ(n,p)$中成员的 r-参数开折. 更精确地说,以下总假定

$$F(u,x) = (u,f(u,x)), f_u(x) = f(u,x),$$

$$G(u,x) = (u,g(u,x)), g_u(x) = g(u,x),$$

其中 $u\in\mathbb{R}^r, x\in\mathbb{R}^n, f(u,x), g(u,x)\in\mathbb{R}^p$,并且 $f_0, g_0\in\varepsilon^\circ(n,p)$在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 0. 另外还假定开折的初始速度 $\dot{F}_i, \dot{G}_j\in\varepsilon^\circ(n,p)$. 令 $\varepsilon^\circ(r+n,r+p)$中的子集

$$S(r,n,p) = \{F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$$
$$\text{为稳定芽,且 } rk_0 F = r\}.$$

对于 $F\in S(r,n,p)$,据定理 12.1.2,由 $f_0(x)=f(0,x)$定义的 $f_0\in\varepsilon^\circ(n,p)$满足

$$T_e\mathscr{K}(f_0) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_r\} = \varepsilon^\circ(n,p),$$

或

$$T\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\}=\varepsilon^\circ(n,p),$$

因此 $T\mathscr{K}(f_0)$ 在 $\varepsilon^\circ(n,p)$ 中的余维数不大于 $n+r$. 令 $\varepsilon^\circ(n,p)$ 中的子集

$$K(r,n,p)=\{f\in\varepsilon^\circ(n,p)\mid rk_0 f=0,$$

$$\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon^\circ(n,p)/T\mathscr{K}(f_0)\leqslant r+n\}.$$

定理 12.2.1 稳定映射芽 F 是与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的当且仅当 f_0 和 g_0 是 $\mathscr{K}$-等价的.

该定理表明, 对应

$$S(r,n,p)\to K(r,n,p),\ F\mapsto f_0,$$

诱导出 $S(r,n,p)$ 中成员的 $\mathscr{A}$-等价类所成之集到 $K(r,n,p)$ 中成员的 $\mathscr{K}$-等价类所成之集的双射. 本定理称为稳定芽的基本分类定理, 由 Mather 获得, 证明放在下一节.

定理 12.2.2 $S(r,n,p)$ 中的每一芽 F 和它在点 $0\in\mathbb{R}^{r+n}$ 的 $(r+2)$ 阶 Taylor 多项式芽是 $\mathscr{A}$-等价的.

证 任取 $F\in S(r,n,p)$, 相应的 $f_0\in K(r,n,p)$. 据定理 12.1.2,

$$T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^\circ(n,p),$$

并且从该定理证明过程中得到

$$T_e\mathscr{K}(f_0)\supset\mathscr{M}_n^r\cdot\varepsilon^\circ(n,p)=\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon(n,p),$$

于是更有

$$T\mathscr{K}(f_0)\supset\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p).$$

据定理 10.3.1, f_0 是 $(r+2)$-$\mathscr{K}$-决定的, 因而 f_0 与它的 $(r+2)$ 阶 Taylor 多项式 $j^{r+2}f_0$ 是 $\mathscr{K}$-等价的. 另外, 由推论 12.1.2, $j^{r+2}F$ 是

稳定的,并且它是 $j^{r+2}f_0$ 的 r-参数开折.那么根据定理 12.2.1,F 与 $j^{r+2}F$ 必 $\mathscr{A}$-等价.证毕.

现在介绍一种求标准形的方法.所谓求标准形是对 $S(r,n,p)$中的映射芽,在每一个 $\mathscr{A}$-等价类里选一个代表元,并选取适当的坐标系,使得这个代表元有简单的代数表达式.为此,首先对 $K(r,n,p)$中的每一 $\mathscr{K}$-等价类(即 $\mathscr{K}$-轨道)选取一个次数不大于 $r+2$的多项式代表元 f(并且要求它尽可能简单).然后对每一个这样的 f,在 $\varepsilon^\circ(n,p)$中选取 $g_1,\cdots,g_r$,要求它们是次数不大于 $r+2$的多项式,并且满足

$$T_e\mathscr{K}(f)+\mathbb{R}\{g_1,\cdots,g_r\}=\varepsilon^\circ(n,p).$$

最后作线性开折

$$F(f):(u,x)\mapsto(u,f(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ig_i(x)),$$

依定理 12.1.2,$F(f)$是稳定芽.

定理 12.2.1 说明上述办法至少在理论上可以提供 $S(r,n,p)$的所有标准形.

由于按 $\mathscr{K}$-等价分类映射芽比按 $\mathscr{A}$-等价分类要容易,下面就 $K(r,n,p)$进一步考虑按 $\mathscr{K}$-轨道分类问题.命题 8.4.1 告诉我们,二映射芽 $f,g\in\varepsilon^\circ(n,p)$属于同一条 $\mathscr{K}$-轨道当且仅当存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得 $h^*(g^*\mathscr{M}_p)=f^*\mathscr{M}_p$.

现假定 $f\in\varepsilon^\circ(n,p)$为 FST.据定理 10.6.1,存在 k,使得

$$T\mathscr{K}(f)\supset\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p),$$

依定理 10.3.1,f 是 k-$\mathscr{K}$-决定的.

命题 12.2.1 设 $f\in\varepsilon^\circ(n,p)$满足

$$T\mathscr{K}(f)\supset\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p),\qquad k\geqslant 1,$$

则轨道 $\mathscr{K}\cdot f$ 由满足下列条件的映射芽 $g\in\varepsilon^\circ(n,p)$组成,该条件为:理想 $j^k(g^*\mathscr{M}_p)$与 $j^k(f^*\mathscr{M}_p)$在代数 J_n^k 中是同构的.

令

$$Q_k(f) = J_n^k/j^k(f^* \mathcal{M}_p),$$

显然 $Q_k(f)=\varepsilon_n/(\langle f_1,\cdots,f_p\rangle+\mathcal{M}_n^{k+1})$是有限维实代数.

推论 12.2.1 在命题 12.2.1 的假设条件下,轨道 $\mathcal{K}\cdot f$ 可写为

$$\mathcal{K}\cdot f = \{g\in\varepsilon^\circ(n,p)\mid Q_k(g)\cong Q_k(f)\}.$$

上述二结论的证明留作练习.

现回到原来的问题.设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,y=f(u,x))$是芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),f_0(x)=f(0,x)$的 r-参数开折.令

$$Q(F) = \varepsilon_{u,x}/F^* \mathcal{M}_{u,y},$$

$$Q(f_0) = \varepsilon_x/f_0^* \mathcal{M}_y.$$

显然 $Q(F)\cong Q(f_0)$,因为 $\varepsilon_{u,x}/F^*\mathcal{M}_{u,y}\cong\varepsilon_x/f_0^*\mathcal{M}_y$.

定理 12.2.3 设 $F,G\in S(r,n,p)$,则 F 与 G 是 $\mathcal{A}$-等价的当且仅当实代数 $Q_{r+2}(F)$与 $Q_{r+2}(G)$是同构的.

证明留作练习.

本定理称为稳定芽的基本代数分类定理,也是 Mather 获得的又一深刻结果(参见文献[49]).

§12.3 定理 12.2.1 的证明

12.3.1 嵌入开折中的映射芽

设 C^∞ 芽 $G:(\mathbb{R}^{r+n},0)\to(\mathbb{R}^{r+p},0)$在点 O 的秩为 r,$\Sigma_p\subset\mathbb{R}^{r+p}$是余维为 r 的子流形芽且包含点 $0\in\mathbb{R}^{r+p}$.若 Σ_p 与子空间 $\mathrm{Im}DG(0)\subset\mathbb{R}^{r+p}$在点 O 相横截,即 $G\pitchfork_0\Sigma_p$,则 $G^{-1}(\Sigma_p)=\Sigma_n$ 是 $\mathbb{R}^{r+n}$中包含原点的子流形芽,其余维数为 r.显然 Σ_n 在点 0 的切

空间 $T_0\Sigma_n=\mathrm{KerD}G(0)$. 令

$$g = G|\Sigma_n:(\Sigma_n,0)\to(\Sigma_p,0),$$

g 在点 0 的秩为 0. 注意 Σ_n 和 Σ_p 分别为$\mathbb{R}^{r+n}$与$\mathbb{R}^{r+p}$中的 n 维和 p 维子流形,选取 Σ_n 与 Σ_p 中的局部坐标,g 确定一个从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的映射芽. 按以上这种方式确定的每一个映射芽($\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$)叫做嵌入 G 中的映射芽.

现设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,y=f(u,x))$为芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),f_0(x)=f(0,x)$的 r-参数开折,以下总假定

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,0) = 0,$$

几何上它表示$\mathbb{R}^r\times\{0\}\subset\mathrm{ImD}F(0,0)$.

嵌入开折 F 中的每一芽$g\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$可依下列方式得到. 假设$\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p$ 中的 p 维子流形芽Σ_p 包含原点且横截于$\mathbb{R}^r\times\{0\}$,那么 Σ_p 可用下列方程来确定

$$u = \Psi(y),\ \Psi:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^r,0), \tag{1}$$

于是 $\Sigma_n=F^{-1}(\Sigma_p)$是$\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 中包含原点的 n 维子流形芽,它可由下列隐方程来确定

$$u = \Psi(f(u,x)), \tag{2}$$

该方程具有形如

$$u = \phi(x),\ \phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r,0) \tag{3}$$

的惟一解. 令

$$g = F\mid\Sigma_n:(\Sigma_n,0)\to(\Sigma_p,0),$$

利用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,\cdots,y_p)$分别作为 Σ_n 与 Σ_p 的局部坐标,那么 g 可写为

$$g(x) = f(\phi(x),x). \tag{4}$$

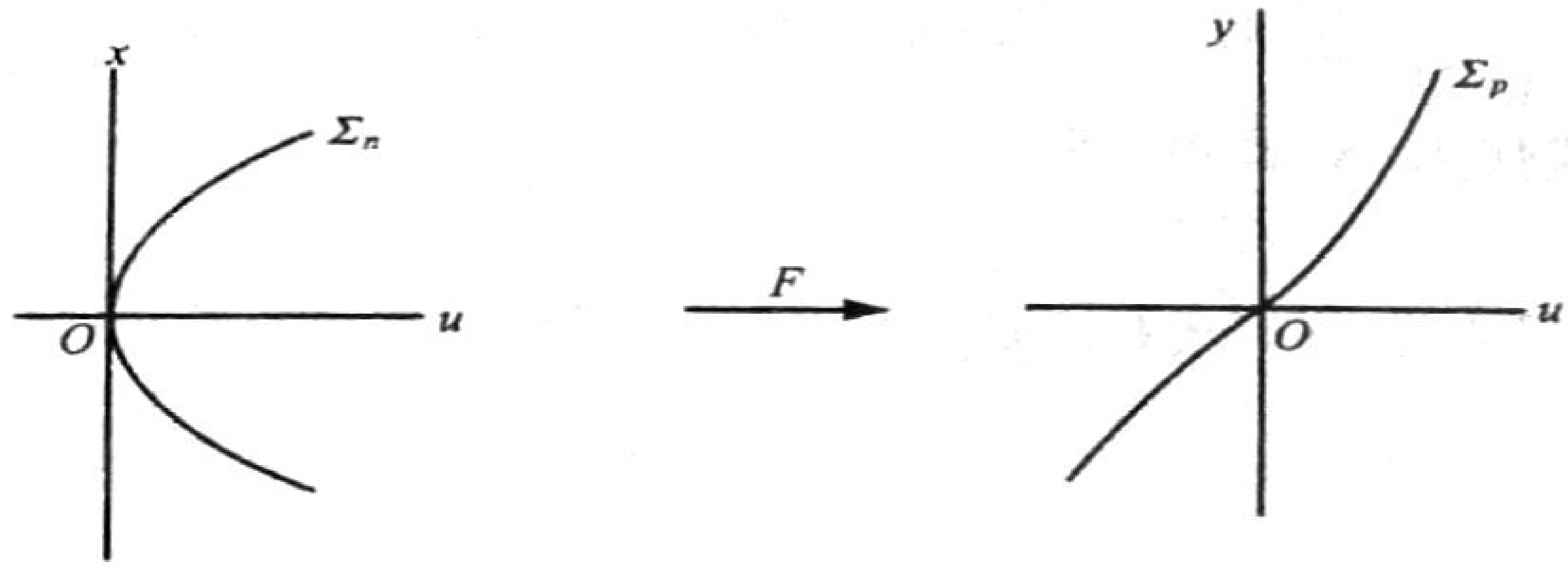

图 12.2

命题 12.3.1 设 F, f_0, g 如上所述,其中 F 为 f_0 的 r-参数开折,g 为嵌入开折 F 中的芽,则

$$g^* \mathcal{M}_p = f_0^* \mathcal{M}_p.$$

证 设 $f=(f_1,\cdots,f_p)$,$f_0=(f_{0,1},\cdots,f_{0,p})$,$g=(g_1,\cdots,g_p)$,则有

$$f_i(u,x) = f_{0,i}(x) + \sum_{j=1}^{r} u_j \cdot f_{ij}(u,x) \quad i = 1,\cdots,p.$$

依(4)式,有

$$g_i(x) = f_i(\phi(x),x) = f_{0,i}(x) + \sum_{j=1}^{r} \phi_j(x) \cdot f_{ij}(\phi(x),x),$$
$$i = 1,\cdots,p, \tag{5}$$

又

$$\Psi_i(y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \cdot \Psi_{ij}(y), \quad i = 1,\cdots,r.$$

由(2)与(3)式,得

$$\phi_j(x) = \Psi_j(f(\phi(x),x)) = \Psi_j(g(x))$$

$$= \sum_{k=1}^{p} g_k(x) \Psi_{jk}(g(x)), \qquad j = 1, \cdots, r,$$

将上式代入(5)式中，得

$$g_i(x) = f_{0,i}(x) + \sum_{k=1}^{p} g_k(x) \cdot h_{ik}(x), \qquad i = 1, \cdots, p, \tag{6}$$

其中 $h_{ik}(x) = \sum_{j=1}^{r} \Psi_{jk}(g(x)) \cdot f_{ij}(\phi(x), x)$. 因 $f_{ij}(0) = 0$，故 $h_{ik}(0) = 0$. 现把方程(6)写成矩阵形式，

$$(I - H) \cdot g = f_0,$$

其中 I 为 $p \times p$ 单位矩阵，$H(x) = (h_{ik}(x))_{1 \leqslant i,k \leqslant p}$ 且 $H(0) = (h_{ik}(0))$ 为 $p \times p$ 零矩阵，于是 $I - H$ 是可逆矩阵，从而命题得证.

推论 12.3.1 设 F 是 $f_0 \in \varepsilon^{\circ}(n, p)$ 的 r-参数开折，则嵌入 F 中的每一映射芽 $g \in \varepsilon^{\circ}(n, p)$ 必 $\mathscr{K}$-等价于 f_0.

定理 12.2.1 的必要性证明 设 $F, G \in S(r, n, p)$，它们分别是 f_0 与 g_0 的 r-参数开折. 显然 $f_0, g_0 \in K(r, n, p)$. 若 G 与 F 是 $\mathscr{A}$-等价的，则 g_0 是嵌入 F 中的映射芽. 据推论 12.3.1，g_0 必 $\mathscr{K}$-等价于 f_0.

12.3.2 基本引理及推论

为证明定理 12.2.1 的充分性，还需作如下准备，先介绍有关记号.

如通常一样，用 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$ 及 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$ 表 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$ 和 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$ 上的函数芽环. 由坐标函数 $u_1, \cdots, u_r, x_1, \cdots, x_n$ 所生成的 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$ 中的理想记为 $\mathscr{M}_{u,x} \cdot \varepsilon_{\lambda,u,x}$. 类似地，环 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$ 中的理想 $\mathscr{M}_{u,y} \cdot \varepsilon_{\lambda,u,y}$ 由 $u_1, \cdots, u_r, y_1, \cdots, y_p$ 生成.

引理 12.3.1 设 $f_0 \in K(r, n, p)$. 假定

$$F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$

$$(\lambda, u, x) \mapsto (\lambda, u, f(\lambda, u, x))$$

是 f_0 的 $(r+1)$-参数开折(因而 $f_0(x)=f(0,0,x)$),使得

$$F_0:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$

$$(u, x) \mapsto (u, f(0, u, x))$$

是 f_0 的稳定开折,那么

$$\mathscr{M}_{u,x} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + \mathscr{M}_{u,y} \cdot \left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\}$$

$$= \mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + F^* \mathscr{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\},$$

其中 $\mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ 表示 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$-子模,由诸 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 的线性组合组成,系数取自 $\mathscr{M}_{u,x} \cdot \varepsilon_{\lambda,u,x}$, $\mathscr{M}_{u,y}\left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\}$ 表示有限生成的 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模, $e_1, \cdots, e_p$ 为 $\mathbb{R}^p$ 的标准基. 又 $F^* \mathscr{M}_{u,y}$ 表示由 $u_1 \cdots, u_r, f_1, \cdots, f_p$ 生成的环 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$ 中的理想, $f_1, \cdots, f_p$ 为 f 的分量. 显然 $F^* \mathscr{M}_{u,y} \subset \mathscr{M}_{u,x}$,因而 $F^* \mathscr{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}$ 是 $(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}$ 的 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$-子模.

证 据定理 12.1.1, F_0 是稳定的当且仅当

$$T_e \mathscr{A}(f_0) + \varepsilon_p\{\dot{F}_{0,1}, \cdots, \dot{F}_{0,r}\} = \varepsilon(n, p), \tag{7}$$

其中 $T_e \mathscr{A}(f_0) = \varepsilon_x\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\} + \varepsilon_y\{e_1, \cdots, e_p\}$, $\dot{F}_{0,i}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(0,0,x)$,因而(7)式可写为

$$\varepsilon_x\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\} + \varepsilon_y\{e_1, \cdots, e_p, \dot{F}_{0,1}, \cdots, \dot{F}_{0,r}\} = (\varepsilon_x)^{\times p}. \tag{8}$$

令

$$M = (\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p} \Big/ \varepsilon_{\lambda,u,x} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},$$

它是有限生成的 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$-模. 借助于 F^*, M 可视为 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模. 又令

$$M_0 = M/\mathscr{M}_{\lambda,u} \cdot M \cong (\varepsilon_x)^{\times p} \Big/ \varepsilon_x \cdot \left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\},$$

它是有限生成的 ε_x-模,借助于环同态 f_0^*,可看作是 ε_y-模. 由条件(8)知,M_0 是有限生成的 ε_y-模,根据定理 5.3.3,M 必为有限生成的$\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模,并且有

$$\varepsilon_{\lambda,u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + \varepsilon_{\lambda,u,y}\left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\} = (\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}. \tag{9}$$

将上式两边均看作 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模,用 $\mathscr{M}_{u,y}$ 乘(9)式两边,并注意到 $F^*\mathscr{M}_{u,y} = \mathscr{M}_{u,y} \cdot \varepsilon_{\lambda,u,x}$,有

$$\begin{aligned} F^*\mathscr{M}_{u,y} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} &+ \mathscr{M}_{u,y}\left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\} \\ &= F^*\mathscr{M}_{u,y}(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p} = F^*\mathscr{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}, \end{aligned}$$

再将 $\mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ 添加于上式两边,并注意 $\mathscr{M}_{u,x} \supset F^*\mathscr{M}_{u,y}$,便得到本引理.

现考虑这一引理的几何意义. 假设开折 F 的速度$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$满足下列条件:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \in \mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + F^*\mathscr{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}. \tag{10}$$

特别,$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,0,0) = 0$ 对所有 λ 皆成立,因而 $f(\lambda,0,0) = 0$. 于是

对每一 $\lambda\in\mathbb{R}$,映射芽

$$F_\lambda:(u,x)\mapsto(u,f(\lambda,u,x))$$

满足 $F_\lambda(0,0)=(0,0)$,F_λ 可以看作是$\varepsilon^\circ(r+n,r+p)$中一元.

推论 12.3.2 条件如引理 12.3.1 所述,另外还假定(10)式成立.那么对充分小的 λ,F_λ 必 $\mathscr{A}$-等价于 F_0.

证 F 可看作 F_0 的 1-参数开折,参数为 λ.欲证对充分小的 λ,$F_\lambda\underset{\mathscr{A}}{\sim}F_0$,只需证明 F 是 $\mathscr{A}$-平凡的(见定义 8.2.1).根据命题 8.2.1,只需寻找$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$及$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$上的向量场芽

$$\widetilde{X}=\frac{\partial}{\partial\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\xi_i(\lambda,u,x)\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j(\lambda,u,x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

及

$$\widetilde{Y}=\frac{\partial}{\partial\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\eta_i(\lambda,u,y)\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{p}Y_j(\lambda,u,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

使得

$$\mathrm{D}F\cdot\widetilde{X}=\widetilde{Y}\circ F,\tag{11}$$

其中 $\xi_i,X_j\in\mathscr{M}_{u,x}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,x}$,$\eta_i,Y_j\in\mathscr{M}_{u,y}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,y}$.

类似于定理 12.1.1 证明中的计算,可以证明上述方程(11)有解 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 当且仅当

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}\in\mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+\mathscr{M}_{u,y}\left\{e_1,\cdots,e_p,\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}\right\},$$

而假设(10)及引理 12.3.1 保证$\frac{\partial f}{\partial\lambda}$满足这一条件.

12.3.3 定理 12.2.1 的充分性证明

将证明分为下列 3 步:

1) 设 $f_0\in K(r,n,p)$.断言:f_0 的任意两个 r-参数稳定开折必 $\mathscr{A}$-等价.设

$$F(u,x)=(u,f_0(x)+g(u,x)),g(0,x)=0$$

为 f_0 的 r-参数稳定开折,g 可写为

$$g(u,x)=\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(u,x)=\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(0,x)+\sum_{i=1}^{r}u_is_i(u,x),$$

这里 $s_i(u,x)=h_i(u,x)-h_i(0,x)$.

考虑映射 $\overline{F}$,它定义在$\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 的一邻域上,取值于$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p$ 中,

$$\overline{F}(\lambda,u,x)=(\lambda,u,\bar{f}(\lambda,u,x)),$$

$$\bar{f}(\lambda,u,x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(0,x)+\lambda\sum_{i=1}^{r}u_is_i(u,x),$$

易见 $\bar{f}(\lambda,0,0)=0$,又对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\overline{F}_\lambda:(u,x)\mapsto(u,\bar{f}(\lambda,u,x))$$

是 f_0 的稳定开折,因为它具有与 $F=\overline{F}_1$ 相同的初始速度. 又

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{r}u_is_i\in\mathcal{M}_u\cdot(\varepsilon_{u,x})^{\times p}\subset\overline{F}^*\mathcal{M}_{u,y}\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

依推论 12.3.2 可推出,对每一 $\lambda_0\in\mathbb{R}$,只要 λ-λ_0 充分小,$\overline{F}_\lambda$ 必 $\mathcal{A}$-等价于 $\overline{F}_{\lambda_0}$. 由此可知,对所有 λ,$\overline{F}_\lambda$ $\mathcal{A}$-等价于 $\overline{F}_0$. 特别,$\overline{F}_1=F$ $\mathcal{A}$-等价于线性开折 $\overline{F}_0$. 余下只需证明线性开折必 $\mathcal{A}$-等价. 设

$$F(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(x))$$

和

$$G(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ik_i(x))$$

是 f_0 的两个稳定线性开折. 使用线性插值,容易证明存在 C^∞ 映射 $g_i(\lambda,x)(\lambda\in\mathbb{R},i=1,\cdots,r)$,使得

$$\widetilde{F}_\lambda(u,x) = (u, f_0(x) + \sum_{i=1}^r u_i g_i(\lambda,x) = f(\lambda,u,x))$$

对所有 λ 皆为 f_0 的稳定开折，并且 $\widetilde{F}_0 = F, \widetilde{F}_1 = G$. 又因

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^r u_i \frac{\partial g_i}{\partial \lambda}(\lambda,x) \in \mathscr{M}_u \cdot (\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p} \subset \widetilde{F}^* \mathscr{M}_{u,y} \cdot \{e_1, \cdots, e_p\},$$

再一次使用推论 12.3.2 可以证明 $\widetilde{F}_1 = G$ 与 $\widetilde{F}_0 = F$ 是 $\mathscr{A}$-等价的.

2) 设 $F, G \in S(r,n,p)$ 分别为 $f_0, g_0 \in K(r,n,p)$ 的稳定开折. 假定 f_0 和 g_0 是 $\mathscr{K}$-等价的，据命题 8.4.1，存在可逆芽 h: $(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^n,0)$，使得

$$h^*(g_0^* \mathscr{M}_p) = (g_0 \circ h)^* \mathscr{M}_p = f_0^* \mathscr{M}_p. \tag{12}$$

令 $G' = G \circ (1_{(\mathbb{R}^r,0)} \times h)$，其中 $1_{(\mathbb{R}^r,0)}$ 表 $(\mathbb{R}^r,0)$ 上的恒同映射芽，显然 G' 是 $g_0 \circ h = g'_0$ 的 r-参数开折，并且 G' 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的. 由 (12) 式知，$g'^*_0 \mathscr{M}_p = f_0^* \mathscr{M}_p$. 据推论 8.4.1，存在可逆 $p \times p$ 矩阵 $M(x)$，使得 $g'_0(x) = M(x) f \setminus -0(x)$，这里 $\det M(0) \neq 0$. 倘若 $\det M(0) < 0$，考虑下列映射芽的复合：

$$(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{G'} (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{1_{(\mathbb{R}^r,0)} \times k} (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$

其中 $k: (\mathbb{R}^p,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$ 为线性自同构芽且 $\det k < 0$，显然 $G'' = (1_{(\mathbb{R}^r,0)} \times k) \circ G'$ 与 G' 是 $\mathscr{A}$-等价的并且 G'' 是 $g''_0 = k \circ g'_0$ 的稳定开折，其中

$$g''_0(x) = k \circ M(x) \cdot f_0(x), \ \det k \circ M(0) > 0,$$

于是论证归结为

3) 设 $f_0, g_0 \in K(r,n,p)$ 合于

$$g_0(x) = M(x) \cdot f_0(x),$$

其中可逆 $p \times p$ 矩阵 $M(x)$ 满足 $\det M(0) > 0$，需证存在 f_0, g_0 的

开折 $F,G\in S(r,n,p)$,使得 F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的.

