现代数学前沿概览

yzy

2023 年 5 月 9 日

前言

介绍了一些前沿的数学，我记了一些笔记。

目录

第一章　仿射 Wely 群，Painlevé 方程和 Drinfeld-Sokolov 系统

报告人：刘思齐老师

1.1　kdv 方程

什么是可积系统?

一类有很好的对称性的 PDE。

例 1.1.1.
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+6u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

在 1950 年时，有人利用 Schrödinger 方程

$$-\phi''+u\phi=\lambda\phi$$

化简了该方程。

即定义算子
$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+u$$
将 kdv 方程改写为
$$L\phi=\lambda\phi$$

记 $\mathit{\Phi} = \binom{\Phi}{\Phi'}$ 则

$$\mathit{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi' \\ u\Phi - \lambda\Phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{bmatrix} \mathit{\Phi}$$

Gelfand-Dickey Formula

Gelfand 利用**拟微分算子**将算子 L 改写为

$$L^{\frac{1}{2}} = \partial_x + a_1\partial_x^{-1} + a_2\partial_x^{-2}\cdots$$

记

$$A_n = L^{\frac{1}{2}+n}$$

再次考虑微分方程组的相容性条件

$$\begin{cases} L\Phi = \lambda\Phi \\ \phi_t = A_n\phi \end{cases}$$

这可以给出推广的 kdv 方程，即 $u(x, t_1, \cdots, t_n)$

如若令 $A_n = L^{\frac{m}{n+1}}$ 则上述方程组称为 $Gelfand - Dickey$ 方程组，将其写成矩阵形式即

$$\mathit{\Phi} = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \Phi$$

1.2 Lie 代数和 Panlevé 方程

1.2.1 Lie 代数

定义 1.2.1 (Lie 代数)**.** 给定域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 V，定义运算

$$[] : V \times V \to V$$

满足以下三个性质

- 双线性性
- $[v,\omega]+[\omega,v]=0$
- $[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0$

称运算为线性空间 V 上的 *Lie* 代数

例 1.2.2 ($M_n(\mathbb{R})$ 上的 Lie 代数)**.** 交换子

$$[A,B]=AB-BA$$

在这一问题中，我们主要研究 $SL_n(\mathbb{C})=\{A|A\in M_{n+1}(\mathbb{C},tr(A)=0)\}$ 上的 Lie 代数

复半单李代数的分类

复半单李代数可以分解为单李代数的直和。而单李代数总共有以下九种

$$\underbrace{A_n,B_n,C_n,D_n}_{Classical},\underbrace{E_6,E_7,E_8,F_4,G_2}_{Exceptional}$$

对于前文提到的矩阵，我们可以对其进行分解

$$\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & * & \\ & & & & * \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ * & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & * & 0 & \\ & & & * & 0 \end{bmatrix}$$

上述分解即可扩展到其他的李代数。而对于我们研究的问题，注意到

$$\mathit{\Phi}=\begin{pmatrix} \Phi' \\ u\Phi-\lambda\Phi \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{bmatrix}\mathit{\Phi}$$

中的 λ 可以取任何数，**即这矩阵的是无穷维李代数**。

1.2.2 Painlevé 方程

Painlevé 方程形如

$$y = f(t, y, y')$$

其中 f 有理。

这样的方程共有 50 种，其中 44 种可解，剩下 6 种没有很好的解。对 Painlevé 方程，人们发现了以下的性质。

$$\bar{y} = -y - \frac{\alpha + 0.5}{y' + y^2 + t/2}$$

满足 $P_{II}(\alpha + 1)$

$$\bar{y} = -y + \frac{\alpha - 0.5}{y' - y^2 - t/2}$$

满足 $P_{II}(\alpha - 1)$ 上述变换即由平面上的以下三种变换构成

$$\begin{cases} r : \alpha \to -\alpha \\ s : \alpha \to \alpha + 1 \\ s^{-1} : \alpha \to \alpha - 1 \end{cases}$$

它们生成 A_1 型仿射 Weyl 群。

1.2.3 仿射 Weyl 群

定义 1.2.3.

