2021 秋《抽象代数》期中考试参考答案

1(1) 错误。比如 $G=S_4$, $K=\langle(123)\rangle$, $H=\langle(34)\rangle$.

1(2) 正确。容易。

1(3) 错误。当 $H=\langle(\bar{2},\bar{1})\rangle$ 时，$G/H\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

1(4) 正确。$G\rtimes_\varphi G\to G\times G$, $(x,y)\mapsto(xy,y)$ 是群同构。[不在今年考试范围]

2. 记 $M=\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 则 $\mathrm{Aut}(M)$ 与集合 $S=\{(a,b):a,b\in M,\mathrm{ord}(a)=8,\mathrm{ord}(b)=2,b\neq 4a\}$ 一一对应。找出 M 的全部 8 阶元和 2 阶元再罗列所有的可能即可。答案：$|\mathrm{Aut}(M)|=|S|=16$. [不在今年考试范围]

3(1) 用类方程，略。

3(2) 对 m 用归纳法。由 (1) 知 $Z(G)\neq 1$，故 $Z(G)$ 有 p 阶元 a. 令 $N=\langle a\rangle$，则 $N\lhd G$ 且 $|G/N|=p^{m-1}$. 由归纳假设知 G/N 有 p^{k-1} 阶正规子群 K，那么 K 在 G 中的原像是 G 的 p^k 阶正规子群。

4. 用 Burnside 引理，共有 $\frac{n^4+11n^2}{12}$ 个染色方案。[不在今年考试范围]

5(1) 若 $|G|$ 有两个素因子 p,q，则由 Sylow 第一定理知 G 有 p 阶元 a，也有 q 阶元 b. 由题设知道存在 G 的自同构 σ 使得 $\sigma(a)=b$，这与群同构保元素的阶矛盾，所以 $|G|$ 仅含一个素因子。

(2) 由题 3(1) 知道 $Z(G)\neq 1$. 任取 $a\in Z(G)$, $a\neq 1$，再任取 $b\in G$, $b\neq 1$，则存在 G 的自同构 σ 使 $\sigma(a)=b$. 因为群同构把中心映到中心，所以 $b\in Z(G)$. 这说明 G 是 Abel 群。

(3) 在 (1)(2) 的基础上运用有限 Abel 群的结构定理，只需证明 G 没有 p^i-阶元 $(i\geqslant 2)$. 首先 G 必含 p-阶元 a. 其次对任意 $b\in G$, $b\neq 1$，存在 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$ 使 $\sigma(a)=b$. 因此 G 的任一非幺元 b 都是 p-阶元。[不在今年考试范围]

6. 因 $N \lhd G$，故 G 在 N 上的共轭作用诱导群同态 $f: G \to \mathrm{Aut}(N)$. 已知 $N \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, 故 $\mathrm{Aut}(N) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} \cong C_4$, 实际上只需用到 $|\mathrm{Aut}(N)| = \varphi(5) = 4$. 从奇数阶群 G 到 4 阶群 $\mathrm{Aut}(N)$ 的群同态只有平凡同态，故 f 平凡，也就是 $N \subseteq Z(G)$.

7. 考虑 H 在 $X = G/H$ 上的左乘作用。因 H 是 p-群，故 $|X| \equiv |X^H| \mod p$，这里 X^H 表示 X 的 H-不动点集。设 $[aH] \in X$，则 $[aH]$ 是 H 作用下的不动点当且仅当 $H \subseteq aHa^{-1} = \mathrm{Stab}_G([aH])$. 又因 H 是有限群，故而 $H \subseteq aHa^{-1} \Leftrightarrow H = aHa^{-1} \Leftrightarrow a \in N_G(H)$，所以 $X^H = \{[aH] : a \in N_G(H)\} = N_G(H)/H$. 最后用 $|X| = |G/H| = [G:H]$, $|X^H| = |N_G(H)/H| = [N_G(H):H]$ 即可。

解法二：分两种情况讨论：H 是 Sylow p-子群的情形和 H 不是 Sylow p-子群的情形。第一种情形用 Sylow 第三定理 $n_p \equiv 1 \mod p$ 即可。第二种情形使用作业题的结论：p-群有 normalizer grow principle，即 p-群的真子群真包含在它的正规化子中。具体方法是取 G 的一个 Sylow p-子群 P 使 $H \lneq P$，于是就有 $H \lneq N_P(H)$，从而 $p \mid [N_P(H):H]$. 又因 $N_P(H) = N_G(H) \cap P \leqslant N_G(H)$，故 $[N_G(H):H] = [N_G(H):N_P(H)][N_P(H):H]$，从而由 $p \mid [N_P(H):H]$ 推知 $p \mid [N_G(H):H]$. 这说明 $[N_G(H):H]$ 和 $[G:H]$ 都被 p 整除，所以它们模 p 同余。

8. (1) 首先 P 是 p-群，故由 Lagrange 定理知道 P 的子群 $P \cap N$ 也是 p-群，故而 $P \cap N$ 是 N 的 p-子群。为了证明 $P \cap N$ 是 N 的 Sylow p-子群，还需说明 $p \nmid \frac{|N|}{|P \cap N|}$. 首先 $\frac{|N|}{|P \cap N|} = \frac{|PN|}{|P|}$. 其次由 N 正规知 PN 是 G 的子群，故 $\frac{|PN|}{|P|} = [PN:P]$ 且 $[G:P] = [G:PN][PN:P]$. 最后由 P 是 G 的 Sylow p-子群知 $p \nmid [G:P]$，故 $p \nmid [PN:P] = \frac{|PN|}{|P|} = \frac{|N|}{|P \cap N|}$.

(2) N 的 Sylow p-子群 Q 当然是 G 的 p-子群，故由 Sylow 第二定理知道存在 G 的 Sylow p-子群 P 使 $Q \subseteq P$，于是 $Q \subseteq P \cap N$. 因为 $P \cap N$ 既是 p-群 P 的子群，又是 N 的子群，所以 $P \cap N$ 是 N 的 p-子群。可是 Q 已是 N 的 Sylow p-子群，所以从 $Q \subseteq P \cap N$ 推出 $Q = P \cap N$.

(3) 不成立。如果 N 是 G 的 p-子群，那么 N 的 Sylow p-子群只有一个就是 N 本身。这时如果 (1) 成立，那么 N 含在 G 的任一 Sylow p-子群 P 内，所以找一个不满足此条件的 p-子群即可。比如 $G = S_3$, $p = 2$, $N = \langle (12) \rangle$, $P = \langle (13) \rangle$.

(4) 成立。因为 (2) 的证明不依赖于 N 是正规子群，只要是子群就可以。