由 1)可假定 $F\in S(r,n,p)$是 f_0 的稳定线性开折,即 F 可表为

$$F:(u,x)\mapsto(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(x)).$$

在一般线性群 $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})$的包含单位元 I 的连通分支内取一条 C^∞ 道路 $A(\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$,使得 $A(0)=I,A(1)=M(0)$.令

$$\tilde{f}_\lambda(x)=f(\lambda,x)=M(\lambda,x)\cdot f_0(x)$$

其中 $M(\lambda,x)=M_\lambda(x)=A(\lambda)+M(x)-M(0)$.依定义,有 $\tilde{f}_1(x)=g_0(x)$.注意到 $M(\lambda,0)=A(\lambda)$,有

$$\tilde{f}_\lambda^*\mathscr{M}_p=f_0^*\mathscr{M}_p,\quad 对所有\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

现在定义 $F_\lambda:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$为

$$F_\lambda(u,x)=(u,\bar{f}(\lambda,u,x)),$$

其中 $\bar{f}(\lambda,u,x)=M(\lambda,x)\cdot(f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(x))$,于是

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\lambda}=\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\left(f_0+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i\right)\in F^*\mathscr{M}_{u,y}\cdot(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}.$$

如果能证明:对所有 λ,F_λ 是 $\tilde{f}_\lambda$ 的稳定开折,那么据推论 12.3.2 可推出所有 F_λ 均 $\mathscr{A}$-等价于 F_0.特别 $F_1=G$ 和 F_0 是 $\mathscr{A}$-等价的.而 $F_0\underset{\mathscr{A}}{\sim}F$,故 $G\underset{\mathscr{A}}{\sim}F$.余下证明 F_λ 是 $\tilde{f}_\lambda$ 的稳定开折.

由 F 的稳定性并依定理 12.1.2,有

$$J(f_0)+f_0^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{h_1,\cdots,h_r\}=\varepsilon^0(n,p), \tag{14}$$

其中 $J(f_0)=\varepsilon_n\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\}$为 f_0 的 Jacobi 模.由(13)式有

$$\tilde{f}_\lambda^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)=f_0^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon(n,p),\quad 对所有\ \lambda,$$

另一方面，

$$\frac{\partial \tilde{f}_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial M_\lambda}{\partial x_i} \cdot f_0 + M_\lambda \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_i}.$$

因 $M_\lambda(0)$是可逆的，容易推出

$$J(\tilde{f}_\lambda) + \tilde{f}_\lambda^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon(n,p) = M_\lambda(J(f_0) + f_0^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon(n,p)).$$

将(14)式乘以 M_λ 得到

$$J(\tilde{f}_\lambda) + \tilde{f}_\lambda^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon(n,p) + \mathbb{R}\{M_\lambda \cdot h_1, \cdots, M_\lambda \cdot h_r\} = \varepsilon^\circ(n,p),$$

再一次应用定理 12.1.2 便得到 F_λ 是 $\tilde{f}_\lambda$ 的稳定开折.

§12.4 稳定芽分类举例

稳定映射芽分类的基本理论告诉我们，稳定芽按 $\mathscr{A}$-等价分类可归结为映射芽按 $\mathscr{K}$-等价分类. 如果对稳定芽的维数及 Boardman 符号作适当限制，并利用§11.4 中映射芽 $\mathscr{K}$-等价的结果，有可能获得稳定芽分类的结果. 本节仅限于一些简单情形的讨论.

设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞ 映射芽，$n\leqslant p$. 若 f 是非奇异芽因而是浸入芽，则 f 必属于 Σ^0 类，并且明显地是稳定芽. 下面研究具有 Σ^1 类奇点的稳定芽.

定理 12.4.1 (Morin[58]) 设 $n\leqslant p$. 若 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为属于 Σ^1 类的稳定芽，则 F 必为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点，其中整数 k 合于 $1\leqslant k\leqslant n/q\,(q=p-n+1)$. 进而可得到 F 必 $\mathscr{A}$-等价于芽 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，其分量为

$$\begin{cases} G_i = u_i, & 1\leqslant i\leqslant n-1, \\ G_{n+i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} u_{ik+j}x^j, & 0\leqslant i\leqslant q-2, \\ G_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} u_{(q-1)k+j}x^j + x^{k+1}, & \end{cases}$$

这里 $u_1,\cdots,u_{n-1},x$ 为$\mathbb{R}^n$ 的坐标.

证 由引理 11.2.1 及命题 11.4.1 知,F 必为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点,其中 k 为某一正整数. 显然 F 在点 0 的秩为 $n-1$. 据命题 11.4.2,它必然 $\mathscr{A}$-等价于某一芽 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^q,0)$的$(n-1)$-参数开折,这里 $q=p-n+1$. 不难看出 f_0 亦为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点并且具有有限 $\mathscr{K}$-余维数. 据命题 11.4.3,f_0 与映射芽

$$g_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^q,0),\ x\mapsto g_0(x)=(0,\cdots,0,x^{k+1})$$

是 $\mathscr{K}$-等价的. 又由 §9.4 中例 2 知,g_0 的 $\mathscr{K}$-余维数为 $qk+q-1$,并且 $T_e\mathscr{K}(g_0)$在 $\mathscr{M}_1\cdot\varepsilon(1,q)$中的补空间的基由诸$(0,\cdots,x^j,\cdots,0)$组成$(1\leqslant j\leqslant k)$,但除去$(0,\cdots,0,x^k)$. 定义 g_0 的$(qk-1)$-参数形变 $g:(\mathbb{R}^{qk-1}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^q,0)$如下:记 g 的分量为 $g_1,\cdots,g_q$,令

$$g_{i+1}=\sum_{j=1}^{k}u_{ik+j}x^j,\quad 0\leqslant i\leqslant q-2,$$

$$g_q=\sum_{j=1}^{k-1}u_{(q-1)k+j}x^j+x^{k+1}.$$

显然所取的 k 应满足 $qk-1\leqslant n-1$,因而 $1\leqslant k\leqslant n/q$. 然后定义 $G:(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^q,0)$为

$$\begin{cases}G_i=u_i, & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ G_{n+i}=g_{i+1}, & 0\leqslant i\leqslant q-2,\\ G_p=g_q.\end{cases}$$

由定理 12.1.2,G 是稳定映射芽,再由定理 12.2.1,F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的. 证毕.

特别,将本结果的等维数情形(即 $n=p$)单独列出来,这就是

推论 12.4.1 设 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$为 Σ^1 类稳定芽,则它必为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点$(1\leqslant k\leqslant n)$并且 $\mathscr{A}$-等价于芽 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,$

0)，其分量为

$$\begin{cases} G_i = u_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ G_n = \sum_{j=1}^{k-1} u_j x^j + x^{k+1}. \end{cases}$$

它是我们曾经讨论过的广义 Whitney 映射(见定理 9.3.1)．当 $n=2, k=2$ 时便是 Whitney 尖点映射．

下面在 $n \geqslant p$ 的情形下讨论稳定芽$(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$．最简单的情形是非奇异芽，这样的芽必属于 Σ^{n-p}类，自然是稳定的，其标准形为投影$(x_1,\cdots,x_n) \mapsto (x_1,\cdots,x_p)$．接下来讨论具有 Σ^{n-p+1}类奇点的稳定芽，从稳定芽分类的基本理论可知，这样的芽 $\mathscr{A}$-等价于某一芽 $f:(\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{R},0)$的$(p-1)$-参数开折，这里 $m=n-p+1$．又芽 f 也属于 Σ^{n-p+1}类并且具有有限 $\mathscr{K}$-余维．回顾对函数芽分类所作的讨论，给人们的印象似乎是 f 的"复杂"程度取决于它的余秩 c，然而余秩 c 以及二阶 Boardman 符号都依赖于 f 的 2-导网，所以自然猜想它们之间有一定关联．

命题 12.4.1 设芽 $f:(\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{R},0)$是 Σ^m 类奇点，则 f 属于 $\Sigma^{m,c}$类当且仅当f 有余秩 c．

证 因 f 属于Σ^m 类，则由 f 及偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}$生成的理想 $\Delta^m I(f)$是临界理想．理想 $\Delta^s \Delta^m I(f)$由 $f,\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}$以及它们的 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

的$(m-s+1)$阶子式所生成.

$\Delta^s\Delta^m I(f)$为真理想的条件是它的所有生成元不含常数项,即所有$(m-s+1)$阶子式在点$0\in\mathbb{R}^m$的值为0.除去上述Jacobi矩阵的第一行,余下的恰好是f的Hessian矩阵.因为所有的$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$在点0的值为0,因此$\Delta^s\Delta^m I(f)$为真理想的条件是$f$的Hessian矩阵的余秩不小于$s$.而$\Delta^s\Delta^m I(f)$为临界理想的条件是$f$的Hessian矩阵恰好有余秩$s$.取$s=c$,易见$f$属于$\Sigma^{m,c}$类当且仅当$f$的余秩为$c$. □

对于函数芽按$\mathscr{K}$-等价分类,有下列分裂引理,而且证明与命题3.4.1所给出的恰好相同,在此从略.

引理 12.4.1 设$f\in\mathscr{M}_n^2$具有有限$\mathscr{K}$-余维,并且余秩为c,则f $\mathscr{K}$-等价于芽

$$g(x_1,\cdots,x_c)\pm x_{c+1}^2\pm\cdots\pm x_n^2,$$

其中$g\in\mathscr{M}_c^3$.

特别当f的余秩为0或1时,有下面两个定理,由Morin所建立(参看文献[58]).

定理 12.4.2 设$n\geqslant p$.若稳定芽$F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$属于$\Sigma^{n-p+1,0}$类,则$F$ $\mathscr{A}$-等价于芽$G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,其分量为

$$G_i=u_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant p-1,$$

$$G_p=\pm x_p^2\pm\cdots\pm x_{n-1}^2\pm x_n^2,$$

证 如前面所述,F $\mathscr{A}$-等价于某个芽$f:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R},0)$的$(p-1)$-参数开折,其中$m=n-p+1$.芽$f$属于$\Sigma^{m,0}$类而且具有有限$\mathscr{K}$-余维.据命题12.4.1,$f$的余秩为0,因而根据Morse引理,$f$ $\mathscr{R}$-等价因而$\mathscr{K}$-等价于芽$\pm x_p^2\pm\cdots\pm x_n^2$.由定理12.1.2知,

定理中所述的 G 作为函数芽 $\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2$ 的 $(p-1)$-参数开折是稳定的，再由定理 12.2.1，F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的.

定理 12.4.3 设 $n \geqslant p$. 如果 $F:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$ 为属于 $\Sigma^{n-p+1,1}$ 类的稳定芽，那么 F 必属于 $\Sigma^{n-p+1,1,\cdots,1,0}$ 类，其中 1 重复出现 k 次，$1 \leqslant k \leqslant p-1$. 并且在这一情形下，$F$ $\mathscr{A}$-等价于 $G:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$，定义为

$$G_i = u_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p-1,$$

$$G_p = \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^{k+2} + \sum_{j=1}^{k} u_j x_n^j.$$

证 F 为 $\Sigma^{n-p+1,1,\cdots,1,0}$ 类奇点是引理 11.2.1 和命题 11.4.1 的直接推论. 如前所述，F $\mathscr{A}$-等价于芽 $f:(\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{R},0)$ 的 $(p-1)$-参数开折 $(m=n-p+1)$. 又 f 具有限 $\mathscr{K}$-余维并且亦为 $\Sigma^{n-p+1,1,\cdots,1,0}$ 类奇点. 显然 f 的余秩为 1. 据分裂引理 12.4.1，f 与下列芽

$$\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 + g_1(x_n)$$

是 $\mathscr{K}$-等价的，这里 $g_1 \in \mathscr{M}_1^3$ 且 g_1 具有 $\Sigma^{\overbrace{1,1,\cdots,1,}^{k+1}0}$ 类奇点. 依命题 11.4.3，g_1 与芽 $\pm x_n^{k+2}$ 是 $\mathscr{K}$-等价的，从而 f 与芽 $\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^{k+2}$ 是 $\mathscr{K}$-等价的. 简记后面的函数芽为 g. $T_e\mathscr{K}(g)$ 由 $x_p,\cdots,x_{n-1}$ 及 x_n^{k+1} 生成，因此 $T_e\mathscr{K}(g)$ 在 $\mathscr{M}_m$ 中的补空间的基可取为 $x_n,\cdots,x_n^k$. 依定理 12.1.2，定理中所述的 G 作为 g 的 $(p-1)$-参数开折是稳定的，然后根据定理 12.2.1，$F \underset{\mathscr{A}}{\sim} G$. 证毕.

特别，上述二定理在等维数 $n=p$ 情形下便是推论 12.4.1，因此对等维数情形，接下来考虑的是属于 Σ^2 类的稳定芽.

定理 12.4.4 设稳定芽 $F:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^n,0)$ 属于 $\Sigma^{2,0}$ 类，则它 $\mathscr{A}$-等价于下列芽 $G:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^n,0)$ 之一：

$$
\text{型 } \mathrm{I}_{a,b} \text{ 和 } \mathrm{II}_{a,b}
\begin{cases}
G_i = u_i, & 1 \leqslant i \leqslant a-1, \\
G_{a-1+j} = v_j, & 1 \leqslant j \leqslant b-1, \\
G_{a+b-2+k} = w_k, & 1 \leqslant k \leqslant n-(a+b), \\
G_{n-1} = xy, & \\
G_n = x^a \pm y^b + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{j=1}^{b-1} v_j y^j, &
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $a+b \leqslant n$,

$$
\text{型 } \mathrm{IV}_a
\begin{cases}
G_i = u_i, & 1 \leqslant i \leqslant a-1, \\
G_{a-1+j} = v_j, & 1 \leqslant j \leqslant a-1, \\
G_{2a-2+k} = w_k, & 1 \leqslant k \leqslant n-2a, \\
G_{n-1} = x^2 + y^2, & \\
G_n = x^a + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{j=1}^{a-1} v_j x^{j-1} y, &
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 $2a \leqslant n$.

证 F 必 $\mathscr{A}$-等价于芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 的 $(n-2)$-参数开折,其中 f 具有有限 $\mathscr{K}$-余维并且属于 $\Sigma^{2,0}$ 类. 据定理 11.4.1,芽 f 与型 $I_{a,b}$, $\mathrm{II}_{a,b}$ 及 IV_a 中之一 $\mathscr{K}$-等价.

由 §9.4 中例 3 知,$g(x,y)=(xy, x^a \pm y^b)$ 的 $\mathscr{K}$-余维数为 $a+b$. $T_e\mathscr{K}(g)$ 在 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$ 中的补空间的基为 $(0,x^i)$ $(1\leqslant i\leqslant a-1)$ 和 $(0,y^j)$ $(1\leqslant j\leqslant b-1)$. 显然 a,b 应满足 $a+b\leqslant n$,从而 g 的 $(n-2)$-参数开折 G(如定理中(1)所述)是稳定芽,且与 F 是 $\mathscr{A}$-等价的.

又由§9.4中例4知，$h(x,y)=(x^2+y^2,x^a)$的$\mathscr{K}$-余维数等于$2a$. $T_e\mathscr{K}(h)$在$\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)$和$(0,x^{i-1}y)(1\leqslant i\leqslant a-1)$. 显然要求$2a\leqslant n$. 从而$h$的$(n-2)$-参数开折$G$(如定理中(2)所述)是稳定芽，且$G\underset{\mathscr{A}}{\sim}F$.

§12.5 稳定映射的奇点

前面已引入光滑映射芽稳定性与无穷小稳定性的等价概念，并且对稳定映射芽的特征、分类给予了描述. 本节将对光滑映射引入稳定性概念，并且着重讨论稳定映射的奇点.

一个C^∞映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$叫做稳定的，是指任意充分接近$f$的$C^\infty$映射$g$必等价于$f$，现精确叙述如下.

定义 12.5.1 设$f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$为两个$C^\infty$映射. 如果存在微分同胚$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$和$k:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$，使得$g=k\circ f\circ h^{-1}$，即使得下列图表可换，则说$f$与$g$是$\mathscr{A}$-等价的.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k}\\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p\end{array}$$

在§2.4中，对C^∞映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$组成之集$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$引入了拓扑结构，因此定义稳定映射如下.

定义 12.5.2 C^∞映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$叫做稳定映射，如果存在$f$在$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的邻域$U$，使得对任意$g\in U$，$g$ $\mathscr{A}$-等价于f.

从定义立即可知，所有稳定映射在$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中形成一个开集. 现在问：它们是否足够多，使得任何一个C^∞映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$都可以用稳定映射来逼近它呢？再有对稳定映射是否能够分类？精确地说，所有稳定映射在映射空间$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中是否构成一个稠密子集？是否存在有限多个$C^\infty$映射芽$(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，使得对每一个稳定映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$，它在任意点$x\in\mathbb{R}^n$的芽都$\mathscr{A}$-等价

于这有限多个芽中的一个？

关于第一个问题，Mather 给出了深刻的结果（见文献[51]），现陈述如下：

在映射空间 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中，所有常态稳定映射组成稠密子集的充要条件是维数对(n,p)满足下列条件之一：

(a) $p<7s+8$，当 $s\geqslant 4$，

(b) $p<7s+9$，当 $3\geqslant s\geqslant 0$，

(c) $p<8$，　　当 $s=-1$，

(d) $p<6$，　　当 $s=-2$，

(e) $p<7$，　　当 $s\leqslant -3$，

这里 $s=p-n$．所谓 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为常态映射（proper mapping）是指 f 为连续映射，并且对于$\mathbb{R}^p$ 中的任意紧致子集 C，它在 f 下的原像 $f^{-1}(C)$为$\mathbb{R}^n$ 中的紧致子集．

图 12.3 中用斜线标记的区域（含边界）表示稳定映射非稠密的区域．

关于第二个问题，也是 Mather 解决的．我们将结合前面所述

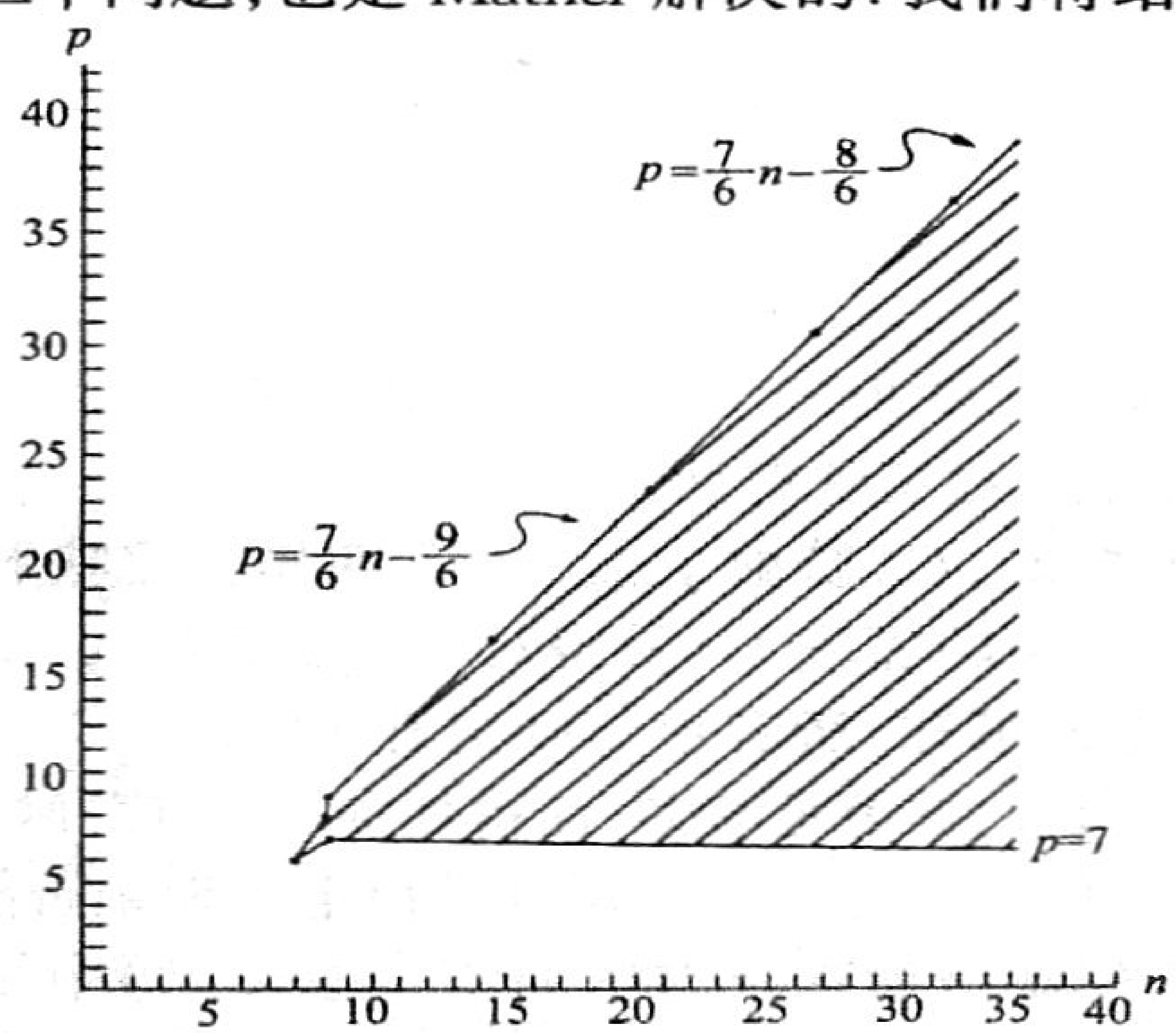

图 12.3

内容,讨论某些稳定映射可能出现的奇点类型.为此,首先介绍需用到的两个结论.

命题 12.5.1 在 Boardman 意义下,光滑映射的稳定性是通有性质.

证 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为稳定映射,k 为正整数.需证 $j_0^k f$ 横截于所有 Boardman 子流形 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$,其中 $j_0^k f:\mathbb{R}^n\to J_{n,p}^{k,0}$ 定义为 $j_0^k f(x)=(f-f(x))$的 k 阶 Taylor 多项式.据定理 11.2.3,集

$$\mathscr{D}=\{g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j_0^k g \pitchfork \Sigma^{i_1,\cdots,i_k}\}$$

为 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集.因 f 是稳定的,故存在 f 在 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的邻域 U,使得 U 中的每一 h $\mathscr{A}$-等价于 f.由于 $\mathscr{D}$ 是稠密的,可取 $g\in U\cap\mathscr{D}$,这意味着 g 与 f 是 $\mathscr{A}$-等价的,且 g 满足横截性条件.余下证明 f 也满足横截性条件,请读者补述.

命题 12.5.2 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为稳定映射,则 f 在任意点 $x\in\mathbb{R}^n$ 的芽必为稳定映射芽.

证明从略.现从上述结果连同上节中得到的有关分类结论可得到下面一些定理,它们完全描述了某些稳定映射所有可能的奇点类型.为简单起见,将"$\mathscr{A}$-等价"简写成"等价".首先从等维数 $n=p$ 情形说起.

考虑稳定映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.由命题 12.5.1,$f$ 必须横截于一阶 Boardman 子流形 Σ^i.设 $n\leqslant 3$.因一阶奇点集 $\Sigma^i(f)$的余维数为 i^2,当 $i\geqslant 2$ 时,$\Sigma^i(f)=\varnothing$,因此只需考虑属于 Σ^1 类的奇点.而在等维数情形下,奇点集 $\Sigma^{1_k,0}(f)$具有余维 k(见§11.2 中例 2),因此在 $k\leqslant n$ 时才不空.于是由命题 12.5.2 和推论 12.4.1,有

定理 12.5.1 设 $n\leqslant 3$,$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为稳定映射,则

(i) 当 $n=1$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^0: y_1 = x_1 \qquad (\text{正常点}),$$

$$\Sigma^{1,0}: y_1 = x_1^2 \qquad (\text{极小值点}).$$

(ii) 当 $n=2$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^0\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \end{cases} \qquad (\text{正常点});$$

$$\Sigma^{1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^2, \end{cases} \qquad (\text{折叠});$$

$$\Sigma^{1,1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2, \end{cases} \qquad (\text{尖点}).$$

(iii) 当 $n=3$ 时，f 在任意点的芽等价于下列芽中的一个：

$$\Sigma^0\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \qquad (\text{正常点});$$

$$\Sigma^{1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^2, \end{cases} \qquad (\text{折叠});$$

$$\Sigma^{1,1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^3 + x_1 x_3, \end{cases} \qquad (\text{尖点});$$

$$\Sigma^{1,1,1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^4 + x_1 x_3 + x_2 x_3^2, \end{cases} \qquad (\text{燕尾}).$$

当 $n=4$ 时,稳定映射 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 不仅可以有 Σ^1 类奇点,还可以有 Σ^2 类奇点. 但无 Σ^i 类奇点($i\geqslant3$),现在 $\Sigma^2(f)$ 可分解为 $\Sigma^{2,0}(f)$ 和 $\Sigma^{2,1}(f)$ 及 $\Sigma^{2,2}(f)$,其余维数分别为 4,7 和 10,因此只能出现 $\Sigma^{2,0}$ 类奇点. 应用命题 12.5.2 和推论 12.4.1 及定理 12.4.4,得到下面的

定理 12.5.2 设 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 为稳定映射,则它在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^0\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^3 + x_1x_4; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,1,1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^4 + x_1x_4 + x_2x_4^2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,1,1,1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^5 + x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_3x_4^3; \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\Sigma^{2,0} \\ \mathrm{I}_{2,2}\end{matrix}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3x_4, \\ y_4 = x_3^2 + x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4; \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,0} \quad \mathrm{II}_{2,2} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 x_4, \\ y_4 = x_3^2 - x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4. \end{cases}$$

对于稳定映射$\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$,$\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$,仿上可以写出相应结论.但稳定映射$\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ 可以有 $\Sigma^{2,1}$类的芽,读者如有兴趣,经过努力可获得完全的一览表.