第二章　Ising 模型和磁铁的相变

报告人：吴昊老师

2.1　背景

人们在研究磁铁的相变时发现当环境温度超过某一温度 T_c 时，磁铁的磁性全部消失，由此人们希望用一种模型来描述这一过程。

Ising 的老师 Lenz, 提出了 Ising 模型。

2.2　Ising 模型

定义 2.2.1 (Ising 模型)**.** 对于 $\mathbb{Z}^2$ 上的格点给定自旋 $\delta = \pm 1$. 定义哈密顿量[1]$H(\delta) = \delta_x \delta_y$, 物理意义即某一格点周围的同号量减去反号量，也即两倍的相邻格点反号数。

定义概率测度

$$\mu_\beta[0] \propto e^{-\frac{1}{T}H(\delta)}$$

关于 Ising 模型，有广泛的应用，例如，人们将每个小磁针比喻为某个村落中的村民，而将小磁针上、下的两种状态比喻成个体所具备的两种政治观点（例如对 A,B 两个不同候选人的选举），相邻小磁针之间的相互作用比喻成村民之间观点的影响。环境的温度比喻成每个村民对自己意见不坚

[1]哈密顿量是所有粒子的动能的总和加上与系统相关的粒子的势能

持的程度。这样，整个 Ising 模型就可以建模该村落中不同政治见解的动态演化（即观点动力学 opinion dynamics）。在社会科学中，人们已经将 Ising 模型应用于股票市场、种族隔离、政治选择等不同的问题。另一方面，如果将小磁针比喻成神经元细胞，向上向下的状态比喻成神经元的激活与抑制，小磁针的相互作用比喻成神经元之间的信号传导，那么，Ising 模型的变种还可以用来建模神经网络系统，从而搭建可适应环境、不断学习的机器（Hopfield 网络或 Boltzmann 机）

2.2.1　Tc 是多少

我们会问临界温度是多少，这一问题依赖于网格选取。当网格为 Z^2 时，$T_c = \frac{2}{log(1+\sqrt{2})}$，其余的情况算不出解析解。

其次，临界态有什么样的性质？人们通过研究得出临界态具有共形不变性，也即局部保角保定向。人们在研究这一问题时定义了如下的关联函数描述其性质

$$E(\mu(\delta_1 \cdots \delta_n)) = f(z_1, \cdots, z_n)$$

进一步形成了一门学科：共形场论 (conformal field theory, CFT)

2.2.2　Onsager -1/8 conjecture

人们在对 Ising 模型的研究过程中解决了如下的 Onsager $\frac{1}{8}$ conjecture

命题 2.2.2. *划定一块正方形区域，区域边界上格点均为 +1，我们知道* $P(\mu[0](\delta = +1)) > P(\mu[0](\delta = -1))$*，且* $E[(\mu(\delta = +1))] > 0$

当区域为全平面时，$E[(\mu(\delta = +1))] \to 0$*，猜想即趋于 0 的速度是* $n^{-\frac{1}{8}}$

2.3　Potts 模型

从 Ising 模型还衍生出 Potts 模型，从中可以窥见统计物理、组合数学、算子代数和纽结理论如何发生关联。Potts 描述的是格点上的可能性一共有 $1, 2, \cdots, q$ 共 q 种可能性。在这种情况下，我们也可以求出 $\mathbb{Z}^2$ 格点的临界温度是 $T_c = \dfrac{2}{\log(1+\sqrt{q})}$

第三章　波的起源

报告人：于品

3.1　背景

F de Beaune(1601-1652) 的时代提出如何通过切线决定曲线，其本质是微积分问题；后来到 Mersenne 提出弦振动的经验规律。

到 1747 年时, Jean Le Rond d'Alembert 提出弦振动的方程

$$-\partial_t^2 u + c^2 \partial_x^2 u = 0$$

这方程的解为

$$u(x,t) = f_+(x+t) + f_-(x-t)$$

他告诉人们弦振动的过程中有一个东西在传递，就是 $f_\pm$

来到 Eular 的时代，人们开始研究等熵可压缩 Eular 方程，也即

$$(\partial_t + v\cdot D)\rho = -\rho\cdot \mathrm{div} v$$
$$(\partial_t + v\cdot D)v = -\rho^{-1}\nabla\cdot p$$

