为了证明 V 包含在 α 的单独一条轨道中，只需证明 V 中的任意两点 v_1 和 v_2 位于同一条轨道中. 因为 V 是连通的，必存在 V 中的光滑曲线 γ 以 v_1 和 v_2 为其端点，即存在 C^∞ 映射 $\gamma:[0, 1]\to V$，使得 $\gamma(0)=v_1$，$\gamma(1)=v_2$. 因此只需证明：对于任意 $t_0\in[0, 1]$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ 时，$\gamma(t)$和 $\gamma(t_0)$ 位于同一轨道中.

记 $\gamma(t)$关于 t 的导数为$\gamma'(t)$，则 $\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}V$. 令

$$X(t)=\pi\circ\beta(\gamma'(t))\in T_eG,$$

显然 $X(t)$是 t 的C^∞ 函数，并且依(1)式，有

$$T\alpha_{\gamma(t)}(X(t))=\gamma'(t). \tag{2}$$

由常微分方程存在性定理知，存在 G 中光滑曲线μ：$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\to G$（对于适当的 $\varepsilon>0$），使得 $\mu(t_0)=e$，并且

$$\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}=\widetilde{X}_t(\mu(t)), \tag{3}$$

其中 $\widetilde{X}_t$ 是由 $X(t)$扩张到 G 上的惟一右不变向量场.

为证本引理，只需证明：当 $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ 时，$\mu(t)^{-1}\gamma(t)=\gamma(t_0)$. 因为由它可推出对于该范围内的所有 t，$\gamma(t)$与 $\gamma(t_0)$位于同一轨道中. 为此将 $\mu(t)^{-1}\gamma(t)$对 t 求导，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)^{-1}\gamma(t))&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)^{-1})\gamma(t)+\mu(t)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\\&=\mu(t)^{-1}\left(-\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}\mu(t)^{-1}\gamma(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right),\end{aligned}$$

据(3)式以及 $\widetilde{X}_t$ 是右不变的，括号内的式子变为

$$-X(t)\gamma(t)+\gamma'(t),$$

据(2)式，它等于 0，于是$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)^{-1}\gamma(t))=0$. 而 $\mu(t_0)=e$，这说

明当 $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ 时，$\mu(t)^{-1}\gamma(t)=\gamma(t_0)$. 证毕.

推论 10.5.1 设 M, M' 为 G-空间，$\pi: M\rightarrow M'$ 为 G-淹没，$V=\pi^{-1}(x')$，$x'\in M'$. 假定 V 是连通的，那么 V 包含在 G 的一条轨道中的必要充分条件是引理 10.5.1 中的条件(a)被满足.

证 因 π 是淹没，故 V 是 M 的 C^∞ 子流形，因而引理 10.5.1 中条件(a)有意义。必要性显然成立.

另一方面，引理 10.5.1 中条件(a)可导出

$$\dim T_v(G\cdot v)=\dim T_vV+\dim T_{x'}(G\cdot x'),\qquad \forall v\in V,$$

等式右边显然与 $v\in V$ 的选取无关，因而满足条件(b)，充分性成立.

附录 B　Hilbert 基定理

本附录给出 Hilbert 基定理的证明，以供查阅. 设 R 为交换环，以 x 为不定元、系数取自 R 的多项式

$$r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0,$$

所成之集记为 $R[x]$，按照多项式的加法与乘法运算作成一个交换环.

定理 13.2.2　设交换环 R 中的理想均为有限生成的，则环 $R[x]$ 的每一个理想也是有限生成的.

证明之前，先作如下分析. 设 $f(x) \in R[x]$ 为 m 次多项式，$f(x) = r_m x^m + r_{m-1} x^{m-1} + \cdots + r_0$，$r_m \neq 0$. 将 f 的首项系数 r_m 记为 $\hat{f}$，特别 $\hat{0} = 0$.

假定 $\mathscr{I}$ 为 $R[x]$ 中理想. 为使用定理条件. 自然考虑

$$\hat{\mathscr{I}} = \{\hat{f} \in R \mid f \in \mathscr{I}\}.$$

若能证明 $\hat{\mathscr{I}}$ 是 R 的理想，则必为有限生成的，设生成元为 $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_s$. 令

$$k = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \deg p_i .$$

其次，将 $\mathscr{I}$ 中次数不大于 k 的多项式收集在一起，令

$$\mathscr{I}_k = \{f \in \mathscr{I} \mid \deg f \leqslant k\},$$

显然它是一个 R-模. 若能证明 $\mathscr{I}_k$ 是有限生成的，记它的生成元为 $q_1, \cdots, q_t$，余下证明

$$\{p_1, \cdots, p_s,\ q_1, \cdots, q_t\}$$

为 $\mathscr{I}$ 的一组生成元. 现将以上分析中的两点表示为引理的形式.