下面讨论非等维数情形.设 $n \leqslant p$,试确定整数对(n,p)使得稳定映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 仅容有 Σ^1 类奇点.注意到 Σ^i 的余维数为$i(p-n+i)$,若映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 有 Σ^1 类奇点,则$1\cdot(p-n+1) \leqslant n$,即$p<2n$.倘若 f 无Σ^i 类奇点,这里 $i \geqslant 2$,则

$$i \cdot (p - n + i) > n, \qquad i \geqslant 2,$$

即$2p > 3n - 4$,因此 f 仅容有 Σ^1 类奇点,则(n,p)满足下列关系

$$3n - 4 < 2p < 4n.$$

现假定(n,p)取值在上述范围内,进而考虑 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点.因 $\Sigma^{1_k,0}$的余维数为$(p-n+1)k$,条件 $p<2n$ 保证当$k=1$ 时,有$(p-n+1)\cdot k \leqslant n$,因而不排斥 $\Sigma^{1,0}$类奇点的出现.若$(p-n+1)\cdot k > n$对$k \geqslant 2$ 成立,即若$2p \geqslant 3n-1$,则不出现 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点,$k \geqslant 2$.于是当整数对(n,p)满足

$$3n - 1 \leqslant 2p < 4n$$

时,f 仅容有$\Sigma^{1,0}$类奇点.(n,p)的上述取值范围有时称为亚稳定域(metastable range).再由定理 12.4.1,便得到

定理 12.5.3 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为稳定映射,整数对(n,p)取值于亚稳定域内,则 f 仅容有$\Sigma^{1,0}$类奇点,并且 f 在这些奇点的芽等价于芽

$$\begin{cases} y_i = x_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ y_{n-1+j} = x_j x_n, & 1 \leqslant j \leqslant p-n, \\ y_p = x_n^2. \end{cases}$$

注 $p=2n-1$ 对应于 Whitney 的结果,此时上述芽可写为

$$\begin{cases} y_i = x_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ y_{n-1+j} = x_j x_n, & 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ y_p = x_n^2. \end{cases}$$

特别,$n=2$ 对应于 Whitney 伞.

对于 $n \geqslant p$,同样可考虑(n, p)的取值范围,使得稳定映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 容有简单类型的奇点.这里仅举一例.

定理 12.5.4 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 为稳定映射,则它在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^1 \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,0} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \pm x_2^2 \pm x_3^2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \pm x_2^2 \pm x_3^3 + x_1 x_3. \end{cases}$$

证 $\Sigma^i(f)$具有余维数 $i(i-1)$,当 $i \geqslant 3$ 时必为空集.注意属于 Σ^1 类的芽是淹没芽,因此只可能有 Σ^2 类奇点.将 $\Sigma^2(f)$分解为 $\Sigma^{2,0}(f)$, $\Sigma^{2,1}(f)$与 $\Sigma^{2,2}(f)$,其余维数分别为 2,3 和 5;因而只需考虑前两个奇点集.在 $\Sigma^{2,0}$类的奇点处,标准形由定理 12.4.2

给出.余下仅需考虑 $\Sigma^{2,1,\cdots,1,0}$类奇点,这里假定 1 重复出现 k 次.依据计算 Σ^{I} 的余维数 $\nu_I(n,p)$ 的 Boardman 公式(见定理11.2.1),容易算出 $\Sigma^{2,1_k,0}$的余维数为 $k+2$,因此考虑的只是情形 $k=0$ 和 $k=1$.对于 $k=0$ 已讨论过,对于 $k=1$,相应的标准形由定理12.4.3给出.

第十三章　在分歧问题研究中的应用

分歧理论是对具有多重解的方程(包括代数方程、微分方程等)的研究. 简单地说,所谓分歧指的是方程解的个数随参数的变化而变化,例如当参数 λ 的值由小于 0 变到大于 0 时,方程 $x^3-\lambda x=0$ 的解的个数由 1 变为 3,此时 $(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 叫做分歧点. 一般来说,对于含一个状态变量 x 的局部分歧问题 $g(x,\lambda)=0$,若 (x_0,λ_0) 是分歧点,则 $g(x_0,\lambda_0)=\dfrac{\partial}{\partial x}g(x_0,\lambda_0)=0$,因而 (x_0,λ_0) 为奇点. 由这一最简单例子可以看出解分歧问题与奇点理论有密切关联. Golubitsky 和 Schaeffer 于 1979 年发表的两篇论文[28],[29]引入了应用奇点理论方法研究分歧问题的思想. Gaffney 在文献[20]中曾经指出,对分歧问题进行分类所使用的主要工具来自光滑映射芽的奇点理论中的相关技巧.

由于在自然科学中提出的问题不少呈现出某种对称性,对称性反映在数学中用群来刻画,因此在奇点理论中考虑等变映射芽,相应地在分歧理论中研究等变分歧问题. 局部分歧理论关心的是在分歧点附近,方程的解的数目、解的稳定性以及对称性的变化情况. 在理论研究及实际应用中,通常以紧致 Lie 群作为分歧问题的对称群. 而对称群为平凡群则表明所考虑的分歧问题不带对称性.

应用奇点理论方法与群论方法研究分歧问题,Golubitsky 等数学家撰写的两卷本专著"Singularities and Groups in Bifurcation Theory"概括了 1988 年以前的主要研究成果,本章的目的是结合 1988 年以后的部分研究成果,简要地介绍奇点理论在静态分歧问题研究中的应用,着重于两个方面的内容:一个是等变分歧问题的识别,另一个是含有多个分歧参数的等变分歧问题的开折,而不是对分歧理论作系统全面的阐述.

本章安排如下：§13.1 简要介绍紧致 Lie 群上的不变积分以及 Lie 群的线性表示. §13.2 着重于紧致 Lie 群的不变量理论中的两个深刻结果. 即 Hilbert - Weyl 定理和 Schwarz 定理. 为方便读者查阅，附录 B 证明了 Hilbert 基定理. §13.3 研究与紧致 Lie 群 Γ 可交换的 C^∞ 映射芽，对这样的等变映射芽所成之集给出了代数描述，并且介绍了 Malgrange 预备定理的等变形式. 从 §13.4 至 §13.6 研究等变分歧问题，引入了等变分歧问题 Γ-等价的概念(它是用分歧参数作为参数的接触等价族来描述)，建立了各种形式的切空间. 特别在 §13.5 中讨论分歧问题的识别，给出了幂单等价群 $U(\Gamma)$作用下的一般等价理论. 在 §13.6 中探讨等变分歧问题的开折理论，陈述了等变通用开折定理的一般形式并加以证明. 从最后两节可以看出它们与奇点理论研究中的有限决定性及开折有着非常紧密的联系.

§13.1 紧致 Lie 群的 Haar 积分与线性表示

13.1.1 方程及其解的对称性

以常微分方程为例看看对称性的含义. 为简单起见，将参数省略，设

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \tag{1}$$

其中 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射. 假设 γ 是一个可逆 $n \times n$ 矩阵，满足条件

$$f(\gamma x) = \gamma f(x), \text{对每一 } x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

即 γ 与 f 可交换，那么 γ 反映了方程(1)的对称性. 满足条件(2)的所有可逆 $n \times n$ 矩阵形成一个群 Γ. 事实上，若 $\gamma, \delta \in \Gamma$，则

$$f(\gamma\delta x) = \gamma f(\delta x) = \gamma\delta f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

因而 $\gamma\delta \in \Gamma$. 又令条件(2)中的 $\gamma x = y$，有 $f(y) = \gamma f(\gamma^{-1} y)$，

$f(\gamma^{-1}y)=\gamma^{-1}f(y)$,这说明 $\gamma^{-1}\in\Gamma$. 因此我们把群 Γ 叫做方程(1)的对称群. 下面考察方程(1)的解的对称性.

设 $\gamma\in\Gamma$,若 $x(t)$是方程(1)的解,易见 $\gamma x(t)$也是方程(1)的解. 下面就两种情形讨论之:

(i)若 $x(t)\equiv x_0$ 为方程(1)的平衡解,即 $f(x_0)=0$,则 γx_0 也是方程(1)的平衡解. 如果 $\gamma x_0\neq x_0$,那么 γx_0 是方程(1)的一个异于 x_0 的"新"的平衡解. 如果 $\gamma x_0=x_0$,则 γ 表示解 x_0 具有对称性. 令

$$\Sigma_{x_0}=\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma x_0=x_0\},$$

易见它是 Γ 的子群,叫做平衡解 x_0 的迷向子群,反映了解 x_0 的对称程度.

对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$,集 $\Gamma x_0=\{\gamma x_0 \mid \gamma\in\Gamma\}$ 叫做过点 x_0 的群轨道. 易见,若 x_0 为方程(1)的平衡解,则过 x_0 的群轨道上的每一点也是方程(1)的平衡解,且

$$\gamma x_0=\delta x_0\Leftrightarrow\delta^{-1}\gamma\in\Sigma x_0.$$

特别,当 Γ 为有限群时,方程(1)的不同的平衡解的数目为

$$|\Gamma|/|\Sigma_{x_0}|,$$

其中 $|\;|$ 表示群的阶数.

(ii)设 $x(t)$为方程(1)的周期解. 为简单起见,假定周期为 2π. 任取 $\gamma\in\Gamma$, $\gamma x(t)$也是方程(1)的周期解且周期为 2π. 应指出的是,在周期解的情形下,需对解的对称性含义予以拓宽. 事实上,由方程(1)的满足初始条件的解的惟一性可推出 $x(t)$与 $\gamma x(t)$的轨道或者互不相交或者相重. 对于前者, $\gamma x(t)$为方程(1)的异于 $x(t)$的"新"的周期解. 而对于后一情形, $x(t)$与 $\gamma x(t)$仅相差一个相移(phase shift),即

$$x(t) = \gamma x(t - t_0)，对某一 t_0，$$

此时我们说对(γ, t_0)表示周期解 $x(t)$的对称性，它由空间分量 γ 与时间分量 t_0 组成，位于群 $\Gamma \times S^1$ 中，这里 S^1 为圆周群. 因此对周期解需考虑时空对称性，而不只是空间对称性.

由上可见，方程(1)的对称群 Γ，平衡解 x_0 的迷向子群 Σ_{x_0} 等均为一般线性群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的子群. 在分歧问题研究中，通常取 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的闭子群作为对称群，称为线性 Lie 群，这里对 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的闭子群作如下说明：由于所有 $n \times n$ 实矩阵所成空间 $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$可等同于$\mathbb{R}^{n^2}$，它包含 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$作为开子集. G 为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的闭子群是指：(a) G 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的子群，(b) G 作为拓扑空间 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的子集是相对闭子集.

13.1.2 紧致 Lie 群与 Haar 积分

我们知道，Lie 群同时具有群结构与微分结构，而且群运算对于其微分结构来说是 C^∞ 可微的. 如果它作为微分流形还是紧致的，则称为紧致 Lie 群. 有一个定理是说每一个紧致 Lie 群拓扑同构于线性 Lie 群，因此对它们不加区分. 下面列出紧致 Lie 群的一些例子.

例 1 令 $O(n) = \{\gamma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \gamma^{\mathrm{T}} \cdot \gamma = I_n\}$，这里 γ^{T} 表 γ 的转置，I_n 为单位矩阵. 易见 $O(n)$是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$的闭子群，叫做 n 维正交群.

$$SO(n) = \{\gamma \in O(n) \mid \det\gamma = 1\}$$

叫做特殊正交群或 n 维旋转群. 特别 $SO(2)$中的元素可表示为平面旋转变换

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

因此通过对应 $R_\theta \mapsto \theta$ 可将 $SO(2)$等同于圆周群 S^1. 而 $O(2)$则由 $SO(2)$及平面翻转(flip)κ 所生成，其中

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 2 (a) n 阶循环群 Z_n. 将它与生成元为 $R_{2\pi/n}$ 的 2×2 矩阵群等同，因而 Z_n 可表为

$$Z_n = \{R_{2k\pi/n} \mid k = 0, 1, \cdots, n-1\}.$$

(b) $2n$ 阶二面体群 D_n. 将它等同于生成元为 $R_{2\pi/n}$ 和 κ 的 2×2 矩阵群.

从几何上看，D_n 是正 n 边形的对称群，而 Z_n 则是由旋转角为 $2\pi/n$ 的旋转变换生成的旋转群.

(c) 任意一个有限群对于离散拓扑而言构成一个紧致 Lie 群.

例 3 (a) n 维环面 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}$ 同构于一个紧致 Lie 群. 事实上，将 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T^n$ 对应于对角块矩阵

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & 0 \\ & R_{\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{\theta_n} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}).$$

(b) 有限个紧致 Lie 群的卡氏积仍为紧致 Lie 群.

例 4 设 Γ 为紧致 Lie 群. 将 Γ 的包含单位元 e 的连通分支记为 Γ°，例如 $O(n)^\circ = SO(n)$. 作为连通分支，Γ° 是 Γ 的闭子集. 此外，Γ° 还是 Γ 的正规子群，因此 Γ° 也是紧致 Lie 群.

设 f 为定义在紧致 Lie 群 Γ 上的连续实值函数，利用群 Γ 的左平移 $l_\sigma: \Gamma \to \Gamma$, $l_\sigma(\gamma) = \sigma\gamma$ 可得到一个新的函数 $f \circ l_\sigma: \Gamma \to \mathbb{R}$, $f \circ l_\sigma(\gamma) = f(\sigma\gamma)$.

紧致 Lie 群的一个重要性质是对于其上的连续函数 f，有一个自然的求平均值的运算，它是一个满足下列条件的映射

$$I: C(\Gamma) \to \mathbb{R},$$

其中 $C(\Gamma)$表示群 Γ 上的连续实值函数所成之集. 该条件为

(i) 线性. $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$, $f, g \in C(\Gamma)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) 非负性. 若 f 在 Γ 上处处非负, 则 $I(f) \geqslant 0$. 再添加 f 不恒为 0 的条件, 则 $I(f) > 0$.

(iii) 左不变性. $I(f \circ l_\sigma) = I(f)$, $f \in C(\Gamma)$, $\sigma \in \Gamma$.

将运算 $I: C(\Gamma) \to \mathbb{R}$ 称为 Γ 上的 Haar 积分或不变积分. 并用符号

$$\int_\Gamma f \ (\text{或} \int_\Gamma f \mathrm{d}\gamma, \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \mathrm{d}\gamma)$$

表示 $I(f)$. 如果还满足

(iv) $\int_\Gamma 1 = 1$, 这里积分号中的 1 表示值为 1 的常值函数,

这样的 Haar 积分叫做规范化的 Haar 积分.

可以证明紧致 Lie 群 Γ 上的 Haar 积分具有

(v) 右不变性 $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\sigma) \mathrm{d}\gamma = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \mathrm{d}\gamma$, $\forall \sigma \in \Gamma$.

Haar 积分的左不变性和右不变性统称为平移不变性. 至于 Haar 积分的存在性与惟一性的证明可参看文献[10]或[13]. 另外指出的是, 在紧致拓扑群(即具有群结构的紧致拓扑空间, 并且群运算连续) G 上也存在惟一的求连续函数平均值的运算满足上述性质(i)~(v), 把它叫做 G 上的不变积分(参看文献[72]).

例 5 设 Γ 为有限群. 显然可以定义

$$I(f) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$$

为 f 的平均值, 它满足上述条件(i)~(v).

例 6 圆周群 S^1 上的 Haar 积分为

$$\int_{S^1} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta,$$

不难验证它满足(i)～(v).

13.1.3 Lie 群的线性表示

定义 13.1.1 设 Γ 为 Lie 群. V 为有限维实向量空间. 我们说 Γ 线性地作用在 V 上,如果存在连续映射

$$\begin{cases}\Gamma \times V \to V, \\ (\gamma, v) \mapsto \gamma \cdot v,\end{cases}$$

使得

(i) 对每一 $\gamma \in \Gamma$, 映射 ρ_γ: $V \to V$, $v \mapsto \rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v$ 为线性映射,

(ii) 若 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$,则 $\gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot v) = (\gamma_2 \gamma_1) \cdot v$.

易见,对每一$\gamma \in \Gamma$, ρ_γ是 V 上的可逆线性变换. 将可逆线性变换 $V \to V$ 所成之群记为 $\mathrm{GL}(V)$,则映射

$$\rho: \Gamma \to \mathrm{GL}(V), \ \gamma \mapsto \rho_\gamma$$

叫做 Γ 在 V 上的一个(实)线性表示,简称为表示,用符号(Γ, V)记之. 换句话说,Γ 在 V 上的线性表示是一个映 Γ 到 $\mathrm{GL}(V)$中的同态 ρ: $\Gamma \to \mathrm{GL}(V)$.

例 7 圆周群 S^1 在$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ 上的作用规定为

$$\theta \cdot z = e^{i\theta} z, \quad \theta \in S^1, \ z \in \mathbb{C},$$

容易验证它满足定义中的条件(i)和(ii). 该作用导出 S^1 的线性表示,ρ_θ 为平面$\mathbb{R}^2$ 上的旋转变换,旋转角为 θ,相应的矩阵为 R_θ,因而 S^1 在$\mathbb{C}$上的作用等同于 $SO(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用.

作为推广,S^1 在$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 上的作用定义如下:对每一整数 k,令

$$\theta \cdot z = e^{ik\theta} z, \quad \theta \in S^1, \ z \in \mathbb{C}.$$

当 $k = 0$ 时,该作用是平凡的,$\theta \cdot z = z$. 当 $k = 1$ 时,就是上面所说的情形. 此外,还可以将上式所规定的 $S^1 = SO(2)$在$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上的作用扩张为 $O(2)$在$\mathbb{C}$ 上的作用,只需令

$$\kappa \cdot z = \bar{z},\ \kappa \text{ 为翻转}.$$

同一个群可以作用在不同的空间上.

例 8 $GL(n, \mathbb{R})$中的每一个线性 Lie 群 Γ 通过矩阵乘法自然地作用在$\mathbb{R}^n$ 上,还可以依相似性作用于实 $n \times n$ 矩阵组成的空间 $gl(n, \mathbb{R})$上,即令

$$\gamma \cdot A = \gamma A \gamma^{-1},\ \gamma \in \Gamma,\ A \in gl(n, \mathbb{R}).$$

定理 13.1.1 设(Γ, V)是紧致 Lie 群 Γ 在有限维实向量空间V 上的表示,则在 V 上存在一个Γ-不变内积,即

$$\langle \gamma x, \gamma y \rangle_\Gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma \tag{3}$$

对任意 $\gamma \in \Gamma$, x, $y \in V$ 皆成立.

证 基本思路是利用 Haar 积分构造 V 上的一个 Γ-不变内积. 设$\langle , \rangle$是 V 上的任意内积,定义$\langle , \rangle_\Gamma$ 如下:设 x, $y \in V$,令

$$\langle x, y \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \langle \rho_\gamma x, \rho_\gamma y \rangle \mathrm{d}\gamma.$$

容易验证$\langle , \rangle_\Gamma$ 具有线性、对称性与正定性,因而是 V 上的内积. 下证$\langle , \rangle_\Gamma$ 满足(3)式. 对任给的 $\sigma \in \Gamma$,有

$$\langle \sigma x, \sigma y \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \langle \gamma(\sigma x), \gamma(\sigma y) \rangle \mathrm{d}\gamma \text{(据平移不变性)}$$

$$= \int_\Gamma \langle \gamma x, \gamma y \rangle \mathrm{d}\gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma,$$

所以$\langle , \rangle_\Gamma$ 是Γ-不变内积. 证毕.

等式(3)可改写为

$$\langle \rho_\gamma x, \rho_\gamma y \rangle_\Gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma,$$

可见 ρ_γ 作为 V 上的线性映射是保范数的,因而是正交变换,于是有

推论 13.1.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在有限维实向量空间 V 上，则在 V 上存在内积，使得对所有 $\gamma\in\Gamma$，ρ_γ 是正交的.

进而可推出：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 中的紧致 Lie 群可以与正交群 $O(n)$ 的闭子群等同.

定义 13.1.2 假设 Lie 群 Γ 同时作用在两个 n 维向量空间 V 与 W 上. 如果(Γ,V)和(Γ,W)之间存在一个和 Γ 的作用可交换的线性同构 $A:V\to W$，即

$$A(\gamma\cdot v)=\gamma\cdot(Av),\ \text{对任意 } \gamma\in\Gamma,\ v\in V,$$

则称(Γ,V)和(Γ,W)等价(或 Γ-同构)，并说 V 与 W 是 Γ-同构的.

易见，表示 $\rho_1:\Gamma\to\mathrm{GL}(V)$和 $\rho_2:\Gamma\to\mathrm{GL}(W)$等价的充要条件是：存在线性同构 $A:V\to W$，使得

$$\rho_2(\gamma)=A\rho_1(\gamma)A^{-1},\ \text{对每一 } \gamma\in\Gamma.$$

定义 13.1.3 设 ρ 为 Lie 群 Γ 在向量空间 V 上的表示. 若子空间 $W\subset V$ 在 Γ 的作用下不变，即

$$\Gamma\cdot W=\{\gamma\cdot w\mid\gamma\in\Gamma,\ w\in W\}\subset W,$$

则称 W 为 Γ-不变子空间.

显然，$\{0\}$和 V 本身是 Γ-不变子空间.

定义 13.1.4 (i) Lie 群 Γ 在向量空间 V 上的表示 ρ 叫做不可约的，如果 V 的 Γ-不变子空间仅为$\{0\}$与 V. 换句话说，V 无 Γ-不变非零真子空间.

(ii) V 的子空间 W 为 Γ-不可约的，是指 W 为 V 的 Γ-不变子空间，且 Γ 在 W 上的表示 $\rho|W$ 是不可约的.

在例 7 中曾定义 S^1 在$\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上的作用为 $\theta\cdot z=\mathrm{e}^{ik\theta}z$. 当 $k\neq0$ 时，它表示旋转角为 $k\theta$ 的旋转变换，因而 S^1 以及 $SO(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用是不可约的. 进而 $O(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用也是不可约的.

命题 13.1.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在向量空间 V 上，W 为 V 的 Γ-不变子空间，则存在 W 在 V 中的 Γ-不变补子空间

Z,使得

$$V = W \oplus Z.$$

证 据定理 13.1.1,存在 V 上的 Γ-不变内积 $\langle , \rangle_{\Gamma}$. 现利用这一内积构作 V 的下列子集

$$W^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle w, v \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \text{对所有 } w \in W \},$$

显然 $W^{\perp} \neq \varnothing$,并且容易验证 W 关于这一内积的正交补 $W^{\perp}$ 也是 Γ-不变的(细节留给读者),令 $Z = W^{\perp}$,则有 $V = W \oplus Z$. 证毕.

由这一命题可推出每一个紧致 Lie 群的表示可分解为有限个不可约表示的直和.

推论 13.1.2 设紧致 Lie 群 Γ 作用在有限维向量空间 V 上,则存在 Γ-不可约子空间 $V_1, \cdots, V_s$,使得

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

因此说表示(Γ, V)是完全可约的. 简言之,任何紧致 Lie 群的表示(Γ, V)是完全可约的.

证 设 V_1 是 $V(\neq \varnothing)$的 Γ-不可约子空间,且 $V_1 \neq \varnothing$(可选取 V_1 为非零 Γ-不变子空间中的维数最小者). 据命题 13.1.1,

$$(\Gamma, V) = (\Gamma, V_1) \oplus (\Gamma, V_1^{\perp}),$$

对 $V_1^{\perp}$ 重复上述过程,选取一个非零 Γ-不可约子空间 $V_2 \subset V_1^{\perp}$. 因为 V 是有限维的,这一过程经有限步后必然终止,于是结论得到.

本推论表明,研究紧致 Lie 群的线性表示可归结为不可约线性表示. 下述引理是研讨不可约线性表示的一个基本工具.

引理 13.1.1(Schur) 设 $\rho_1: \Gamma \to GL(V)$和 $\rho_2: \Gamma \to GL(W)$为两个不可约表示,$A: V \to W$ 为线性变换. 记

$$A \circ \rho_1(\Gamma) = \{ A \circ \rho_1(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \},$$

$$\rho_2(\Gamma) \circ A = \{ \rho_2(\gamma) \circ A \mid \gamma \in \Gamma \}.$$

若 $A\circ\rho_1(\Gamma)=\rho_2(\Gamma)\circ A$,则 $A=0$ 或 A 为可逆的.