其中 $v(t,x_1,x_2,x_3)$ 为空气的速度场；$\rho(t,x_1,x_2,x_3)$ 为空气密度，$p=p(\rho)$ 为压强。

3.2　什么是波

我们先看 Maxwell 方程，

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2)\,\mathbf{E} = 0$$
$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2)\,\mathbf{B} = 0$$

这表明 Maxwell 方程组背后的规律仍然是波动方程，也即电磁场的底层规律是波!

在这之前，Riemann 曾经研究过热传导，在解决非均匀介质的热传导问题中，Riemann 遇到了障碍，即他之后提出的曲率的概念。

100 年后，Einstein 希望将引力纳入狭义相对论，并要求满足一些好的性质 (Lorenz 协变性等等)，他和 Hilbert 写下的 Hilbert-Einstein 方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

利用一些黎曼几何的结论我们推导出

$$\Box_g R_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = 0$$

这就说明引力波是波。

下面解释什么是达朗贝尔算子 $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$ 当它作用于标量场时，

$$\Box\phi = (\phi^{;\mu})_{;\mu} = (g^{\mu\nu}\phi_{;\nu})_{;\mu} = (g^{\mu\nu}\phi_{,\nu})_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

在三维欧氏空间中，$\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2 \qquad \text{(cylindrical coordinates)}$$

3.3　等熵可压缩 Eular 方程和一维守恒律

Riemann 研究这个问题的时候提出了 Riemann 问题，管内气体扩散的问题，他给出了四个解，并定义了什么是激波和稀疏波。在一维的情况下，

这些解都很容易给出，在高维就不那么容易。困难的地方在于高维的几何和低维并不相同，稀疏波沿面传播。但我们仍然能做一些计算。通过类比光锥得到“声锥”，在这上面定义新的度量得到和广义相对论类似的规律。

不同的波的背后都是不同的几何——于品老师如是说。

第四章　无处不在的双曲性

报告人：薛金鑫老师

4.1　引子

在微分方程里，如果我们考察以下的微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

上述两个微分方程的相图为圆和双曲，其稳定性分别为压缩和扩张。这种反对称的特性蕴含了双曲性。

4.2　Arnold cat's map

指的是

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

行列式为 1，trace=3，特征值为 $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, 即 $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ 给出的两个特征向量在环面 (torus) 上正交，分别与之平行的向量产生叶状结构。

4.3 遍历 (Ergodicity)

如果 f 是遍历的，则 $vol(S\Delta f^{-1}(S)) = 0$, 且 $vol(S) = 0$ 或 $vol(S) = vol(M)$, 其中 $S \subset M$ 均为流形。

直观来讲就是 S 在 f 下的像必须和 S 有不重叠的部分。

定义了什么是遍历性，我们有以下定理

定理 4.3.1.
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\circ f^k(x) \Longleftarrow \frac{1}{vol(M)}\int\phi(x)dVol$$

即“时间平均”等于“空间平均”。ϕ 为观测量。这定理类似于大数定律 (Law of Large Number), 用于描述一个**确定性**系统。

由此，一个多次迭代的系统是没办法预测的，这也就是三体问题的困难之处。

现在，我们知道什么是 hyperbolic 了，即扩张性，能将系统的误差放大。

4.4 Riemann 几何里的双曲性

这里体现在 Riemann 对曲率的研究。黎曼对曲面按曲率分了类，曲率为 0 即环 (抛物)，为 1 即球 (椭圆)，为-1 即其他 (双曲)。

4.4.1 Jacobi 方程

$$x^{''} + Kx = 0, \quad K = 0, 1, -1$$

对应的解也能显示出双曲的特性。

4.5 Dehn Twist

4.5.1 想法

Dehn Twist 是二维流形上的自同构, 主要是在二维的可定向带边流形上。

4.5.2 例子

第五章　微分几何和代数几何的对应

报告人：杨晓奎

我印象最深刻的是 Kodaira-Grothendieck-Serre 消灭定理和复分析中 Liouville 定理的关联。

老师介绍了用 Riemann 曲率对流形分类 (或者从亏格的角度)，也即

- $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ curvature=1
- torus curvature=0
- Poincare disk curvature=-1 (hyperbolicity)