引理 1 设 R 为交换环, $\mathscr{I}$ 为 $R[x]$ 中理想, 则 $\hat{\mathscr{I}} = \{\hat{f} \in R \mid f \in \mathscr{I}\}$ 为 R 中理想.

证 需证: (a) 若 $f_1, f_2 \in \mathscr{I}$, 则 $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in \hat{\mathscr{I}}$ 及 (b) 若 $r \in R$, $f \in \mathscr{I}$, 则 $r\hat{f} \in \hat{\mathscr{I}}$.

对于 (a), 不妨设 $d_1 = \deg f_1 \leqslant \deg f_2 = d_2$. 令 $f = x^{d_2 - d_1} f_1 + f_2$. 因 $\mathscr{I}$ 是理想, $f \in \mathscr{I}$, 且 $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in \hat{\mathscr{I}}$. (b) 显然成立, 因 $(\widehat{rf}) = r\hat{f}$.

引理 2 设交换环 R 中的所有理想都是有限生成的, 则对 $R[x]$ 中的理想 $\mathscr{I}$ 以及每一 k,

$$\mathscr{I}_k = \{f \in \mathscr{I} \mid \deg f \leqslant k\}$$

是有限生成的 R-模.

证 利用归纳法. 当 $k = 0$ 时, 易见 $\mathscr{I}_0$ 为 R 中理想, 因而作为 R-模是有限生成的. 现归纳假设 $\mathscr{I}_{k-1}$ 是有限生成的 R-模, 生成元为 $f_1, \cdots, f_s$. 对于 $\mathscr{I}_k$, 由引理 1 证明知, $\hat{\mathscr{I}}_k$ 为 R 中理想, 因而是有限生成的, 设生成元为 $\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_t$. 不妨假定 $\deg g_i = k$ $(i = 1, \cdots, t)$ (若不然, 将 g_i 用 $x^{k - \deg g_i} g_i$ 代替). 下面证明 $\{f_1, \cdots, f_s, g_1, \cdots, g_t\}$ 是 R-模 $\mathscr{I}_k$ 的一组生成元.

任取 $g \in \mathscr{I}_k$, 则 g 可写为

$$g(x) = r_k x^k + r_{k-1} x^{k-1} + \cdots + r_0, \quad r_0, r_1, \cdots, r_k \in R.$$

(i) 若 $r_k = 0$, 则 $g \in \mathscr{I}_{k-1}$. 依归纳假设, g 可表示为 $f_1, \cdots, f_s$ 的 R-线性组合.

(ii) 若 $r_k \neq 0$, 依定义, $r_k \in \hat{\mathscr{I}}_k$, 因而有

$$r_k = a_1 \hat{g}_1 + \cdots + a_t \hat{g}_t, \quad a_1, \cdots, a_t \in R.$$

此时 $\tilde{g} = g - (a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t)$ 的首项系数为 0（注意每一 $\deg g_i = k$），故 $\tilde{g} \in \mathscr{I}_{k-1}$，它可表示为诸 f_j 的 R-线性组合，从而 $g = \hat{g} + a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t$ 为 $f_1, \cdots, f_s$ 及 $g_1, \cdots, g_t$ 的 R-线性组合. 这证明了 $\{f_1, \cdots, f_s,\ g_1, \cdots, g_t\}$ 是 R-模 $\mathscr{I}_k$ 的一组生成元.

定理 13.2.2 的证　设 $\mathscr{I}$ 为 $R[x]$ 中的理想，需证 $\mathscr{I}$ 是有限生成的. 由引理 1，$\hat{\mathscr{I}}$ 是 R 中理想，因而是有限生成的，设生成元为 $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_s$. 令

$$k = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \deg p_i .$$

据引理 2，$\mathscr{I}_k$ 为有限生成的 R-模，设生成元为 $q_1, \cdots, q_t$. 下证 $\{p_1, \cdots, p_s,\ q_1,\ \cdots, q_t\}$ 为 $\mathscr{I}$ 的一组生成元. 为此需证：对任意 $f \in \mathscr{I}$，存在 $a_1, \cdots, a_s,\ b_1, \cdots, b_t \in R[x]$，使得

$$f = a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s + b_1 q_1 + \cdots + b_t q_t . \tag{1}$$

当 $\deg f \leqslant k$ 时，由引理 2 知（1）式成立. 为证明（1）式在一般情形下成立，我们对 f 的次数 $\deg f$ 进行归纳证明.

