

为了证明  $V$  包含在  $\alpha$  的单独一条轨道中, 只需证明  $V$  中的任意两点  $v_1$  和  $v_2$  位于同一条轨道中. 因为  $V$  是连通的, 必存在  $V$  中的光滑曲线  $\gamma$  以  $v_1$  和  $v_2$  为其端点, 即存在  $C^\infty$  映射  $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$ , 使得  $\gamma(0) = v_1$ ,  $\gamma(1) = v_2$ . 因此只需证明: 对于任意  $t_0 \in [0, 1]$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$  时,  $\gamma(t)$  和  $\gamma(t_0)$  位于同一轨道中.

记  $\gamma(t)$  关于  $t$  的导数为  $\gamma'(t)$ , 则  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} V$ . 令

$$X(t) = \pi \circ \beta(\gamma'(t)) \in T_e G,$$

显然  $X(t)$  是  $t$  的  $C^\infty$  函数, 并且依(1)式, 有

$$T\alpha_{\gamma(t)}(X(t)) = \gamma'(t). \quad (2)$$

由常微分方程存在性定理知, 存在  $G$  中光滑曲线  $\mu: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow G$  (对于适当的  $\varepsilon > 0$ ), 使得  $\mu(t_0) = e$ , 并且

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \tilde{X}_t(\mu(t)), \quad (3)$$

其中  $\tilde{X}_t$  是由  $X(t)$  扩张到  $G$  上的惟一右不变向量场.

为证本引理, 只需证明: 当  $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$  时,  $\mu(t)^{-1}\gamma(t) = \gamma(t_0)$ . 因为由它可推出对于该范围内的所有  $t$ ,  $\gamma(t)$  与  $\gamma(t_0)$  位于同一轨道中. 为此将  $\mu(t)^{-1}\gamma(t)$  对  $t$  求导,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu(t)^{-1}\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}(\mu(t)^{-1})\gamma(t) + \mu(t)^{-1} \frac{d}{dt}\gamma(t) \\ &= \mu(t)^{-1} \left( -\frac{d\mu(t)}{dt} \mu(t)^{-1} \gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma(t) \right), \end{aligned}$$

据(3)式以及  $\tilde{X}_t$  是右不变的, 括号内的式子变为

$$-X(t)\gamma(t) + \gamma'(t),$$

据(2)式, 它等于 0, 于是  $\frac{d}{dt}(\mu(t)^{-1}\gamma(t)) = 0$ . 而  $\mu(t_0) = e$ , 这说

明当  $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$  时,  $\mu(t)^{-1} \gamma(t) = \gamma(t_0)$ . 证毕.

**推论 10.5.1** 设  $M, M'$  为  $G$ -空间,  $\pi: M \rightarrow M'$  为  $G$ -淹没,  $V = \pi^{-1}(x')$ ,  $x' \in M'$ . 假定  $V$  是连通的, 那么  $V$  包含在  $G$  的一条轨道中的必要充分条件是引理 10.5.1 中的条件(a)被满足.

**证** 因  $\pi$  是淹没, 故  $V$  是  $M$  的  $C^\infty$  子流形, 因而引理 10.5.1 中条件(a)有意义. 必要性显然成立.

另一方面, 引理 10.5.1 中条件(a)可导出

$$\dim T_v(G \cdot v) = \dim T_v V + \dim T_{x'}(G \cdot x'), \quad \forall v \in V,$$

等式右边显然与  $v \in V$  的选取无关, 因而满足条件(b), 充分性成立.



## 附录 B Hilbert 基定理

本附录给出 Hilbert 基定理的证明,以供查阅. 设  $R$  为交换环,以  $x$  为不定元、系数取自  $R$  的多项式

$$r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0,$$

所成之集记为  $R[x]$ ,按照多项式的加法与乘法运算作成一个交换环.

**定理 13.2.2** 设交换环  $R$  中的理想均为有限生成的,则环  $R[x]$  的每一个理想也是有限生成的.

证明之前,先作如下分析. 设  $f(x) \in R[x]$  为  $m$  次多项式,  $f(x) = r_m x^m + r_{m-1} x^{m-1} + \cdots + r_0$ ,  $r_m \neq 0$ . 将  $f$  的首项系数  $r_m$  记为  $\hat{f}$ , 特别  $\hat{0} = 0$ .

