第一章 静电场 自测题 解答

1. 什么是静电感应现象？答：导体在电场作用下，其内的自由电荷移动；在静电场中电荷移动到导体表面上，结果是使得导体内的电场强度等于零的现象。
2. 什么是介质的极化现象？答：介质在电场作用下，其内的分子或原子的等效电偶极子有向排列，从而使介质对外呈现场源的特性。极化效果是减小介质区域处的外电场。
3. 什么时候需要计算部分电容？答：当系统中有多于两个导体或电极，且从多于两个导体上引出端子与外电路连接，则导体系统构成一个电容网络，网络中的电容是部分电容。
4. 在二维场中，若将一根电力线作为场域的边界，问电位的边界条件为何？为什么？
   答：是电位的齐次二类边界，即电位的法向导数为零。因为电力线上的电场强度法向为零，而电位的法向导数就等于电场强度的法向。
5. 证明在线性均匀介质中电位满足泊松方程。

证：∵ $\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} + (\nabla\varepsilon)\cdot\vec{E}$ (1)

而均匀媒质中有 $\nabla\varepsilon = 0$，代入(1)式有：

$\nabla\cdot\vec{D} = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} = -\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi$，又∵ $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$

∴ $-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi = \rho$，即 $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$，此即为线性均匀介质中电位所满足的泊松方程.

6. 证明电场力的方向是使得电容增加的趋势。

对两导体构成的电容系统，电场能量为 $W_e = \frac{1}{2}q\varphi_1 - \frac{1}{2}q\varphi_2 = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C}$

①当系统无外电源供给时：

∵ $-dW_e = f\,dg$ ∴ $f = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{q_k=const} = -\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{q^2}{2C}\right)\Big|_{q_k=const} = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{C}\right)$

$= \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial g}$

∴此时电场力的方向使电容增加.

②当系统接有外电压源时：

$dW = dW_e + f\cdot dg$ ∵ $dW = 2dW_e$ ∴ $dW_e = f\,dg$

∴ $f = \frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{\varphi_k=const} = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{2}CU^2\right)\Big|_{\varphi_k=const} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g}$.

∴此时电场力的方向也使电容增加.

综上，无论是否接外源，电场力的方向始终是使得电容增加的趋势.

7. 一同轴电缆，芯线半径为 R_1，外皮内半径为 R_2，其间加有电压 U（外皮电位为零），其间介质的介电常数为ε，（1）给出芯线与外皮之间的绝缘区域的电位的边值问题，（2）通过解该边值问题得到电位函数，（3）通过电位求电场强度，（4）问芯线表面的电荷面密度为何？（5）电缆单位长度的电容为何？

(1) 边值问题：

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \quad ①$$

边界条件：$\varphi|_{r=R_1}=U \quad ②$

$\varphi|_{r=R_2}=0 \quad ③$

(2) 求解：对①式积两次分，得通解 $\varphi=C_1\ln r+C_2 \quad ④$

将②③代入④有：$\begin{cases} C_1\ln R_1+C_2=U \\ C_1\ln R_2+C_2=0 \end{cases}$

解得：$C_1=\frac{U}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$，$C_2=-\frac{U\ln R_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$

代回④有：$\varphi(r)=\frac{U}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ln r-\frac{U\ln R_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}=\frac{U}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ln\frac{r}{R_2}$

(3) $\vec{E}(r)=-\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e_r}=-\frac{U}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\cdot\frac{1}{\frac{r}{R_2}}\cdot\frac{1}{R_2}\vec{e_r}=-\frac{U}{r\ln\frac{R_1}{R_2}}\vec{e_r}=\frac{U}{r\ln\frac{R_2}{R_1}}\vec{e_r}$

(4) 在芯线表面取小圆柱，由高斯通量定理有：

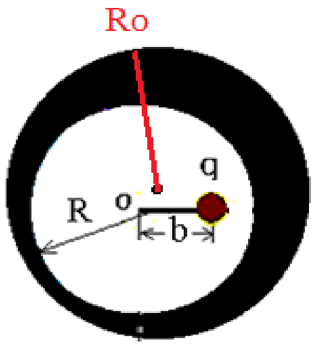
$\vec{D}\cdot d\vec{S}=\rho_s dS$ ∴ $\varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{S}=\rho_s dS$ ∴ $\varepsilon E dS=\rho_s dS$

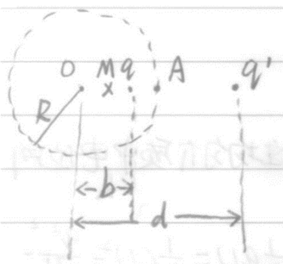
∴ $\rho_s=\varepsilon E|_{r=R_1}=\frac{\varepsilon U}{R_1\ln\frac{R_2}{R_1}}$