证 由假设可推知 $\mathrm{Ker}A$ 和 $\mathrm{Im}A$ 分别是 V 和 W 的 Γ-不变子空间(细节由读者补述). 再由 ρ_1 与 ρ_2 的不可约性, $\mathrm{Ker}A$ 和 $\mathrm{Im}A$ 只有下列两种可能:

$$\mathrm{Ker}A = V \text{ 且 } \mathrm{Im}A = \{0\}, \text{ 即 } A = 0,$$

或者

$$\mathrm{Ker}A = \{0\} \text{ 且 } \mathrm{Im}A = W, \text{ 因而 } A \text{ 是可逆的}.$$

§13.2 Hilbert-Weyl 定理和 Schwarz 定理

本节介绍紧致 Lie 群的不变量理论中的两个深刻结果: Hilbert-Weyl 定理和 Schwarz 定理. 前者为描述不变多项式提供理论基础,后者说明上述结论可以推广到 C^∞ 不变函数芽.

13.2.1 Γ-不变多项式的描述

定义 13.2.1 设 Γ 为(紧致)Lie 群作用在向量空间 V 上. C^∞ 函数 $f: V\to\mathbb{R}$ 叫做 Γ-不变的,如果对任意 $\gamma\in\Gamma$, $v\in V$,有

$$f(\gamma v) = f(v). \tag{1}$$

特别,若 f 为多项式函数满足(1)式,则 f 称为 Γ-不变多项式.

因为 Γ-不变多项式的和与积仍为 Γ-不变的,所以 Γ-不变多项式组成之集 $\mathscr{P}(\Gamma)$是一个环.

例 1 设 $\Gamma=Z_2=\{\pm1\}$非平凡地作用在$\mathbb{R}$上,即 $-1\cdot x=-x$, 那么满足(1)式的 Z_2-不变函数 f 恰是偶函数. 易见,若 $f\in\mathscr{P}(Z_2)$,即 f 为 Z_2-不变多项式,则存在另一多项式 p, 使得

$$f(x) = p(x^2),$$

并且 x^2 是 Z_2-不变的.

例 2 设 S^1 标准地作用在$\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上, $\theta\cdot z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$. 因为 $x=$

$\frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})$,所以多项式 f 可以写成下列形式:

$$f(z) = \sum a_{jk}z^j\overline{z}^k,\ a_{jk} \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

而 f 为实值函数,$\overline{f}=f$, 故系数 a_{jk} 满足

$$\overline{a}_{jk} = a_{kj}. \tag{3}$$

现假定 f 是 S^1-不变的,$f(e^{i\theta}z)=f(z)$,于是

$$\sum a_{jk}e^{i\theta(j-k)}z^j\overline{z}^k = \sum a_{jk}z^j\overline{z}^k,$$

比较系数,得

$$a_{jk}e^{i\theta(j-k)} = a_{jk},\ 对所有\ \theta \in S^1,$$

从而当 $j\neq k$ 时,$a_{jk}=0$,f 可写为

$$f(z) = \sum a_{jj}(z\overline{z})^j.$$

再由(3)式知,$a_{jj}\in\mathbb{R}$. 令 p: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $p(x)=\sum a_{jj}x^j$, 则 $f(z)=p(z\overline{z})$. 这说明若 $f\in\mathscr{P}(S^1)$,必存在一元多项式 p, 使得 $f(z)=p(z\overline{z})$,并且 $z\overline{z}$ 是 S^1-不变多项式.

例 3 二面体群 D_n 在$\mathbb{C}$上的作用由

$$\theta \cdot z = e^{i\theta}z \quad \left(\theta = \frac{2\pi}{n}\right),\quad \kappa \cdot z = \overline{z}$$

生成. 类似于例 2,可以证明:对于每一个 D_n-不变多项式 $f(z)$,存在多项式 h: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,使得

$$f(z) = h(z\overline{z},\ z^n + \overline{z}^n),$$

并且 $z\overline{z}$, $z^n+\overline{z}^n$ 是 D_n-不变多项式. 证明留作练习.

上述 3 个例子启发我们给出下列

定义 13.2.2 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在向量空间 V 上. 如果在环 $\mathscr{P}(\Gamma)$中存在有限个 $u_1,\cdots,u_s$,使得每一个 Γ-不变多项

式 f 可写为 $u_1,\cdots,u_s$ 的多项式函数,那么这有限个 Γ-不变多项式 $u_1,\cdots,u_s$ 叫做环 $\mathscr{P}(\Gamma)$的 Hilbert 基.

13.2.2 Hilbert-Weyl 定理

上面 3 个例子所得到的结论在一般情形下也是对的,这就是所要介绍的 Hilbert-Weyl 定理.

定理 13.2.1 设 Γ 为紧致 Lie 群,线性地作用在向量空间 V 上,则环 $\mathscr{P}(\Gamma)$存在 Hilbert 基.

本定理的证明需用到 Hilbert 基定理,现陈述如下.设$\mathbb{R}$ 为交换环,规定

$$R[x]=\{r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0\mid r_0,r_1,\cdots,r_n\in R\},$$

易见 $R[x]$是交换环,其成员为环 R 上以 x 为不定元的多项式.归纳地,定义

$$R[x_1,\cdots,x_n]=R[x_1,\cdots,x_{n-1}][x_n],$$

它是 R 上含 n 个不定元 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式组成的交换环.

定理 13.2.2(Hilbert 基定理) 设交换环 R 中的理想均为有限生成的,则环 $R[x]$的每一个理想也是有限生成的.

证明见附录 B.

推论 13.2.1 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$的每一理想是有限生成的.

证 用归纳法.当 $n=0$ 时,实数域$\mathbb{R}$ 的理想只有$\{0\}$及$\mathbb{R}$,它们分别由 0 和 1 生成.当 $n>0$ 时,记$\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$为 R.依归纳假设,R 的每一理想是有限生成的.据定理 13.2.2,

$$\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]=R[x_n]$$

中的每一理想是有限生成的.证毕.

Hilbert-Weyl 定理的证明还用到下列

命题 13.2.1 设 $U\subset\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$为非空子集,则存在 U 的有限子集$\{u_1,\cdots,u_s\}$,使得每一 $u\in U$ 可写为

$$u = f_1 u_1 + \cdots + f_s u_s,$$

其中 $f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$.

证 设 $\mathscr{I}$ 为 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 中理想，由 U 所生成. 由推论 13.2.1，$\mathscr{I}$ 是有限生成的，设生成元为 $p_1, \cdots, p_l$. 因为 $\mathscr{I}$ 由 U 生成，每一 p_i 可写成形式

$$p_i = f_{i,1} u_{i,1} + \cdots + f_{i,k_i} u_{i,k_i},$$

其中 $f_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$，$u_{i,j} \in U (j = 1, \cdots, k_i, i = 1, \cdots, l)$. 从而有限集 $\{u_{ij}\}$ 生成 $\mathscr{I}$，这就是所要求的 U 的有限子集.

定理 13.2.1 的证明 紧致 Lie 群 Γ 作用在向量空间 V 上，设 V 的维数为 n. 将 V 等同于 $\mathbb{R}^n$，其坐标记为 $x_1, \cdots, x_n$，此时 $\mathscr{R}(\Gamma)$ 可视为 $x_1 \cdots, x_n$ 的 Γ-不变多项式所成之环. 需证存在有限个 $u_1, \cdots, u_s \in \mathscr{R}(\Gamma)$，使得每一 $u \in \mathscr{R}(\Gamma)$ 可写为

$$u = f(u_1, \cdots, u_s), \tag{4}$$

其中 $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ 为多项式函数. 我们说只要对 $\mathscr{R}(\Gamma)$ 中的齐次多项式来证明(4)式就行了，事实上，设 $v \in \mathscr{R}(\Gamma)$ 为 m 次 Γ-不变多项式，v 可表为

$$v = v_0 + v_1 + \cdots + v_m,$$

其中 v_j 为 j 次齐次多项式 $(j = 0, 1, \cdots, m)$，则每一 $v_j \in \mathscr{R}(\Gamma)$. 这是因为 Γ 线性地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上，故对每一 $\gamma \in \Gamma$，$v_j(\gamma x)$ 仍为 j 次齐次，$v(\gamma x) = v(x)$ 仅当 $v_j(\gamma x) = v_j(x)$ 对每一 j.

设 U 为 $\mathscr{I}(\Gamma)$ 中非常值齐次多项式所成之集，据命题 13.2.1，存在有限子集 $\{u_1, \cdots, u_s\} \subset U$，使得对每一 $u \in U$，有

$$u = f_1 u_1 + \cdots + f_s u_s, \quad f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]. \tag{5}$$

下面就齐次多项式 $h \in \mathscr{R}(\Gamma)$ 来验证(4)式，我们对 h 的次数 $\deg h$ 进行归纳证明.

若 $\deg h=0$，则 h 为常值多项式，(4)式显然成立，只需令 $f=h$. 归纳假定对所有 $h\in U$，当 $\deg h\leqslant k$ 时，(4)式成立. 现设 $u\in U$ 的次数为 $k+1$，且 u 表为(5)式. 可以假定 $f_j(j=1,\cdots,s)$ 均为齐次多项式，且 $\deg f_j=\deg u-\deg u_j(j=1,\cdots,s)$. 特别当 $\deg u<\deg u_j$ 时，$f_j=0$.

断言：(5)式中的齐次多项式 f_j 可代之以 Γ-不变齐次多项式 F_j，并且 $\deg F_j=\deg f_j(j=1,\cdots,s)$. 为此，将(5)式的两边在 Γ 上取规范化 Haar 积分，注意到 u，u_j 均为 Γ-不变多项式，因此有

$$u=u_1\int_\Gamma f_1(\gamma x)\mathrm{d}\gamma+\cdots+u_s\int_\Gamma f_s(\gamma x)\mathrm{d}\gamma. \tag{6}$$

令 $F_j(x)=\int_\Gamma f_j(\gamma x)\mathrm{d}\gamma$，由 Haar 积分的平移不变性知，$F_j$ 是 Γ-不变的，又因 Γ 是线性地作用，故 F_j 仍为齐次多项式且 $\deg F_j=\deg f_j$. 将(6)式改写为

$$u=F_1u_1+\cdots+F_su_s,\ F_1,\cdots,F_s\in\mathscr{P}(\Gamma).$$

由于每一 u_j 的次数不小于 1，

$$\deg F_j=\deg f_j\leqslant\deg u-1=k,$$

利用归纳假设，每一 F_j 可写成

$$F_j=g_j(u_1,\cdots,u_s),$$

其中 g_j 为多项式函数. 令

$$f(u_1,\cdots,u_s)=\sum_{j=1}^{s}g_j(u_1,\cdots,u_s)u_j,$$

则 $u=f(u_1,\cdots,u_s)$ 为所要求的.

13.2.3 Schwarz 定理

关于定理 13.2.1，Hilbert 曾经就线性群而非紧致群给出了证明，见文献[32]. Weyl 则在紧致 Lie 群情形下，对该定理提供了清

晰易懂的论证[67]. 令人高兴的是这一结果可以推广到 C^∞ 函数芽. 然而在一般的紧致 Lie 群情形下, C^∞ 芽结果被 Schwarz 所证明(见文献[62])却相距 Weyl 30 年. 在这之前, 只是对于某些特殊的紧致 Lie 群才得到相应的结论(例如见文献[24]和[69]). 现陈述 Schwarz 定理如下:

定理 13.2.3 设紧致 Lie 群 Γ 正交地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上. 记 Γ-不变 C^∞ 函数芽 $(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 所成之环为 $\varepsilon_n(\Gamma)$ (或 $\varepsilon_x(\Gamma)$, $\varepsilon(\Gamma)$), 令 $u_1, \cdots, u_s$ 为环 $\mathscr{P}(\Gamma)$ 的 Hilbert 基. 则对任意 $f\in\varepsilon_n(\Gamma)$, 存在芽 $h\in\varepsilon_s$, 使得

$$f(x) = h(u_1(x), \cdots, u_s(x)). \tag{7}$$

注 该定理可采用另外一种方式叙述. 定义映射 $\rho: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$ 为

$$\rho(x) = (u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

称为 Γ 的判别式. 令 $\rho^*: \varepsilon_s\to\varepsilon_n(\Gamma)$ 为 $\rho^* h = h\circ\rho$, 则 Schwarz 定理断言 ρ^* 是满同态.

下面给出证明思路. 设 $f\in\varepsilon_n(\Gamma)$, 则 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的 Taylor 级数 jf 是一个 Γ-不变的形式幂级数, 这里引用在定理 1.1.2 之后介绍的多重指标记号, 将 jf 表为

$$jf(x) = \sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha f(0)\cdot x^\alpha.$$

jf 是 Γ-不变的, 是指 $jf(\gamma x) = jf(x)$ $\forall\,\gamma\in\Gamma$, $x\in\mathbb{R}^n$. 首先指出 Hilbert-Weyl 定理可以推广到 Γ-不变的形式幂级数环上, 这就是下面的

命题 13.2.2 设 $\varphi(x)$ 是 Γ-不变的 n 元形式幂级数, 则存在 s 元形式幂级数 ψ, 使得

$$\varphi(x) = \psi(u_1(x), \cdots, u_s(x)).$$

证 记 $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(x)$，其中 φ_i 为 i 次齐次多项式. 据定理 13.2.1，对每一个 φ_i，存在 s 元多项式 $\psi_i(y_1,\cdots,y_s)$，使得

$$\varphi_i(x) = \psi_i(u_1(x),\cdots,u_s(x)),$$

这里可假定 $u_1,\cdots,u_s$ 都是齐次 Γ-不变多项式. 令 $l=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\deg u_j$. 显然 ψ_i 中非零项的最低次数不小于 $[i/l]$，这里 $[i/l]$ 表示不超过 i/l 的最大整数. 令

$$\psi(y) = \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i(y),\ y=(y_1,\cdots,y_s),$$

它是确定好了的形式幂级数. 因为对于任意取定的次数，只有有限个 ψ_i，并且每一个这样的 ψ_i 也只含有限个非零项属于上述和中. 易见 ψ 满足本命题要求. 证毕.

其次我们自然想到从 n 元形式幂级数的讨论回到 n 元 C^{∞} 函数芽上去，一个有用的研究工具是下列 Borel 引理（参看文献 [9]）.

引理 13.2.1 设 $\varphi(x)$ 是任意一个 n 元实系数形式幂级数，则存在 C^{∞} 函数芽 $f(x)\in\varepsilon_n$，使得

$$jf(x) = \varphi(x).$$

这说明 $j:\varepsilon_n\to\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^{\infty}=\mathbb{R}[[x_1,\cdots,x_n]]$ 是满射，其中 $\mathbb{R}[[x_1,\cdots,x_n]]$ 表示 n 元实系数形式幂级数环.

若 $f\in\mathcal{M}_n^{\infty}$（即 $jf\equiv 0$），则 f 为平坦函数芽. 下一命题告诉我们，只需对 Γ-不变平坦函数芽来证明 Schwarz 定理.

命题 13.2.3 若每一个 Γ-不变平坦函数芽 $g\in\varepsilon_n(\Gamma)$ 具有形式(7)，即

$$g(x) = h(u_1(x),\cdots,u_s(x)),\ h\in\varepsilon_s,$$

则 $\varepsilon_n(\Gamma)$ 中的每一芽必具形式(7).

证 任取 $g\in\varepsilon_n(\Gamma)$，则 jg 是 Γ-不变的形式幂级数. 据命题

13.2.2，存在 s 元形式幂级数 ψ，使得

$$jg(x) = \psi(u_1(x),\cdots,u_s(x)).$$

再据引理 13.2.1，存在 $f\in\varepsilon_s$，使得 $jf=\psi$. 于是

$$j(g(x) - f(u_1(x),\cdots,u_s(x))) \equiv 0,$$

这说明 $g(x)-f(u_1(x),\cdots,u_s(x))$是 Γ-不变的平坦芽. 依假设条件，存在 $h\in\varepsilon_s$，使得

$$g(x) - f(u_1(x),\cdots,u_s(x)) = h(u_1(x),\cdots,u_s(x)),$$

从而 g 具有所要求的形式(7). 证毕.

现在问：如何对 Γ-不变的平坦函数芽 $g\in\varepsilon(\Gamma)$来证明它具有形式(7)呢？这正是证明 Schwarz 定理的困难所在. 考察 Z_2 作用在$\mathbb{R}$上这一特殊情形. 设 g 为平坦芽且满足 $g(x)=g(-x)$. 令 $f(y)=g(\sqrt{|y|})$，则 $f(x^2)=g(x)$. 显然当 $y\neq 0$ 时，f 是 C^∞ 的. 对于 $y=0$，由 g 的平坦性可推得 f 在点 0 是光滑的. 这样一来，在 $\Gamma=Z_2$ 及 $V=\mathbb{R}$ 的情形下，已证明了 Schwarz 定理. 然而对于 Γ 为一般的紧致 Lie 群，实际的证明需用到另外一些知识与技巧. 读者如有兴趣，可参看文献[53]或[62].

§13.3　不变函数芽环上的有限生成模

本节讨论与紧致 Lie 群 Γ 可交换的C^∞ 映射. 由于本章探讨的是局部分歧问题，因此我们感兴趣的是具有上述性质的 C^∞ 映射芽，特别是非线性映射芽.

13.3.1　Γ-不变函数芽环上的有限生成模

定义 13.3.1　设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在两个可能不同的空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上，其坐标分别记为 x 和y. 映射芽 g：$(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}^m$ 若满足下列等变性条件

$$g(\gamma x) = \gamma g(x),\ 对所有\ \gamma\in\Gamma,$$

则称为 Γ-等变映射芽.将所有这样的 Γ-等变映射芽所成之集记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$.

引理 13.3.1 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 Γ-不变函数芽,$g:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^m$ 为 Γ-等变映射芽,则 $fg:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^m$ 为 Γ-等变映射芽.

证 任取 $\gamma\in\Gamma$, $x\in(\mathbb{R}^n,0)$,有

$$\begin{aligned}(fg)(\gamma x) &= f(\gamma x)g(\gamma x) = f(x)\cdot\gamma g(x)\\ &= \gamma(f(x)g(x)) = \gamma\cdot(fg)(x),\end{aligned}$$

因而

$$(fg)\gamma = \gamma(fg),\ \text{对所有}\ \gamma\in\Gamma,$$

fg 是 Γ-等变的.证毕.

记 $\mathscr{P}_{n;\,m}(\Gamma)=\{g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)\mid g$ 为 Γ-等变多项式映射芽$\}$.由上述引理知,$\mathscr{P}_{n;\,m}(\Gamma)$ 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$ 分别为环 $\mathscr{P}(\Gamma)$ 与 $\varepsilon(\Gamma)$ 上的模.现在问:它们是不是有限生成的呢?

定理 13.3.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 上,则

(i) $\mathscr{P}_{n;\,m}(\Gamma)$ 是有限生成的 $\mathscr{P}(\Gamma)$-模,

(ii) $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$ 是有限生成的 $\varepsilon(\Gamma)$-模,

并且若 $\{g_1,\cdots,g_l\}$ 是模 $\mathscr{P}_{n;\,m}(\Gamma)$ 的生成元,则它们也是模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$ 的生成元.

证 基本想法是将等变情形转换为不变情形.由于 Γ 是紧致 Lie 群,可以假定 Γ 正交地作用在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上.将 $\mathbb{R}^m$ 上的 Γ-不变内积记为 $\langle\,,\rangle$.设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$,定义

$$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,0)\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\langle g(x),y\rangle,\tag{1}$$

又 Γ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上的作用规定为对角作用,即 $\gamma(x,y)=(\gamma x,\gamma y)$,计算

$$f(\gamma x,\gamma y)=\langle g(\gamma x),\gamma y\rangle=\langle\gamma g(x),\gamma y\rangle$$

$$= \langle g(x), y\rangle = f(x, y),$$

因此 f 是 Γ-不变函数芽.

反过来,通过下列关系:

$$g(x) = (\mathrm{D}_y f(x, 0))^t, \tag{2}$$

可由 $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$ 上的 Γ-不变函数芽 f 得到 Γ-等变映射芽 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$. 事实上,等式

$$f(\gamma x, \gamma y) = f(x, y)$$

两边对 y 求导并在 $y=0$ 处取值,得

$$\mathrm{D}_y f(\gamma x, 0) \cdot \gamma = \mathrm{D}_y f(x, 0),$$

取转置,并利用(2)式,得

$$\gamma^{\mathrm{T}} g(\gamma x) = g(x),$$

由于 Γ 正交地作用在$\mathbb{R}^m$ 上,$\gamma^{\mathrm{T}} = \gamma^{-1}$,于是有 $g(\gamma x) = \gamma g(x)$.

记$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$上的 Γ-不变多项式芽所成之环为 $\mathscr{P}_{n+m}(\Gamma)$,它的 Hilbert 基设为 $u_1(x, y), \cdots, u_s(x, y)$. 又记$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$上的 Γ-不变函数芽全体组成的环为 $\varepsilon_{n+m}(\Gamma)$.

(i) 任取 $g \in \mathscr{P}_{n;m}(\Gamma)$, 由(1)式可得 $f \in \mathscr{P}_{n+m}(\Gamma)$, 并且容易验证(2)式成立. 据 Hilbert-Weyl 定理,$f \in \mathscr{P}_{n+m}(\Gamma)$可表示为

$$f(x, y) = h(u_1(x, y), \cdots, u_s(x, y)),$$

其中 h 为多项式函数. 代入(2)式可求得

$$g(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial u_j} h(u_1(x, 0), \cdots, u_s(x, 0))(\mathrm{D}_y u_j(x, 0))^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

又$\frac{\partial}{\partial u_j} h(u_1(x, 0), \cdots, u_s(x, 0))$为$\mathbb{R}^n$ 上的 Γ-不变多项式函数 $(j=1, \cdots, s)$,

$$(\mathrm{D}_y u_j(x, 0))^{\mathrm{T}},\ j = 1, \cdots, s \tag{4}$$

是 Γ-等变多项式映射，(3)式说明(4)式是模$\mathscr{P}_{n;\,m}(\Gamma)$的一组生成元.

(ii) 任取 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$. 由(1)式得 $f \in \varepsilon_{n+m}(\Gamma)$，并且(2)式成立. 据 Schwarz 定理，

$$f(x, y) = h(u_1(x, y), \cdots, u_s(x, y)),$$

其中 h 为 C^∞ 函数芽. 注意到$\dfrac{\partial}{\partial u_j} h(u_1(x, 0), \cdots, u_s(x, 0)) \in \varepsilon(\Gamma)$，由(3)式说明(4)式是模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$的一组生成元. 证毕.

设 $g:(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$ 为 Γ-等变映射芽，则它的导数

$$\mathrm{D}g = S:(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathrm{gl}(m, \mathbb{R})$$

是一个取值为 $m \times m$ 矩阵的 C^∞ 映射芽，其中 $\mathrm{gl}(m, \mathbb{R})$表实 $m \times m$ 矩阵全体. 由 g 的 Γ-等变性知

$$S(\gamma x) = \gamma S(x) \gamma^{-1},\ \forall\, \gamma \in \Gamma, \tag{5}$$

记

$$\widetilde{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma) = \{S:(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathrm{gl}(m, \mathbb{R}) \mid S \text{ 满足(5) 式}\}.$$

设紧致 Lie 群 Γ 线性地(因而正交地)作用在$\mathbb{R}^n$ 上，并且依相似性(如§13.1 中例 8 所述)作用在 $\mathrm{gl}(m, \mathbb{R})$上，则由定理 13.3.1 得到

推论 13.3.1 $\widetilde{\varepsilon}_{n;\,m}(\Gamma)$是一个有限生成的 $\varepsilon_n(\Gamma)$-模.

例 1 设 $\Gamma = S^1$ 标准地作用在$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ 上，$\theta \cdot z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. 断言：$\boldsymbol{\varepsilon}_{2;\,2}(S^1)$中的每一 g 可表为

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})\mathrm{i}z, \tag{6}$$

其中 $p, q:\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为 S^1-不变函数芽.

假定 $g:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为 S^1-等变多项式. 如同§13.2 中例 2 那样，将 g 写为

$$g(z)=\sum b_{jk}z^j\overline{z}^k,\ b_{jk}\in\mathbb{C},$$

由等变性，$g(e^{i\theta}z)=e^{i\theta}g(z)$，因而有

$$\sum b_{jk}z^j\overline{z}^k=\sum b_{jk}e^{(j-k-1)\theta}z^j\overline{z}^k,$$

易见当 $j\neq k+1$ 时，$b_{jk}=0$，从而

$$g(z)=\sum b_{k+1,\,k}(z\overline{z})^k z.$$

令 $p(u)=\sum\limits_k \mathrm{Re}(b_{k+1,\,k})u^k$，$q(u)=\sum\limits_k \mathrm{Im}(b_{k+1,\,k})u^k$，则 g 具有形式(6). 应用定理 13.3.1，z 和 iz 既是 $\mathscr{P}(S^1)$-模 $\mathscr{P}_{2;\,2}(S^1)$ 的生成元，又是 $\varepsilon(S^1)$-模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2;\,2}(S^1)$ 的生成元.