假定对于 $l \geqslant 0$，当 $\deg f \leqslant k + l$ 时，（1）式成立. 现假设 f 的次数为 $k + l + 1$. 这时 f 的首项系数 $\hat{f}$ 可写为

$$\hat{f} = r_1 \hat{f}_1 + \cdots + r_s \hat{f}_s,\ \ r_1, \cdots, r_s \in R,$$

这是因为诸 $\hat{p}_i$ 生成 $\hat{\mathscr{I}}$. 令

$$g = f - \sum_{j=1}^{s} r_j x^{k+l+1-\deg p_j} p_j ,$$

易见 $\deg g \leqslant k + l$. 依归纳假设，g 具有形式（1），因而 f 也可写为形式（1）.

参 考 文 献

[1] Arnold V I. Singularities of smooth mappings. Russian Math Surveys, 1968, 23(1): 1～43

[2] Arnold V I. Catastrophe Theory. New York: Springer-Verlag, 1984(中译本:陈军译.突变理论,北京:商务印书馆,1992)

[3] Alperin J L. Bell R B. Groups and Representations. New York: Springer-Verlag. 1995

[4] Atiyah M F, Mac Donald I G. Introduction to Commutative Algebra. Reading Mass: Addison-Wesley Publ Company, 1969(中译本:冯绪宁等译.交换代数导引.北京:科学出版社,1982)

[5] Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps, Vol I. Boston: Birkhäuser, 1985

[6] Boardman J M. Singularities of differentiable maps. Publ Math IHEM S, 1967, 33: 21～57

[7] Borel A. Linear Algebraic Groups. New York: Benjamin, 1969

[8] Bröcker Th, Jänich K. Introduction to Differential Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[9] Bröcker Th, Lander L. Differentiable Germs and Catastrophes. Cambridge: Cambridge University Press, 1975

[10] Bröcker Th, tom Dieck T. Representations of Compact Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1985

[11] Bruce J W, du Plessis A A, Wall C T C. Determinacy and unipotency. Invent Math, 1987, 88: 512～554

[12] 曹义.映射芽的 V_q 决定性.数学学报,1991,34(2):234～241

[13] 陈仲沪.Lie 群导引.北京:高等教育出版社,1997

[14] Damon J. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathscr{A}$ *and* $\mathscr{K}$. Memoirs AMS, 1984, 306: 1－88

[15] Dieudonné J. Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press, 1969

[16] du Plessis A A. On the determinacy of smooth map-germs, Invent Math, 1980, 58: 107～160

[17] 冯克勤.交换代数基础.北京:高等教育出版社,1985

[18] Gaffney T. On the order of determination of a finitely determined germ. Invent Math, 1976, 37:83～92

[19] Gaffney T. A note on the order of determination of a finitely determined germ. Invent Math, 1979, 52:127～135

[20] Gaffney T. New methods in the classification theory of bifurcation problems. Contemporary Mathematics, 1986, 56:97～116

[21] Gaffney T, du Plessis A A. More on the determinacy of smooth mapgerms. Invent Math, 1982, 66:137～163

[22] Gervais J J. Sufficiency of jets. Pacific J Math, 1977, 77(2):419～422

[23] Gibson C G. Singular Points of Smooth Mappings. Research Notes in Mathematics 25. London: Pitman, 1979

[24] Glaeser G. Functions composées differentiables. Ann of Math, 1963, 77: 193～209

[25] Godwin A N. Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic. Publ Math IHES, 1971, 40:117～138

[26] Golubitsky M, Guckenheimer J. Multiparameter Bifurcation Theory. Contemporary Mathematics 56. Providence: AMS, 1986

[27] Golubitsky M, Guillemin V. Stable Mappings and Their singularities. New York: Springer-Verlag, 1973

[28] Golubitsky M, Schaeffer D G. A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. Commun Pure Appl Math, 1979, 32:21～98

[29] Golubitsky M, Schaeffer D G. Imperfect bifurcation in the presence of symmetry. Commun Math Phys, 1979, 67: 205～232

[30] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol I. New York: Springer-Verlag, 1985

[31] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol II. New York: Springer-Verlag, 1988

[32] Hilbert D. Gesammelte abhandlungen, Vol 2. Berlin: Springer, 1932～1935

[33] Hirsch M. Differential Topology. New York: Springer-Verlag, 1976

[34] Hochschild G P. Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras. New York: Springer-Verlag, 1981

[35] Hunt B R, Sauer T, Yorke J A. Prevalence: a translation-invariant "almost

every"on infinite-dimensional spaces. Bull Amer Math Soc, 1992, 27(2): 217～238

[36] Keyfitz B L. Classification of one state variable bifurcation problems up to codimension seven. Dyn Stab Sys, 1986, 1: 1～142

[37] Kucharz W. A characterization of C^∞-sufficient k-jets. Proc Amer Math Soc, 1976, 55: 419～424