假定  $\mathcal{J}$  为  $R[x]$  中理想. 为使用定理条件. 自然考虑

$$\hat{\mathcal{J}} = \{ \hat{f} \in R \mid f \in \mathcal{J} \}.$$

若能证明  $\hat{\mathcal{J}}$  是  $R$  的理想,则必为有限生成的,设生成元为  $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_s$ . 令

$$k = \max_{1 \leq i \leq s} \deg p_i.$$

其次,将  $\mathcal{J}$  中次数不大于  $k$  的多项式收集在一起,令

$$\mathcal{J}_k = \{ f \in \mathcal{J} \mid \deg f \leq k \},$$

显然它是一个  $R$ -模. 若能证明  $\mathcal{J}_k$  是有限生成的,记它的生成元为  $q_1, \cdots, q_t$ ,余下证明

$$\{ p_1, \cdots, p_s, q_1, \cdots, q_t \}$$

为  $\mathcal{J}$  的一组生成元. 现将以上分析中的两点表示为引理的形式.

**引理 1** 设  $R$  为交换环,  $\mathcal{J}$  为  $R[x]$  中理想, 则  $\hat{\mathcal{J}} = \{\hat{f} \in R \mid f \in \mathcal{J} \text{ 为 } R \text{ 中理想}\}.$

**证** 需证: (a) 若  $f_1, f_2 \in \mathcal{J}$ , 则  $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in \hat{\mathcal{J}}$  及 (b) 若  $r \in R, f \in \mathcal{J}$ , 则  $r\hat{f} \in \hat{\mathcal{J}}.$

对于 (a), 不妨设  $d_1 = \deg f_1 \leq \deg f_2 = d_2$ . 令  $f = x^{d_2-d_1} f_1 + f_2$ . 因  $\mathcal{J}$  是理想,  $f \in \mathcal{J}$ , 且  $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in \hat{\mathcal{J}}.$  (b) 显然成立, 因  $(\hat{rf}) = r\hat{f}.$

**引理 2** 设交换环  $R$  中的所有理想都是有限生成的, 则对  $R[x]$  中的理想  $\mathcal{J}$  以及每一  $k$ ,

$$\mathcal{J}_k = \{f \in \mathcal{J} \mid \deg f \leq k\}$$

是有限生成的  $R$ -模.

**证** 利用归纳法. 当  $k=0$  时, 易见  $\mathcal{J}_0$  为  $R$  中理想, 因而作为  $R$ -模是有限生成的. 现归纳假设  $\mathcal{J}_{k-1}$  是有限生成的  $R$ -模, 生成元为  $f_1, \dots, f_s$ . 对于  $\mathcal{J}_k$ , 由引理 1 证明知,  $\hat{\mathcal{J}}_k$  为  $R$  中理想, 因而是有限生成的, 设生成元为  $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_t$ . 不妨假定  $\deg g_i = k (i=1, \dots, t)$  (若不然, 将  $g_i$  用  $x^{k-\deg g_i} g_i$  代替). 下面证明  $\{f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t\}$  是  $R$ -模  $\mathcal{J}_k$  的一组生成元.

任取  $g \in \mathcal{J}_k$ , 则  $g$  可写为

$$g(x) = r_k x^k + r_{k-1} x^{k-1} + \dots + r_0, \quad r_0, r_1, \dots, r_k \in R.$$

(i) 若  $r_k = 0$ , 则  $g \in \mathcal{J}_{k-1}$ . 依归纳假设,  $g$  可表示为  $f_1, \dots, f_s$  的  $R$ -线性组合.

