清华大学本科生考试试题专用纸

期末考试课程　概率论与数理统计（A卷）　2023年1月3日

学号：＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿＿

一.填空题（30分，每空3分）

1. 设随机事件 A、B 独立，$P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$,则$P(B)=(\quad)$。

2. 随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，则 $P(1<X<2)=(\quad)$。

3. 随机变量 X 的分布列：$P(X=k)=2a\cdot 0.8^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$。则常数 $a=(\quad)$。

4. 设 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(-1,2^2)$，若 $P(X>3)=P\left(Y\le\dfrac{a}{3}\right)$，则 $a=(\quad)$。

5. 已知随机变量 $X\sim U(0,2)$，则 $E(\min\{X,1\})=(\quad)$。

6. 随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其中 $\mu_1=-3$，$\mu_2=0$，$\sigma_1^2=9$，$\sigma_2^2=4$，$\rho=0.5$，$Z=X+\dfrac{Y}{2}$，则 $D(Z)=(\quad)$。

7. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自二项分布总体 $X\sim B\left(100,\dfrac{1}{5}\right)$ 的样本，若 $n=8$，则 $E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=(\quad)$。

8. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,2^2)$ 的样本，若使 $P\left(\left|\bar{X}-\mu\right|<\dfrac{1}{2}\right)\ge 0.98$ 成立，则样本容量 n 至少要达到（　　）。

9. 设 X 和 Y 相互独立，均服从参数为1的Poisson分布，则 $P(X=1\,|\,X+Y=4)=$（　　）。

10. 设 $T\sim t(n)$，则 $\dfrac{1}{T^2}\sim$（　　）（需写出分布类型与参数）。

二. （12分）某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占总产量的60%，30%和10%。各车间的次品率分别是3%，5%，7%。试求

（1）在该厂产品中任取一件，恰为次品的概率；

（2）若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率？

（3）若该厂检验员从厂里生产的大量产品中独立重复地取了100件进行检验，这100件中恰好有3件次品的概率约等于多少？

三.（18 分）二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x, & 0\le x,y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，

（1）求X,Y的边缘密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并验证随机变量X,Y相互独立；

（2）计算$P(X\le 1|X+Y\le 2)$；

（3）令$U=X+Y$，$V=X-Y$，计算U,V的相关系数$r_{U,V}$；

（4）求(U,V)的联合密度函数$f_{U,V}(u,v)$。

四.（12 分）设$X_1,\ldots,X_n$为来自均匀分布总体$U[\theta,4]$的样本，

（1）当$n=5$时，样本观测值为 1, 4, 3, 1, 1, 求样本均值与样本方差的观测值；

（2）求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$和最大似然估计量$\hat{\theta}_2$；

（3）试问$\hat{\theta}_2$是否为θ相合估计？为什么？

五.（14 分）设随机变量X服从指数分布，$F(x)$为其分布函数，若已知$F(\frac{\ln 2}{2})=\frac{1}{2}$，

（1）试求$P(X-EX>\sqrt{DX})$；

（2）设$P(\eta=1)=\frac{2}{3}, P(\eta=2)=\frac{1}{3}$，且$\eta$与$X$独立，求$P(\eta X>2)$；

（3）若随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且均与X同分布，令$\hat{X}_N=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_N\}$，其中$N$是取正整数值的随机变量满足$E(\frac{1}{N})<+\infty$，且与所有的$X_i$独立，试证明$E(\hat{X}_N)=\frac{1}{2}E(\frac{1}{N})$。

六.（14 分）设样本$X_1,\ldots,X_n$为取自总体$X\sim N(\mu,1)$，$\bar{X},S^2$分别为其样本均值与样本方差，

（1） 求$E((\bar{X})^2S^2)$；

（2） 若$n=100$，考虑假设检验问题$H_0:\mu=0$，$H_1:\mu>0$，若取拒绝域为

$W=\{(x_1,\cdots,x_n):\bar{x}\ge 0.2\}$，试求该检验法的势函数以及犯第一类错误的概率；

（3） 试问$(\bar{X})^2-\frac{1}{n}$是否为μ^2的无偏估计？是否为μ^2的有效估计？为什么？

参考信息：标准正态分布的分布函数值

$\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.28)=0.9$, $\Phi(1.44)=0.925$, $\Phi(1.65)=0.95$,
$\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.98$, $\Phi(2.33)=0.99$, $\Phi(3)=0.999$