例 2 设 $\Gamma=O(2)$ 标准地作用在 $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ 上，则每一个 $O(2)$-等变映射芽 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{2;\,2}(O(2))$ 具有形式

$$g(z)=p(z\overline{z})z. \tag{7}$$

事实上，$O(2)$ 由 $SO(2)\cong S^1$ 及翻转 κ 生成，每一 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{2;\,2}(O(2))$ 必为 S^1-等变映射芽. 由例 1 知

$$g(z)=p(z\overline{z})z+q(z\overline{z})iz.$$

注意 g 还满足

$$g(\kappa z)=\kappa g(z),\quad \kappa z=\overline{z},$$

故 $g(\overline{z})=\overline{g(z)}$. 而 $\overline{g(\overline{z})}=p(z\overline{z})\cdot z-q(z\overline{z})iz$，因此有 $q(z\overline{z})=0$. 应用定理 13. 3. 1，由(7)式知 z 生成环 $\varepsilon(O(2))$ 上的模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2;\,2}(O(2))$.

例 3 作为练习，证明每一个 D_n-等变映射芽 $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 具有形式

$$g(z)=p(u,\,v)z+q(u,\,v)\overline{z}^{\,n-1},$$

其中 $u=z\overline{z}$，$v=z^n+\overline{z}^{\,n}$. 据定理 13.3.1. z 和 $\overline{z}^{\,n-1}$ 是环 $\varepsilon(D_n)$ 上的模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2;\,2}(D^n)$ 的生成元.

13.3.2 等变预备定理

设紧致 Lie 群 Γ 作用在空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,其坐标分别记为 x 和 y. $\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^m$ 上的 Γ-不变函数芽环分别记为$\varepsilon_x(\Gamma)$和 $\varepsilon_y(\Gamma)$.

设 φ: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$为 Γ-等变映射芽,定义 φ^* : $\varepsilon_y(\Gamma)\to\varepsilon_x(\Gamma)$为

$$\varphi^*(f) = f\circ\varphi, \quad \forall f\in\varepsilon_y(\Gamma).$$

$\varphi^*(f)\in\varepsilon_x(\Gamma)$,这是因为对于任意 $\gamma\in\Gamma$, $x\in(\mathbb{R}^n, 0)$有

$$\varphi^*(f)(\gamma x) = f(\varphi(\gamma x)) = f(\gamma\varphi(x)) = f(\varphi(x)) = \varphi^*(f)(x).$$

易见 φ^* 是一个环同态,称为 φ 的拉回.

假设 N 是一个$\varepsilon_x(\Gamma)$-模.借助于 φ^*,将 N 看作是$\varepsilon_y(\Gamma)$-模,其纯量乘法定义如下:对任意 $f\in\varepsilon_y(\Gamma)$, $n\in N$,规定

$$f\cdot n = \varphi^*(f)\cdot n.$$

如果 N 作为$\varepsilon_x(\Gamma)$-模是有限生成的,问 N 作为$\varepsilon_y(\Gamma)$-模是否有限生成呢?

定理 13.3.2(Malgrange 预备定理的等变形式) 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,φ: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$为 Γ-等变映射芽.假定 N 是有限生成的$\varepsilon_x(\Gamma)$-模.借助于环同态 φ^*,N 作为 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模是有限生成的当且仅当

$$\dim_{\mathbb{R}} N/\mathcal{M}_y(\Gamma)\cdot N < \infty, \tag{8}$$

这里 $\mathcal{M}_y(\Gamma)=\{f\in\varepsilon_y(\Gamma)\mid f(0)=0\}$是环 $\varepsilon_y(\Gamma)$的极大理想.

证 必要性.设 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模 N 的生成元为 $n_1,\cdots,n_k$.任取 $n\in N$,则存在 Γ-不变函数芽$f_1,\cdots,f_k\in\varepsilon_y(\Gamma)$,使得

$$n = f_1n_1 + \cdots + f_kn_k.$$

依 Taylor 定理,$f_j(y)=c_j+\tilde{f}_j(y)$, $c_j=f_j(0)\in\mathbb{R}$, $\tilde{f}_j\in\mathcal{M}_y(\Gamma)$

$(j=1, \cdots, k)$,因此

$$h = c_1 n_1 + \cdots + c_k n_k + \tilde{f}_1 n_1 + \cdots + \tilde{f}_k n_k,$$

由此可推出 $N = \mathbb{R}\{n_1, \cdots, n_k\} + \mathscr{M}_y(\Gamma) \cdot N$,并且

$$\dim_{\mathbb{R}} N / \mathscr{M}_y(\Gamma) \cdot N \leqslant k < \infty.$$

充分性. 设 $u_1, \cdots, u_s$ 及 $v_1, \cdots, v_t$ 分别为 $\varepsilon_x(\Gamma)$ 和 $\varepsilon_y(\Gamma)$ 的 Hilbert 基,并假定这些生成元都是齐次多项式. 令

$$\rho: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0),\ \rho(x) = (u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

$$\sigma: (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0),\ \sigma(y) = (v_1(y), \cdots, v_t(y)),$$

Schwarz 定理告诉我们,$\rho^*: \varepsilon_s \to \varepsilon_x(\Gamma)$, $\sigma^*: \varepsilon_t \to \varepsilon_y(\Gamma)$ 均为满同态. 此外,对每一 $j = 1, \cdots, t$, $v_j \circ \varphi: (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ 是 Γ-不变函数芽. 由 Schwarz 定理,存在 $\psi_j \in \varepsilon_s$, 使得

$$\psi_j \circ \rho = v_j \circ \varphi.$$

令 $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_t)$, 则 $\psi: (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0)$满足 $\psi \circ \rho = \sigma \circ \varphi$, 于是有

$$\rho^* \circ \psi^* = \varphi^* \circ \sigma^*. \tag{9}$$

依条件,N 是有限生成的 $\varepsilon_x(\Gamma)$-模,又 $\rho^*: \varepsilon_s \to \varepsilon_x(\Gamma)$为满同态,故 N 作为 ε_s-模也是有限生成的. 另外,借助于 φ^*,N 是 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模. 而 $\sigma^*: \varepsilon_t \to \varepsilon_y(\Gamma)$是满同态,因此要证 N 为有限生成的 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模,只要证明 N 是有限生成的 ε_t-模就行了.

其次,(9)式说明 N 作为环 ε_t 上的模,其模结构是由 N 在环 ε_s 上的模结构通过 ψ^* 得到的. 现 N 作为 ε_s-模是有限生成的,应用 Malgrange 预备定理,只要能证明

$$\dim_{\mathbb{R}} N / \psi^*(\mathscr{M}_t) \cdot N < \infty, \tag{10}$$

则 N 便是有限生成的 ε_t-模. 依上述分析,余下证明(10)式成立.

$$
\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} N/\psi^*(\mathcal{M}_t)\cdot N &= \dim_{\mathbb{R}} N/\rho^*(\psi^*(\mathcal{M}_t))\cdot N \\
&= \dim_{\mathbb{R}} N/\varphi^*(\sigma^*(\mathcal{M}_t))\cdot N \\
&= \dim_{\mathbb{R}} N/\varphi^*(\mathcal{M}_y(\Gamma))\cdot N \\
&= \dim_{\mathbb{R}} N/\mathcal{M}_y(\Gamma)\cdot N,
\end{aligned}
$$

故由(8)式得(10)式.

推论 13.3.2 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^m$ 上，φ: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$为 Γ-等变映射芽.假设 N 是有限生成的 $\varepsilon_x(\Gamma)$-模，且 $n_1,\cdots,n_k\in N$.那么 N 作为$\varepsilon_y(\Gamma)$-模由 $n_1,\cdots,n_k$ 生成当且仅当

$$N=\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_k\}+\mathcal{M}_y(\Gamma)\cdot N. \tag{11}$$

证 $\Rightarrow$在定理 13.3.2 的必要性证明中已证.

$\Leftarrow$ 令 N 的$\varepsilon_y(\Gamma)$-子模$\widetilde{N}=\varepsilon_y(\Gamma)\cdot\{n_1,\cdots,n_k\}$，需证 $N=\widetilde{N}$,显然只要证 $N\subset\widetilde{N}$.条件(11)说明 $\dim_{\mathbb{R}} N/\mathcal{M}_y(\Gamma)\cdot N<\infty$,据定理 13.3.2,$N$ 是有限生成的$\varepsilon_y(\Gamma)$-模.并且由(11)式自然有

$$N\subset\widetilde{N}+\mathcal{M}_y(\Gamma)\cdot N,$$

再据 Nakayama 引理,$N\subset\widetilde{N}$.证毕.

考虑到后面的需要,我们给出另一推论.设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 上，令 π: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^l$，$\pi(x,\lambda,\delta)=\delta$ 为投影,又设 Γ 在$\mathbb{R}^l$ 上的作用是平凡的,易见 π 是一个 Γ-等变映射.

推论 13.3.3 设 N 是环$\varepsilon_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$上的有限生成模,$n_1,\cdots,n_t\in N$.借助于 π^*,N 可视为ε_δ-模,那么下列断言是等价的:

(a) $N=\varepsilon_\delta\{n_1,\cdots,n_t\}$,

(b) $N=\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle\cdot N+\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_t\}$，其中$\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle$表示 $\boldsymbol{\varepsilon}_\delta$ 中由$\delta_1,\cdots,\delta_l$ 生成的理想,即 $\mathcal{M}_\delta$,

(c) 令 $N_0=N/\mathcal{M}_\delta\cdot N$,则 $N_0=\mathbb{R}\{\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_t\}$,其中 $\bar{n}_j$ 为 n_j

在 N_0 中的投影($j=1,\cdots,t$).

证 (b)⇔(c)显然.

(a)⇔(b) 因 Γ 在$\mathbb{R}^l$ 上的作用是平凡的,故 $\mathscr{M}_\delta(\Gamma)=\mathscr{M}_\delta=\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle$. 现据推论 13.3.2,

$$N=\varepsilon_\delta\{n_1,\cdots,n_t\}\Leftrightarrow N=\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_t\}+\mathscr{M}_\delta(\Gamma)\cdot N$$

$$\Leftrightarrow N=\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle\cdot N+\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_t\}.$$

§ 13.4 等变分歧问题

本节假定 Γ 为紧致 Lie 群,它线性地作用在两个可能不同的空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,这里 $n\geqslant m$. 记$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 的坐标分别为 x 和 y.

13.4.1 等变分歧问题的 Γ-等价

设 C^∞ 映射芽 $g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,(0,0))\to\mathbb{R}^m$ 满足下列等变性条件

$$g(\gamma x,\lambda)=\gamma g(x,\lambda),\ \forall\,\gamma\in\Gamma,\ x\in(\mathbb{R}^n,0),\ \lambda\in(\mathbb{R}^k,0),\tag{1}$$

将所有这样的 Γ-等变映射芽组成之集记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$. 特别,当 $m=n$ 时,简记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$或 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

定义 13.4.1 映射芽 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$叫做以 Γ 为对称群的k 参数等变分歧问题,如果它满足

$$g(0,0)=0,\ (\mathrm{D}_xg)_{(0,0)}=0,\tag{2}$$

这里 D_xg 表示g 关于x 的导数,可看作由 g 关于x 的一阶偏导数组成的 $m\times n$ Jacobi 矩阵. $x=(x_1,\cdots,x_n)$叫做状态变量,$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$称为分歧参数.

注 对于上述条件(2),作如下解释. 取 $m=n$,考虑含有参数 $\lambda\in\mathbb{R}^k$ 的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g(x,\lambda) \tag{3}$$

的对称性，其中 $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射. 如同§13.1 那样，设 γ 是一个可逆 $n\times n$ 矩阵满足条件(1)，则 γ 反映了方程(3)的对称性，并且满足条件(1)的所有 γ 组成一个群，叫做方程(3)的对称群. $x=0$, $\lambda=0$ 为方程(3)的平衡解自然 $g(0,0)=0$. 若 $(\mathrm{D}_xg)_{(0,0)}$ 的秩小于 n 但不等于 0，可以应用带对称性的 Liapunov-Schmidt 约化(参看文献[30])，使得约化后的 g' 的 Jacobi 矩阵为零矩阵，并且约化方程保留原方程的对称性.

设 l 为非负整数. $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的子空间 $\mathscr{M}^l_{n,k;m}(\Gamma)$ 定义为满足下列条件的 Γ-等变映射芽所成的空间，这样的等变芽关于 x 和 λ 的导数在原点的值，当阶数小于 l 时全为零. 用式子表示，

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^l_{n,k;m}(\Gamma)&=\{g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)\mid(\mathrm{D}^\alpha g)_{(0,0)}=0,\ |\alpha|<l\}\\&=\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)\cap\mathscr{M}^l_{x,\lambda}\cdot\varepsilon^{\times m}_{x,\lambda},\end{aligned}$$

特别，记 $\mathscr{M}^1_{n,k;m}(\Gamma)=\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$.

设取值为 $m\times m$ 矩阵的映射芽 $S:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,(0,0))\to\mathrm{gl}(m,\mathbb{R})$ 满足条件

$$S(\gamma x,\lambda)=\gamma S(x,\lambda)\gamma^{-1},\ 对所有\ \gamma\in\Gamma. \tag{4}$$

令

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)=\{&S:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,(0,0))\\&\to\mathrm{gl}(m,\mathbb{R})\mid S\ 满足(4)式\},\end{aligned}$$

特别当 $m=n$ 时，$\widetilde{\varepsilon}_{n,k;n}(\Gamma)$ 简记为 $\widetilde{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$. 据定理 **13.3.1** 和推论 13.3.1，$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 和 $\widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 是 Γ-不变函数芽环 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$ 上的有限生成模，其中 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)=\{\alpha:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,(0,0))\to\mathbb{R}\mid\alpha(\gamma x,\lambda)=\alpha(x,\lambda),\ \forall\,\gamma\in\Gamma\}$.

此外，将 $\mathbb{R}^n$ 上的所有 Γ-等变线性映射芽组成的向量空间记

为 $\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)$、$\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)\cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$中包含单位元的连通分支记为 $\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0$，当 Γ 为平凡群(即 $\Gamma=1$)时，简记为 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)^0$.

定义 13.4.2 紧致 Lie 群 Γ 在$\mathbb{R}^n$ 上的表示叫做绝对不可约的，如果$\mathbb{R}^n$ 上的线性映射与 Γ 可交换，则它必为恒等映射 I_n 的数量倍，即

$$\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}\{I_n\},$$

此时 $\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0=\{cI_n \mid c>0\}$. 而且不难证明：紧致 Lie 群 Γ 在$\mathbb{R}^n$ 上的表示如果是绝对不可约的，则必为不可约的(留作练习). 例如 $O(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的标准作用是绝对不可约的，$SO(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的标准作用是不可约的但非绝对不可约.

有了上述准备，现在来建立两个 Γ-等变分歧问题等价的概念.

定义 13.4.3 设 $g,h\in \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$是两个等变分歧问题. 如果存在$(S,X,\Lambda)\in \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)\times \mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)\times \mathscr{M}_k\cdot \varepsilon_k^{\times k}$，使得

$$h(x,\lambda) = S(x,\lambda)g(X(x,\lambda),\Lambda(\lambda)), \tag{5}$$

并且

$$S(0,0)\in \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^m)^0,\ (\mathrm{D}_xX)_{(0,0)}\in \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0, (\mathrm{D}\Lambda)_0\in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k)^0, \tag{6}$$

则说 h 与 g 是Γ-等价的，记为 $h\sim_\Gamma g$.

如果还有 $\Lambda(\lambda)\equiv\lambda$，那么 h 与 g 是强Γ-等价的，记为 $h\overset{s}{\sim}_\Gamma g$.

令集

$$\mathscr{D}(\Gamma) = \{(S,X,\Lambda)\in \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)\times \mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)\times \mathscr{M}_k\cdot \varepsilon_k^{\times k} \mid S(0,0) \in \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^m)^0,\ (\mathrm{D}_xX)_{(0,0)}\in \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0,\ (\mathrm{D}\Lambda)_0\in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k)^0\},$$

规定乘法运算如下：记 $\varphi_i=(X_i,\Lambda_i)(i=1,2)$，

$$(S_2,\varphi_2)\circ(S_1,\varphi_1) = (S_2\cdot(S_1\circ\varphi_2),\ \varphi_1\circ\varphi_2),$$

其中

$$S_2\cdot(S_1\circ\varphi_2)(x,\lambda)=S_2(x,\lambda)\cdot S_1(\varphi_2(x,\lambda)),$$

$$\varphi_1\circ\varphi_2(x,\lambda)=(X_1\circ\varphi_2(x,\lambda),\ \Lambda_1\circ\Lambda_2(\lambda)),$$

易证 $\mathscr{D}(\Gamma)$在上述乘法运算下作成一个群,称为 Γ-等价群,并且 $\mathscr{D}(\Gamma)$在$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$上的作用正好诱导出上面的 Γ-等价关系.令

$$\mathscr{D}^s(\Gamma)=\{(S,X,\Lambda)\in\mathscr{D}(\Gamma)\mid\Lambda(\lambda)\equiv\lambda\},$$

则 $\mathscr{D}^s(\Gamma)$是 $\mathscr{D}(\Gamma)$的正规子群,称为强 Γ-等价群.

例 1 设 $g:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},(0,0))\to\mathbb{R}$ 为 Z_2-等变映射芽,则

$$g(-x,\lambda)=-g(x,\lambda),$$

g 关于 x 为奇函数,可写成 $g(x,\lambda)=a(x^2,\lambda)\cdot x$,因而

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(Z_2)=\varepsilon_{u,\lambda}\{x\},$$

其中 $u=x^2$,$\varepsilon_{u,\lambda}$表示变量u 和λ 的C^∞ 函数芽所成的环.

$g,h\in\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(Z_2)$是 Z_2-等价的,是指存在 C^∞ 函数芽 $S(x,\lambda)$, $X(x,\lambda)$及 $\Lambda(\lambda)$,使得

$$h(x,\lambda)=S(x,\lambda)g(X(x,\lambda),\Lambda(\lambda)),$$

并且 X 是x 的奇函数,S 是x 的偶函数,又 $X(0,0)=0$, $\Lambda(0)=0$, $S(0,0)>0$, $X'_x(0,0)>0$ 及 $\Lambda'(0)>0$.

例 2 考虑 $Z_2\oplus Z_2$ 在$\mathbb{R}^2$ 上的作用.群 $Z_2\oplus Z_2$ 有 4 个元素(ε,δ),这里 $\varepsilon=\pm1$, $\delta=\pm1$.群元素(ε,δ)在点$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 的作用定义为$(\varepsilon,\delta)\cdot(x,y)=(\varepsilon x,\delta y)$.可以把$(\varepsilon,\delta)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用想象为线性映射,对应的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}.$$

现设 $g:(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R},(0,0))\to(\mathbb{R}^2,0)$为 $Z_2\oplus Z_2$-等变映射芽,则有

$$g((\varepsilon, \delta)\cdot(x, y), \lambda) = (\varepsilon, \delta)g(x, y, \lambda). \tag{7}$$

断言:存在光滑函数芽 $p(u, v, \lambda)$和 $q(u, v, \lambda)$,使得

$$g(x, y, \lambda) = (p(x^2, y^2, \lambda)x, q(x^2, y^2, \lambda)y), \tag{8}$$

且

$$p(0, 0, 0) = 0, \quad q(0, 0, 0) = 0.$$

事实上,将 g 写为

$$g(x, y, \lambda) = (a(x, y, \lambda), b(x, y, \lambda)),$$

由(7)式可推得

$$a(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = \varepsilon a(x, y, \lambda), \ b(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = \delta b(x, y, \lambda).$$

取 $\varepsilon = -1$, $\delta = 1$, 上式说明 a 是 x 的奇函数,b 是 x 的偶函数;取 $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$,则 a 为 y 的偶函数,b 为 y 的奇函数. 据 Taylor 定理,

$$a(x, y, \lambda) = \tilde{a}(x, y, \lambda)x, \ b(x, y, \lambda) = \tilde{b}(x, y, \lambda)y,$$

其中 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ 同时是 x 和 y 的偶函数,因而 g 具有形式(8). 再有,由 $(\mathrm{D}_x g)_{(0,0)} = 0$ 知,g 的线性项$((p(0, 0, 0)x, q(0, 0, 0)y))$为 0,于是 $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0$.

假设 g, h: $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \to \mathbb{R}^2$ 是 $Z_2 \oplus Z_2$-等变分歧问题. 如果 g 和 h 是 $Z_2 \oplus Z_2$-等价的,那么存在可逆的 2×2 矩阵 $S(x, y, \lambda)$光滑地依赖于 x, y, λ,以及局部微分同胚 $\Phi(x, y, \lambda) = (X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$,使得

(i) $g(x, y, \lambda) = S(x, y, \lambda)h(X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$,

(ii) $X(0, 0, 0) = (0, 0)$, $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda'(0) > 0$,

(iii) $X(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = (\varepsilon, \delta)X(x, y, \lambda)$,

(iv) $S(\varepsilon x, \delta y, \lambda)\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} S(x, y, \lambda)$.

由(iii)知,X 是 $Z_2 \oplus Z_2$-等变的,再由上述断言,便有

(iii)′ $X(x, y, \lambda)=(a(x^2, y^2, \lambda)x, b(x^2, y^2, \lambda)y)$.
记 $z=(x, y)$，则

$$(\mathrm{D}_z X)_{(0,0,0)}=\begin{bmatrix} a(0,0,0) & 0 \\ 0 & b(0,0,0) \end{bmatrix}$$为对角矩阵.

另外，将 S 表示为

$$S(x, y, \lambda)=\begin{bmatrix} S_1(x, y, \lambda) & S_2(x, y, \lambda) \\ S_3(x, y, \lambda) & S_4(x, y, \lambda) \end{bmatrix},$$

由(iv)并通过计算可知，S_1 和 S_4 均为 x 和 y 的偶函数，S_2 和 S_3 关于 x 和 y 为奇函数，因此 $S(x, y, \lambda)$ 可写为

$$\text{(iv)}'\ S(x, y, \lambda)=\begin{bmatrix} c_1(x^2, y^2, \lambda) & c_2(x^2, y^2, \lambda)xy \\ c_3(x^2, y^2, \lambda)xy & c_4(x^2, y^2, \lambda) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

特别

$$S(0,0,0)=\begin{bmatrix} c_1(0,0,0) & 0 \\ 0 & c_4(0,0,0) \end{bmatrix}$$

也是对角矩阵. $Z_2 \oplus Z_2$-等价还要求

(v) $a(0,0,0)>0$, $b(0,0,0)>0$, $c_1(0,0,0)>0$, $c_4(0,0,0)>0$.

于是 g 和 h 是 $Z_2 \oplus Z_2$-等价，如果存在上述 S 和 $\Phi=(X, \Lambda)$，满足(i)，(ii)，(iii)′，(iv)′及(v).

以上两例可见，对称性对等变映射芽给予了一定限制. 而定义 13.4.3 中条件(6)基于对分歧问题的解的稳定性考虑(参看文献[31]).

13.4.2 等变轨道切空间

我们将导出(5)式的无穷小形式，定义 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的等变

轨道切空间，它是分歧理论中的一个基本概念．在应用奇点理论方法研究以紧致 Lie 群为对称群的等变分歧问题的识别以及开折理论中，它是一个不可缺少的工具．

为便于理解等变轨道切空间的概念，我们从几何直观入手．设 $g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$．在 Γ-等价群 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 中取一条经过单位元 1 的光滑曲线 $\{\delta_t\}$，这里 $\delta_t=(S_t, X_t, \Lambda_t)\in\mathscr{D}(\Gamma)$，$\delta_0=(S_0,X_0,\Lambda_0)=1$，并且 S_0 为 $m\times m$ 单位矩阵，$X_0(x,\lambda)=x$，$\Lambda_0(\lambda)=\lambda$．将 δ_t 作用于 g 得 $\delta_t g$，

$$\delta_t g(x,\lambda)=S(x,\lambda,t)g(X(x,\lambda,t),\Lambda(\lambda,t)),$$

因而 $\{\delta_t g\}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 中一条经过 g 的光滑曲线，把 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_t g)|_{t=0}$ 看作是在 g 处的一个切向量．

定义 13.4.4 设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$．轨道 $\mathscr{D}(\Gamma)\cdot g$ 在 g 处的切空间 $T(g,\mathscr{D}(\Gamma))$ 定义为

$$T(g,\mathscr{D}(\Gamma))=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_t g)|_{t=0}\mid \delta_t\in\mathscr{D}(\Gamma),\ \delta_0=1\right\},$$

而将

$$T(g,\mathscr{D}^s(\Gamma))=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_t g)|_{t=0}\mid \delta_t\in\mathscr{D}^s(\Gamma),\delta_0=1\right\}$$

叫做在 g 处的 Γ-等变限制切空间．并记 $T(g,\mathscr{D}^s(\Gamma))=RT(g,\Gamma)$，$T(g,\mathscr{D}(\Gamma))=T(g,\Gamma)$．

经计算，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(x,\lambda,t)g(X(x,\lambda,t),\Lambda(\lambda,t)))|_{t=0}\\&=\dot{S}(x,\lambda,0)g(x,\lambda)+(\mathrm{D}_x g)\dot{X}(x,\lambda,0)\\&\quad+(\mathrm{D}_\lambda g)\dot{\Lambda}(\lambda,0)=\dot{S}_0(x,\lambda)g(x,\lambda)\end{aligned}$$

$$+(\mathrm{D}_x g)\dot{X}_0(x, \lambda)+(\mathrm{D}_\lambda g)\dot{\Lambda}_0(\lambda),$$

其中 $\dot{S}, \dot{X}, \dot{\Lambda}$ 分别表示 S, X, Λ 对 t 的导数. 因为 $X(x, \lambda, t)$ 和 $S(x, \lambda, t)$ 分别满足等变性条件(1)和(4),所以 $\dot{X}(x, \lambda, 0)$, $\dot{S}(x, \lambda, 0)$ 也分别满足(1)和(4). 又 $X(0, 0, t)\equiv 0, \Lambda(0, t)\equiv 0$,所以 $\dot{S}_0 \in \tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$, $\dot{X}_0 \in \mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)$, $\dot{\Lambda}_0 \in \mathscr{M}_k \cdot \varepsilon_k^{\times k}$. 由此可知

$$\begin{aligned} T(g, \Gamma)= & \{Sg+(\mathrm{D}_x g)X \mid (S, X) \in \tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma) \times \mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)\} \\ & +\{(\mathrm{D}_\lambda g) \cdot \Lambda \mid \Lambda \in \mathscr{M}_k \cdot \varepsilon_k^{\times k}\} \\ = & (\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma))+\tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma) \cdot g+(\mathrm{D}_\lambda g)(\mathscr{M}_g \cdot \varepsilon_k^{\times k}), \end{aligned} \tag{10}$$

并且

$$RT(g, \Gamma)=(\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma))+\tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma) \cdot g. \tag{11}$$

特别当 $m=n$, $k=1$ 时,

$$T(g, \Gamma)=RT(g, \Gamma)+\varepsilon_\lambda\{\lambda g_\lambda\}, \tag{12}$$

$$RT(g, \Gamma)=(\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma))+\tilde{\varepsilon}_{n, k}(\Gamma) \cdot g.$$

$RT(g, \Gamma)$ 是 $\varepsilon_{x, \lambda}(\Gamma)$-模, $T(g, \Gamma)$ 一般来说不是,但它是 ε_λ-模. 进而有

命题 13.4.1 $RT(g, \Gamma)$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$ 的有限生成的 $\varepsilon_{x, \lambda}(\Gamma)$-子模. 设 $\tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$ 的生成元为 $S_1, \cdots, S_t$, 又 $X_1, \cdots, X_s$ 生成 $\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)$,则

$$S_1 g, \cdots, S_t g;\ (\mathrm{D}_x g)(X_1), \cdots, (\mathrm{D}_x g)(X_s) \tag{13}$$

生成 $RT(g, \Gamma)$.