(ii) 若  $r_k \neq 0$ , 依定义,  $r_k \in \hat{\mathcal{J}}_k$ , 因而有

$$r_k = a_1 \hat{g}_1 + \dots + a_t \hat{g}_t, \quad a_1, \dots, a_t \in R.$$



此时  $\tilde{g} = g - (a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t)$  的首项系数为 0 (注意每一  $\deg g_i = k$ ), 故  $\tilde{g} \in \mathcal{J}_{k-1}$ , 它可表示为诸  $f_j$  的  $R$ -线性组合, 从而  $g = \hat{g} + a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t$  为  $f_1, \cdots, f_s$  及  $g_1, \cdots, g_t$  的  $R$ -线性组合. 这证明了  $\{f_1, \cdots, f_s, g_1, \cdots, g_t\}$  是  $R$ -模  $\mathcal{J}_k$  的一组生成元.

**定理 13.2.2 的证** 设  $\mathcal{J}$  为  $R[x]$  中的理想, 需证  $\mathcal{J}$  是有限生成的. 由引理 1,  $\hat{\mathcal{J}}$  是  $R$  中理想, 因而是有限生成的, 设生成元为  $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_s$ . 令

$$k = \max_{1 \leq i \leq s} \deg p_i.$$

据引理 2,  $\mathcal{J}_k$  为有限生成的  $R$ -模, 设生成元为  $q_1, \cdots, q_t$ . 下证  $\{p_1, \cdots, p_s, q_1, \cdots, q_t\}$  为  $\mathcal{J}$  的一组生成元. 为此需证: 对任意  $f \in \mathcal{J}$ , 存在  $a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_t \in R[x]$ , 使得

$$f = a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s + b_1 q_1 + \cdots + b_t q_t. \quad (1)$$

当  $\deg f \leq k$  时, 由引理 2 知 (1) 式成立. 为证明 (1) 式在一般情形下成立, 我们对  $f$  的次数  $\deg f$  进行归纳证明.

假定对于  $l \geq 0$ , 当  $\deg f \leq k + l$  时, (1) 式成立. 现假设  $f$  的次数为  $k + l + 1$ . 这时  $f$  的首项系数  $\hat{f}$  可写为

$$\hat{f} = r_1 \hat{f}_1 + \cdots + r_s \hat{f}_s, \quad r_1, \cdots, r_s \in R,$$

这是因为诸  $\hat{p}_i$  生成  $\hat{\mathcal{J}}$ . 令

$$g = f - \sum_{j=1}^s r_j x^{k+l+1-\deg p_j} p_j,$$

易见  $\deg g \leq k + l$ . 依归纳假设,  $g$  具有形式 (1), 因而  $f$  也可写为形式 (1).

## 参 考 文 献

- [1] Arnold V I. Singularities of smooth mappings. Russian Math Surveys, 1968, 23(1): 1~43
- [2] Arnold V I. Catastrophe Theory. New York: Springer-Verlag, 1984(中译本:陈军译. 突变理论, 北京:商务印书馆, 1992)
- [3] Alperin J L. Bell R B. Groups and Representations. New York: Springer-Verlag, 1995
- [4] Atiyah M F, Mac Donald I G. Introduction to Commutative Algebra. Reading Mass: Addison-Wesley Publ Company, 1969(中译本:冯绪宁等译. 交换代数导引. 北京:科学出版社, 1982)
- [5] Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps, Vol I. Boston: Birkhäuser, 1985
- [6] Boardman J M. Singularities of differentiable maps. Publ Math IHES, 1967, 33: 21~57
- [7] Borel A. Linear Algebraic Groups. New York: Benjamin, 1969
- [8] Bröcker Th, Jänich K. Introduction to Differential Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1982
- [9] Bröcker Th, Lander L. Differentiable Germs and Catastrophes. Cambridge: Cambridge University Press, 1975
- [10] Bröcker Th, tom Dieck T. Representations of Compact Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1985
- [11] Bruce J W, du Plessis A A, Wall C T C. Determinacy and unipotency. Invent Math, 1987, 88: 512~554
- [12] 曹义. 映射芽的  $V_q$  决定性. 数学学报, 1991, 34(2): 234~241
- [13] 陈仲沪. Lie 群导引. 北京: 高等教育出版社, 1997
- [14] Damon J. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{K}$ . Memoirs AMS, 1984, 306: 1~88
- [15] Dieudonné J. Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press, 1969
- [16] du Plessis A A. On the determinacy of smooth map-germs, Invent Math, 1980, 58: 107~160
- [17] 冯克勤. 交换代数基础. 北京: 高等教育出版社, 1985



