《抽象代数》期中考试

2021 年 11 月 6 日 9:00-12:00

声明：题的顺序与难易程度无关，请合理分配考试时间。

题 1 (20 分). 判断以下命题是否正确。若正确则证明之，否则请举一个反例。

(1) 设 K, H 是群 G 的有限子群且 $|K|$ 与 $|H|$ 互素，则 KH 是 G 的子群。

(2) 设 G 是有限群，$N \lhd G$, $a \in G$, $\bar{a}$ 表示 a 在商群 G/N 中的像且 $\bar{a}$ 的阶等于 k，则

$$\mathrm{ord}(a) = k\,\mathrm{ord}(a^k).$$

(3) 设 $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$H$ 是 G 的子群且 $H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，则 $G/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 这里 $\cong$ 表示群同构。

(4) 设 G 是群，则 $G \rtimes_\varphi G \cong G \times G$，其中 $G \rtimes_\varphi G$ 是由群同态

$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G); \quad a \mapsto (\varphi_a : x \mapsto axa^{-1})$$

给出的半直积。

题 2 (10 分). 计算 $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|$. 请写明计算过程。

题 3 (10 分). 设 G 是一个 p-群，即 $|G| = p^m$, $m \geqslant 1$，p 是素数，证明:

(1) $Z(G) \neq 1$.

(2) 对任意 $1 \leqslant k \leqslant m$，$G$ 必有 p^k 阶**正规**子群。

题 4 (10 分). 给一个正四面体的 4 个面染色，每面可以染 n 种颜色中的一种。旋转正四面体得到的染色方案彼此等价。求共有几种染色方案的等价类。

未经许可，不得转载

题 5 (15 分)**.** 设 G 是一有限群，$G \neq 1$ 且对任意 $a, b \in G$, $a \neq 1$, $b \neq 1$，存在 G 的自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 使 $\sigma(a) = b$. 证明：

(1) G 是 p-群，其中 p 是素数。

(2) G 是 Abel 群。

(3) G 同构于有限个 p 阶循环群的直和。

题 6 (10 分)**.** 设 G 是一奇数阶群，N 是 G 的 5 阶**正规**循环子群。证明：N 必含在 G 的中心内。

题 7 (10 分)**.** 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的一素因子，H 是 G 的任一 p-子群，证明：

$$[G:H] \equiv [N_G(H):H] \mod p.$$

题 8 (15 分)**.** 设 G 是有限群，$N \lhd G$，

(1) 证明：若 P 是 G 的 Sylow p-子群，则 $P \cap N$ 是 N 的 Sylow p-子群。

(2) 证明：若 Q 是 N 的 Sylow p-子群，则存在 G 的 Sylow p-子群 P 使 $Q = P \cap N$.

(3) 如果 H 仅是 G 的子群（不正规），那么 (1) 的结论是否成立，即 G 的 Sylow p-子群与 H 的交是否总是 H 的 Sylow p-子群？若成立则证明，否则举一个反例。

(4) 如果 H 仅是 G 的子群（不正规），那么 (2) 的结论是否成立，即 H 的 Sylow p-子群是否必是 G 的某 Sylow p-子群与 H 的交？若成立则证明，否则举一个反例。

注意：若 $p \nmid |G|$，则默认 G 的 *Sylow* p-子群是 1.

未经许可，不得转载