(5) 单位长电缆芯线上电荷为 $Q_0=\rho_s\cdot 2\pi R_1\cdot 1=\frac{2\pi\varepsilon U}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

∴ 单位长电缆电容为 $C_0=\frac{Q_0}{U}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

8. 如下图，非同心球面构成的导体壳（黑色部分），未接地，内壳半径为 *R*，外壳半径为 R_0，两球心距离为 *D*，内部空气区域中有一点电荷 *q*，其距内球壳球心的距离为 *b*。求内球壳球心 O 与电荷点连线的中点上的电场强度与电位。





相对于内球壳设镜象电荷 $q'=-\frac{R}{b}q$，其距内球壳球心 $d=\frac{R^2}{b}$

设 X 轴方向水平向右.

(1) 利用两点电荷的场强叠加得：

$$\vec{E_M}=\vec{E}+\vec{E'}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{b}{2})^2}(-\vec{i})+\frac{(-q')}{4\pi\varepsilon_0(d-\frac{b}{2})^2}(-\vec{i})$$

$$=\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{b}{2})^2}+\frac{\frac{R}{b}q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{R^2}{b}-\frac{b}{2})^2}\right](-\vec{i})$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(\frac{b}{2})^2}+\frac{\frac{R}{b}}{(\frac{R^2}{b}-\frac{b}{2})^2}\right](-\vec{i})$$

(2) ①若设球壳上某点A为电位参考点，则M点电位为q和q'分别在M点的电位贡献相叠加. 因各点电荷在M点的电位贡献数值上等于各点电荷单独作用时，M点与参考点之间的电势差，即：

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{b}{2})}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R-b)},\quad \varphi'=\frac{-\frac{R}{b}q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{R^2}{b}-\frac{b}{2})}-\frac{-\frac{R}{b}q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{R^2}{b}-R)}$$

$$\therefore \varphi_M=\varphi+\varphi'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{b}{2})}-\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R-b)}}-\frac{\frac{R}{b}q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{R^2}{b}-\frac{b}{2})}+\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R-b)}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{b}{2})}-\frac{\frac{R}{b}q}{4\pi\varepsilon_0(\frac{R^2}{b}-\frac{b}{2})}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{b}{2}}-\frac{1}{R-\frac{b^2}{2R}}\right)$$

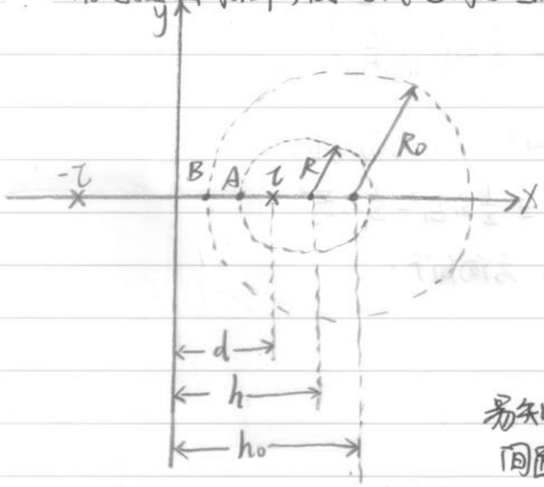
②若设无穷远处为电位参考点，则此时M点电位不再以球壳上某点电位为基准，而加上球壳以无穷远处为电位参考点时的电位，且此电位可看作求q点电荷位于外球壳球心时外球壳上的电位φ_{R_0}，$\varphi_{R_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_0}$.

因此，此时M点电位为 $\varphi_M=\varphi+\varphi'+\varphi_{R_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{b}{2}}-\frac{1}{R-\frac{b^2}{2R}}+\frac{1}{R_0}\right)$

注：也可用场强积分求解验算.

9. 对于偏心电缆，截面也为上图，电缆芯线表面半径为 R，外皮内表面的半径为 R_0，芯线与外皮间加有电压 U（外皮为零电位），电缆的绝缘介质为六氟化硫气体（图中黑色区域，介电常数为ε），求电缆中的最大电场强度。

用电轴法求解，设两线电荷如图所示，$x=h_1$为芯线轴心，$x=h_2$为外皮轴心.