- [18] Gaffney T. On the order of determination of a finitely determined germ. *Invent Math*, 1976, 37:83~92
- [19] Gaffney T. A note on the order of determination of a finitely determined germ. *Invent Math*, 1979, 52:127~135
- [20] Gaffney T. New methods in the classification theory of bifurcation problems. *Contemporary Mathematics*, 1986, 56:97~116
- [21] Gaffney T, du Plessis A A. More on the determinacy of smooth map-germs. *Invent Math*, 1982, 66:137~163
- [22] Gervais J J. Sufficiency of jets. *Pacific J Math*, 1977, 77(2):419~422
- [23] Gibson C G. *Singular Points of Smooth Mappings*. Research Notes in Mathematics 25. London: Pitman, 1979
- [24] Glaeser G. Fonctions composées différentiables. *Ann of Math*, 1963, 77:193~209
- [25] Godwin A N. Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic. *Publ Math IHES*, 1971, 40:117~138
- [26] Golubitsky M, Guckenheimer J. *Multiparameter Bifurcation Theory*. Contemporary Mathematics 56. Providence: AMS, 1986
- [27] Golubitsky M, Guillemin V. *Stable Mappings and Their singularities*. New York: Springer-Verlag, 1973
- [28] Golubitsky M, Schaeffer D G. A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. *Commun Pure Appl Math*, 1979, 32:21~98
- [29] Golubitsky M, Schaeffer D G. Imperfect bifurcation in the presence of symmetry. *Commun Math Phys*, 1979, 67: 205~232
- [30] Golubitsky M, Schaeffer D G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol I*. New York: Springer-Verlag, 1985
- [31] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol II*. New York: Springer-Verlag, 1988
- [32] Hilbert D. *Gesammelte abhandlungen*, Vol 2. Berlin: Springer, 1932~1935
- [33] Hirsch M. *Differential Topology*. New York: Springer-Verlag, 1976
- [34] Hochschild G P. *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras*. New York: Springer-Verlag, 1981
- [35] Hunt B R, Sauer T, Yorke J A. Prevalence: a translation-invariant "almost



every" on infinite-dimensional spaces. Bull Amer Math Soc, 1992, 27(2): 217~238

- [36] Keyfitz B L. Classification of one state variable bifurcation problems up to codimension seven. Dyn Stab Sys, 1986, 1: 1~142
- [37] Kucharz W. A characterization of  $C^\infty$ -sufficient  $k$ -jets. Proc Amer Math Soc, 1976, 55: 419~424
- [38] Levine H I. Singularities of differentiable mappings. In: Proc Liverpool Singularities Symposium I, LNM, Vol 192, 1~89. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971
- [39] Li Yangcheng. On the estimates of the order of finitely  $A_k$ -determined map-germs. Acta Mathematica Sinica (new series), 1988, 4(1): 28~38
- [40] Li Yangcheng.  $\mathcal{G}_{q,k}$ -determinacy of  $C^\infty$  map-germs. Chinese Science Bulletin, 1993, 38(1): 6~9
- [41] Li Yangcheng. The recognition of equivariant bifurcation problems. Science in China, series A, 1996, 39(6): 604~612
- [42] 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海: 上海科技教育出版社, 1995
- [43] 李养成, 邹建成. 带有多个分歧参数的等变分歧问题的万有开折. 数学学报, 1999, 42(6): 1071~1076
- [44] Malgrange B. Ideals of Differentiable Functions. London: Oxford University Press, 1966
- [45] Martinet J. Singularities of Smooth Functions and Maps. Cambridge: Cambridge University Press, 1982
- [46] Mather J N. Stability of  $C^\infty$  mappings, I: The division theorem. Ann of Math, 1968, 87(1): 89~104
- [47] Mather J N. Stability of  $C^\infty$  mappings, II: Infinitesimal stability implies stability. Ann of Math, 1969, 89(2): 254~291
- [48] Mather J N. Stability of  $C^\infty$  mappings, III: Finitely determined map germs. Publ Math IHES, 1969, 35: 127~156
- [49] Mather J N. Stability of  $C^\infty$  mappings, IV: Classification of stable germs by  $\mathbb{R}$ -algebras. Publ Math IHES, 1970, 37: 223~248
- [50] Mather J N. Stability of  $C^\infty$  mappings, V: Transversality. Advances in Mathematics, 1970, 4: 301~336
- [51] Mather J N. Stability of  $C^\infty$  mappings, VI: The nice dimensions. Lec-