[38] Levine H I. Singularities of differentiable mappings. In: Proc Liverpoor Singularities Symposium I, LNM, Vol 192, 1～89. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971

[39] Li Yangcheng. On the estimates of the order of finitely A_k-determined map-germs. Acta Mathematica Sinica (new series), 1988, 4(1): 28～38

[40] Li Yangcheng. $\mathcal{G}_{q,k}$-determinacy of C^∞ map-germs. Chinese Science Bulletin, 1993, 38(1): 6～9

[41] Li Yangcheng. The recognition of equivariant bifurcation problems. Science in China, series A, 1996, 39(6): 604～612

[42] 陆启韶.分岔与奇异性.上海:上海科技教育出版社,1995

[43] 李养成,邹建成.带有多个分歧参数的等变分歧问题的万有开折.数学学报,1999,42(6):1071～1076

[44] Malgrange B. Ideals of Differentiable Functions. London: Oxford University Press, 1966

[45] Martinet J. Singularities of Smooth Functions and Maps. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[46] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, I: The division theorem. Ann of Math, 1968, 87(1): 89～104

[47] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, II: Infinitesimal stability implies stability. Ann of Math, 1969, 89(2): 254～291

[48] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map germs. Publ Math IHES, 1969, 35: 127～156

[49] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by $\mathbb{R}$-algebras. Publ Math IHES, 1970, 37: 223～248

[50] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, V: Transversality. Advances in Mathematics, 1970, 4: 301～336

[51] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, VI: The nice dimensions. Lec-

ture Notes in Mathematics, 1971, 192: 207～253

[52] Mather J N. On Thom-Boardman singularities. International Symposium in Dynamical Systems. Peixoto ed. New York: Academic Press, 1973, 233～248

[53] Mather J N. Differentiable invariants. Topology, 1977, 16:145～155

[54] Melbourne I. The recognition problem for eguivariant singularities. Nonlinearity, 1988, 1: 215～240

[55] Milnor J. Differential topology, Lecture notes, Princeton, 1958(中译本:熊金城译.从微分观点看拓扑.上海:上海科学技术出版社,1983)

[56] Minor J. Topology from the differentiable viewpoint, University of Virginia Press, 1965(中译本:熊金城译.从微分观点看拓扑.上海:上海科学技术出版社,1983)

[57] Milnor J. Morse Theory. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963(中译本:江嘉禾译.莫尔斯理论.北京:科学出版社,1988)

[58] Morin B. Formes canoniques des singularitiés dúne application differentiable. Comptes Rendus Acad Sci, 1965, 260: 5662～5665, 6503～6506

[59] Nirenberg L. A proof of the Malgrange preparation theorem. In Proc Liverpoor Singularities Symposium I, LNM, Vol 192, 97～105 Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971.

[60] Poénaru V. Singularités C^∞ en présence de symétrie. Lecture Notes in Mathematics Vol 510. Berlin: Springer-Verlag, 1976

[61] Sattinger D H. Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. Lecture Notes in Mathematics Vol 762, Berlin: Springer-Verlag, 1979

[62] Schwarz G W. Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group. Topology, 1975, 14: 63～68

[63] Sternberg S. Lectures on Differential Geometry. New Jersey: Prentice-Hall, 1964

[64] 唐云.对称性分岔理论基础.北京:科学出版社,1998

[65] Wall C T C. Finite determinacy of smooth map-germs. Bull London Math, Soc, 1981, 13: 481～539

[66] Warner F W. Foundations of Differentiabe Manifolds and Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1983

[67] Weyl H. David Hilbert and his mathematical work. Bull AMS, 1944,

50: 612～654

[68] Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans Amer Math Soc, 1934, 36(1): 63～89

[69] Whitney H. Differentiable even functions, Duke J Math, 1943, 10: 159～160

[70] Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean spaces I: Mappings of the plane into the plane. Ann of Math, 1955, 62: 374～410

[71] Wilson L C. Map-germs infinitely determined with respect to right-left eguivalence. Pacific J Math, 1982, 102: 235～245

[72] 项武义,侯自新,孟道骥.李群讲义.北京:北京大学出版社,1992

[73] 张国滨.光滑映射芽的有限决定性(II):M-A_k-决定.数学学报,1990,33(1):34～42

[74] 张国滨.光滑映射芽的有限决定性(III):M-R_k-决定.数学学报,1991,34(1):112～117

[75] 张筑生.微分拓扑讲义.北京:北京大学出版社,1996

[76] Zou Jiancheng. Finite determination and universal unfoldings of bifurcation problems. Acta Mathematica Sinica(new series), 1998, 14: 663～674

索　　引

---

① 右边数字(×·×)表示它们在正文中初次出现的章节.