现代数学前沿概览

杨哲元

2023 年 3 月 14 日

前言

介绍了一些前沿的数学，我记了一些笔记。

目录

第一章　仿射 Wely 群，Painlevé 方程和 Drinfeld-Sokolov 系统

报告人：刘思齐老师

1.1　kdv 方程

什么是可积系统?

一类有很好的对称性的 PDE。

例 1.1.1.
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+6u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

在 1950 年时，有人利用 Schrödinger 方程

$$-\phi''+u\phi=\lambda\phi$$

化简了该方程。

即定义算子

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+u$$

将 kdv 方程改写为

$$L\phi=\lambda\phi$$

记 $\mathit{\Phi} = \binom{\Phi}{\Phi'}$ 则

$$\mathit{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi' \\ u\Phi - \lambda\Phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{bmatrix} \mathit{\Phi}$$

Gelfand-Dickey Formula

Gelfand 利用**拟微分算子**将算子 L 改写为

$$L^{\frac{1}{2}} = \partial_x + a_1\partial_x^{-1} + a_2\partial_x^{-2}\cdots$$

记

$$A_n = L^{\frac{1}{2}+n}$$

再次考虑微分方程组的相容性条件

$$\begin{cases} L\Phi = \lambda\Phi \\ \phi_t = A_n\phi \end{cases}$$

这可以给出推广的 kdv 方程，即 $u(x, t_1, \cdots, t_n)$

如若令 $A_n = L^{\frac{m}{n+1}}$ 则上述方程组称为 $Gelfand - Dickey$ 方程组，将其写成矩阵形式即

$$\mathit{\Phi} = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \Phi$$

1.2　Lie 代数和 Panlevé 方程

1.2.1　Lie 代数

定义 1.2.1 (Lie 代数)**.** 给定域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 V，定义运算

$$[] : V \times V \to V$$

满足以下三个性质

- 双线性性
- $[v,\omega]+[\omega,v]=0$
- $[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0$

称运算为线性空间 V 上的 *Lie* 代数

例 1.2.2 ($M_n(\mathbb{R})$ 上的 Lie 代数)**.** 交换子

$$[A,B]=AB-BA$$

在这一问题中，我们主要研究 $SL_n(\mathbb{C})=\{A|A\in M_{n+1}(\mathbb{C},tr(A)=0)\}$ 上的 Lie 代数

复半单李代数的分类

复半单李代数可以分解为单李代数的直和。而单李代数总共有以下九种

$$\underbrace{A_n,B_n,C_n,D_n}_{Classical},\underbrace{E_6,E_7,E_8,F_4,G_2}_{Exceptional}$$

对于前文提到的矩阵，我们可以对其进行分解

$$\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & * & \\ & & & & * \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ * & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & * & 0 & \\ & & & * & 0 \end{bmatrix}$$

上述分解即可扩展到其他的李代数。而对于我们研究的问题，注意到

$$\mathit{\Phi}=\begin{pmatrix} \Phi' \\ u\Phi-\lambda\Phi \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{bmatrix}\mathit{\Phi}$$

中的 λ 可以取任何数，**即这矩阵的是无穷维李代数**。

1.2.2　Painlevé 方程

Painlevé 方程形如

$$y = f(t, y, y')$$

其中 f 有理。

这样的方程共有 50 种，其中 44 种可解，剩下 6 种没有很好的解。对 Painlevé 方程，人们发现了以下的性质。

$$\bar{y} = -y - \frac{\alpha + 0.5}{y' + y^2 + t/2}$$

满足 $P_{II}(\alpha + 1)$

$$\bar{y} = -y + \frac{\alpha - 0.5}{y' - y^2 - t/2}$$

满足 $P_{II}(\alpha - 1)$ 上述变换即由平面上的以下三种变换构成

$$\begin{cases} r : \alpha \to -\alpha \\ s : \alpha \to \alpha + 1 \\ s^{-1} : \alpha \to \alpha - 1 \end{cases}$$

它们生成 A_1 型仿射 Weyl 群。

1.2.3　仿射 Weyl 群

定义 1.2.3.

第二章　Ising 模型和磁铁的相变

报告人：吴昊老师

2.1　背景

人们在研究磁铁的相变时发现当环境温度超过某一温度 T_c 时，磁铁的磁性全部消失，由此人们希望用一种模型来描述这一过程。

Ising 的老师 Lenz, 提出了 Ising 模型。

2.2　Ising 模型

定义 2.2.1 (Ising 模型)**.** 对于 $\mathbb{Z}^2$ 上的格点给定自旋 $\delta = \pm 1$. 定义哈密顿量[1]$H(\delta) = \delta_x \delta_y$, 物理意义即某一格点周围的同号量减去反号量，也即两倍的相邻格点反号数。

定义概率测度

$$\mu_\beta[0] \propto e^{-\frac{1}{T}H(\delta)}$$

关于 Ising 模型，有广泛的应用，例如，人们将每个小磁针比喻为某个村落中的村民，而将小磁针上、下的两种状态比喻成个体所具备的两种政治观点（例如对 A,B 两个不同候选人的选举），相邻小磁针之间的相互作用比喻成村民之间观点的影响。环境的温度比喻成每个村民对自己意见不坚