- ture Notes in Mathematics, 1971, 192: 207~253
- [52] Mather J N. On Thom-Boardman singularities. International Symposium in Dynamical Systems. Peixoto ed. New York: Academic Press, 1973, 233~248
  - [53] Mather J N. Differentiable invariants. Topology, 1977, 16:145~155
  - [54] Melbourne I. The recognition problem for equivariant singularities. Non-linearity, 1988, 1: 215~240
  - [55] Milnor J. Differential topology, Lecture notes, Princeton, 1958(中译本:熊金城译.从微分观点看拓扑.上海:上海科学技术出版社,1983)
  - [56] Minor J. Topology from the differentiable viewpoint, University of Virginia Press, 1965(中译本:熊金城译.从微分观点看拓扑.上海:上海科学技术出版社,1983)
  - [57] Milnor J. Morse Theory. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963(中译本:江嘉禾译.莫尔斯理论.北京:科学出版社,1988)
  - [58] Morin B. Formes canoniques des singularités d'une application différentiable. Comptes Rendus Acad Sci, 1965, 260: 5662~5665, 6503~6506
  - [59] Nirenberg L. A proof of the Malgrange preparation theorem. In Proc Liverpool Singularities Symposium I, LNM, Vol 192, 97~105 Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971.
  - [60] Poénaru V. Singularités  $C^\infty$  en présence de symétrie. Lecture Notes in Mathematics Vol 510. Berlin: Springer-Verlag, 1976
  - [61] Sattinger D H. Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. Lecture Notes in Mathematics Vol 762, Berlin: Springer-Verlag, 1979
  - [62] Schwarz G W. Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group. Topology, 1975, 14: 63~68
  - [63] Sternberg S. Lectures on Differential Geometry. New Jersey: Prentice-Hall, 1964
  - [64] 唐云.对称性分岔理论基础.北京:科学出版社,1998
  - [65] Wall C T C. Finite determinacy of smooth map-germs. Bull London Math, Soc, 1981, 13: 481~539
  - [66] Warner F W. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1983
  - [67] Weyl H. David Hilbert and his mathematical work. Bull AMS, 1944,

50: 612~654

- [68] Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans Amer Math Soc, 1934, 36(1): 63~89
- [69] Whitney H. Differentiable even functions, Duke J Math, 1943, 10: 159~160
- [70] Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean spaces I: Mappings of the plane into the plane. Ann of Math, 1955, 62: 374~410
- [71] Wilson L C. Map-germs infinitely determined with respect to right-left equivalence. Pacific J Math, 1982, 102: 235~245
- [72] 项武义, 侯自新, 孟道骥. 李群讲义. 北京: 北京大学出版社, 1992
- [73] 张国滨. 光滑映射芽的有限决定性(II):  $M-A_k$ -决定. 数学学报, 1990, 33(1): 34~42
- [74] 张国滨. 光滑映射芽的有限决定性(III):  $M-R_k$ -决定. 数学学报, 1991, 34(1): 112~117
- [75] 张筑生. 微分拓扑讲义. 北京: 北京大学出版社, 1996
- [76] Zou Jiancheng. Finite determination and universal unfoldings of bifurcation problems. Acta Mathematica Sinica(new series), 1998, 14: 663~674