证明留作练习.

定义 13.4.5 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$. 若

$$\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)/T(g,\,\Gamma) < \infty,$$

称分歧问题 g 具有有限 Γ-余维.

若 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维，根据文献[14]中定理 10.2，g 是有限决定的，因而存在正整数 l，使得对所有 $p \in \mathscr{M}^{l}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$，有

$$g + p \in \mathscr{D}(\Gamma) \cdot g,$$

这说明 $p \in \mathscr{M}^{l}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$ 是“高阶项”，在寻求 g 的标准形式时可以略去. $\mathscr{D}(\Gamma)$ 一般来说不是 Lie 群，然而 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 在 $\mathscr{M}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$ 上的作用诱导出它在 Γ-等变映射芽的 l − 导网所成空间 $J^{l}(\mathscr{M}_{n,\,k;\,m}(\Gamma))$ 上的作用，这一作用可以看作是一仿射代数群在仿射空间上的代数群作用，参看文献[7]和[11].

例 3 继续例 2 的讨论，计算切空间. 记 $z = (x,\,y)$. 易见不变函数芽环 $\epsilon_{z,\,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ 的 Hilbert 基为 $u = x^2$，$v = y^2$ 和 λ. 由例 2 中(8)式知，每一 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{2,\,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 可惟一地表示为

$$g = (p\,x,\ q\,y) = p \cdot (x,\,0) + q \cdot (0,\,y),\ p, q \in \mathscr{M}_{z,\,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2), \tag{14}$$

这说明 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2) = \mathscr{M}_{2,\,1}(Z_2 \oplus Z_2)$，并且 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 作为 $\epsilon_{z,\,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$-模，其生成元为 $g_1 = (x,\,0)$ 和 $g_2 = (0,\,y)$. 利用不变坐标函数，将(14)式简写为

$$g = [p,\ q].$$

另外，由例 2 中(9)式知，$\tilde{\epsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 的生成元为

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix},\ S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

现在求 $RT(g,\ Z_2 \oplus Z_2)$ 的生成元，据命题 13.4.1，有下列 6 个，用不变坐标形式表示为

$$[p,\,0],\ [0,\,q],\ [0,\,up],\ [vq,\,0],\ [up_u,\ uq_u],\ [vp_v,\ vq_v], \tag{15}$$

事实上，$S_1 g=[p,\ 0]$，$S_2 g=[vq,\ 0]$，$S_3 g=[0,\ up]$，$S_4 g=[0,\ q]$. 又

$$\mathrm{D}_z g=\begin{bmatrix} p+xp_u\cdot u_x & xp_v\cdot v_y \\ yq_u\cdot u_x & q+yq_v\cdot v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p+2up_u & 2xyp_v \\ 2xyq_u & q+2vp_v \end{bmatrix},$$

$$(\mathrm{D}_z g)g_1=\begin{bmatrix} xp+2xup_u \\ 2yuq_u \end{bmatrix},\ (\mathrm{D}_z g)g_2=\begin{bmatrix} 2xvp_v \\ yq+2yvq_v \end{bmatrix},$$

用不变坐标表示，分别为

$$(\mathrm{D}_z g)g_1=[p,\ 0]+2[up_u,\ uq_u],$$

$$(\mathrm{D}_z g)g_2=[0,\ q]+2[vp_v,\ vq_v],$$

所以 $RT(g,\ Z_2\oplus Z_2)$的生成元为(15)式，又据公式(12)，

$$T(g,\ Z_2\oplus Z_2)=RT(g,\ Z_2\oplus Z_2)+\varepsilon_\lambda\{[\lambda p_\lambda,\ \lambda q_\lambda]\}.$$

例 4 设 $O(2)$标准地作用在$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ 上. 由 §13.3 中例 2 知，不变函数芽环 $\varepsilon_z(O(2))$的 Hilbert 基为 $u=z\bar{z}$，每一 $O(2)$-等变映射芽 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(O(2))$(或记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$)添可表为

$$g(z,\ \lambda)=p(u,\ \lambda)z,\ p\in\varepsilon_{z,\lambda}(O(2)),$$

因而 $\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$的生成元为 $g_1=z$. 用不变坐标表示，$g=[p]$. 另外，$\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))=\mathscr{M}_{z,\lambda}(O(2))$. 为计算切空间，先求 $\tilde{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$，简记为 $\tilde{\varepsilon}(O(2))$.

不难看出，线性映射 $S(z,\ \lambda)\in\tilde{\varepsilon}(O(2))$具有形式

$$S(z,\ \lambda)w=\alpha(z,\ \lambda)w+\beta(z,\ \lambda)\overline{w}.$$

依定理 13.3.1，可限制 $S(z,\ \lambda)$(因而 $\alpha(z,\ \lambda)$，$\beta(z,\ \lambda)$)为 z 的多项式映射，因此可假定

$$S(z,\ \lambda)w=\sum\alpha_{jk}(\lambda)z^j\bar{z}^k w+\sum\beta_{jk}(\lambda)z^j\bar{z}^k\overline{w}.\quad(16)$$

$O(2)$-等变性条件指的是

(a) $S(e^{i\theta}z, \lambda)e^{i\theta}w = e^{i\theta}S(z, \lambda)w$,

(b) $S(\kappa z, \lambda)\kappa w = \kappa S(z, \lambda)w$, 即$\overline{S(\bar{z}, \lambda)\overline{w}} = S(z, \lambda)w$.

由(b)可推出(16)式中的系数 α_{jk}, β_{jk}必为实的. 又(a)可写为

$$S(z, \lambda)w = \sum \alpha_{jk}(\lambda)e^{(j-k)i\theta}z^j\bar{z}^k w + \sum \beta_{jk}(\lambda)e^{(j-k-2)i\theta}z^j\bar{z}^k\overline{w}, \tag{17}$$

比较(16)与(17)式的对应项,得出

$$\alpha_{jk}(\lambda) = 0,\ j \neq k,\ \beta_{jk}(\lambda) = 0,\ j \neq k + 2,$$

于是

$$S(z, \lambda)w = \sum \alpha_{kk}(\lambda)(z\bar{z})^k w + \sum \beta_{k+2,k}(\lambda)(z\bar{z})^k z^2\overline{w},$$

又$\sum\limits_k \alpha_{kk}(\lambda)(z\bar{z})^k$, $\sum\limits_k \beta_{k+2,k}(\lambda)(z\bar{z})^k \in \varepsilon_{z,\lambda}(O(2))$,故

$$S_1(z, \lambda)w = w \quad 及 \quad S_2(z, \lambda)w = z^2\overline{w}$$

生成$\varepsilon_{z,\lambda}(O(2))$上的模$\tilde{\varepsilon}(O(2))$.

有了上述准备,现求$RT(g, O(2))$的生成元. 形如Sg的生成元为$S_1 g = g$和$S_2 g = z^2\bar{g} = z^2\ \overline{pz} = zu\ \bar{p} = zup$, 于是$S_1 g = [p]$为生成元($S_2 g = [up]$是多余的).

又因为$\varepsilon_{z,\lambda}(O(2)) = \mathcal{M}_{z,\lambda}(O(2))$且生成元为$z$, 故只考虑$(D_z g)(z)$,

$$\begin{aligned}(D_z g)z &= g_z \cdot z + g_{\bar{z}} \cdot \bar{z} = (p + p_u \cdot \bar{z}z)z + p_u \cdot z^2 \cdot \bar{z} \\ &= (p + 2up_u)z = [p + 2up_u],\end{aligned}$$

于是$RT(g, O(2))$的生成元为$[p]$和$[up_u]$,并且

$$T(g, O(2)) = RT(g, O(2)) + \varepsilon_\lambda\{[\lambda p_\lambda]\}.$$

§13.5 等变分歧问题的识别

在分歧理论中感兴趣的一个研究课题是一个分歧问题在什么条件下等价于给定的标准形式，因此必须寻找这一标准形式在等价群 $\mathscr{D}$ 作用下的轨道特征．借助于奇点理论中的一个基本概念即有限决定性，这一问题常常可以约化为有限维情形来处理．$\mathscr{D}$ 模去高阶项将以 Lie 群方式作用，其轨道为半代数集，因而可以将轨道描述为由这样一些映射芽组成，它们的 Taylor 系数满足有限个多项式约束，并以等式和不等式形式表示，而这一描述正是识别问题的解．

Bruce, du Plessis 和 Wall 在研究映射芽的有限决定性问题时，引入幂单代数群和幂零 Lie 代数作为研究工具（见文献[11]），接着 Gaffney 将它们应用于带有多个分歧参数的分歧问题研究中，给出了 $\mathscr{D}(\Gamma)$-等价理论，见文献[20]．尔后 Melbourne[54] 研究含一个分歧参数的等变分歧问题，假定它的状态空间与靶空间相同，他证明可以将群 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 分解为幂单等价群 $U(\Gamma)$ 和线性等价群 $S(\Gamma)$，并且分歧问题可以作类似的分解，然后给出 $U(\Gamma)$-等价理论．基于上述工作，讨论带有多个分歧参数的等变分歧问题，允许它的状态空间和靶空间不同，更一般地建立 $U(\Gamma)$-等价理论，见文献[41]．当幂单切空间为 $U(\Gamma)$-内蕴子空间时，解识别问题归结为解有限维线性代数问题．关于幂单代数群和幂零 Lie 代数，请参看文献[7]，[34]或[11]．

与上节一样，假定紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在两个可能不同的空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 上，$n \geqslant m$．

13.5.1 $U(\Gamma)$-识别问题

将 Γ-等价群 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 分解为 $U(\Gamma)$ 和 $S(\Gamma)$．令

$$S(\Gamma) = \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^m)^0 \times \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0 \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^k)^0,$$

$$\pi: \mathscr{D}(\Gamma) \to S(\Gamma),$$

$$(S, X, \Lambda) \mapsto (S(0, 0), (\mathrm{D}_x X)_{(0, 0)}, (\mathrm{D}\Lambda)_0)$$

为 Γ-等价到其线性部分的投影. 显然 π 是群的满同态，它的核

$$U(\Gamma) = \mathrm{Ker}\pi = \{(S, X, \Lambda) \in \mathscr{D}(\Gamma) \mid S(0, 0) = I_m,$$

$$(\mathrm{D}_x X)_{(0, 0)} = I_n, (\mathrm{D}\Lambda)_0 = I_k\}$$

是 $\mathscr{D}(\Gamma)$的正规子群，称为幂单等价群. 对任意 $\delta \in \mathscr{D}(\Gamma)$，有

$$\delta = su_1 = u_2 s,$$

其中 $s \in S(\Gamma)$, u_1, $u_2 \in U(\Gamma)$. 事实上，取 $s = \pi(\delta)$, $u_1 = \pi(\delta)^{-1}\delta$, $u_2 = \delta\pi(\delta)^{-1}$. 并且分解也是惟一的，因为 $\pi(\delta) = \pi(s)\pi(u_1) = s$. 应注意的是，一般来说 $u_1 \neq u_2$.

由上面的分解，有 $\mathscr{D}(\Gamma) = U(\Gamma) \cdot S(\Gamma)$，并且解 $\mathscr{D}(\Gamma)$识别问题可以依下列方法将对应的 $U(\Gamma)$及 $S(\Gamma)$识别问题的解组合起来而得到. 这一方法是对于给定的标准形式 n，计算 $S(\Gamma) \cdot n$，然后对所有 $f \in S(\Gamma) \cdot n$，计算 $U(\Gamma) \cdot f$. 因为

$$\mathscr{D}(\Gamma) \cdot n = U(\Gamma) \cdot S(\Gamma) \cdot n,$$

所以 $h \in \mathscr{D}(\Gamma) \cdot n$ 当且仅当 $h \in U(\Gamma) \cdot f$ 对某一 $f \in S(\Gamma) \cdot n$. 下面着重考虑 $U(\Gamma)$-识别问题.

设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$. 经计算，轨道 $U(\Gamma) \cdot g$ 在 g 处的幂单切空间

$$T(g, U(\Gamma)) = \widetilde{T}(g, U(\Gamma)) + (\mathrm{D}_\lambda g)(\mathscr{M}_k^2 \cdot \varepsilon_k^{\times k}), \quad (1a)$$

其中

$$\widetilde{T}(g, U(\Gamma)) = \{Sg + (\mathrm{D}_x g)X \mid (S, X) \in \widetilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$$

$$\times \boldsymbol{\mathscr{M}}_{n, k}(\Gamma), S(0, 0) = 0_m, (\mathrm{D}_x X)_{(0, 0)} = 0_n\}, \qquad (1b)$$

这里 0_m, 0_n 分别表示 $m \times m$ 和 $n \times n$ 零矩阵.

命题 13.5.1 $T(g, U(\Gamma))$与 $T(g, \mathscr{D}(\Gamma))$相差一个有限维实向量空间，因而它们在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$中的 Γ-余维数或同为有限

或同为无穷.

证 $\widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$和$\mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)$作为$\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$-模都是有限生成的,设生成元分别为

$$S_1,\cdots,S_t \text{ 和 } X_1,\cdots,X_s.$$

用$\mathscr{L}_1$表示由$S_1(0,0),\cdots,S_t(0,0)$张成的实向量子空间,用$\mathscr{L}_2$表示由$(\mathrm{D}_xX_1)_{(0,0)},\cdots,(\mathrm{D}_xX_s)_{(0,0)}$张成的实向量子空间.通过比较上节中(10)式与本节中(1)式,可以看出

$$T(g,\mathscr{D}(\Gamma))=T(g,U(\Gamma))+W,$$

其中

$$W=\mathbb{R}\{Sg+(\mathrm{D}_xg)X\mid S\in\mathscr{L}_1,(\mathrm{D}_xX)\in\mathscr{L}_2\}$$

$$+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant k}\mathbb{R}\left\{\lambda_j\frac{\partial g}{\partial\lambda_i}\right\},$$

可见W是一个有限维实向量空间,证毕.

今后说一个分歧问题$g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$具有有限$\Gamma$-余维就不必具体指明是关于$\mathscr{D}(\Gamma)$或$U(\Gamma)$而言.

定义 13.5.1 设$g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$.令

(i) $M(g,U(\Gamma))=\{p\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)\mid g+p\in U(\Gamma)\cdot g\}$
$=\{ug-g\mid u\in U(\Gamma)\}$,

(ii) $\mathscr{P}(g,U(\Gamma))=\{p\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)\mid h+p\in U(\Gamma)\cdot g\ \ \forall h\in U(\Gamma)\cdot g\}$,其成员叫做$g$关于群$U(\Gamma)$作用而言的高阶项.

显然,$\mathscr{P}(g,U(\Gamma))\subset M(g,U(\Gamma))$并且由(i)知,$h\in U(\Gamma)\cdot g$当且仅当$h-g\in M(g,U(\Gamma))$,因此解$U(\Gamma)$-识别问题相当于计算$M(g,U(\Gamma))$.

定义 13.5.2 (i) $\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的子空间$V$若在群$U(\Gamma)$作用下不变,即$U(\Gamma)\cdot V\subset V$,则$V$叫做$U(\Gamma)$-内蕴子空间.

(ii) 如果$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的子集$M$包含惟一的极大$U(\Gamma)$-内蕴子空间,那么这个子空间叫做$M$的$U(\Gamma)$-内蕴部分,记作$\mathrm{Itr}_{U(\Gamma)}M$.

为建立 $U(\Gamma)$-等价理论，需用到代数几何的下列结果(参看文献[11]中命题 3.3 和推论 3.5 或文献[54]中定理 3.2).

定理 13.5.1 设 U 是$\mathbb{R}$上的幂单仿射代数群，它代数地作用在仿射簇 V 上，则

(i) U 的轨道是 V 中的 Zariski 闭集，

(ii) 若 $x \in V$ 且 W 是 V 的 U-不变子空间，则 $x+W$ 包含在 U 的一条轨道中当且仅当 $LU \cdot x \supset W$，这里 LU 为群 U 的 Lie 代数，$LU \cdot x$ 和群轨道 $U \cdot x$ 在点 x 的切空间 $T_x(U \cdot x)$ 相一致.

推论 13.5.1 设 $g \in \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维，则

(i) 轨道 $U(\Gamma) \cdot g$ 由有限个多项式方程组所确定，

(ii) 假设 M 是$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的 $U(\Gamma)$-内蕴子空间，那么 $M \subset M(g, U(\Gamma))$ 当且仅当 $M \subset T(g, U(\Gamma))$.

证 依条件，$T(g, U(\Gamma))$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 中具有有限 Γ-余维，因而 g 关于群 $U(\Gamma)$ 是有限决定的，于是存在正整数 l，使得对所有 $p \in \mathscr{M}^{l+1}_{n,k;m}(\Gamma)$，有 $g+p \in U(\Gamma) \cdot g$. 而 $U(\Gamma)$ 在$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$上的作用诱导出它在导网空间 $J^l(\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma))$ 上的作用，因此可以将 $U(\Gamma)$ 看作幂单代数群作用在 $J^l(\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma))$ 上. 然后由定理 13.5.1 的(i)和(ii)分别得到本推论(i)和(ii). 证毕.

前面已经说过，解 $U(\Gamma)$-识别问题相当于计算 $M(g, U(\Gamma))$. 而由推论 13.5.1 的(i)，$M(g, U(\Gamma))$ 由有限个多项式方程组所确定. 特别当这些方程都是线性方程时，$M(g, U(\Gamma))$ 便是具有有限 Γ-余维的向量子空间，将 $g \in \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 叫做线性决定的分歧问题. 此外，有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Codim} M(g, U(\Gamma)) &= \text{确定 } U(\Gamma) \cdot g \text{ 的方程最少个数} \\
&= \operatorname{Codim} T(g, U(\Gamma)),
\end{aligned}
$$

此时只需使用线性代数的知识便可以解 $U(\Gamma)$-识别问题. 进而有

命题 13.5.2 设 $g \in \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维. 若 $M(g, U(\Gamma))$ 是$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的向量子空间，则 $M(g, U(\Gamma))$ 必为 $U(\Gamma)$-

内蕴子空间.

证 设 $p\in M(g, U(\Gamma))$, $u\in U(\Gamma)$, 需证 $up\in M(g, U(\Gamma))$ 或 $g+up\in U(\Gamma)\cdot g$. 如果下列事实成立:

$$\text{对任意 } h\in U(\Gamma)\cdot g,\ h+p\in U(\Gamma)\cdot g, \tag{2}$$

那么 $g+up=u(u^{-1}g+p)\in U(\Gamma)\cdot g$. 下证(2)式.

因 $h\in U(\Gamma)\cdot g, h-g\in M(g, U(\Gamma))$. 又因 $M(g, U(\Gamma))$ 是向量子空间,所以 $(h+p)-g=(h-g)+p\in M(g, U(\Gamma))$, 从而 $h+p\in U(\Gamma)\cdot g$.

本命题可改叙为

命题 13.5.2′ 若 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维,则 $M(g, U(\Gamma))$ 是 $\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的向量子空间当且仅当它是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间.

设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维,但不假定 $M(g, U(\Gamma))$ 是 $\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的向量子空间. 下面将证明 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是包含在 $M(g, U(\Gamma))$ 中的惟一的极大 $U(\Gamma)$-内蕴子空间,并且基于幂单群的性质(见推论 13.5.1)还可证明 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是幂单切空间的 $U(\Gamma)$-内蕴部分.

命题 13.5.3 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维,则

(i) $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))=\mathrm{Itr}_{U(\Gamma)}M(g, U(\Gamma))$,

(ii) $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))=\mathrm{Itr}_{U(\Gamma)}T(g, U(\Gamma))$.

证 (i) 首先证明 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是 $M(g, U(\Gamma))$ 的向量子空间. 设 $p_1, p_2\in\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$, $h\in U(\Gamma)\cdot g$. 依定义, $h+p_1\in U(\Gamma)\cdot g$ 并且 $(h+p_1)+p_2\in U(\Gamma)\cdot g$. 由于 $h\in U(\Gamma)\cdot g$ 是任取的,所以 $p_1+p_2\in\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$. 这说明 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 对于加法运算是封闭的. 现看纯量乘法,令集

$$T=\{t\in\mathbb{R}\mid h+tp\in U(\Gamma)\cdot g\},$$

其中 $p\in\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$, $h\in U(\Gamma)\cdot g$. 易见 $\mathbb{N}\subset T$. 据推论 13.5.1 的(i), $U(\Gamma)\cdot g$ 由有限个多项式方程组确定. 因此 $t\in T$ 当且仅

当 t 是这有限个多项式的公共零点. 然而 $T\supset\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ 为无限集, 故 $T=\mathbb{R}$. 这说明 $\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 不仅对加法, 而且对纯量乘法也是封闭的. 从而 $\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 是向量空间.

再证 $\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 设 $p\in\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$, $u\in U(\Gamma)$. 任取 $h\in U(\Gamma)\cdot g$, 则

$$h+up=u(u^{-1}h+p)\in U(\Gamma)\cdot g,$$

依定义, $up\in\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$. 这说明 $\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴的.

最后证明 $M(g,\ U(\Gamma))$ 中的 $U(\Gamma)$-内蕴子空间 $\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 是极大的并且是惟一的. 假定 $P\subset M(g,\ U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 取 $p\in P$, $h=ug$, $u\in U(\Gamma)$, 则

$$h+p=ug+p=u(g+u^{-1}p)\in U(\Gamma)\cdot g,$$

于是 $p\in\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 并且 $\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$ 是极大的、惟一的.

(ii) 由推论 13.5.1 的(ii)及上述(i)可推得, 细节留给读者.

推论 13.5.2 $g\in\mathscr{M}_{n,\ k;\ m}(\Gamma)$ 是线性决定的分歧问题当且仅当 $M(g,\ U(\Gamma))=\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$.

证 据分歧问题是线性决定的定义及命题 13.5.2′, g 为线性决定的分歧问题 $\Leftrightarrow M(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 再据命题 13.5.3 的(i), $M(g,\ U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间 $\Leftrightarrow M(g,\ U(\Gamma))=\mathscr{P}(g,\ U(\Gamma))$. 从而本推论成立.

为了进一步刻画线性决定的分歧问题, 我们引入 Wall 的下列引理(参看文献[54]).

引理 13.5.1 设 U 为幂单代数群线性地作用在向量空间 V 上. 假定 $v\in V$ 使得 $LU\cdot v$ 是 V 的 U-不变子空间, 那么 $U\cdot v$ 为仿射子空间 $v+LU\cdot v$.

证 设 $N_1,\cdots,N_k$ 为 Lie 代数 LU 的基. 因为 U 是幂单群, 所以它的 Lie 代数是幂零的, 因而存在正整数 r, 使得诸 N_i 的积若因子个数多于 r 则为 0. 注意切空间 $LU\cdot v$ 由诸 N_iv 张成, 按假设它是 U-不变的, 故任意 N_iN_jv 仍属于 $LU\cdot v$. 而 $U\cdot v$ 和 $v+$

$LU\cdot v$ 具有相同维数，又 $U\cdot v$ 在 V 中是 Zariski 闭的，若能证明 $U\cdot v\subset v+LU\cdot v$，则 $U\cdot v=v+LU\cdot v$. 下证 $U\cdot v\subset v+LU\cdot v$，因为指数映射

$$\exp:\ LU\to U$$

是连续满射，只要证明对任意 $N=\sum\lambda_iN_i\in LU$，$e^Nv\in v+LU\cdot v$ 就行了. 而 e^Nv 可写为

$$e^Nv=v+\sum\lambda_iN_iv+\frac{1}{2}(\sum\lambda_iN_i)^2v+\cdots+\frac{1}{r!}(\sum\lambda_iN_i)^rv,$$

又任意 N_iN_jv 是诸 N_iv 的线性组合，依归纳法可推出，除上式第一项外，其他各项均位于 $LU\cdot v$ 中.