有：
$$\begin{cases} d^2=h^2-R^2 \\ d^2=h_0^2-R_0^2 \\ D=h_0-h \end{cases}$$

解出：
$$\begin{cases} h=\dfrac{R_0^2-R^2-D^2}{2D} \\ h_0=\dfrac{R_0^2-R^2+D^2}{2D} \\ d=\dfrac{\sqrt{(R_0^2-R^2+D^2)^2-4D^2R_0^2}}{2D} \end{cases} \quad (1)$$

易知场强最大的点为曲率半径较小的芯线上与外皮间距最小处，即为图中A点.

τ距A点 $r_1=R-(h-d)=d-(h-R)$

$-\tau$距A点 $r_2=d+(h-R)$ (2)

τ距B点 $r_3=R_0-(h_0-d)=d-(h_0-R_0)$

$-\tau$距B点 $r_4=d+(h_0-R_0)$

将(1)式代入(2)，r_1,r_2,r_3,r_4均已知.

则A点电位 $\varphi_A=U=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\ln\frac{r_4}{r_3}\right)$，因此有 $\tau=\frac{2\pi\varepsilon U}{\ln\frac{r_2r_3}{r_1r_4}}$ (3)

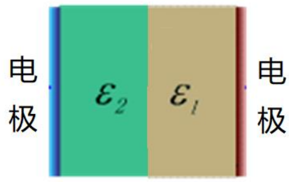
∵ A点场强 $\vec{E}_A = -\left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r_1}+\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r_2}\right)\vec{i}$

$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\vec{i}$$

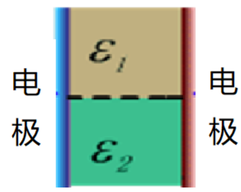
$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{d-(h-R)}+\frac{1}{d+(h-R)}\right)\vec{i}$$，代入(3)

$$\vec{E}_A = -\frac{U}{\ln\left[\frac{d+(h-R)}{d-(h-R)}\cdot\frac{d-(h_0-R_0)}{d+(h_0-R_0)}\right]}\cdot\frac{2d}{d^2-(h-R)^2}\vec{i}$$

10. 对下面两种平行板电容器，极板面积为 S，两极板内表面的间距为 d，两种介质各占空间的一半，（1）计算电容器的电容，（2）如果极板间加电压 U，问介质交界面单位面积所受的电场力。（忽略端部效应）

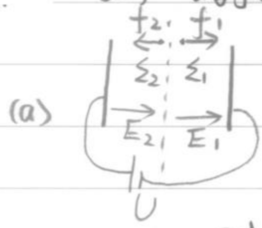


（a）



（b）

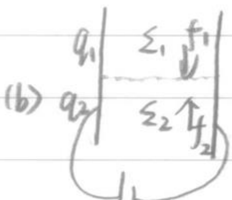
(1) 对于(a)：有 $\begin{cases} E_1\frac{d}{2}+E_2\frac{d}{2}=U \\ \varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2 \end{cases}$ 解方程得 $\begin{cases} E_1=\frac{2\varepsilon_2U}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \\ E_2=\frac{2\varepsilon_1U}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \end{cases}$



极板电荷为 $Q=\sigma\cdot S=D_n\cdot S=\varepsilon_1E_1S=\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2US}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

$\therefore C=\frac{Q}{U}=\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2S}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

对于(b)：有 $E_1d=E_2d=U$ $\therefore E_1=E_2=\frac{U}{d}$



$$q_1=\sigma_1\cdot\frac{S}{2}=D_1\cdot\frac{S}{2}=\varepsilon_1E_1\cdot\frac{S}{2}=\frac{\varepsilon_1US}{2d}$$

$$q_2=\sigma_2\cdot\frac{S}{2}=D_2\cdot\frac{S}{2}=\varepsilon_2E_2\cdot\frac{S}{2}=\frac{\varepsilon_2US}{2d}$$

$\therefore Q=q_1+q_2$ $\therefore C=\frac{Q}{U}=\frac{S}{2d}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$

注：也可用电容~~串并~~联求解.

(2) 对于(a)：$f=f_1-f_2=\frac{1}{2}D_1E_1-\frac{1}{2}D_2E_2=\frac{1}{2}\varepsilon_1E_1^2-\frac{1}{2}\varepsilon_2E_2^2$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{2\varepsilon_2U}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right)^2-\frac{1}{2}\varepsilon_2\left(\frac{2\varepsilon_1U}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right)^2$$

$$=\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2U^2}{d^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$$，方向向右.

对于(b)：$f=f_1-f_2=\frac{1}{2}D_1E_1-\frac{1}{2}D_2E_2=\frac{1}{2}\varepsilon_1E_1^2-\frac{1}{2}\varepsilon_2E_2^2$

$$=\frac{U^2}{2d^2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$，方向向下.