# 索引

## 一 画

一阶奇点集

§ 2.5

## 二 画

二阶奇点集

§ 2.5

二面体群

§ 13.1

## 三 画

广义 Whitney 映射

§ 11.3

万有形变

§ 6.3

万有开折

§ 9.1

子流形

§ 1.2

子模

§ 3.1

## 四 画

不变积分

§ 13.1

不变内积

§ 13.1

不变子空间

§ 13.1

不变函数

§ 13.2

不变多项式

§ 13.2

不变坐标函数

§ 13.4

不可约表示

§ 13.1

反函数定理

§ 1.2

分裂引理

§ 3.4

分歧集

§ 1.2, § 6.5

分歧问题

§ 13.4

分歧参数

§ 13.4

内蕴子空间

§ 13.5

内蕴部分

§ 13.5

切映射

§ 1.2

切空间

§ 1.3, § 3.2, § 8.2,

§ 8.4, § 13.4

双曲脐点

§ 6.5

无穷小生成元

§ 1.3

无穷小稳定芽

§ 8.2

## 五 画

对称的光滑函数芽

§ 5.3

对称群

§ 13.1

平坦芽

§ 1.3

平凡形变

§ 3.2

平凡开折

§ 8.1

平衡解

§ 13.1

右等价

§ 1.3

右等价群

§ 1.3, § 7.1

右平移

§ 13.1

正则点

§ 1.2

① 右边数字( $\times \cdot \times$ )表示它们在正文中初次出现的章节.

正则值	§ 1.2	初等突变	§ 6.5
正交群	§ 13.1	初始速度	§ 6.1, § 9.1
左等价群	§ 7.1	极大理想	§ 1.1
左平移	§ 13.1	抛物脐点	§ 6.5
左右等价群	§ 7.1	识别问题	§ 13.5
六 画		形变	§ 3.2
		形变的同构	§ 3.2, § 6.1
		形变的等价	§ 6.1
		位势芽	§ 6.5
		位势芽的形变	§ 6.5
导网	§ 1.1, § 1.3	芽	§ 1.1, § 1.2
导网空间	§ 1.1	余维(数)	§ 1.1, § 3.1
导出	§ 13.6	余维有限的理想	§ 1.1
多项式除法定理	§ 4.1	余维有限的子模	§ 3.1
光滑函数	§ 1.1	余秩	§ 3.4
光滑函数芽	§ 1.1	折叠	§ 3.4, § 6.5, § 7.2
光滑函数芽环	§ 1.1	状态方程	§ 6.5
光滑映射	§ 1.2	状态变量	§ 6.5, § 13.4
光滑映射芽	§ 1.2	八 画	
轨道	§ 1.3		
轨道切空间	§ 1.3, § 8.2, § 8.4, § 10.4, § 13.4		
好映射	§ 2.5		
尖点	§ 3.4, § 6.5, § 7.2		
决定性	§ 3.3, § 10.4, § 10.7	单参数子群	§ 1.3
决定性阶数	§ 10.5	非正则点	§ 1.2
决定性范围	§ 10.6	非退化临界点	§ 1.4
向量场芽	§ 1.3	规范化的 Haar 积分	§ 13.1
亚稳定域	§ 12.5	奇点	§ 1.2
有限生成模	§ 3.1	奇点集	§ 2.5
有限决定性	§ 3.3, § 10.3	奇异芽	§ 1.2
有限奇点型	§ 8.2	拉回	§ 6.1, § 9.1
七 画		线性 Lie 群	§ 13.1
		线性表示	§ 1.3, § 13.1
		线性等价群	§ 13.5
		线性决定的分歧问题	§ 13.5
		限制切空间	§ 13.4
初等对称多项式	§ 5.3		