定理 13.5.2 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维，则 g 为线性决定的分歧问题当且仅当 $T(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 在这种情形下，

$$\mathscr{P}(g,U(\Gamma))=M(g,U(\Gamma))=T(g,U(\Gamma)).$$

证 $\Rightarrow$ 由推论 13.5.2，有 $M(g,U(\Gamma))=\mathscr{P}(g,U(\Gamma))\subset T(g,U(\Gamma))$. 而 $\mathrm{Codim}M(g,U(\Gamma))=\mathrm{Codim}T(g,U(\Gamma))$，故 $T(g,U(\Gamma))=M(g,U(\Gamma))=T(g,U(\Gamma))$，并且 $T(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴的.

$\Leftarrow$ 由引理 13.5.1 可导出

$$T(g,U(\Gamma))=M(g,U(\Gamma)).$$

又由命题 13.5.3，$T(g,U(\Gamma))=\mathscr{P}(g,U(\Gamma))$. 再据推论 13.5.2，$g$ 是线性决定的分歧问题. 证毕.

给定分歧问题 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$，问：对于什么样的扰动 $p\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$，使得对所有 $t\in\mathbb{R}$，$g+tp$ 皆 $U(\Gamma)$-等价于 g 呢？作为定理 13.5.2 的一个应用，有

推论 13.5.3 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维，且 $T(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴的，则

$$\{g + tp \mid \forall t \in \mathbb{R}\} \subset U(\Gamma)\cdot g \Leftrightarrow p \in \mathcal{P}(g,\ U(\Gamma))$$
$$(\text{或 } p \in T(g,\ U(\Gamma))).$$

13.5.2 $U(\Gamma)$-内蕴子空间的判定

本段为判定$\mathcal{M}_{n,\ k;\ m}(\Gamma)$的子空间是$U(\Gamma)$-内蕴子空间提供一些方法，它与计算分歧问题$g$的高阶项所成之空间$\mathcal{P}(g,\ U(\Gamma))$和判断$T(g,\ U(\Gamma))$及$M(g,\ U(\Gamma))$的内蕴性有关.

命题 13.5.4 设$M \subset \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}(\Gamma)$是具有有限$\Gamma$-余维的子空间，则$M$为$U(\Gamma)$-内蕴子空间当且仅当$LU(\Gamma)\cdot M \subset M$.

证明可参看文献[41]或[54].

下面介绍判断$U(\Gamma)$-内蕴子空间的一些方法. 首先注意下列简单事实：设$q=(q_1,\cdots,q_m)\in\mathcal{M}_{n,\ k;\ m}(\Gamma)$，$q$的每一分量$q_i$为多项式函数芽，那么不难看出$J^lU(\Gamma)(l\geqslant 1)$作用于$q$不会降低每一$q_i$因而$q$的次数. 并且由于$U(\Gamma)$-等价的$\Lambda$部分只允许依赖于$\lambda$，因此$q$关于$\lambda$的次数也不会降低. 进而可以推出：对任意$s\geqslant 1$，$t\geqslant 0$，子空间

$$\mathcal{M}_k^t \cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^s(\Gamma) \tag{3}$$

是$U(\Gamma)$-内蕴的. 又因为$U(\Gamma)$的作用是线性的，形如(3)式的子空间之和仍为$U(\Gamma)$-内蕴的. 于是有

命题 13.5.5 形如

$$\mathcal{M}_k^t \cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^s(\Gamma),\ t \geqslant 0,\ s \geqslant 1$$

的子空间之和是$U(\Gamma)$-内蕴子空间.

定理 13.5.3 假设W是

$$\mathcal{M}_k^{l_0}\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,\ k;\ m}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_1-1}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^{k_1}(\Gamma) + \cdots + \mathcal{M}_k^{l_s-1}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^{k_s}(\Gamma)$$

的子空间，k_i，$l_i>0$，那么

$$\mathcal{M}_k^{l_0}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_1-1}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^{k_1+1}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_1}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^{k_1-1}(\Gamma) + \cdots$$
$$+ \mathcal{M}_k^{l_s-1}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^{k_s+1}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_s}\cdot \mathcal{M}_{n,\ k;\ m}^{k_s-1}(\Gamma) + W$$

是 $U(\Gamma)$-内蕴的.

证 据命题 13.5.5,

$$H = \mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_1-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{k_1+1}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{k_1-1}(\Gamma)$$
$$+ \cdots + \mathcal{M}_k^{l_s-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{k_s+1}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_s} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{k_s-1}(\Gamma)$$

是 $U(\Gamma)$-内蕴的. 欲证本定理成立,依命题 13.5.4,只需证明

$$LU(\Gamma) \cdot W \subset H. \tag{4}$$

下面分为两种情形来考虑.

1) 若 $q \in W$ 位于 $\mathcal{M}_k^{l-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{t}(\Gamma)$中,$l,t>0$,则

$$LU(\Gamma) \cdot q = T(q,\ U(\Gamma)) \subset H_1 = \mathcal{M}_k^{l-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{t+1}(\Gamma)$$
$$+ \mathcal{M}_k^{l} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{t-1}(\Gamma). \tag{5}$$

为证(5)式,注意到

$$T(q,\ U(\Gamma)) = \{Sq + (\mathrm{D}_x q)X + (\mathrm{D}_\lambda q)\Lambda \mid (S,\ X,\ \Lambda)$$
$$\in \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k}(\Gamma) \times \mathcal{M}_k \cdot \varepsilon_k^{\times k},\ S(0,0)$$
$$= 0_m,\ (\mathrm{D}_x X)_{(0,0)} = 0_n,\ (\mathrm{D}\Lambda)_0 = 0_k\}. \tag{6}$$

易见

$$Sq \in H_1,\ (\mathrm{D}_\lambda q)\Lambda \in \mathcal{M}_k^{l} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{t}(\Gamma) \subset H_1,$$

这是因为 $\Lambda \in \mathcal{M}_k^2 \cdot \varepsilon_k^{\times k}$, $\dfrac{\partial q}{\partial \lambda_1}, \cdots, \dfrac{\partial q}{\partial \lambda_k} \in \mathcal{M}_k^{l-2} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}^{t}(\Gamma)$(约定 $\mathcal{M}_k^{-1} = \mathcal{M}_k^0 = \varepsilon_k$).

$(\mathrm{D}_x q)X \in H_1$, 理由如下:由 $X \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k}(\Gamma)$及$(\mathrm{D}_x X)_{(0,0)} = 0_n$ 知,$X \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k}^2(\Gamma) + \mathcal{M}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$. 假定 q 是关于 x 和 λ 的多项式映射芽,那么$\dfrac{\partial q}{\partial x_j}(j=1,\cdots,n)$关于 x 的次数比 q 关于 x 的次数少 1,而$\dfrac{\partial q}{\partial x_j}$关于 λ 的次数则与 q 相同,因而可推出

$$(\mathrm{D}_x q)X \in H_1,$$

于是(5)式成立.

2) 若 $q \in W$ 位于 $\mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$中,则

$$LU(\Gamma) \cdot q = T(q, U(\Gamma)) \subset \mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}(\Gamma) = H_2. \tag{7}$$

事实上,由(6)式易见 $Sq \in H_2$,

$$(\mathrm{D}_\lambda q)\Lambda \in \mathcal{M}_k^{l_0+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \subset H_2,$$

这是因为 $\Lambda \in \mathcal{M}_k^2 \cdot \varepsilon_k^{\times k}$, $\dfrac{\partial q}{\partial \lambda_1}, \cdots, \dfrac{\partial q}{\partial \lambda_k} \in \mathcal{M}_k^{l_0-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$,并且 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_k \varepsilon_{n,k} \subset \mathcal{M}_{n,k}$又

$$(\mathrm{D}_x q)X \in \mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_0+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \subset H_2,$$

因此(7)式成立.

最后,利用群 $U(\Gamma)$作用的线性性质便知(4)式成立.从而完成本定理证明.

13.5.3 解识别问题之例

设 $g(x, \lambda) = \varepsilon(x^2 + \delta\lambda)^2 + \sigma x^5$ ($\varepsilon, \delta, \sigma = \pm 1$)为单参数分歧问题,只含一个状态变量,且不考虑对称性,即对称群 $\Gamma = 1$.此时 $\mathscr{D}(1)$, $U(1)$分别记为 $\mathscr{D}$, U.该例取自文献[54]中例 6.1,它还出现在文献[36]的表 3.5 中,并为文献[20]中例 1.13.

切空间 $T(g, \mathscr{D}) = RT(g, \mathscr{D}) + \varepsilon_\lambda\{\lambda g_\lambda\}$, 其中 $RT(g, \mathscr{D}) = \varepsilon_{x,\lambda}\{g, xg_x, \lambda g_x\}$.经计算 $\dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_{x,\lambda} / T(g, \mathscr{D}) = 6$, 即 g 的余维数为 6.

容易验证,通过改变 x 和 λ 的尺度,$f(\in \varepsilon_{x,\lambda})$等价于 g 当且仅当

$$f(x, \lambda) = a(x^2 + b\lambda)^2 + cx^5, \tag{8}$$

其中, $\mathrm{sign}a = \varepsilon$, $\mathrm{sign}b = \delta$, $\mathrm{sign}c = \sigma$.

按照定义,并作简单计算,有

$$T(f,\ U) = \widetilde{T}(f,\ U) + \varepsilon_\lambda\{\lambda^2 f_\lambda\},$$

$$\widetilde{T}(f,\ U) = \varepsilon_{x,\lambda}\{xf,\ \lambda f,\ x^2 f_x,\ \lambda f_x\}.$$

通过计算可得到

$$\begin{aligned} T(f,\ U) = \widetilde{T}(f,\ U) &= \mathscr{P}(f,\ U) \\ &= H + \mathbb{R}\{x^5 + bx^3\lambda,\ x^3\lambda + bx\lambda^2\}, \end{aligned}$$

其中 $H = \mathscr{M}_{x,\lambda}^6 + \mathscr{M}_{x,\lambda}^4\langle\lambda\rangle + \mathscr{M}_{x,\lambda}^2\langle\lambda^2\rangle + \langle\lambda^3\rangle$，又$\langle\lambda\rangle$表 ε_λ 中由 λ 生成的理想. 类似地，ε_λ 中理想$\langle\lambda^2\rangle$，$\langle\lambda^3\rangle$分别由 λ^2 和 λ^3 生成. 然而 $\mathscr{P}(f,\ \mathscr{D}) = H$.

据定理 13.5.2，f 是线性决定的分歧问题，因而

$$\begin{aligned} U\cdot f &= f + T(f,\ U) \\ &= ax^4 + 2abx^2\lambda + ab^2\lambda^2 + cx^5 + A(x^5 + bx^3\lambda) \\ &\quad + B(x^3\lambda + bx\lambda^2) + H. \end{aligned}$$

$h \in U\cdot f$ 当且仅当在点 $O \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，

$$\begin{cases} h = h_x = h_{xx} = h_{xxx} = 0,\ h_\lambda = h_{x\lambda} = 0, \\ h_{xxxx} = 24a,\ h_{xx\lambda} = 4ab,\ h_{\lambda\lambda} = 2ab^2, \\ h_{xxxxx} = 120(c + A),\ h_{xxx\lambda} = 6(Ab + B), \\ h_{x\lambda\lambda} = 2Bb. \end{cases} \tag{9}$$

条件(9)等价于

$$\begin{cases} h = h_x = h_{xx} = h_{xxx} = 0,\ h_\lambda = h_{x\lambda} = 0, \\ h_{xxxx} = 24a,\ 6h_{xx\lambda} = bh_{xxxx}, \\ h_{xxxx}\cdot h_{\lambda\lambda} - 3h_{xx\lambda}^2 = 0, \\ \dfrac{h_{xxxxx}}{120} - \dfrac{h_{xxx\lambda}}{66} + \dfrac{h_{x\lambda\lambda}}{2b^2} = c. \end{cases} \tag{10}$$

(10)与(8)式合起来得出下列结果，$h \in \mathscr{D}\cdot g$ 当且仅当

$$\begin{cases} h = h_x = h_{xx} = h_{xxx} = 0,\ h_\lambda = h_{x\lambda} = 0, \\ \operatorname{sign} h_{xxxx} = \varepsilon,\ \operatorname{sign} h_{xx\lambda} = \varepsilon\delta, \\ h_{xxxx}\cdot h_{\lambda\lambda} - 3h_{xx\lambda}^2 = 0, \\ \operatorname{sign}\left(h_{xxxxx} - 10\cdot\dfrac{h_{xxx\lambda}\cdot h_{xx\lambda}}{h_{\lambda\lambda}} + 15\cdot\dfrac{h_{x\lambda\lambda}\cdot h_{xx\lambda}^2}{h_{\lambda\lambda}^2}\right) = \sigma. \end{cases} \tag{11}$$

(11)式便是关于 g 的识别问题的解.

关于解 $S(\Gamma)$-识别问题，上例考虑的是对状态变量与分岐参数作尺度变化，计算较易，此时 Lie 群 Γ 的作用是绝对不可约的. 如果 Γ 的作用不是绝对不可约的. 尽管 $S(\Gamma)$为线性等价群，有时讨论起来也并非简单. 可参看文献[54]的§7，并且在该文献中还提供了解识别问题的一些典型例子. 应指出的是，除本节所引的参考文献外，例如文献[30]和[31]系统地给出了解识别问题的方法与技巧，有兴趣的读者从中可学到更多的知识.

§13.6 等变分岐问题的开折

静态分岐研究方程 $F=0$ 的多重解问题，而方程往往是对真实的自然现象或科学技术中提出的问题进行抽象并作一定简化后得到的数学模型. 现实状态与理想状态之间存在着差别，我们可以把真实状态看作是理想状态的一个“扰动”，研究这种扰动对方程的分岐性态的影响. 通过引入附加参数并引进开折的概念，用来描述可能出现的扰动. 开折理论是对映射芽的扰动族进行研究. 当考虑等变分岐问题时，即考虑有群作用的对称分岐问题时，这种扰动自然要求是等变扰动. 本节介绍的等变通用开折定理是应用奇点理论方法研究带有对称性的分岐问题的一个重要结果，该定理断言具有有限余维的等变映射芽皆有万有开折，因此对可能出现的扰动、产生的分岐现象能有效地加以分析，进而考虑分类，从而为

分歧理论的应用提供理论依据.

13.6.1 基本概念

定义 13.6.1 设 $g(x,\lambda)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$是以紧致 Lie 群 Γ 为对称群、带有 k 个分歧参数的等变分歧问题. g 的 r-参数 Γ-开折是一个 Γ-等变映射芽 $G(x,\lambda,\alpha)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$, 其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r$ 为开折参数,并且

$$G(x,\lambda,0)=g(x,\lambda),$$

这里 $G\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$意指它是映射 $G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^m$ 在点(0,0,0)处的芽,满足等变性条件

$$G(\gamma x,\lambda,\alpha)=\gamma G(x,\lambda,\alpha),\ \forall\,\gamma\in\Gamma,$$

群 Γ 对参数λ,α 的作用是平凡的.

由上述定义知,Γ-开折 G 表示 g 的一族扰动,并且保持对称性.对照定义 8.1.1,上述定义中的 G 应叫做 g 的 r-参数“形变”,但我们采用分歧理论中的习惯用语,例如见文献[31].

定义 13.6.2 设 $G(x,\lambda,\alpha)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$, $H(x,\lambda,\beta)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,s;m}(\Gamma)$分别为分歧问题 $g(x,\lambda)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的 r-参数和 s-参数 Γ-开折.如果存在 $X\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,s}(\Gamma)$, $S\in\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,k,s;m}(\Gamma)$, $\Lambda\in\varepsilon_{\lambda,\beta}^{\times k}$, $A\in\varepsilon_{\beta}^{\times r}$,使得

$$H(x,\lambda,\beta)=S(x,\lambda,\beta)G(X(x,\lambda,\beta),\Lambda(\lambda,\beta),A(\beta)),\tag{1}$$

并且

$$\begin{gathered}S(x,\lambda,0)=I_m,\ X(x,\lambda,0)=x,\\ \Lambda(\lambda,0)=\lambda,\ A(0)=0,\end{gathered}\tag{2}$$

那么说 H 可由 G 导出.

条件(2)的要求是合理的,因 G 和 H 均为 g 的开折.而条件(1)说明对每一 β, $H(\cdot,\cdot,\beta)$ Γ-等价于族 G 中的某一成员

$G(\cdot,\cdot,A(\beta))$.

如果在上述定义中,$A:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$还是微分同胚芽,则称 H 与 G 是 Γ-同构的.此时必有 $s=r$,并且不难验证,不仅 H 可由 G 导出而且 G 也可由 H 导出.

定义 13.6.3 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的 Γ-开折 G 叫做 Γ-通用开折,如果 g 的每一个 Γ-开折都可由 G 导出. g 的 Γ-通用开折 G 是万有开折,若 G 所含的开折参数的数目最少.并且将 g 的 Γ-万有开折所含的开折参数个数叫做 g 的 Γ-余维数,记为 $\mathrm{Codim}_\Gamma g$.

13.6.2 等变切空间与等变通用开折定理

首先考虑 g 的 Γ-开折 G 为通用开折的必要条件.任取 $p\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$, $g+tp$ 是 g 的最简单 1-参数开折, t 为开折参数.假定 $G(x,\lambda,\alpha)$为 g 的 r-参数 Γ-通用开折,那么按照定义, $g+tp$ 可由 G 导出,即存在$(S,X,\Lambda)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k,1;m}(\Gamma)\times\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,1}(\Gamma)\times\varepsilon_{\lambda,t}^{\times k}$ 及 $A:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}^r$, 使得

$$g(x,\lambda)+tp(x,\lambda)=S(x,\lambda,t)G(X(x,\lambda,t),\Lambda(\lambda,t),A(t)),\tag{3}$$

其中 $S(x,\lambda,0)=I_m$, $X(x,\lambda,0)=x$, $\Lambda(\lambda,0)=\lambda$, $A(0)=0$.

(3) 式两边对 t 求导并在 $t=0$ 处取值,得

$$p(x,\lambda)=[\dot{S}(x,\lambda,0)g(x,\lambda)+(\mathrm{D}_x g)_{(x,\lambda)}\cdot\dot{X}(x,\lambda,0)+(\mathrm{D}_\lambda g)_{(x,\lambda)}\cdot\dot{\Lambda}(\lambda,0)]+\Big[\sum_{j=1}^{r}G_{\alpha_j}(x,\lambda,0)\cdot\dot{A}_j(0)\Big],\tag{4}$$

(4)式右边的第一个括号中的芽正是将要定义的切空间的成员,现对它的各项分析如下:因 $S(x,\lambda,t)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k,1;m}(\Gamma)$, $X(x,\lambda,t)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,1}(\Gamma)$, 易见 $\dot{S}(x,\lambda,0)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$, $\dot{X}(x,\lambda,0)\in$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$，又 $\dot{\Lambda}(\lambda, 0) \in \varepsilon_\lambda^{\times k}$. 若 $\dot{X}(0,0,0)=0$，则

$$\dot{S}(x, \lambda, 0) g(x, \lambda) + (\mathrm{D}_x g) \cdot \dot{X}(x, \lambda, 0) \in RT(g, \Gamma).$$

此外，倘若 $\dot{\Lambda}(0, 0)=0$，则 $(\mathrm{D}_\lambda g) \cdot \dot{\Lambda}(\lambda, 0) \in (\mathrm{D}_\lambda g)(\mathscr{M}_\lambda \cdot \varepsilon_\lambda^{\times k})$. 从而(4)式右边的第一个括号中的芽位于 $T(g, \Gamma)$ 中(参看§13.4中公式(10)与(11)).

定义 13.6.4 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 为等变分歧问题. 定义在 g 处的 Γ-等变切空间 $T_e(g, \Gamma)$ 为

$$T_e(g, \Gamma) = \{Sg + (\mathrm{D}_x g) X + (\mathrm{D}_\lambda g) \Lambda \mid (S, X, \Lambda) \in \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \times \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma) \times \varepsilon_\lambda^{\times k}\}. \tag{5}$$

易见

$$T_e(g, \Gamma) = (\mathrm{D}_x g)(\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)) + \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \cdot g + (\mathrm{D}_\lambda g)(\varepsilon_\lambda^{\times k}). \tag{6}$$

并且由(4)式，

$$p \in T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\{G_{\alpha_1}(x, \lambda, 0), \cdots, G_{\alpha_r}(x, \lambda, 0)\},$$

由于 $p \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 是任取的，因此得到 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的 r-参数 Γ-开折 $G \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$ 为通用开折的必要条件是

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}, \cdots, \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_r}\right|_{\alpha=0}\right\}.$$

本节的主要任务是在适当的条件下证明其逆也是正确的，为此对等变切空间作进一步分析.

命题 13.4.1 告诉我们，$RT(g, \Gamma)$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 中的有限生成 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$-子模，其中

$$RT(g, \Gamma) = (\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)) + \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \cdot g.$$

可以证明环 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$ 上的有限生成模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$ 和 $\mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)$ 有下列

关系:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)=\mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)\oplus W,$$

其中有限维实向量空间 W 由在原点的值非零的 Γ-等变芽 $Y_1,\cdots,Y_l$ 所张成,于是

$$T_e(g,\Gamma)=RT(g,\Gamma)+\mathbb{R}\{(\mathrm{D}_xg)(Y_1),\cdots,(\mathrm{D}_xg)(Y_l)\}$$
$$+(\mathrm{D}_\lambda g)(\varepsilon_\lambda^{\times k}).\tag{7}$$

定理 13.6.1(等变通用开折定理) 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在两个可能不同的空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,$n\geqslant m$. $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$为等变分歧问题满足条件

$$\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)/RT(g,\Gamma)<\infty,\tag{8}$$

那么 g 的 r-参数 Γ-开折 $G\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$为通用开折当且仅当

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)=T_e(g,\Gamma)+\mathbb{R}\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=0},\cdots,\left.\frac{\partial G}{\partial\alpha_r}\right|_{\alpha=0}\right\}.\tag{9}$$

证明放在第四段.

注 (i) $T_e(g,\Gamma)$一般来说不是 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$-模. 为克服这一困难,在定理中附加了条件(8),现在来看看该条件的意义. 取 Γ 为平凡群,即考虑不带对称性的分歧问题,这时的限制切空间

$$\begin{aligned}RT(g,1)&=(\mathrm{D}_xg)(\mathscr{M}_{x,\lambda}\cdot\varepsilon_{x,\lambda}^{\times n})+g^*\mathscr{M}_y\cdot\varepsilon_{x,\lambda}^{\times m}\\&=\mathscr{M}_{x,\lambda}\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right\}+g^*\mathscr{M}_y\cdot\varepsilon_{x,\lambda}^{\times m}.\end{aligned}$$

条件(8)可写为

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(1)/RT(g,1)\\&=\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_{x,\lambda}^{\times m}\Big/\left[\mathscr{M}_{x,\lambda}\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right\}+g^*\mathscr{M}_y\cdot\varepsilon_{x,\lambda}^{\times m}\right]\\&=\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_x^{\times m}\Big/\left[\mathscr{M}_x\left\{\frac{\partial g_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g_0}{\partial x_n}\right\}+g_0^*\mathscr{M}_y\cdot\varepsilon_x^{\times m}\right]\end{aligned}$$

$$= \dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_x^{\times m} / Tk(g_0) < \infty,$$

这里 $g_0: (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$ 定义为 $g_0(x) = g(x, 0)$. 上式说明 g_0 是有限奇点型的映射芽,此时把 g 叫做有限型的分歧问题,因此本定理说明可以对一大类有限型的分歧问题考虑它们的通用开折.

(ii) 从条件(8)立即有

$$\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) / T_e(g, \Gamma) < \infty,$$

即 g 的 Γ-余维数有限. 并且当(9)式中的和为直和时, G 为 g 的万有开折.

推论 13.6.1 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 满足条件(8). 假设实向量子空间 $W \subset \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$, 使得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) \oplus W,$$

若 $p_1, \cdots, p_r \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 为 W 的一组基, 则

$$G(x, \lambda, \alpha) = g(x, \lambda) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j p_j(x, \lambda)$$

是 g 的 Γ-万有开折.

例 1 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$ 定义为 $g(z, \lambda) = (\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 \lambda) z$, 其中 $u = z\bar{z}$, $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1$. 因 $\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2)) = \mathscr{M}_{z,\lambda}(O(2))$, 由 §13.4 例 4 可知

$$T_e(g, O(2)) = RT(g, O(2)) + \varepsilon_\lambda \{[p_\lambda]\},$$

其中 $RT(g, O(2))$ 由 $[p]$ 和 $[up_u]$ 所生成. 经计算, 得

$$T_e(g, O(2)) = \varepsilon_{u,\lambda} \cdot \{z\} = \boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2)),$$

这说明 g 的 $O(2)$-余维数为 0, 它的 $O(2)$-万有开折为其自身.