[1]哈密顿量是所有粒子的动能的总和加上与系统相关的粒子的势能

持的程度。这样，整个 Ising 模型就可以建模该村落中不同政治见解的动态演化（即观点动力学 opinion dynamics)。在社会科学中，人们已经将 Ising 模型应用于股票市场、种族隔离、政治选择等不同的问题。另一方面，如果将小磁针比喻成神经元细胞，向上向下的状态比喻成神经元的激活与抑制，小磁针的相互作用比喻成神经元之间的信号传导，那么，Ising 模型的变种还可以用来建模神经网络系统，从而搭建可适应环境、不断学习的机器（Hopfield 网络或 Boltzmann 机）

2.2.1 Tc 是多少

我们会问临界温度是多少，这一问题依赖于网格选取。当网格为 Z^2 时，$T_c = \frac{2}{log(1+\sqrt{2})}$，其余的情况算不出解析解。

其次，临界态有什么样的性质？人们通过研究得出临界态具有共形不变性，也即局部保角保定向。人们在研究这一问题时定义了如下的关联函数描述其性质

$$E(\mu(\delta_1 \cdots \delta_n)) = f(z_1, \cdots, z_n)$$

进一步形成了一门学科：共形场论 (conformal field theory, CFT)

2.2.2 Onsager -1/8 conjecture

人们在对 Ising 模型的研究过程中解决了如下的 Onsager $\frac{1}{8}$ conjecture

命题 2.2.2. *划定一块正方形区域，区域边界上格点均为 +1，我们知道* $P(\mu[0](\delta = +1)) > P(\mu[0](\delta = -1))$，*且* $E[(\mu(\delta = +1))] > 0$

当区域为全平面时，$E[(\mu(\delta = +1))] \to 0$，*猜想即趋于 0 的速度是* $n^{-\frac{1}{8}}$

2.3　Potts 模型

从 Ising 模型还衍生出 Potts 模型，从中可以窥见统计物理、组合数学、算子代数和纽结理论如何发生关联。Potts 描述的是格点上的可能性一共有 $1, 2, \cdots, q$ 共 q 种可能性。在这种情况下，我们也可以求出 $\mathbb{Z}^2$ 格点的临界温度是 $T_c = \dfrac{2}{\log(1+\sqrt{q})}$

第三章　波的起源

报告人：于品

3.1　背景

F de Beaune(1601-1652) 的时代提出如何通过切线决定曲线，其本质是微积分问题；后来到 Mersenne 提出弦振动的经验规律。

到 1747 年时, Jean Le Rond d'Alembert 提出弦振动的方程

$$-\partial_t^2 u + c^2 \partial_x^2 u = 0$$

这方程的解为

$$u(x,t) = f_+(x+t) + f_-(x-t)$$

他告诉人们弦振动的过程中有一个东西在传递，就是 $f_\pm$

来到 Eular 的时代，人们开始研究等熵可压缩 Eular 方程，也即

$$(\partial_t + v \cdot D)\rho = -\rho \cdot \mathrm{div} v$$
$$(\partial_t + v \cdot D)v = -\rho^{-1} \nabla \cdot p$$

其中 $v(t, x_1, x_2, x_3)$ 为空气的速度场；$\rho(t, x_1, x_2, x_3)$ 为空气密度，$p = p(\rho)$ 为压强。

3.2　什么是波

我们先看 Maxwell 方程，

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2)\,\mathbf{E} = 0 \\
(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2)\,\mathbf{B} = 0
\end{aligned}
$$

这表明 Maxwell 方程组背后的规律仍然是波动方程，也即电磁场的底层规律是波!

在这之前，Riemann 曾经研究过热传导，在解决非均匀介质的热传导问题中，Riemann 遇到了障碍，即他之后提出的曲率的概念。

100 年后，Einstein 希望将引力纳入狭义相对论，并要求满足一些好的性质 (Lorenz 协变性等等)，他和 Hilbert 写下的 Hilbert-Einstein 方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

利用一些黎曼几何的结论我们推导出

$$\Box_g R_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = 0$$

这就说明引力波是波。

下面解释什么是达朗贝尔算子 $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$ 当它作用于标量场时，

$$\Box\phi = (\phi^{;\mu})_{;\mu} = (g^{\mu\nu}\phi_{;\nu})_{;\mu} = (g^{\mu\nu}\phi_{,\nu})_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

在三维欧氏空间中，$\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2 \\
\nabla^2 &= \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2 \qquad \text{(cylindrical coordinates)}
\end{aligned}
$$

3.3　等熵可压缩 Eular 方程和一维守恒律

Riemann 研究这个问题的时候提出了 Riemann 问题，管内气体扩散的问题，他给出了四个解，并定义了什么是激波和稀疏波。在一维的情况下，

这些解都很容易给出，在高维就不那么容易。困难的地方在于高维的几何和低维并不相同，稀疏波沿面传播。但我们仍然能做一些计算。通过类比光锥得到“声锥”，在这上面定义新的度量得到和广义相对论类似的规律。

不同的波的背后都是不同的几何——于品老师如是说。