孤立临界点	§ 1.4	秩	§ 1.2
孤立奇点	§ 3.2	秩定理	§ 1.2

## 九 画

标准形	§ 7.2	常值形变	§ 3.2
除法定理	§ 4.1	常值开折	§ 8.1
绝对不可约表示	§ 13.4	常秩	§ 1.2
临界值	§ 1.2	常态映射	§ 12.5
临界点	§ 1.2	基本横截性引理	§ 2.3
迷向子群	§ 13.1	接触等价	§ 8.4
突变	§ 6.5	接触等价群	§ 8.4
突变集	§ 6.5	接触轨道	§ 8.4
退化临界点	§ 1.4	理想	§ 1.1
映射芽	§ 1.2	理想的 Jacobi 扩张	§ 11.1
映射芽的形变	§ 8.1	理想的临界 Jacobi 扩张	§ 11.1
映射芽的开折	§ 8.1	理想的 Boardman 符号	§ 11.1
映射芽的 $\mathcal{A}$ -同构	§ 8.1	商模	§ 3.1
映射芽的 Boardman 符号	§ 11.1	淹没芽	§ 1.2
映射的 $r$ -导网扩张	§ 2.4		
指标	§ 1.4		
指数映射	§ 1.3	逼近引理	§ 10.2, § 10.6

## 十一画

## 十二画

## 十 画

高阶奇点集	§ 2.5	等变映射芽	§ 13.3
紧群 Lie 群	§ 13.1	等变预备定理	§ 13.3
紧致 Lie 群上的 Haar 积分	§ 13.1	等变分歧问题	§ 13.4
浸入芽	§ 1.2	等变分歧问题的等价	§ 13.4
通用形变	§ 6.1, § 9.4	等变分歧问题的强等价	§ 13.4
通用形变定理	§ 6.3, § 9.4	等变分歧问题的开折	§ 13.6
通用开折	§ 9.1	等变分歧问题的通用开折	§ 13.6
通用开折定理	§ 9.1	等变分歧问题的万有开折	§ 13.6
通有性	§ 2.4, § 7.3	等变轨道切空间	§ 13.4
		等变限制切空间	§ 13.4
		等变通用开折定理	§ 13.6

幂单代数群	§ 13.5	其他	
幂零 Lie 代数	§ 13.5		
嵌入开折中的映射芽	§ 12.3		Baire 空间 § 2.4
剩余集	§ 2.4		Boardman 子流形 § 11.2
椭圆脐点	§ 6.5		Boardman 定理 § 11.2
十三画			Borel 引理 § 4.3
			Fubini 定理 § 2.1
			Haar 积分 § 13.1
			Hessian 矩阵 § 2.5
靶空间	§ 7.1		Hilbert 基 § 13.2
零测度	§ 2.2		Hilbert 基定理 § 13.2
零测度集	§ 2.2		Hilbert-Weyl 定理 § 13.2
零化理想	§ 5.1		Jacobi 矩阵 § 1.2
微分	§ 1.2		Jacobi 理想 § 1.3, § 3.2
微分子流形	§ 1.2		Lie 群 § 1.3
微分同胚芽	§ 1.2		Lie 群的线性表示 § 1.3, § 13.1
源空间	§ 7.1		Lie 代数 § 1.3
十四画			Malgrange 预备定理 § 5.1
			Mather 除法定理 § 4.1
			Mather 引理 § 10.5
			Morse 芽 § 1.4
稳定(映射)芽	§ 8.1		Morse 引理 § 1.4
稳定芽的基本分类定理	§ 12.2		M-逼近 § 10.6
稳定芽的基本代数分类定理	§ 12.2		Nakayama 引理 § 3.1
稳定映射	§ 12.5		Nirenberg 扩张引理 § 4.2
十五画			$\mathbb{R}$ -水平保持的映射芽 § 3.3
			Sard 定理 § 2.2
			Schur 引理 § 13.1
			Schwarz 定理 § 13.2
横截性	§ 2.1		Taylor 多项式 § 1.1
横截性定理	§ 2.4		Thom 的初等突变模型 § 6.5
横截形变	§ 9.4		Thom 分类定理 § 3.4
蝴蝶型	§ 3.4, § 6.5		Thom 横截性定理 § 2.4
十六画			
燕尾型	§ 3.4, § 6.5		
燕尾面	§ 11.2		



Thom-Boardman 奇点	§ 11.1	Whitney 伞	§ 12.1
Whitney 引理	§ 4.1	$\Sigma^i$ 类奇点	§ 2.5, § 7.2,
Whitney 定理	§ 7.2		§ 9.3, § 11.1