例 2 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 为等变分歧问题, 含有两个状态变量 x 与 y, 一个分歧参数 λ, 定义为

$$g(x, y, \lambda) = (\varepsilon_1 x^3 + mxy^2 + \varepsilon_2 \lambda x,\ nx^2 y + \varepsilon_3 y^3 + \varepsilon_4 \lambda y), \tag{10}$$

其中 $m \neq \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$, $n \neq \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$, $mn \neq \varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 取值 ± 1. 据文献[30]中的 X,(2.10),g 是非退化的 $Z_2 \oplus Z_2$-等变分歧问题的标准形式,用不变坐标函数表示,g 可写为

$$g(x, y, \lambda) = [\varepsilon_1 u + mv + \varepsilon_2\lambda,\ nu + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4\lambda],$$

其中 $u = x^2$, $v = y^2$. 使用不变坐标的好处是它给出 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 之间的同构. 又 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 是环 $\varepsilon_{u,v,\lambda}$ 上的模,因此 $RT(h, Z_2 \oplus Z_2)$ 可看作 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 的子模,由 §13.4 例 3 知,它的 6 个生成元为

$$[p, 0], [0, q], [0, up], [vq, 0], [up_u, uq_u], [vp_v, vq_v],$$

这里 $h = [p, q]$. 应用于标准形式 g,不难验证

$$RT(g, Z_2 \oplus Z_2) = \mathcal{M}^2_{u,v,\lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda} + \mathbb{R}\{[\varepsilon_1 u + mv + \varepsilon_2\lambda, 0],$$
$$[0, nu + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4\lambda], [\varepsilon_1 u, nu], [mv, \varepsilon_3 v]\},$$

并且

$$T_e(g, Z_2 \oplus Z_2) = RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$$
$$+ \mathbb{R}\{[\varepsilon_2, \varepsilon_4], [\varepsilon_2\lambda, \varepsilon_4\lambda]\}.$$

为得到 g 的万有开折,首先证明下列断言:$[v, 0]$和$[0, u]$及$[0, -\varepsilon_4]$张成 $T_e(g, Z_2 \oplus Z_2)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$中的补空间. 为使

	1	u	v	λ	1	u	v	λ
$RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$中的向量		ε_1	m	ε_2				
					n	ε_3	ε_4	
		ε_1			n			
			m			ε_3		
$T_e(g, Z_2 \oplus Z_2) - RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$中的向量	ε_2				ε_4			
				ε_2				ε_4
张成 $T_e(g, Z_2 \oplus Z_2)$的补空间的向量			1			1		
					ε_4			

计算简便，最好模去 $\mathscr{M}^2_{u,v,\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$，因为它包含在 $RT(g, Z_2\oplus Z_2)$ 中. 将上述 9 个向量列入上表中.

注意 $\mathscr{M}^2_{u,v,\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 的补空间的基由 $[1, 0][u, 0]$ $[v, 0]$, $[\lambda, 0]$, $[0, 1]$, $[0, u]$, $[0, v]$, $[0, \lambda]$ 组成，又上表中的 9×8 矩阵，它的第 1,2 行之和等于第 3,4,6 行之和，故可删去第 6 行. 又将第 7,8,9 行和第 3,5,6 列划去所得的 5×5 矩阵参见下表。

1	u	λ	v	λ
	ε_1	ε_2		
			ε_3	ε_4
	ε_1			
			ε_3	
ε_2				

显然具有秩 5，由此可见 9×8 矩阵的秩为 8，$T_e(g, Z_2\oplus Z_2)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,y,\lambda}(Z_2\oplus Z_2)$ 中的余维数为 3，$[v, 0]$, $[0, u]$, $[0, -\varepsilon_4]$ 是 $T_e(g, Z_2\oplus Z_2)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,y,\lambda}(Z_2\oplus Z_2)$ 中的补空间的基，断言成立. 从而 g 的 $Z_2\oplus Z_2$-万有开折为

$$G(x, y, \lambda, \alpha, \widetilde{n}, \widetilde{m}) = [\varepsilon_1 u + \widetilde{m}v + \varepsilon_2\lambda,$$
$$\widetilde{n}u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4(\lambda - \alpha)].$$

13.6.3 两个引理

证明等变通用开折定理的充分性，基本思路与第九章中两个通用开折定理的证明类似，需用到两个引理. 在介绍代数引理前，引入下列记号.

设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$. 它的切空间

$$T_e(g, \Gamma) = \widetilde{T}(g, \Gamma) + \varepsilon_\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial\lambda_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial\lambda_k}\right\},$$

其中

$$\widetilde{T}(g, \Gamma) = \{Sg + (\mathrm{D}_x g)X \mid (S, X)\in\widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)\times\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)\}.$$

显然 $RT(g, \Gamma)\subset\widetilde{T}(g, \Gamma)\subset T_e(g, \Gamma)$. 若 $RT(g, \Gamma)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$ 中的余维数有限,则 $\widetilde{T}(g, \Gamma)$及 $T_e(g, \Gamma)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$中的余维数均有限.

现设 $G\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$是 g 的l-参数Γ-开折,开折参数为 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_l)$. 形式地定义 G 的切空间,令

$$T_e^u(G, \Gamma) = \widetilde{T}^u(G, \Gamma) + \varepsilon_{\lambda, \delta}\left\{\frac{\partial G}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial G}{\partial\lambda_k}\right\},$$

其中

$$\widetilde{T}^u(G, \Gamma)= \{SG + (\mathrm{D}_x G)X \mid (S, X)\in \widetilde{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma) \times \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, l}(\Gamma)\}.$$

易见 $\widetilde{T}^u(G, \Gamma)$为 $\varepsilon_{x, \lambda, \delta}(\Gamma)$-模,$T_e^u(G, \Gamma)$一般来说不是 $\varepsilon_{x, \lambda, \delta}(\Gamma)$模,但它是 $\varepsilon_{\lambda,\delta}$-模.

引理 13.6.1 设等变分歧问题 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$满足条件(8),即

$$\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)/RT(g, \Gamma) < \infty.$$

假定 $F\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$为 g 的 l-参数 Γ-开折, 开折参数 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_l)$, 又 $q_1,\cdots,q_l\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$. 那么下面的断语是等价的:

(i) $T_e(g, \Gamma)+\mathbb{R}\{q_1(x, \lambda, 0),\cdots,q_l(x, \lambda, 0)\}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$,

(ii) $T_e^u(F, \Gamma)+\varepsilon_\delta\{q_1,\cdots,q_l\}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$.

证 将 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$中的成员限制在 $\delta=0$ 上,由(ii)可导出(i). 下证(i)⇒(ii). 为简单起见,就单参数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 讨论之,此时 $T_e(g, \Gamma)=\widetilde{T}(g, \Gamma)+\varepsilon_\lambda\{g_\lambda\}$, $T_e^u(F, \Gamma)=\widetilde{T}^u(F, \Gamma)+\varepsilon_{\lambda, \delta}\{F_\lambda\}$. 令

$$N = \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)/\widetilde{T}^u(F,\Gamma),\ N_0 = N/\mathcal{M}_\delta \cdot N.$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$, $\widetilde{T}^u(F,\Gamma)$均为 $\varepsilon_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$-模,所以 N 及N_0 也是.

由条件(8)可推得存在正整数 s,使得

$$T_e(g,\Gamma) = \widetilde{T}(g,\Gamma) + \mathbb{R}\{g_\lambda, \lambda g_\lambda, \cdots, \lambda^{s-1} g_\lambda\}.$$

取 $n_1 = q_1, \cdots, n_l = q_l$, $n_{l+1} = F_\lambda$, $n_{l+2} = \lambda F_\lambda, \cdots, n_{l+s} = \lambda^{s-1} F_\lambda$, 令 $t = l + s$. 易见每一 $n_i \in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)(i=1,\cdots,t)$. 不失一般性,假设所有 n_i 不在$\widetilde{T}^u(F,\Gamma)$中. 令 $n_{i,0} = n_i|(\delta=0)$,下面证明 $n_{i,0}$是 n_i 在N_0 中的投影. 为此,选取 $p_i \in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$, 使得 $p_i \equiv n_i \bmod \widetilde{T}^u(F,\Gamma)$. 对 p_i 应用 Taylor 定理,得

$$p_i(x,\lambda,\delta) = p_i(x,\lambda,0) + \sum_{j=1}^{l} \delta_j h_j(x,\lambda,\delta),\ h_j \in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma),$$

然后将上式两边投影于 N 中,得

$$n_i(x,\lambda,\delta) = n_i(x,\lambda,0) + \sum_{j=1}^{l} \delta_j \tilde{h}_j(x,\lambda,\delta),$$

其中 $\tilde{h}_j$ 是h_j 在N 中投影. 由此可见 $n_{i,0}$是 n_i 在N_0 中的投影 n'_i,并且(i)可改写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda;y}(\Gamma) = \widetilde{T}(g,\Gamma) + \mathbb{R}\{n'_1, \cdots, n'_t\}, \tag{11}$$

这是因为 $\lambda^j F_\lambda(x,\lambda,0) = \lambda^j g_\lambda(x,\lambda)(j=0,1,\cdots,s-1)$. 于是由(11)式可导出

$$N_0 = \mathbb{R}\{n'_1, \cdots, n'_t\}.$$

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$是有限生成的 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$-模,所以 N 也是. 据推论 13.3.3,

$$N = \varepsilon_\delta\{n_1, \cdots, n_t\},$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma) &= \widetilde{T}^u(F, \Gamma) + N \\ &= \widetilde{T}^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l, F_\lambda, \lambda F_\lambda, \cdots, \lambda^{s-1} F_\lambda\} \\ &\subset \widetilde{T}^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l\} + \varepsilon_{\lambda,\delta}\{F_\lambda\} \\ &= T_e^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l\},\end{aligned}$$

又显然有 $T_e^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l\} \subset \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$，所以(ii)成立.

下面讨论几何引理.

引理 13.6.2 设 $K(x, \lambda, \delta) \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$, $K(0, 0, 0) = 0$, 且 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_l)$. 令 $K_1 \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l-1;m}(\Gamma)$定义为

$$K_1(x, \lambda, \delta_1, \cdots, \delta_{l-1}) = K(x, \lambda, \delta_1, \cdots, \delta_{l-1}, 0).$$

假设存在芽 $S \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$, $\xi \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l}(\Gamma)$, $\eta \in \varepsilon_{\lambda,\delta}^{\times k}$, $\zeta \in \varepsilon_\delta^{\times(l-1)}$，使得对 $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$，$\lambda \in (\mathbb{R}^k, 0)$, $\delta \in (\mathbb{R}^l, 0)$，下列方程成立:

$$S(x, \lambda, \delta)K(x, \lambda, \delta) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial K}{\partial x_i} \cdot \xi_i(x, \lambda, \delta) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial K}{\partial \lambda_j} \cdot \eta_j(\lambda, \delta) + \sum_{q=1}^{l-1} \frac{\partial K}{\partial \delta_q} \cdot \zeta_q(\delta) + \frac{\partial K}{\partial \delta_l} = 0, \tag{12}$$

则存在淹没芽 $C:(\mathbb{R}^l, 0) \to (\mathbb{R}^{l-1}, 0)$, 使得 K 和$C^* K_1$ 是 Γ-同构的.

证 向量场芽

$$\frac{\partial}{\partial \delta_l} + \sum_{i=1}^n \xi_i(x, \lambda, \delta)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \eta_j(\lambda, \delta)\frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \sum_{q=1}^{l-1} \zeta_q(\delta)\frac{\partial}{\partial \delta_q}$$

的轨道是常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}t} = 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \xi_i(x,\lambda,\delta),\ i = 1,\cdots,n, \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_j}{\mathrm{d}t} = \eta_j(\lambda,\delta),\ j = 1,\cdots,k, \\ \dfrac{\mathrm{d}\delta_q}{\mathrm{d}t} = \zeta_q(\delta),\ q = 1,\cdots,l-1\end{cases} \tag{13}$$

的解曲线. 取初始条件如下: 当 $t=0$ 时, $\delta_l=0$, $x_i=x_{i,0}(i=1,\cdots,n)$, $\lambda_j=\lambda_{j,0}(j=1,\cdots,k)$, $\delta_q=\delta_{q,0}(q=1,\cdots,l-1)$. 方程组(13)的经过点 $P_0=(0, x_{1,0},\cdots,x_{n,0}, \lambda_{1,0},\cdots,\lambda_{k,0}, \delta_{1,0},\cdots,\delta_{l-1,0})$的解曲线 $P(t)$必横截于超平面 $\delta_l=0$. 由$\dfrac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}t}=1$ 和 $\delta_{l,0}=0$ 得 $\delta_l=t$, 因此将 δ_t 等同于t.

定义 φ: $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l, (0,0,0))\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{l-1}$如下: 将与点$(0,0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$ 相邻近的点(x,λ,δ)沿所在的积分曲线投影到超平面 $\delta_l=0$ 上 φ 是C^∞的,并且可以写成如下形式

$$\varphi(x,\lambda,\delta) = (X_{\lambda\delta}(x), \Lambda_\delta(\lambda), C(\delta)),$$

其中 $X_{\lambda\delta}(x)=X(x,\lambda,\delta)$, $\Lambda_\delta(\lambda)=\Lambda(\lambda,\delta)$, $X\in\varepsilon_{x,\lambda,\delta}^{\times n}$, $\Lambda\in\varepsilon_{\lambda,\delta}^{\times k}$, $C\in\varepsilon_{\delta}^{\times(l-1)}$. φ 在点$(0,0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$ 处的 Jacobi 矩阵$(\mathrm{D}\varphi)_{(0,0,0)}$具有下列表 13.1 中形式

又 $\varphi|\{\delta_l=0\}=id$, 故$(\mathrm{D}\varphi)_{(0,0,0)}=(I_{n+k+l-1}\ *)$, 并且 $\mathrm{rank}(\mathrm{D}\varphi)_{(0,0,0)}=n+k+l-1$,从而 φ 是淹没芽. 由此推出

1) $\mathrm{rank}(\mathrm{D}_xX_{\lambda\delta})_{(0,0,0)}=n$,因而每一 $X_{\lambda\delta}$是微分同胚芽,

2) $\mathrm{rank}(\mathrm{D}_\lambda\Lambda_\delta)_{(0,0)}=k$,因此每一 Λ_δ是微分同胚芽,

3) $\mathrm{rank}(\mathrm{D}_\delta C)_0=l-1$,因而 C 是淹没芽.

表 13.1

	x	λ	$\delta_1\cdots\delta_l$
x	$(\mathrm{D}_x X_{\lambda\delta})_{(0,0,0)}$	*	*
λ	0	$(\mathrm{D}_\lambda \Lambda_\delta)_{(0,0)}$	*
δ_1 $\vdots$ δ_{l-1}	0	0	$(\mathrm{D}_\delta C)_0$

此外,依据方程组(13)的解的惟一性定理可推出

$$X_{\lambda\delta}(\gamma x) = \gamma X_{\lambda\delta}(x),\ \gamma \in \Gamma,$$

因此 $X \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l}(\Gamma)$.

对于和点$(0,0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$相邻近的点 $P=(x,\lambda,\delta)$,可惟一地选取方程组(13)的解曲线 $P(t)=(x(t),\lambda(t),\delta(t))$经过点 P. $P(t)$与超平面 $\delta_l=0$ 相交于点$(x(0),\lambda(0),\delta(0))$.现在考虑非自治的齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -S(x(t),\lambda(t),\delta(t))y, \tag{14}$$

其中 $y\in\mathbb{R}^m$.它的解依赖于初始条件 $y=y_0$ 以及$(x(0),\lambda(0),\delta(0))$,这是因为$(x(t),\lambda(t),\delta(t))$是通过积分方程组(13)得到的.(14)式的解可写成下列形式:

$$y(t) = Y(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0)).$$

当 t 邻近于 $0\in\mathbb{R}$, y_0 邻近于 $0\in\mathbb{R}^m$, $(x(0),\lambda(0),\delta(0))$邻近于$(0,0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$ 时,$(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0))\mapsto Y(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0))$是一个取值于$\mathbb{R}^m$ 的 C^∞ 映射,并且对固定的 t, $x(0)$, $\lambda(0)$, $\delta(0)$,

$$y_0 \mapsto Y(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0))$$

是一个从$(\mathbb{R}^m,0)$到自身的线性同胚(参看文献[15]).特别当 $t=$

0 时，该同胚等于$(\mathbb{R}^m, 0)$上的恒同映射. 将此同胚用 $m \times m$ 矩阵 $S(x(0), \lambda(0), \delta(0), t)$来代替，于是有

$$S(x(0), \lambda(0), \delta(0), t)y = Y(t, y;\ x(0), \lambda(0), \delta(0)) \tag{15}$$

引理中的假设条件(12)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = -S(x(t), \lambda(t), \delta(t)) \cdot K(x(t), \lambda(t), \delta(t)),$$

这说明 $K(x(t), \lambda(t), \delta(t))$满足方程(14)，因此

$$K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = Y(t, K(x(0), \lambda(0), \delta(0));\ x(0), \lambda(0), \delta(0)). \tag{16}$$

令 $\tilde{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_{l-1})$，依 φ 的定义

$$\varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = (x(0), \lambda(0), \tilde{\delta}(0)),$$

代入(16)式，得

$$K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = Y(t, K(\varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)), 0), \varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)), 0).$$

而对于和$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ 的原点相邻近的任意点(x, λ, δ)，有方程组(13)的惟一积分曲线在时间 $t = \delta_l$ 时经过它，所以上式可以写为

$$\begin{aligned} K(x, \lambda, \delta) &= Y(t, K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0), \varphi(x, \lambda, \delta), 0) \\ &= S(\varphi(x, \lambda, \delta), \delta_l)K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0) \text{ (根据(15) 式)}. \end{aligned}$$

记 $S(\varphi(x, \lambda, \delta), \delta_l) = \tilde{S}(x, \lambda, \delta)$，易见 $\tilde{S}(x, \lambda, \delta) \in \tilde{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$，并且

$$K(x, \lambda, \delta) = \widetilde{S}(x, \lambda, \delta)K(X_{\lambda\delta}(x), \Lambda_\delta(\lambda), C(\delta), 0)$$
$$= \widetilde{S}(x, \lambda, \delta)C^* K_1(X_{\lambda\delta}(x), \Lambda_\delta(\lambda), \delta),$$

从而 K 与 $C^* K_1$ 是 Γ-同构的.

13.6.4 定理 13.6.1 的证明

必要性已证,下面证充分性.

依假设,g 的 r-参数 Γ-开折 G 满足(9)式,需证 G 是 g 的 Γ-通用开折. 设 $H \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,s;m}(\Gamma)$ 是 g 的 s-参数 Γ-开折,开折参数 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_s)$,我们证明 H 可由 G 导出. 为此考虑开折

$$F(x, \lambda, \alpha, \beta) = G(x, \lambda, \alpha) + H(x, \lambda, \beta) - g(x, \lambda),$$

易见 $F \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r+s;m}(\Gamma)$ 为 g 的 $(r+s)$-参数 Γ-开折.

断言:存在淹没芽 $A:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, (0, 0)) \to (\mathbb{R}^r, 0)$, 使得 F 和 $A^* G$ 是 Γ-同构的.

倘若断言成立,则存在 $(S, X, \Lambda) \in \widetilde{\varepsilon}_{n,k,r+s;m}(\Gamma) \times \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r+s}(\Gamma) \times \varepsilon_{\lambda,\alpha,\beta}^{\times k}$,使得

$$F(x, \lambda, \alpha, \beta) = S(x, \lambda, \alpha, \beta)G(X(x, \lambda, \alpha, \beta),$$
$$\Lambda(\lambda, \alpha, \beta), A(\alpha, \beta)).$$

令 $\alpha = 0$, 得

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, 0, \beta)G(X(x, \lambda, 0, \beta),$$
$$\Lambda(\lambda, 0, \beta), A(0, \beta)),$$

因而 H 可由 G 导出. 余下证明断言成立. 对 s 使用归纳法,证明存在满足断言的淹没芽 A.

当 $s = 0$ 时, $H(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$, $F(x, \lambda, \alpha, 0) = G(x, \lambda, \alpha)$. 令 $A = id: (\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$,显然 F 与 $(id)^* G = G$ 是 Γ-同构的. 假定结论在 $s-1$ 时成立,将 $\mathbb{R}^{s-1}$ 嵌入到 $\mathbb{R}^s$ 中,令 $(\beta_1, \cdots, \beta_{s-1}) \mapsto (\beta_1, \cdots, \beta_{s-1}, 0)$. 并令 $F_1(x, \lambda, \alpha, \beta_1, \cdots,$

$\beta_{s-1}) = F(x, \lambda, \alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{s-1}, 0)$. 依归纳假设,存在淹没芽 B: $(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s-1}, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$,使得 $B^* G$ 与 F_1 是 Γ-同构的. 现证明断言对 s 成立.

令 $\delta = (\alpha, \beta)$, 记 $r + s = l$. 因 $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(x, \lambda, \delta)\Big|_{\delta=0} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_i}(x, \lambda, \alpha)\Big|_{\alpha=0} (i = 1, \cdots, r)$, 故(9)式可改写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}(x, \lambda, 0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial \alpha_r}(x, \lambda, 0)\right\}.$$

据引理 13.6.1,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma) = T_e^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \alpha_r}\right\}.$$

而 $F \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$,故 $-\frac{\partial F}{\partial \delta_l} = -\frac{\partial F}{\partial \beta_s} \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$. 由上式可知,存在 $S \in \tilde{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$, $X = (X_1, \cdots, X_n) \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l}(\Gamma)$, $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k) \in \varepsilon_{\lambda,\delta}^{\times k}$, $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_l) = (\zeta_1, \cdots, \zeta_r, \underbrace{0, \cdots, 0}_{s-1}) \in \varepsilon_\delta^{\times(l-1)}$,使得

$$-\frac{\partial F}{\partial \delta_l} = S(x, \lambda, \delta) F(x, \lambda, \delta) + \sum_{i=1}^n X_i(x, \lambda, \delta)\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \Lambda_j(\lambda, \delta)\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} + \sum_{q=1}^{l-1} \zeta_q(\delta)\frac{\partial F}{\partial \delta_q},$$

据引理 13.6.2,存在淹没芽 C: $(\mathbb{R}^l, 0) \to (\mathbb{R}^{l-1}, 0)$, 使得 F 与 $C^* F_1$ 是 Γ-同构的. 然后令 $A = B \circ C$,那么 F 与 $A^* G$ 必 Γ-同构,断言成立,依据前面的分析,充分性得证.

值得指出的是,对于单参数 Γ-等变分歧问题 g: $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, Damon 曾经证明: $RT(g, \Gamma)$ 具有有限余维当且仅当 $T_e(g, \Gamma)$ 具有有限余维(参看文献[31],命题 XV,2.3),因此在这种情形下,Γ-等变通用定理可叙述为

定理 13.6.2 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 上，$g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ 为含有一个分歧参数的等变分歧问题. 那么 g 的 r-参数 Γ-开折 $G\in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma)$为通用开折当且仅当

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}, \cdots, \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_r}\right|_{\alpha=0}\right\}.$$

(见文献[31]，定理 XV,2.1).

现在问：对于含有多个分歧参数的等变分歧问题，即使它的状态空间与靶空间相同，Damon 的上述论断是否成立呢?

最后简单讨论万有开折的惟一性.

命题 13.6.1 $g(x, \lambda)$的两个 Γ-通用开折 $G(x, \lambda, \alpha)$和 $H(x, \lambda, \beta)$是 Γ-同构的充要条件是它们具有相同数目的开折参数.

证明留作练习.

由此可见，$g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的任意两个万有开折是 Γ-同构的. 换句话说，在 Γ-同构意义下，$g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的万有开折是惟一的.

附录 A　Mather 的一条重要引理

本附录证明引理 10.5.1 及推论 10.5.1. 在文献[11]中，该引理称之为 Mather 引理. 我们将按照 Mather 的方法写出证明(见文献[49]).

引理 10.5.1　设 G 为 Lie 群，M 为 C^∞ 流形，α: $G\times M\to M$ 是一个 C^∞ 群作用，又假设 V 是 M 的 C^∞ 连通子流形. 那么 V 包含在 α 的一条轨道中的必要充分条件是

(a) 对于所有 $v\in V$，$T_v(G\cdot v)\supset T_vV$，

(b) $\dim T_v(G\cdot v)$不依赖于 $v\in V$ 的选取.

证　必要性显然，现证充分性.

对每一 $v\in M$，定义映射 α_v: $G\to M$ 为 $\alpha_v(g)=\alpha(g, v)$. 将 G 在单位元 e 处的切空间记为 T_eG. 由 $T\alpha_v(T_eG)=T_v(G\cdot v)$可知，条件(a)、(b)等价于

(a′) 对于所有 $v\in V$，$T\alpha_v(T_eG)\supset T_vV$，

(b′) $\dim T\alpha_v(T_eG)$不依赖于 $v\in V$ 的选取.

赋予 T_eG 以 Hilbert 范数. 对每一 $v\in V$，令 L_v 为 $\mathrm{Ker}(T\alpha_v$: $T_eG\to T_vV)$在 T_eG 中的正交补，令 $L=\bigcup_{v\in V}(v\times L_v)$. 据(b′)，$L$ 是 V 上的向量丛，且为 $V\times T_eG$ 的子丛. 令

$$L_0=\bigcup_{v\in V}((T\alpha_v)^{-1}(T_vV)\cap L_v),$$

据(a′)，L_0 是 V 上的向量丛，且为 L 的子丛，并且映射 $\bigcup_{v\in V}(T\alpha_v)$: $L_0\to TV$ 是 C^∞ 向量丛之间的同构，设 β: $TV\to L_0$ 为该映射的逆. 记 π: $V\times T_eG\to T_eG$ 为投射，则 $\pi\circ\beta$: $TV\to T_eG$ 为 C^∞ 映射，且

$$T\alpha_v(\pi\circ\beta(\eta))=\eta,\qquad \text{对任意 } \eta\in T_vV. \tag{1}$$