而从高曲率打到低曲率的全纯映射是不存在的，反之是存在的。考察 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 即可知道不存在。这蕴含了如下深刻的原理

定理 5.0.1. *The statement of Kunihiko Kodaira's result is that if M is a compact Kähler manifold of complex dimension n, L any holomorphic line bundle on M that is positive, and KM is the canonical line bundle, then*

$$H^q(M, K_M \otimes L) = 0$$

从欧式空间中的 Gauss 曲率推广到复流形上的 Riemann 曲率，我们发现了复结构和 Hermitian。保近复结构的 Riemann 度量被称为 Hermitian

度量。而与复结构和流形上的度量都相容的联络是唯一的，被称为 Chern-connection, 这对应于实情形下的 Levi-Civita 联络，但是要满足其 $d\omega_g = 0$ 即二形式是闭的。

第六章　算子理论

报告人：刘正伟

原谅我并没有听得太懂。刘老师先从 Von-Neumann 代数讲起

他给出了如下的表示

$$Xf(x) = xf(t)$$
$$pf(x) = i\hbar\frac{df(x)}{dx}$$

这里 $f(x)$ 表示一种概率分布，我们观察到

$$[X, P] = (XP - PX)f = i\hbar Id$$

其本质是波函数和量子化效应

Hamilton

Hamilton 量

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

求导之后恰好就是上面所说的两个表示

假如算子 X, P 均为有限维，那么

$$0 = tr(XP - PX) = tr(i\hbar I) \neq 0$$

这给出 X, P 是无限维算子，且为非对易关系

这启发人们研究无限维的 Hilbert 空间

对于

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

我们可以推广为如下两种形式，即

$$\begin{bmatrix} a & b & \times & \times \\ c & d & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} a & \times & b & \times \\ \times & a & \times & b \\ c & \times & d & \times \\ \times & c & \times & d \end{bmatrix}$$

6.1 Renormalization: mathematics and Geometry

报告人: 李思

6.1.1 Background

辐射的量子场和狄拉克场；Bethe, Tomonaga, Feynman, Schwinger and Dyson. Find covariant and gauge-invariant theory.

Wilson: 重整化群。

6.1.2 无穷维几何

Quantum field theory deals with $\infty - dimensionalgeometry$

$\epsilon = C^{\infty}X$，$\epsilon = \{connectiononV \to X\}$，sigma model:$\epsilon = Map(\sum, X)$ 都是无穷维的空间。

Feymann Path Integral

$$\langle O \rangle = \int_{\epsilon} Oe^{iS/h}$$

最大的困难是理解无穷维的理论。

积分通常通过微分方程和对称性去解决。如果考虑无穷维的 Gauss Integral

$$\int_{\epsilon} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}A(x)+I(x)} \sim \frac{1}{\sqrt{detA}} \cdot exp(\sum_{\Gamma}) \frac{W_{\Gamma}}{|Aut(\Gamma)|}$$

其中 W_{Γ} 是 $I(x)$ 对应的 Feymann 图的路径?

推广到其它的 ϵ 有

$$\int_{C^{\infty}} [D\phi] e^{\frac{1}{\hbar}S[\phi]}, \quad S[\phi] = \frac{1}{2}\int \phi \Delta \phi + \lambda \int \phi^4$$

要考虑上述积分，类比 Gauss Integral, 找到 Laplace 算子的逆，即 Green 函数。这里 Green 函数的积分会有奇点, 这一现象称为紫外发散。

总的来说量子场论蕴含了丰富的结构，仅仅考虑零维的 QFT 就是我们学过的有限维微积分，更高维的 QFT 则蕴含了更丰富的结构。

dim=2 则产生了顶点算子代数，

除此之外还有 Chern-Simons